



**NORMAL ALTGRUPLAR İÇİN MİNİMUM ŞARTINI SAĞLAYAN
ÇÖZÜLEBİLİR GRUPLAR**

Hatice Büşra GÜNTÜRK

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

TEMMUZ 2019

Hatice Būřra GÜNTÜRK tarafından hazırlanan “NORMAL ALTGRUPLAR İÇİN MİNİMUM ŞARTINI SAĞLAYAN ÇÖZÜLEBİLİR GRUPLAR” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi Matematik Ana Bilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Aynur ARIKAN

Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Başkan: Doç. Dr. Sevgi ATLIHAN

Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Üye: Doç. Dr. Murat ŞAHİN

Matematik Ana Bilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Tez Savunma Tarihi: 24/07/2019

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Prof. Dr. Sena YAŞYERLİ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Hatice Büşra GÜNTÜRK

24/07/2019

NORMAL ALTGRUPLAR İÇİN MİNİMUM ŞARTINI SAĞLAYAN ÇÖZÜLEBİLİR GRUPLAR

(Yüksek Lisans Tezi)

Hatice Büşra GÜNTÜRK

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Temmuz 2019

ÖZET

Bu çalışmada David Mc Dougall'ın "Soluble Groups with the Minimum Condition for Normal Subgroups" başlıklı makalesi çalışılmıştır. Bu makalede David Mc Dougall, sonlu indeksli öz altgrupları olmayan ve normal altgrupları için minimum şartını sağlayan metabeliyan grupların sınıfını incelemiş ve bu yapıya sahip grupların sınıfı $\mathfrak{X}$ ile göstermiştir. Bu çalışmadaki ana sonuçlar bu yapıya sahip $\mathfrak{X}$ grupları için verilmiştir. $\mathfrak{X}$ gruplarının her p asal sayısı için Sylow p -altgrupları abeliyan olduğu ve bu sonuç kullanılarak derived altgrubu üzerinde parçalandıkları ve tümleyenlerinin eşlenik olduğu gösterilmiş. Benzer yapıya sahip grup inşaları verilmiştir. Böylece normal altgruplar için minimum şartını sağlayan çözülebilir gruplar hakkında temel sonuçlar elde edilmiştir. Bu tezde David Mc Dougall'ın yukarıda sözü edilen makalesi incelenmiştir. Burada kullanılan değerli fikirler ve yöntemler detaylı olarak açıklanmış, ispatlardaki boşluklar doldurulmuştur. Böylece David Mc Dougall'ın bu çalışması daha anlaşılır hale getirilmiştir ve pek çok özelliğin ispatı verilmiştir.

Bilim Kodu : 20401

Anahtar Kelimeler : çözülebilir grup, metabeliyan grup, minimum şart, parçalanma genişlemesi, chernikov grup, periyodik grup

Sayfa Adedi : 65

Danışman : Prof. Dr. Aynur ARIKAN

SOLUBLE GROUPS WITH THE MINIMUM CONDITION FOR NORMAL
SUBGROUPS

(M. Sc. Thesis)

Hatice Büşra GÜNTÜRK

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

July 2019

ABSTRACT

In this study, the article called “Soluble groups with the minimum condition for normal subgroups” by David McDougall was studied. In the article, the class of metabelian groups having no proper of a finite index and satisfying the minimum condition for normal subgroups have been studied. Groups with this structure are denoted by $\mathfrak{X}$. Main results in this study are given for this structure $\mathfrak{X}$. It is shown that the Sylow p - subgroups of $\mathfrak{X}$ groups are abelian for all primes p . Using this result, it can be seen that an $\mathfrak{X}$ group splits over its derived group and that the complements are conjugate. Group constructions which have similar structure have been given. Thus, basic results about soluble groups with the minimum condition for normal subgroups were obtained. In this thesis the Work of David Mc Dougall containing the above results are studied. The ideas and the methods used in the proofs are explained in detail and the gaps in the proofs are filled. Furthermore this work of David Mc Dougall has been made more understandable and proof of many properties have been provided.

Science Code : 20401

Key Words : soluble group, metabelian group, minimal condition, split extension, chernikov group, periodic group

Page Number : 65

Supervisor : Prof. Dr. Aynur ARIKAN

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca yardım ve desteğini esirgemeyen, ilminden faydalandığım sayın hocam Prof. Dr. Aynur ARIKAN' a ve bana destek olan aileme ve arkadaşlarıma teşekkürü bir borç bilirim.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
RESİMLERİN LİSTESİ	viii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	ix
1. GİRİŞ.....	1
2. BAZI HAZIRLIK TANIM VE SONUÇLAR.....	3
3. TORSİYON GRUPLAR VE DİVİSİBLE GRUPLAR.....	19
4. SYLOW ALTGRUPLARI.....	31
5. SAYILABİLİRLİK.....	39
6. PARÇALANMA (SPLİTTİNG) TEOREMLERİ.....	45
7. ÖRNEKLER.....	53
8. SONUÇ VE ÖNERİLER	61
KAYNAKLAR	63
ÖZGEÇMİŞ	65

RESİMLERİN LİSTESİ

Resim	Sayfa
Resim 3.1. Diyagram I.....	23
Resim 3.2. Diyagram II.....	23
Resim 3.3. Diyagram III	25



SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler

Açıklamalar

$$H \leq G, H < G, H \triangleleft G$$

H, G nin altgrubu, öz altgrubu, normal altgrubu

$$\langle X \rangle$$

X in elemanları tarafından üretilen grup

$$\langle X, Y \rangle$$

$$\langle X \cup Y \rangle$$

$$x^y$$

$y^{-1}xy$, x in y ile eşleniği

$$H^x$$

$$x^{-1}Hx$$

$$[x, y]$$

$x^{-1}xy$, x ile y nin komütatör çarpımı

$$[X, Y]$$

$\langle [x, y]: x \in X, y \in Y \rangle$, X ile Y nin komütatör altgrubu

$$G'$$

$[G, G]$, G nin derived (komütatör) altgrubu

$$|X|$$

X in kardinalitesi

$$|G: H|$$

H nin G deki indeksi

$$G/H$$

G nin H ile bölüm grubu

$$Z(G)$$

G nin merkezleyeni

$$C_G(X)$$

X nin G deki merkezleyeni

$$N_G(H)$$

H nin G deki normalleyeni

$$X^G$$

X in G içindeki normal kapanışı

$$Ker(\varphi), Im(\varphi)$$

φ nin çekirdeği, görüntü kümesi

$$G \cong K$$

G grubu K grubuna izomorf

$$G \times H$$

G ile H nin direkt çarpımı

$$G^m$$

Bütün g^m ler tarafından üretilen grup

$$tor A$$

A nın periyodik maksimal değişmeli altgrubu

$$H \text{ char } G$$

H, G nin karakteristik altgrubu

$$A[p]$$

Mertebesi p yi bölen elemanlarının A daki değişmeli altgrubu

$$Aut(G)$$

G nin otomorfizmaları

$$End(G)$$

G nin endomorfizmaları

$$C_p^\infty$$

Quasi devirli grup

Simgeler**Açıklamalar** **G_p** G nin p -asal komponenti

1. GİRİŞ

Altgrupları için minimum şartını sağlayan bir çözülebilir grubun bir periyodik köklü abeliyan grubun sonlu bir grup ile genişlemesi olduğunu Chernikov [1] de göstermiştir. Böyle bir grup periyodik ve sayılabilir olmak zorundadır. Bear [2] de normal altgrupları için minimum şartını sağlayan çözülebilir grupların periyodik olduğunu göstermiştir. Fakat bu sonucun dışında böyle grupların küçük bir kısmını göz önüne almıştır.

Carin [3] de altgruplar için minimum şartını sağlamayan normal altgruplar için minimum şartını sağlayan bir metabeliyan bir grup inşa etmiştir.

Bu çalışmada Carin'in grubuna oldukça benzeyen bir grubun normal altgruplarının sonlu grup genişlemesi için minimum şartını sağlayan metabeliyan bir grup olduğu gösterilmiştir. Daha doğrusu 5.4. Teoremden normal altgruplar için minimum şartı sağlayan metabeliyan grubun sayılabilir olduğu gösterilmiştir. 4.5. Teoremden her alt grubun tüm π asallarının kümesi için Sylow π -gruplarının eşlenik olduğu gösterilmiştir.

$\mathfrak{X}$, sonlu indeksli öz altgruba sahip olmayan normal altgruplar için minimum şartını sağlayan metabeliyan gruplarının sınıfını gösterebilir. Normal gruplar için minimum şartını sağlayan herhangi bir metabeliyan grubu bir $\mathfrak{X}$ grubunun sonlu bir grup ile genişletilmesi olduğu 5.2. Lemmada gösterilmiştir.

Bu çalışmadaki ana sonuçlar $\mathfrak{X}$ grubu ile ilgilidir. Her p asal sayısı için bir $\mathfrak{X}$ grubunun Sylow p altgruplarının abeliyan olduğu 4.2. Teoremden gösterilmiştir. Bu sonucu kullanarak bir $\mathfrak{X}$ grubunun komütatör grubu üzerinde parçalanış olduğu ve tümleyenlerinin eşlenik olduğu gösterilebilir. Bunlar 6.6. Teorem ve 6.7. Sonuçta gösterilmiştir. Bu sonuçlar 7.2. Örnekte gösterilen grupların $\mathfrak{X}$ den daha büyük bir grup sınıfları için gösterilmiştir.

Elimizdeki metabeliyan gruplar üzerindeki bu sonuçlar normal altgruplar için minimum şartını sağlayan herhangi bir komütatörlük uzunluğuna sahip olan çözülebilir gruplar için uygulanabilir. 7.3. Örnekte normal altgruplar için minimum şartı sağlayan bir grubun merkez-by-metabeliyan grup inşası elde edilmiştir. Bu gruplar sonlu indeksli bir öz altgruba sahip değildir. Ayrıca bu gruplar abeliyan olmayan Sylow p -gruba sahip ve derived serisinin terimleri üzerine parçalanmaya sahip değildir.

Son olarak 7.4. Örnekte herhangi bir derived uzunluğuna sahip sonlu indeksli öz altgrubu olmayan, normal altgruplar için minimum şartları sağlayan bir çözülebilir grubun genişlemesi oluşturulmuştur.



2. BAZI HAZIRLIK TANIM VE SONUÇLAR

2.1. Tanım

$\mathfrak{X}$ elemanları gruplar olan bir sınıf olsun. Eğer

i. $\mathfrak{X}$ mertebesi bir olan grubu içerir,

ii. $G_1 \cong G \in \mathfrak{X}$ ise $G_1 \in \mathfrak{X}$;

özellikleri sağlanıyorsa $\mathfrak{X}$ sınıfına bir *grup-teorik sınıf* (veya grupların sınıfı) denir. Örneğin bütün sonlu gruplar ve bütün abeliyan gruplar bir grup-teorik sınıf oluştururlar. Daha genel olarak $\mathcal{P}$ bir grup özelliği olmak üzere eğer mertebesi 1 olan grup $\mathcal{P}$ özelliğine sahip ve $\mathcal{P}$ özelliğine sahip her G grubu için $G_1 \cong G$ iken G_1 grubu $\mathcal{P}$ özelliğine sahipse $\mathcal{P}$ ye *grup-teorik özellik* denir. Her grup-teorik sınıfına bir grup-teorik özelliği ve her grup-teorik özelliğine bir grup-teorik sınıfı karşılık geldiğinden ikisi birbirlerinin yerine kullanılabilir. $\mathfrak{X}$ grup sınıfına ait bir gruba $\mathfrak{X}$ -grup denir. Eğer bir grubun altgrubu $\mathfrak{X}$ -grup ise bu altgruba $\mathfrak{X}$ -altgrup denir.

2.2. Tanım

X , bir G grubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi olsun. G nin X i kapsayan altgruplarının ara kesitine X tarafından üretilen altgrup denir. X tarafından üretilen altgrup $\langle X \rangle$ şeklinde gösterilir. Eğer n bir pozitif tamsayı olmak üzere G grubu $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ kümesi tarafından üretiliyorsa G ye *n-üreteçli grup* denir. Eğer G grubu *n-üreteçli* ise G ye *sonlu üreteçli* denir. 1-üreteçli $\langle x \rangle = \langle \{x\} \rangle$ grubuna *devirli grup* denir.

G grubunun altgruplarından oluşan küme $\{X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ olmak üzere X_λ lar tarafından üretilen grup $\langle \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \rangle$ şeklinde tanımlanır. Bu altgrup $\langle X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda \rangle$ veya $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ olacak şekilde Λ bir sonlu küme ise

$$\langle X_{\lambda_1} X_{\lambda_2}, \dots, X_{\lambda_n} \rangle$$

şeklinde yazılır.

Eğer $\langle g, X \rangle = G$ iken her zaman $\langle X \rangle = G$ oluyorsa g elemanına G nin *üreteç olmayan elemanı* denir.

2.3. Tanım

G bir grup ve $x, y \in G$ olsun.

$$x^y = y^{-1}xy$$

elemanına x in y ile *eşleniği* (konjugesi) denir.

X ve Y , G nin boştan farklı altkümeleri olsun. G nin X in Y ile *eşleniği* olan altgrubu

$$X^Y = \langle x^y \mid x \in X, y \in Y \rangle$$

olarak tanımlanır.

$$X^G = \langle g^{-1}Xg \mid g \in G \rangle$$

altgrubuna ise X in G içindeki *normal kapanışı* denir.

2.4. Tanım

G bir grup ve $x_1, x_2, \dots, x_n \in G$ olsun.

$$[x_1, x_2] = x_1^{-1}x_2^{-1}x_1x_2$$

elemanına x_1 ile x_2 nin *komütatörü* denir. $[x_1] = x_1$ ve genel olarak $n \geq 2$ olmak üzere n ağırlıklı basit bir komütatör

$$[x_1, x_2, \dots, x_n] = [[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}], x_n]$$

şeklinde tanımlanır. X_1 ve X_2 , G nin boştan farklı altkümeleri olsun. X_1 ve X_2 nin *komütatör altgrubu*

$$[X_1, X_2] = \langle [x_1, x_2] \mid x_1 \in X_1, x_2 \in X_2 \rangle$$

olarak tanımlanır. Özel olarak $X_1 = X_2 = G$ ise $[G, G] = G'$ komütatör grubuna G nin komütatör (derived) altgrubu denir. Daha genel olarak $[X_1] = \langle X_1 \rangle$ ve $n \geq 2$ olmak üzere

$$[X_1, X_2, \dots, X_n] = [[X_1, X_2, \dots, X_{n-1}], X_n]$$

olarak tanımlanır.

2.5. Tanım

G bir grup ve $H \leq G$ olsun. H nın G içindeki sol (veya sağ) kosetlerinin kümesinin kardinalitesine H nın G içindeki indeksi denir ve $|G:H|$ ile gösterilir.

2.6. Tanım

G bir grup ve A boştan farklı bir küme olsun. Bir

$$*: G \times A \rightarrow A, (g, a) \mapsto *((g, a)) = g * a$$

fonksiyonu verilsin. Eğer

i. Her $a \in A$ için $e * a = a$ ise,

ii. Her $a \in A$ ve $g, h \in G$ için $(gh) * a = g * (h * a)$ ise,

o zaman $*$ fonksiyonuna G nin A üzerine bir etkisi ve A ya bir G -kümesi denir.

