



T.C.
NİĞDE ÖMER HALİSDEMİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

KESİRLİ OSKÜLATÖR İNTEGRAL OPERATÖRLER VE ONLARIN
KOMUTATÖRLERİNİN GENELLEŞTİRİLMİŞ ORLICZ-MORREY UZAYLARDA
SINIRLILIĞI

SÜMEYRA DENİZ GÜLTEPE

Ağustos 2019

T.C.
NİĞDE ÖMER HALİSDEMİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

KESİRLİ OSKÜLATÖR İNTEGRAL OPERATÖRLER VE ONLARIN
KOMUTATÖRLERİNİN GENELLEŞTİRİLMİŞ ORLICZ-MORREY UZAYLARDA
SINIRLILIĞI

SÜMEYRA DENİZ GÜLTEPE


Yüksek Lisans Tezi


Danışman

Doç. Dr. Ahmet EROĞLU

Ağustos 2019

Sümevra DENİZ GÜLTEPE tarafından **Doç. Dr. Ahmet EROĞLU** danışmanlığında hazırlanan “**Kesirli Oskülatör İntegral Operatörler ve Onların Komutatörlerinin Genelleştirilmiş Orlicz-Morrey Uzaylarda Sınırlılığı**” adlı bu çalışma jürimiz tarafından Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik** Anabilim Dalı’nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Adnan TUNA 
(Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi,
Matematik Bölümü)

Üye : Doç. Dr. Ahmet EROĞLU 
(Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi,
Matematik Bölümü)

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Ümit TOKEŞER 
(Kastamonu Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü)

ONAY:

Bu tez, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca belirlenmiş olup yukarıdaki jüri üyeleri tarafından/....../20... tarihinde uygun görülmüş ve Enstitü Yönetim Kurulu’nun/....../20... tarih ve sayılı kararıyla kabul edilmiştir.


...../...../2019

Prof. Dr. Murat BARUT

MÜDÜR

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.


Sümeysa DENİZ GÜLTEPE

ÖZET

KESİRLİ OSKÜLATÖR İNTEGRAL OPERATÖRLER VE ONLARIN KOMUTATÖRLERİNİN GENELLEŞTİRİLMİŞ ORLICZ-MORREY UZAYLARDA SINIRLILIĞI

DENİZ GÜLTEPE, Sümeyra
Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Doç. Dr. Ahmet EROĞLU

Ağustos 2019, 66 sayfa

Kesirli oskülatör integral operatörleri ve onların komütatörlerinin genelleştirilmiş Orlicz-Morrey uzaylarında sınırlılığının incelendiği bu tez çalışması, dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm, tezin giriş kısmını içermektedir.

İkinci bölümde, bu çalışma ile ilgili bazı temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, L^p Lebesgue uzaylarının genelleştirilmesi olan Orlicz uzaylarını tanımlamak için kullanılan Young fonksiyonlarının tanımı verilerek, bazı temel özellikleri incelenmiştir. Aynı zamanda son bölümün temelini oluşturacak tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Son bölümde ise, genelleştirilmiş Orlicz-Morrey uzaylarında, kesirli oskülatör integral operatörlerinin ve onların komütatörlerinin sınırlılığı incelenmiştir.

Anahtar Sözcükler: Orlicz uzayı, Genelleştirilmiş Orlicz-Morrey uzayı, Riesz potansiyeli, Young fonksiyonu, Kesirli integral operatörü.

SUMMARY

BOUNDEDNESS OF FRACTIONAL OSCILLATORY INTEGRAL OPERATORS AND THEIR COMMUTATORS ON GENERALIZED ORLICZ-MORREY SPACES

DENİZ GÜLTEPE, Sümeyra
Niğde Ömer Halisdemir University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Doç. Dr. Ahmet Eroğlu

August 2019, 66 pages

This thesis, which examines the boundedness of fractional oscillator integral operators and their commutators in generalized Orlicz-Morrey spaces, consists of four chapters. The first part contains the introduction part of the thesis.

In the second part, some basic definitions and theorems related to this study are given.

In the third chapter, the definition of Young functions used to define Orlicz spaces which are generalization of L^p Lebesgue spaces are given and some basic properties are examined. At the same time, definitions and theorems that will form the basis of the last chapter are given.

In the last chapter, the boundedness of fractional oscillator integral operators and their commutators is examined in generalized Orlicz-Morrey spaces.

Keywords: Orlicz space, Generalized Orlicz-Morrey space, Riesz potential, Young's function, Fractional integral operator.

ÖN SÖZ

Bana bu konuda çalışma ve ilerleme imkanı veren, yardımlarını esirgemeyen tez danışmanım sayın Doç. Dr. Ahmet EROĞLU' na, çalışmalarım süresince destek ve anlayışla her an yanımda olan sevgili eşime ve benim bugünlere gelmemde büyük emek ve fedakarlıkları bulunan aileme sonsuz şükranlarımı sunuyorum.



İÇİNDEKİLER

ÖZET	iv
SUMMARY	v
ÖN SÖZ	vi
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	vii
SİMGE VE KISALTMALAR DİZİNİ	viii
BÖLÜM I GİRİŞ	1
BÖLÜM II TEMEL TANIM VE TEOREMLER	3
2.1 Normlu Uzaylar	3
2.2 Operatör Teorisi	9
2.3 Ölçü Teorisi	13
2.4 L^p Uzayları (Lebesgue Uzayları)	23
BÖLÜM III	32
3.1 Morrey Uzayları	32
3.2 Orlicz Uzayları	33
3.3 Orlicz-Morrey Uzayları	41
BÖLÜM IV KESİRLİ SAKILINIMLI İNTEGRAL OPERATÖRLERİ VE BUNLARIN ÜÇÜNCÜ TÜRDE GENELLEŞTİRİLMİŞ ORLICZ-MORREY UZAYLARI ÜZERİNDEKİ KOMÜTATÖRLERİ	43
4.1 Giriş ve Ana sonuçlar	43
4.2 $M_{\phi, \varphi}(\mathbb{R}^n)$ Genelleştirilmiş Orlicz-Morrey Uzayı İçin Bazı Bilinen Sonuçlar	50
4.3 $M_{\phi, \varphi}(\mathbb{R}^n)$ Uzayında Kesirli Sakımlı İntegral Operatörler	52
4.4 $M_{p, \varphi}$ Uzayında Kesirli Sakımlı İntegral Operatörlerinin Komütatörleri	55
KAYNAKLAR	61
ÖZ GEÇMİŞ	66

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler	Açıklama
\mathbb{R}^n	n boyutlu Reel uzay
$B(x, r)$	x merkezli r yarıçaplı yuvar
$ B(x, r) $	$B(x, r)$ yuvarının Lebesgue ölçüsü
$L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$	\mathbb{R}^n de p-lokal integrallenebilen fonksiyonların sınıfı
$\ \cdot\ _{L^p}$	Lebesgue normu
$L^p(\mathbb{R}^n)$	Lebesgue uzayı
$WL^p(\mathbb{R}^n)$	Zayıf Lebesgue uzayı
$L_\Phi(\mathbb{R}^n)$	Orlicz uzayı
$WL_\Phi(\mathbb{R}^n)$	Zayıf Orlicz uzayı
$M^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$	Morrey uzayı
$WM^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$	Zayıf Morrey uzayı
$M_{p,\Phi}(\mathbb{R}^n)$	Genelleştirilmiş Morrey uzayı
$WM_{p,\Phi}(\mathbb{R}^n)$	Zayıf Genelleştirilmiş Morrey uzayı
$M_{\Phi,\Phi}(\mathbb{R}^n)$	Genelleştirilmiş Orlicz-Morrey uzayı
$WM_{\Phi,\Phi}(\mathbb{R}^n)$	Zayıf Genelleştirilmiş Orlicz-Morrey uzayı
M	Hardy-Littlewood maksimal operatörü
M_α	Kesirli maksimal operatör
I_α	Riesz potansiyel operatörü
T	Calderon-Zygmund operatörü (Singüler integral operatörü)
H_w	Ağırlıklı Hardy operatörü

Ω	$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de açık küme
T_Ω	Kaba çekirdekli Calderon-Zygmund singüler integral operatörü
χ_A	A kümesinin karakteristik fonksiyonu
S	Schwarz uzayı



BÖLÜM I

GİRİŞ

Son yıllarda fonksiyon uzaylarının modern teorisi, harmonik analizin klasik operatörlerinin bir teorisi geliştirilmektedir.

E.M. Stein, A. Calderon, S.L. Sobolev, S.M. Nikolskii, H. Triebel, P.I. Lizorkin, V.I. Burenkov, V.S. Guliyev gibi dünyaca ünlü matematikçiler tarafından bugüne kadar birçok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmaların kısmi türevli diferansiyel denklemler teorisinde, reel ve fonksiyonel analizin birçok konusunda ve matematiksel fizikte önemli uygulamaları vardır. Ayrıca ortaya çıkan yeni problemlerin çözülebilmesi ve fonksiyon uzaylarındaki bazı eksikliklerin giderilebilmesi için yeni tip fonksiyon uzaylarının tanımlanmasına ve incelenmesine ihtiyaç duyulmuştur.

$0 \leq \lambda \leq n$, $1 \leq p < \infty$, $f \in L_p^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ve $B(x, r)$, \mathbb{R}^n de x merkezli r yarıçaplı yuvar olmak üzere

$$\|f\|_{M_{p,\lambda}} = \|f\|_{M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \sup_{r>0, x \in \mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{r^\lambda} \int_{B(x,r)} |f(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

olacak biçimdeki tüm fonksiyonların sınıfına Morrey uzayı denir. Morrey uzayları, 1938 yılında C. Morrey tarafından kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerinin lokal davranışlarını araştırmak amacıyla tanımlanmıştır.

W. Orlicz tarafından tanımlanan Orlicz uzayları ise L^p uzaylarının bir genelleştirilmesi olarak bilinir. İlerleyen çalışmalarla birlikte Orlicz uzayları, harmonik analizin yanı sıra diferansiyel denklemler, integral denklemler, fonksiyonel analiz gibi matematiğin birçok dalının temel aracı olmuştur.

Orlicz uzayı

$L_\phi(E) = \{f : f, E \text{ de ölçülebilir ve } \|f\|_\phi < \infty\}$ ile tanımlanır. Orlicz uzayının normu

$$\|f\|_\phi = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_E \phi \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right) dx \leq 1 \right\}$$

şeklinde verilmektedir.

Harmonik analizin klasik operatörlerinin sınırlılık problemi ile Orlicz uzaylarında da çalışılmıştır.

Örneğin Hardy-Littlewood maksimal operatörünün Orlicz uzaylarında sınırlılığı Kita ve Cianchi tarafından gösterilmiştir. Ayrıca yine Riesz potansiyelinin bu uzaydaki sınırlılığı Trudinger tarafından ispatlanmıştır.

Yine genelleştirilmiş Orlicz-Morrey uzaylarında, Riesz potansiyeli ve Kesirli maksimal operatörlerin sınırlılığı V.S. Guliyev ve F. Deringöz (2014,2015) tarafından çalışılmıştır.

Bu yüksek lisans tezinde Orlicz uzaylarının, Genelleştirilmiş Orlicz-Morrey uzaylarının tanımları, teoremleri ve temel özellikleri verilerek, Genelleştirilmiş Orlicz-Morrey uzayında kesirli oskülatör integral operatörlerin sınırlılığı incelendi.

BÖLÜM II

TEMEL TANIM VE TEOREMLER

2.1 Normlu Uzaylar

Tanım 2.1.1: (Norm, Normlu Vektör Uzayları) X , K cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzayı olsun. Eğer

$\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$, $x \rightarrow \|x\|$ dönüşümü $\forall x, y \in X$ ve $\alpha \in K$ için

$$(N_1) \quad \|x\| \geq 0 \text{ ve } \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$(N_2) \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$$

$$(N_3) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (\text{Üçgen Eşitsizliği})$$

özelliklerini sağlıyorsa bu dönüşüme X üzerinde **norm** adı verilir. $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de **normlu vektör uzayları** denir. $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayı kısaca X ile gösterilir (Musayev ve Alp, 2000).

Tanım 2.1.2: (Denk Norm) X , K cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzayı olsun.

$$\forall x \in X \text{ için } c \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C \|x\|_1$$

olacak şekilde $c, C \in \mathbb{R}$ pozitif sayıları varsa X üzerinde tanımlı $\|\cdot\|_1$ ve $\|\cdot\|_2$ normlarına **denk norm** denir (Rudin, 1991).

Tanım 2.1.3: (Yakınsaklık, Norma Göre Yakınsaklık) $(x_n), (X, \|\cdot\|)$ normlu uzayında bir dizi ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_0\| = 0$$

olursa x_n dizisi x_0 noktasına **yakınsaktır** denir ve

$$x_n \rightarrow x_0 \text{ veya } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$$

şeklinde gösterilir. Normlu uzayda tanımlanan bu yakınsamaya **norma göre yakınsaklık** denir (Rudin, 1991).

Tanım 2.1.4: (Banach Fonksiyon Normu) (R, μ) bir ölçü uzayı, $M^+, f : R \rightarrow [0, \infty]$ tanımlı μ -ölçülebilir fonksiyonların kümesi ve $\rho : M^+ \rightarrow [0, \infty]$ bir fonksiyon olsun. M^+ daki $f, g, f_n, (n = 1, 2, 3, \dots)$ fonksiyonları, $\forall \alpha \geq 0$ sabiti ve μ -ölçülebilir $E \subset R$ kümesi için

$$(P_1) \rho(f) = 0 \Leftrightarrow \text{h.h.y } f = 0,$$

$$(P_2) \rho(\alpha f) = \alpha \rho(f),$$

$$(P_3) \rho(f + g) \leq \rho(f) + \rho(g),$$

$$(P_4) \text{h.h.y } 0 \leq g \leq f \Rightarrow \rho(g) \leq \rho(f),$$

$$(P_5) \text{h.h.y } 0 \leq f_n \uparrow f \Rightarrow \rho(f_n) \uparrow \rho(f),$$

$$(P_6) \mu(E) < \infty \Rightarrow \rho(\chi_E) < \infty,$$

$$(P_7) \mu(E) < \infty \Rightarrow \int_E f d\mu \leq C_E \rho(f), \text{ (burada } C_E, 0 < C_E < \infty, E \text{ ve } \rho \text{ ya bağılı fakat } f \text{ ye bağılı değildir.)}$$

özellikleri sağlanıyorsa ρ ya **Banach fonksiyon normu (fonksiyon normu)** denir (Bennett and Sharpley, 1988).

Tanım 2.1.5: (Banach Fonksiyon Uzayları) (R, μ) bir ölçü uzayı, M de R üzerinde tanımlı genişletilmiş skaler değerli (reel ya da kompleks) μ -ölçülebilir fonksiyonların sınıfı ve ρ bir fonksiyon normu olsun. Bu durumda $\rho(|f|) < \infty$ olacak biçimde M deki f fonksiyonlarının $X = X(\rho)$ sınıfına **Banach fonksiyon uzayı** denir.

$$\forall f \in X \text{ için } \|f\|_X = \rho(|f|)$$

şeklinde ifade edilir (Bennett and Sharpley, 1988).

Teorem 2.1.6: ρ bir fonksiyon normu, $X = X(\rho)$ Banach fonksiyon uzayı ve $\|\cdot\|_X$ Tanım 3.2.2'deki gibi tanımlanmış olsun. Bu durumda vektör uzay işlemleri altında $(X, \|\cdot\|_X)$ normlu lineer uzaydır. S de R üzerinde tanımlı μ -basit fonksiyonların kümesi olmak üzere

$$S \subset X \rightarrow M_0$$

içermeleri sağlanır.

Özel olarak, X te $f_n \rightarrow f$ ise sonlu ölçülü kümeler üzerinde $f_n \rightarrow f$ ölçüde yakınsaktır ve f_n im bir alt dizisi h.h.y f ye μ – noktasal yakınsaktır (Bennett and Sharpley, 1988).

Teorem 2.1.7: X bir Banach fonksiyon uzayı, $f_n \in X (n=1,2,\dots)$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_X < \infty$

olsun. Bu durumda $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ X te $f \in X$ e yakınsaktır ve $\|f\|_X \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_X$ gerçektir. Özel

olarak X tamdır (Bennett and Sharpley, 1988).

Tanım 2.1.8: (Mutlak Sürekli Norm) X bir Banach fonksiyon uzayı, $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ X in ölçülebilir alt kümelerinin bir dizisi ve f , X uzayında bir fonksiyon olsun.

Eğer h.h.y $E_n \rightarrow \emptyset$ olacak biçimde her $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi için

$$\|f\chi_{E_n}\| \rightarrow 0$$

oluyorsa bu durumda f fonksiyonuna **mutlak sürekli norma sahiptir** denir (Bennett and Sharpley, 1988).

Tanım 2.1.9: (Metrik ve Metrik Uzay) X boş olmayan bir küme olsun.

$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$(M_1) \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$$

$$(M_2) \quad d(x, y) = d(y, x) \text{ (simetri özelliği) ve}$$

$$(M_3) \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \text{ (üçgen eşitsizliği)}$$

şartları sağlanıyorsa d 'ye X 'de bir **metrik** ve d ile birlikte X 'e **metrik uzay** denir ve genellikle (X, d) veya X_d ile gösterilir (Bayraktar, 2006).

