

**T.C.
ERCIYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

TOPLANABİLME TEORİSİ VE UYGULAMALARI

**Hazırlayan
Mehmet Öner ŞAKAR**

**Danışman
Prof. Dr. Hikmet ÖZARSLAN
Prof. Dr. Xhevat Z. KRASNIQI**

Doktora Tezi

**Ekim 2023
KAYSERİ**

**T.C.
ERCIYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**TOPLANABİLME TEORİSİ VE UYGULAMALARI
(Doktora Tezi)**

**Hazırlayan
Mehmet Öner ŞAKAR**

**Danışman
Prof. Dr. Hikmet ÖZARSLAN
Prof. Dr. Xhevat Z. KRASNIQI**

**Bu çalışma, Erciyes Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Birimi
tarafından FDK-2021-8831 kodlu proje ile desteklenmiştir.**

**Ekim 2023
KAYSERİ**

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir şekilde elde edildiğini beyan ederim. Aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi belirtirim.

Mehmet Öner ŞAKAR



“**Toplanabilme Teorisi ve Uygulamaları**” adlı Doktora tezi, Erciyes Üniversitesi Lisansüstü Tez Önerisi ve Tez Yazma Yönergesi’ ne uygun olarak hazırlanmıştır.

Hazırlayan

Mehmet Öner ŞAKAR

Danışman

Prof. Dr. Hikmet ÖZARSLAN

Matematik ABD Başkanı

Prof. Dr. Hikmet ÖZARSLAN

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın belirlenmesi ve yürütülmesinde karşılaştığım her türlü bilimsel problemin çözümünde, tez çalışmamın her aşamasında sabırla yol gösteren ve lisansüstü hayatım boyunca çalışmalarımı yakından takip ederek, her konuda destek olan, kendisinden çok şey öğrendiğim kıymetli öğretmenim Sayın Prof. Dr. Hikmet ÖZARSLAN' a sonsuz teşekkür ederim.

Akademik gelişimime katkıları olan, bilgi ve deneyimlerinden faydalandığım saygı değer meslektaşlarım, arkadaşlarım Doç. Dr. Bağdagül KARTAL ve Dr. Ahmet KARAKAŞ öğretmenlerime de teşekkürlerimi borç bilirim.

Doktora tez çalışmamı, "2211-A Genel Yurt İçi Doktora Burs Programı" çerçevesinde destekleyen TÜBİTAK'a teşekkür ederim.

FDK-2021-8831 kodlu proje ile bu çalışmamı destekleyen Erciyes Üniversitesi Bilimsel Araştırma Programı Birimine teşekkür ederim.

Hayatım boyunca istediğim eğitim seviyesine olanak sağlayan, maddi manevi desteklerini her zaman hissettiğim aileme ve eşim Armağan ŞAKAR'a şükranlarımı sunarım.

Mehmet Öner ŞAKAR

Ekim 2023, KAYSERİ

TOPLANABİLME TEORİSİ VE UYGULAMALARI

Mehmet Öner ŞAKAR

Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü
Doktora Tezi, Ekim 2023
Danışman: Prof. Dr. Hikmet ÖZARSLAN

ÖZET

Bu tez yedi bölümden oluşmaktadır.

İlk bölümde, problem durumu, tezin amacı ve öneminden bahsedilmiştir. Ayrıca, tez boyunca gerekli olan bazı temel tanımlara, teoremlere ve lemmalara değinilmiştir.

İkinci bölümde, tezde kullanılan yöntemlere, kaynaklara ve çizim programına dair bilgiler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, (Φ, δ) -monoton diziler kullanılarak sırasıyla $|\bar{N}, p_n|_k$, $|D, p_n|_k$ ve $|D, p_n; \gamma|_k$ toplanabilme metotlarına ilişkin üç teorem ispatlanmıştır.

Dördüncü bölümde, δ -quasi monoton diziler kullanılarak sonsuz serilerin $\varphi - |D, p_n|_k$ ve $\varphi - |D, \gamma|_k$ toplanabilmesi üzerine iki teorem ispatlanmıştır.

Beşinci bölümde, δ -quasi monoton ve (Φ, δ) -monoton dizilerin genel $|D, p_n, \beta; \gamma|_k$ metodu ile alakalı iki teorem ispatlanmıştır. Ayrıca bir uygulaması verilmiştir.