2.7. Tanım

Bir G grubu boştan farklı bir Ω kümesi üzerine etki ettiğinde Ω nın tipik bir α noktası (elemanı) G nin elemanları tarafından farklı noktalara hareket ettirilir ya da sabit bırakılır. α nın bu görüntülerinin kümesine G altında α nın yörüngesi denir ve

$$\alpha^G = \{\alpha^x | x \in G\}$$

ile gösterilir. α yı sabit bırakan G nin elemanları kümesine de α nın G içindeki dengeleyeni denir ve

$$G_\alpha = \{x \in G | \alpha^x = \alpha\}$$

ile gösterilir. Eğer G altında Ω nın bir tek yörüngesi varsa veya her $\alpha, \beta \in \Omega$ için $\alpha^x = \beta$ olacak şekilde bir $x \in G$ varsa G ye Ω üzerinde geçişli (*transitive*) denir. G kendi üzerine $(x, g) \rightarrow x^g = g^{-1}xg$ olacak şekilde eşlenikleme şeklinde etki etsin. x in G içindeki $\{g^{-1}xg | g \in G\}$ yörüngesine x in *eşlenik sınıfı* denir.

G nin bir H altgrubu G üzerine eşlenikleme şeklinde etki etsin. x in

$$H_x = \{h \in H : h^{-1}xh = x\}$$

dengeleyenine x in H içindeki *merkezleyeni* denir ve $C_H(x)$ ile gösterilir. $H = G$ ise $C_G(x)$ e x in *merkezleyeni* denir. Ω kümesi üzerinde geçişli bir G eğer her $\alpha \in \Omega$ için $G_\alpha = 1$ ise, yani sadece birim eleman Ω nın her noktasını sabit bırakıyorsa, temsile (etkiye) *regüler temsil (etki)* denir. H altgrubu G nin bütün altgruplarından oluşan S kümesine eşlenikleme şeklinde etki etsin. $K \in S$ nin H içindeki

$$\{h \in H : h^{-1}Kh = K\}$$

dengeleyenine K nın H içindeki *normalleyeni* denir ve $N_H(K)$ ile gösterilir. $H = G$ ise $N_G(K)$ ye K nın normalleyeni denir.

$$Z(G) = \{z \in G : \forall x \in G \text{ için } zx = xz\}$$

altgrubuna G nin merkezi denir.

2.8. Tanım

G bir grup olsun. G den G ye tanımlı bir homomorfizmaya G nin bir *endomorfizması*, G den G ye tanımlı izomorfizmaya G nin bir *otomorfizması* denir. G nin bütün

endomorfizmalarının kümesi $End(G)$ ve bütün otomorfizmalarının kümesi $Aut(G)$ ile gösterilir. $Aut(G)$, fonksiyonların bileşke işlemine göre bir gruptur.

2.9. Tanım

G bir grup olsun. Eğer p bir asal sayı olmak üzere her $g \in G$ için $| \langle g \rangle | = p^k$ olacak şekilde bir $k \geq 0$ tamsayısı varsa G ye p -grup denir. Eğer $H \leq G$ olmak üzere H altgrubu bir p -grupsa H ya da G nin p -altgrubu denir. Eğer $P \leq G$ olmak üzere P altgrubu G nin bir maksimal p -altgrubu (yani $P \leq H \leq G$ olacak şekildeki her H p -altgrubu için $P = H$) ise P ye G nin Sylow p -altgrubu denir.

2.10. Tanım

π , asalların boştan farklı bir kümesi olsun. Her asal çarpanı π ye ait olan bir pozitif tamsayıya π -sayısı denir. Bir grubun bir elemanının mertebesi π -sayısı ise o elemana π -eleman denir. Her elemanı π -eleman olan bir gruba π -grup denir. $\pi = \{p\}$ ise o zaman mertebesi π -sayısı olan elemana p -eleman ve her elemanı p -eleman olan gruba p -grup denir. G grubu için $\pi(G)$ kümesi G nin elemanlarının mertebelerini bölen asal sayıların kümesi olarak gösterilir.

2.11. Tanım

G bir grup olmak üzere G nin her elemanının mertebesi sonlu yani her $g \in G$ için $| \langle g \rangle |$ sonlu ise G ye periyodik (torsiyon) grup denir. Eğer G nin elemanlarının mertebeleri sonlu ve sınırlı ise G ye sonlu üslü (exponentli) denir. Böylece G nin exponenti G nin bütün elemanlarını mertebelerinin en küçük ortak katıdır. G nin birim eleman dışındaki her elemanının mertebesi sonsuz ise G ye aperiodyk (torsiyonsuz veya torsiyon-free) grup denir.

2.12. Tanım

G bir grup ve $H \leq G$ olsun. Eğer her $h \in H$ ve her $g \in G$ için $g^{-1}hg \in H$ yani $g^{-1}Hg \leq H$ ise H ya G nin normal altgrubu denir. $H \triangleleft G$ ile gösterilir.

$K \triangleleft G$ olsun. L/K , G/K nin bir minimal normal altgrubu ise L/K ya *esas faktör* denir.

2.13. Tanım

Bir G grubunun 1 ve kendisinden başka normal altgrubu yoksa G ye basit grup denir.

2.14. Tanım

$\mathfrak{X}$ ve $\mathfrak{D}$ iki grup sınıfı olsun. $\mathfrak{X}\mathfrak{D}$ *genişlemesi* veya *sınıf çarpımı* şu şekilde tanımlanır. Bir G grubu $\mathfrak{X}\mathfrak{D}$ sınıfına ait olması için gerek ve yeter şart G nin bir N normal altgrubu vardır öyle ki $N \in \mathfrak{X}$ ve $G/N \in \mathfrak{D}$ dir. $\mathfrak{X}\mathfrak{D}$ sınıfındaki gruplara $\mathfrak{X}$ -by- $\mathfrak{D}$ gruplar denir.

2.15. Tanım

G , N ve Q birer grup olmak üzere eğer $M \cong N$ ve $G/M \cong Q$ olacak şekilde bir $M \triangleleft G$ varsa G grubuna N grubunun Q grubu ile bir *genişlemesi* denir.

2.16. Tanım

$\mathfrak{X}$ bir grup sınıfı ve G bir grup olsun. G nin her sonlu altkümesi G nin bir $\mathfrak{X}$ -altgrubu tarafından içeriliyorsa G ye *lokal $\mathfrak{X}$ -grup* denir. Eğer $\mathfrak{X}$ -grubunun her altgrubu $\mathfrak{X}$ -grupsa G nin lokal $\mathfrak{X}$ -grup olması için G nin sonlu üreteçli her altgrubunun bir $\mathfrak{X}$ -grup olması yeterlidir.

2.17. Tanım

G bir grup olsun. $S = \{1 = G_0, G_1, \dots, G_n = G\}$ G nin altgruplarının bir dizisi olmak üzere

$$1 = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \dots \triangleleft G_n = G$$

ise S ye G nin bir *sonlu serisi* denir. G_{i+1}/G_i bölüm gruplarına *serinin faktörleri* ve G_i gruplarına *serinin terimleri* denir. Eğer bütün G_i ler farklı ise n negatif olmayan tamsayılarına serinin uzunluğu denir.

$T = \{H_\alpha \mid \alpha \leq \beta\}$ bir β ordinaline eşit veya küçük ordinallerle indekslenen G nin altgruplarının bir kümesi olsun. Eğer T kümesi;

(a) $\alpha_1 \leq \alpha_2$ ise $H_{\alpha_1} \leq H_{\alpha_2}$

(b) $H_0 = 1$ ve $H_\beta = G$

(c) $H_\alpha \triangleleft H_{\alpha+1}$

(d) eğer λ limit ordinali ise $H_\lambda = \bigcup_{\alpha < \lambda} H_\alpha$ dır,

şartlarını sağlıyorsa T ye bir *artan seri* denir. Artan bir seriyi $1 = H_0 \triangleleft H_1 \triangleleft \dots H_\beta = G$ şeklinde yazmak uygundur.

Eğer T kümesi;

(a') $\alpha_1 \leq \alpha_2$ ise $H_{\alpha_1} \geq H_{\alpha_2}$

(b') $H_0 = G$ ve $H_\beta = 1$

(c') $H_{\alpha+1} \triangleleft H_\alpha$

(d') eğer λ limit ordinali ise $H_\lambda = \bigcap_{\alpha < \lambda} H_\alpha$ dır,

şartlarını sağlıyorsa T ye bir *azalan seri* denir. Azalan bir seriyi $1 = H_\beta \dots \triangleleft H_1 \triangleleft H_0 = G$ şeklinde yazmak uygundur.

2.18. Tanım

G bir grup olsun. G nin sonlu serisi

$$1 = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \dots \triangleleft G_n = G$$

olmak üzere eğer her $0 \leq i < n$ için G_{i+1}/G_i abeliyan ise G ye *çözülebilir grup* denir. G nin bu şekildeki serilerinin en küçük uzunluğuna G nin *çözülebilirlik uzunluğu* (*derived*

uzunluğu) denir ve $d(G)$ ile gösterilir. Böylece G nin çözülebilirlik uzunluğu 0 olması için gerek ve yeter şart mertebesinin 1 olmasıdır. Aynı zamanda çözülebilir grubun çözülebilirlik uzunluğu en fazla 2 ise gruba metabeliyan grup denir.

2.19. Tanım

G bir grup ve $G^{(0)} = G$ olsun. $i \geq 0$ olmak üzere

$$G^{(i+1)} = [G^{(i)}, G^{(i)}]$$

şeklinde tanımlansın. O zaman

$$G = G^{(0)} \geq G^{(1)} \geq G^{(2)} \geq \dots$$

dir. Bu seriye G nin *komütatör serisi* ve her $k \geq 0$ için $G^{(k)}$ ya G nin k yıncı *komütatörü* denir. $G^{(1)} = G'$ ile gösterilir ve eğer $G = G'$ ise G ye *mükemmel grup* denir.

Eğer bir $n \geq 0$ için $G^{(n)} = 1$ olursa n doğal sayılarının en küçüğüne G nin *komütatör uzunluğu* denir.

2.20. Tanım

G bir grup olsun. G nin artan bir

$$1 = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \dots \triangleleft G_\beta = G$$

serisi için $G_\lambda \triangleleft G$ ($\lambda \leq \beta$) ve her $\alpha \leq \beta$ için

$$G_{\alpha+1}/G_\alpha \leq Z(G/G_\alpha)$$

oluyorsa bu seriye *artan merkez seri* denir. Bir artan merkez seriye sahip olan gruba *hipermerkez grup* denir. Eğer n bir doğal sayı olmak üzere G nin $G_j \triangleleft G$ ($j \leq n$) ve her $0 \leq i < n$ için $G_{i+1}/G_i \leq Z(G/G_i)$ şartlarını sağlayan

$$1 = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \dots \triangleleft G_\beta = G$$

serisi varsa G ye *nilpotentlik grup* denir. G nin bu şekildeki serilerinin en küçük uzunluğuna G nin *nilpotentlik sınıfı* denir.

Nilpotent gruplar aşağıda tanımlanan artan ve azalan merkez serileri ile de karakterize edilebilirler.

$Z_0(G) = 1$, $Z_1(G) = Z(G)$ olarak tanımlansın. $\alpha > 1$ bir ordinal sayı olmak üzere her $\beta < \alpha$ için $Z_\beta(G)$ tanımlanmış olsun. Eğer α limit ordinal ise

$$Z_\alpha(G) = \bigcup_{\beta < \alpha} Z_\beta(G)$$

α limit ordinal değilse

$$Z_\alpha(G) / Z_{\alpha-1}(G) = Z(G/Z_{\alpha-1}(G))$$

şeklinde tanımlansın. G nin kardinalitesi aşlamayacağından $Z_\lambda(G) = Z_{\lambda+1}(G) = \dots$ olacak şekilde bir en küçük λ ordinali vardır. Bu terminal gruba G nin *hipermerkezi* denir ve $Z_\infty(G)$ ile gösterilir. Böylece

$$Z_0(G) \leq Z_1(G) \leq \dots$$

serisine G nin *genelleştirilmiş yukarı merkez serisi* denir.

Eğer $Z_\infty(G) = G$ ise G bir hipermerkez grup denir. Eğer bir n doğal sayısı için $Z_n(G) = G$ ise o zaman G nilpotent gruptur. Bu şekilde n tamsayılarının en küçüğü G nin nilpotentlik sınıfıdır.

$\gamma_1(G) = G$ olsun. Eğer n limit ordinal ise

$$\gamma_n(G) = \bigcap_{m < n} \gamma_m(G)$$

n limit ordinal değilse

$$\gamma_{n+1}(G) = [\gamma_n(G), G]$$

şeklinde tanımlansın.

$$\dots \leq \gamma_2(G) \leq \gamma_1(G) = G$$

serisine G nin *genelleştirilmiş aşağı merkez serisi* denir. Eğer bir i tamsayısı için $\gamma_{i+1}(G) = 1$ ise G nilpotenttir. Bu şekildeki doğal sayıların en küçüğü $i + 1$ ise G nin nilpotentlik sınıfı i dir.

2.21. Tanım

G bir grup ve $H \leq G$ olsun. Eğer her $a \in \text{End}(G)$ için H^a , H nin a altında görüntüsü olmak üzere $H^a \leq H$ ise H ya G içinde *fully-invariant* denir. Eğer her $a \in \text{Aut}(G)$ için $H^a \leq H$ ise H ya G içinde *karakteristik* denir ve $H\text{char}G$ ile gösterilir.

2.22. Tanım

$G = \langle a_i \mid a_1^p = 1, a_{i+1}^p = a_i, i \in \mathbb{N} \rangle$ şeklinde tanımlanan G grubuna *Prüfer p -grup* veya *quasidevirli p -grup* veya C_{p^∞} tipinden bir grup denir.

2.23. Tanım

G bir grup ve $i = 1, 2, \dots$ için $H_i \leq G$ olsun.

$$\dots H_3 \leq H_2 \leq H_1$$

olacak şekildeki G nin altgruplarının her azalan zinciri sonlu veya buna denk olarak G nin altgruplarının boştan farklı her kümesi, kapsamaya göre kısmi sıralı, en az bir minimum elemana sahipse G altgrupları üzerinde *minimum şartını* sağlar denir.

2.24. Tanım

G grubu minimum şartını sağlayan bir abeliyan grubun sonlu genişlemesi ise G ye *Chernikov grup* denir. Minimum şartını sağlayan bir abeliyan grup sonlu devirli grupların

ve quasidevirli grupların sonlu direkt çarpımına izomorf olduğundan Chernikov G grubu C_{p^∞} gruplarının sonlu sayıdaki direkt çarpımın sonlu genişlemesidir. Böylece Chernikov G grubu sonlu sayıda quasidevirli grupların direkt çarpımı olan bir sonlu indeksli N altgrubu içerir.

2.25. Tanım

Eğer bir çözülebilir grubun çözülebilir uzunluğu 2 ise o zaman bu gruba metabeliyan grup denir. Yani G bir grup $N \triangleleft G$ olsun. Eğer N ve G/N abeliyan ise metabeliyan gruptur.

2.26. Tanım

G değişmeli grup olsun. Her $x \in G$ için $x^p = 1$ ise o zaman G ye elemanter abeliyan p -grup denir. Ayrıca bu gruplar p -mertebeli devirli grupların direkt çarpımı şeklinde yazılabilir.

