

**T.C.  
AYDIN ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI  
2019-YL-118**

**HİLBERT CEBİRLERİ ÜZERİNDE  
BAZI ÖZEL YAPILAR**

**Hatice ŞİMŞEK**

**Tez Danışmanı:  
Doç. Dr. Hülya İNCEBOZ**

**AYDIN**



**T.C.**  
**AYDIN ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE**  
**AYDIN**

Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Programı öğrencisi Hatice ŞİMŞEK tarafından hazırlanan "Hilbert Cebirleri Üzerinde Bazı Özel Yapılar" başlıklı tez, 13.09.2019 tarihinde yapılan savunma sonucunda aşağıda isimleri bulunan jüri üyelerince kabul edilmiştir.

|        | Ünvanı, Adı Soyadı            | Kurumu           | İmzası |
|--------|-------------------------------|------------------|--------|
| Başkan | : Doç. Dr. Tahsin ÖNER        | EÜ Fen Fak.      |        |
| Üye    | : Doç. Dr. Hülya İNCEBOZ      | ADÜ Fen-Ed. Fak. |        |
| Üye    | : Dr. Öğr. Üyesi Berna ARSLAN | ADÜ Fen-Ed. Fak. |        |

Jüri üyeleri tarafından kabul edilen bu Yüksek Lisans tezi, Enstitü Yönetim Kurulunun ..... sayılı kararıyla ..... tarihinde onaylanmıştır.

Prof. Dr. Gönül AYDIN  
Enstitü Müdürü



**T.C.**  
**AYDIN ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE**  
**AYDIN**

Bu tezde sunulan tüm bilgi ve sonuçların, bilimsel yöntemlerle yürütülen gerçek deney ve gözlemler çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, çalışmada bana ait olmayan tüm veri, düşünce, sonuç ve bilgilere bilimsel etik kuralların gereği olarak eksiksiz şekilde uygun atıf yaptığımı ve kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

13.09.2019

Hatice ŞİMŞEK



# ÖZET

## HİLBERT CEBİRLERİ ÜZERİNDE BAZI ÖZEL YAPILAR

Hatice ŞİMŞEK

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı  
Tez Danışmanı: Doç. Dr. Hülya İNCEBOZ  
2019, 45 sayfa

Bu tezde, Hilbert cebirleri ile cebirsel lojik arasındaki bağlantıyı inceleyen başlıca çalışmalarda elde edilen bazı özelliklere yer verilmiştir.

Bu çalışma temel olarak üç bölümden oluşmaktadır.

İlk bölümde, tez konusu tanıtılmış ve bu konu ile ilgili yapılmış olan çalışmalar hakkında kısa bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde, bu tezi anlamada kolaylık sağlayacak bazı temel tanımlara ve özelliklere değinilmiştir.

Üçüncü bölümde, Hilbert cebirleri üzerinde bazı özel yapılar tanıtılıp, bir  $H$  Hilbert cebirinin hangi koşullar altında değişmeli olduğunu ifade eden teoremlere yer verilmiştir. Bununla birlikte, sınırlı olmayan değişmeli bir  $A$  Hilbert cebirinin bir  $\vee$ -kapalı sisteme göre kesirlerinin kümesinin bir değişmeli Hilbert cebiri oluşturduğu kanıtlanmıştır. Son olarak, değişmeli Hilbert cebirleri üzerindeki çarpanlar tanıtılmış ve bu konuyla ilgili önemli sonuçlar sunulmuştur.

**Anahtar Sözcükler:** Hilbert Cebir, Cebirsel Lojik.



## ABSTRACT

### SOME SPECIAL STRUCTURES ON HILBERT ALGEBRAS

Hatice ŞİMŞEK

M.Sc. Thesis, Department of Mathematics  
Supervisor: Doç. Dr. Hülya İNCEBOZ  
2019, 45 pages

In this thesis, some properties obtained in the main works investigating the connection between Hilbert algebras and algebraic logic are given.

This thesis basically consists of three chapters.

In the first chapter, the subject of the thesis is introduced and short information about works which are related with this subject is shortly given.

In the second chapter, some basic definitions and properties are mentioned to make easy understanding of the thesis.

In the third chapter, some special structures on Hilbert algebras are introduced and the theorems which are expressed an  $H$  Hilbert algebra under which conditions is commutative are given. Furthermore, it has been proved that a set of fractions of an unbounded commutative  $A$  Hilbert algebra with a  $\vee$ -closed system constitutes a commutative Hilbert algebra. Finally, the multipliers on commutative Hilbert algebras are introduced and important results are presented.

**Key Words:** Hilbert Algebra, Algebraic Logic.



## ÖNSÖZ

Bu çalışma boyunca, değerli bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım, bana her zaman her konuda yardımcı olan sayın hocam Doç.Dr. Hülya İnceboz'a; tezin yazımında ve biçimlendirilmesinde emeği geçen değerli hocalarım Araş. Gör. Seçkin Günsen ve Tuğçe Katıcan'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Tüm yaşamım boyunca desteklerini yanımda hissettiğim sevgili aileme ve arkadaşlarıma, göstermiş oldukları sabır ve anlayış için yürekten teşekkür ederim.

Hatice ŞİMŞEK



## İÇİNDEKİLER

|  |     |
|--|-----|
| KABUL VE ONAY SAYFASI . . . . .  | iii |
| BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI . . . . .   | v   |
| ÖZET . . . . .   | vii |
| ABSTRACT . . . . .   | ix  |
| ÖNSÖZ . . . . .  | xi  |
| 1. GİRİŞ . . . . .   | 1   |
| 2. TEMEL KAVRAMLAR . . . . .   | 2   |
| 2.1. Önergeler . . . . .   | 2   |
| 2.2. Bağlılar . . . . .  | 9   |
| 2.3. Operatörler . . . . .   | 13  |
| 2.4. Kafesler . . . . .  | 14  |
| 2.5. Boole Cebirleri . . . . .   | 16  |
| 3. HİLBERT CEBİRLERİ ÜZERİNDE BAZI ÖZEL YAPILAR . . . . .                          | 18  |
| 3.1. Hilbert Cebirleri . . . . .   | 18  |
| 3.2. Değişmeli Hilbert Cebiri . . . . .  | 24  |
| 3.3. Tümdengelim Sistemi ve Özellikleri . . . . .                                  | 29  |
| 3.4. Bir $\vee$ -Kapalı Sisteme Göre Kesirlerin Değişmeli Hilbert Cebiri . . . . . | 32  |
| 3.5. Değişmeli Hilbert Cebiri Üzerindeki Çarpanlar . . . . .                       | 35  |
| KAYNAKLAR . . . . .  | 43  |
| ÖZGEÇMİŞ . . . . .   | 45  |



## 1. GİRİŞ

Hilbert cebirleri, sezgisel lojik ve klasik olmayan lojikteki bazı araştırmalar için önemli yapılarıdır. Cebirsel lojikte Hilbert cebiri kavramı ilk kez 'implicative model' adı altında, L. Henkin ve J. Skolem tarafından verildi. Bu nedenle, Hilbert cebirler zaman zaman implicative cebirler olarak da isimlendirilirler.

1966 yılında Diego [7], Hilbert cebirlerine ve deductive sistemlere ait bazı özellikler ile Hilbert cebirlerin bir topolojik temsilini verdi ve Hilbert cebirlerin yerel sonlu bir variety oluşturduğunu ispatladı. Ayrıca Diego bu çalışmasında her Hilbert cebirin bir topolojik uzayla oluşturulan bir Heyting cebirin implicative kısıtlanışının alt cebirine izomorf olduğunu ve implication cebirlerin aynı zamanda Hilbert cebirler olduğunu ispatladı.

Buşneag ([3] [4], [5]), Hilbert cebirler ve deductive sistemler konusunu geliştirdi. Schmid'in [14] düşüncesinden yola çıkarak bölümlerin Hilbert cebirlerini ve maksimal Hilbert cebirlerini oluşturdu ve bir Hilbert cebiri için kesirlerin maksimal Hilbert cebirinin varlığını ispatladı.

Hilbert cebirlerin cebirsel lojikteki belli başlı özellikleri, Abott [1], Jun [10] ve Balbes [2] tarafından ispatlandı.

Chajda ve Halas [6], Hilbert cebirlerinin ideal tanımını verdiler ve bu idealler ile kongruanslar arasındaki ilişkiyi tanımladılar. Halas [9], değişmeli Hilbert cebirlerin implication cebirler olduğunu gösterdi.

Dudek [8], her idealin bir deductive sistem olduğunu ispatladı.

Son yıllarda, bu konudaki çalışmalar daha çok, Hilbert cebirler ile diğer cebirsel yapılar arasındaki lojikselsel bağlantıyı ve gerektirmeleri içermektedir.

Bu tezin amacı, Hilbert cebir konusu tanıtmak, ilk makaleleri derlemek ve bunları ayrıntılı bir şekilde açmaktır.

## 2. TEMEL KAVRAMLAR

### 2.1. Önermeler

Bu bölümde, tezin okunabilirliğini kolaylaştırmak amacıyla bazı temel kavramlar, tanımlar ve teoremler verilmiştir [12].

**Tanım 2.1.1.** Önerme, doğru ya da yanlış bir hüküm bildiren ama aynı zamanda hem doğru hem de yanlış olmayan tümcedir.

Her önerme bir hüküm, bir bildirim veya bir bilgidir. Bir önerme hem doğru hem de yanlış olamayacağı gibi, biraz doğru biraz yanlış da olamaz.

**Tanım 2.1.2.** Doğruluk değeri, önermenin değeridir. Bu değer, önermenin ulaştığı hükmün doğruluk değeridir; o hüküm ya doğru ya da yanlış olur.

Ya doğru ya da yanlış olmayan bir tümce önerme değildir. Örneğin, soru tümceleri, emir tümceleri bir önerme değildir.

Önermeleri  $P, Q, R, S, \dots$  gibi harflerle; önermelerin doğruluk değerini ise

$$D = 1 (= \text{doğru})$$

$$Y = 1 (= \text{yanlış})$$

simgeleriyle gösterilir.

**Tanım 2.1.3.** Bir tek hüküm içeren önermelere **yalın önermeler** denir.

**Tanım 2.1.4.** İçinde birden çok hüküm olan önermelere **bileşik önermeler** denir.

**Tanım 2.1.5.** Doğruluk değerleri aynı olan önermelere **mantıksal denk önermeler** ya da eşdeğer önermeler denir.

$P$  ile  $Q$  önermelerinin mantıksal denkliği  $P \equiv Q$  ile gösterilir ve " $P$  denk  $Q$ " diye okunur.

**ÖNERMELER CEBİRİ** Sayılar üzerinde aritmetik işlemler yapmaya benzer olarak, önermeler üzerinde işlemler yapılabilir. Tabii, işlemi yapan operatörler farklıdır. Önermeler üzerinde aşağıdaki önermesel bağlaçları tanımlayacağız.

| <i>Simge</i>         | <i>Ad</i>  | <i>Okunuşu</i> |
|----------------------|------------|----------------|
| $\wedge$             | evetleme   | ve             |
| $\vee$               | veyalama   | veya           |
| " $\neg$ ", " $/'$ " | değilleme  | değil          |
| $\Rightarrow$        | gerektirme | ise            |

Önermelere 've, veya, değil, ise' önermesel bağlaçları uygulanarak yeni önermeler oluşturulur. Başka bir deyişle, önermeler kümesi 've, veya, değil, ise' işlemlerine kapalıdır. Bu işlemlerle birlikte, önermeler topluluğu bir matematiksel yapı oluşturur. Buna **önermeler cebiri** ya da **Boole cebiri** diyeceğiz.

**Tanım 2.1.6.**  $P$  ile  $Q$  birer önerme ise,  $P \wedge Q$  bileşik önermesinin doğruluk değeri

$$1 \wedge 1 = 1, 1 \wedge 0 = 0, 0 \wedge 1 = 0, 0 \wedge 0 = 0$$

kurallarıyla tanımlanır; " $P$  ve  $Q$ " diye okunur. Bu kurallar, aşağıdaki simgelerle de gösterilir:

$$D \wedge D = D, D \wedge Y = Y, Y \wedge D = Y, Y \wedge Y = Y.$$

$P$  ile  $Q$  önermeleri,  $P \wedge Q$  bileşik önermesinin bileşenleridir.  $\wedge$  operatörü iki önermeyi birbirine bağladığı için bir bağlaç olarak nitelendirilir.

$P \wedge Q$  önermesinin doğru olması için  $P$ ,  $Q$  bileşenlerinin ikisinin de doğru olması gerekir.  $P \wedge Q$  önermesinin yanlış olması için bileşenlerinden enaz bir tanesinin yanlış olması yeterlidir.

$P \wedge Q$  bileşik önermesinin doğruluk değerleri tablo ile gösterilmiştir:

| $P$ | $Q$ | $P \wedge Q$ |
|-----|-----|--------------|
| 1   | 1   | 1            |
| 1   | 0   | 0            |
| 0   | 1   | 0            |
| 0   | 0   | 0            |

Çizelge 2.1.  $P \wedge Q$  (ve bağlacı)

**Teorem 2.1.7.**  $P, Q, R$  önermeleri için aşağıdaki özellikler sağlanır:

$$P \wedge P \equiv P \quad (\wedge \text{ eşgüçlülük})$$

$$P \wedge Q \equiv Q \wedge P \quad (\wedge \text{ değişme})$$

$$(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R) \quad (\wedge \text{ birleşme})$$

**Uyarı 2.1.8.** " $\wedge$ " nin birleşme özelliğini daha kısa göstermek için, parantezler kaldırılıp,

$$(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R) \equiv P \wedge Q \wedge R$$

biçiminde yazılabilir.