Tanım 2.1.10: (\mathbb{R}^n Öklid Uzayı) $x = (x_1, \dots, x_n)$ ve $y = (y_1, \dots, y_n)$, \mathbb{R}^n de vektörler olmak üzere \mathbb{R}^n , n -boyutlu öklidyen uzayı $(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ iç çarpımı ile donatılmış \mathbb{R}^n , n -boyutlu reel uzayıdır (Bayraktar, 2006).

Tanım 2.1.11: (Çap, sınırlı küme, sınırlı dizi) $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzay ve bunun bir alt kümesi A olsun.

$$d(A) := \sup\{\|x - y\| : x \in A, y \in B\} \geq 0$$

sayısına A kümesinin **çapı** denir. Eğer bir $A \subset X$ kümesinin çapı sonlu ise A kümesine **sınırlı küme** denir. X içinde (x_n) dizisine karşılık gelen, noktalar kümesi ise (x_n) **sınırlı dizisi** denir (Musayev ve Alp, 2000).

Tanım 2.1.12: (Cauchy Dizisi) $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayı içinde (x_n) bir dizi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $m, n \geq n_\varepsilon$ olduğunda $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ olacak şekilde ε sayısına bağlı bir n_ε doğal sayısı varsa o zaman (x_n) dizisine **Cauchy dizisi** denir (Rudin, 1991).

Cauchy dizisi ile ilgili aşağıdaki önermeler doğrudur.

- (a) Normlu uzaydaki yakınsak her dizi bir Cauchy dizisidir.
- (b) Normlu uzaydaki her Cauchy dizisi sınırlıdır.
- (c) $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzayında (x_n) bir Cauchy dizisi $x \in X$ noktasına yakınsak bir (x_{n_k}) alt dizisine sahip ise (x_n) dizisi de x 'e yakınsaktır.
- (d) $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayında (x_n) ve (y_n) Cauchy dizisi ise, $(x_n + y_n)$ dizisi de bir Cauchy dizisidir.

Tanım 2.1.13: (Banach Uzayları) Bir $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayı içindeki her Cauchy dizisi X içindeki bir noktaya yakınsıyor ise bu $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayına **Banach uzayları** adı verilir (Musayev ve Alp, 2000).

Tanım 2.1.14: (Üstten sınırlı, üst sınır, supremum) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n \leq M$ olacak şekilde bir M reel sayısı varsa (x_n) dizisi **üstten sınırlıdır** denir. M sayısına da bu dizinin bir **üst sınırı** adı verilir. Üst sınırların en küçüğüne dizinin **en küçük üst sınırı** veya **supremumu** denir. $\sup x_n$ ile gösterilir (Balcı, 1998).

Tanım 2.1.15: (Alttan sınırlı, alt sınır, infimum) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n \geq m$ olacak şekilde bir m reel sayısı varsa (x_n) dizisi **alttan sınırlıdır** denir, m sayısına da bu dizinin bir **alt sınırı** adı verilir. Alt sınırların en büyüğüne dizinin **en büyük alt sınırı** veya **infimumu** denir. $\inf x_n$ ile gösterilir (Balcı,1998). Ayrıca infimum ve supremum özellikleri aşağıdaki önermede verildi.

Önerme 2.1.16: A herhangi bir lineer nokta kümesi olsun. $\inf A = a$ ve $\sup A = b$ olmak üzere a ve b sayılarının özellikleri aşağıdaki gibi sağlanır (Balcı, 1997).

(i) $\forall x \in A$ için $x \geq a$ 'dır. Çünkü a alt sınırlıdır.

(ii) $\forall \delta > 0$ için

$$x < a + \delta \tag{2.1}$$

olacak şekilde en az bir $x \in A$ vardır. Çünkü o alt sınırlarının en büyüğüdür. Eğer A 'nın hiçbir elemanı için (2.1) bağlantısı sağlanmasaydı A kümesinin bütün x elemanları için

$$x \geq a + \delta$$

olacaktı. Bu ise $a + \delta$ sayısının bir alt sınırı olduğunu ifade eder. Halbuki bu alt sınır, en büyük alt sınır olarak kabul edilen a sayısından daha büyüktür. Bu mümkün değildir.

(iii) $\forall x \in A$ için $x \leq b$ dir. Dolayısıyla b bir üst sınırdır.

(iv) $\forall \delta > 0$ için

$$x > b - \delta$$

olacak şekilde en az bir $x \in A$ vardır.

Tanım 2.1.17: (Azalan Fonksiyon, Artmayan Fonksiyon) $A \subset \mathbb{R}$ ve $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. A 'nın bir E alt kümesinin $x_1 < x_2$ şartını sağlayan $\forall x_1, x_2$ elemanları için $f(x_1) > f(x_2)$ ise f fonksiyonu E üzerinde **azalan fonksiyon** denir. Artan fonksiyon \uparrow ile gösterilir. Eğer $f(x_1) \leq f(x_2)$ oluyorsa da **azalmayan fonksiyon** denir (Balcı, 1997).

Tanım 2.1.18: (Artan Fonksiyon, Azalmayan Fonksiyon) $A \subset \mathbb{R}$ ve $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. A 'nın bir E alt kümesinin $x_1 < x_2$ şartını sağlayan $\forall x_1, x_2$ elemanları için $f(x_1) < f(x_2)$ ise f fonksiyonu E üzerinde **artan fonksiyon** denir. Azalan fonksiyon \downarrow ile gösterilir. Eğer $f(x_1) \geq f(x_2)$ oluyorsa da **artmayan fonksiyon** denir (Balcı, 1997).

Tanım 2.1.19: (f^* Azalan Yeniden Düzenleme) f fonksiyonunun $f^* : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$ yeniden düzenlemesi

$$f^*(t) := \inf \{ \lambda \geq 0 : \alpha_f(\lambda) \leq t \}$$

şeklinde tanımlanır (Bennett and Sharpley, 1988).

Tanım 2.1.20: (Eş Ölçülebilir Fonksiyonlar) $f \in M_0(\mathbb{R}, \mu), g \in M_0(\mathbb{S}, \nu)$ olmak üzere f ve g aynı dağılım fonksiyonuna sahip ise, yani $\forall t \geq 0$ için

$$\alpha_f(t) = \alpha_g(t)$$

eşitliği sağlanıyorsa f ve g ye **eş ölçülebilir fonksiyonlar** denir (Bennett and Sharpley, 1988).

Tanım 2.1.21: (Topolojik Vektör Uzayı) X bir topolojik Hausdorff uzayı olsun. $X \times X$ ve $\mathbb{C} \times X$ topolojik çarpım uzaylarından X uzayına olan

$$(x, y) \rightarrow x + y \quad \text{ve} \quad (c, x) \rightarrow cx$$

dönüşümleri sürekli ise bu durumda X uzayına bir **topolojik vektör uzayıdır** denir. Burada \mathbb{C} , Öklidyen metriği tarafından belirlenmiş olan alışılmış topolojiye sahiptir (Adams and Fournier, 2003).

Tanım 2.1.22: (Dual Uzay) Bir X topolojik vektör uzayı üzerindeki bütün sürekli, lineer fonksiyonların kümesi X 'in duali olarak adlandırılır ve X' ile gösterilir. Noktasal toplama ve skalerle çarpma altında X' bir vektör uzayıdır. $f, g \in X'$, $x \in X$, $c \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (cf)(x) = cf(x)$$

tanımlanır (Grafakos, 2008).

Tanım 2.1.23: $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzay, $x \in X$ ve $t > 0$ olmak üzere;

$B(x, t) = \{y \in X : \|x - y\| < t\}$ kümesi x merkezli t yarıçaplı açık yuvar

$B[x, t] = \{y \in X : \|x - y\| \leq t\}$ kümesi x merkezli t yarıçaplı kapalı yuvar

$B(x, t) = \{y \in X : \|x - y\| = t\}$ kümesi x merkezli t yarıçaplı yuvar yüzeyi olarak tanımlanır (Bayraktar, 2006).

Tanım 2.1.24: $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzay ve $A \subset X$ olsun. A 'nin elemanlarından oluşan her bir (x_n) dizisinin yakınsadığı değer X uzayının bir elemanı ise A kümesi X uzayında **yoğundur** denir (Bayraktar, 2006).

Tanım 2.1.25: X normlu uzayı sayılabilir yoğun bir alt kümeye sahipse X normlu uzayına **ayrılabilir uzay** denir (Bayraktar, 2006).

2.2 Operatör Teorisi

Tanım 2.2.1: (Operatör) X ve Y boş olmayan kümeler ve $D \subset X$ olsun. D 'nin her elemanına Y 'nin bir elemanını karşılık getiren bir kurala D 'den Y 'ye bir **operatör** veya **dönüşüm** denir. A operatörünün x 'e karşılık getirdiği eleman $A(x)$ ile gösterilir. A operatörünün $x \in D$ 'yi, $A(x) \in Y$ 'ye götürdüğünü belirtmek için,

$A : D \rightarrow Y$ gösterimi kullanılır. Bu durumda D 'ye A operatörünün tanım kümesi denir ve genellikle $D(A)$ ile gösterilir.

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(A) = \{y \in Y : y = A(x), x \in D(A)\}$$

kümesine A operatörünün **değer (veya görüntü)** kümesi denir (Musayev ve Alp, 2000).

Tanım 2.2.2: (Özdeşlik Operatörü) $A : X \rightarrow X$ operatörü verilsin. $\forall x \in X$ için $A(x) = x$ ise A operatörüne **özdeşlik operatörü** denir. I_X veya I ile gösterilir (Musayev ve Alp, 2000).

Tanım 2.2.3: (Lineer Operatör) X ve Y aynı K cismi üzerinde iki lineer uzay ve $A : X \rightarrow Y$ operatörü verilsin. Eğer $D(A)$, X 'in bir alt uzayı ve $\forall x, y \in D(A)$ ve $\forall \alpha, \beta \in K$ için

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$$

ise A operatörüne **lineer operatör** denir (Musayev ve Alp, 2000).

Tanım 2.2.4: (Sabit Operatör) $A : X \rightarrow Y$ bir operatör ve $b \in Y$ bir eleman olsun. Eğer $\forall x \in X$ için $A(x) = b$ ise A operatörüne **sabit operatör** adı verilir (Musayev ve Alp, 2000).

Tanım 2.2.5: (Süreklilik) X ve Y iki normlu uzay ve $T : D(T) \rightarrow Y$ operatörü verilsin.

(a) $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ olmak üzere $\forall x \in D(T), \|x - x_0\| < \delta$ iken

$$\|Tx - Tx_0\| < \varepsilon.$$

(b) x_0 noktasına yakınsayan $\forall (x_n) \subset D(T)$ dizisi için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) = T(x_0)$$

şartları sağlanıyorsa bu durumda T operatörü $x_0 \in D(T)$ noktasında **sürekli** denir. Eğer $T: X \rightarrow Y$ operatörü $D(T)$ 'nin her noktasında sürekli ise T operatörü $D(T)$ üzerinde **sürekli** denir (Musayev ve Alp, 2000).

Tanım 2.2.6: (Sınırlılık) X ve Y iki normlu uzay ve $D(A) \subset X$ olmak üzere $T: D(A) \rightarrow Y$ lineer operatörü olsun. Eğer $\forall x \in D(A)$ için

$$\|Ax\| \leq C\|x\|$$

olacak şekilde bir C reel sayısı varsa, A operatörüne **sınırlı** denir. Bir A operatörünün normu

$$\|A\| = \sup_{\substack{x \in D(A) \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

şeklinde tanımlanır (Musayev ve Alp, 2000).

Tanım 2.2.7: $A: X \rightarrow Y$ ve $E \subset X, F \subset Y$ olsun.

$$A(E) = \{A(x) : x \in E\}$$

kümesine E 'nin **görüntüsü**, $A^{-1}(F) = \{x \in X : A(x) \in F\}$ kümesine F 'nin **ters görüntüsü** denir (Musayev ve Alp, 2000).

Tanım 2.2.8: $A: X \rightarrow Y$ ve $B: X \rightarrow Y$ operatörleri verilmiş olsun. Eğer $D(A) = D(B) = D$ ve $\forall x \in D$ için $A(x) = B(x)$ ise A ile B operatörleri eşittir denir ve $A = B$ ile gösterilir. Eğer $D(A) \subset D(B)$ ve $\forall x \in D(A)$ için $A(x) = B(x)$ ise A operatörüne B operatörünün kısıtlaması (veya B operatörüne A operatörünün **genişlemesi** denir ve $A = B|_{D(A)}$ ile gösterilir (Musayev ve Alp, 2000).

Tanım 2.2.9: X ve Y normlu uzaylar ve $D(T) \subset X$ olmak üzere $T: D(T) \rightarrow Y$ lineer operatör olsun. Bu durumda T operatörünün sürekli olması için gerek ve yeter şart T operatörünün sınırlı olmasıdır (Musayev ve Alp, 2000).

Tanım 2.2.10: $T: L \rightarrow L'$ ye lineer operatör olsun. T altında L 'nin özdeş elemanına dönüşen elemanların cümlesine, T 'nin **sıfır uzayı** veya **çekirdeği** denir ve $\text{Çek}T$ ile gösterilir. Demek ki,

$$\text{Çek}T = \{x \in L : T(x) = \theta'\} = T^{-1}(\theta')$$

dür (Bayraktar, 2006).

Tanım 2.2.11: (Gömme) X ve Y iki normlu lineer uzay ve $X \subset Y$ olsun.

$$D_T(I) = \mathfrak{R}(I) = X,$$

yani $\forall x \in X$ için $I(x) = x$ olacak şekilde Y de en az bir eleman olmaz üzere

$$I: X \rightarrow Y$$

ile verilen operatöre birim operatörü denir. Bu operatör sürekli ise yani $\forall x \in X$ için

$$\|x\|_Y \leq c \|x\|_X$$

olacak şekilde $c > 0$ sabiti var ise X uzayı Y uzayına **sürekli gömülür** denir. I operatörüne X uzayından Y uzayına bir **gömme operatörü** denir. Alternatif olarak bazen X uzayının Y uzayına bir sürekli (veya sınırlı) gömmesi mevcuttur denir.

$$\|I\|_{X \rightarrow Y} := \sup_{f \neq 0} \frac{\|f\|_Y}{\|f\|_X}$$

şeklinde gösterilen bu sayıya da I 'nin operatör normu denir. Eğer X ve Y iki normlu lineer uzay olmak üzere X uzayından Y uzayına bir sürekli gömme mevcut ise

$$X \rightarrow Y$$

şeklinde gösterilir. Eğer

$$X \rightarrow Y \text{ ve } Y \rightarrow X$$

aynı anda oluyorsa

$$X \Leftrightarrow Y$$

şeklinde gösterilir ve eğer bu gömme operatörü kompakt ise de

$$X \rightarrow \rightarrow Y$$

şeklinde gösterilir (Fucik vd., 2012).

Tanım 2.2.12: (Fonksiyonel) Bir X vektör uzayı üzerinde tanımlanan skaler değerli bir fonksiyona **fonksiyonel** adı verilir. Eğer $x, y \in X$ ve $a, b \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$f(ax + by) = af(x) + bf(y)$$

ise f lineerdir denir. X bir topolojik vektör uzayı olsun. Eğer bir fonksiyonel X uzayından \mathbb{C} 'ye sürekli ise X üzerinde süreklidir denir (Grafakos, 2008).

2.3 Ölçü Teorisi

Tanım 2.3.1: (Cebir ve σ -Cebir) X boştan farklı bir küme ve $A \subset P(X)$ olsun.

i) $\emptyset, X \in A$

ii) $\forall E \in A, E^c = X \setminus E \in A$

iii) $\forall k = 1, 2, \dots, n, \{E_k\}_{k=1}^n \in A \Rightarrow \bigcup_{k=1}^n E_k \in A$

şartları sağlanıyor ise bu durumda A sınıfına X üzerinde bir **cebirdir** denir.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \{E_n\}_{n=1}^{\infty} \in A \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in A$$

şartı alınırsa A cebirine bir **σ -cebiri** denir (Royden, 1968).

Teorem 2.3.2: X üzerinde σ -cebirlerinin herhangi adetteki kesişimleri yine bir σ -cebridir (Balcı, 2012).

İspat: I bir indis kümesi olsun. $i \in I$ için A_i bir σ -cebiri olduğundan $X \in A_i$ 'dir.

Buradan $X \in \bigcap_{i \in I} A_i$ olur. Eğer $E \in \bigcap_{i \in I} A_i$ ise her bir $i \in I$ için A_i bir σ -cebiri olduğundan $E^c \in A_i$ 'dir. Dolayısıyla $E^c \in \bigcap_{i \in I} A_i$ 'dir. Her bir $n \in \mathbb{N}$ için $E_n \in \bigcap_{i \in I} A_i$

olsun. Her bir i için $E_n \in A_i$ ve dolayısıyla $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in A_i$ buradan da $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \in \bigcap_{i \in I} A_i$ bulunur. Bu ispatı tamamlar.