2.27. Tanım

H, G grubunun altgrubu olsun. $G = HK$ ve $H \cap K = 1$ ise G altgrubunda K ya H nin tümleyeni denir.

2.28. Tanım

G bir grup olsun. Eğer G bir merkez seriye sahip ise G ye bir Z -grup denir. Eğer G bir hipermerkez grup ise G ye ZA -grup denir.

2.29. Tanım

Bir kümenin sayılabilir olması için gerek ve yeter koşul $\mathbb{N}$ ile ya da onun bir alt kümesi ile birebir eşlemeye sahip olmasıdır. Aksi halde sayılamaz küme denir. Bir kümenin sonlu olabilmesi için $\{1, 2, \dots, n\}$ kümesine denk olması gerekir. Sayılabilir bir kümenin altkümesi de sayılabilirdir. Aynı zamanda bir $n = 1, 2, \dots$ için A_n kümesi sayılabilir ise, $\bigcup \{A_n | n \in \mathbb{N}\}$ de sayılabilirdir. Sayılabilir kümelerin sayılabilir bileşimi de sayılabilirdir.

2.30. Tanım

G bir grup olsun. Her $x \in G$ ve her pozitif n tamsayısı için $x = y^n$ olacak şekilde bir $y \in G$ varsa G ye bir köklü (radicable) grup denir. G toplamsal grup olsun. Her pozitif n tamsayısı için $x = ny$ olacak şekilde bir y varsa G ye bir bölümlü (divisible) grup denir. Eğer her pozitif n tamsayısı için $G^n = G$ ise G ye yarı-köklü (quasi-radlicable) grup denir. Burada $G^n = \langle g^n | g \in G \rangle$ dir.

2.31. Tanım

Her p asal sayısı için Sylow p -altgrupları abeliyan olan sonlu çözülebilir gruplara A -grupları denir.

2.32. Tanım

Bir G grubunun aşikar olmayan bütün altgruplarının kesişimi N olsun. Eğer N aşikar altgrup değilse, N , G nin monolitidir denir.

2.33. Tanım

$\{G_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ grupların bir kümesi olsun. Kartezyen (veya kısıtlanmamış direkt) çarpım kümesi yani G_λ dada λ -komponenti g_λ olmak üzere bütün (g_λ) vektörlerinden oluşan küme

$$C = Cr_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$$

olsun. $g_\lambda, h_\lambda \in G_\lambda$ olmak üzere $C = Cr_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$ da

$$(g_\lambda)(h_\lambda) = (g_\lambda h_\lambda)$$

şeklinde komponentlerin çarpımı olarak tanımlanan işleme göre $C = Cr_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$ bir gruptur. Bu durumda C nin birimi (1_λ) ve $(g_\lambda)^{-1} = (g_\lambda^{-1})$ dir. Sonlu sayıda λ dışında bütün λ lar için $g_\lambda = 1_\lambda$ olan g_λ elemanlarının

$$D = Dr_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$$

kümesine *dış direk çarpım* denir. G_λ lara *direk faktör* denir. Açık olarak D , C nin bir normal altgrubudur. $\Lambda = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ sonlu küme olması durumunda

$$D = G_{\lambda_1} \times G_{\lambda_2} \times \dots \times G_{\lambda_n}$$

olarak yazılır. Bu durumdan $C = D$ dir. G_λ grupları toplamsal ise G_λ nin direk toplamı denir ve $G_{\lambda_1} \times G_{\lambda_2} \times \dots \times G_{\lambda_n}$ yerine $G_{\lambda_1} \oplus G_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus G_{\lambda_n}$ yazılır.

2.34. Tanım

G bir grup ve $H \leq G$ olsun. H abeliyan ve $|G:H|$ sonlu ise o zaman G ye hemen hemen abeliyan denir.

2.35. Tanım

G ve H grup $x \in H$ olmak üzere G_x , G nin izomorfik kopyaları olmak üzere $Cr_{x \in H} G_x$ ve $Dr_{x \in H} G_x$ sırasıyla kartezyen ve direkt çarpım olmak üzere $G Wr H = H \ltimes (Cr_{x \in H} G_x)$ ve $G wr H = H \ltimes (Dr_{x \in H} G_x)$ gruplarına sırasıyla kısıtsız ve kısıtlı wreath(çelenk) çarpım denir. $\mathfrak{B}(G Wr H) = Cr_{x \in H} G_x$ ve $\mathfrak{B}(G wr H) = Dr_{x \in H} G_x$ gruplarına sırasıyla kısıtsız ve kısıtlı çelenk çarpımın *baz (base) grupları* denir.

$\mathfrak{B}(G Wr H)$ ve $\mathfrak{B}(G wr H)$ nin elemanları H dan G ye fonksiyonlardır. H , $\mathfrak{B}(G Wr H)$ üzerine (ya da $\mathfrak{B}(G wr H)$ üzerine) etki $h, k \in K$ ve $f, g \in \mathfrak{B}(G Wr H)$ (ya da $f, g \in \mathfrak{B}(G wr H)$) (ya da $f, g \in G(H)$) $f^h(k) = f(kh^{-1})$ olmak üzere çelenk çarpımda iki elemanın çarpımı

$$(hf)(kg) = (hk)(f^k g)$$

olarak tanımlanır. $g \in G$ olsun. $g^0 \in \mathfrak{B}(G Wr H)$ (ya da $g^0 \in \mathfrak{B}(G wr H)$) her $h \in H$ için $g^0(h) = g$ olarak tanımlanır. Çelenk çarpımın diagonal altgrubu

$$G^0 = \{g^0: g \in G\}$$

dır.

2.36. Tanım

G bir grup ve mertebesi m olsun. Herhangi $p \in \pi(G)$ için $m = p^n t$ ve $(p, t) = 1$ olacak şekilde G nin mertebesi t olan bir A altgrubuna G nin p -complementi denir.

2.37. Tanım

π , bir asal sayılar kümesini ve π' , tümleyeni olan kümeyi belirtsin. Benzer şekilde, p asal sayı olmak üzere p' , p dışındaki tüm asal sayı kümelerini belirtir. Bir G grubunun elemanlarının mertebesini bölen asal sayıların kümesi $\varpi(G)$ ile gösterilsin.

Bir periyodik G grubunun $\varpi(G)$ deki her bir p asal sayısı için Sylow p -altgruplarının kümesi S_p olsun. $p \in \pi$ olmak üzere S_p tarafından üretilen K ya *Sylow bazı* denir öyleki $\varpi(K) \in \pi$ dır. Her bir G nin elemanlarından oluşan Sylow bazını normalleyen gruba *Normalleyen bazı* denir.

2.38. Teorem (The Hirsch – Plotkin)

H ve K bir grubun normal lokal nilpotent altgrubu olsun. O zaman $J = HK$ lokal nilpotenttir.

2.39. Teorem (Fitting Teorem)

L ve M bir G grubunun normal nilpotent altgrupları olsun. Eğer c ve d sırasıyla M ve N nin nilpotentlik sınıfları ise o zaman $L = MN$ nilpotent ve nilpotentlik sınıfı $c + d$ dir.

2.40. Lemma (Dedekind Modül Kuralı (Dedekind Modular Law))

Bir G grubunun altgrupları A, B, C ve $A \subseteq B$ olsun. O zaman $A(B \cap C) = B \cap AC$ dir.

2.41. Lemma

G bir grup A G nin bir altgrubu ve A nin G içindeki merkezleyeni $C_G(A)$ olsun. Eğer A , G nin karakteristik altgrubu ise o zaman $C_G(A)$ de G nin karakteristik altgrubudur. Yani $A \text{ char } G$ ise $C_G(A) \text{ char } G$ dir.

İspat

1.yol: G bir grup ve A , G nin karakteristik altgrubu olsun. Her $\alpha \in \text{Aut}G$ için $A^\alpha = A$ dir. Her $x \in C_G(A)$ ve $b \in A$ için $b = \alpha(y)$ olacak şekilde $y \in A$ vardır.

$$\alpha(x)b = \alpha(x)\alpha(y) = \alpha(xy) = \alpha(yx) = \alpha(y)\alpha(x) = b\alpha(x)$$

olup $\alpha(x) \in C_G(A)$ dir. Böylece $(C_G(A))^\alpha \leq C_G(A)$ olur. O halde $C_G(A)$ de G nin karakteristik altgrubudur.

2.yol: G bir grup A , G nin karakteristik altgrubu olsun. O zaman $C_G(A)$ da G nin karakteristik altgrubu olduğunu gösterelim. $g \in C_G(A)$ olsun. O zaman her $a \in A$ için $g^a = g$ dir. $\theta \in \text{Aut}(G)$ olsun. O zaman A , G nin karakteristik altgrubu olduğundan $\theta^{-1}(a) \in A$ olup

$$(\theta(g))^a = \theta(g^{\theta^{-1}(a)}) = \theta(g)$$

$$\Rightarrow \theta(g) \in C_G(A)$$

dır. Böylece $(C_G(A))^\theta \leq C_G(A)$ dir. O halde $C_G(A)$, G nin karakteristik altgrubudur.

2.42. Lemma

$\bar{G} = G / C_G(N)$ ve $\bar{A} = A / C_G(N)$ olmak üzere $\bar{A}$, $\bar{G}$ de karakteristik ise A da G de karakteristiktir. Yani $\bar{A} \text{char} \bar{G}$ ise $A \text{char} G$ dır.

İspat

$\bar{A} \text{char} \bar{G}$ olsun. $\alpha \in \text{Aut}(G)$ olsun. O zaman $\alpha: G \rightarrow G$ bir otomorfizm için $g \mapsto \alpha(g)$ dır. $C_G(A) = T$ olmak üzere $\bar{\alpha}: G/T \rightarrow G/T$ ve $\bar{\alpha}(gT) = \alpha(g)T$ olarak tanımlansın. O zaman $g, h \in G$ için

$$\bar{\alpha}((gT)(hT)) = \bar{\alpha}(ghT) = \alpha(gh)T = \alpha(g)\alpha(h)T = \bar{\alpha}(gT)\bar{\alpha}(hT)$$

olduğundan $\bar{\alpha}$ bir homomorfizmadır. Ayrıca $\bar{\alpha}$, α yardımıyla tanımlandığı için α birebir ve örten olduğundan $\bar{\alpha}$ de birebir ve örtendir. Böylece $\bar{\alpha} \in \text{Aut}(\bar{G})$ dır. O halde $\bar{A} \text{char} \bar{G}$ olduğundan $A/T = (A/T)^{\bar{\alpha}} = A^{\alpha}T/T$ olduğundan $A = A^{\alpha}C_G(A)$ ve buradan $A^{\alpha} \leq A$ dır. Böylece A , G nin karakteristik altgrubudur.



3. TORSİYON GRUPLAR VE DİVİSİBLE GRUPLAR

G bir abeliyan grup, $x, y \in G$ ve $o(x) = m$, $o(y) = n$ olsun. $[m, n] = l$ ise o zaman $lx \pm ly = 0$ olduğundan $x \pm y$ sonlu mertebeden ve mertebesi l yi böler. $G[n] = \{x \in G : nx = 0\}$ olsun. $G[n]$, G nin bir altgrubudur. T , G nin bütün sonlu mertebeden elemanların kümesi olsun. O zaman T , G nin bir altgrubudur. Bu gruba G nin *torsiyon altgrubu* denir. Ayrıca G abeliyan grup olduğundan $T \triangleleft G$ dir. Açık olarak G/T torsiyonsuzdur. Kabul edelim ki $x \notin T$ ve $o(x + T) = m$ olsun. O zaman

$$m(x + T) = mx + T = T$$

$$\Rightarrow mx \in T$$

$$\Rightarrow o(mx) = n$$

olacak şekilde n pozitif tamsayısı vardır. O zaman

$$n(mx) = 0$$

$$\Rightarrow (nm)x = 0$$

$$\Rightarrow o(x) < \infty$$

$$\Rightarrow x \in T$$

Bu ise çelişkidir. O halde $x + T$ nin mertebesi sonsuzdur. G nin mertebesi p nin kuvveti olan elemanların kümesi G_p olsun. G_p bir gruptur ve G_p , G nin p -asal komponentidir. $x \in T$ ve $o(x) = m$ olsun. m nin farklı asal sayı çarpanları $p_1, p_2, \dots, p_k$ olmak üzere $m = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_k^{e_k}$ ve $m_i = m/p_i^{e_i}$ olsun.

O zaman $m_1, m_2, \dots, m_k$ nin ortak bölenlerinin en büyüğü 1 dir. $(m_1, m_2, \dots, m_k) = 1$ ise öyle $l_1, l_2, \dots, l_k$ tamsayıları vardır ki $l_1 m_1 + l_2 m_2 + \dots + l_k m_k = 1$ dir. Böylece T bütün asal komponent G_p lerin toplamıdır. Ayrıca

$$x \in G_p \cap \sum_{q \neq p} G_q$$

$$\Rightarrow x \in G_p \quad \text{ve} \quad x \in \sum_{q \neq p} G_q$$

$$\Rightarrow o(x) = p^r \quad \text{ve} \quad x = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_t$$

$$\Rightarrow p^r x = 0 \quad \text{ve} \quad q_1^{r_1} q_2^{r_2} \dots q_t^{r_t} x = 0$$

$$\Rightarrow p^r \mid q_1^{r_1} q_2^{r_2} \dots q_t^{r_t}$$

$$\Rightarrow 1 \leq j \leq t \text{ için } p = q_j$$

Bu ise çelişkidir.

$$\therefore G_p \cap \sum_{q \neq p} G_q = 0$$

Böylece T , G_p lerin direkt toplamıdır.

3.1. Teorem (The Primary Decomposition Theorem)

G bir abeliyan grup T , G nin torsiyon altgrubu olsun. O zaman T , G nin asal komponentlerinin direkt toplamıdır.

Bu teorem abeliyan grupların iki sınıfı torsiyon gruplar ve torsiyonsuz gruplar üzerinde odaklanma konusunda etkilidir. Üstelik bu abeliyan p -grupların çalışılmasına indirgenir.

3.2. Tanım (Yükseklik. (Height))

g , bir abeliyan G grubunun bir elemanı ve bir pozitif m tamsayısı için $g = mg_1$ olacak şekilde $g_1 \in G$ varsa g ye G de *divisible* denir. Eğer g yi bölen en büyük p asal sayısının kuvveti p^h ise h ye G de g nin *p -yükseklik(height)* denir. g , p nin her kuvveti tarafından bölünüyorsa g ye *sonsuz p -yüksekliğe sahiptir* denir. Bir abeliyan G grubu her pozitif tamsayısı için her bir elemanı divisible ise G ye *divisible grup* denir. Bu G nin her bir elemanı bütün p asalları için sonsuz p -yüksekliğe sahip olmasına denktir.