**Tanım 2.1.9.**  $P$  ile  $Q$  birer önerme ise,  $P \vee Q$  bileşik önermesinin doğruluk değeri;

$$1 \vee 1 = 1, 1 \vee 0 = 1, 0 \vee 1 = 1, 0 \vee 0 = 0$$

kurallarıyla tanımlanır; " $P$  veya  $Q$ " diye okunur. Bu kurallar, aşağıdaki simgelerle de gösterilir.

$$D \vee D = D, D \vee Y = D, Y \vee D = D, Y \vee Y = Y$$

$P$  ile  $Q$  önermeleri,  $P \vee Q$  bileşik önermesinin bileşenleridir.  $\vee$  operatörü iki önermeyi birbirine bağlar. O nedenle bir bağlaç olarak nitelendirilir. Bileşenlerinden birisi doğru ise  $P \vee Q$  önermesi doğru olur.  $P \vee Q$  önermesinin yanlış olması için bileşenlerinin her ikisinin de yanlış olması yeterlidir.  $P \vee Q$  bileşik önermesinin doğruluk değerleri tabloda gösterilir:

| $P$ | $Q$ | $P \vee Q$ |
|-----|-----|------------|
| 1   | 1   | 1          |
| 1   | 0   | 1          |
| 0   | 1   | 1          |
| 0   | 0   | 0          |

Çizelge 2.2.  $P \vee Q$  (veya) operatörünün doğruluk tablosu

**Teorem 2.1.10.**  $P, Q, R$  üç önerme olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır:

$$P \vee P \equiv P \quad (\vee \text{ eşgüçlülük})$$

$$P \vee Q \equiv Q \vee P \quad (\vee \text{ değişim})$$

$$(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R) \quad (\vee \text{ birleşme})$$

**Uyarı 2.1.11.** " $\vee$ " nin birleşme özelliğini daha kısa göstermek için, parantezler kaldırılıp aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R) \equiv P \vee Q \vee R$$

**Teorem 2.1.12.**  $P, Q, R$  üç önerme olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır:

$$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \quad (\wedge \text{ nin } \vee \text{ üzerine soldan dağılma özelliği})$$

$$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R) \quad (\vee \text{ nin } \wedge \text{ üzerine soldan dağılma özelliği})$$

$$(P \vee Q) \wedge R \equiv (P \wedge R) \vee (Q \wedge R) \quad (\wedge \text{ nin } \vee \text{ üzerine sağdan dağılma özelliği})$$

$$(P \wedge Q) \vee R \equiv (P \vee R) \wedge (Q \vee R) \quad (\vee \text{ nin } \wedge \text{ üzerine sağdan dağılma özelliği})$$

**Tanım 2.1.13.** Bir  $P$  önermesinin doğruluk değerinin doğru iken yanlış, yanlış iken doğru yapılmasıyla elde edilen yeni önermeye  $P$  nin **değili** (olumsuzu) denir.  $P'$ ,  $\sim P$  ya da  $\neg P$  simgelerinden birisi ile gösterilir ve " $P$  nin değili (olumsuzu)" diye okunur.

**Teorem 2.1.14. (De Morgan Kuralları)**  $P$  ile  $Q$  önermeleri için aşağıdaki eşitlikler vardır:

$$(i) (P \vee Q)' \equiv (P' \wedge Q')$$

$$(ii) (P \wedge Q)' \equiv (P' \vee Q')$$

**Tanım 2.1.15.** Bileşenlerinin tüm olası doğruluk değerleri için daima 1 (doğru) değerini alan bir bileşik önermeye hepdoğru (**totoloji**) denir.

**Tanım 2.1.16.** Bileşenlerinin tüm olası doğruluk değerleri için daima 0 (yanlış) değerini alan bir bileşik önermeye hepyanlış (**çelişki**) denir.

**Tanım 2.1.17.**  $P$  ile  $Q$  birer önerme ise  $P \Rightarrow Q$  bileşik önermesinin doğruluk değeri

$$1 \Rightarrow 1 \equiv 1, 1 \Rightarrow 0 \equiv 0, 0 \Rightarrow 1 \equiv 1, 0 \Rightarrow 0 \equiv 1$$

kurallarıyla tanımlanır ve " $P$  ise  $Q$ " diye okunur.

Bu kurallar aşağıdaki simgelerle de gösterilebilir:

$$D \Rightarrow D \equiv D, D \Rightarrow Y \equiv Y, Y \Rightarrow D \equiv D, Y \Rightarrow Y \equiv D.$$

$P \Rightarrow Q$  önermesine koşullu önerme, gerektirme adları da verilir ve " $P$  ise  $Q$ " ya da " $P$  gerektirir  $Q$ " diye de okunur.

**Tanım 2.1.18.**  $P \Rightarrow Q$  gerektirmesinin yanlış olması için  $Q$  önermesinin yanlış olması gerekli ve yeterlidir. Buna göre  $P \Rightarrow Q$  gerektirmesinin doğruluk değerleri tablodaki gibidir:

| $P$ | $Q$ | $P \Rightarrow Q$ |
|-----|-----|-------------------|
| 1   | 1   | 1                 |
| 1   | 0   | 0                 |
| 0   | 1   | 1                 |
| 0   | 0   | 1                 |

Çizelge 2.3.  $P \Rightarrow Q$  (ise) operatörünün doğruluk tablosu

**Tanım 2.1.19.** (i)  $P \Rightarrow Q$  koşullu önermesinde  $P$  önermesi yeterli koşul,  $Q$  önermesi gerekli koşuldur.

(ii)  $P \Rightarrow Q$  koşullu önermesinde  $P$  önermesine **hipotez**,  $Q$  önermesine **hüküm** denir.

(iii)  $Q \Rightarrow P$  koşullu önermesine  $P \Rightarrow Q$  önermesinin **karşıtı** denilir.

(iv)  $P \Rightarrow Q$  koşullu önermesinin **karşıt tersi**  $Q' \Rightarrow P'$  önermesidir.

**Teorem 2.1.20.** Koşullu önerme karşıt tersine mantıksal denktir:  $P \Rightarrow Q \equiv (Q' \Rightarrow P')$ .

**Tanım 2.1.21.**  $P$  ile  $Q$  birer önerme ise  $P \Leftrightarrow Q$  bileşik önermesi

$$P \Leftrightarrow Q \equiv (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$$

bağıntısıyla tanımlanır ve " **$P$  ancak ve ancak  $Q$** " diye okunur.

Ancak ve ancak önermesinin doğruluk değerleri,

$$1 \Leftrightarrow 1 \equiv 1, 1 \Leftrightarrow 0 \equiv 0, 0 \Leftrightarrow 1 \equiv 0, 0 \Leftrightarrow 0 \equiv 1$$

kurallarıyla verilir.

$P$  ile  $Q$  önermeleri,  $P \Leftrightarrow Q$  bileşik önermesinin bileşenleridir.

$P \Leftrightarrow Q$  önermesine iki yönlü koşullu önerme, çift gerektirme adları da verilir ve " **$P$  çift gerektirir  $Q$** " diye de okunur.

| $P$ | $Q$ | $P \Rightarrow Q$ | $Q \Rightarrow P$ | $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ | $P \Leftrightarrow Q$ |
|-----|-----|-------------------|-------------------|--|-----------------------|
| 1   | 1   | 1                 | 1                 | 1  | 1                     |
| 1   | 0   | 0                 | 1                 | 0  | 0                     |
| 0   | 1   | 1                 | 0                 | 0  | 0                     |
| 0   | 0   | 1                 | 1                 | 1  | 1                     |

Çizelge 2.4.  $P \Leftrightarrow Q$  (ancak ve ancak) operatörünün doğruluk tablosu

$P \Leftrightarrow Q$  iki yönlü koşullu önermesinin doğru olması için  $P$  ile  $Q$  bileşenlerinin aynı değerli olması gerekli ve yeterlidir.

## ÖNERMELER CEBİRİNİN YASALARI

### Eşgüçlülük Yasaları

$$(1a) P \wedge P \equiv P \quad (1b) P \vee P \equiv P$$

$$(1c) P \wedge 1 \equiv P \quad (1d) P \vee 1 \equiv 1$$

$$(1e) P \wedge 0 \equiv 0 \quad (1f) P \vee 0 \equiv P$$

### Birleşme Yasaları

$$(2a) (P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$$

$$(2b) (P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$$

### Yerdeğişme Yasaları

$$(3a) P \wedge Q \equiv Q \wedge P$$

$$(3b) P \vee Q \equiv Q \vee P$$

### Dağılma Yasaları

$$(4a) P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

$$(4b) P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

$$(4c) (P \vee Q) \wedge R \equiv (P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$$

$$(4d) (P \wedge Q) \vee R \equiv (P \vee R) \wedge (Q \vee R)$$

### Tümlenme Yasaları

$$(5a) (P \wedge P') \equiv 0$$

$$(5b) (P \vee P') \equiv 1$$

### De Morgan Yasaları

$$(6a) (P \wedge Q)' \equiv (P' \vee Q')$$

$$(6b) (P \vee Q)' \equiv (P' \wedge Q')$$

### Gerektirme Yasaları

$$(7a) P \Leftrightarrow Q \equiv [(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)]$$

### Soğurma Yasaları

$$(8a) P \wedge (P \vee Q) \equiv P$$

$$(8b) P \vee (P \wedge Q) \equiv P$$

### Geçişme Yasaları

$$(9a) [(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)] \Rightarrow (P \Rightarrow R)$$

$$(9b) (P \Rightarrow Q) \equiv (Q' \Rightarrow P')$$

### Karşıt Ters Önerme

$$(10a) (P \Leftrightarrow Q) \equiv (Q \Leftrightarrow P)$$

$$(5c) (P')' \equiv P$$

$$(5d) 1' \equiv 0, \quad 0' \equiv 1$$

## 2.2. Bağlıntılar

**Tanım 2.2.1.** Boş olmayan  $A, B$  kümeleri için  $A \times B$  kartezyen çarpımının her altkümesine  $A$  dan  $B$  ye bir **bağıntı** denir.

Özel olarak,  $A^2 = A \times A$  kartezyen çarpımının her altkümesi  $A$  üzerinde bir bağındır.

**Tanım 2.2.2.** Bir kartezyen çarpımın her altkümesi bir bağındır.  $\alpha$ ,  $X$  kümesinden  $Y$  kümesine tanımlı bir bağındır ise; yani  $\alpha \subseteq X \times Y$  ise,  $(x, y) \in \alpha$  oluşu  $x\alpha y$  simgesiyle gösterilir.

$$(x, y) \in \alpha \Leftrightarrow x\alpha y \text{ olur.}$$

**Tanım 2.2.3.** Boş olmayan  $A$  ve  $B$  kümeleri için  $\eta \subseteq A \times B$  verilsin.  $\eta^{-1} = \{(b, a) | (a, b) \in \eta\}$  bağıntısına,  $\eta$  nın ters bağıntısı denilir.  $\eta \subseteq A \times B \Leftrightarrow \eta^{-1} \subseteq B \times A$  olduğu kolayca görülür. Dolayısıyla,  $\eta^{-1}$  bağıntısı  $B$  kümesinden  $A$  kümesine tanımlıdır.

**Tanım 2.2.4.**  $A$  boştan farklı bir küme,  $\eta \subseteq A \times A$  ve  $a, b, c \in A$  olsun. Bazı önemli bağıntılar aşağıda verilmiştir:

**Yansımali:**  $[\forall a(a \in A) \Rightarrow (a, a) \in \eta]$

**Simetrik:**  $(a, b) \in \eta \Rightarrow (b, a) \in \eta$

**Ters simetrik:**  $(a, b) \in \eta \wedge (b, a) \in \eta \Rightarrow a = b$

**Geçişli:**  $[(a, b) \in \eta \wedge (b, c) \in \eta \Rightarrow (a, c) \in \eta]$

**Tanım 2.2.5.** Yansımali, simetrik ve geçişli bağıntıya **denklik bağıntısı** denir.

**Tanım 2.2.6.** Denklik bağıntısı ile birbirlerine bağlanan öğelere **denk öğeler** denilir.  $x \equiv y, x \equiv y(\text{mod } \delta)$  ya da  $x \sim y$  ile gösterilir.

**Tanım 2.2.7.**  $A$  kümesi üzerinde tanımlı  $\delta$  denklik bağıntısına göre,  $x$  ögesine denk olan bütün öğelerden oluşan altkümeye  $x$  ögesinin **denklik sınıfı** denir.  $\bar{x}$ ,  $[x]$  ya da  $[x]_\delta$  simgeleri kullanılır.

$$\begin{aligned}\bar{x} = [x] = [x]_\delta &= \{y \mid (x, y) \in \delta\} \\ &= \{y \mid x \delta y\}\end{aligned}$$

**Teorem 2.2.8.** (i) *Boş olmayan  $A$  kümesi üzerinde tanımlı  $\delta$  denklik bağıntısının denklik sınıfları  $A$  kümesinin bir ayrışımını oluşturur.*

(ii) *Tersine olarak,  $A$  kümesinin bir ayrışımını kendi denklik sınıfları olarak kabul eden bir  $\delta$  denklik bağıntısı vardır.*

**Önerme 2.2.9.** (i)  *$A$  kümesinin her ögesi, bir ve yalnız bir denklik sınıfına aittir. Denklik sınıfının birleşimi  $A$  kümesine eşittir.*

$$A = \cup \{\bar{a} \mid a \in A\}$$

(ii) *İki denklik sınıfı ya birbirine eşittir ya da ayrıktırlar:*

$$x, y \in A \Rightarrow [(\bar{x} = \bar{y}) \vee (\bar{x} \cap \bar{y} \neq \emptyset)]$$

**Tanım 2.2.10.**  $A$  kümesi üzerindeki  $\delta$  denklik bağıntısının bütün denklik sınıflarından oluşan aileye  $A$  kümesinin  $\delta$  ya göre **bölüm kümesi** denir. Bölüm kümesi  $A/\delta$  ile gösterilir.

$$A/\delta = \{[x], [y], [z], \dots\} = \{[x] : x \in A\}$$

**Tanım 2.2.11.** Yansımali, ters-simetrik ve geçişli bağıntıya tikel (**kısmi**) **sıralama bağıntısı** denir.

$\tau$ ,  $A$  kümesi üzerinde tikel sıralama bağıntısı ve  $(a, b) \in \tau$  ise " $a$  ögesi,  $b$  ögesinden önce gelir", veya " $b$  ögesi,  $a$  ögesinden sonra gelir" veya;

" $a$  ögesi,  $b$  ögesinden küçüktür", veya " $b$  ögesi,  $a$  ögesinden büyüktür", denir.