Tanım 2.3.3: (Borel Cebiri) Bir K sınıfını kapsayan σ -cebirlere K 'nin ürettiği (veya doğurduğu) σ -cebiri denir ve $D(K)$ ile gösterilir. \mathbb{R}^n deki bütün açık (a, b) aralıklarının doğurduğu σ -cebiri **Borel cebiri** denir ve $B(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir. $n=1$ olması halinde $B(\mathbb{R}^1)$ Borel cebiri $B(\mathbb{R})$ 'nin her bir elemanına Borel kümesi denir (Royden, 1968).

Tanım 2.3.4: (Ölçülebilir Uzay, Ölçü Uzayı, Ölçülebilir Küme) X , boştan farklı bir küme, $A \subset P(X)$ de X 'in bir σ -cebiri ve $\mu: A \rightarrow [0, \infty)$ de A üzerinde bir ölçü olsun. (X, A) ikilisine bir **ölçülebilir uzay** denir. (X, A, μ) ölçüsüne de bir **ölçü uzayı** denir. A 'daki her bir eleman da ölçülebilir küme olarak adlandırılır (Royden, 1968).

Tanım 2.3.5: (Ölçü, Sonlu Ölçü, σ -sonlu, Olasılık Ölçüsü) (X, A) bir ölçülebilir uzay olsun. A üzerinde tanımlı genişletilmiş reel değerli bir μ fonksiyonu

i) $\mu(\emptyset) = 0$

ii) $\forall A \in A, \mu(A) \geq 0$

iii) Her ayrık $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ için $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

özelliklerini sağlıyorsa bu fonksiyona **ölçü fonksiyonu** veya **ölçü** adı verilir. Eğer $\forall A \in A$ için $\mu(A) < \infty$ oluyorsa μ 'ye **sonlu ölçü** denir. X kümesi her biri sonlu ölçüye sahip sayılabilir adetteki kümelerin birleşimi olarak yazılabiliyorsa μ ölçüsüne **σ -sonlu** denir. Eğer $\mu(X) = 1$ ise bu ölçüye **olasılık ölçüsü** adı verilir (Royden, 1968).

Teorem 2.3.6: (X, A, μ) bir ölçü uzayı olsun.

(a) (A_n) A 'daki elemanların bir artan dizisi ise

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) \quad (2.2)$$

dir.

(b) (B_n) , A 'daki elemanların bir azalan dizisi ve $\mu(B_1) < \infty$ ise

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n) \quad (2.3)$$

dir (Balcı, 2012).

İspat:

(a) Eğer bazı n ler için $\mu(A_n) = +\infty$ ise (2.2) eşitliğinin her iki yanını $+\infty$ olur. Her n için $\mu(A_n) < \infty$ olduğunu kabul edelim.

$$S_1 = A_1 \text{ ve } n > 1 \text{ için } S_n = A_n \setminus A_{n-1}$$

biçiminde tanımlanan (S_n) dizisi A daki kümelerin bir ayrık dizisi olur. Ayrıca

$$A_n = \bigcup_{k=1}^n S_k \text{ ve } \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$$

yazılabilir. μ bir ölçü olduğundan

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(S_n) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m \mu(S_n) \\ &= \mu(S_1) + \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=2}^m \mu(S_n) = \mu(S_1) + \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=2}^m \mu(A_n \setminus A_{n-1}) \\ &= \mu(S_1) + \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=2}^m \mu(A_n) - \mu(A_{n-1}) = \mu(A_1) + \lim_{m \rightarrow \infty} [\mu(A_m) - \mu(A_1)] \end{aligned}$$

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} \mu(A_m)$$

bulunur.

(b) $T_n = B_1 \setminus B_n$ olsun. (T_n) , A daki elemanların bir artan dizisidir. Bu diziye teoremin

(a) şıkkı uygulanırsa

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(T_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_1 \setminus B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\mu(B_1) - \mu(B_n)) \\ &= \mu(B_1) - \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n) \end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n = B_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$$

olacağından

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n\right) = \mu(B_1) - \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right)$$

yazılabilir. Bu değer yukarıda yerine konulursa

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n)$$

eşitliği elde edilir.

(A_n) bir artan dizi olduğunda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

ve (B_n) bir azalan dizi olduğunda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$$

olacağını biliyoruz.

Tanım 2.3.7: (Dış Ölçü) X boştan farklı bir küme olsun. $P(X)$ üzerinde tanımlı genişletilmiş reel değerli bir μ^* fonksiyonu için

(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$

(ii) $\forall E \in P(X), \mu^*(E) \geq 0$

(iii) $A \subset B \subset X, \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

(iv) $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \in P(X) \Rightarrow \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$

şartları sağlanırsa μ^* fonksiyonuna X üzerinde bir **dış ölçü** denir (Royden, 1968).

Tanım 2.3.8: (Lebesgue Dış Ölçüsü, Lebesgue Ölçülebilir) $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$, \mathbb{R} nin sınırlı ve açık alt aralıklarının bir dizisi ve

$$\tau_A = \left\{ (I_k) : A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \right\}$$

olsun. $P(\mathbb{R})$ üzerinde

$$\lambda^*(A) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} l(I_k) : (I_k) \in \tau_A \right\}$$

şeklinde tanımlanan λ^* bir dış ölçüdür. Bu dış ölçüye **Lebesgue dış ölçüsü** adı verilir. Lebesgue dış ölçüsü \mathbb{R} nin her bir alt aralığına onun uzunluğunu karşılık getirir. n -boyutlu \mathbb{R}^n uzayında Lebesgue dış ölçüsünü tanımlamak için

$$I = \{x : a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, \dots, n\}$$

n -boyutlu kapalı aralıklarını göz önüne alınırsa bu aralıkların hacimleri

$$v(I) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$$

biçimindedir. Keyfi bir $E \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin Lebesgue dış ölçüsü

$$\lambda^*(E) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} v(I_k) : E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k, I_k \text{ biraralık} \right\}$$

ile tanımlanır. $\forall A \subset \mathbb{R}^n$ için eğer

$$\lambda^*(A) = \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \cap (\mathbb{R}^n - E)) \quad (\text{Caratheodary ölçümü})$$

ise E kümesine **Lebesgue ölçülebilirdir** denir (Royden,1968).

Tanım 2.3.9: (Ölçülebilir Fonksiyon) (X, Σ) bir ölçülebilir uzay ve $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için

$$f^{-1}([\alpha, +\infty[) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \Sigma$$

oluyorsa f ye **ölçülebilir fonksiyon** denir. X üzerindeki ölçülebilir fonksiyonların ailesi $M(X, \Sigma)$ ile gösterilir. Ayrıca (X, Σ) bir ölçülebilir uzay olmak üzere X deki negatif olmayan ölçülebilir fonksiyonları kümesi $M^+(X, \Sigma)$ ile gösterilir (Bayraktar, 2006).

Tanım 2.3.10: (Karakteristik Fonksiyon) $A \subset \mathbb{R}^n$ olsun.

$$\chi_A = \begin{cases} 1, x \in A \\ 0, x \notin A \end{cases}$$

ile tanımlanan χ_A fonksiyonuna A nın karakteristik fonksiyonu denir (Grafakos, 2008).

Tanım 2.3.11: (Basit Fonksiyon) Görüntü kümesi sonlu elemandan meydana gelen φ fonksiyonuna bir **basit fonksiyon** adı verilir. Bir reel değerli basit φ fonksiyonu $a_k \in \mathbb{R}$ ve χ_{E_k}, E_k kümesinin karakteristik fonksiyonu olmak üzere

$$\varphi = \sum_{k=1}^n a_k \chi_{E_k} \quad (2.4)$$

biçiminde yazılabilir. Eğer φ fonksiyonu X üzerinde tanımlı ise $\bigcup_{k=1}^n E_k = X$ dir. Bu E_k

kümelerinin seçilişi tek olmadığından φ nin (2.4) tipindeki gösterimi tek değildir.

Eğer a_1, a_2, \dots, a_m sayıları φ nin X üzerinde aldığı farklı değerler ve

$$E_k = \{x \in X : f(x) = a_k\}$$

seçilirse E_k kümeleri ayrık olur. Bu durumda

$$\varphi = \sum_{k=1}^m a_k \chi_{E_k}$$

gösterimine φ fonksiyonunun **standart gösterimi** adı verilir. X üzerinde tanımlı, reel değerli, A ölçülebilir basit fonksiyonların kümesi $S = S(X, A)$, S deki negatif olmayan fonksiyonların kümesi S^+ ile gösterilir (Balcı, 2012).

Tanım 2.3.12: (X, A, μ) bir ölçü uzayı olsun. a_k lar negatif olmayan reel sayılar, $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ ler A ya ait ayrık kümeler olmak üzere

$$\bigcup_{k=1}^n A_k = X$$

$$\varphi = \sum_{k=1}^n a_k \chi_{A_k}$$

gösterimine sahip bir $\varphi \in S^+$ fonksiyonunun μ ölçüsüne göre integrali

$$\int_X \varphi d\mu = \sum_{k=1}^n a_k \mu(A_k)$$

genişletilmiş reel sayısıdır. Bu tanıma göre φ nin μ ye göre integrali ya negatif olmayan bir reel sayı ya da, μ ölçüsünün sonlu olmayan bir ölçü olması haline karşılık gelen, $+\infty$ değeridir. Şurasını hemen belirtelim ki, φ fonksiyonunun μ ye göre integrali ne a_k sayılarına ne de A_k kümelerine bağlıdır. Bununla ilgili olarak şu teoremi verebiliriz (Balcı, 2012).

Teorem 2.3.13: (X, A, μ) bir ölçü uzayı, $\varphi \in S^+(X, A)$ ve A_k lar ayrık olmak üzere

φ nin bir gösterimi $\varphi = \sum_{k=1}^n a_k \chi_{A_k}$ olsun. φ nin μ ölçüsüne göre integrali ne a_k

sayılarına ne de A_k kümelerine bağlıdır (Balcı, 2012).

İspat: $b_1, b_2, b_3, \dots, b_m$ ler negatif olmayan reel sayılar ve B_1, B_2, \dots, B_m ler de A ya ait ayrık kümeler olmak üzere

$$\varphi = \sum_{i=1}^m b_i \chi_{B_i}$$

olsun.

$$\bigcup_{k=1}^n A_k = \bigcup_{i=1}^m B_i = X$$

olacağı açıktır. Eğer $A_k \cap B_i \neq \emptyset$ ise $A_k \cap B_i$ üzerinde $a_k = b_i$ olacaktır.

Bu durumda

$$\begin{aligned} \int_X \varphi d\mu &= \sum_{k=1}^n a_k \mu(A_k) = \sum_{k=1}^n a_k \mu(A_k \cap X) = \sum_{k=1}^n a_k \mu\left(A_k \cap \left(\bigcup_{i=1}^m B_i\right)\right) \\ &= \sum_{k=1}^n a_k \mu\left(\bigcup_{i=1}^m (A_k \cap B_i)\right) = \sum_{k=1}^n a_k \sum_{i=1}^m \mu(A_k \cap B_i) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m a_k \mu(A_k \cap B_i) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m b_i \mu(B_i \cap A_k) = \sum_{i=1}^m b_i \sum_{k=1}^n \mu(A_k \cap B_i) = \sum_{i=1}^m b_i \mu\left(\bigcup_{k=1}^n (A_k \cap B_i)\right) \\ &= \sum_{i=1}^m b_i \mu\left(B_i \cap \left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right)\right) = \sum_{i=1}^m b_i \mu(B_i \cap X) = \sum_{i=1}^m b_i \mu(B_i) \end{aligned}$$

olur. Şu halde

$$\sum_{k=1}^n a_k \mu(A_k) = \sum_{i=1}^m b_i \mu(B_i)$$

dir. O halde integralin değeri a_k sayılarından da, A_k kümelerinden de bağımsızdır.

Teorem 2.3.14: (Fatou Lemması) (X, A, μ) bir ölçü uzayı ve (f_n) de $M^+(X, A)$ daki fonksiyonların bir dizisi ise

$$\int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu \quad (2.5)$$

dür (Balcı, 2012).

İspat: $\liminf f_n = \sup_{m \geq 1} \left(\inf_{n \geq m} f_n \right)$ olduğundan, $g_m = \inf \{f_m, f_{m+1}, \dots\}$ denirse $m \leq n$ için $g_m \leq f_n$ dir. Dolayısıyla $m \leq n$ için

$$\int_X g_m d\mu \leq \int_X f_n d\mu \Rightarrow \int_X g_m d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X g_m d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu \text{ bulunur.}$$

(g_m) artan ve $\lim g_m = \sup g_m = \liminf f_n$ olduğundan Monoton yakınsaklık teoreminden

$$\int_X \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \right) d\mu = \int_X \lim_{m \rightarrow \infty} g_m d\mu = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_X g_m d\mu \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu \text{ bulunur.}$$

Bu teoeremden $f_n \geq 0$ şartı kaldırılamaz.

Tanım 2.3.15: (Dağılım Fonksiyonu) (X, μ) bir ölçü uzayı ve $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ (veya \mathbb{C}) ölçülebilir bir fonksiyon olsun.

$$\alpha_f(\lambda) = \mu(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\})$$

şeklinde tanımlanan

$$\alpha_f : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$$

fonksiyonuna f fonksiyonunun **dağılım fonksiyonu** denir (Bennett and Sharpley, 1988).

Tanım 2.3.16: (hemen hemen her yerde (h.h.y)) (X, A, μ) bir ölçü uzayı olsun. Eğer bir önerme ölçüsü sıfır olan küme veya kendisi A ya ait olmadığında, sıfır ölçülü bir küme tarafından kapsanan bir kümenin tümleyeni üzerinde doğru ise, o önerme **hemen hemen her yerde** doğrudur denir, kısaca **h.h.y** biçiminde yazılır.

Bir $p(x)$ önermesinin doğru olmadığı x noktalarının kümesi sıfır ölçülü bir küme veya sıfır ölçülü bir küme tarafından kapsanıyorsa, $p(x)$ önermesi **hemen hemen her** x için doğrudur denir (Balci, 1998).

Tanım 2.3.17: (Yeniden Düzenleme Altında Değişmeyen (Rearrangement Invariant) Uzayları) $\rho(X, \Sigma, \mu)$, σ -sonlu bir ölçü uzayı üzerinde bir norm olsun. f ve g eş ölçülebilir fonksiyonlar ve $f, g \in M_0^+(X, \mu)$ olmak üzere

$$\rho(f) = \rho(g)$$

sağlanıyorsa $X = X(\rho)$ uzayına **yeniden düzenleme altında değişmeyen (rearrangement invariant) uzayları** denir (Bennett and Saharpley, 1988).

Tanım 2.3.18: (Homojen Fonksiyon) α ve λ iki reel sayı olmak üzere

$$f(\lambda x) = |\lambda|^\alpha f(x)$$

oluyorsa f fonksiyonuna α . **dereceden homojen fonksiyon** denir (Fucik vd., 2012).

Tanım 2.3.19: (Örtü, Açık Örtü, Alt Örtü, Sonlu Alt Örtü) Birleşimleri A kümesini kapsayan \bigcup_i kümeler ailesine A kümesinin bir **örtüsüdür** denir. Bu \bigcup_i kümelerinin her biri açıksa bu halde \bigcup_i , A kümesinin **açık örtüsüdür** denir. Birleşimleri A kümesini kapsayan alt topluluklar ailesine verilen örtünün **alt örtüsü** adı verilir. Eğer bu topluluklar ailesi sonlu sayıda kümelere oluşuyorsa, bu örtüye **sonlu alt örtü** denir (Musayev ve Alp, 2000).

Tanım 2.3.20: (Kompaktlık) X kümesinin her açık örtüsünün sonlu sayıda bir alt örtüsü varsa, X kümesine **kompakttır** denir. Kapalı ve sınırlı her kümenin açık örtüsünün sonlu sayıda bir alt örtüsü vardır. Yani kapalı ve sınırlı her küme kompakttır (Musayev ve Alp, 2000).

Tanım 2.3.21: (Destek) $f(x) \neq 0$ şartını sağlayan x noktalarının kümesinin kapanışına f fonksiyonunun **desteği** denir ve

$$\text{supp } f = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}$$

ile gösterilir (Bayraktar, 2006).

Tanım 2.3.22: (Düzgün Fonksiyon) Bir bölge üzerinde her mertebeden sürekli türevlere sahip olan bir f fonksiyonuna **düzgün fonksiyon** denir (Bayraktar, 2006).

Teorem 2.3.23: (X, A, μ) metrik ile verilen bir σ -sonlu ölçü uzayı olsun. Bu durumda bir $s: X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun basit olması için gerek ve yeter şart s fonksiyonunun görüntüsü sonlu bir küme ve desteğinin sonlu ölçülü olmasıdır (Fucik vd., 2012).

Teorem 2.3.24: (Monoton Yakınsaklık Teoremi) (X, Σ, μ) bir ölçü uzayı ve (f_n) de $M^+(X, \Sigma)$ daki fonksiyonların monoton artan bir dizisi olsun. (f_n) dizisi f fonksiyonuna yakınsar ise

$$\int_X f d\mu = \lim \int_X f_n d\mu$$

dir (Grafakos, 2008).