Quasicyclic gruplar

Divisible gruplara örnek olarak rasyonel sayıların toplamsal grubu $\mathbb{Q}$ dur. Bu grup torsiyonsuz bir gruptur. Açık olarak divisible bir grubun bölüm grubu da divisible bir gruptur. Böylece $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ bir divisible gruptur. Her $\frac{m}{n} + \mathbb{Z} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ için

$$n(m/n + \mathbb{Z}) = 0_{\mathbb{Q}/\mathbb{Z}}$$

olduğundan $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ bir torsiyon gruptur. Teoremden dolayı $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ asal componentlerin direkt toplamıdır. Her bir asal komponent divisible gruptur. $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ nin p -asal komponenti $\bar{P}$ olsun $\bar{P}$ bütün $(m/p^i) + \mathbb{Z}$ kosetlerinden oluşur ve $i = 1, 2, \dots$ için

$$b_i = 1/p^i + \mathbb{Z}$$

tarafından üretilir.

$$pb_1 = p\left(\frac{m}{p} + \mathbb{Z}\right) = 0$$

ve

$$pb_{i+1} = p\left(\frac{m}{p^{i+1}} + \mathbb{Z}\right) = \frac{m}{p^i} + \mathbb{Z} = b_i$$

dir.

Karşıt olarak P grubu $a_1, a_2, \dots$ tarafından üretilsin ve $pa_1 = 0$, $pa_{i+1} = a_i$ ve $a_i + a_j = a_j + a_i$ özelliği sağlayan bir grup olsun. P bir abeliyan p -grubudur. Ayrıca $\varphi: P \rightarrow \bar{P}$, $a_i \mapsto b_i$ kuralıyla tanımlanan φ , [4] deki von Dyck's Teorem 2.2.1 den dolayı bir epimorfizmadır.

Şimdi φ nın bir izomorfizma olduğu gösterilsin. P nin her elemanı uygun bir i ve m tamsayısı için ma_i formunda yazılabilir.

$$\varphi(ma_i) = mb_i = m/p^i + \mathbb{Z}$$

dir. Eğer

$$ma_i \in \text{Ker } \varphi$$

$$\Leftrightarrow \varphi(ma_i) = 0_{\mathbb{Q}/\mathbb{Z}}$$

$$\Leftrightarrow m/p^i + \mathbb{Z} = 0_{\mathbb{Q}/\mathbb{Z}}$$

$$\Leftrightarrow m/p^i \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow p^i | m$$

$$\Leftrightarrow m = p^i k \text{ olacak şekilde } k \in \mathbb{Z} \text{ vardır.}$$

$$\Leftrightarrow ma_i = kp^i a_i = 0$$

dır. O halde $\text{Ker } \varphi = 0$ dir. O halde φ de 1-1 dir.

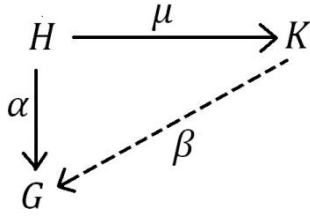
Böylece P grubunun $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ nin p -compenent olarak alınabileceği gösterilmiş olunur ve P bir divisible abeliyan p -gruptur.

P ye p^∞ tipinden bir *Prüfer grup* ya da *quasidevirli p -grup* denir.

Böylece her divisible abeliyan gruplar quasidevirli gruplar ve $\mathbb{Q}$ nun kopyalarının direkt toplamı olarak alanabilir.

Divisible abeliyan grupların injective özelliği

Bir abeliyan G grubu, H ve K bir abeliyan grup olmak üzere $\mu: H \rightarrow K$ bir monomorfizma ve $\alpha: H \rightarrow G$ bir homomorfizma olmak üzere bir $\beta: K \rightarrow G$ homomorfizma bulunur öyle ki $\alpha = \mu\beta$ ise G ye *injective* denir. Diğer bir deyişle



Resim 3.1. Diyagram I

Resim 3.1. den diyagram komütatiftir.

Bununla ne demek istendiği incelensin. μ bir monomorfizma olduğunda $H \cong \text{Im} \mu \leq K$ dır. Kabul edelim ki H, K nin gerçekten bir altgrubu olsun. O zaman μ kanonik içermedir. O zaman injective özelliğinin iddiası α, β nin H ya kısıtlanması anlamında $\alpha: H \rightarrow G, \beta: K \rightarrow G$ homomorfizmasına genişletilebilir.

Divisiblelik ve injectivelik aşağıda görüldüğü gibi aynı anlamdadır.

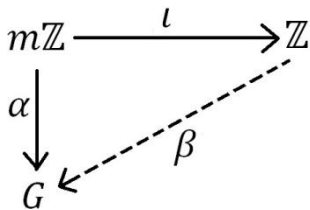
3.3. Teorem (Baer)

Bir abeliyan grubun injective olması için gerek ve yeter şart divisible olmasıdır.

İspat

i. Önce G nin injective olduğunu kabul edelim. $g \in G$ ve m pozitif bir tamsayı olsun. m nin g yi böldüğünü gösterelim.

$\alpha: m\mathbb{Z} \rightarrow G, m \rightarrow g$ bir homomorfizma $\iota: m\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ bir inclusion map olsun. O zaman diyagram β homomorfizması ile komutatiftir.



Resim 3.2. Diyagram II

Böylece Resim 3.2. den $\beta\iota = \alpha$ dır.

O zaman

$$g = \alpha(m) = \beta\iota(m) = \beta(m) = \beta(1m) = m\beta(1) = mg_1 \in G$$

olsun.

$$g = mg_1$$

dır. Böylece m, g yi böler.

ii. Karşıt olarak G divisible olsun. O zaman G nin injective olduğunu gösterelim. Kabul edelimki $\mu: H \rightarrow K$ bir monomorfizma ve $\alpha: H \rightarrow G$ bir homomorfizma olsun. $\mu: H \rightarrow Im\mu$ olursa bir μ inclusion maptir. Böylece H, K nın bir altgrubu olarak alabiliriz. Buradaki problem α yı K ya genişletilmesidir. S, α nın $\gamma: L \rightarrow G$ bütün partial genişlemesi olan küme olsun. Bunun anlamı $H \leq L \leq K$ ve γ , her $h \in H$ için $\gamma(h) = \alpha(h)$ olan bir homomorfizmadır.

Eğer $\gamma: L \rightarrow G$ ve $\gamma': L' \rightarrow G$ öyle ki $L \subseteq L'$ ve γ', γ nin bir genişlemesi ise $\gamma \leq \gamma'$ ile S bir sıralı kümedir. S ye Zorn Lemma uygulayarak S de $\gamma_i: L_i \rightarrow G$ ile bir $\{\gamma_i | i \in I\}$ zincirini göz önüne alalım.

$$L = \cup_{i \in I} L_i \text{ ve } \gamma: L \rightarrow G, \text{ her } x \in L \text{ için } \gamma(x) = \gamma_i(x)$$

olarak tanımlansın. γ_i ve γ_j her ikisi de tanımlanmış olduğundan bu unambiguoustur. O zaman $\gamma \in S$ ve γ zincirinin üst sınırıdır.

O zaman Zorn lemmadan S nin bir maksimal $\beta: L \rightarrow G$ vardır. Eğer $L = K$ ise iddiamız tanımlanmış olur, böylece $L \neq K$ olsun. O zaman $x \in K \setminus L$ vardır. Eğer β yı $L + \langle x \rangle = M$ ye genişletebilirsek bu bir L nin maksimalliği ile çelişir ve böylece ispat tamamlanır.

Eğer $L \cap \langle x \rangle = 0$ ise o zaman $M = L \oplus \langle x \rangle$ ve β yı $\beta_1: M \rightarrow G, \beta_1(x) = 0$ olarak tanımlayarak genişletebiliriz. Eğer $L \cap \langle x \rangle \neq 0$ ise o zaman en az bir m pozitif sayısı vardır öyle ki $mx \in L$ dir.

Kabul edelim ki β , $mx \mapsto g$, $g \in G$ olsun. G divisible olduğundan $g = mg_1$ olacak şekilde $g_1 \in G$ vardır. M nin her elemanı $l \in L$ ve m nin minimalliğinden $0 \leq t < m$ olmak üzere $l + tx$ şeklinde yazılır. Böylece

$$\beta_1: M \rightarrow G$$

$\beta_1(l \pm tx) = \beta(l) \pm tg_1$ olarak tanımlansın. β_1 in bir homomorfizma olduğu gösterilsin. $v + kx \in M$ ve $0 \leq k < m$ olsun.

$$\begin{aligned} & \beta_1[(l \pm tx) + (v + kx)] \\ &= \beta_1[(l + v) \pm (t + k)x] \\ &= \beta(l + v) \pm (t + k)g_1 \\ &= \beta(l) + \beta(v) \pm [tg_1 + kg_1] \\ &= \beta_1(l \pm tx) + \beta_1(v + kx) \end{aligned}$$

3.4. Teorem (Baer)

Eğer bir abeliyan grup G nin divisible altgrubu D ise o zaman bir E altgrubu için $G = D \oplus E$ dir.

İspat

$\iota: D \rightarrow G$ bir içirme fonksiyonu olsun. 3.3.Teoremden injective özelliğinden bir $\beta: G \rightarrow D$ homomorfizması vardır ki

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\iota} & G \\ \downarrow 1 & \searrow \beta & \\ D & & \end{array}$$

Resim 3.3. Diyagram III

Resim 3.3. den komütatiftir. $\beta_I = I$ dır. Her $d \in D$ için $\beta_I(d) = d$ dır. Eğer $g \in G$ ise o zaman $\beta(g) \in D$ ve böylece $\beta^2(g) = \beta(\beta(g)) = \beta(g)$ dir. Böylece

$$\beta(g - \beta(g)) = \beta(g) - \beta^2(g) = \beta(g) - \beta(g) = 0$$

dır.

$g - \beta(g) \in \text{Ker } \beta = E$ olsun. O zaman $g \in E + D$

$$\Rightarrow G = D + E$$

dir. Son olarak

$$d \in D \cap E \Rightarrow d = \beta(d) = 0$$

O halde $G = D \oplus E$ dir. Bu abeliyan grubun eğer aşıkâr olmayan divisible altgrubu yoksa bu gruba *indirgenmiş (reduced)* denir. Abeliyan bir grubun, aşıkâr olmayan bir divisible altgruba sahip olmaması durumunda indirgenmiş olduğu söylenir. Bir sonraki sonuç çalışmamızı indirgenmiş gruplara ve divisible gruplara indirger.

3.5. Teorem

G bir abeliyan grup ise o zaman G nin bir tek en büyük divisible altgrubu D vardır. Ayrıca E bir indirgenmiş grup olmak üzere $G = D \oplus E$ dir.

İspat

D , G nin bütün divisible altgrupları tarafından üretilen altgrup olarak tanımlansın. D nin divisible grup olduğu gösterilsin.

$$d \in D \Rightarrow d = a_1 + a_2 + \cdots + a_t$$

dir. $m \in \mathbb{Z}$ için

$$md = ma_1 + ma_2 + \cdots + ma_t$$

$$= b_1 + b_2 + \cdots + b_t = d_1$$

$$= d_1 \in D$$

vardır. 3.4. Teoremden dolayı $G = D \oplus E$ şeklinde yazılır. D, G nin maksimal divisible altgrubu olduğundan E indirgenmiştir.

Divisible abeliyan grupların yapısı

Aşağıdaki teorem divisible abeliyan grupların sınıflarını tamamen belirliyor.

3.6. Teorem

Abeliyan bir G grubunun divisible olması için gerek ve yeter şart $\mathbb{Q}$ nun kopyaları ve quasidevirli grupların direkt toplamıdır.

İspat

$\mathbb{Q}$ ve C_p^∞ grupların divisible olduğu görüldü. Divisible grupların direkt toplamı da divisible olduğundan yeter şart açıktır.

Şimdi kabul edelim ki G divisible olsun ve T, G nin torsiyon altgrubu olsun. T nin divisible olduğunu gösterelim. $x \in T$ ve $m \geq 0$ bir tamsayı olsun. G divisible olduğundan $my = x$ olacak şekilde $y \in G$ vardır. Böylece

$$m(y + T) = my + T = x + T = T = O_{G/T}$$

dir. Fakat G/T torsiyonsuz olduğundan

$$y + T = O_{G/T} = T \Rightarrow y \in T$$

ve böylece T, G nin divisible altgrubudur. 3.1. Teoremden T nin bir görüntüsü olarak her biri T asal componentlerin direkt toplamıdır. Sonuç olarak teoremin ispatı için iki özel durumu incelemek yeterlidir.

Önce kabul edelim ki G nin tamamı torsiyonsuz olsun. $g \in G$ ve m pozitif tamsayı olmak üzere $g = mg_1$ olacak şekilde $g_1 \in G$ vardır. $g_1 \in G$ için $mg_1 = mg_2$ olacak şekilde $g_2 \in G$ vardır.

$$mg_1 = mg_2$$

$$\Rightarrow m(g_1 - g_2) = 0$$

$$\Rightarrow g_1 = g_2$$

dir.

Böylece $g = mg_1 \Rightarrow \left(\frac{1}{m}\right)g = g_1$ dir. Böylece

$$\mathbb{Q} \times G \rightarrow G$$

$$\left(\frac{n}{m}, g\right) \mapsto \frac{n}{m}g = n\left(\frac{1}{m}g\right) = ng_1 \in G$$

olduğundan $\mathbb{Q}, G$ üzerine etki eder. $G, \mathbb{Q}$ -modüldür. $\mathbb{Q}$ üzerinde bir modül vektör uzayı ve bir baza sahiptir. Böylece $G, \mathbb{Q}$ nun kopyalarının direkt toplamıdır.

Şimdi de bir p -grup ve $G[p]$ için G, P olarak yazılsın. O zaman $P, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ cismi üzerinde $x \in P, n \in \mathbb{Z}$ için

$$(n + p\mathbb{Z})x = nx$$

etkisiyle tanımlı bir modüldür. Böylece $P, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ üzerinde bir vektör uzayı olduğunu gösterelim. $n + p\mathbb{Z}, m + p\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ve $x, y \in P$ için

$$i. (n + p\mathbb{Z})(x + y)$$

$$= n(x + y)$$

$$= nx + ny$$

$$= (n + p\mathbb{Z})x + (n + p\mathbb{Z})y$$

$$\text{ii. } ((n + p\mathbb{Z}) + m + p\mathbb{Z})x$$

$$= [(n + m) + p\mathbb{Z}]x$$

$$= (n + m)x$$

$$= nx + my$$

$$= (n + p\mathbb{Z})x + (m + p\mathbb{Z})x$$

$$\text{iii. } (n + p\mathbb{Z})[(m + p\mathbb{Z})x]$$

$$= (n + p\mathbb{Z})(mx)$$

$$= n(mx)$$

$$= (nm)x$$

$$= [(n + p\mathbb{Z})(m + p\mathbb{Z})]x$$

iv. $(1 + p\mathbb{Z})x = x$ olduğundan P bir $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ üzerinde bir vektör uzayıdır. c bir kardinal sayı olmak üzere boyutu c olsun. p^∞ tipinden c grupların G^* bir direkt toplam formunda ve $P^* = G^*[p]$ şeklinde olsun. O zaman P^* da boyutu c olan $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ üzerinde bir vektör uzayıdır. O zaman P^*, P ye izomorf olacak şekilde $\beta: G^* \rightarrow G$ bir homomorfizması vardır.

G divisible olduğundan injectivedir. O zaman $\beta: G^* \rightarrow G$ homomorfizması α ya genişletilebilir. Eğer $\text{Ker}\beta$ sıfırdan farklı ise o zaman mertebesi p olan bir elemanı vardır ki α bir monomorfizma değildir. Eğer $\text{Im}\beta \neq G$ ise $\text{Im}\beta$ divisible grubu G nin bir direkt toplamı ve β epimorfizma değildir. O halde $\beta: G^* \rightarrow G$ bir izomorfizmadır.