Altıncı bölümde, (\bar{N}, p_n) ortalaması kullanılarak quasi monoton katsayılı Fourier serilerinin L_1 normuna göre yakınsaması üzerine bir teorem ispatlanıp bir örnek verilmiştir.

Son olarak, yedinci bölümde ise çalışmamızla ilgili sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Konveks dizi, Quasi monoton dizi, Riesz ortalaması, Mutlak matris toplanabilme, Fourier serileri, L_1 yakınsama, Dirichlet çekirdeği, Fejer toplamı.

SUMMABILITY THEORY AND ITS APPLICATIONS

Mehmet Öner ŞAKAR

Erciyes University, Graduate School of Natural and Applied Sciences

PhD Thesis, October 2023

Supervisor: Prof. Dr. Hikmet ÖZARSLAN

ABSTRACT

The thesis consists of seven sections.

In the first section, the problem situation, purpose and significance of the thesis are mentioned. In addition, some basis definitions, theorems and lemmas that are necessary throughout the thesis are mentioned.

In the second section, information about the methods, resources and drawing program used in the thesis are given.

In the third section, by using (Φ, δ) - monotone sequences, three theorems regarding $|\bar{N}, p_n|_k$, $|D, p_n|_k$ and $|D, p_n; \gamma|_k$ summability methods are proved, respectively.

In the fourth section, by using δ -quasi monotone sequences, two theorems about φ - $|D, p_n|_k$ and φ - $|D, \gamma|_k$ summability of infinite series are proved.

In the fifth section, two theorems related to the general $|D, p_n, \beta; \gamma|_k$ method of δ -quasi monotone and (Φ, δ) -monotone sequences are proved. Also, its application is given.

In the sixth section, using the (\bar{N}, p_n) mean, a theorem regarding to the converge of the Fourier series with quasi monotone coefficients with respect to the L_1 norm is proved and an example is given.

Lastly, in the seventh section, the results and suggestions related the our study are expressed.

Keywords: Convex sequence, Quasi monotone sequence, Riesz mean, Absolute matrix summability, Fourier series, L_1 convergence, Dirichlet kernel, Fejer sum.

İÇİNDEKİLER

TOPLANABİLME TEORİSİ VE UYGULAMALARI

| | |
|-------------------------------|------|
| BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK | ii |
| YÖNERGEYE UYGUNLUK..... | iii |
| KABUL VE ONAY | iv |
| TEŞEKKÜR..... | v |
| ÖZET..... | vi |
| ABSTRACT..... | vii |
| İÇİNDEKİLER | viii |
| SEMBOLLER LİSTESİ | x |
| ŞEKİLLER LİSTESİ | xi |
| GİRİŞ | 1 |

1. BÖLÜM

GENEL BİLGİLER VE LİTERATÜR ÇALIŞMASI

| | |
|----------------------------------|----|
| 1.1. Problem Durumu | 6 |
| 1.2. Araştırmanın Amacı | 6 |
| 1.3. Araştırmanın Önemi..... | 6 |
| 1.4. Tanımlar | 7 |
| 1.5. Teoremler ve Lemmalar | 16 |

2. BÖLÜM

YÖNTEM VE MATERYAL

| | |
|--------------------|----|
| 2.1. Yöntem | 23 |
| 2.2. Materyal..... | 23 |

3. BÖLÜM

(Φ, δ) -MONOTON DİZİLERİN TOPLANABİLME METOTLARINA UYGULAMALARI

| | |
|---|----|
| 3.1. $\sum a_n \mu_n$ Serisinin $ \bar{N}, p_n _k$ Toplanabilmesi | 24 |
| 3.2. $\sum a_n \varepsilon_n$ Serisinin $ D, p_n _k$ Toplanabilmesi | 32 |
| 3.3. $\sum a_n \mu_n$ Serisinin $ D, p_n; \gamma _k$ Toplanabilmesi..... | 42 |

4. BÖLÜM

SONSUZ SERİLERİN φ - $|D, p_n|_k$ VE φ - $|D, \gamma|_k$ TOPLANABİLMESİ

ÜZERİNE TEOREMLER

- 4.1. $\sum a_n \zeta_n$ Serisinin φ - $|D, p_n|_k$ Toplanabilmesi.....49
- 4.2. $\sum a_n \zeta_n$ Serisinin φ - $|D, \gamma|_k$ Toplanabilmesi57