Teorem 2.3.25: (Lebesgue Yakınsaklık) (X, Σ, μ) bir ölçü uzayı, $g: X \rightarrow [0, \infty]$ integrallenebilen bir fonksiyon ve f, f_1, f_2, \dots X üzerinde Σ -ölçülebilir reel değerli fonksiyonlar olsun. Eğer h.h.x için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \text{ ve } \forall n \in \mathbb{N} |f_n(x)| \leq g(x)$$

ise bu durumda f ve f_n integrallenebilirdir ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

dır (Grafakos, 2008).

2.4 L^p Uzayları (Lebesgue Uzayları)

Tanım 2.4.1: (L^p Uzayları, (Lebesgue Uzayları)) (X, γ) bir ölçü uzayı ve $M, f: X \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı γ -ölçülebilir fonksiyonların kümesi olsun. $0 < p < 1$ olmak üzere

$$L^p(X) := \left\{ f \in M : \int_X |f|^p d\gamma < \infty \right\}$$

sınıfına mutlak değerinin p-inci kuvveti integrallenebilen fonksiyonların sınıfı denir.

f fonksiyonunun L^p normu

$$\|f\|_{L^p} = \begin{cases} \left(\int_X |f|^p d\gamma \right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < \infty \\ \text{ess sup}_{x \in X} |f(x)|, & p = \infty \end{cases}$$

ile tanımlanır ve bu norm ile L^p ye **Lebesgue uzayları** denir. Burada

$$\text{ess sup}_{x \in X} |f(x)| = \inf \left\{ \lambda : \gamma \left(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\} \right) = 0 \right\}$$

dır (Fucik vd., 2012).

Teorem 2.4.2: (Hölder Eşitsizliği) $1 < p < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ olmak üzere $f \in L^p(\Omega)$ ve $g \in L^{p'}(\Omega)$ olsun. Bu durumda $fg \in L^1(\Omega)$ olur ve

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^{p'}(\Omega)}$$

eşitsizliği sağlanır (Fucik vd., 2012).

Tanım 2.4.3: (Minkowski Eşitsizliği) $1 \leq p < \infty$ ve $f, g \in L^p$ olsun. Bu durumda $(f + g) \in L^p$ olmak üzere

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$$

eşitsizliği sağlanır (Fucik vd., 2012).

Lebesgue integralinin özellikleri ve Hölder eşitsizliği göz önüne alındığında L^p uzaylarının $1 \leq p < \infty$ için bir vektör uzayı olduğu görülür. Bununla beraber bir $f \in L^p$ olmak üzere $\|f\|_{L^p}$ normu altında;

$$L_1) \|f\|_{L^p} \geq 0$$

$$L_2) \|f\|_{L^p} = 0 \Rightarrow \text{hemen hemen her yerde } f(x)$$

$$L_3) \|\alpha f\|_{L^p} = |\alpha| \|f\|_{L^p}, \alpha \in \mathbb{R}$$

$$L_4) \|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$$

şartları sağlandığından $1 \leq p < \infty$ için L^p bir normlu uzaydır.

Tanım 2.4.4: (Genelleştirilmiş Minkowski Eşitsizliği) $1 \leq p < \infty$, (X, μ) ve (Y, ν) ölçülebilir uzaylar olsun. $f, (X, \mu) \times (Y, \nu)$ çarpım uzayı üzerinde ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere

$$\left(\int_Y \left(\int_X |f(x, y)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} d\nu(y) \right)^p \leq \int_X \left(\int_Y |f(x, y)|^p d\nu(y) \right)^{\frac{1}{p}} d\mu(x)$$

eşitsizliği sağlanır (Grafakos, 2008).

Tanım 2.4.5: (L^p Uzaylarında Yakınsaklık) $f_n, f \in L^p$ olmak üzere $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ nin f fonksiyonuna p . Mertebeden yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\forall \varepsilon > 0$ için en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ mevcuttur öyle ki her $n \geq n_0$ için $\|f_n - f\|_{L^p} < \varepsilon$ olmasıdır. Burada

$$\|f_n - f\|_{L^p} := \left(\int_{\Omega} |f_n - f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Buna göre, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ nin f fonksiyonuna L^p yakınsak olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{L^p} = 0$$

olmasıdır (Fucik vd., 2012).

Tanım 2.4.6: (Fubini) f , \mathbb{R}^{m+n} üzerinde ölçülebilir bir fonksiyon ve

$$I_1 = \int_{\mathbb{R}^{m+n}} |f(x, y)| dx dy$$

$$I_2 = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x, y)| dx \right) dy$$

$$I_3 = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} |f(x, y)| dx \right) dy$$

integrallerinden en az biri mevcut ve sonlu olsun. I_2 için bu \mathbb{R}^n üzerinde integrallenebilen bir g fonksiyonu vardır öyle ki $g(y)$ hemen her y için içteki integrale eşittir anlamındadır ve I_3 için de aynısı geçerlidir. Bu durumda

(a) Hemen her $y \in \mathbb{R}^m, f(\cdot, y) \in L^1(\mathbb{R}^n)$

(b) Hemen her $x \in \mathbb{R}^n, f(x, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^m)$

(c) $\int_{\mathbb{R}^m} f(\cdot, y) dy \in L^1(\mathbb{R}^n)$

(d) $\int_{\mathbb{R}^n} f(x, \cdot) dx \in L^1(\mathbb{R}^m)$

(e) $I_1 = I_2 = I_3$

şartları elde edilir (Fucik vd., 2012).

Tanım 2.4.7: (Kuvvetli ve Zayıf Tip Sınırlılık) $1 \leq p, q < \infty$ olmak üzere

$T: L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$ bir operatör olsun. Eğer $\forall f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ için $\|Tf\|_{L^q} \leq A \|f\|_{L^p}$

olacak biçimde f den bağımsız bir $A > 0$ sabiti varsa T dönüşümüne zayıf (p, q)

tipindedir denir. μ bir ölçü olmak üzere eğer $\forall \alpha > 0$ için

$$\mu \left\{ x : |Tf(x)| > \alpha \right\} \leq \left(\frac{A \|f\|_{L^p}}{\alpha} \right)^q, \quad q < \infty$$

olacak şekilde α ve f 'den bağımsız bir $A > 0$ sabiti varsa T dönüşümüne zayıf (p, q)

tipindedir denir (Sadosky, 1979).

Tanım 2.4.8: (Lokal İntegrallenebilme) f ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere her K kompakt kümesi üzerinde

$$\int_K |f| d\mu < \infty$$

ise f fonksiyonunun lokal(veya yerel) integrallenebilir adı verilir ve

$$L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) := \left\{ f : \int_K |f| d\mu < \infty, K \subset \mathbb{R}^n, K \text{ kompakt} \right\}$$

şeklinde ifade edilir. Ayrıca,

$$L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) := \left\{ f : \left(\int_K |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, K \subset \mathbb{R}^n, K \text{ kompakt} \right\}$$

şeklinde tanımlanır (Royden, 1968).

Teorem 2.4.9: $1 \leq p < \infty$ olmak üzere L^p uzaylarındaki basit fonksiyonların kümesi L^p uzaylarında yoğundur (Royden, 1968).

Tanım 2.4.10: (L^p_w Uzayları (Ağırlıklı Lebesgue Uzayları)) $1 \leq p < \infty$ ve w bir ağırlık fonksiyonu olsun. f fonksiyonları bütün ölçülebilir norma sahip ise bu durumda $L^p_w(\mathbb{R}^n)$ uzayları

$$\|f\|_{L^p_w(\mathbb{R}^n)} := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

şeklinde tanımlanan normlu uzaylara $L^p_w(\mathbb{R}^n)$ uzayları denir. $p = \infty$ durumunda ise

$L^\infty(w) \equiv L^\infty(\mathbb{R}^n, w)$ de norm

$$\|f\|_{L^\infty_w} \equiv \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \text{ess sup}_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)| w(x)$$

ile tanımlanır (Royden, 1968).

Tanım 2.4.11: (Dual Uzayı) $g \in L^p$ olmak üzere $f \in L^p(\Omega)$ için

$$\Phi(f) := \int_{\Omega} f(x)g(x)dx$$

gösterilsin. Bu durumda,

$$\Phi_g \in [L^p(\Omega)]^* \text{ ve } \|\Phi_g\| = \|g\|_p,$$

olarak tanımlanır (Fucik vd., 2012).

Tanım 2.4.12: Ω, \mathbb{R}^n 'nin boş olmayan sınırlı açık alt kümesi ve g de Ω üzerinde bir ölçülebilir fonksiyon olsun. $p > 1$ ve $M > 0$ olmak üzere öyle keyfi bir $f \in L^p(\Omega)$ için

$$f \cdot g \in L^1(\Omega) \text{ ve } \left| \int_{\Omega} f(x)g(x)dx \right| \leq M \|f\|_p$$

şeklindedir. Bu durumda $g \in L^p(\Omega)$ ve $\|g\|_p \leq M$ biçiminde olur (Royden, 1968).

Tanım 2.4.13: (Riesz Potansiyeli) $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ ve $0 < \alpha < n$ olmak üzere, I_{α} Riesz potansiyeli

$$I_{\alpha}f(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy$$

olarak tanımlanır (Stein, 1970).

Teorem 2.4.14: $1 < p < \infty, \Omega \subset \mathbb{R}^n, d = \text{çap}(\Omega) = \sup\{|x-y|; x, y \in \Omega\}, 0 < \alpha < \frac{n}{p},$

$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n}$ olsun. Bu durumda

$$\|I_{\alpha}f\|_{L^q(\Omega)} \leq \bar{c}(p, \alpha, n) \|f\|_{L^p(\Omega)}$$

gerçeklenir, burada $\bar{c}(p, \alpha, n)$ pozitif sabiti

$$\bar{c}(p, \alpha, n) = c \frac{n}{\alpha[n - \alpha p]} (p')^{\frac{1}{q}}$$

şeklindedir ve $c > 0$ sabiti p ve α ya bağlı değildir (Meskhi, 2011).

Tanım 2.4.15: (Maksimal Operatör) $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere

$Mf : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu

$$Mf(x) := \sup_{r>0} |B(x, r)|^{-1} \int_{B(x, r)} |f(y)| dy$$

biçiminde tanımlanır (Stein, 1970).

Teorem 2.4.16: \mathbb{R}^n üzerinde tanımlanan f fonksiyonu için

- (i) $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$ ise Mf maksimal fonksiyonu hemen her yerde sonludur.
- (ii) Eğer $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ise $\forall \alpha > 0$ için

$$m\{x : Mf(x) > y\} \leq \frac{A}{\alpha} \int_{\mathbb{R}_+^n} |f(x)| dx$$

sağlanır, burada A sadece boyuta bağlı bir sabittir ve m Lebesgue ölçüsüdür.

- (iii) $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p \leq \infty$ ise $Mf \in L^p(\mathbb{R}^n)$ olur ve

$$\|Mf\|_p \leq A_p \|f\|_p$$

eşitsizliği gerçekleşir (Stein, 1970).

Tanım 2.4.17: (Singüler İntegral) $Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x, y) f(y) dy$, $x \in \mathbb{R}^n / \text{supp} f$

Calderon-Zygmund operatörü $T : C_0^\infty \rightarrow L_{loc}(\mathbb{R}^n)$ sürekli lineer operatördür. $L^2(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L^2(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır. Ayrıca

$$K(x, y) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : x \neq y\}$$

dışında sürekli bir fonksiyondur ve $c_1 > 0$ ve $0 < \varepsilon \leq 1$ olmak üzere

(i) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, x \neq y$ için

(ii) $c_1 |x - x^1| \leq |x - y|$ için

$$|\mathbf{K}(x, y) - \mathbf{K}(x^1 - y)| + |\mathbf{K}(y, x) - \mathbf{K}(y - x^1)| \leq c_1 \left(\frac{|x - x^1|}{|x - y|} \right) |x - y|^{-n}$$

eşitsizlikleri sağlanır (Burenkov vd., 2008).

Önerme 2.4.18: T Calderon- Zygmund operatörü $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$ üzerinde sınırlıdır ve (1,1) tiplidir (Dynkin, 1991).

Teorem 2.4.19: (Marcinkiewicz) T alt toplamsal operatör ve $p_0 < q_0, p_1 \leq q_1$ ve $q_0 \neq q_1$ olsun. Ayrıca T operatörü zayıf (p_0, q_0) ve zayıf (p_1, q_1) tipli operatör olsun ve p ile q

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}, \quad (0 < \theta < 1)$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda T operatörü (p, q) tipli operatördür (Sadosky, 1979).

Teorem 2.4.20: (Hardy Eşitsizliği) $1 \leq p \leq q < \infty$, v ve w ölçülebilir, $(0, \infty)$ üzerinde pozitif ve azalan iki fonksiyon olsun. Bu durumda C, φ fonksiyonundan bağımsız bir sabit olmak üzere

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_0^t \varphi(s) ds \right)^q w(t) dt \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_0^\infty \varphi(t)^p v(t) dt \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.6)$$

eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşul

$$K = \sup_{r>0} \left(\int_r^\infty w(t) dt \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^r v(t)^{1-p'} dt \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty \quad (2.7)$$

olmasıdır. Burada $p + p' = pp'$ 'dir. Ayrıca (2.6) i sağlayan en iyi C sabiti

$$K \leq C \leq k(p, q)K \quad (2.8)$$

biçimindedir.

(2.8) deki $k(p, q)$ sabiti

$$k(p, q) = p^{\frac{1}{q}} (p')^{\frac{1}{p'}}, \quad k(p, q) = q^{\frac{1}{q}} (q')^{\frac{1}{p'}} \quad \text{veya} \quad k(p, q) = \left(1 + \frac{q}{p'}\right)^{\frac{1}{q}} \left(1 + \frac{p'}{q}\right)^{\frac{1}{p'}}$$

gibi farklı biçimlerde verilebilir (Mazya, 1985).



BÖLÜM III

3.1 Morrey Uzayları

Tanım 3.1.1: ($M^{p,\lambda}$ Uzayları) $1 \leq p < \infty$ ve $0 \leq \lambda < 1$ olsun. $L^{p,\lambda}(\Omega)$ uzaylarının tüm ölçülebilir fonksiyonları için

$$\|f\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)} := \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ 0 < r < d}} \left[\frac{1}{r^\lambda} \int_{B(x,r)} |f(y)|^p dy \right]^{\frac{1}{p}} < \infty$$

şeklinde tanımlanan normlu uzaylara $M^{p,\lambda}$ uzayları denir (Eridani vd., 2009).

$M^{p,\lambda}$ uzaylarının bazı özellikleri aşağıda verildi.

i) $\lambda = 0$ olduğunda

$$M^{p,0}(\mathbb{R}^n) = M^p(\mathbb{R}^n).$$

Dolayısıyla bu uzay bilinen Lebesgue uzayına dönüşür.

ii) $\lambda = n$ olduğunda

$$M^{p,n}(\mathbb{R}^n) = M^\infty(\mathbb{R}^n).$$

iii) $\lambda < 0$ veya $\lambda > n$ olduğunda ise, bu durumda

$$M^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) = \theta$$

olup burada θ , \mathbb{R}^n de 0 a denk olan fonksiyonların kümesini belirtir.

Tanım 3.1.2 : $1 \leq p < \infty$ ve $\varphi: \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ de pozitif ölçülebilir bir fonksiyon olsun. $f \in L_p^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere

$$\|f\|_{M_{p,\varphi}} = \|f\|_{M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ r > 0}} \varphi(x, r)^{-1} |B(x, r)|^{-\frac{1}{p}} \|f\|_{L_p(B(x,r))} < \infty$$

olacak şekilde sonlu quasinormu ile tanımlı f fonksiyonlarının sınıfına **genelleştirilmiş**

Morrey uzayı denir ve $M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir (Guliyev and Shukrov, 2013).

Ayrıca $f \in L_p^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere $WM_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ genelleştirilmiş zayıf Morrey uzayı

$$\|f\|_{WM_{p,\varphi}} = \|f\|_{WM_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ r > 0}} \varphi(x,r)^{-1} |B(x,r)|^{-\frac{1}{p}} \|f\|_{WL_p(B(x,r))} < \infty$$

olacak biçimde tüm fonksiyonların uzayıdır. Bu tanıma göre $\varphi(x,r) = r^{\frac{\lambda-n}{p}}$ seçilirse

$$M_{p,\lambda} = M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n) \Big|_{\varphi(x,r)=r^{\frac{\lambda-n}{p}}} \quad WM_{p,\lambda} = WM_{p,\varphi} \Big|_{\varphi(x,r)=r^{\frac{\lambda-n}{p}}}$$

sırasıyla $M_{p,\lambda}$ Morrey uzayı ve $WM_{p,\lambda}$ zayıf Morrey uzayı elde edilir.

3.2 Orlicz Uzayları

Bu kısımda Orlicz uzaylarını tanımlamak için kullanılan Young fonksiyonlarının tanımı verilerek, bazı temel özellikleri incelenecektir.

Tanım 3.2.1: $\varphi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu verilsin.

(a) $\varphi(0) = 0$ ve $s > 0$ için $\varphi(s) > 0$ (pozitiflik),

(b) $s > 0$ için $\varphi(s)$ sağdan sürekli,

(c) $\varphi(\infty) = \infty, \left(\lim_{s \rightarrow \infty} \varphi(s) \right) = \infty$

koşulları sağlanıyorsa

$$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(s) ds$$

fonksiyonuna **Young fonksiyonu** denir (Kufner vd., 1977). Young fonksiyonunun bazı özelliklerini aşağıdaki lemma ile verelim.