Divisible grupların altgrupları

Divisible bir grubun altgrubu divisible olmak zorunda değildir. Buna $\mathbb{Q}$ divisible grubunu örnek verebiliriz. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ nun bir altgrubu fakat $\mathbb{Z}$ divisible grup değildir. Bütün abeliyan gruplar divisible bir grubun altgrubu olarak kabul edilebilir. Aşağıdaki sonuç bunun bir ispatıdır.

3.7. Teorem

Her abeliyan grup bir divisible abeliyan grubun altgrubuna izomorftur.

İspat

F bir serbest abeliyan grup olsun. O zaman [4] 2.3.8 den F sonsuz devirli grupların bir direkt toplamıdır. Böylece F , $\mathbb{Q}$ nun kopyalarının direkt toplamı D ile izomorftur. Her abeliyan grup bir F serbest grubun görüntüsü olduğundan böylece D nin bir bölüm grubunun bir altgrubuna izomorftur. Fakat D nin bir bölüm grubu D nin divisible olması nedeniyle divisible'dir. Böylece ispat tamamlanır.

4. SYLOW ALTGRUPLARI

Bu çalışmada bir $\mathfrak{X}$ grubunun her p asal sayısı için Sylow p -altgruplarının için abeliyan olduğu gösterilmektedir. Bu sonuçlar $\mathfrak{X}$ grupları ile ilgili diğer sonuçlar için önemli bir adımdır. Bir $\mathfrak{X}$ grubunun Sylow p -altgrupları üzerine elde edilenleri daha genel durum için bir sonuç olarak verilecektir. Öncelikle aşağıdaki lemmaya ihtiyaç vardır.

4.1. Lemma

G minimal karakteristik altgrup N ye sahip olsun. Eğer N bir elemanter abeliyan p -grup ise o zaman $G / C_G(N)$ aşikar olmayan sonlu karakteristik abeliyan p -altgrubuna sahip değildir.

İspat

$\bar{G} = G / C_G(N)$ olsun. Kabul edelim ki $\bar{A}$, $\bar{G}$ nin aşikar olmayan sonlu karakteristik abeliyan p -altgrubu olsun. $\bar{A} = A / C_G(N)$ olsun. $1 \neq C_N(A) < N$ olduğunu gösterelim. Eğer $C_N(A) = N$ ise her $a \in A$, $n \in N$ için $an = na$ olduğundan $a \in C_G(N)$ olur. Böylece $A \leq C_G(N)$ dir. Fakat $C_G(N) \leq A$ olduğundan $A = C_G(N)$ dir. O zaman $\bar{A} = A / C_G(N)$ aşikardır. Bu ise çelişkidir. O halde $C_N(A) < N$ dir. $C_N(A)$ nın G nin karakteristik altgrubu olduğunu gösterelim. $\bar{A}$, $\bar{G}$ de karakteristik olduğundan A da G de karakteristiktir. θ , G nin herhangi bir otomorfizması olsun. $n \in C_N(A)$ olsun. Her $a \in A$ için $n^a = n$ dir. Dolayısıyla

$$(\theta(n))^a = \theta(n^{\theta^{-1}(a)}) = \theta(n)$$

ve bu nedenle $\theta(n) \in C_N(A)$ dir. Böylece $C_N(A)$, G nin karakteristik bir altgrubu olur ve bu N nin minimalliği ile çelişir. İspat tamamlandı.

4.2. Teorem

Kabul edelim ki G , karakteristik altgruplar için minimum şartını sağlayan metabeliyan bir grup olsun ve G/G' minimum şartları sağlasın. H/G' , G/G' nin maksimal radiklenebilir bir altgrubu olsun. O zaman her p asal sayısı için H nin Sylow p -altgrupları abeliyandır.

İspat

C , G nin herhangi bir karakteristik altgrubu olsun. O zaman C karakteristik altgruplar için minimum şartını sağlar. Bununla birlikte $C \cong C^{2!} \cong C^{3!} \dots \cong C^{n!} \cong \dots$ serisi C nin karakteristik azalan serisi ve C karakteristik altgruplar için minimum şartını sağladığı için bir n pozitif tamsayısı için $C^{n!} = C^{(n+1)!} = \dots$ dır. m bir pozitif tamsayı için $(C^{n!})^m \geq C^{mn!} = C^{n!}$ olduğundan $C^{n!}$ yarı-köklüdür. Bundan dolayı G , her karakteristik alt grubunun sonlu üslü grubun yarı-köklü bir grup ile genişletilmesidir.

Şimdi G nin Sylow p -altgruplarının ZA -grupları olduğunu göstereceğiz. G metabeliyan grup olduğu için G' abeliyandır. Dolayısıyla $\text{tor}G'$ tanımlıdır. $\text{tor}G'$ nün bir p -grup olduğunu kabul edelim. S , G nin Sylow p -grubu olsun. Her $\lambda < \rho$ için $A_{\lambda+1}/A_\lambda$, G/G_λ nin bir minimal karakteristik altgrubu olmak üzere

$$1 = A_0 \leq A_1 \leq A_2 \leq \dots \leq A_\lambda \leq \dots \leq A_\rho = \text{tor}G'$$

serisi vardır. Ayrıca G' abeliyan ve her λ için $A_\lambda \leq G'$ olduğundan $C_G(A_{\lambda+1}/A_\lambda) \geq G'$ dır.

$x, y \in G$ için $[x, y] \in C_G(A_{\lambda+1}/A_\lambda)$ olduğundan

$$[x, y]C_G(A_{\lambda+1}/A_\lambda) = C_G(A_{\lambda+1}/A_\lambda)$$

$$\Rightarrow x^{-1}y^{-1}xyC_G(A_{\lambda+1}/A_\lambda) = C_G(A_{\lambda+1}/A_\lambda)$$

$$\Rightarrow xyC_G(A_{\lambda+1}/A_\lambda) = yxC_G(A_{\lambda+1}/A_\lambda)$$

olup $G/C_G(A_{\lambda+1}/A_\lambda)$ abeliyan olur. Böylece $\overline{G_\lambda} = G/C_G(A_{\lambda+1}/A_\lambda)$ minimum şartını sağlayan abeliyan bir gruptur. $A_{\lambda+1}/A_\lambda$ bölüm grubu p -grup olduğundan 4.1. Lemmadan $\overline{G_\lambda}$ grubu aşikar olmayan sonlu karakteristik abeliyan p -grubuna sahip değildir ve dolayısıyla $\overline{G_\lambda}$ bir p' -gruptur (burada π 'nin π asal sayılarının kümesinin tümleyenlerinin kümesidir). Her $\lambda < \rho$ için $[A_{\lambda+1}, S] \leq A_\lambda$ olduğunu gösterelim.

$$\overline{G_\lambda} = G/C_G(A_{\lambda+1}/A_\lambda)$$

bir p' -grup ve S, G nin Sylow p -grubu olduğundan

$$SC_G(A_{\lambda+1}/A_\lambda)/C_G(A_{\lambda+1}/A_\lambda)$$

p -grubudur. Böylece

$$SC_G(A_{\lambda+1}/A_\lambda)/C_G(A_{\lambda+1}/A_\lambda) = 1$$

olduğundan

$$SC_G(A_{\lambda+1}/A_\lambda) = C_G(A_{\lambda+1}/A_\lambda)$$

dır. O zaman $S \leq C_G(A_{\lambda+1}/A_\lambda)$ ve buradan

$$[S A_{\lambda+1}/A_\lambda, A_{\lambda+1}/A_\lambda] = 1$$

olduğundan

$$[S A_{\lambda+1}, A_{\lambda+1}] A_{\lambda+1}/A_\lambda = 1$$

dir. O halde $[A_{\lambda+1}, S] \leq A_\lambda$ ve böylece S bir ZA-gruptur.

Birinci kısmın ispatından $G'/\text{tor}G'$ bölüm grubu, faktörleri sonlu üslü olan bir yarı köklü altgruba sahiptir. Bununla birlikte bir köklü altgrup, bu altgrubu içeren herhangi bir abeliyan grubun bir direkt faktörü olduğundan $G'/\text{tor}G'$ köklüdür. $P/G' = (H/G')p$ olsun. O zaman $P/\text{tor}G'$ grubu $G'/\text{tor}G'$ nin bir torsiyonsuz köklü normal altgrubuna sahiptir öyle ki P/G' lokal sonlu ve sayılabilir. Dolayısıyla Mal'cev'in bir sonucuna ([5] Corollary Lemma 6) göre $G'/\text{tor}G'$ bölüm grubun $P/\text{tor}G'$ içinde bir tümleyeni vardır.

$$(P/\text{tor}G')/(G'/\text{tor}G') \cong P/G'$$

ve P/G' bölüm grubu p -grup olduğundan

$(P/\text{tor}G')/(G'/\text{tor}G')$ bölüm grubu da p -grubudur. $G'/\text{tor}G'$ nün $P/\text{tor}G'$ deki tümleyeni $T/\text{tor}G'$ olsun. Yani

$$P/\text{tor}G' = G'/\text{tor}G' \cdot T/\text{tor}G' \text{ ve } G'/\text{tor}G' \cap T/\text{tor}G' = 1$$

dir.

$P/\text{tor}G' = G'/\text{tor}G' \cdot T/\text{tor}G'$ ve $P/\text{tor}G'$ ile $G'/\text{tor}G'$ bölüm grupları p -grup olduğundan $T/\text{tor}G'$ da p -gruptur. Dolayısıyla $\text{tor}G'$ maximal p -grup olduğundan T, H nin Sylow p -altgrubudur. $G'/\text{tor}G' \cap T/\text{tor}G' = 1$ olduğundan $G' \cap T = \text{tor}G'$ dır. Böylece T, H nin Sylow p -altgrubudur ve

$$P = G'T \text{ ve } G' \cap T = \text{tor}G'$$

dir. İspatın ilk kısmını tekrar kullanılırsa G' nin bir köklü karakteristik altgrubu A vardır öyle ki G'/A sonlu üslüdür. $P/A, G'/A$ nın sonlu üslü normal altgrubudur öyle ki P/G' köklüdür. Diğer yandan P/A minimum şartını sağlayan karakteristik altgrupların karakteristik yarı-köklü altgrubu N/A dır öyle ki P/N sonlu üslüdür.

$$P = NG' \text{ ve } P/A = (N/A)(G'/A)$$

olduğu açıktır. P/A , p -gruptur ve böylece ZA -grup olmak zorundadır. N/A , periyodik yarı-köklü ZA grup olduğundan Chernikov [6] ün bir sonucundan N/A , abeliyandır. G' değişmeli olduğundan nilpotenttir. $P/A = (N/A)(G'/A)$ ve N/A ile G'/A nilpotent olduğundan Fitting Teoreminden P/A nilpotenttir. Bir periyodik nilpotent grubun bir periyodik köklü abeliyan normal altgrubu merkezi tarafından içerildiğinden bu P/A nın abeliyan olduğunu gösterir.

$$P/A = G'T/A = G'/A \cdot TA/A$$

ve

P/A ile G'/A abeliyan olduğundan TA/A abeliyandır. İkinci izomorfizma teoreminden $TA/A \cong T/T \cap A$ olur. Böylece $T/T \cap A$ abeliyandır. Fakat $T \cap A = \text{tor}A$ ve köklü abeliyan bir gruptur. Bu nedenle T nin yarı-köklü normal bir M altgrubu vardır öyle ki

T/M sonlu üslüdür. O zaman Chernikov'un sonucundan M abeliyandır. Diğer yandan T yarı-köklü ve $T/\text{tor}G'$ köklüdür. Bundan dolayı $T = M(\text{tor}G')$ ve M ile $\text{tor}G'$ nilpotent olduğundan ve T nilpotenttir. M köklü ve M, T nin merkezinde olduğundan T abeliyandır. $T/\text{tor}G'$ grubu $P/\text{tor}G'$ deki $G'/\text{tor}G'$ nin tümleyeni ise T abeliyandır.

K, H Sylow p -altgrubu olsun. O zaman K, P tarafından içerilir. Mal'cev in sonucuna göre $P/\text{tor}G'$ nin herhangi bir sonlu altgrubu $G'/\text{tor}G'$ nin tümleyeni tarafından içerilir. Böylece $x, y \in K$ için $\langle x, y \rangle \text{tor}G'/\text{tor}G'$ grubu $L/\text{tor}G'$ nin tümleyeni tarafından içerilir. Yani her $x, y \in K$ için

$$\langle x, y \rangle \text{tor}G'/\text{tor}G'$$

sonlu olduğundan

$$\langle x, y \rangle \text{tor}G'/\text{tor}G' \leq L/\text{tor}G'$$

dır. Fakat $\langle x, y \rangle$ abeliyan olduğundan L abeliyandır. Dolayısıyla K abeliyan olur ve sonuç sağlanır.

4.3. Sonuç

Eğer G , normal altgruplar için minimum şartını sağlayan yarı-köklü bir metabeliyan grup ise her p asal sayıları için Sylow p -altgrupları abeliyandır.

İspat

G yarı-köklü metabeliyan grup ve normal altgruplar üzerinde minimum şartını sağlasın. G yarı-köklü olduğundan G/G' de yarı-köklüdür. Ayrıca G/G' abeliyan olduğundan G/G' köklü gruptur. O zaman 4.2. Teorem den G nin bir p asal sayısı için Sylow p -altgrubu altgrubu abeliyandır.

Uyarı

Bölüm 1 de $\mathfrak{X}$ in sonlu indeks altgrupları açısından tanımlandı. 4.3. Sonuçtaki G grubunun bir $\mathfrak{X}$ grubu olduğunun ispatı için 5.1. Lemmaya bakın.

4.4. Lemma

Kabul edelim ki H, G nin π -altgrubu ve K bir abeliyan π' -grup olmak üzere $G = HK$ olsun. Eğer K nin bir sonlu altgrubu F için $C_H(K) = C_H(F)$ ise o zaman H nin tümleyenleri G de eşleniktir.

İspat

K^* , G de H nin başka bir tümleyeni olsun. K^* in herhangi sonlu altgrubu U olmak üzere $HF = HU$ dır. Eğer $L = \langle U, F \rangle$ ise o zaman Dedekind modül kuralından

$$L = (L \cap H)F = L \cap HF = L \cap HU = (L \cap H)U$$

ve dolayısıyla Schur-Zassenhaus [7] sonucundan F ve U eşleniktir. Böylece herhangi bir $x \in H$ için $F^x \leq K^*$ dır. Bundan dolayı $K^* \leq C_G(F^x) = C_G(F)^x$ dır. Fakat

$$K^* \leq C_G(F)^x = C_H(F)^x \times K^x = C_H(K)^x \times K^x$$

dır. Bu nedenle $K^* \leq K^x$ ve dolayısıyla eşitlik olmalıdır.

4.5. Teorem

Normal altgrupları için minimum şartı sağlayan bir metabeliyan grubun bütün asalların π kümesi için her altgrubunun Sylow π -altgrupları eşleniktir.

İspat

G' nin bir π' -grup olduğunu kabul edebiliriz. O zaman H, G nin Sylow π' -altgrubu ve K abeliyan π -grup olmak üzere $G = HK$ dir. Kabul edelim ki G nin her altgrubunun Sylow π -altgrubu eşlenik olmasın. O zaman bu özelliği sağlamayan ve H yi içeren minimal bir altgrup N vardır.