**Tanım 2.2.12.** Üzerinde bir kısmi sıralama bğıntısı tanımlanan  $(A, \leq)$  sistemine **tikel (kısmi) sıralı bir sistem** denir.

**Tanım 2.2.13.**  $(A, \leq)$  tikel sıralı bir sistem ve  $a, b \in A$  öğeleri için  $a \leq b$  ya da  $b \leq a$  oluyorsa  $a$  ile  $b$  öğelerine  $\leq$  bğıntısına göre **karşılaştırılabilir iki öğedir** denir.

**Teorem 2.2.14.** *Tikel sıralı bir kümenin altkümeleri de tikel sıralıdır.*

**Tanım 2.2.15.**  $(X, \leq)$  tikel sıralanmış sistem ve  $A \subseteq X$  olsun.  $A$  nın her öğesinden küçük olan  $x \in X$  öğesi  $A$  kümesinin bir altsınırdır.  $\exists a(a \in A \wedge x \leq a)$  ile ifade ederiz.

**Uyarı 2.2.16.**  $(X, \leq)$  tikel sıralı sistem ve  $A \subseteq X$  ise  $A \subset X$  altkümesinin hiç altsınırı olmayabileceği gibi çok sayıda altsınırı da olabilir.

**Tanım 2.2.17.**  $(X, \leq)$  tikel sıralı sistem olsun.  $A \subseteq X$  altkümesinin altsınırlarının en büyüğüne  $A$  nın en büyük altsınırı (ebas) (**inf**) denir.

(i)  $\alpha$  öğesi  $A$  kümesinin bir altsınırdır.

(ii)  $\alpha$  öğesi  $A$  kümesinin altsınırlarından oluşan kümenin bir üstsınırdır.

**Tanım 2.2.18.**  $(X, \leq)$  tikel sıralı sistem ve  $A \subseteq X$  olsun.  $A$  nın her öğesinden büyük olan  $y \in X$  öğesi  $A$  kümesinin bir üstsınırdır.  $\exists a(a \in A \wedge a \leq y)$  ile ifade ederiz.

**Uyarı 2.2.19.**  $(X, \leq)$  tikel sıralı sistem ve  $A \subseteq X$  ise  $A$  altkümesinin hiç üstsınırı olmayabileceği gibi çok sayıda üstsınırları da olabilir.

**Tanım 2.2.20.**  $(X, \leq)$  tikel sıralı sistem olsun.  $A \subseteq X$  altkümesinin üstsınırlarının en küçüğüne  $A$  nın en küçük üstsınırı (**eküs**) denir.

(i)  $\eta$  öğesi  $A$  kümesinin bir üstsınırdır.

(ii)  $\eta$  öğesi  $A$  kümesinin üstsınırlarından oluşan kümenin bir altsınırdır.

**Tanım 2.2.21.**  $(X, \leq)$  tikel sıralı sistem ve  $A \subseteq X$  olsun.  $A$  kümesinin hiç bir ögesinden büyük olmayan  $\kappa \in A$  ögesine  $A$  nın bir **küçükçe ögesi** denir.

**Tanım 2.2.22.**  $(X, \leq)$  tikel sıralı sistem ve  $A \subseteq X$  olsun.  $A$  kümesinin hiç bir ögesinden küçük olmayan  $\mu \in A$  ögesine  $A$  nın bir **büyükçe ögesi** denir.

**Tanım 2.2.23.** Altkümeyle ait olan en büyük altsınıra (inf), altkümenin **minimumu** denir.  $(X, \leq)$  tikel sıralı sistem olsun.  $A \subseteq X$  altkümesinin en büyük altsınırı  $\alpha = \inf(A)$  var ve  $\alpha \in A$  ise  $\alpha$  ögesine  $A$  kümesinin **en küçük ögesi** denir ve  $\min(A)$  ile gösterilir.

**Tanım 2.2.24.** Altkümeyle ait olan en küçük üstsınıra (sup), altkümenin **maksimumu** denir.  $(X, \leq)$  tss olsun.  $A \subseteq X$  altkümesinin en küçük üstsınırı  $\eta = \sup(A)$  var ve  $\eta \in A$  ise  $\eta$  ögesine  $A$  kümesinin **en büyük ögesi** denir ve  $\max(A)$  ile gösterilir.

**Tanım 2.2.25.** Boş olmayan bir küme üzerinde yansımali, ters-simetrik, geçişli ve her elemanı karşılaştırılabilir olan bağıntı tümel **(tam) sıralama bağıntısıdır**.

**Tanım 2.2.26.**  $(A, \leq)$  tikel sıralı bir sistem olsun.  $A$  kümesinin boş olmayan her altkümesinin en küçük (minimum) ögesi varsa  $(A, \leq)$  sistemine **iyi sıralıdır** denir.

**Teorem 2.2.27.**  $\mathbb{N}$  doğal sayılar kümesi  $\leq$  bağıntısına göre iyi sıralıdır.

**İspat.** Her  $m$  doğal sayısının ardışığının  $m + 1$  olduğunu ve  $m < m + 1$  eşitsizliğinin sağlandığını kabul ediyoruz.  $M \subseteq \mathbb{N}$  ise  $M$  nin min ögesinin olduğunu göstermeliyiz.  $0 \in M$  ise  $0 = \min(M)$  olacağından istenen sağlanmış olur.  $0 \notin M$  olsun.  $\inf(M) = m$  diyelim.  $m \notin M$  ise  $m + 1 \in M$  olmalıdır; değilse  $\inf(M) \geq (m + 1)$  olur. Bu da kabulümüzle çelişir. O halde  $m + 1 \in M$  dir.  $\min(M) = m + 1 = \inf(M)$  olmalıdır. Bu çelişki de olamayacağına göre  $\inf(M) = m = \min(M)$  olmalıdır.

## 2.3. Operatörler

**Tanım 2.3.1.** Boş olmayan bir kümeden kendisine tanımlı olan her fonksiyon bir **birli operatördür**.

**Tanım 2.3.2.** Boş olmayan  $X$  kümesi için  $X \times X$  kartezyen çarpımından  $X$  kümesine tanımlı her fonksiyon **ikili operatördür**.

$X \neq \emptyset$  ve  $X \subseteq Y$  ise her  $f : X \times X \rightarrow Y$  fonksiyonu,  $X$  üzerinde **ikili işlem**dir.

**Tanım 2.3.3.**  $X$  boştan farklı bir küme ve  $n$  bir doğal sayı olmak üzere,  $X$  kümesinin  $n$  kez kendisiyle kartezyen çarpımından  $X$  kümesine tanımlı her fonksiyon bir  **$n$ -li operatördür**.

**Uyarı 2.3.4.** *Hangi türden oldukları işlevlerine göre belli olacağından, birli işlem, ikili işlem yerine kısaca **işlem** terimi kullanılır.*

**Tanım 2.3.5.**  $\otimes$  işleminin görüntü kümesi  $X$  kümesine eşitse " $X$  kümesi  $\otimes$  işlemine göre kapalı" denir.  $\otimes : X \times X \rightarrow X$  ise  $X$  kümesi  $\otimes$  işlemine göre **kapalıdır**. Bu durumda,  $\forall x, y \in X$  için  $x \otimes y = z \in X$  olur.

**Tanım 2.3.6.**  $X$  kümesi üzerinde  $\otimes$  işlemi tanımlı olsun. Her  $x \in X$  için  $x \otimes e = x = e \otimes x$  eşitliğini sağlayan bir  $e \in X$  varsa  $e$  ögesine  $\otimes$  işlemine göre **birim** (etkisiz) **öge** denir.

**Tanım 2.3.7.**  $\otimes$  işlemi  $X$  kümesinde tanımlı ve  $e$  birim ögesi var olsun.  $x \in X$  için  $x \otimes y = e = y \otimes x$  eşitliğini sağlayan  $y \in X$  ögesi varsa  $y$  ögesine  $\otimes$  işlemine göre  $x$  ögesinin **tersidir** denir.

**Tanım 2.3.8.**  $X$  kümesi üzerinde tanımlı bir  $\otimes$  işlemi için  $\forall x(x \in X) \Rightarrow x \otimes u = u \otimes x = u$  olacak biçimde bir  $u \in X$  varsa  $u$  ya  $\otimes$  işleminin **yutan ögesi** denir.

**Tanım 2.3.9.**  $X$  kümesi üzerinde tanımlı  $\otimes$  işlemi, her  $x, y \in X$  için  $x \otimes y = y \otimes x$  eşitliğini sağlıyorsa,  $\otimes$  işleminin **değişme** özelliği vardır denir.

**Tanım 2.3.10.**  $X$  kümesinde tanımlı  $\otimes$  işlemi her  $x, y, z \in X$  için  $x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z$  eşitliğini sağlıyorsa,  $\otimes$  işleminin **birleşme** özelliği vardır denir.

**Tanım 2.3.11.**  $X$  kümesi üzerinde tanımlı  $\oplus$  ve  $\otimes$  işlemleri tanımlı olsun.  $\forall x, y, z \in X$  için

- (i)  $x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)$  eşitliği sağlanıyorsa,  $\otimes$  işleminin  $\oplus$  işlemi üzerine **soldan dağılma** özelliği vardır denir.
- (ii)  $(x \oplus y) \otimes z = (x \otimes z) \oplus (y \otimes z)$  eşitliği varsa,  $\otimes$  işlemi  $\oplus$  işlemi üzerine **sağdan dağılma** özelliği vardır denir.

## 2.4. Kafesler

**Tanım 2.4.1.**  $\langle A, \leq \rangle$  kısmi sıralı bir küme olsun.

- (i) Her  $x, y \in A$  için  $\inf\{x, y\} = x \wedge y$  varsa,  $A'$  ya **karşılaşma yarı-kafes (meet-semilattice)** denir.
- (ii) Her  $x, y \in A$  için  $\sup\{x, y\} = x \vee y$  varsa,  $A'$  ya **birleşme yarı-kafes (join-semilattice)** denir.
- (iii)  $A$  hem karşılaşma hem de birleşme yarı-kafesi ise  $A'$  ya **kafes (lattice)** denir.

**Teorem 2.4.2.**  $L$  bir küme,  $\wedge, \vee : L \times L \longrightarrow L$  birleşmeli, değişmeli, idempotent ve soğurma özelliği (her  $x, y \in L$  için  $x \wedge (x \vee y)$  ve  $x \vee (x \wedge y) = x$ ) ile,

- (i) Her  $x, y \in L$  için,  $x \wedge y = x \Leftrightarrow x \vee y = y$ ,
- (ii) Her  $x, y \in L$  için,  $x \leq y \Leftrightarrow x \wedge y = x \Leftrightarrow x \vee y = y$ ,

özellikleri sağlanıyorsa  $L$  bir kafestir.

**Önerme 2.4.3.**  $(L, \wedge, \vee)$  bir kafes olsun. Aşağıdakiler denktir:

$$(i) \ x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

$$(ii) \ x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z).$$

**Tanım 2.4.4.**  $(L, \wedge, \vee)$  kafesi, Önerme 2.4.3' ün koşullarından birini sağlıyorsa buna **dağılmalı kafes** (distributive lattice) denir.

**Teorem 2.4.5.**  $L$  bir küme,  $\wedge, \vee : L \times L \rightarrow L$  iki işlemler olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

(i)  $(L, \wedge, \vee)$  bir dağılmalı kafestir,

(ii) Her  $x, y \in L$  için,  $x \wedge (x \vee y) = x$  ve  $x \wedge (y \vee z) = (z \wedge x) \vee (y \wedge x)$ .

**Tanım 2.4.6.**  $(L, \wedge, \vee)$  bir kafes olsun. Her  $a \in L$  için  $a \wedge 1 = a$  olacak şekilde  $1 \in L$  var ise  $L$ ' nin 1' i vardır denir. Her  $a \in L$  için  $a \vee 0 = a$  olacak şekilde  $0 \in L$  var ise  $L$ ' nin 0' ı vardır denir. Biri ve sıfırı olan kafese **sınırlı kafes** denir.

**Uyarı 2.4.7.**  $Ld$  ile tüm dağılmalı kafesler;  $Ld(0,1)$  ile tüm sınırlı, dağılmalı kafeslerin kümesi gösterilecektir.

**Tanım 2.4.8.**  $L$  bir sınırlı kafes olsun.  $a \in L$  için,  $a \wedge a' = 0$  ve  $a \vee a' = 1$  olacak şekilde bir  $a' \in L$  ( $a$  elemanının tümleyeni) varsa  $a'$  ya **tümlenmiş eleman** denir. Eğer  $L$  sınırlı kafesinin her elemanı tümlenmiş ise  $L$ ' ye **tümlenmiş kafes** (complemented lattice) denir.

**Tanım 2.4.9.**  $L$  bir kafes ve  $A \subseteq L$  bir altküme olsun.  $A, L$  de tanımlı işlemlere göre kapalılık özelliğini sağlıyorsa  $A$  ya **altkafes** denir.