5. BÖLÜM

SONSUZ SERİLERİN $|D, p_n, \beta; \gamma|_k$ TOPLANABİLMESİ ÜZERİNE

TEOREMLER

- 5.1. $\sum a_n \mu_n$ Serisinin $|D, p_n, \beta; \gamma|_k$ Toplanabilmesi63
- 5.2. $\sum a_n \lambda_n$ Serisinin $|D, p_n, \beta; \gamma|_k$ Toplanabilmesi ve Fourier Serilerine Uygulaması70

6. BÖLÜM

FOURIER SERİLERİNİN L_1 YAKISAMASI ÜZERİNE TEOREM VE

UYGULAMASI

- 6.1. Riesz Ortalaması Yardımıyla Fourier Serilerinin L_1 Yakınsaması ve Uygulaması75

7. BÖLÜM

SONUÇ ve ÖNERİLER

- 7.1. Sonuçlar88
- 7.2. Öneriler91
- KAYNAKÇA92
- ÖZGEÇMİŞ.....97

SEMBOLLER LİSTESİ

| | |
|-----------------------|--|
| $\sum a_n$ | : $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sonsuz serisi |
| (s_n) | : $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sonsuz serisinin kısmi toplamlar dizisi |
| $b_n = O(1)$ | : (b_n) dizisi sınırlı |
| $c_n = o(1)$ | : (c_n) dizisinin limiti sıfır |
| $f(x) \sim g(x)$ | : $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, f ve g asimtotiktir |
| BV | : Sınırlı salınımlı dizi uzayı |
| Δd_n | : Herhangi bir (d_n) dizisi için $d_n - d_{n+1}$ |
| $\bar{\Delta} D_n(s)$ | : $(D_n(s))$ dönüşüm dizisi için $D_n(s) - D_{n-1}(s)$ |
| $\bar{\tau}_n(x)$ | : $f(x)$ in Fourier serisinin (\bar{N}, p_n) ortalaması |
| $\bar{K}_n(x)$ | : $f(x)$ in Fourier serisinin Riesz çekirdeği |
| $\ , \ _1$ | : Fourier serisinin $[-\pi, \pi]$ aralığındaki L_1 normu |

ŞEKİLLER LİSTESİ

| | |
|---|----|
| Şekil 1. $S_n = (1,0,1,0,1,0,\dots)$ dizisinin $(C,1)$ ortalaması | 3 |
| Şekil 2. Fourier dönüşümü | 4 |
| Şekil 3. Sinüs grafiği..... | 4 |
| Şekil 4. Hızlı Fourier dönüşümü | 4 |
| Şekil 5. $f(x)$ fonksiyonunun grafiği..... | 86 |
| Şekil 6. $n=15$ için $f(x)$ fonksiyonunun Riesz ortalaması | 87 |
| Şekil 7. $n=75$ için $f(x)$ fonksiyonunun Riesz ortalaması | 88 |

GİRİŞ

İraksak seriler kavramı matematikte daha çok 17. yüzyıl ile 18. yüzyıl arasında kullanılmıştır. Daha öncesinde iraksak seri kavramıyla ilgili matematikçilerin çalışmaları olmuş, fakat bu serileri sistematik bir şekilde kullanan ilk matematikçiler Gottfried Wilhelm Leibniz ve Isac Newton'dur.

1771 yılında Daniel Bernoulli başta olmak üzere birçok matematikçi Grandi serisi olarak bilinen $\sum (-1)^n$ serisine olasılıksal argümanlarla yaklaşmış ve bu seriye $\frac{1}{2}$ değerini vermiştir. Aynı dönemin bazı matematikçileri yakınsak seri kavramıyla daha çok ilgilenmiş ve bir iraksak serinin tek bir değerinin olmasının mümkün olmayacağını söylemişlerdir. Bu düşüncenin esas nedeni iraksak bir serinin yalnız bir değere eşit olmasının iraksaklık kavramı ile çelişmesindedir. 1800 lü yılların başlarında yakınsak olan seriler üzerine çalışmalar sürdürülmüş ve Cauchy 1821 yılında yazmış olduğu "*Analyse Algébrique*" [1] isimli kitabında serilerin yakınsaklığından matematiksel olarak bahsetmiştir. 1880 yılında Frobenius [2] ve 1882 yılında Hölder [3] iraksak serileri içeren tanımlamalarda bulunmuşlardır. 1890 da Ernesto Cesàro [4] serilerin çarpımıyla alakalı Hardy nin "*Divergent Series*" [5] isimli kitabında iraksak serilere çeşitli metotlar uygulayarak toplanabilme teorisinin temelini oluşturan ilk matematikçidir.