S, K nin bir altgrubu olmak üzere $N = HS$ dir. T, N nin Sylow π -altgrubu olsun. HT, N nin öz altgrubu ise o zaman N nin minimalliğinden T, S nin bir öz altgrubuna eşleniktir. Bu ise çelişkidir. Böylece N nin Sylow π -altgrupları N içinde H nin tümleyenidir.

Tümleyenlerin eşlenik olduğunu göstermek için 4.4. Lemmayı kullanacağız. Her bir S_i sonlu ve HS_i , N de karakteristik olmak üzere $S = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ şeklinde yazılabilir. $h \in C_H(S_i)$ ve θ , N nin otomorfizması olsun. Her $s \in S_i$ için $s^h = s$ dir fakat $h_1 \in H$ ve $s_1 \in S_i$ için $\theta(s) = h_1 s_1$ dir. Böylece

$$\theta(s^h) = (\theta(s))^{\theta(h)} = (h_1 s_1)^{\theta(h)} = h_1^{\theta(h)} s_1^{\theta(h)} = h_1 s_1^{\theta(h)}$$

ve

$$\theta(s^h) = \theta(s) = h_1 s_1$$

olduğundan $s_1^{\theta(h)} = s_1$ ve dolayısıyla $\theta(h) \in C_H(S_i)$ dir. Buradan

$$C_H(S_1) \geq C_H(S_2) \geq \dots$$

serisi N nin azalan karakteristik serisidir. Fakat karakteristik altgruplar için N minimum şartını sağladığı için herhangi bir j pozitif tamsayısı için

$$C_H(S_j) = C_H(S_{j+1}) = \dots = C_H(S)$$

dir. O zaman 4.4. Lemmadan dolayı N nin Sylow π -altgrubu eşleniktir. M , N nin herhangi öz altgrubu olsun. Eğer HM de N nin öz altgrubu ise o zaman N nin minimalliğinden M nin Sylow π -altgrupları eşleniktir. Eğer $HM = N$ ise $\bar{S}$, N nin Sylow π -altgrubu olmak üzere $M = (H \cap M)\bar{S}$ dir. Eğer T_1 , M nin Sylow π -altgrubu ve $(H \cap M)T_1$, M nin öz altgrubu ise o zaman HT_1 de N nin öz altgrubudur. N minimal olduğundan T_1 , $\bar{S}$ nin öz altgrubu ile eşleniktir. Bu ise bir çelişkidir. Böylece M nin Sylow π -altgrupları $H \cap M$ nin tümleyenidir. Fakat

$$C_{H \cap M}(\bar{S}_j) = C_H(\bar{S}_j) \cap M = C_H(\bar{S}) \cap M = C_{H \cap M}(\bar{S})$$

dır ve böylece 4.4. Lemma uygulanabilir. Bundan dolayı N her altgrubunun Sylow π -altgrupları ile eşlenik olma özelliğine sahiptir. Bu ise N nin seçimi ile çelişir. Böylece ispat tamamlanır.



5. SAYILABİLİRLİK

Bu bölümde normal altgrupları için minimum şartını sağlayan bir metabeliyan grubunun sayılabilir olduğu ispatlanacaktır. Normal altgrupları için minimum şartını sağlayan bir çözülebilir grubun sayılabilir olması muhtemel olduğu görülüyor, ancak metabeliyan gruplar için burada kullanılan yaklaşım genel durum için uygun değildir.

Her şeyden önce sadece yarı-köklü grupları düşünmeye ihtiyacımız vardır. Bunu yapmak için iki Lemma verilecektir.

5.1. Lemma

Bir çözülebilir grubun yarı-köklü olması için gerek ve yeter şart sonlu indeksli bir öz alt grubunun olmamasıdır.

İspat

G çözülebilir bir grup ve G nin sonlu indeksli öz alt grubu olmasın. Kabul edelim ki

$$(G/G^m)/(G'G^m/G^m) \neq 1$$

olsun. $(G/G^m)/(G'G^m/G^m)$ abeliyan grup olduğundan ve G/G^m nin sonlu indeksli öz alt grubu olmadığından [4] Sonuç 1 den dolayı yarı-köklüdür. Fakat aynı zamanda sonlu üslü olduğundan $(G/G^m)/(G'G^m/G^m)$ sonludur. O zaman

$$(G/(G^m))/((G'G^m)/G^m) \cong G/G'G^m$$

sonlu olduğundan G nin sonlu indeksli bir öz alt grubu olur ki bu hipotezle çelişir. O halde kabul yanlış ve

$$(G/G^m)/(G'G^m/G^m) = 1$$

$$\Rightarrow G/G'G^m = 1$$

$$\Rightarrow G = G'G^m$$

dır. $G^m \triangleleft G$ olduğundan [8] Lemma 3.24 den dolayı her $n \in \mathbb{N}$ için $G = G^{(n)}G^m$ dir. Fakat G çözülebilir grup olduğundan $G = G^m$ dir. Böylece G bir yarı-köklü gruptur.

Karşıt olarak G yarı-köklü grup olsun. Eğer G nin bir sonlu indeksli öz altgrubu F varsa o zaman [4], 1.6.9. dan dolayı $N = \bigcap_{g \in G} F^g$ (N ye F nin G içindeki koru denir.) G nin öz normal altgrubu ve $|G:N| < \infty$ dur. Böylece G/N sonlu ve yarı-köklü olduğundan bu ancak $G/N = 1$ olmasıyla mümkündür. Böylece $G = N$ elde edilir. Bu ise N nin G nin sonlu indeksli özaltgrubu olmasıyla çelişir. Bundan dolayı G nin sonlu indeksli bir öz altgrubu yoktur.

5.2. Lemma

G normal altgruplar için minimum şartını sağlayan bir çözülebilir grup olsun. Eğer H, G de sonlu indeksli tek minimal normal altgrup ise o zaman H yarı-köklü ve normal altgrupları için minimum şartı sağlar.

İspat

H, G de sonlu indeksli normal altgruplarının kesişimidir. O zaman $H \triangleleft G$ dir. Ayrıca G normal altgrupları için minimum şartını sağladığından $|G:H| < \infty$ dir. Eğer H bir sonlu indeksli özaltgrup K yı içeriyorsa

$$|G:K| = |G:H| \cdot |H:K|$$

ve $|G:H| < \infty, |H:K| < \infty$ olduğundan $|G:K|$ da sonludur. O zaman [4], 1.6.9. dan dolayı

$$\bigcap_{x \in G} x^{-1}Kx = \bigcap_{x \in G} K^x = K_G$$

G de sonlu indeksli ve $K_G \triangleleft G$ dir. Ayrıca $K_G \leq K < H$ olduğundan K_G, H nin özalt grubudur. Fakat $K_G \triangleleft G$ ve H, G nin tek minimal normal altgrubu olduğundan bu bir çelişkidir. O halde H nin sonlu indeksli özaltgrubu yoktur.

Ayrıca G çözülebilir grup olduğundan H da çözülebilir gruptur. O zaman 5.1. Lemmadan dolayı H yarı-köklü gruptur. Aşağıdaki argüman J.S. Wilson dan dolayıdır.

S , G de H nin koset temsilcilerinin bir tam kümesi olsun. Kabul edelim ki H , H -invariant altgrupları üzerinde minimum şartı sağlamasın. O zaman K yı G de aşağıdaki özelliklere göre minimal seçebiliriz. K , H tarafından içerilen, H -invariant altgruplar üzerinde minimum şartını sağlamayan ve G de normal olma özelliklerine göre G de minimal altgrup olarak seçilebilir. O zaman her $K_i \triangleleft H$ olmak üzere

$$K > K_1 > K_2 \dots$$

olacak şekilde K nin bir kesin azalan bir zinciri vardır. K_i^S yi göz önüne alalım ve K_i^S nin G de normal olduğunu gösterelim. S , G de H nin koset temsilcilerinin bir tam kümesi olduğundan

$$S = \{s_i \in G : i \in I\}$$

olsun burada S , H nin G içindeki her kosetinden seçilen bir tek eleman seçmek üzere oluşturulmuştur. $K_i^S = \langle k^{s_i} : k \in K, i \in I \rangle$ dir. Eğer her $g \in G$ ve $i \in I$ için $(k^{s_i})^g \in K_i^S$ olduğunu göstermeliyiz. $G = \bigcup_{i \in I} Hs_i$ olduğundan $s_i g = hs_j$ olacak şekilde $s_j \in S$ ve $h \in H$ vardır. K_i , H -invariant olduğundan $k^h \in K_i$ dir. Böylece

$$k^{s_i g} = k^{(hs_j)} = (k^h)^{s_i} \in K_i^S$$

oldüğünden $K_i^S \triangleleft G$ dir. K_i^S , H -invariant alt grupları için minimum şartı sağlamadığı için K nin minimalliğinden dolayı her i için $K_i^S = K$ dir.

Her bir $K_i \triangleleft H$ olacak şekilde K nin her kesin azalan

$$K > K_1 > K_2 > \dots$$

sonsuz zinciri için $K_i^X = K$ şartını sağlayan G nin elemanlarının minimal kardinaliteye sahip olan birsonlu X kümesini seçebiliriz.

Eğer $x \in X$ ise o zaman

$$1 = x^{-1}x \in x^{-1}X$$

dır. Aynı zamanda

$$K_1^x > K_2^x > \dots$$

ve her i için $K_i^{x^{-1}xX} = K_i^X = K$ dır. Böylece $1 \in X$ olduğunu kabul edebiliriz.

$L_i = K_i \cap (\prod_{1 \neq x \in X} K_i^x)$ olsun. Kabul edelim ki i için $L_i = L_{i+1}$ olsun. O zaman her i için $K = K_i^X$ olduğundan

$$K_i = K \cap K_i = K_i \cap (K_{i+1}^X)$$

dir.

Fakat

$$K_i \cap K_{i+1}^X = K_i \cap \prod_{1 \neq x \in X} K_{i+1}^x$$

$$= K_i \cap K_{i+1} \prod_{1 \neq x \in X} K_{i+1}^x$$

$$= K_{i+1}(K_i \cap \prod_{1 \neq x \in X} K_{i+1}^x)$$

$$\leq K_{i+1}(K_i \cap \prod_{1 \neq x \in X} K_i^x)$$

$$= K_{i+1}L_{i+1}$$

$L_{i+1} = K_{i+1} \cap \prod_{1 \neq x \in X} K_{i+1}^x \leq K_{i+1}$ olduğundan $K_{i+1}L_{i+1} = K_{i+1}$ dir. Böylece $K_i = K_i \cap K_{i+1}^X \leq K_{i+1}$ dir. Fakat $K_{i+1} \leq K_i$ olduğundan $K_i = K_{i+1}$ dir. Bu bir çelişkidir. Böylece her i için $L_{i+1} < L_i$ ve

$$K \geq L_1 > L_2 > L_3 \dots$$

dır. Ayrıca $K_i \triangleleft H$ olduğundan her $h \in H$ için

$$L_i^h = (K_i \cap (\prod_{1 \neq x \in X} K_i^x))^h$$

$$= K_i^h \cap (\prod_{1 \neq x \in X} K_i^{xh})$$

$$= K_i \cap (\prod_{1 \neq x \in X} K_i^{h_1 x}) \text{ olacak şekilde } h_1 \in H \text{ vardır.}$$

$$= K_i \cap (\prod_{1 \neq x \in X} K_i^x) = L_i$$

olduğundan her i için $L_i \triangleleft G$ dir ve böylece her i için $L_i^X \leq K_i$ olduğundan K nın minimalliğinden dolayı $L_i^X = K$ olmak zorundadır. Fakat

$$K_i = K_i \cap K = K_i \cap (L_i^X)$$

$$= K_i \cap (\prod_{1 \neq x \in X} L_i^x)$$

$$= K_i \cap (L_i \prod_{1 \neq x \in X} L_i^x)$$

$$= L_i(K_i \cap (\prod_{1 \neq x \in X} L_i^x)) \quad (\text{Dedekind modular kuralı})$$

$$\leq L_i(K_i \cap (\prod_{1 \neq x \in X} K_i^x)) = L_i$$

olduğundan $K_i \leq L_i$ dir. Fakat $L_i \leq K_i$ olduğundan $K_i = L_i$ dir. Böylece

$K_i = L_i = K_i \cap (\prod_{1 \neq x \in X} K_i^x)$ olduğundan her i için $K_i \leq \prod_{1 \neq x \in X} K_i^x$ dir. O halde her i için $K_i^X = K$ ve $K_i \leq \prod_{1 \neq x \in X} K_i^x$ olduğundan $K_i^{X \setminus \{1\}} = K$ dir. Bu ise X in minimalliğinden dolayı çelişkidir. Bundan dolayı H normal altgruplar için minimum şartını sağlar.

Ana sonuca devam etmeden önce Kovacs ve Newman teoremine ihtiyaç vardır. Bu nedenle önce bu teoremi verelim.

5.3. Teorem ([9] Teorem 3.2.)

A bir grup olsun. G , sonlu merkez faktör grubu olan A üzerinde bir π -grup operatörü olsun. Eğer D , G -admissible ve A nın direkt faktörü; D bir G -monolith π' -gruba sahip ise D , A da G -admissible tümleyene sahiptir.

5.4. Teorem

Normal altgrupları için minimum şartı sağlayan bir metabeliyan G grubu sayılabilir.

İspat

G çözülebilir ve G normal altgrupları üzerinde minimum şartını sağladığı için eğer H , G de sonlu indeksli tek minimal altgrubu ise 5.2. Lemma dan H yarı-köklüdür. G/H sonlu olduğundan G/H sayılabilir. O halde H nin sayılabilir olduğunu göstermek yeterlidir. O halde G yi yarı-köklü grup olduğunu kabul edebiliriz.

G/G' abeliyan olduğundan, G/G' nün her altgrubu normaldir. Böylece G/G' minimum şartını sağlar. G/G' abeliyan ve minimum şartını sağladığı için [4] 5.4.23 den G/G' Chernikov gruptur. Chernikov grup sayılabilir olduğundan G/G' sayılabilir. O halde G' nün sayılabilir olduğunu göstermek yeterlidir.

G metabeliyan grup olduğundan G' abeliyandır. A , G' nün p -tümleyeni olsun. $A[p]$ nin sayılabilir olduğunu göstermek yeterlidir. $B = A[p]$ ve N , G nin B tarafından içerilen bir minimal normal altgrubu olsun. O zaman N sayılabilir ve B nin bir direkt faktörüdür. 4.3.Sonuçtan $\bar{G} = G/C_G(B)$, bir p' -grubudur. N nin kendisi $\bar{G}$ -monolith ve $\bar{G}$ abeliyandır. Böylece 5.3. Teorem den N nin B de bir $\bar{G}$ -admissible tümleyeni M vardır. Böylece M , G de normaldir. Önceki yapılan argümanlar tekrarlanırsa B , G nin her biri sayılabilir olan sonlu sayıda minimal normal altgrubunun direkt çarpanıdır ve böylece G sayılabilir.

6. PARÇALANMA (SPLITTING) TEOREMLERİ

[10] da Taunt tarafından A -grupları adı altında her p asal sayısı için Sylow p -altgrupları abeliyan olan sonlu çözülebilir gruplar üzerinde detaylı olarak çalışılmıştır. Eğer G bir A -grup ise G nin derived altgrubu ile G nin merkezinin trivial olduğunu Taunt 4.1 [10] da ispatlamıştır. Sonraki teoremden bu sonuç kullanılacaktır.