**Tanım 2.4.10.**  $L$  ve  $K$  iki kafes  $f, L$  den  $K$  ye bir dönüşüm olsun. Her  $a, b \in L$  için aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa  $f$  ye **kafes homomorfizması** denir.

$$(i) \ f(a \vee b) = f(a) \vee f(b),$$

$$(ii) \ f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b).$$

**Teorem 2.4.11.**  $L$  bir kafes ve  $a, b$  ve  $c$  öğeleri  $L$  kafesinin keyfi elemanları olsun.  $O$  zaman,

$$(i) \ a \leq a \vee b \text{ ve } b \leq a \vee b$$

$$(ii) \ a \leq c \text{ ve } b \leq c \Rightarrow a \vee b \leq c$$

$$(iii) \ a \wedge b \leq a \text{ ve } a \wedge b \leq b$$

$$(iv) \ c \leq a \text{ ve } c \leq b \Rightarrow c \leq a \wedge b$$

dir.

## 2.5. Boole Cebirleri

**Tanım 2.5.1.** Sınırlı, dağılmalı ve tümlenmiş bir kafese **Boole kafesi** (Boole lattice) denir.

**Tanım 2.5.2.**  $B$  bir cebir olsun.

$$(i) \ (B, \wedge, \vee) \in Ld,$$

$$(ii) \ \text{Her } x \in B \text{ için } x \wedge 0 = 0, x \vee 1 = 1, x \wedge x' = 0, x \vee x' = 1$$

koşulları sağlanıyorsa,  $(B, \wedge, \vee, ', 0, 1)$  cebirsel yapısına bir **Boole cebiri** denir.

**Uyarı 2.5.3.** Tüm Boole cebirlerinin kümesi  $\mathbf{B}$  ile gösterilir.

**Önerme 2.5.4.**  $B$  bir Boole cebiri ve  $a, b \in B$  olsun.  $a \wedge b = 0$  ve  $a \vee b = 1$  ise  $b = a'$  dir.

**Önerme 2.5.5.**  $B$  bir Boole cebiri ve  $a, b \in B$  olsun.  $(a')' = a$ ,  $(a \wedge b)' = a' \vee b'$  ve  $(a \vee b)' = a' \wedge b'$  dir.

**Teorem 2.5.6.**  $B_1, B_2$  Boole cebirleri ve  $f : B_1 \rightarrow B_2$  bir dönüşüm olsun. Aşağıdakiler denktir:

- (i)  $f$ , Boole cebir morfizmasıdır.
- (ii)  $f$ , sınırlı kafeslerin morfizmasıdır.
- (iii)  $f$ , karşılaşma yarı-kafeslerin morfizması ve her  $x \in B_1$  için,  $f(x') = (f(x))'$  dir.
- (iv)  $f$ , birleşme yarı-kafeslerin morfizması ve her  $x \in B_1$  için,  $f(x') = (f(x))'$  dir.

### 3. HİLBERT CEBİRLERİ ÜZERİNDE BAZI ÖZEL YAPILAR

#### 3.1. Hilbert Cebirleri

Bu bölümde amacımız, Hilbert cebirlerini tanıtmak ve sağladığı bazı özellikleri vermektir. Bu amaçla, Jun, Y.B. [11] ve Piciu, D.; Busneag, C. [13] makaleleri ayrıntılı bir şekilde ele alınmıştır.

**Tanım 3.1.1.** [7, Def.1]  $H$  boştan farklı bir küme,  $\longrightarrow$ ,  $H$  üzerinde bir ikili işlem ve  $1 \in H$  olsun. Her  $x, y, z \in H$  için aşağıdaki koşullar gerçekleşir ise,  $(H, \longrightarrow, 1)$  cebirsel yapısına bir **Hilbert cebiri** denir.

$$a_1) x \longrightarrow (y \longrightarrow x) = 1$$

$$a_2) (x \longrightarrow (y \longrightarrow z)) \longrightarrow ((x \longrightarrow y) \longrightarrow (x \longrightarrow z)) = 1$$

$$a_3) x \longrightarrow y = y \longrightarrow x = 1 \Rightarrow x = y$$

**Tanım 3.1.2.**  $H$  bir Hilbert cebiri ise  $x \leq y \Leftrightarrow x \longrightarrow y = 1$  şeklinde tanımlanan bağlantıya  $H$  üzerinde **doğal sıralama** denir.

Bu bağlantıya göre  $1$ ,  $H$  nin en büyük elemanıdır. Ayrıca  $0$ ,  $H$  nin en küçük elemanı ise  $H$  Hilbert cebirine **sınırlı Hilbert cebiri** denir. Bu durumda  $x \in H$  için  $x^* = x \longrightarrow 0$  şeklinde tanımlıdır. Eğer  $H$  bir Boole cebiri ise,  $x^* = x'$  dir.

**Örnek 3.1.3.**  $H$  bir kısmi sıralı küme ve  $1$ ,  $H$  nin en büyük elemanı ve her  $x, y \in H$  için,

$$x \longrightarrow y = \begin{cases} 1, & x \leq y \\ y, & \text{dd} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan işlem ile  $(H, \longrightarrow, 1)$  bir Hilbert cebiridir.

**Örnek 3.1.4.**  $(H, \vee, \wedge, ', 0, 1)$  bir Boole kafesi ve her  $x, y \in H$  için  $x \rightarrow y = x' \vee y$  şeklinde tanımlanan işlem ile  $(H, \rightarrow, 1)$  bir sınırlı Hilbert cebiridir.

**Önerme 3.1.5.** [11, Pro.2.5]  $H$  bir Hilbert cebiri olsun. Her  $x, y, z \in H$  için aşağıdakiler sağlanır:

$$b_1) x \leq y \rightarrow x$$

$$b_2) x \rightarrow 1 = 1$$

$$b_3) x \rightarrow (y \rightarrow z) = (x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z)$$

$$b_4) (x \rightarrow y) \rightarrow ((y \rightarrow x) \rightarrow x) = (y \rightarrow x) \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow y)$$

$$b_5) x \rightarrow (y \rightarrow z) = y \rightarrow (x \rightarrow z)$$

$$b_6) x \leq (x \rightarrow y) \rightarrow y$$

$$b_7) ((x \rightarrow y) \rightarrow y) \rightarrow y = x \rightarrow y$$

$$b_8) 1 \rightarrow x = x$$

$$b_9) x \rightarrow y \leq (y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z)$$

$$b_{10}) x \leq y \text{ ise } z \rightarrow x \leq z \rightarrow y \text{ ve } y \rightarrow z \leq x \rightarrow z$$

$$b_{11}) x \rightarrow x = 1$$

$$b_{12}) x \leq y \rightarrow z \Rightarrow y \leq x \rightarrow z.$$

**İspat.** Şıkların ispatına başlamadan önce, ara işlemlerde kullanacağımız aşağıdaki eşitsizliğin ispatını verelim:

$$x \rightarrow (y \rightarrow z) \leq (x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z):$$

$(a_2)$  den  $(x \rightarrow (y \rightarrow z)) \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z))$  olduğu açıktır.

$$b_1) x \leq y \longrightarrow x :$$

$(a_1)$  den  $x \longrightarrow (y \longrightarrow x) = 1$  olduğundan  $x \leq y \longrightarrow x$  elde edilir.

$$b_2) x \longrightarrow 1 = 1 :$$

1 en büyük eleman olduğu için  $x \leq 1$  yani  $x \longrightarrow 1 = 1$  dir.

$$b_{10}) x \leq y \Rightarrow z \longrightarrow x \leq z \longrightarrow y :$$

Hipotezden  $x \longrightarrow y = 1$  vardır.  $(z \longrightarrow x) \longrightarrow (z \longrightarrow y) = 1$  elde etmeye çalışacağız.

1 en büyük eleman olduğu için  $(z \longrightarrow x) \longrightarrow (z \longrightarrow y) \leq 1$  olduğu açıktır. Diğer taraftan eşitsizliğin varlığı da gösterilmelidir.

İspatın başında verilen eşitsizlikten,  $(z \longrightarrow x) \longrightarrow (z \longrightarrow y) \geq z \longrightarrow (x \longrightarrow y)$  dir.  $x \longrightarrow y = 1$  olduğu ve  $b_2$  den,  $(z \longrightarrow x) \longrightarrow (z \longrightarrow y) \geq 1$  elde edilir. Çift taraflı eşitsizlikten,  $(z \longrightarrow x) \longrightarrow (z \longrightarrow y) = 1$  yani  $z \longrightarrow x \leq z \longrightarrow y$  elde edilir.

$$b_5) x \longrightarrow (y \longrightarrow z) = y \longrightarrow (x \longrightarrow z) :$$

$(:\leq)$   $(b_1)$  den,  $y \leq x \longrightarrow y$  ve  $b_{10}$  nun ikinci kısmından,

$$(x \longrightarrow y) \longrightarrow (x \longrightarrow z) \leq y \longrightarrow (x \longrightarrow z)$$

elde edilir. İspatın başında verilen eşitsizlik kullanılarak,

$$x \longrightarrow (y \longrightarrow z) \leq y \longrightarrow (x \longrightarrow z) \text{ bulunur.}$$

$(\geq:)$  Benzer şekilde  $y \longrightarrow (x \longrightarrow z) \leq x \longrightarrow (y \longrightarrow z)$  bulunur. (Her  $x, y, z$  için  $x \mapsto y; y \mapsto x$  yazılarak).

Öyleyse  $x \longrightarrow (y \longrightarrow z) = y \longrightarrow (x \longrightarrow z)$  dir.

$$b_3) x \longrightarrow (y \longrightarrow z) = (x \longrightarrow y) \longrightarrow (x \longrightarrow z) :$$

$b_1$  den  $y \leq x \longrightarrow y$  dir.  $b_{10}$  nun ikinci kısmından,  $(x \longrightarrow y) \longrightarrow z \leq y \longrightarrow z$  elde edilir.  $b_{10}$  nun ilk kısmı kullanılarak,  $x \longrightarrow ((x \longrightarrow y) \longrightarrow z) \leq (y \longrightarrow z)$  olur.  $b_5$  den  $x \longrightarrow ((x \longrightarrow y) \longrightarrow z) = (x \longrightarrow y) \longrightarrow x \longrightarrow z \leq x \longrightarrow (y \longrightarrow z)$

elde edilir. Yani  $x \rightarrow (y \rightarrow z) \geq (x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z)$  eşitsizliği bulunmuş olur.

Diğer taraf için  $a_2$  den  $(x \rightarrow (y \rightarrow z)) \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z)) = 1$  olup  $x \rightarrow (y \rightarrow z) \leq (x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z)$  bulunur.

$b_4$ )  $(x \rightarrow y) \rightarrow ((y \rightarrow x) \rightarrow x) = (y \rightarrow x) \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow y)$ :

$b_5$  de  $x$  yerine  $x \rightarrow y$ ;  $y$  yerine  $y \rightarrow x$ ;  $z$  yerine  $y$  yazılırsa,  $(x \rightarrow y) \rightarrow ((y \rightarrow x) \rightarrow y) = (y \rightarrow x) \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow y)$  bulunur.

$b_3$  ve  $a_1$  kullanılarak,

$$\begin{aligned} & ((x \rightarrow y) \rightarrow ((y \rightarrow x) \rightarrow x)) \rightarrow ((y \rightarrow x) \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow y)) \\ &= ((x \rightarrow y) \rightarrow ((y \rightarrow x) \rightarrow x)) \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow ((y \rightarrow x) \rightarrow y)) \\ &= (x \rightarrow y) \rightarrow ((y \rightarrow x) \rightarrow x) \rightarrow ((y \rightarrow x) \rightarrow y) \\ &= (x \rightarrow y) \rightarrow ((y \rightarrow x) \rightarrow (x \rightarrow y)) \\ &= 1 \end{aligned}$$

elde edilir. O halde,

$$(x \rightarrow y) \rightarrow ((y \rightarrow x) \rightarrow x) \leq (y \rightarrow x) \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow y)$$

bulunur.

Diğer taraftaki eşitlik için başlangıçta  $b_5$  de,  $y$  yerine  $y \rightarrow x$ ;  $x$  yerine  $x \rightarrow y$ ;  $z$  yerine  $x$  yazılır ve benzer işlemler yapılır.

$b_6$ )  $x \leq (x \rightarrow y) \rightarrow y$ :

$x \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow y) = 1$  olduğunu göstermeliyiz.

$(b_5)$  ten  $x \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow y) = (x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow y)$  dir.

Yukarıdaki açıklamadan  $(a_1)$  den) bu ifade 1 e eşittir.

$b_8$ )  $1 \rightarrow x = x$ :

$(a_1)$  den  $x \rightarrow (1 \rightarrow x) = 1 \Leftrightarrow x \leq 1 \rightarrow x$ .

$$\begin{aligned} 1 \rightarrow x \leq x &\Leftrightarrow (1 \rightarrow x) \rightarrow x = 1 \\ &\Leftrightarrow 1 \leq (1 \rightarrow x) \rightarrow x \quad (b_6) \\ &\Leftrightarrow (1 \rightarrow x) \rightarrow x = 1 \quad (1 \text{ enbyk eleman}) \\ &\Leftrightarrow x = 1 \rightarrow x \end{aligned}$$

$b_9)$   $(x \rightarrow y) \leq (y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z)$ :

$$\begin{aligned} (x \rightarrow y) \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z)) &= (y \rightarrow z) \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z)) & (b_5) \\ &= (y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow (y \rightarrow z)) & (b_3) \\ &= 1 & (a_1) \end{aligned}$$

yani  $(x \rightarrow y) \leq (y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z)$  bulunur.