Lemma 3.2.2: $\Phi(t)$, $t \geq 0$ Young fonksiyonu olsun. Bu durumda

(a) $\Phi(t)$, $[0, \infty)$ aralığında sürekli.

(b) $\Phi(0) = 0$ ve $t > 0$ için $\Phi(t) > 0$ dır.

(c) $\Phi(t)$, monoton azalmayan fonksiyondur.

(d) $\Phi(t)$, $[0, \infty)$ aralığında konveks fonksiyondur.

$$(e) \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\Phi(t)}{t} = 0 \text{ ve } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\Phi(t)}{t} = \infty$$

$$(f) \begin{cases} \Phi(\alpha t) \leq \alpha \Phi(t), 0 \leq \alpha \leq 1 \\ \Phi(\beta t) \geq \beta \Phi(t), \beta \geq 1 \end{cases}$$

(Kufner vd., 1977).

İspat:

(a) Herhangi $t_0 > 0$ alalım. $\varphi(s)$, $s > 0$ için sağdan sürekli olduğundan integraller için ortalama değer teoremi gereğince $t > 0$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} 0 \leq |\Phi(t) - \Phi(t_0)| &= \left| \int_0^1 \varphi(s) ds - \int_0^{t_0} \varphi(s) ds \right| \\ &= \left| \int_t^{t_0} \varphi(s) ds \right| = |\varphi(\varepsilon)| \cdot |t - t_0| \end{aligned}$$

$t < \varepsilon < t_0$ ve $t < \varepsilon < t_0$ eşitsizliğinden $\lim_{t \rightarrow t_0} \Phi(t) = \Phi(t_0)$ elde edilir. Ayrıca $\Phi(0) = 0$ olduğundan $\lim_{t \rightarrow 0^+} \Phi(t) = 0$ dır.

(b) $\Phi(t) = \int_0^1 \varphi(s) ds$ olduğundan $\varphi(s) \geq 0$ ise $\Phi(t) \geq 0$ dır.

(c) Herhangi $t_1 \leq t_2$ için $\Phi(t_2) - \Phi(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \varphi(s) ds \geq 0$ olduğundan $\Phi(t)$ fonksiyonu monoton azalmayandır.

(d) $\Phi(t)$ fonksiyonunun konveksliği için $\lambda \in [0, 1]$ olmak üzere aşağıdaki Jensen eşitsizliğini

$$\Phi(\lambda s + (1-\lambda)t) \leq \lambda \Phi(s) + (1-\lambda)\Phi(t) \quad (3.1)$$

kontrol edelim.

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda s + (1-\lambda)t) &= \int_0^{\lambda s + (1-\lambda)t} \varphi(r) dr \\ &= \int_0^s \varphi(r) dr + \int_s^{\lambda s + (1-\lambda)t} \varphi(r) dr \\ &= \lambda \int_0^s \varphi(r) dr + (1-\lambda) \int_0^s \varphi(r) dr + \int_s^{\lambda s + (1-\lambda)t} \varphi(r) dr \end{aligned} \quad (3.2)$$

dır. Ayrıca φ , monoton azalmayan ve sağdan sürekli olduğundan

$$\int_s^{\lambda s + (1-\lambda)t} \varphi(r) dr \leq (1-\lambda)(t-s)\varphi(\lambda s + (1-\lambda)t)$$

ve

$$\int_{\lambda s + (1-\lambda)t}^t \varphi(r) dr \geq \lambda(t-s)\varphi(\lambda s + (1-\lambda)t)$$

olur. Bu iki eşitsizliği birleştirdiğimizde

$$\lambda \int_s^{\lambda s + (1-\lambda)t} \varphi(r) dr \leq (1-\lambda) \int_{\lambda s + (1-\lambda)t}^t \varphi(r) dr$$

elde ederiz. Buradan

$$\begin{aligned} \int_s^{\lambda s + (1-\lambda)t} \varphi(r) dr &= \lambda \int_s^{\lambda s + (1-\lambda)t} \varphi(r) dr + (1-\lambda) \int_s^{\lambda s + (1-\lambda)t} \varphi(r) dr \\ &\leq (1-\lambda) \int_{\lambda s + (1-\lambda)t}^t \varphi(r) dr + (1-\lambda) \int_s^{\lambda s + (1-\lambda)t} \varphi(r) dr \\ &= \int_s^t (1-\lambda)\varphi(r) dr \end{aligned}$$

bulunur. Bu son eşitsizliği (3.2) de kullanırsak

$$\begin{aligned}
\Phi(\lambda s + (1-\lambda)t) &\leq \lambda \int_0^s \varphi(r) dr + (1-\lambda) \int_0^s \varphi(r) dr + (1-\lambda) \int_s^t \varphi(r) dr \\
&= \lambda \int_0^s \varphi(r) dr + (1-\lambda) \int_0^t \varphi(r) dr \\
&= \lambda \Phi(s) + (1-\lambda) \Phi(t)
\end{aligned}$$

Jensen eşitsizliğini elde ederiz.

(e) $\varphi(s)$, $s \geq 0$ fonksiyonu sürekli olduğundan, integral için ortalama değer teoremine göre

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\Phi(t)}{t} &= \frac{1}{t} \int_0^t \varphi(s) ds \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \varphi(\varepsilon_t) t, 0 < \varepsilon_t < t \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi(\varepsilon_t) = 0
\end{aligned}$$

olur. Ayrıca

$$\frac{\Phi(t)}{t} = \frac{1}{t} \int_0^t \varphi(s) ds \geq \frac{1}{t} \int_{t/2}^t \varphi(s) ds \geq \frac{1}{2} \varphi\left(\frac{t}{2}\right)$$

eşitsizliğinden

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\Phi(t)}{t} \geq \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi\left(\frac{t}{2}\right) = \infty$$

elde edilir.

(f) $0 \leq \lambda \leq 1$ olmak üzere (3.1) Jensen eşitsizliğinde $t=0$ alalım ve $\Phi(0)=0$ olduğundan $\Phi(\lambda s) \leq \lambda \Phi(s)$ olur. Ayrıca elde ettiğimiz bu son eşitsizlikte $\beta \geq 1$ olmak

üzere $\lambda = \frac{1}{\beta}$ ve $s = \beta t$ alırsak $\Phi(t) \leq \frac{1}{\beta} \Phi(\beta t)$, $\Phi(\beta t) \geq \beta \Phi(t)$ elde ederiz. $\Phi(t)$,

$t \geq 0$ Young fonksiyonu olmak üzere ve $L_\Phi(\Omega)$ Orlicz sınıfları iyi özelliklere sahip olur.

Tanım 3.2.3: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ açık bir küme ve $\Phi(t), t \geq 0$ fonksiyonu verilsin.

$$L_\Phi(\Omega) = \left\{ f : f, \Omega \text{ da, ölçülebilir; } \int_\Omega \Phi(|f(x)|) dx < \infty \right\} \quad (3.3)$$

$L_p(\Omega), p \geq 1$ Lebesgue uzayları özel bir Orlicz sınıfıdır. Şöyle ki $\Phi(t) = t^p, p \geq 1$ olmak üzere $L_\Phi(\Omega) = L_p(\Omega)$ olur (Kufner vd., 1977).

Teorem 3.2.4: Φ Young fonksiyonu olsun. Bu durumda $L_\Phi(\Omega)$ Orlicz sınıfı, konveks kümedir. Ayrıca $\mu(\Omega) < \infty$ olmak üzere $L_\Phi(\Omega) \subset L_1(\Omega)$ dir (Kufner vd., 1977).

Tanım 3.2.5: $\Phi(t), t \geq 0$ Young fonksiyonu olmak üzere

$$\psi(s) = \sup_{\Phi(t) \leq s} t, s \geq 0 \text{ için}$$

$$\Psi(t) = \int_0^t \psi(s) ds$$

fonksiyonuna Φ nin eşlenik Young fonksiyonu denir. Eğer Φ sürekli ve $[0, \infty)$ da kesin artan fonksiyon ise, ψ bildiğimiz Φ fonksiyonunun tersidir (Krasnosel'skii ve Rutickii, 1961).

Teorem 3.2.6: (Young Eşitsizliği) Φ ve Ψ eşlenik Young fonksiyonları olsun. Her $s, t \geq 0$ için

$$s, t \leq \Phi(s) + \Psi(t) \quad (3.4)$$

dır (Cooper, J. and Zaanen, A.).

Örnek 3.2.1: $\Phi(t) = e^t - t - 1$ ile $\Psi(t) = (1+t)\ln(1+t) - t$ eşlenik Young fonksiyonlarıdır. Şöyle ki

$$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(s) ds \text{ olmak üzere } \varphi(s) = e^s - 1 \text{ dir. Buradan}$$

$$\psi(s) = \sup_{\varphi(t) \leq s} t = \ln(s+1)$$

den

$$\Psi(t) = \int_0^t \ln(s+1) ds = (t+1) \ln(t+1) - t$$

dir.

Teorem 3.2.7: (Hölder Eşitsizliği) Φ ve Ψ eşlenik Young fonksiyonları ve $f \in L_\Phi(\Omega), g \in L_\Psi(\Omega)$ olmak üzere

$$\int_\Omega |f(x)g(x)| dx \leq \int_\Omega \Phi(|f(x)|) dx + \int_\Omega \Psi(|g(x)|) dx \quad (3.5)$$

eşitsizliği sağlanır. Eğer $|f(x)| = \psi(|g(x)|)$ veya $|g(x)| = \varphi(|f(x)|)$ alınırsa (3.5) eşitsizliği eşitliğe dönüşür.

Uyarı 3.2.8: Klasik Hölder eşitsizliği, $L_p(\Omega)$ Lebesgue uzaylarında $p \geq 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

olmak üzere

$$\int_\Omega |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

şeklindedir ve $fg \in L_1(\Omega)$ dir. Yukarıdaki Hölder eşitsizliği de genel Orlicz sınıflarında, klasik hölder eşitsizliğinin benzeridir ve burada da $fg \in L_1(\Omega)$ dir.

Tanım 3.2.9: Φ bir Young fonksiyonu olmak üzere Orlicz uzayı aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$L^\Phi = \left\{ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ ölçülebilir} \ \& \ \exists \alpha > 0 \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\alpha |f(x)|) dx < \infty \right\}$$

(Rao and Ren, 1991).

Tanım 3.2.10: $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$, üzerinde tanımlanan

$$\|f\|_{L^\Phi} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_{\mathbb{R}^n} \Phi \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right) dx \leq 1 \right\}$$

normu ile bir Banach uzayıdır. Bu norma Orlicz uzayının Luxemburg-Nakano normu adı verilir (Rao and Ren, 1991).

Lemma 3.2.11: Φ Young fonksiyonu ve $f \in L_\Phi(\Omega)$ olsun. Bu durumda

$$(a) \quad \|f\|_\Phi \leq 1 \Rightarrow \int_\Omega \Phi(|f(x)|) dx \leq \|f\|_\Phi$$

$$(b) \quad \|f\|_\Phi \geq 1 \Rightarrow \int_\Omega \Phi(|f(x)|) dx \geq \|f\|_\Phi$$

dir (Kufner vd., 1977).

Teorem 3.2.12: (Orlicz uzayında Hölder eşitsizliği) Φ, Ψ eşlenik Young fonksiyonu olsun. Eğer $f \in L_\Phi(\Omega), g \in L_\Psi(\Omega)$ ise $fg \in L_1(\Omega)$ ve

$$\int_\Omega |f(x)g(x)| dx \leq \|f\|_\Phi \|g\|_\Psi \quad (3.6)$$

dır.

Tanım 3.2.13: Φ bir Young fonksiyonu olmak üzere, zayıf Orlicz uzayı aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$WL^\Phi(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ ölçülebilir} \ \& \ \sup_{t>0} \Phi(t) \left| \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > t \right\} \right| < \infty \right\}$$

(Rao and Ren, 1991).

Lemma 3.2.14: Φ bir Young fonksiyonu ve B sonlu ölçüye sahip ölçülebilir bir küme olsun.

$$\|\chi_B\|_{WL^\Phi} = \|\chi_B\|_{L^\Phi} = \frac{1}{\Phi^{-1}(|B|^{-1})}$$

olur.

İspat: $\|\chi_B\|_{L^\Phi} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_B \Phi\left(\frac{1}{\lambda}\right) dy \leq 1 \right\}$

$$= \inf \left\{ \lambda > 0 : \Phi\left(\frac{1}{\lambda}\right) \int_B dy \leq 1 \right\}$$

$$= \inf \left\{ \lambda > 0 : \frac{1}{\lambda} \leq \Phi^{-1}\left(|B|^{-1}\right) \right\}$$

$$= \inf \left\{ \lambda > 0 : \lambda \geq \frac{1}{\Phi^{-1}\left(|B|^{-1}\right)} \right\}$$

$$= \frac{1}{\Phi^{-1}\left(|B|^{-1}\right)},$$

$$\|\chi_B\|_{WL^\Phi} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \sup_{t>0} \Phi\left(\frac{t}{\lambda}\right) \left| \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |\chi_B(x)| > t \right\} \right| \leq 1 \right\}$$

$$= \inf \left\{ \lambda > 0 : \sup_{0<t<1} \Phi\left(\frac{t}{\lambda}\right) \left| \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |\chi_B(x)| > t \right\} \right| \leq 1 \right\}$$

$$= \inf \left\{ \lambda > 0 : \Phi\left(\frac{1}{\lambda}\right) \leq |B|^{-1} \right\}$$

$$= \inf \left\{ \lambda > 0 : \lambda \geq \frac{1}{\Phi^{-1}\left(|B|^{-1}\right)} \right\}$$

$$= \frac{1}{\Phi^{-1}\left(|B|^{-1}\right)}$$

elde edilir.

3.3 Orlicz-Morrey Uzayları

Tanım 3.3.1: Φ bir Young fonksiyonu ve $0 \leq \lambda \leq n$ olsun. $M^{\Phi, \lambda}(\mathbb{R}^n)$ ile göstereceğimiz Orlicz-Morrey uzayı

$$\|f\|_{M^{\Phi, \lambda}} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \Phi^{-1}(r^{-\lambda}) \|f\|_{L^{\Phi}(B(x, r))}$$

sonlu normuna sahip bütün $f \in L^{\Phi}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarının sınıfıdır (Deringöz, F., Guliyev, V.S. and Samko, S., 2014).

$M^{\Phi, 0}(\mathbb{R}^n) = L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ ve eğer $\Phi(r) = r^p, 1 \leq p < \infty$ ise $M^{\Phi, \lambda}(\mathbb{R}^n) = M^{p, \lambda}(\mathbb{R}^n)$ olur.

$WM^{\Phi, \lambda}(\mathbb{R}^n)$ ile göstereceğimiz zayıf Orlicz-Morrey uzayı benzer olarak

$$\|f\|_{WM^{\Phi, \lambda}} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \Phi^{-1}(r^{-\lambda}) \|f\|_{WL^{\Phi}(B(x, r))} < \infty$$

olacak şekilde bütün $f \in L^{\Phi}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarının sınıfı olarak tanımlanır.

Şimdi de 2014 yılında Deringöz ve ark. (Guliyev, V.S., Samko, S.,) tarafından tanımlanan ve üçüncü tip geliştirilmiş Orlicz-Morrey uzayı olarak adlandırılan $M^{\Phi, \varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzayının ve zayıf hali olan $WM^{\Phi, \varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzayının tanımlarını verelim.

Tanım 3.3.2: $\varphi(x, r), \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ üzerinde tanımlı pozitif ölçülebilir bir fonksiyon ve Φ bir Young fonksiyonu olsun. $M^{\Phi, \varphi}(\mathbb{R}^n)$ ile göstereceğimiz geliştirilmiş Orlicz-Morrey uzayı

$$\|f\|_{M^{\Phi, \varphi}} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \varphi(x, r)^{-1} \Phi^{-1}(|B(x, r)|^{-1}) \|f\|_{L^{\Phi}(B(x, r))}$$

sonlu normuna sahip bütün $f \in L^{\Phi}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarının sınıfıdır (Deringöz, F., Guliyev, V.S. and Samko, S., 2014).

Tanım 3.3.3: $WM^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ zayıf genelleştirilmiş Orlicz-Morrey uzayı,

$$\|f\|_{WM^{\Phi,\varphi}} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \varphi(x, r)^{-1} \Phi^{-1}\left(|B(x, r)|^{-1}\right) \|f\|_{WL^{\Phi}(B(x, r))} < \infty$$

olacak şekilde bütün $f \in WL_{loc}^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarının sınıfı olarak tanımlanır (Deringöz, F., Guliyev, V.S. and Samko, S., 2014).

.



BÖLÜM IV

KESİRLİ OSKÜLATÖR İNTEGRAL OPERATÖRLERİ VE BUNLARIN ÜÇÜNCÜ TÜRDEN GENELLEŞTİRİLMİŞ ORLICZ-MORREY UZAYLARI ÜZERİNDEKİ KOMÜTATÖRLERİ

Bu bölümde üçüncü türden genelleştirilmiş $M_{\Phi, \varphi}$ Orlicz-Morrey uzayı üzerinde duruldu ve $M_{\Phi, \varphi}$ üzerindeki oskülatör integral operatörlerin ve kesirli oskülatör integral operatörlerinin sınırlılığı ele alındı. Üçüncü türden genelleştirilmiş Orlicz-Morrey uzayları için bazı integral tahminleri de ağırlıklı Hardy operatörleri kullanılarak elde edildi. Bunlara karşılık gelen ve BMO-fonksiyonları tarafından üretilen komütatörler de dikkate alındı.