6.0. Tanım

H ve F iki grup olsun. Eğer $HK = G$ ve $H \cap K = \{1\}$ olacak şekilde G nin bir K altgrubu varsa G ye H nin F ile parçalanma genişlemesi (splits extension) denir. Bu durumda genişleme parçalanır denir. Yukarıdaki şartları sağlayan K altgrubuna H nin tümleyeni (complementi) olarak adlandırılır.

Bir parçalanma genişlemesi H ve K nin yarı direkt çarpımından başka bir şey değildir. izomorfizma teoreminden $K \cong K/H \cap K \cong HK/H = G/H = F$ dir. Böylece bir K tümleyeni F ye izomorftur.

6.1. Teorem

Eğer G bir lokal A -grup ise G nin merkezi ile derived altgrubunun kesişimi birim altgruptur.

İspat

Kabul edelim ki $g \in G' \cap Z_1(G)$ olsun. O zaman $g \in G'$ ve $g \in Z_1(G)$ olduğundan komütatörlerin sonlu çarpımı olarak yazılabilir. Kabul edelim ki bu komütatörleri $g_1, g_2, \dots, g_n$ elemanlarından oluşsun.

O zaman eğer $L = \langle g_1, g_2, \dots, g_n \rangle$ ise $g \in L' \cap Z_1(L)$ dir. Fakat L bir A -grup olduğundan [10] 4.1 den dolayı $L' \cap Z_1(L) = 1$ ve dolayısıyla $g = 1$ dir. Böylece $G' \cap Z_1(G) = 1$ olduğu elde edilir.

6.2. Sonuç

G bir periyodik metabeliyen grup ve karakteristik altgrupların üzerinde minimum şartını sağlasın. Eğer G yarı-köklü ve G/G' minimum şartını sağlarsa o zaman $G' \cap Z_1(G) = 1$ dir. Özel olarak eğer G , bir $\mathfrak{X}$ grup ise o zaman $G' \cap Z_1(G) = 1$ dir.

İspat

G yarı-köklü grup ve G/G' abeliyan olduğundan G/G' köklü gruptur. O zaman 4.2. Teoremden dolayı G nin Sylow p -altgrupları abeliyandır. Böylece G bir lokal A -gruptur ve dolayısıyla 6.1. Teoremden dolayı $G' \cap Z_1(G) = 1$ dir.

Eğer G bir $\mathfrak{X}$ -grup ise G bir metabeliyen grup ve sonlu indeksli öz altgrubu olmadığı için 5.1. Lemmadan dolayı yarı-köklü gruptur. Ayrıca $\mathfrak{X}$ -grubu normal altgrupları üzerinde minimum şartını sağladığından ve G/G' abeliyan olduğundan G/G' minimum şartını sağlar. O zaman ilk kısımdan dolayı $G' \cap Z_1(G) = 1$ elde edilir.

Bir $\mathfrak{X}$ grup, derived altgrubu üzerinde parçalanma genişlemesi olduğunu ispatlamak için 6.2. Sonuç kullanılacaktır. Fakat önceden olduğu gibi daha genel sonuçlar ispatlanabilir. İlk önce bazı ön sonuçlara ihtiyacımız vardır.

6.3. Lemma

Kabul edelim ki G bir periyodik metabeliyen grup ve karakteristik altgruplar üzerinde minimum şartını sağlasın. Eğer G yarı-köklü ve G/G' minimum şartını sağlıyor ise o zaman G_p' , G nin her Sylow p -altgrubunun bir direkt faktörüdür.

İspat

Kabul edelim ki G' bir p -grup olsun. O zaman G nin Sylow p -altgrubu P vardır ki $G' \leq P$ olduğundan her $a \in P$ ve her $g \in G$ için

$$a^{-1}g^{-1}ag \in G' \leq P$$

$$\Rightarrow g^{-1}ag \in aP = P$$

$$\Rightarrow g^{-1}ag \in P$$

$$\Rightarrow P \triangleleft G$$

O halde Sylow Teoreminden P, G nin tek Sylow- p -altgrubudur.

4.2. Teoremden P abeliyan ve P, G nin bir karakteristik altgrubudur. Q, G' nün maksimal köklü altgrubu olsun. Kabul edelim ki $P/Q, G'/Q$ nun bir R/Q tümleyenine sahip olsun. Q köklü olduğu için $R = Q \times S$ olacak şekilde bir S altgrubu vardır. O zaman $P = G' \times S$ dır. Böylece G' nun indirgenmiş (yani aşıkâr olmayan köklü bir altgrubu yoktur) olduğunu kabul edebiliriz.

G/G' minimum şartını sağladığı için P/G' de minimum şartını sağladığından bir köklü abeliyan gruptur. P , karakteristik altgrupları için minimum şartını sağladığı için 4.2. Teoremin ispatının ilk kısmından dolayı P nin bir köklü altgrubu vardır öyle ki P/R sonlu üslüdür.

Ayrıca $R = QS$ ve $P = G'S$ olduğundan ve $Q \leq G'$ olduğundan $P = RG'$ elde edilir ve dolayısıyla

$$RG'/G' \cong R/R \cap G'$$

dır. G' indirgenmiş olduğundan $R \cap G'$ de indirgenmiştir. Ayrıca $R \cap G'$ karakteristik altgruplar üzerinde minimum şartını sağladığı için sonlu üslüdür.

Gerçekten 4.2. Teoremin ispatının ilk kısmında $R \cap G'$ yarı-köklü bir grubun sonlu üslü grup ile genişlemesidir. Fakat $R \cap G'$ indirgenmiş olduğundan $R \cap G'$ sonlu üslüdür. Buna karşılık

$$P/G' = RG'/G' \cong R/R \cap G'$$

köklü ve minimum şartını sağlar. Bundan dolayı R minimum şartını sağlayan üslü grup olduğundan $R \cap G'$ sonludur. G bir yarı-köklü grup olduğundan

$$R \cap G' \leq Z_1(G)$$

dir. Fakat 6.2. Sonuçtan $G' \cap Z_1(G) = 1$ olduğundan

$$R \cap G' \leq Z_1(G) \cap G' = 1$$

$$R \cap G' = 1$$

dır.

$P = RG'$ ve $R \cap G' = 1$ olduğundan G' , P nin bir direkt faktörüdür.

Kabul edelim ki G' bir p -grup olmasın. G / G'_p bölüm grubu ispatın ilk kısmındaki şartları sağlar. Böylece P / G'_p , G / G'_p nin bir Sylow p -altgrubu olmak üzere

$$P / G'_p = G' / G'_p \times T / G'_p$$

dür. Eğer S , G nin bir Sylow p -altgrubu ise o zaman $S \leq P$ dir. $P = G'_p \times T$ ve böylece $S = (S \cap T) \times G'_p$ olduğundan G'_p , G nin her Sylow p -altgrubunun bir direkt faktörüdür.

6.4. Teorem (Dixon [11] Teorem 6)

G bir periyodik hemen hemen abeliyan bir grup, A da G nin normal abeliyan altgrubu olsun. Eğer G nin her P , Sylow p -altgrubu için $A \cap P$ nin, P de bir tümleyeni varsa A , G de bir tümleyene sahiptir.

6.5. Teorem

G bir periyodik lokal çözülebilir grup ve G nin Hirsch-Plotkin radikali sonlu indeksli olsun. O zaman aşağıdakiler sağlanır.

i. G nin normalleyenlerinin eşlenik altgruplarının bir karakteristik sınıfı formundadır.

ii. G nin her normalleyen bazı lokal nilpotenttir

6.6. Teorem

G bir yarı-köklü periyodik metabeliyan grup ve karakteristik altgrupları üzerinde minimum şartını sağlasın. Kabul edelim ki aynı zamanda G/G' minimum şartını sağlasın. O zaman $H \cap G' = 1$ olmak üzere $G = G'H$ olarak yazılabilir ve tümleyenler eşleniktir.

İspat

G metabeliyan grup olduğundan G/G' abeliyan ve G minimum şartını sağladığı için G/G' Chernikov gruptur. O zaman her G_i de G' sonlu indeksli ve her i için G_i, G de karakteristik olmak üzere

$$G = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$$

şekilde yazılabilir. Eğer P, G nin Sylow p -altgrubu ise 6.3. Lemmadan dolayı $G' \cap P = G_p', P$ nin bir direkt faktörüdür. G metabeliyan olduğundan G' abeliyan bir grup ve her i için G_i/G' sonlu olduğundan G_i hemen hemen abeliyan gruptur. O zaman 6.4. Teoremden dolayı her bir i için G', G_i de tümleyendir. O zaman her i için $G_i = G'M_i$ olacak şekilde G_i nin M_i tümleyeni vardır.

Şimdi G' ve M_i abeliyan olduğundan G' ve M_i yi

$$G' = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \text{ ve } M_i = B_1 \times B_2 \times \dots \times B_n$$

şeklinde asal tümleyenlerinin bir direkt çarpımı olarak yazılabiliriz. O zaman G_i için

$$\{A_i B_i\}_{i=1, \dots, n}$$

altgruplarının kümesi bir Sylow bazı oluşturur. N normalleyen bazı olsun. O zaman açık olarak $M_i \leq N$ dir.

($G_i/G' \leq G/G'$ dır ve G_i/G' abeliyandır. $G_i/G' = G'M_i/G' \cong M_i/(M_i \cap G' = 1) = M_i$ dır ve M_i abeliyandır. G' ve M_i abeliyan olduğu için her biri tümleyenlerinin direkt faktörü olarak yazılabilir.)

Kabul edelim ki $g \in G' \cap N$ olsun. O zaman 6.5. Teoremden dolayı N lokal nilpotent ve aynı zamanda lokal A -grup olduğundan abeliyandır. Böylece $g \in G' \cap Z_1(G_i)$ dır. Böylece

$$N = M_i \times G' \cap Z_1(G_i)$$

dır.

Bundan başka

$$Z_1(G_1) \cap G' \geq Z_2(G_2) \cap G' \geq \dots$$

ve her bir terim G nin karakteristik altgrubudur. G karakteristik altgrupları üzerinde minimum şartını sağladığı için bir j için

$$Z_1(G_j) \cap G' = Z_1(G_{j+1}) \cap G' = \dots = C$$

dır. 6.2. Sonuçtan dolayı $C = Z_1(G) \cap G' = 1$ dir. Bundan dolayı her $i \geq j$ için

$$C = Z_1(G_i) \cap G' = 1$$

dır ve böylece

$$N = M_i \times (G' \cap Z_1(G_i)) = M_i \times 1 \cong M_i$$

olduğundan M_i bir normalleyen bazıdır. O zaman 6.5. Teoremden G_i içinde G' nün tümleyenleri eşleniktir. Böylece M_i tümleyenler olarak seçilirse M_i ler artan zincir oluşturur. $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$ olsun. O zaman

$$G = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} G' M_i = G' \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i = G' M$$

ve

$$G' \cap M = 1$$

dir.

M^* , G içinde G' nin başka bir tümleyeni olsun. O zaman M^* in bir M_j altgrubu için

$$G'M_j = G'M_j^*$$

dır. Fakat G_j içinde tümleyenlerin eşlenik olduğu bilinir ve dolayısıyla bir $x \in G_j$ için

$$M_j^x = M_j^*$$

dir. O zaman $M_j^x \leq M^*$ dir ve böylece

$$M^* \leq C_G(M_j^x) = C_G(M_j)^x = C_{G'}(M_j)^x \times M^x$$

dır. Fakat

$$C_{G'}(M_j) \leq C' \cap Z_1(G_j) = 1$$

dır. Böylece

$$M^* \leq C_G(M_j)^x \times M^x = 1 \times M^x$$

olduğundan $M^* \leq M^x$ dir. Böylece $M^* = M^x$ dir.

6.7. Sonuç

Bir $\mathfrak{X}$ grup, derived grubu üzerinde parçalanma grubudur ve tümleyenleri eşleniktir.

İspat

G bir $\mathfrak{X}$ -grup olsun. O zaman G normal altgruplar için minimum şartını sağlayan metabeliyan grup ve G nin sonlu indeksli öz altgrubu yoktur. G çözülebilir ve sonlu indeksli öz altgrubu olmadığı için 5.1. Lemma den dolayı G yarı-köklüdür. O zaman 6.6. Teoremden dolayı G , $H \cap G' = 1$ olmak üzere $G = G'H$ şeklinde yazılır ve tümleyenleri eşleniktir. O halde G splittir ve tümleyenleri de eşleniktir.



7. ÖRNEKLER

7.1. Örnek

Abeliyan olmayan normal altgrupları için bir minimum şartını sağlayan yarı-köklü bir metabeliyan grup vardır.

Örneğin inşası

p ve q farklı asal sayılar olmak üzere F her n pozitif tamsayısı için $GF(p)$ ye birimin q^n inci köklerinin eklenmesiyle elde edilen bir cisim ve F nin toplamsal grubu A olsun. O zaman A , sonsuz elemanlı abeliyan p -grubudur.

$\bar{X}$, F de birimin q inci köklerinin oluşturduğu çarpımsal grup olsun. X de C_{q^∞} grubuna izomorf bir grup olsun. O zaman X den $\bar{X}$ ye, $x \rightarrow \bar{x}$ şeklindeki eşleme bir izomorfizmadır.

Her $a \in A$ ve $x \in X$ için $a^x = a\bar{x}$ olarak tanımlanırsa X , otomorfizmaların bir grubu olarak A üzerine etki eder. G verilen bu etki ile X ile A nin parçalanma genişlemesi olsun. O zaman A nin G nin tek minimal normal altgrubu olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki A için toplama notasyonunu kullanarak A_1 , G nin bir normal altgrubu olmak üzere

$$0 < A_1 \leq A$$

olsun.

$a \in A_1$ ve $a \neq 0$ olsun. A nin herhangi bir a^{-1} elemanı için $\lambda_x \in GF(p)$ olmak üzere

$$a^{-1} = \sum_{x \in X} \lambda_x \bar{x}$$

olarak yazılabilir. $A_1 \triangleleft G$ olduğundan her $x \in X$ için $a^x = a\bar{x} \in A_1$ dir. Böylece

$$\sum_{x \in X} \lambda_x a\bar{x} = a \cdot \sum_{x \in X} \lambda_x x = a \cdot a^{-1}$$

$$\Rightarrow \sum_{x \in X} \lambda_x a\bar{x} = 1$$

dir. Böylece her $x \in X$ için $x \in A_1$ olduğundan $A \leq A_1$ ve böylece $A = A_1$ elde edilir. Bundan dolayı A , G nin minimal normal alt grubudur. Şimdi de A nın G de tek minimal normal alt grup olduğunu gösterelim. Eğer N , G nin aşikar olmayan normal alt grubu ve N , A yı içermiyor ise $1 = N \cap A$ dir. Gerçekten $N \cap A \neq 1$ ise $N \cap A \leq A$ ve $N \cap A \triangleleft G$ olduğundan A nın G de minimal olmasından dolayı $A \cap N = A$ dır. Fakat o zaman $N \leq A$ olduğundan bu N nin seçimiyle ile çelişir. Böylece $N \cap A = 1$ dir. Ayrıca her $a \in A$ ve $n \in N$ için A ve N , G de normal olduğundan

$$a^{-1}n^{-1}an \in A \cap N = 1$$

$$\Rightarrow a^{-1}n^{-1}an = 1$$

oldüğundan $[A, N] = 1$ yani $N \leq C_G(A)$ dır. Fakat $N \leq C_G(A) = A$ olduğundan bu A nın G de minimal normal alt grup olmasıyla çelişir. Böylece A , G nin tek minimal normal alt grubudur.

$$G/A = XA/A \cong X/A \cap X \cong X \cong C_{q^\infty}$$

oldüğundan G normal alt grupları için minimum şartını sağlar.