$b_7)$   $((x \rightarrow y) \rightarrow y) \rightarrow y = x \rightarrow y$

$b_6)$  da  $x \mapsto (x \rightarrow y)$  yazılırsa  $x \rightarrow y \leq ((x \rightarrow y) \rightarrow y) \rightarrow y$  elde edilir.

$$\begin{aligned} (((x \rightarrow y) \rightarrow y) \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow y) &\geq x \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow y) & (b_9) \\ &= (x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow y) & (b_5) \\ &= 1 \end{aligned}$$

yani  $1 \leq (((x \rightarrow y) \rightarrow y) \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow y)$  ve 1 en büyük eleman olduğundan  $(((x \rightarrow y) \rightarrow y) \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow y) = 1$  dir. Buradan  $((x \rightarrow y) \rightarrow y) \rightarrow y \leq x \rightarrow y$  elde edilir. O halde  $((x \rightarrow y) \rightarrow y) \rightarrow y = x \rightarrow y$  dir.

$b_{11})$   $x \rightarrow x = 1$ :

$$(a_1) \text{ den } x \rightarrow (1 \rightarrow x) = 1.$$

Ayrıca  $(b_8)$  kullanılarak  $x \rightarrow x = 1$  bulunur.

$b_{12})$   $x \leq y \rightarrow z \Rightarrow y \leq x \rightarrow z$ :

Hipotezden  $x \rightarrow (y \rightarrow z) = 1$  vardır. Burada  $x$  yerine  $y$ ;  $y$  yerine  $x$  yazılırsa  $y \leq x \rightarrow z$  elde edilir.

**Sonuç 3.1.6.** [7]  $H$  bir Hilbert cebiri olsun. Her  $x, y \in H$  için aşağıdakiler sağlanır:

$b_{13})$   $0^* = 1, 1^* = 0$

$b_{14})$   $x \rightarrow y^* = y \rightarrow x^*$

$b_{15})$   $x \rightarrow x^* = x^*, x^* \rightarrow x = x^{**}, x \leq x^{**}, x \leq x^* \rightarrow y$

$b_{16})$   $x \rightarrow y \leq y^* \rightarrow x^*$

$$b_{17}) \quad x \leq y \text{ ise } y^* \leq x^*$$

$$b_{18}) \quad x^{***} = x^*$$

$$b_{19}) \quad (x \longrightarrow y)^{**} = x \longrightarrow y^{**} = x^{**} \longrightarrow y^{**}.$$

**Tanım 3.1.7.** [7]  $H$  boştan farklı bir küme ve  $\longrightarrow$ ,  $H$  üzerinde bir ikili işlem olsun. Her  $x, y, z \in H$  için aşağıdaki koşullar sağlanıyor ise  $(H, \longrightarrow)$  cebirsel yapısına bir Hilbert cebiri denir.

A)  $(x \longrightarrow x) \longrightarrow x = x$

B)  $x \longrightarrow x = y \longrightarrow y$

C)  $x \longrightarrow (y \longrightarrow z) = (x \longrightarrow y) \longrightarrow (x \longrightarrow z)$

D)  $(x \longrightarrow y) \longrightarrow ((y \longrightarrow x) \longrightarrow x) = (y \longrightarrow x) \longrightarrow ((x \longrightarrow y) \longrightarrow y).$

**Teorem 3.1.8.** [7, Teo.3] *Tanım 3.1.1 ve Tanım 3.1.7 denktir.*

**İspat.** (Tanım 3.1.7  $\Rightarrow$  Tanım 3.1.1):  $x \longrightarrow x$ ,  $H$ ' nin bir sabit elemanıdır.

$x \longrightarrow x = 1$  yazalım. (A)' dan,  $1 \longrightarrow x = x$  dir.

(B) ve (C)' den,  $(a_1)$  elde edilir:

$$\begin{aligned} x \longrightarrow (y \longrightarrow x) &= (x \longrightarrow y) \longrightarrow (x \longrightarrow x) \\ &= ((x \longrightarrow y) \longrightarrow x) \longrightarrow ((x \longrightarrow y) \longrightarrow x) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Benzer şekilde yine (B) ve (C) kullanılarak,  $(a_2)$  elde edilir.

$(a_3)$  için (D) kullanılır. Hipotezden,  $x \longrightarrow y = y \longrightarrow x = 1$  olsun. (D) den ve Önerme 3.1.5  $(b_8)$  den,

$$\begin{aligned} 1 \longrightarrow (1 \longrightarrow x) &= 1 \longrightarrow (1 \longrightarrow y) \\ 1 \longrightarrow x &= 1 \longrightarrow y \\ x &= y \end{aligned}$$

olur. (Tanım 3.1.1  $\Rightarrow$  Tanım 3.1.7):

Her  $x \in H$  için,  $x \rightarrow x$ ,  $H'$  de sabit eleman olduğu için (B)' nin varlığı açıktır.

(A), (C), (D) sırasıyla Önerme 3.1.5 'in  $b_8, b_3, b_4$  şıklarından elde edilir.

### 3.2. Değişmeli Hilbert Cebiri

Bu bölüm, Jun Y.B [11]'nin üçüncü bölümünün incelenmesidir.

$x \vee y := (y \rightarrow x) \rightarrow x$  olarak tanımlansın. Önerme 3.1.5  $b_2, b_5$  ve  $b_{11}$  kullanılarak,

$$\begin{aligned} x \rightarrow (x \vee y) &= x \rightarrow ((y \rightarrow x) \rightarrow x) \\ &= (y \rightarrow x) \rightarrow (x \rightarrow x) \\ &= (y \rightarrow x) \rightarrow 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

bulunur. Yani  $x \leq x \vee y$  dir. Ayrıca  $b_6$  dan,  $y \leq ((y \rightarrow x) \rightarrow x)$  olduğundan  $y \leq x \vee y$  elde edilir. Bu nedenle  $y \vee y, x$  ve  $y$  nin bir üst sınırıdır.

Benzer şekilde  $\vee$  nin tanımlanışından,

$c_1)$

$$x \vee x = x$$

ve

$$x \vee 1 = 1 \vee x = 1$$

bulunur.

Genelde  $x \vee y \neq y \vee x$  ve  $x \vee y, x$  ile  $y$  nin en küçük üst sınırı olmak zorunda değildir. Aşağıdaki örnek bunu gösterir:

**Örnek 3.2.1.**  $H = \{1, a, b, c, d\}$  ve

| $\rightarrow$ | 1 | a | b | c | d |
|---------------|---|---|---|---|---|
| 1             | 1 | a | b | c | d |
| a             | a | 1 | b | c | d |
| b             | b | 1 | 1 | c | d |
| c             | c | 1 | 1 | 1 | d |
| d             | d | 1 | b | c | 1 |

olmak üzere  $x \vee y \neq y \vee x$  ve  $x \vee y$ :  $x$  ile  $y$  nin en küçük üst sınırı değildir.

**Tanım 3.2.2.**  $H$  bir Hilbert cebiri olsun. Her  $x, y \in H$  için  $x \vee y = y \vee x$  yani

$$a_4) (y \longrightarrow x) \longrightarrow x = (x \longrightarrow y) \longrightarrow y$$

eşitliği sağlanırsa  $H$  ye **değişmeli Hilbert cebiri** denir.

**Örnek 3.2.3.**  $H = \{1, a, b, c\}$  kümesi, aşağıdaki Cayley tablosu ile

| $\longrightarrow$ | 1 | $a$ | $b$ | $c$ |
|-------------------|---|-----|-----|-----|
| 1                 | 1 | $a$ | $b$ | $c$ |
| $a$               | 1 | 1   | $b$ | $c$ |
| $b$               | 1 | $a$ | 1   | $c$ |
| $c$               | 1 | $a$ | $b$ | 1   |

bir değişmeli Hilbert cebiridir.

**Not 3.2.4.** Eğer  $H$  bir değişmeli Hilbert cebir ise  $x \vee y$ ,  $x$  ile  $y$  nin en küçük üst sınırır.

**Teorem 3.2.5.**  $H$  nin bir değişmeli Hilbert cebiri olması için gerek ve yeter koşul  $\vee$  ye göre bir yarı-kafes olmasıdır.

**İspat.** ( $\Leftarrow$ ):  $H$ ,  $\vee$  ye göre bir yarı-kafes ise, yukarıdaki Not 3.2.4' den  $H$  bir değişmeli Hilbert cebiridir.

( $\Rightarrow$ )  $H$  bir değişmeli Hilbert cebiri olsun. Önerme 3.1.5  $b_5$  kullanılarak

$$c_2) y \longrightarrow (x \vee z) = y \longrightarrow ((z \longrightarrow x) \longrightarrow x) = (z \longrightarrow x) \longrightarrow (y \longrightarrow x) \text{ elde edilir.}$$

Eğer  $x \leq y$  ise  $y = 1 \longrightarrow y = (x \longrightarrow y) \longrightarrow y = y \vee x$  dir.  $H$  nin değişmeliliğinden,

$$c_3) x \leq y \text{ olması } x \vee y = y \text{ olmasını gerektirir.}$$

$x \vee y$  nin,  $x$  ile  $y$  nin bir üst sınırı olduğu biliniyor. Eğer bunun, en küçük olduğu gösterilirse,  $H$  nin bir yarı-kafes olduğu ispatlanmış olur.

$x \leq z$  ve  $y \leq z$  olsun.  $c_3$  kullanılarak  $(x \leq z \Rightarrow x \vee z = z)$

$$\begin{aligned}
 (x \vee y) \longrightarrow z &= (x \vee y) \longrightarrow (x \vee z) \\
 &= (z \longrightarrow x) \longrightarrow ((x \vee y) \longrightarrow x) && (c_2 \text{ den}) \\
 &= (z \longrightarrow x) \longrightarrow (((y \longrightarrow x) \longrightarrow x) \longrightarrow x) \\
 &= (z \longrightarrow x) \longrightarrow (y \longrightarrow x) && (b_7 \text{ den}) \\
 &= y \longrightarrow (x \vee z) && (c_2 \text{ den}) \\
 &= y \longrightarrow z && (c_3 \text{ den}) \\
 &= 1 && (y \leq z \text{ den})
 \end{aligned}$$

$x \vee y \leq z$  elde edilir. Bu nedenle  $x \vee y$ ,  $x$  ile  $y$  nin en küçük üst sınırıdır. O halde  $H$  bir yarı-kafestir.

**Teorem 3.2.6.**  $H$  bir Hilbert cebir olsun. Aşağıdakiler denktir:

$c_4$ )  $H$  değişmelidir.

$c_5$ )  $z \leq x$  ve  $x \longrightarrow z \leq y \longrightarrow z$  ise  $y \leq x$  dir.

$c_6$ )  $z \leq x, y$  ve  $x \longrightarrow z \leq y \longrightarrow z$  ise  $y \leq x$  dir.

$c_3$ )  $x \leq y$  ise  $x \vee y = y$  dir.

**İspat.**

$(c_4) \Rightarrow (c_5)$  :  $H$  değişmeli olsun. Eğer  $z \leq x$  ve  $x \longrightarrow z \leq y \longrightarrow z$  ise  $z \longrightarrow x = 1$  ve  $(x \longrightarrow z) \longrightarrow (y \longrightarrow z) = 1$  dir. Bu durumda

$$\begin{aligned}
 y \longrightarrow x &= y \longrightarrow (1 \longrightarrow x) && (b_8 \text{ den}) \\
 &= y \longrightarrow ((z \longrightarrow x) \longrightarrow x) && (\text{hipotezden}) \\
 &= y \longrightarrow ((x \longrightarrow z) \longrightarrow z) && (\text{değişmelilikten}) \\
 &= (x \longrightarrow z) \longrightarrow (y \longrightarrow z) && (b_5 \text{ den}) \\
 &= 1 && (\text{hipotezden})
 \end{aligned}$$

O halde  $y \leq x$  bulunur.

$(c_5) \Rightarrow (c_6)$  : Açıktır.

$(c_6) \Rightarrow (c_3)$  :  $x \leq y$  olsun.  $x \vee y$ ;  $x$  in bir üst sınırı olduğu için  $x \leq x \vee y$  dir.  $b_7$  den  $y \longrightarrow x \leq (x \vee y) \longrightarrow x$  dir.  $c_6$  dan  $x \vee y \leq y$  bulunur.

Diğer taraftan,  $y \rightarrow ((y \rightarrow x) \rightarrow x) = (y \rightarrow x) \rightarrow (y \rightarrow x) = 1$  olduğundan,  $y \leq x \vee y$  elde edilir. Çift yönlü eşitsizlikten  $y = x \vee y$  bulunur.

$(c_3) \Rightarrow (c_4) : x \vee y = y \vee x$  olduğunu göstermek için çift yönlü eşitsizliğin varlığını göstermeliyiz.

$x \leq (x \rightarrow y) \rightarrow y$  olduğunda  $c_3$  den  $x \vee ((x \rightarrow y) \rightarrow y) = (x \rightarrow y) \rightarrow y$  dir.

$\vee$  tanımını kullanarak  $(x \rightarrow y) \rightarrow y = (((x \rightarrow y) \rightarrow y) \rightarrow x) \rightarrow x$  elde edilir.

Buradan,

$$\begin{aligned}
& ((y \rightarrow x) \rightarrow x) \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow y) \\
&= ((y \rightarrow x) \rightarrow x) \rightarrow (((x \rightarrow y) \rightarrow y) \rightarrow x) \rightarrow x \\
&= (((x \rightarrow y) \rightarrow y) \rightarrow x) \rightarrow ((y \rightarrow x) \rightarrow x) \rightarrow x \quad (b_5 \text{ den}) \\
&= (((x \rightarrow y) \rightarrow y) \rightarrow x) \rightarrow (y \rightarrow x) \quad (b_7 \text{ den}) \\
&\geq y \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow y) \quad (b_9 \text{ den}) \\
&= (x \rightarrow y) \rightarrow (y \rightarrow y) \quad (b_5 \text{ den}) \\
&= (x \rightarrow y) \rightarrow 1 \\
&= 1
\end{aligned}$$

dir. Bu nedenle  $((y \rightarrow x) \rightarrow x) \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow y) = 1$  dir. Diğer bir deyişle  $x \vee y \leq y \vee x$  bulunur. Diğer taraftan eşitsizliğin varlığı için başlangıçta  $y$  yerine  $x$ ;  $x$  yerine  $y$  almak yeterlidir.