Ayrıca Abel de yakınsak ve iraksak seriler için pek çok önemli çalışmada bulunmuştur.

Şimdi herhangi bir $\sum a_k$ serisini düşünelim. Bu serinin kısmi toplamlar dizisi (s_n) olmak

üzere $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ biçiminde gösterilsin. $\sum a_k$ serinin kısmi toplamlar dizisinin tek bir

limit değeri varsa yani $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = a$ ise $\sum a_k$ serisinin yakınsak ve toplamı a değerine

eşittir. Eğer bu serinin (s_n) kısmi toplamlar dizisinin limiti yoksa seri iraksak olarak

adlandırılır. İraksak seriler belirsiz ve belirli iraksak seriler olacak şekilde

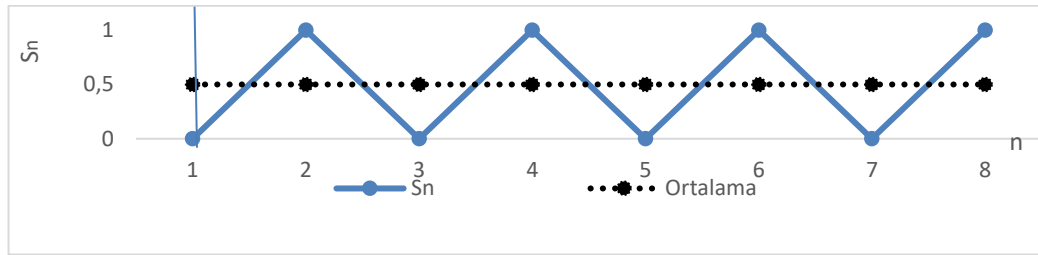
iki kısma ayrılır. Belirsiz ıraksak seriler, (s_n) kısmi toplamlar dizisinin iki ve daha çok yığılma noktasının var olduğu serilere denir. Belirli ıraksak seriler ise $\sum a_k = \pm\infty$ şeklindeki kısmi toplamlar dizisinin limitinin sonsuz olduğu serilere denir.

Belirsiz ıraksak serilere tam bir değeri atamak için çeşitli toplanabilme metotlarına ihtiyaç duyulmaktadır. Bunların bazıları Cesàro, Riesz, Abel, Nörlund, Euler, Hausdorff, Borel metotlarıdır. Toplanabilme metotları aşağıdaki üç ana özelliği sağlaması gerekir:

- i) Regüler olma özelliği: Yani toplanabilme metodu uygulandığında, yakınsak bir seriyi aynı değere toplayabilmelidir.
- ii) Genişleme özelliği: Bir toplanabilme metodu uygulandığında en az bir belirsiz ıraksak seri toplanabilmelidir.
- iii) Tutarlı olma özelliği: Belirsiz ıraksak bir seriye, farklı iki toplanabilme metodu uygulandığı zaman bu metotlar seriyi aynı değere toplayabilmelidir.

Cesàro metodu, ıraksak serilerin toplamada sıklıkla kullanılan metotlardan biridir. Bu metot $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ serisinin kısmi toplamlar dizisi olan $(s_1), (s_2), (s_3), \dots, (s_n), \dots$ dizilerini hesaplar ve yeni bir $(t_1), (t_2), (t_3), \dots, (t_n), \dots$ dizisi tanımlar. Burada (t_n) ler $(s_1), (s_2), (s_3), \dots, (s_n), \dots$ dizisinin ilk n teriminin ortalamasıdır. Eğer $n \rightarrow \infty$ iken $t_n \rightarrow a$ ise $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ serisi a değerine Cesàro toplanabilirdir denir.

Örneğin $1-1+1-1+\dots$ sonsuz serisini düşünelim. Bu seri ıraksak olduğundan tek bir değere sahip değildir, Fakat (s_n) kısmi toplamlar dizisi olmak üzere bu seri için (t_n) Cesàro ortalama dizisi, $\frac{1}{2}$ sayısına yakınsar. Bunun anlamı ıraksak bir diziyi Cesàro toplanabilme metodu ile yakınsak bir dizi haline getirmiş olmasıdır.