4.1 Giriş ve Ana sonuçlar

Son on yılda, hem genelleştirilmiş Orlicz-Morrey uzayları teorisi hem de bu alanlardaki operatör teorisi ile ilgili araştırmalarda belirgin bir artış vardır. Bu artışın sebebi bu konuya olan yoğun ilginin sadece reel analizde değil, aynı zamanda kısmi diferansiyel denklemlerde ve uygulamalı matematikte de olmasından kaynaklanmaktadır.

Bu kısımda, üçüncü tür genelleştirilmiş Orlicz-Morrey uzaylarında standart ve değişken Calderon-Zygmund çekirdeklerine sahip salınımlı tekil integrallerin sınırlılığına odaklanılmıştır.

Herhangi bir $\Phi : [0, +\infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu için eğer $\Phi(0) = 0$, $\forall t \in (0, \infty)$ için $\Phi(t) > 0$ ve $t \rightarrow \infty$ iken $\Phi(t) \rightarrow \infty$ şartları sağlanıyorsa; bu fonksiyonun bir Young fonksiyonu olduğunu hatırlayalım.

Ayrıca tanımdan $\forall t \in (0, \infty)$ için bir Φ Young fonksiyonunun tersi Φ^{-1} aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\Phi^{-1}(t) := \inf \{s \in (0, \infty) : \Phi(s) > t\}.$$

Çiftleme sabiti olarak da adlandırılan bazı $C \geq 2$ sabitleri için gerçekleşen

$$\Phi(2t) \leq C\Phi(t) \quad (t \geq 0) \quad (4.1)$$

çiftleme şartının sağlandığı bütün $\Phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ konveks eşlemelerin kümesini Δ_2 ve bazı $C' > 2$ sabitleri için gerçekleşen

$$C'\Phi(t) \leq \Phi(2t) \quad (t \geq 0) \quad (4.2)$$

∇_2 -şartının sağlandığı bütün $\Phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ konveks eşlemelerin kümesini ∇_2 ile gösterelim. Unutmayalım ki (4.2)'ye göre $\Phi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$ ise o zaman (4.1)'deki C değeri 2'yi aşar. Ayrıca Φ 'nin eşlenik fonksiyonu Ψ aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\Psi(t) \equiv \sup\{st - \Phi(s) : s \geq 0\} \quad (t \geq 0).$$

Φ bir Young fonksiyonu olsun. \mathbb{R}^n 'deki ölçülebilir bir E kümesi üzerindeki $\|f\|_{L_\Phi(E)}$ Orlicz normu

$$\|f\|_{L_\Phi(E)} \equiv \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_E \Phi \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right) dx \leq 1 \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

\mathbb{R}^n 'deki bütün kompakt K kümeleri için $f \in L_\Phi(K)$ olacak şekilde f ölçülebilir fonksiyonlarının kümesini $L_\Phi^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ olarak tanımlayalım.

Fonksiyon uzayları teorisindeki doğal bir adım, fonksiyonların düzenliliğinin "Morrey tipi ölçümünün" Lebesgue normu yerine yuvarlar üzerinde Orlicz normuna göre gerçekleştiği Orlicz-Morrey uzaylarını incelemektir. Bu tür uzaylar ilk olarak Nakai tarafından tanıtıldı ve çalışıldı (Nakai, 2004). Daha sonra Sawano ve arkadaşları tarafından başka tür bir genelleştirilmiş Orlicz-Morrey uzayı ortaya konuldu (Sawano vd., 2012). (Deringöz vd., 2014) 'te tanıtılan ve burada kullanılan genelleştirilmiş Orlicz-Morrey uzayları tanımımız (Nakai, 2004) ve (Sawano vd., 2012) 'teki makalelerden farklıdır.

Şimdi üçüncü türden genelleştirilmiş Orlicz-Morrey uzaylarını tanımlayalım. $\varphi(x, r)$ fonksiyonu $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ üzerinde bir ölçülebilir fonksiyon ve Φ bir Young fonksiyonu olsun. $M_{\Phi, \varphi}(\mathbb{R}^n)$ genelleştirilmiş Orlicz-Morrey uzayı (üçüncü türden) aşağıda gösterildiği gibi sonlu norma sahip $f \in L_{\Phi}^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonların uzayıdır.

$$\|f\|_{M_{\Phi, \varphi}} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \varphi(x, r)^{-1} \left(|B(x, r)|^{-1} \right) \|f\|_{L_{\Phi}(B(x, r))}.$$

$M_{\Phi, \varphi}(\mathbb{R}^n)$ 'in birçok klasik fonksiyon uzayını kapsadığına dikkat edelim.

Örnek 4.1.1: $1 \leq q \leq p < \infty$ ve $\Phi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$ olsun. Aşağıda numaralandırılmış özel durumlardan dolayı sonuçlarımızın uygun normlarla birlikte $L_p(\mathbb{R}^n)$ Lebesgue uzayını, $M_q^p(\mathbb{R}^n)$ klasik Morrey uzayını, $M_{p, \varphi}(\mathbb{R}^n)$ genelleştirilmiş Morrey uzayını ve $L_{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ Orlicz uzayını kapsadığını görürüz.

1. Eğer $\Phi(r) = r^p$ ve $\varphi(x, r) = |B(x, r)|^{\frac{1}{p}}$ ise denk norm ile $M_{\Phi, \varphi}(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$ olur.

2. Eğer $\Phi(r) = r^q$ ve $\varphi(x, r) = |B(x, r)|^{\frac{1}{p}}$ ise $M_q^p(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilen $M_{\Phi, \varphi}(\mathbb{R}^n)$ klasik Morrey uzayıdır. (Bkz (Morrey, 1938)).

3. Eğer $\Phi(r) = r^p$ ise o zaman $M_{\Phi, \varphi}(\mathbb{R}^n) = M_{p, \varphi}(\mathbb{R}^n)$ (Eroğlu, 2013; Guliyev, 2009; Mizuhara, 1991; Nakai, 1994; Sawano vd., 2009; Softova, 2006)'da anlatılan genelleştirilmiş Morrey uzayıdır.

4. Eğer $\varphi(x, r) = \Phi^{-1}(|B(x, r)|^{-1})$ ise o zaman $M_{\Phi, \varphi}(\mathbb{R}^n) = L_{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ olur.

Maksimal operatör, kesirli maksimal operatör, Riesz potansiyeli ve tekil integral operatörleri gibi reel analizin klasik operatörlerinin sınırlılık teorisi, bir genelleştirilmiş Orlicz-Morrey uzayından diğerine yoğun bir şekilde incelenmiştir. Örnekler için (Deringöz, 2014; Guliyev ve Deringöz, 2015; Hakim vd., 2016; Hasanov, 2014; Nakai, 2003; Nakai, 2008; Sawano vd., 2012)'e bakınız.

$f \in L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Riesz potansiyeli I_α aşağıdaki gibi tanımlanır,

$$I_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)dy}{|x-y|^{n-\alpha}}, \quad 0 < \alpha < n.$$

Burada ve daha sonra, C sayısı doğrudan doğruya değişebilen, ancak ilgili miktarlardan bağımsız kalacak olan pozitif bir sabiti gösterecektir.

K bir Calderon-Zygmund çekirdeği (CZK) olmak üzere Calderon-Zygmund tekil integral operatörü

$$Tf(x) = \text{p.v.} \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y)f(y)dy, \quad (4.3)$$

şeklinde tanımlanır.

Bir $K \in C^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ çekirdeği eğer $0 < a < b$ olacak şekilde her a, b için

$$|K(x)| \leq \frac{C}{|x|^n}, \quad |\nabla K(x)| \leq \frac{C}{|x|^{n+1}} \quad \text{ve} \quad \int_{a < |x| < b} K(x)dx = 0$$
 şartları sağlanıyorsa bu

çekirdeğe CZK denir.

(4.3) 'deki çekirdeğin bir konvolusyon çekirdeği olduğuna dikkat çekmek gerekir. Bununla birlikte, her ikisi de salınlı integrallerin versiyonları olan Fourier dönüşümü ve Radon dönüşümü (Phong ve Stein, 1983) gibi konvolusyon olmayan çekirdeğe sahip birçok operatör türü vardır. Bu çalışmada ele aldığımız nesne, aşağıda ifade edildiği gibi $P(x, y)$ 'i $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı bir gerçek değerli polinom ve K bir CZK olacak şekilde Ricci ve Stein (Ricci ve Stein, 1987)'e göre bir salınım integrali sınıfıdır.

$$Tf(x) = \text{p.v.} \int_{\mathbb{R}^n} e^{iP(x,y)} K(x-y)f(y)dy, \quad (4.4)$$

Salınım faktörü $e^{iP(x,y)}$ 'nin, Calderon-Zygmund operatörleri veya kesirli integrallerde kullanılan yöntemle (4.4)'ün L_p norm eşitsizliğini kurmayı imkansız hale getirdiği iyi bilinmektedir. (Chanillo ve Chirst, 1987) 'de, S. Chanillo ve M. Christ, T'nin zayıf (1, 1) tipi tahminini oluşturdu.

Bir dağıtım çekirdeği K , eğer aşağıdaki hipotezleri yerine getiriyorsa standart bir Calderon-Zygmund çekirdeği (SCZK) olarak adlandırılır.

$$|K(x, y)| \leq \frac{C}{|x-y|^n}, \quad x \neq y \quad (4.5)$$

ve

$$|\nabla_x K(x, y)| + |\nabla_y K(x, y)| \leq \frac{C}{|x-y|^{n+1}}, \quad x \neq y. \quad (4.6)$$

$P(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı bir gerçekteğerli polinom olmak üzere karşılık gelen Calderon-Zygmund integral operatörü \tilde{S} ve salınım integral operatörü S sırası ile aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$\tilde{S}f(x) = \text{p.v.} \int_{\mathbb{R}^n} K(x, y)f(y)dy$$

ve

$$Sf(x) = \text{p.v.} \int_{\mathbb{R}^n} e^{iP(x,y)}K(x, y)f(y)dy$$

(Lu ve Zhang, 1992) 'da Lu ve Zhang, S 'nin $1 < p < \infty$ ile L_p üzerinde sınırlı olduğunu ispatladı. Ayrıca Ricci ve Stein (Ricci ve Stein, 1987)'da $0 < \alpha < n$ olacak şekilde K_α standart kesirli Calderon-Zygmund çekirdeğini (4.5) ve (4.6) şartlarını aşağıdaki şartlar ile değiştirerek tanımlamışlardır.

$$|K_\alpha(x, y)| \leq \frac{C}{|x-y|^{n-\alpha}}, \quad x \neq y$$

ve

$$|\nabla_x K_\alpha(x, y)| + |\nabla_y K_\alpha(x, y)| \leq \frac{C}{|x-y|^{n+1-\alpha}}, \quad x \neq y.$$

$P(x, y)$, yine $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı bir gerçek değerli polinom olmak üzere karşılık gelen kesirli salınım integral operatörü aşağıdaki tanımlanmıştır.

$$S_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{iP(x,y)} K_\alpha(x, y) f(y) dy,$$

aşık olarak $\alpha = 0$ iken $S_0 = S$ ve $K_0 = K$ 'dir. Şimdi (Deringöz vd., 2014) ve (Guliyev ve Deringöz, 2014)'daki çalışmaların fikri ve (Guliyev ve Deringöz, 2015)'deki çalışmanın sonuçlarının kısmen zeminini hazırladığı bu çalışmanın sonuçlarını aşağıdaki şekilde verelim.

Teorem 4.1.1: Φ herhangi bir Young fonksiyonu ve C sabiti x ve r 'ye bağlı olmamak üzere, φ_1, φ_2 ve Φ aşağıdaki şartı sağlasın.

$$\int_r^\infty \left(\operatorname{ess\,sup}_{t < s < \infty} \frac{\varphi_1(x, s)}{\Phi^{-1}(|B(x, s)|^{-1})} \right) \Phi^{-1}(|B(x, t)|^{-1}) \frac{dt}{t} \leq C \varphi_2(x, r), \quad (4.7)$$

Eğer K bir SCZK ve \tilde{S} operatörü $(L_2(\mathbb{R}^n), L_2(\mathbb{R}^n))$ tipinde ise $\Phi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$ ve herhangi bir $P(x, y)$ polinomu için S operatörü $M_{\Phi, \varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ 'den $M_{\Phi, \varphi_2}(\mathbb{R}^n)$ 'e sınırlıdır.

Teorem 4.1.2: $0 < \alpha < n$ olsun ve (φ_1, φ_2) ve (Φ, Ψ) fonksiyonları C sabiti x ve r 'ye bağlı olmayacak şekilde aşağıdaki şartı sağlasın.

$$\int_r^\infty \left(\operatorname{ess\,sup}_{t < s < \infty} \frac{\varphi_1(x, s)}{\Phi^{-1}(|B(x, s)|^{-1})} \right) \Psi^{-1}(|B(x, t)|^{-1}) \frac{dt}{t} \leq C \varphi_2(x, r), \quad (4.8)$$

O halde (2.1) ve (2.2) şartları için S_α operatörü $M_{\Phi, \varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ 'den $M_{\Psi, \varphi_2}(\mathbb{R}^n)$ 'e sınırlıdır.

Bir lokal integrallenebilen b fonksiyonu için S (yada S_α) ve b tarafından şekillendirilen komütatör operatör

$$S_b f(x) = b(x)Sf(x) - S(bf)(x)$$

ve

$$S_{\alpha,b} f(x) = b(x)S_\alpha f(x) - S_\alpha(bf)(x)$$

olarak tanımlanır.

Teorem 4.1.3: Herhangi bir Young fonksiyon Φ , $b \in \text{BMO}(\mathbb{R}^n)$ ve (φ_1, φ_2) fonksiyonu C sabiti x ve r 'ye bağlı olmayacak şekilde aşağıdaki şartı sağlasın.

$$\int_r^\infty \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right) \left(\text{ess sup}_{t < s < \infty} \frac{\varphi_1(x, s)}{\Phi^{-1}(|B(x, s)|^{-1})} \right) \Phi^{-1}(|B(x, t)|^{-1}) \frac{dt}{t} \leq C\varphi_2(x, r), \quad (4.9)$$

Eğer K bir SCZK ve \tilde{S} operatörü $(L_2(\mathbb{R}^n), L_2(\mathbb{R}^n))$ tipinde ise herhangi bir $P(x, y)$ polinomu için S_b operatörü M_{Φ, φ_1} 'den M_{Φ, φ_2} 'e sınırlıdır.

Teorem 4.1.4: $0 < \alpha < n$ ve $b \in \text{BMO}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Φ bir Young fonksiyon ve Ψ da tersi aracılığı ile $\forall t \in (0, \infty), \Psi^{-1}(t) : \Phi^{-1}(t)t^{-\alpha/n}$ tanımlansın ve $\Phi, \Psi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$ olsun. Ayrıca (φ_1, φ_2) ve (Φ, Ψ) fonksiyonları C sabiti x ve r parametrelerine bağlı olmayacak şekilde

$$\int_r^\infty \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right) \left(\text{ess sup}_{t < s < \infty} \frac{\varphi_1(x, s)}{\Phi^{-1}(|B(x, s)|^{-1})} \right) \Psi^{-1}(|B(x, t)|^{-1}) \frac{dt}{t} \leq C\varphi_2(x, r),$$

şartını sağlasın. O zaman $S_{b, \alpha}$ operatörü $M_{\Phi, \varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ 'den $M_{\Phi, \varphi_2}(\mathbb{R}^n)$ 'e sınırlıdır.

Not 1. $\Phi(t) = t^p$ durumu için yukarıda belirttiğimiz teoremler 4.1-4.4 (Eroğlu, 2013)'da ispatlanmıştır.

4.2 $M_{\Phi, \varphi}(\mathbb{R}^n)$ Genelleştirilmiş Orlicz-Morrey Uzayı İçin Bazı Bilinen Sonuçlar

Aşağıdaki interpolasyon sonucu (Fu vd., 2012)'deki çalışmadan alınmıştır.

Lemma 4.2.1: Φ herhangi bir Young fonksiyon ve T herhangi bir $p \in (1, \infty)$ için zayıf (p, p) tip bir altlineer operatör olsun. O zaman T , $\Phi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$ için $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ üzerinde sınırlıdır.

Lemma 4.2.1'in ve S operatörünün L_p sınırlılığının (Lu ve Zhang, 1992) bir sonucu olarak aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 4.2.1: Eğer K bir SCZK ve \tilde{S} operatörü de bir $(L_2(\mathbb{R}^n), L_2(\mathbb{R}^n))$ zayıf tip ise $\Phi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$ ve herhangi bir $P(x, y)$ polinomu için S operatörü $L_\Phi(\mathbb{R}^n)$ üzerinde sınırlıdır.