**Teorem 3.2.7.** *H Hilbert cebirinin değişmeli olması için gerek ve yeter koşul*

$$c_7) \quad y \vee x = x \vee (y \vee x)$$

*eşitliğinin sağlanmasıdır.*

**İspat.**  $(\Rightarrow)$   $H$  değişmeli Hilbert cebir ve  $x, y \in H$  olsun.  $b_6$  dan  $x \leq y \vee x$  dir.  $c_3$  den  $x \vee (y \vee x) = y \vee x$  dir. Bu da  $c_7$  dir.

$(\Leftarrow)$  Diğer taraftan,  $c_7$  doğru ve her  $x, y \in H$  için  $x \leq y$  olsun.

$$\begin{aligned}
y &= 1 \rightarrow y \quad (b_8 \text{ den}) \\
&= (x \rightarrow y) \rightarrow y \quad (\text{hipotezden}) \\
&= (((x \rightarrow y) \rightarrow y) \rightarrow x) \rightarrow x \quad (c_7 \text{ den}) \\
&= ((1 \rightarrow y) \rightarrow x) \rightarrow x \quad (\text{hipotezden}) \\
&= (y \rightarrow x) \rightarrow x \\
&= x \vee y
\end{aligned}$$

dir.  $c_3$  sağlanır, bir önceki teoremden  $H$  değişmelidir.

**Tanım 3.2.8.**  $H$  bir Hilbert cebir ve  $a \in H$  olsun. Boştan farklı

$$H(a) = \{x \in H \mid a \leq x\}$$

kümesine  $a$  nın **varış bölümü** adı verilir.

**Teorem 3.2.9.**  $H$  bir Hilbert cebirinin değişmeli olması için gerek ve yeter koşul, her  $a, b \in H$

$$c_8) \quad H(a) \cap H(b) = H(a \vee b)$$

olmasıdır.

**İspat.** ( $\Rightarrow$ )  $H$  değişmeli Hilbert cebiri ve  $a, b \in H$  olsun.  $x \in H(a) \cap H(b) \Rightarrow a \leq x$  ve  $b \leq x$  dir.  $a \vee b$ ;  $a$  ile  $b$  için en küçük üst sınır olduğu için  $a \vee b \leq x$  dir O halde  $x \in H(a \vee b)$  dir.

Diğer taraftan  $y \in H(a \vee b)$  ise  $a \vee b \leq y$  dir.  $a \vee b$ ;  $a$  ile  $b$  nin en küçük üst sınırı olduğu için  $a \leq y$ ,  $b \leq y$  dir, yani  $y \in H(a)$  ve  $y \in H(b)$  dir. Dolayısıyla,  $y \in H(a) \cap H(b)$  dir. Bu nedenle  $c_8$  sağlanır.

( $\Leftarrow$ ;)  $c_8$  doğru olsun.  $H$  nin değişmeli olduğunu göstereceğiz.

$$H(a \vee b) = H(a) \cap H(b) = H(b) \cap H(a) = H(b \vee a)$$

dir. O halde  $a \vee b \in H(b \vee a)$  ve  $b \vee a \in H(a \vee b)$  olduğundan  $b \vee a \leq a \vee b$  ve  $a \vee b \leq b \vee a$  bulunur. Yani  $a \vee b = b \vee a$  dir. O halde  $H$  nin değişmeli olduğunu verir.

### 3.3. Tümdengelım Sistemi ve Özellikleri

Aşağıdaki özellikler [13]'den derlenmiştir.

**Tanım 3.3.1.**  $A$  bir Hilbert cebiri ve  $D, A$  nın bir altkümesi olsun. Eğer

$$a_5) 1 \in D$$

$$a_6) x \in D, x \longrightarrow y \in D \text{ ise } y \in D$$

koşulları sağlanıyorsa  $D$  ye  $A$  nın **tümdengelım (deductive) sistemi** denir.

$A$  nın tüm tümdengelım sistemlerinin kümesi  $D_S(A)$  ile gösterilir.

$X$   $A$  nın boştan farklı bir altkümesi olmak üzere  $[X] = \cap \{D \in D_S(A) : X \subseteq D\}$  kümesine  $X$  ile **üretilen tümdengelım sistem** denir.

Eğer  $S = \{a\}$  ( $a \in A$ ) ise  $[a]$  kümesi  $\{a\}$  ile üretilen tümdengelım sistemdir ve buna **esas tümdengelım sistem** denir.

**Önerme 3.3.2.**  $A$  bir Hilbert cebiri ve  $X, A$  nın boştan farklı bir altkümesi ise

$$c_9) [X] = \{x \in A : (x_1, \dots, x_n : x) = 1 \text{ olacak şekilde } x_1, \dots, x_n \in X \text{ vardır.}\}$$

dir.

**Tanım 3.3.3.**  $A_1, A_2$  Hilbert cebirleri ve  $f : A_1 \longrightarrow A_2$  bir dönüşüm olsun. Her  $x, y \in A_1$  için

$$a_7) f(x \longrightarrow y) = f(x) \longrightarrow f(y)$$

ise  $f$  ye **Hilbert cebir morfizması** denir.

**Önerme 3.3.4.**  $A$  bir değişmeli Hilbert cebir olsun. Doğal sıralamaya göre  $A$  bir join-yarı kafestir ve her  $x, y \in A$  için

$$c_{10}) \quad x \vee y = (x \longrightarrow y) \longrightarrow y = (y \longrightarrow x) \longrightarrow x$$

*eşitliği sağlanır.*

**İspat.**  $c_2$  ve  $c_3$  den,  $x \leq (x \longrightarrow y) \longrightarrow y$  ve  $y \leq (x \longrightarrow y) \longrightarrow y$  dir.  $x, y \leq t$  olacak şekilde bir  $t \in A$  alalım.  $t \longrightarrow y \leq x \longrightarrow y$  ise  $c_6$  dan,

$$\begin{aligned} (x \longrightarrow y) \longrightarrow y &\leq (t \longrightarrow y) \longrightarrow y \\ &= (y \longrightarrow t) \longrightarrow t \\ &= 1 \longrightarrow t \\ &= t \end{aligned}$$

elde edilir. O halde  $x \vee y = (x \longrightarrow y) \longrightarrow y$  dir.

**Not 3.3.5.** *A bir sınırlı, değişmeli Hilbert cebiri ise A bir Boole cebiridir, çünkü her  $x \in A$  için*

$$(x \longrightarrow 0) \longrightarrow 0 = (0 \longrightarrow x) \longrightarrow x \text{ ve } x^{**} = x \text{ olduğuna göre } A \text{ bir Boole cebiridir.}$$

**Not 3.3.6.**  *$A_1, A_2$  değişmeli Hilbert cebirleri ve  $f : A_1 \longrightarrow A_2$  bir Hilbert morfizması ise her  $x, y \in A_1$  için*

$$c_{11}) \quad f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$$

*dir. f nin Hilbert morfizması olduğu ve  $\vee$  nin tanımı kullanılarak,*

$$\begin{aligned} f(x \vee y) &= f((x \longrightarrow y) \longrightarrow y) \\ &= f(x \longrightarrow y) \longrightarrow f(y) \\ &= [f(x) \longrightarrow f(y)] \longrightarrow f(y) \\ &= f(x) \vee f(y) \end{aligned}$$

*bulunur.*

**Önerme 3.3.7.** *A bir Hilbert cebiri olsun. Her  $x, y, z \in A$  için  $(x \longrightarrow z) \wedge (y \longrightarrow z)$*

*ve*

$$c_{12}) \quad (x \vee y) \longrightarrow z = (x \longrightarrow z) \wedge (y \longrightarrow z)$$

*dir.*

**İspat.**  $x \vee y$ , en büyük eleman olduğundan  $x \leq x \vee y$  ve  $y \leq x \vee y$  dir.  $c_6$  dan

$$x \longrightarrow z \leq (x \vee y) \longrightarrow z \text{ ve } y \longrightarrow z \leq (x \vee y) \longrightarrow z$$

bulunur.

$t \leq x \longrightarrow z$  ve  $t \leq y \longrightarrow z$  olacak şekilde bir  $t \in A$  alalım.  $x \leq t \longrightarrow z$  ve  $y \leq t \longrightarrow z$  ise,  $(x \vee y) \leq t \longrightarrow z \Rightarrow t \leq (x \vee y) \longrightarrow z$  dir. O halde  $(x \vee y) \longrightarrow z = (x \longrightarrow z) \wedge (y \longrightarrow z)$  elde edilir.

**Sonuç 3.3.8.** *A bir Hilbert cebiri olsun. Her  $x, y, z \in A$  için*

$$c_{13}) \quad x \vee (y \longrightarrow z) = (x \vee y) \longrightarrow (x \vee z)$$

*dir.*

**İspat.**  $c_{12}$  den,

$$\begin{aligned} (x \vee y) \longrightarrow (x \vee z) &= (x \longrightarrow (x \vee z)) \wedge (y \longrightarrow (x \vee z)) \\ &= 1 \wedge (y \longrightarrow (x \vee z)) \\ &= y \longrightarrow (x \vee z) \\ &= y \longrightarrow ((x \longrightarrow z) \longrightarrow z) \end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$\begin{aligned} x \vee (y \longrightarrow z) &= (x \longrightarrow (y \longrightarrow z)) \longrightarrow (y \longrightarrow z) \\ &= (y \longrightarrow (x \longrightarrow z)) \longrightarrow (y \longrightarrow z) \\ &= y \longrightarrow ((x \longrightarrow z) \longrightarrow z) \end{aligned}$$

bulunur.

### 3.4. Bir $\vee$ -Kapalı Sisteme Göre Kesirlerin Değişmeli Hilbert Cebiri

Bu bölüm boyunca  $A$  değişmeli, sınırlı olmayan bir Hilbert cebiri olarak alınacaktır [13].

**Tanım 3.4.1.**  $S, A$  nın boştan farklı bir altkümesi olsun. Her  $x, y \in S$  için

$$a_7) \quad x \vee y \in S$$

ise,  $S$  ye  $A$  nın  $\vee$ -**kapalı sistemi** denir.

$S, A$  nın bir  $\vee$ -kapalı sistemi olmak üzere,  $A$  üzerinde bir  $\theta_S$  ikili işlemi,

' $(x, y) \in \theta_S \Leftrightarrow s \vee x = s \vee y$  olacak şekilde bir  $s \in S$ ' vardır şeklinde tanımlansın.

**Önerme 3.4.2.**  $\theta_S, A$  üzerinde bir kongruans bağıntısıdır.

*İspat.* Öncelikle  $\theta_S$  in  $A$  üzerinde bir denklik bağıntısı olduğunu gösterelim:

Her  $x \in A$  için  $(x, x) \in \theta_S$  dir. Ayrıca her  $x, y \in A$  için  $(x, y) \in \theta_S$  olduğunda  $(y, x) \in \theta_S$  olduğu açıktır.

$x, y, z \in A$  için  $(x, y) \in \theta_S$  ve  $(y, z) \in \theta_S$  olduğunda  $(x, z) \in \theta_S$  olduğunu göstermeliyiz.

$(x, y) \in \theta_S \Rightarrow s \vee x = s \vee y$  olacak şekilde  $\exists s \in S$  vardır.

$(y, z) \in \theta_S \Rightarrow t \vee y = t \vee z$  olacak şekilde  $\exists t \in S$  vardır.

$S, A$  nın  $\vee$ -kapalı sistemi olduğu için  $s \vee t \in S$  dir.  $(s \vee t) \vee x = (s \vee t) \vee z$  olduğunu gösterelim.

$A$  değişmeli olduğundan  $(s \vee t) \vee x = x \vee (s \vee t)$  dir.

$$\begin{aligned} x \vee (s \vee t) &= (x \vee s) \vee t \\ &= (s \vee y) \vee t \quad (hip.) \end{aligned}$$

bulunur.

Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
 (s \vee t) \vee z &= z \vee (s \vee t) \\
 &= (z \vee s) \vee t \\
 &= (s \vee z) \vee t \\
 &= s \vee (z \vee t) \\
 &= s \vee (y \vee t) \quad (\text{hip.}) \\
 &= (s \vee y) \vee t
 \end{aligned}$$

olur.

O halde  $\theta_S$ , geçişme özelliğini sağlar.

Son olarak,  $\theta_S$  in  $\longrightarrow$  a göre kongruans olma koşulunu sağladığı gösterelim:

$x, y, z \in A$  için  $(x, y) \in \theta_S$  ve  $(z, z) \in \theta_S$  ise  $(x \longrightarrow z, y \longrightarrow z) \in \theta_S$  ve  $(z \longrightarrow x, z \longrightarrow y) \in \theta_S$  olduğu gösterilmelidir.

$(x, y) \in \theta_S$  ise  $s \vee x = s \vee y$  olacak şekilde bir  $s \in S$  vardır.  $c_{14}$  den,

$$s \vee (x \longrightarrow z) = (s \vee x) \longrightarrow (s \vee z) = (s \vee y) \longrightarrow (s \vee z) = s \vee (y \longrightarrow z)$$

dir. Benzer şekilde  $s \vee (z \longrightarrow x) = s \vee (z \longrightarrow y)$  olur.

$A[S] := A/\theta_S = \{[x]_{\theta_S} | x \in A\}$  kümesine  $A$  nın  $S$  ye göre kesirlerinin kümesi denir.

$$\mathbf{1} = [1]_{\theta_S} = \{x \in A | (x, 1) \in \theta_S\} = \{x \in A | s \vee x = s \vee 1 = 1, \exists s \in S\}$$

bulunur.