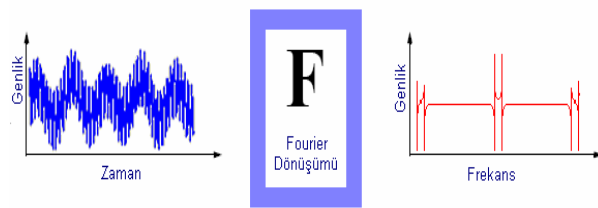


Şekil 1. $S_n = (1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots)$ dizisinin $(C, 1)$ ortalaması

Cesàro'nun bu metodunun uygulaması fazla zaman almamış, Lipot Fejer [6], 1900 yılında Fourier serilerinin yakınsama problemini konu alan Fejer teoremini ortaya koymuştur. Başta ısı dalga denklemlerinin çözümünde olmak üzere Fourier serileri belirli fizik ve mühendislik problemlerinin çözümünde çalışıldı. Fourier serileri elektrik-elektronik mühendisliği, sinyal işleme, titreme analizi, görüntü işleme, akustik, gibi birçok alanda kullanılmaktadır. Fourier serileri, keyfi bir fonksiyonun bir dizi basit terimlere ayrılarak ayrık terimler olarak çözülmesi ve yeniden birleştirilmesi orjinal problemin çözümü için oldukça kullanışlı bir yoldur. Doğada basit periyodik olaylar matematiksel olarak sinüs ve cosinüs fonksiyonları ile ifade edilirler. Bir sarkacın küçük genliklerle salınımı veya bir diyapozonun titreşimleri gibi örnekler verilebilir. Buna benzer fiziksel olayların her biri basit periyodik olaylardır. Bu basit periyodik olaylar

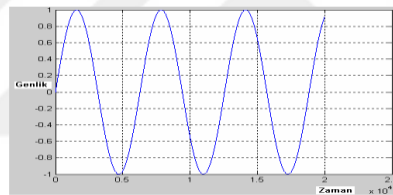
$$A \sin 2\pi nt \text{ veya } A \cos 2\pi nt$$

fonksiyonlarının biri ya da birleşimi ile gösterilebilir. Burada A olayın genliğini, $\omega = 2\pi nt$ açısal hızını ve t zamanı ifade etmektedir. İlk olarak ısı dalga denklemlerinde kullanarak çözüm elde eden Fransız matematikçi Joseph Fourier tarafından ortaya çıkarılmış matematiksel bir metottur. Daha sonra Riemann ve Dirichlet'in çalışmalarıyla modern şekline kavuşmuş ve trigonometrik serilere Joseph Fourierin büyük emeklerinden dolayı ismini Fourier serileri olarak almıştır.



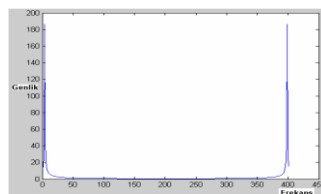
Şekil 2. Bir Sinyalin Fourier Dönüşümü

Şekil 2 de zaman-genlik grafiği verilen bir sinyalin Fourier dönüşümü vasıtasıyla oluşan frekans-genlik grafiği sembolik olarak gösterilmiştir. Bu grafikte genel olarak Fourier açılımı sayesinde fonksiyonların frekansının kolaylıkla belirlenebileceği görülür. Bu yaklaşım farklı periyotlarda girdiye maruz kalan sistemlerin çıktısını ve çıktısının frekansını belirlemekte kolaylık sağlar.



Şekil 3. Sinüs grafiği

Yukarıdaki sinüs grafiğinin hızlı Fourier dönüşümü



Şekil 4. Hızlı Fourier Dönüşümü

şeklindedir.