(Deringöz vd., 2014) nolu çalışmada $M_{\Phi, \varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ 'den $M_{\Phi, \varphi_2}(\mathbb{R}^n)$ 'ye tekil operatör T 'nin sınırlılığı için φ_1 ve φ_2 ağırlıkları üzerinde yeterli koşullar elde edilmiştir. Bu konu ile ilgili (Fu vd., 2012) nolu çalışmaya da bakılabilir.

Teorem 4.2.2: Φ herhangi bir Young fonksiyonu olsun. (φ_1, φ_2) ve Φ , (1.7) şartını sağlasın. O halde T operatörü $\Phi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$ için $M_{\Phi, \varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ 'den $M_{\Phi, \varphi_2}(\mathbb{R}^n)$ 'ye sınırlıdır.

Aşağıdaki tanımı hatırlayalım.

$[0, \infty)$ 'dan $[0, \infty]$ 'a Φ ve Ψ fonksiyonları için eğer her $s \geq 0$ için $\Phi(s) \leq \Psi(cs)$ olacak şekilde en az bir c pozitif sabit varsa o zaman Ψ fonksiyonu Φ fonksiyonunu global olarak baskıladığı söylenir.

Aşağıdaki teoremlerde şu iki integral notasyonu da kullanılmıştır.

P 'nin $1 < P \leq \infty$ aralığında olduğu ve $\Psi_p(s)$ 'nin $\Psi_p(s)$ fonksiyonuna eşlenik bir Young fonksiyon olduğu aşağıdaki integral

$$\Psi_p(s) = \int_0^s r^{p'-1} \left(B_p^{-1}(r^{p'}) \right)^{p'} dr$$

ve

$$B_p(s) = \int_0^s \frac{\Psi(t)}{t^{1+p'}} dt \quad A_p(s) = \int_0^s \frac{\Phi(t)}{t^{1+p'}} dt$$

integrallerinin terslerinin sırası ile $B_p^{-1}(s)$ ve $A_p^{-1}(s)$ olduğu aşağıdaki integral

$$\Phi_p(s) = \int_0^s r^{p'-1} \left(A_p^{-1}(r^{p'}) \right)^{p'} dr .$$

Bu $\Psi_p(s)$ ve $\Phi_p(s)$ fonksiyonları aşağıda $P = \frac{n}{\alpha}$ eşitliği ile kullanılmıştır. Aşağıdaki iki teorem Cianchi (Cianchi, 1999) tarafından ispatlanmıştır.

Teorem 4.2.3 : Φ ve Ψ fonksiyonları birer Young fonksiyon ve $0 < \alpha < n$ olsun. Riesz potansiyeli I_α , $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ 'den $L^\Psi(\mathbb{R}^n)$ 'e sınırlıdır ancak ve ancak

$$\int_0^1 \Phi(t) / t^{1+n/(n-\alpha)} dt < \infty, \quad \int_0^1 \Psi(t) / t^{1+n/(n-\alpha)} dt < \infty \quad (4.10)$$

ve

Φ fonksiyonu $\Psi_{n/\alpha}$ fonksiyonunu ve $\Phi_{n/\alpha}$ fonksiyonu Ψ fonksiyonunu global olarak baskılar

$$(4.11)$$

şartları gerçekleşir.

Aşağıdaki ifadeler Guliyev ve Deringöz (Guliyev ve Deringöz, 2014) tarafından ispatlanmıştır.

Teorem 4.2.4 : α sayısı $0 < \alpha < n$ eşitsizliğini, (φ_1, φ_2) ve (Φ, Ψ) fonksiyonları da (4.8) şartını sağlasın. (4.10) ve (4.11) şartları için I_α , $M^{\Phi, \varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ 'den $M^{\Psi, \varphi_2}(\mathbb{R}^n)$ 'e sınırlıdır.

$A \lesssim B$ sembolü, uygun miktardan bağımsız bazı C pozitif sabitleri için $A \leq CB$ anlamına gelmektedir. Eğer $A \lesssim B$ ve $B \lesssim A$ varsa o zaman $A \approx B$ yazılır ve A, B 'ye denktir denir.

4.3 $M_{\Phi, \varphi}(\mathbb{R}^n)$ Uzayında Kesirli Oskülatör İntegral Operatörler

Bu bölümde w bir ağırlık olmak üzere ağırlıklı Hardy operatörlerinin sınırlılıkları üzerine aşağıdaki ifadeyi kullanacağız.

$$H_w^* g(r) := \int_r^\infty g(s)w(s)ds, r \in (0, \infty)$$

Aşağıdaki teorem (Guliyev, 2013) nolu çalışmada ispatlanmıştır.

Teorem 4.3.1 : v_1, v_2 ve w , $(0, \infty)$ aralığı üzerinde birer ağırlık ve $v_1(t)$ orjinin bir komşuluğunun dışında sınırlı olsun.

$$\sup_{r>0} v_2(r) H_w^* g(r) \leq C \sup_{r>0} v_1(r) g(r) \quad (4.12)$$

eşitsizliği $(0, \infty)$ üzerinde azalmayan ve negatif olmayan her g fonksiyonu ve bazı için $C > 0$ vardır ancak ve ancak

$$B := \sup_{r>0} v_2(r) \int_r^\infty \frac{w(t)dt}{\sup_{t<s<\infty} v_1(s)} < \infty \text{ 'dir.} \quad (4.13)$$

Ayrıca $C = B$ değeri (4.12) için en iyi sabittir.

Not 2 : (4.12) ve (4.13)'de $\frac{1}{\infty} = 0$ ve $0 \cdot \infty = 0$ olarak kabul edilmiştir.

Lemma 4.3.2: (Deringöz vd., 2014) Bir Φ Young fonksiyon için aşağıdaki eşitsizlik

$$\text{ve } \|\chi_B\|_{L_\Phi} = \frac{1}{\Phi^{-1}(|B|^{-1})} \text{ eşitliği vardır.}$$

$$\int_{B(x,r)} |f(y)|dy \leq 2|B(x,r)|\Phi^{-1}(|B(x,r)|)\|f\|_{L^\Phi(B(x,r))}.$$

Lemma 4.3.3: Φ herhangi bir Young fonksiyon, K bir SCZK ve \tilde{S} Calderon-Zygmund tekil integral operatörü $(L_2(\mathbb{R}^n), L_2(\mathbb{R}^n))$ tipinde olsun. $\Phi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$ ve herhangi bir $P(x, y)$ polinomu için aşağıdaki eşitsizlik

$$\|Sf\|_{L_\Phi(B(x_0, r))} \lesssim \frac{1}{\Phi^{-1}(|B(x_0, r)|^{-1})} \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_\Phi(B(x_0, t))} \Phi^{-1}(|B(x_0, t)|^{-1}) \frac{dt}{t}$$

herhangi bir $B = B(x_0, r)$ ve her $f \in L_\Phi^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonu için vardır.

İspat : $\Phi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$ olsun. Keyfi bir x_0 sayısı için x_0 merkezli r yarıçaplı yuvarı $B = B(x_0, r)$ olarak ayarlayalım. $2B = B(x_0, 2r)$ dir. f fonksiyonu

$$f = f_1 + f_2, \quad f_1(y) = f(y)\chi_{2B}(y), \quad f_2(y) = f(y)\chi_{(2B)^c}(y)$$

olarak temsil edilsin ve

$$\|Sf\|_{L_\Phi(B)} \leq \|Sf_1\|_{L_\Phi(B)} + \|Sf_2\|_{L_\Phi(B)} \text{ eşitsizliği vardır.}$$

Eğer K bir SCZK ve \tilde{S} operatörü $(L_2(\mathbb{R}^n), L_2(\mathbb{R}^n))$ tipinde ise o zaman sonuç 2.1'den $\Phi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$ ve herhangi bir $P(x, y)$ polinomu için S operatörü $L_\Phi(\mathbb{R}^n)$ üzerinde sınırlıdır.

$f_1 \in L_\Phi(\mathbb{R}^n)$, $Sf_1 \in L_\Phi(\mathbb{R}^n)$ ve S 'nin $L_\Phi(\mathbb{R}^n)$ sınırlılığından (Bkz. (Ricci ve Stein, 1987)) $C > 0$ sabitinin f 'den bağımsız olduğu aşağıdaki ifade gelir.

$$\|Sf_1\|_{L_\Phi(B)} \leq \|Sf_1\|_{L_\Phi(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f_1\|_{L_\Phi(\mathbb{R}^n)} = C\|f_1\|_{L_\Phi(2B)}.$$

$x \in B, y \in (2B)^c$ olduğunda $\frac{1}{2}|x_0 - y| \leq |x - y| \leq \frac{3}{2}|x_0 - y|$ eşitsizliğinin olacağı açıktır.

Dolayısıyla aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz.

$$|\mathbf{Sf}_2(\mathbf{x})| \leq c_0 \int_{(2B)^c} \frac{|f(\mathbf{y})|}{|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}|^n} d\mathbf{y}.$$

Buradan Fubini'nin teoremini de kullanarak aşağıdaki ifadeyi buluruz ,

$$\int_{(2B)^c} \frac{|f(\mathbf{y})|}{|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}|^n} d\mathbf{y} \approx \int_{(2B)^c} |f(\mathbf{y})| \int_{|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}|}^{\infty} t^{-1-n} dt d\mathbf{y} \lesssim \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_1(B(\mathbf{x}_0, t))} \frac{dt}{t^{n+1}}. \quad (4.14)$$

Yukarıdaki ifadeye Hölder eşitsizliği uygulanarak (Bkz lemma 4.3.2) aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\begin{aligned} \int_{(2B)^c} \frac{|f(\mathbf{y})|}{|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}|^n} d\mathbf{y} &\lesssim \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_{\Phi}(B(\mathbf{x}_0, t))} \|1\|_{L_{\Phi}(B(\mathbf{x}_0, t))} \frac{dt}{t^{n+1}} \\ &= \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_{\Phi}(B(\mathbf{x}_0, t))} \frac{1}{\Phi^{-1}(|B(\mathbf{x}_0, t)|^{-1})} \frac{dt}{t^{n+1}} \\ &\approx \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_{\Phi}(B(\mathbf{x}_0, t))} \Phi^{-1}(|B(\mathbf{x}_0, t)|^{-1}) \frac{dt}{t}. \end{aligned}$$

Ayrıca her $\Phi \in \Delta_2$ için

$$\|\mathbf{Sf}_2\|_{L_{\Phi}(B)} \lesssim \frac{1}{\Phi^{-1}(|B(\mathbf{x}_0, r)|^{-1})} \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_{\Phi}(B(\mathbf{x}_0, t))} \Phi^{-1}(|B(\mathbf{x}_0, t)|^{-1}) \frac{dt}{t}$$

eşitsizliği vardır. Buradan

$$\|\mathbf{Sf}\|_{L_{\Phi}(B)} \lesssim \|f\|_{L_{\Phi}(2B)} + \frac{1}{\Phi^{-1}(|B(\mathbf{x}_0, r)|^{-1})} \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_{\Phi}(B(\mathbf{x}_0, t))} \Phi^{-1}(|B(\mathbf{x}_0, t)|^{-1}) \frac{dt}{t}$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$r \geq 0 \text{ için } r \leq \Phi^{-1}(r) \Phi^{-1}(r) \leq 2r \quad (4.15)$$

eşitsizliğinden

$$\Phi^{-1}\left(|B|^{-1}\right) \approx \Phi^{-1}\left(|B|^{-1}\right) r^n \int_{2r}^{\infty} \frac{dt}{t^{n+1}} \lesssim \int_{2r}^{\infty} \Phi^{-1}\left(|B(x_0, t)|^{-1}\right) \frac{dt}{t}$$

ve sonrasında

$$\|f\|_{L_p(2B)} \lesssim \frac{1}{\Phi^{-1}\left(|B(x_0, r)|^{-1}\right)} \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_\Phi(B(x_0, t))} \Phi^{-1}\left(|B(x_0, t)|^{-1}\right) \frac{dt}{t} \quad (4.16)$$

elde edilir. Dolayısıyla sonuç olarak aşağıdaki eşitsizlik elde edilir ve ispat tamamlanır.

$$\|Sf\|_{L_p(B)} \lesssim \frac{1}{\Phi^{-1}\left(|B(x_0, r)|^{-1}\right)} \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_\Phi(B(x_0, t))} \Phi^{-1}\left(|B(x_0, t)|^{-1}\right) \frac{dt}{t}.$$

Teorem 4.1.1.'in ispatı : Lemma 4.3.3 ve teorem 4.3.1'den aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz.

$$\begin{aligned} \|Sf\|_{M_{\Phi, \varphi_2}(\mathbb{R}^n)} &\lesssim \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \varphi_2(x, r)^{-1} \int_r^{\infty} \Phi^{-1}\left(|B(x, t)|^{-1}\right) \|f\|_{L_\Phi(B(x_0, t))} \frac{dt}{t} \\ &\lesssim \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \varphi_1(x, r)^{-1} \Phi^{-1}\left(|B(x, r)|^{-1}\right) \|f\|_{L_\Phi(B(x, r))} = \|f\|_{M_{\Phi, \varphi_1}}. \end{aligned}$$

Teorem 4.1.2.'in ispatı : Teorem 4.1.2'nin ispatı teorem 4.2.4'den ve aşağıdaki gözlemden gelmektedir.

$$|S_\alpha f(x)| \leq I_\alpha(|f|)(x).$$

4.4 $M_{p, \varphi}$ Uzayında Kesirli Oskülatör İntegral Operatörlerinin Komütatörleri

T bir Calderon-Zygmund tekil integral operatörü ve $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun. Coifman, Rochberg ve Weiss (Coifman, 1976)'ın çok iyi bilinen bir sonucu, $[b, T]f = T(bf) - bTf$ komütatör operatörünün $1 < p < \infty$ için $L_p(\mathbb{R}^n)$ üzerinde sınırlı olduğunu ifade eder. İlk önce $BMO(\mathbb{R}^n)$ uzayının tanımını hatırlayalım.

Tanım 4.4.1: Kabul edelim ki $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ olsun. $f_{B(x,r)} = |B(x,r)|^{-1} \int_{B(x,r)} f(y) dy$

olmak üzere aşağıdaki eşitlik olsun.

$$\|f\|_* = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y) - f_{B(x,r)}| dy$$

O halde uzayı $BMO(\mathbb{R}^n) = \{f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) : \|f\|_* < \infty\}$ şeklinde tanımlanır.

Teoremlerimizi ispatlamada ihtiyacımız olan lemmaları aşağıda vereceğiz.

Lemma 4.4.2: (Janson, 1978) $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun. C sabiti b, x, r ve t parametrelerinden bağımsız olacak şekilde

$$|b_{B(x,r)} - b_{B(x,t)}| \leq C \|b\|_* \ln \frac{t}{r}, \quad 0 < 2r < t \quad (4.17)$$

eşitsizliği sağlayan en az bir $C > 0$ vardır.

Lemma 4.4.3: (Guliyev ve Deringöz, 2014; Ho ve Kwok-Pun, 2009) $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$

ve $\Phi \in \nabla_2$ ile birlikte Φ bir Young fonksiyon olsun. O halde

$$\|f\|_* \approx \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \Phi^{-1}(|B(x,r)|^{-1}) \|f(\cdot) - f_{B(x,r)}\|_{L^\Phi(B(x,r))}$$

ifadesi vardır.

w bir ağırlık olmak üzere aşağıdaki ifadeyi ağırlıklı Hardy operatörünün sınırlılığı üzerinde kullanacağız.

$$H_w^* g(t) := \int_t^\infty \left(1 + \ln \frac{s}{t}\right) g(s) w(s) ds$$

Aşağıdaki lemma (Guliyev, 2012)'de ispatlanmıştır.

Lemma 4.4.4: v_1, v_2 ve w , $(0, \infty)$ aralığı üzerinde birer ağırlık ve $v_1(t)$ orjinin bir komşuluğunun dışında sınırlı olsun.

$$\operatorname{ess\,sup}_{t>0} v_2(t) H_w^* g(t) \leq C \operatorname{ess\,sup}_{t>0} v_1(t) g(t) \quad (4.18)$$

eşitsizliği $(0, \infty)$ üzerinde azalmayan ve negatif olmayan her g fonksiyonu ve bazı $C > 0$ için vardır ancak ve ancak

$$B := \operatorname{ess\,sup}_{t>0} v_2(t) \int_t^\infty \left(1 + \ln \frac{s}{t}\right) \frac{w(s) ds}{\operatorname{ess\,sup}_{s<T<\infty} v_1(T)} < \infty \text{ 'dir.} \quad (4.19)$$

Ayrıca $C = B$ değeri (4.2) için en iyi sabittir.

Not 3. (4.18) ve (4.19)'da $\frac{1}{\infty} = 0$ ve $0 \cdot \infty = 0$ olarak kabul edilmiştir.

Lemma 4.4.5: Φ bir Young fonksiyon, $b \in \operatorname{BMO}(\mathbb{R}^n)$, K bir SCZK ve Calderon-Zygmund tekil integral \tilde{S} operatörü $(L_2(\mathbb{R}^n), L_2(\mathbb{R}^n))$ tipinde olsun. $\Phi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$ ve herhangi bir $P(x, y)$ polinomu için aşağıdaki eşitsizlik

$$\|S_b f\|_{L_\Phi(B(x_0, r))} \lesssim \frac{\|b\|_*}{\Phi^{-1}(|B(x_0, r)|^{-1})} \int_{2r}^\infty \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right) \|f\|_{L_\Phi(B(x_0, t))} \Phi^{-1}(|B(x_0, t)|^{-1}) \frac{dt}{t}$$

herhangi bir $B(x_0, r)$ yuvarı ve $f \in L_\Phi^{\operatorname{loc}}(\mathbb{R}^n)$ için vardır.