$A[S]$  değişmeli Hilbert cebiridir:

Önce Hilbert cebiri olma koşullarına bakmalıyız:

$$a_1) [x]_{\theta_S} \longrightarrow ([y]_{\theta_S} \longrightarrow [x]_{\theta_S}) = [x]_{\theta_S} \longrightarrow [y \longrightarrow x]_{\theta_S} = [x \longrightarrow (y \longrightarrow x)]_{\theta_S} = [1]_{\theta_S} = \mathbf{1} \text{ bulunur.}$$

$a_2)$

$$\begin{aligned}
 &([x]_{\theta_S} \longrightarrow ([y]_{\theta_S} \longrightarrow [z]_{\theta_S})) \longrightarrow (([x]_{\theta_S} \longrightarrow [y]_{\theta_S}) \longrightarrow ([x]_{\theta_S} \longrightarrow [z]_{\theta_S})) \\
 &= ([x \longrightarrow (y \longrightarrow z)]_{\theta_S}) \longrightarrow ([x \longrightarrow y]_{\theta_S} \longrightarrow [x \longrightarrow z]_{\theta_S}) \\
 &= [(x \longrightarrow (y \longrightarrow z)) \longrightarrow ((x \longrightarrow y) \longrightarrow (x \longrightarrow z))]_{\theta_S} \\
 &= [1]_{\theta_S} \\
 &= \mathbf{1}
 \end{aligned}$$

dir.

$$a_3) [x]_{\theta_S} \longrightarrow [y]_{\theta_S} = [x \longrightarrow y]_{\theta_S} = [y]_{\theta_S} \longrightarrow [x]_{\theta_S} = [y \longrightarrow x]_{\theta_S} = \mathbf{1} = [1]_{\theta_S} \Rightarrow [x]_{\theta_S} = [y]_{\theta_S} \text{ olur.}$$

Ayrıca  $A$  değişmeli olduğu için  $A[S]$  değişmelidir: ( $[x]_{\theta_S} \vee [y]_{\theta_S} = [y]_{\theta_S} \vee [x]_{\theta_S}$ )

$$\begin{aligned} [x]_{\theta_S} \vee [y]_{\theta_S} &= ([x]_{\theta_S} \longrightarrow [y]_{\theta_S}) \longrightarrow [y]_{\theta_S} \\ &= [x \longrightarrow y]_{\theta_S} \longrightarrow [y]_{\theta_S} \\ &= [(x \longrightarrow y) \longrightarrow y]_{\theta_S} \\ &= [(y \longrightarrow x) \longrightarrow x]_{\theta_S} \\ &= [y]_{\theta_S} \vee [x]_{\theta_S} \end{aligned}$$

olur.

**Önerme 3.4.3.**  $A[S]$  sınırlı, değişmeli Hilbert cebiridir ve  $\mathbf{0} = [s]_{\theta_S}$  şeklinde tanımlanır.

**İspat.**  $s, t \in S$  ise  $S$  nin  $A$  nın bir  $\vee$ -kapalı sistem olduğundan  $s \vee t = r$  olacak şekilde  $S$  nin bir  $r$  elemanı vardır. Ayrıca  $A$  değişmeli olduğundan  $r \vee s = r \vee t$  olur. Böylece  $(s, t) \in \theta_S$  dir. O halde  $[s]_{\theta_S} = [t]_{\theta_S}$  dir.

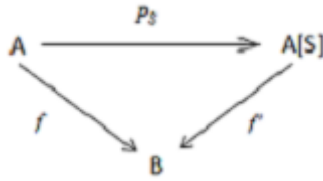
$\mathbf{0} = [s]_{\theta_S}$  ile gösterilen elemanın  $A[S]$  nin en küçük elemanı olduğunu gösterelim:

$$x \in A \text{ olsun. } s \vee (s \vee x) = s \vee x \text{ olduğundan } [s \vee x]_{\theta_S} = [x]_{\theta_S} \text{ olur.}$$

Denklik sınıfı üzerindeki işlemin özelliğinden,  $[s \vee x]_{\theta_S} = [s]_{\theta_S} \vee [x]_{\theta_S}$  dir. O halde  $[s]_{\theta_S} \vee [x]_{\theta_S} = [x]_{\theta_S}$  dir. Buradan  $\mathbf{0} = [s]_{\theta_S} \leq [x]_{\theta_S}$  bulunur.  $\square$

Her  $x \in A$  için  $P_S : A \longrightarrow A[S]$   $P_S(x) := [x]_{\theta_S}$  dönüşümü bir örten Hilbert morfizmasıdır buna **kanonik morfizma** denir.

**Teorem 3.4.4.**  $B$  değişmeli Hilbert cebir ve  $A$  bir Hilbert cebir olsun.  $f(S) = \{0\}$  olacak şekildeki her Hilbert morfizması için bir tek  $f' : A[S] \longrightarrow B$  Hilbert morfizması vardır ve aşağıdaki diagram değişmelidir:



**İspat.**  $[x]_{\theta_S} = [y]_{\theta_S}$  olacak şekilde  $x, y \in A$  elemanlarını alalım. Bu durumda  $s \vee x = s \vee y$  olacak şekilde bir  $s \in S$  vardır.  $f$  in Hilbert morfizması olduğu kullanılarak,  $f(s \vee x) = f(s \vee y) = f(s) \vee f(x) = f(s) \vee f(y)$  bulunur.  $f(S) = \{0\}$  olduğundan,  $f(x) = f(y)$  elde edilir.

$x \in A$  için  $f' : A[S] \rightarrow B$   $f'([x]_{\theta_S}) := f(x)$  şeklinde bir dönüşüm tanımlayalım.  $[x]_{\theta_S} = [y]_{\theta_S}$  olduğunda  $f(x) = f(y)$  olduğundan,  $f'$  iyi tanımlıdır. Ayrıca  $P_S$  nin  $f'$  nün tanımlanışından  $f' \circ P_S = f$  eşitliği vardır.

Her  $[x]_{\theta_S}, [y]_{\theta_S} \in A[S]$  için,

$$\begin{aligned} f'([x]_{\theta_S} \rightarrow [y]_{\theta_S}) &= f'([x \rightarrow y]_{\theta_S}) \\ &= f(x \rightarrow y) \\ &= f(x) \rightarrow f(y) \\ &= f'([x]_{\theta_S}) \rightarrow f'([y]_{\theta_S}) \end{aligned}$$

eşitsizliğinden  $f'$  bir Hilbert morfizmasıdır.

$P_S$  nin örtenliğinden  $f'$  nün tekliği bulunur.

### 3.5. Değişmeli Hilbert Cebiri Üzerindeki Çarpanlar

**Tanım 3.5.1.**  $A$  bir değişmeli Hilbert cebiri ve  $S \subseteq A$  olsun. Her  $x \in S$  ve  $a \in A$  için  $a \vee x \in S$  ise  $S$  ye  $A$  nın  $\vee$ -altkümüsi denir.

$S(A)$  ile  $A$  nın tüm  $\vee$ -altkümüleri gösterilir.

$D_S(A) \subseteq S(A)$  dır ve  $D_1, D_2 \in S(A)$  için  $D_1 \cap D_2 \in S(A)$  olur.

**Önerme 3.5.2.**  $D \in S(A)$  ise,

i)  $1 \in D$

ii)  $x \leq y$  ve  $x \in D$  ise  $y \in D$  dir.

**İspat.**

i)  $x \in D$  alalım.

$1 \in A$  olduğundan  $1 = 1 \vee x \in D$  dir, yani  $1 \in D$  dir.

ii)  $x \leq y$  ise  $x \vee y = y$  dir. O halde  $y \in D$  olur.

**Tanım 3.5.3.**  $D \in S(A)$  ve  $f : D \rightarrow A$  bir dönüşüm olsun. Her  $x \in D$  ve  $a \in A$  için

$$a_8) f(a \vee x) = a \vee f(x)$$

eşitliği sağlanıyorsa  $f$  ye  $A$  üzerinde bir **kısmi çarpan** denir.  $dom(f)$  ile  $f$  in tanım kümesi gösterilir.  $dom(f) = A$  ise  $f$  ye **tam çarpan** adı verilir.

**Örnek 3.5.4.** Her  $x \in A$  için  $\mathbf{0} : A \rightarrow A$ ,  $\mathbf{0}(x) = x$  ve  $\mathbf{1} : A \rightarrow A$ ,  $\mathbf{1}(x) = 1$  şeklinde tanımlanan dönüşümler,  $A$  üzerinde bir tam çarpandır.

**Örnek 3.5.5.**  $a \in A$ , her  $x \in D$  ve  $D \in S(A)$  için  $f_a : D \rightarrow A$ ,  $f_a(x) := a \vee x$  şeklinde tanımlanan dönüşüm  $A$  üzerinde bir çarpandır. (Buna **esas çarpan** adı verilir.)

Eğer  $dom(f_a) = A$  ise  $f_a$ ,  $\tilde{f}_a$  ile gösterilir.

**Önerme 3.5.6.**  $D \in S(A)$  ve  $f : D \rightarrow A$  bir çarpan ise

$$i) f(1) = 1;$$

ii) Her  $x \in D$  için  $x \leq f(x)$  dir.

**İspat.**

i)  $a_8$  da  $a = 1$  alınırsa, her  $x \in D$  için  $f(1 \vee x) = 1 \vee f(x) \Leftrightarrow f(1) = 1$  bulunur.

ii)  $a_8$  da  $a = x$  alınırsa,  $f(x \vee x) = x \vee f(x) \Leftrightarrow f(x) = x \vee f(x) \Leftrightarrow x \leq f(x)$  olur.

**Not 3.5.7.**  $D \in S(A)$  için

$$\mu(D, A) = \{f \mid f : D \longrightarrow A, A \text{ üzerinde çarpan}\}$$

tanımlansın.

$$\mu(A) = \bigcup_{D \in S(A)} \mu(D, A) \text{ olduğu görülür.}$$

Ayrıca  $D_1, D_2 \in S(A)$  için  $f_i \in \mu(D_i, A)$   $i = 1, 2$  ve her  $x \in D_1 \cap D_2$  için

$$f_1 \longrightarrow f_2 : D_1 \cap D_2 \longrightarrow A$$

$$x \longmapsto (f_1 \longrightarrow f_2)(x) := f_1(x) \longrightarrow f_2(x)$$

olarak tanımlansın.

**Önerme 3.5.8.**  $f_1 \longrightarrow f_2 \in \mu(D_1 \cap D_2, A)$  dir.

*İspat.*  $x \in D_1 \cap D_2$  ve  $a \in A$  ise

$$\begin{aligned} (f_1 \longrightarrow f_2)(a \vee x) &= f_1(a \vee x) \longrightarrow f_2(a \vee x) \\ &= (a \vee f_1(x)) \longrightarrow (a \vee f_2(x)) \\ &= a \vee (f_1(x) \longrightarrow f_2(x)) \quad (c_{14}) \\ &= a \vee (f_1 \longrightarrow f_2)(x) \end{aligned}$$

bulunur. O halde  $f_1 \longrightarrow f_2 \in \mu(D_1 \cap D_2, A)$  dir.

**Sonuç 3.5.9.**  $(\mu(A), \longrightarrow, \mathbf{1}, \mathbf{0})$  bir sınırlı Hilbert cebiridir.

*İspat.* Önerme 3.5.8 den  $\mu(A)$  nın bir Hilbert cebir olduğu açıktır. Eğer  $D \in S(A)$ ,  $f \in \mu(D, A)$  ve  $x \in D$  ise, Önerme 3.5.6 dan,  $\mathbf{0}(x) = x \leq f(x) \leq \mathbf{1} = \mathbf{1}(x)$  elde edilir.

**Önerme 3.5.10.** Her  $a \in A$  için  $v_A : A \longrightarrow \mu(A)$

$$a \longmapsto v_A(a) := \bar{f}_a$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm bir Hilbert cebir morfizmasıdır.

**İspat.**  $a, b \in A$  ise

$$\begin{aligned}
 (\bar{f}_a - \bar{f}_b)(x) &= \bar{f}_a(x) - \bar{f}_b(x) \\
 &= (a \vee x) \longrightarrow (b \vee x) \\
 &= (a \longrightarrow b) \vee x \quad (c_{14}) \\
 &= \bar{f}_{a \longrightarrow b}(x).
 \end{aligned}$$

O halde  $v_A(a) \longrightarrow v_A(b) = v_A(a \longrightarrow b)$  bulunur.

**Tanım 3.5.11.**  $D \subseteq A$  olsun. Her  $x, y, z \in A$  için  $z \vee x = z \vee y$  olduğunda  $x = y$  ise  $D$  ye **regüler** denir.

**Örnek 3.5.12.** Her  $x, y, z \in A$  için  $z \vee x = z \vee y$  olduğunda özel olarak  $z = x$  alınırsa  $x = x \vee y \Rightarrow y \leq x$  ve benzer şekilde  $z = y$  alınırsa  $x \leq y$  olacağından  $x = y$  bulunur. Yani  $A$  regülerdir.

**Örnek 3.5.13.**  $A$  sınırlı ve  $0 \in D$  ise  $D$  regülerdir.

**Not 3.5.14.**  $R(A) = \{D \subseteq A : D, A \text{ nın regüler alt kümesi}\}$  ile tanımlansın.

**Önerme 3.5.15.**  $D_1, D_2 \in S(A) \cap R(A)$  ise  $D_1 \cap D_2 \in S(A) \cap R(A)$  dir.

**İspat.**  $x, y \in A$  ve her  $z \in D_1 \cap D_2$  için  $z \vee x = z \vee y$  olsun.  $i = 1, 2$  ve her  $z_i \in D_i$  için  $z_1 \vee z_2 \in D_1 \cap D_2$  olduğundan

$$\begin{aligned}
 (z_1 \vee z_2) \vee x &= (z_1 \vee z_2) \vee y \Rightarrow z_1 \vee (z_2 \vee x) = z_1 \vee (z_2 \vee y) \\
 &\Rightarrow z_2 \vee x = z_2 \vee y \\
 &\Rightarrow x = y
 \end{aligned}$$

bulunur.