Günümüzde, mühendislikte ilgilenilen gürültü ve titreşim sinyalleri içerisinde değişken yapıya sahip sinyal tipleri geniş bir yer kaplamaktadır. Otomotiv sektöründe gürültü ve titreşim

sinyallerinin incelenmesi için pratikte gerçekleştirilen uygulamalarda Fourier temelli dönüşüm yöntemleri tercih edilmektedir. Bu dönüşüm, sinyallerin frekans içeriklerini ayırtmaya yarayan bir dönüşüm tipidir. Dönüşüm sonucu elde edilen frekans içeriği bilgisi, motor sisteminin gürültü ve titreşim özelliklerini incelemek için çok değerlidir. Dolayısıyla bir trigonometrik serinin özel bir hali olan Fourier serisi ile ilgili birçok soru da beraberinde geldi. İyi biliniyor ki, bir trigonometrik seri L_1 -normuna göre $f \in L_1$ fonksiyonuna yakınsıyorsa o zaman f fonksiyonunun Fourier serisidir. Ancak Riesz, 1932 yılında aşağıdaki karşıt örneği vermiştir. Bu örneğin ayrıntıları Bary'nin [7] kitabında yer almaktadır. Örneğin

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{\log n}$$

serisi bir Fourier serisidir ancak L_1 metriğine göre yakınsak değildir. Bu bir çok yazarı tersinin doğruluğunu mümkün kılmak için çeşitli yöntemlere teşvik etmiştir. Bunlardan birisi de Fourier serilerine özel katsayılar belirlemek üzerine olmuştur. Bu konudaki çalışmaları Young [8], konveks diziler sınıfını ($\Delta^2 a_n \geq 0$) ve Kolmogorov [9], yarı konveks diziler sınıfını ($\sum n |\Delta^2 a_{n-1}| < \infty$) olarak tanımlamışlardır. Telyakovskii ve Fomin [10], quasi-monoton dizileri ele almışlardır. Garret, Rees ve Stanojevič [11] ise Telyakovskii – Fomin'in sonucunu Fejer toplamını ele alarak uygulamıştır.

Flett [12], toplanabilme metotlarıyla ilgili olarak α -ıncı mertebeden Cesàro toplanabilmeyi tanımlamıştır. Das [13], mutlak toplanabilmeyi tanımlamıştır. Daha sonra Kishore ve Hotta [14], toplanabilme çarpanı kavramını vermiştir. Tanovič-Miller [15] tarafından alt üçgensel matrisler yardımıyla $|D|_k$ toplanabilme tanımı verilmiştir. Bor [16], $|\overline{N}, p_n|_k$ toplanabilme tanımını yapmıştır.

Çalışmalarımızın temelini oluşturan alt üçgensel matrisler yardımıyla Sulaiman [17] $|D, p_n|_k$ toplanabilmenin tanımını yapmıştır. $|D, p_n|_k$ toplanabilmenin daha genel hali olan $|D, p_n; \gamma|_k$ toplanabilmenin tanımı Özarslan ve Ögdük [18], $\varphi - |D, p_n|_k$ tanımı Özarslan [19], $\varphi - |D, \delta|_k$ tanımı Özarslan [20] ve $|D, p_n, \beta; \gamma|_k$ tanımı ise Özarslan ve Karakaş [21] tarafından verilmiştir.

1. BÖLÜM

GENEL BİLGİLER VE LİTERATÜR ÇALIŞMASI

1.1. Problem Durumu

Bu tez çalışması ile quasi monoton diziler ele alınarak toplanabilme metotları yardımıyla serilerin hangi şartlar altında toplanabileceği, örnek ve uygulamaları temel problem olarak ele alınmıştır. Yine toplanabilme teorisinin bir uygulaması olarak quasi monoton katsayılı Fourier serilerinin (\bar{N}, p_n) ortalaması kullanılarak hangi şartlar altında L_1 normuna göre yakınsayacağı düşünülmüştür.

1.2. Araştırmanın Amacı

Yapılan araştırmanın amacı toplanabilme metotlarıyla ilgili önceden tanımlanmış bazı teoremlerin özellikle mühendislik biliminin yapı taşlarından biri olan Fourier serilerini baz alarak uygulamalarını yapmak ve teoremleri genelleştirmektir.

1.3. Araştırmanın Önemi

Yapılan çalışmada konveks diziler, (Φ, δ) -monoton diziler ve δ -quasi monoton dizilerin toplanabilme çarpanı olarak kullanılmasıyla elde edilen sonsuz serilerin mutlak toplanabilirliği ve Fourier serileri üzerine çalışmalar incelenmiştir. Ayrıca Fourier serilerinin L_1 normuna göre yakınsaması üzerine araştırmalar yapılmıştır. Yapılan bu araştırmalar sonucunda daha genel teoremler ve onların uygulamaları literatüre kazandırılarak yeni çalışmaların önü açılacaktır.