İspat. $\Phi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$ olsun. Keyfi bir x_0 sayısı için x_0 merkezli r yarıçaplı yuvarı $B = B(x_0, r)$ olarak ayarlayalım. $2B = B(x_0, 2r)$ dir. f fonksiyonu

$$f = f_1 + f_2, \quad f_1(y) = f(y) \chi_{2B}(y), \quad f_2(y) = f(y) \chi_{(2B)^c}(y)$$

olarak temsil edilsin ve

$$\|S_b f\|_{L_\Phi(B)} \leq \|S_b f_1\|_{L_\Phi(B)} + \|S_b f_2\|_{L_\Phi(B)}$$

eşitsizliği vardır.

Eğer K bir SCZK ve \tilde{S} operatörü $(L_2(\mathbb{R}^n), L_2(\mathbb{R}^n))$ tipinde ise o zaman $1 < p < \infty$ eşitsizliği ve herhangi bir $P(x, y)$ polinomu için S_b komütatör operatörü $L_p(\mathbb{R}^n)$ üzerinde sınırlı olduğu bilinmektedir. (Bkz (Ricci ve Stein, 1987; Lu, 2005; Lu vd., 2007; Lu ve Zhang, 1992)). Dolayısıyla lemma 4.2.1'den $\Phi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$ ve herhangi bir $P(x, y)$ polinomu için S_b komütatör operatörü $L_\Phi(\mathbb{R}^n)$ üzerinde sınırlıdır. $f_1 \in L_\Phi(\mathbb{R}^n)$, $Sf_1 \in L_\Phi(\mathbb{R}^n)$ ve S_b 'nin $L_\Phi(\mathbb{R}^n)$ sınırlılığından $C > 0$ sabitinin f 'den bağımsız olduğu aşağıdaki ifade gelir.

$$\|S_b f_1\|_{L_\Phi(B)} \leq \|S_b f_1\|_{L_\Phi(\mathbb{R}^n)} \leq C \|b\|_* \|f_1\|_{L_\Phi(\mathbb{R}^n)} = C \|b\|_* \|f_1\|_{L_\Phi(2B)}.$$

$x \in B$ için aşağıdaki eşitsizlik vardır.

$$|S_b f_2(x)| \lesssim \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|b(y) - b(x)|}{|x - y|^n} |f_2(y)| dy \approx \int_{c(2B)} \frac{|b(y) - b(x)|}{|x_0 - y|^n} |f(y)| dy$$

Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \|S_b f_2\|_{L_\Phi(B)} &\lesssim \left\| \int_{c(2B)} \frac{|b(y) - b(x)|}{|x_0 - y|^n} |f(y)| dy \right\|_{L_\Phi(B)} \\ &\lesssim \left\| \int_{c(2B)} \frac{|b(y) - b_B|}{|x_0 - y|^n} |f(y)| dy \right\|_{L_\Phi(B)} + \left\| \int_{c(2B)} \frac{|b(y) - b_B|}{|x_0 - y|^n} |f(y)| dy \right\|_{L_\Phi(B)} = I_1 + I_2 \text{ olur.} \end{aligned}$$

Şimdi I_1 'in yaklaşık değerini bulalım. Aşağıdaki ifade lemma 4.3.2'den gelir.

$$\begin{aligned} I_1 &\approx \frac{1}{\Phi^{-1}(|B|^{-1})} \int_{c(2B)} \frac{|b(y) - b_B|}{|x_0 - y|^n} |f(y)| dy \\ &\approx \frac{1}{\Phi^{-1}(|B|^{-1})} \int_{c(2B)} |b(y) - b_B| |f(y)| \int_{|x_0 - y|}^{\infty} \frac{dt}{t^{n+1}} dy \\ &\leq \frac{1}{\Phi^{-1}(|B|^{-1})} \int_{2r}^{\infty} \int_{B(x_0, t)} |b(y) - b_B| |f(y)| dy \frac{dt}{t^{n+1}}. \end{aligned}$$

Hölder eşitsizliğini uygulayarak, (4.15),(4.17) eşitsizliklerinden ve lemmalar 4.3.1 ve 4.4.3'den

$$\begin{aligned} I_1 &\lesssim \frac{1}{\Phi^{-1}(|\mathbf{B}|^{-1})} \int_{2r}^{\infty} \|\mathbf{b}(\cdot) - \mathbf{b}_{\mathbf{B}(x_0,t)}\|_{L^{\Phi}(\mathbf{B}(x_0,t))} \|f\|_{L^{\Phi}(\mathbf{B}(x_0,t))} \frac{dt}{t^{n+1}} + \frac{1}{\Phi^{-1}(|\mathbf{B}|^{-1})} \int_{2r}^{\infty} \|\mathbf{b}_{\mathbf{B}(x_0,r)} - \mathbf{b}_{\mathbf{B}(x_0,t)}\|_{L^{\Phi}(\mathbf{B}(x_0,t))} \Phi^{-1}(|\mathbf{B}(x_0,t)|^{-1}) \frac{dt}{t} \\ &\lesssim \frac{\|\mathbf{b}\|_*}{\Phi^{-1}(|\mathbf{B}|^{-1})} \int_{2r}^{\infty} \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right) \|f\|_{L^{\Phi}(\mathbf{B}(x_0,t))} \Phi^{-1}(|\mathbf{B}(x_0,t)|^{-1}) \frac{dt}{t} \end{aligned}$$

elde edilir.

I_2 'nin yaklaşık değerini bulmak için ilk önce

$$I_2 \approx \|\mathbf{b}(\cdot) - \mathbf{b}_{\mathbf{B}}\|_{L^{\Phi}(\mathbf{B})} \int_{c(2\mathbf{B})} \frac{f(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}|^n} d\mathbf{y}$$

ifadesini göz önüne alalım. Lemma 4.4.3'den aşağıdaki eşitsizlik gelir.

$$I_2 \lesssim \frac{\|\mathbf{b}\|_*}{\Phi^{-1}(|\mathbf{B}|^{-1})} \int_{c(2\mathbf{B})} \frac{f(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}|^n} d\mathbf{y}. \quad (4.20)$$

Dolayısıyla son olarak (4.14)'den

$$I_2 \lesssim \frac{\|\mathbf{b}\|_*}{\Phi^{-1}(|\mathbf{B}(x_0,r)|^{-1})} \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L^{\Phi}(\mathbf{B}(x_0,t))} \Phi^{-1}(|\mathbf{B}(x_0,t)|^{-1}) \frac{dt}{t}$$

eşitsizliği gelir ve I_1 ve I_2 değerlerinin toplanmasından aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\|\mathbf{S}_b f_2\|_{L_p(\mathbf{B})} \lesssim \frac{\|\mathbf{b}\|_*}{\Phi^{-1}(|\mathbf{B}(x_0,r)|^{-1})} \int_{2r}^{\infty} \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right) \|f\|_{L^{\Phi}(\mathbf{B}(x_0,t))} \Phi^{-1}(|\mathbf{B}(x_0,t)|^{-1}) \frac{dt}{t}. \quad (4.21)$$

Son olarak,

$$\|\mathbf{S}_b f\|_{L_p(\mathbf{B})} \lesssim \|\mathbf{b}\|_* \|f\|_{L_p(2\mathbf{B})} + \int_{2r}^{\infty} \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right) \|f\|_{L^{\Phi}(\mathbf{B}(x_0,t))} \Phi^{-1}(|\mathbf{B}(x_0,t)|^{-1}) \frac{dt}{t}$$

eşitsizliğini elde ederiz ve lemma 4.4.5'in ifadesi (4.16)'den gelir.

Teorem 4.1.3.'ün ispatı : Teorem 4.1.3'ün ifadesi lemma 4.4.5 ve teorem 4.3.1'den lemma 4.4.4'ün ispatındaki gibi aynı şekilde gelir.

Teorem 4.1.4.'ün ispatı : Teorem 4.1.4'ün ispatı (Guliyev ve Deringöz, 2014) nolu çalışmadaki teorem 34'den ve

$$|S_{a,b}f(x)| \leq I_{a,b}(|f|)(x)$$

eşitsizliğinden gelmektedir.



KAYNAKLAR

Adams, R.A. and Fournier, J. J. F., Sobolev paces, *Academic Press*, 2003.

Balcı, M., Analiz I, *Balcı Yayınları*, 1997.

Balcı, M., Reel Analiz, *Balcı Yayınları*, 1998.

Balcı, M., Reel Analiz, *Sürat Yayınları*, 2012.

Bayraktar, M., Fonksiyonel Analiz, *Gazi Kitabevi*, 2006.

Bennett, C. and Sharpley, R., Interpolation of Operators, *Academic Press*, 1988.

Burenkov, V.I., Guliyev, V.S., Tararykova, T.V. and Serbetci, A., Necessary and Sufficient Conditions for the Boundedness of Genuine Singular Integral Operators in Local Morrey-Type Spaces, *Doklady Akademii Nauk*, 2008.

Cianchi, A., Strong and weak type inequalities for some classical operators in Orlicz spaces, *J. London Math. Soc.* 60, no. 1, 187-202, 1999.

Chanillo, S. and M. Christ, Weak (1,1) bounds for oscillatory singular integral, *Duke Math. J.*, 55, 141-155, 1987.

Coifman, R., Rochberg, R. and Weiss, G., Factorization theorems for Hardy spaces in several variables, *Ann. of Math.* 103, no. 2, 611-635, 1976.

Cooper, J.L.B. and Zaanen, A.C., Linear Analysis, The *Mathematical Gazette*, 39(329):253, 1955.

Deringoz, F., Guliyev, V.S. and Samko, S., Boundedness of maximal and singular operators on generalized OrliczMorrey spaces. Operator Theory, Operator Algebras and Applications, *Birkhauser, Basel*. Series: Operator Theory: Advances and Applications 242, 139-158, 2014.

- Dyn'kin, E.M., Methods of singular integrals: Hilbert transform and Calderon-Zygmund theory, Commutative Harmonic Analysis I. *Encyclopaedia of Math. Sci.*, 1991.
- Eridani, A., Kokilashvili, V. and Meskhi, A., Morrey spaces and fractional integral operators, *Expo. Math.*, 27,227-239, 2009.
- Eroglu, A., Boundedness of fractional oscillatory integral operators and their commutators on generalized Morrey spaces, *Bound. Value Probl.*, 2013:70, 12 pp., 2013.
- Fu, X., Yang, D. and Yuan, W., Boundedness of multilinear commutators of Calderon-Zygmund operators on Orlicz spaces over non-homogeneous spaces. *Taiwanese J. Math.* 16, 2203-2238, 2012.
- Fucik, S., Kufner, A., Pick, L. and Oldrich, J., Function Spaces, *Walter de Gruyter publishing*, 2012.
- Grafakos, L Classical and Modern Fourier Analysis, Mathematics Subject Classification, *Prentice Hall, Springer*, 2008.
- Guliyev, V.S., Boundedness of the maximal, potential and singular operators in the generalized Morrey spaces, *J. Inequal. Appl.*, Art. ID 503948, 2009.
- Guliyev, V.S., Generalized weighted Morrey spaces and higher order commutators of sublinear operators, *Eurasian Math. J.* 3, no. 3, 33-61, 2012.
- Guliyev, V.S., Generalized local Morrey spaces and fractional integral operators with rough kernel, *J. Math. Sci.* 193, no. 2, 211-227, 2013.
- Guliyev, V.S. and Deringoz, F., On the Riesz potential and its commutators on generalized Orlicz-Morrey spaces, *J. Funct. Spaces*, Art. ID 617414, 11 pp., 2014.
- Guliyev, V.S. and Deringoz, F., Boundedness of fractional maximal operator and its commutators on generalized Orlicz-Morrey spaces, *Complex Anal. Oper. Theory* 9, *Springer*, no. 6, 1249-1267, 2015.

Guliyev, V.S. and Shukurov, P.S. On the boundedness of the fractional maximal operator, Riesz potential and their commutators in generalized Morrey spaces, *Advances in harmonic analysis and operator theory*, 175-199, ***Oper. Theory Adv. Appl.***, 229, Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2013.

Guliyev, V.S., Hasanov, S.G., Sawano, Y. and Noi, T., Non-smooth atomic decompositions for generalized OrliczMorrey spaces of the third kind, ***Acta Appl. Math.*** 145, 133-174. DOI 10.1007/s10440-016-0052-7, 2016.

Hakim, D.I., Nakai, E. and Sawano, Y., Generalized fractional maximal operators and vector-valued inequalities on generalized Orlicz-Morrey spaces, ***Rev. Mat. Complut.*** 29, no. 1, 59-90, 2016.

Hasanov, J.J., Φ -admissible sublinear singular operators and generalized Orlicz-Morrey spaces, ***J. Funct. Spaces***, Art. ID 505237, 7 pp., 2014.

Ho, Kwok-Pun, Characterization of BMO in terms of rearrangement-invariant Banach function spaces, ***Expo. Math.*** 27, 363-372, 2009.

Janson, S., Mean oscillation and commutators of singular integral operators, ***Ark. Mat.***, no. 16, 263-270, 1978.

Krasnoselskii, M. A. and Rutickii, Ya. B. Convex Functions and Orlicz Spaces, ***English translation P. Noordhoff Ltd., Groningen***, 1961.

Kufner, A., John, O. and Fucik, S. Function Spaces. Noordhoff International Publishing: Leyden, ***Publishing House Czechoslovak Academy of Sciences: Prague***, 1977.

Lu, S.Z., A class of oscillatory integrals, ***Int. J. Appl. Math.*** Sci. 2, no. 1, 42-58, 2005.

Lu, S.Z., Ding, Y. and Yan, D.Y., Singular integrals and related topics, ***World Sci. Publ.***, Singapore, 2007.

Lu, S.Z. and Zhang, Y., Criterion on L_p -boundedness for a class of oscillatory singular integrals with rough kernels, ***Rev. Math. Iberoam.*** 8, 201-219, 1992.

- Mazya, V.G., Sobolev Spaces, *Springer-Verlag*, Berlin, 486 p., 1985.
- Mesghi, A., Maximal functions, potentials and singular integrals in Grand Morrey spaces, *Complex Variables and Elliptic Equations*, 56(10-11), 1003-1019, 2011.
- Mizuhara, T., Boundedness of some classical operators on generalized Morrey spaces, Harmonic Analysis (*S. Igari, Editor*), ICM 90 *Satellite Proceedings*, Springer - Verlag, Tokyo, 183-189, 1991.
- Morrey, C.B., On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations, *Trans. Amer. Math. Soc.* 43, 126-166, 1938.
- Musayev, B. ve Alp, M., “Fonksiyonel Analiz.”, *Kütahya: Balcı Yayınları*, 2000.
- Nakai, E., Hardy-Littlewood maximal operator, singular integral operators and Riesz potentials on generalized Morrey spaces, *Math. Nachr.* 166 , 95-103, 1994.
- Nakai, E., Generalized fractional integrals on Orlicz-Morrey spaces, In: Banach and Function Spaces, Kitakyushu, 2003, *Yokohama Publishers*, Yokohama, 323-333, 2004.
- Nakai, E., Orlicz-Morrey spaces and the Hardy-Littlewood maximal function, *Studia Math.* 188, no. 3, 193-221, 2008.
- Phong, D.H. and E.M. Stein, Singular integrals related to the Radon transform and boundary value problems, *Proc. Nat. Acad. USA.* 80, 7697-7701, 1983.
- Rao, M.M. and Ren, Z.D. Theory of Orlicz Spaces, *M. Dekker, Inc.*, New York, 1991.
- Ricci, F. and Stein, E.M., Harmonic analysis on Nilpotant groups and singular integrals I: Oscillatory Integrals, *J. Funct. Anal.* 73, 179-194, 1987.
- Royden, H.L. Real Analysis, *Macmillan, New York*, 2nd ed., 1968.
- Rudin, W., Functional analysis, Second edition, International Series in pure and Applied Mathematics. *McGraw-Hill, Inc.*, New York, 1991.

Sadosky, C. Interpolation of operators and singular integrals, *Marcel Dekker Inc.*, New York, 1979.

Sawano, Y., Sugano, S. and Tanaka, H., A note on generalized fractional integral operators on generalized Morrey spaces, *Bound. Value Probl.*, Art. ID 835865, 18 pp., 2009.

Sawano, Y., Sugano, S. and Tanaka, H., Orlicz-Morrey spaces and fractional operators, *Potential Anal.* 36, no. 4, 517-556, 2012.

Softova, L., Singular integrals and commutators in generalized Morrey spaces, *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)* 22, no. 3, 757-766, 2006.

Stein, E.M. Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions, *Princeton Univ. Press*, Princeton, 1970.

ÖZ GEÇMİŞ

Sümevra Deniz Gültepe 1991 yılında Karaman'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Karaman da tamamladı. 2014 yılında Aksaray Üniversitesi Sabire Yazıcı Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünden mezun oldu ve 2015-2016 dönemi Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesinde Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans programına başladı.