**Sonuç 3.5.16.**  $\mu_r(A) = \{f \in \mu(A) : \text{dom}(f) \in S(A) \cap R(A)\}$  ise  $\mu_r(A)$ ,  $\mu(A)$  nın bir Hilbert altcebiridir.

**Tanım 3.5.17.**  $f_1$  ve  $f_2$   $A$  üzerinde iki çarpan olsun. Her  $x \in \text{dom}(f_2)$  için  $\text{dom}(f_2) \subseteq \text{dom}(f_1)$  ve  $f_1(x) = f_2(x)$  ise  $f_1$  ye  $f_2$  nin **genişletilmiş** denir ve  $f_2 \leq f_1$  ile gösterilir.

Ayrıca eğer  $f$  çarpanı kesin büyük bölgeye genişletilemiyorsa  $f$  e **maksimal çarpan** denir.

**Önerme 3.5.18.** i)  $f_1, f_2 \in \mu(A)$ ,  $f \in \mu_r(A)$  ve  $f \leq f_1$ ,  $f \leq f_2$  ise  $f_1$  ve  $f_2$ ,  $dom(f_1) \cap dom(f_2)$  üzerinde çakışır.

ii) Her  $f \in \mu_r(A)$  çarpanı bir maksimal çarpana genişletilebilir. Ayrıca,  $a \in A$  ve  $dom(f_a) \in S(A) \cap R(A)$  için, her  $f_a$  esas çarpanı tek türlü olarak tam  $\bar{f}_a$  çarpanına genişletilebilir ve her esas olmayan çarpan maksimal esas olmayan bir çarpana genişletilebilir.

**İspat.**

i) Eğer  $f_1(t) + f_2(t)$  olacak şekilde  $t \in dom(f_1) \cap dom(f_2)$  alınırsa  $t' \vee f_1(x) \neq t' \vee f_2(x) \Leftrightarrow f_1(t' \vee t) + f_2(t' \vee t)$  olacak şekilde bir  $t' \in dom(f)$  vardır. Bu da  $t' \vee t \in dom(f)$  olması ile çelişir.

ii) Öncelikle  $f_a$  nın esas olmayan bir çarpana genişletilemeyeceğini ispatlayalım.  $D = dom(f_a) \in S(A) \cap R(A)$ ,  $f_a : D \rightarrow A$  ve  $D' \in S(A)$ ,  $D \subseteq D'$  olduğunu kabul edelim. Bu durumda,  $D' \in R(A)$  dır. Ayrıca  $f_a$  ya genişleyen, esas olmayan bir  $f \in \mu(D', A)$  alalım.  $f$  esas olmadığından,  $f(x_0) \neq a \vee x_0$  olacak şekilde  $x_0 \in D'$  ve  $x_0 \notin D$  vardır.  $D \in R(A)$  olduğundan,  $t \vee f(x_0) \neq t \vee (a \vee x_0) \Leftrightarrow f(t \vee x_0) \neq a \vee (t \vee x_0)$ . Bu da  $f_a \leq f$  olması ile çelişir. Bu nedenle  $f_a$ , tek türlü olarak  $\bar{f}_a$  ye genişletilir.

$f \in \mu_r(A)$  esas olmasın.

$\mu_f = \{(D, g) : D \in S(A), g \in \mu(D, A), dom(f) \subseteq D \text{ ve } g|_{dom(f)} = f\}$  olsun. Bu durumda  $(D, g) \in \mu_f$  ise  $D \in S(A) \cap R(A)$  dır.

$\mu_f, (D_1, g_1) \leq (D_2, g_2) \Leftrightarrow D_1 \subseteq D_2$  ve  $g_2|_{D_1} = g_1$  ile sıradır.

$\{(D_k, g_k) : k \in K\}$  kümesi  $\mu_f$  de bir zincirdir.  $D' = \bigcup_{k \in K} D_k \in S(A)$  ve  $dom(f) \subseteq D'$  dir.

$x \in D_k$  ise  $g' : D' \rightarrow A$ ,  $g'(x) := g_k(x)$  şeklinde tanımlanır.

$g' \in \mu(D', A)$  ve  $g' \upharpoonright_{\text{dom}(f)} = f$  dir. ( $x \in \text{dom}(f) \subseteq D'$  ise  $x \in D'$  ve  $x \in D_k$  olacak şekilde bir  $k \in K$  vardır. Bu nedenle  $g'(x) = g_k(x) = f(x)$  dir.)

Böylece  $(D', g')$ ,  $\{(D_k, g_k) : k \in K\}$  ailesi için bir üst sınırdır. Zorn Lemma' dan,  $\mu_f$ ,  $f$  yi genişleten en az bir maksimal  $h$  çarpanını içerir.  $f$  esas olmadığından ve  $h$ ,  $f$  yi genişlettiğinden,  $h$  da esas değildir.

**Not 3.5.19.**  $\mu_r(A)$  Hilbert cebiri üzerinde bir  $g_A$  bağıntısı,

$$(f_1, f_2) \in g_A \Leftrightarrow "f_1 \text{ ve } f_2 \text{ kesişim kümelerinin üzerinde eşittir.}"$$

şeklinde tanımlansın.

**Önerme 3.5.20.**  $g_A, \mu_r(A)$  üzerinde bir kongruans bağıntısıdır.

**İspat.**  $g_A$  nın simetrik ve yansımali olması tanımlandığından açıktır. Geçişmeliliğini göstermek için  $(f_1, f_2) \in g_A$  ve  $(f_2, f_3) \in g_A$  alalım.

$(f_1, f_2) \in g_A$  dan  $f_1$  ve  $f_2$  tanım bölgeleri üzerinde

$(f_2, f_3) \in g_A$  dan  $f_2$  ve  $f_3$  tanım bölgeleri üzerinde ve benzer şekilde

çakışır. Tersine, eğer  $f_1(x_0) \neq f_3(x_0)$  olacak şekilde öyle bir  $x_0 \in \text{dom}(f_1) \cap \text{dom}(f_3)$  vardır,  $t \vee f_1(x_0) \neq t \vee f_3(x_0) \Leftrightarrow f_1(t \vee x_0) \neq f_3(t \vee x_0)$  olacak şekilde bir  $t \in \text{dom}(f_2)$  vardır.  $t \vee x_0 \in \text{dom}(f_1) \cap \text{dom}(f_2) \cap \text{dom}(f_3)$  olduğundan bu bir çelişkidir.

**Not 3.5.21.**  $f \in \mu_r(A)$  için, modulo  $g_A$  ya göre  $f$  in denklik sınıfı  $[f]$  ve  $A'' = \mu_r(A)/g_A$  şeklinde tanımlansın.

**Önerme 3.5.22.**  $\bar{v}_A : A \rightarrow A''$ ,  $\bar{v}_A := \overline{[f_a]}$  şeklinde tanımlanan dönüşüm, Hilbert cebirlerinin bir injektif morfizmidir ve  $\bar{v}_A(A) \in R(A'')$  dir.

**İspat.** Önerme 3.5.10 dan  $\overline{v}_A$  bir Hilbert morfizmidir.  $\overline{v}_A$  nin bire-bir olduğunu gösterelim: Her  $a, b \in A$  ve  $\overline{v}_A(a) = \overline{v}_A(b)$  olsun. Her  $x \in A$  için

$$\begin{aligned} [\overline{f}_a] = [\overline{f}_b] &\Leftrightarrow (\overline{f}_a, \overline{f}_b) \in g_A \\ &\Leftrightarrow \overline{f}_a(x) = \overline{f}_b(x) \\ &\Leftrightarrow x \vee a = x \vee b \\ &\Leftrightarrow a = b \end{aligned}$$

elde edilir.

$\overline{v}_A(A) \in R(A'')$  olduğunu göstermek için çelişki ile ispat yöntemini kullanalım.

$[f_1] \neq [f_2]$  olacak şekilde  $f_1, f_2 \in \mu_r(A)$  olduğunu kabul edelim. Yani,  $f_1(x_0) \neq f_2(x_0)$  olacak şekilde öyle bir  $x_0 \in \text{dom}(f_1) \cap \text{dom}(f_2)$  vardır. Her  $a \in A$  için

$[f_1] \vee [\overline{f}_a] = [f_2] \vee [\overline{f}_a] \Leftrightarrow [f_1 \vee \overline{f}_a] = [f_2 \vee \overline{f}_a]$  olduğundan her  $x \in \text{dom}(f_1) \cap \text{dom}(f_2)$  ve  $a = x_0$  için,

$(f_1 \vee \overline{f}_{x_0})(x) = (f_2 \vee \overline{f}_{x_0})(x) \Leftrightarrow x_0 \vee x \vee f_1(x) = x_0 \vee x \vee f_2(x)$  bulunur.  $x = x_0$  için,

$$f_1(x_0) \vee x_0 = f_2(x_0) \vee x_0 \Leftrightarrow f_1(x_0) = f_2(x_0)$$

olur. Bu ise bir çelişkidir.

**Not 3.5.23.** Her  $a \in A$  için, Önerme 3.5.18 den  $\overline{f}_a, [\overline{f}_a]$  üzerinde tek maksimal çarpan olduğundan  $[\overline{f}_a], \overline{f}_a$  ile tanımlanabilir.  $\overline{v}_A$ , Hilbert cebirlerin bir injektif morfizmi olduğundan  $A$  nın elemanları,  $\{\overline{f}_a : a \in A\}$  kümesinin elemanları ile tanımlanabilir.

**Önerme 3.5.24.**  $f \in \mu_r(A)$  ve  $D = \text{dom}(f) \cap S(A) \cap R(A)$  olmak üzere,  $[f] \in A''$  ise

$$D \subseteq \{a \in A : \overline{f}_a \vee [f] \in A\}$$

dır.

**İspat.**  $a \in D$  olsun. Çelişki ile ispat yöntemini kullanalım.  $\overline{f}_a \vee [f] \notin A$  olduğunu kabul edelim. Yani  $[\overline{f}_a \vee f] \notin \overline{v}_A(A)$  olsun. Bu nedenle  $\overline{f}_a \vee f$  bir esas olmayan çarpandır.

Önerme 3.5.18 (ii) den,  $\bar{D} \in S(A)$  olmak üzere,  $\bar{f}_a \vee f, \bar{f} : \bar{D} \rightarrow A$  esas olmayan maksimal çarpına genişletilebilir. Bu nedenle, her  $x \in \bar{D}$  ve  $D \subseteq \bar{D}$  için,  $\bar{f}(x) = (\bar{f}_a \vee f)(x) = a \vee x \vee f(x) = a \vee f(x)$  olur.  $a \in D$  olduğundan,

$$\bar{f}(x) = f(a \vee x) = x \vee f(a) = a \vee f(x)$$

dır, yani  $\bar{f}|_D$  bir esas çarpandır. Bu ise bir çelişkidir.

## KAYNAKLAR

- [1] Abbott, J.C. 1967. Semiboolean Algebras. **Math. vesnik**, 4: 177-198.
- [2] Balbes, R. and Dwinger, Ph. 1974. Distributive Lattices. University of Missouri Press, Columbia.
- [3] Busneag D. 1985. A Note On Deductive Systems of A Hilbert Algebra. **Kobe J. Math.**, 2: 29-35.
- [4] Busneag, D. 1988. Hilbert algebras of fractions and maximal Hilbert algebras of quotients. **Kobe Journal Math.**, 5: 161-172.
- [5] Busneag, D. 2006. Categories of Algebraic Logic, Editura Academiei Romane, Bucharest.
- [6] Chajda, I and Halas, R. 2006. Congruences and ideals in Hilbert algebras. **Kyungpook mathematical journal**, 39(2): 429-429.
- [7] Diego, A. 1966. Sur Les Algebres De Hilbert. Collection De Logique Mathematique, Paris.
- [8] Dudek, 1999. On Ideals In Hilbert Algebras. **Acta Universitatis Palackianae Olomucensis**, 38: 31-34.
- [9] Halas, R. 2002. Remarks On Commutative Hilbert Algebras. **Math. Bohemica** 127, 4: 525-529.
- [10] Jun, Y.B. 1994. Deductive Systems of Hilbert Algebras. **Math. Japon**, 43(1): 51-54.
- [11] Jun, Y.B. 1996. Commutative Hilbert Algebras. **Soochow Journal of Mathematics**, 27(4): 477-484.
- [12] Karaçay, T. 2014. Soyut Matematik, Akıl Yürütmenin Başlangıcı, Seçkin Yayıncılık, Ankara.
- [13] Piciu, D, Busneag C. 2010. The Localization of Commutative (Unbounded) Hilbert Algebras. **Mathematical Reports**, 12(62): 285-300.
- [14] Schmid, 1980. J. Distributive Lattices and Ring of Quotients. **Coll.Math.Societatis Janos Bolyai**, 33: 675-696.



## ÖZ GEÇMİŞ

### KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Hatice ŞİMŞEK  
Doğum Yeri ve Tarihi : Aydın 04.02.1992

### EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi : Çankırı Karatekin Üniversitesi  
Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü  
Yüksek Lisans Öğrenimi : Adnan Menderes Üniversitesi  
Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü  
Bildiği Yabancı Diller :

### BİLİMSEL FAALİYETLERİ

a) Yayınlar  
-SCI :

-Diğer :

b) Bildiriler  
-Uluslararası :

-Ulusal

c) Katıldığı Projeler

### İŞ DENEYİMİ

Çalıştığı Kurumlar ve Yıl : Aydın Büyükşehir Belediyesi,  
Kültür Merkezi, Matematik Öğretmenliği  
(2015 - ...)

### İLETİŞİM

E-posta Adresi : hatice\_simsek2009@hotmail.com  
Tarih :