Açık olarak G abeliyan değildir. Böylece son olarak G nin yarı-köklü olduğunu gösterelim. Eğer G nin sonlu indeksli öz alt grubu varsa o zaman G nin sonlu indeksli öz normal N alt grubu için $A \leq N$ dir. $G/A \cong C_{q^\infty}$ olduğundan G/A köklü dolayısıyla G/N köklüdür. Fakat G/N sonlu olduğundan bu bir çelişkidir. Böylece G nin sonlu indeksli öz alt grubu yoktur. O zaman 5.1. Lemmadan G yarı-köklü bir gruptur.

7.2. Örnek

Karakteristik alt gruplar için minimum şartını sağlayan bir periyodik metabeliyan G grubu vardır öyle ki G yarı-köklü ve G/G' minimum şartını sağlar. Fakat bir G bir $\mathfrak{X}$ grup değildir.

Örneğin inşası

A bir önceki örnekteki grup olsun. I sonsuz bir küme olmak üzere her bir A_i , A ya izomorf olan $\{A_i\}_{i \in I}$ gruplarının direkt çarpım grubu B olsun. Her $a \in A$ için

$$\theta_i: A_i \rightarrow A$$

$$a_i \mapsto \theta_i(a_i) = a$$

olmak üzere θ_i bir izomorfizma olsun. X bir önceki örnekteki gibi tanımlansın.

$$a_i^x = \theta_i^{-1}[(\theta_i(a_i))^x]$$

olarak tanımlayalım. O zaman X, B üzerine etki eder. Gerçekten $x, y \in X$ olmak üzere

$$a_i^1 = \theta_i^{-1}[(\theta_i(a_i))^1] = \theta_i^{-1}\theta_i(a_i) = I(a_i) = a_i \text{ ve}$$

$$a_i^{xy} = \theta_i^{-1}[(\theta_i(a_i))^{xy}] = \theta_i^{-1}([(\theta_i(a_i))^x]^y) = \theta_i^{-1}([(\theta_i(a_i))^x])^y$$

dir ve böylece G, X ile B nin parçalanma genişlemesi formunda alınabilir.

Her i için $A_i \cong A$ ve bir önceki örnekten A, G nin minimal normal altgrubu olduğundan her i için A_i, G nin minimal normal altgrubudur. Böylece $G, \mathfrak{X}$ grubu olamaz. Açık olarak G yarı-köklü ve metabeliyan bir gruptur. Geriye bir tek G nin karakteristik altgrupları için minimum şartını sağladığını göstermek yeterlidir. Bunun için B nin G nin tek minimal karakteristik altgrubu olduğunu göstermek yeterlidir. B_1, G nin aşikar olmayan karakteristik altgrubu ve $B_1 \leq B$ olsun.

$1 \neq g \in B_1$ için $a, b, \dots, c \in A$ olmak üzere $g = a_{i_1} b_{i_2} \dots c_{i_n}$ şeklinde yazılır. $j \in I$ ve $j \neq i_1, i_2, \dots, i_n$ olsun. O zaman

$$\phi(a_{i_1}) = a_j, \phi(a_j) = a_{i_1} \text{ ve } i \neq j \text{ için } \phi(a_i) = a_i$$

olarak tanımlanan ϕ fonksiyonu G nin bir otomorfizmasına genişletilebilir. Böylece B_1 , G nin karakteristik altgrubu ve $g \in B_1$ olduğundan

$$\phi(g) = \phi(a_{i_1} b_{i_2} \dots c_{i_n}) = a_j b_{i_2} \dots c_{i_n} \in B_1$$

dir. $x = a_j b_{i_2} \dots c_{i_n}$ olsun. O zaman

$$(a_{i_1} a_j^{-1})x = a_{i_1} b_{i_2} \dots c_{i_n} = g$$

ve $x, g \in B_1$ olduğundan $a_{i_1} a_j^{-1} \in B_1$ dir. Fakat

$$\theta(a_{i_1}) = a_{i_1} a_j^{-1} \text{ ve } i \neq i_1 \text{ için } \theta(a_i) = a_i$$

ile tanımlanan θ fonksiyonu G nin otomorfizmasına genişletilebilir. Böylece B_1 G nin karakteristik altgrubu, $B_1^{\theta^{-1}} = B_1$ ve $a_{i_1} a_j^{-1} \in B_1$ olduğundan

$$\theta^{-1}(a_{i_1} a_j^{-1}) = \theta^{-1}\theta(a_{i_1}) = a_{i_1} \in B_1$$

dir. Bundan başka A_{i_1} G nin bir minimal normal altgrubu olduğundan $A_{i_1} \leq B_1$ dir. O zaman her $i \in I$ için $A_i \leq B_1$ ise $B \leq B_1$ dir. Böylece $B_1 = B$ dir. Eğer N , G nin aşıkâr olmayan karakteristik altgrubu ve B yi içermiyorsa bir önceki örnekte görüldüğü gibi

$$N \cap B = 1$$

$$\Rightarrow [B, N] = 1$$

$$\Rightarrow N \leq C_G(B)$$

dir. Fakat $B = C_G(B)$ olduğundan bu ise çelişkidir. Böylece B , G nin tek minimal karakteristik altgrubudur.

7.3. Örnek

Toplamaya göre normal altgruplar için minimum şartını sağlayan yarı-köklü fakat lokal A -grup olmayan ve komütatör altgrubu üzerinde parçalanmayı sağlamayan bir merkez-by-metabeliyan G grubu vardır.

Örneğin inşası

A toplamsal grubu 7.1. Örnekteki gibi olsun. $a, b, c \in A$ olmak üzere B bütün 3×3

tipinden $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ c & b & 1 \end{pmatrix}$ şeklindeki matrislerden oluşsun. B bir gruptur. Gerçekten

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in B$ olduğundan $B \neq \emptyset$ dır.

$u = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ c & b & 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ d & 1 & 0 \\ f & e & 1 \end{pmatrix} \in B$ için

$uv = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a+d & 1 & 0 \\ c+bd+f & b+e & 1 \end{pmatrix} \in B$

dir. Ayrıca $u^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ ab-c & -b & 1 \end{pmatrix} \in B$ ve birleşme özelliğinin sağladığı açıktır. O

halde B bir gruptur.

$X \cong C_q^\infty$ ve $\bar{X}$ de 7.1. Örnekteki gibi tanımlansın. O zaman tekrar 7.1.Örnekten

$X \rightarrow \bar{X}$

$x \mapsto \bar{x}$

bir izomorfizmadır.

$x \in X$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ c & b & 1 \end{pmatrix} \in B$ olmak üzere $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ c & b & 1 \end{pmatrix}^x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a\bar{x} & 1 & 0 \\ c & b\bar{x}^{-1} & 1 \end{pmatrix}$ şeklinde

tanımlanırsa X, B üzerine etki etsin. H, X ile B nin parçalanma genişlemesi olsun.

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ d & 0 & 1 \end{pmatrix} : d \in A \right\}$$

olsun. O zaman

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ d & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ c & b & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ d+c & b & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ c & b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ d & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olduğundan $C \leq Z(H)$ dir. Böylece $C \triangleleft H$ dir. O zaman H/C normal altgrupları için minimum şartını sağlar. K, C nin bir devirli altgrubu dışında bütün faktörler tarafından elde edilen H nin bir homomorfik görüntüsü olsun. O zaman K normal altgrupları için minimum şartına sahiptir ve merkez-by-metabeliyandır. B bir p -gruptur ve böylece K lokal A -grup değildir. Açık olarak K yarı-köklüdür. Bundan başka K parçalanmadır. Y bir C_{p^∞} tipinde grup olsun. G, K ve Y nin direkt çarpımı ve Y nin mertebesi p olan devirli altgrubu ile K nin merkezinin birleşimi formundadır. O zaman G gerekli şartları sağlar.

7.4. Örnek

Herhangi bir çözülebilirlik uzunluğuna sahip normal altgrupları için minimum şartını sağlayan yarı-köklü çözülebilir bir grup vardır.

Örneğin inşası

Çözülebilirlik uzunluğu n üzerine tümevarım kullanalım. Eğer çözülebilirlik uzunluğu 1 ise grup abeliyan olduğundan verilen şartları sağlar. O halde iddia $n - 1$ için doğru olsun. G_{n-1} in çözülebilirlik uzunluğu $n - 1$ olsun. G_{n-1} normal altgruplar için minimum şartını sağlayan yarı-köklü gruptur. G_{n-1} in tek minimal normal altgrubu G_{n-1} in derived serisinin son terimidir. Bu terim A olsun. A bir p' -grup olacak şekilde bir p asal sayısı seçelim. G, G_{n-1} ile mertebesi p olan devirli grubun standart çelenk çarpımı olsun.

B bir baz grubu olmak üzere G grubu BG_{n-1} olarak yazılabilir. B bir G -chief seriye sahiptir. Bu serinin bütün faktörleri A tarafından merkezlenirse o zaman Kurosch [12] terminolojisi kullanılarak BA bir Z -grup olur. Fakat o zaman BA abeliyan olur ki bu bir çelişkidir. Böylece A tarafından merkezlenmeyen B nin bir G -chief faktör N vardır. G_n , G_{n-1} ile N nin parçalanma genişlemesi olsun.

G_n nin inşasından dolayı G_n nin çözülebilirlik uzunluğu n ve normal altgruplar için minimum şartını sağlar. N , G_n nin bir minimal normal alt grubudur. Kabul edelim ki M , N yi içermeyen G_n nin aşikar olmayan bir normal alt grubu olsun. O zaman $M \cap N = 1$ ve böylece $[M, N] = 1$ olduğundan M , N yi merkezler. Fakat A , G_{n-1} in tek minimal normal alt grubu olduğundan MN , A yı içerir. Bundan dolayı A , N yi merkezler. Bu bir çelişkidir. Böylece N , G nin tek minimal normal alt grubudur. Böylece G_n yarı-köklüdür.

Son uyarı

G , derived uzunluğu 3 olan bir yarı-köklü grup olsun. Eğer G , normal alt grupları için minimum şartını sağlar ise o zaman $G' \cap M = G''$ olmak üzere $G = G'M$ dir. Bir X grubunun özelliklerinin bazılarına sahip olmak için G' veya M seçilirdi. Ancak malesef bu durum böyle değil. Çünkü eğer G , 7.3. Örnekteki grup olarak alınırsa ne G' nin ne de M nin derived alt grubu üzerinde bir parçalanışı değildir ve G' nin lokal A -grubu olmadığını görmek kolaydır. Eğer 7.4. Örnekteki yöntem uygulanırsa derived uzunluğu 3 olan G grubundan 7.1. Örnekteki mertebesi q olan bir devirli grubun çelenk çarpım grubuna dönüştürülen bir grup kullanılırsa M lokal A -grubu değildir. Çünkü bu durumda M bir q -gruptur ve eğer M abeliyan ise G' abeliyan olduğu kolayca gösterilebilir. Bu ise çelişkidir.



8. SONUÇ VE ÖNERİLER

David McDOUGALL'ın “Soluble Groups with the Minimum Condition for Normal Subgroups” adlı makalesi boşluklar doldurulmaya çalışılarak daha kolay anlaşılır hale getirilmiştir. Normal altgruplar için minimum şartını sağlayan çözülebilir gruplar periyodiktir. Fakat bu gruplar hakkında çok az şey bilinmektedir. Bu çalışmada ise çözülebilirlik uzunluğu en fazla 2 olması durumunda bu gruplar hakkında sonuçlar elde edilmiştir.





KAYNAKLAR

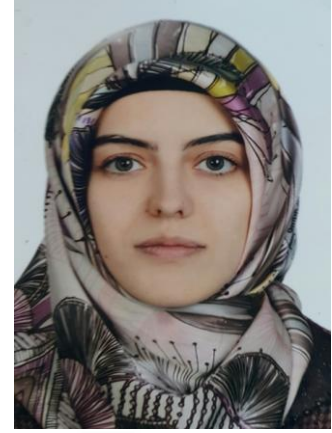
1. Černikov, S. N. (1949). On the theory of locally soluble groups with the minimal condition for subgroups. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 65, 21-24.
2. Baer, R. (1964). Irreducible groups of automorphisms of abelian groups. *Pacific Journal of Mathematics*, 14(1), 385-406.
3. Čarin, V. S. (1949). A remark on the minimal condition for subgroups. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 66, 575-576.
4. Robinson, D. J. S. (1980). *A course in the theory of groups*. New York: Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag.
5. Mal'cev, A. I. (1956). On some classes of infinite soluble groups. *American Mathematical Society Translations*, 2(2), 1-22.
6. Černikov, S. N. (1946). Complete groups with an ascending central series. *Matematicheskii Sbornik*, 18, 397-422.
7. Zassenhaus, H. (1958). *The theory of groups* (2nd Edition). New York: Chelsea.
8. Lennox, J. C. and Stonehewer, S. E. (1987). *Subnormal subgroups of groups*. New York: Oxford University Press.
9. Kovács, L. G., Newman, M. F. (1966). Direct complementation in groups with operators. *Archiv der Mathematik*, 13, 427-433.
10. Taunt, D. R. (1949). On A-groups. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 45, 24-42.
11. Dixon, J. D. (1967). Complements of normal subgroups in infinite groups. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 3(17), 431-446.
12. Kurosch, A. G. (1956). *Theory of groups* (2nd Edition). New York: Chelsea.
13. Asar, A.O. ve Arıkan A. (2012). *Cebir (2)*. Ankara: Gazi Kitabevi.
14. Hungerford, T. W. (1974). *Algebra*. New York: Springer-Verlag.
15. Stonehewer, S. E. (1964). Abnormal subgroups of a class of periodic locally soluble groups. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 3(14), 520-536.
16. Wilson, J. S. (1970). Some properties of groups inherited by normal subgroups of finite index. *Mathematische Zeitschrift*, 114, 19-21.



ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : GÜNTÜRK, Hatice Büşra
 Uyuğu : T.C.
 Doğum tarihi ve yeri : 22.04.1993, Ankara
 Medeni hali : Evli
 Telefon : 0 (312) 202 37 28
 Faks : 0 (312) 202 37 10
 e-mail : haticebusra.gunturk@gazi.edu.tr



Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi / Matematik Bölümü	Devam ediyor
Lisans	Gazi Üniversitesi / Matematik Bölümü	2015
Lise	Özel Nene Hatun Fen Lisesi	2011

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2011-Halen	Özel Nene Hatun Okulları	Öğretmen

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

1. Arıkan, A. ve Güntürk, H. (2019). *Normal altgruplar için minimum şartını sağlayan çözülebilir gruplar*. 14. Ankara Matematik Günleri Sempozyumu, Gazi Üniversitesi, Ankara, 60.



GAZİ GELECEKTİR..