1.4. Tanımlar

Tanım 1.4.1. \mathfrak{S} gerçel ya da karmaşık sayılar kümesine ait bir cisim ve kısmi toplamlar dizisi (s_n) olacak şekilde $\sum a_n$ serisi verilsin. Eğer $n, r = 0, 1, 2, \dots$ olmak üzere $k_{nr} \in \mathfrak{S}$ için bir $K = (k_{nr})$ sonsuz matrisi ise bu durumda (s_n) dizisinden (g_n) dizisine bir dönüşüm

$$g_n = \sum_{r=0}^{\infty} k_{nr} s_r \quad (1.1)$$

olmak suretiyle (g_n) dizisi (s_n) dizisi için K dönüşüm dizisi ve K ya ise diziden-diziye bir dönüşüm denir. K diziden diziye dönüşümünün varlığından bahsedebilmemiz için (1.1) de gösterilen seri tüm n ler için yakınsak olmalıdır [22].

Aksi söylenmedikçe bundan sonra belirtilen sonsuz matrisler elemanları gerçel ya da kompleks olan matrisleri ifade edecektir.

Tanım 1.4.2. $\sum a_n$ serisi ve $L = (l_{nr})$ sonsuz matrisi verilsin. Bu taktirde

$$h_n = \sum_{r=0}^{\infty} l_{nr} a_r \quad (1.2)$$

biçiminde tanımlı (h_n) dizisi $\sum a_n$ serisinin L dönüşüm dizisi ve $L = (l_{nr})$ matrisine ise seriden-diziye bir dönüşümdür denir. Bu dönüşümün varlığı her n için (1.2) deki serinin yakınsak olmasıyla mümkündür [22].

Tanım 1.4.3. $\sum a_n$ serisi ve $Z = (z_{nr})$ sonsuz matrisi verilmiş olsun. Eğer

$$j_n = \sum_{r=0}^{\infty} z_{nr} a_r$$

olmak üzere $\sum_{n=1}^{\infty} j_n = a$ ise $Z = (z_{nr})$ matrisine seriden-seriye dönüşüm ve a sayısına da

$\sum a_n$ serisinin Z dönüşümü yardımıyla genelleştirilmiş toplamı denir [22].

Tanım 1.4.4. $n, r = 0, 1, 2, \dots$ olmak üzere bir $B = (b_{nr})$ sonsuz matrisi verilsin. Yakınsak her diziyi tekrar yakınsak bir diziye dönüştüren ve limitinin değerini de koruyabilen $B = (b_{nr})$ sonsuz matrisine regülerdir denir [23].

Tanım 1.4.5. $\sum a_n$ serisi (s_n) kısmi toplam dizisi ile gösterilsin. Bu taktirde (s_n) dizisinin $D = (d_{nr})$ sonsuz matrisi aracılığıyla meydana getirilen ve (1.1) de verilen (g_n) dönüşüm dizisinde $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = a$ olacak şekilde bir a sayısı mevcutsa (s_n) dizisi ya da $\sum a_n$ serisi a değerine D toplanabilir denir [24].

Tanım 1.4.6. $(g_n) \in BV$ olduğu zaman $\sum a_n$ serisi veya (s_n) dizisi $|D|$ toplanabilirdir denir. Eğer $\sum a_n$ serisi $|D|$ toplanabiliyorsa o zaman $\sum a_n \in |D|$ ya da $(s_n) \in |D|$ ile gösterilebilir [13].

Tanım 1.4.7. $D = (d_{nr})$ bir kare matrisi verilsin. Her $n < r$ için $d_{nr} = 0$ olan $D = (d_{nr})$ kare matrisine alt üçgensel matris denir [25].

Tanım 1.4.8. Esas köşegeni her $n \in \mathbb{N}_0$ için $d_{nn} \neq 0$ biçiminde tanımlanan $D = (d_{nr})$ alt üçgensel matrisine normal matris denir [26].

Tanım 1.4.9. $n = 0, 1, 2, \dots$ olmak üzere, $D = (d_{nr})$ normal matris yardımı ile oluşturulan (s_n) dizisinin $(D_n(s))$ dönüşüm dizisi

$$D_n(s) = \sum_{r=0}^n d_{nr} s_r$$

biçiminde tanımlı ve

$$\bar{\Delta} D_n(s) = D_n(s) - D_{n-1}(s) \quad (1.3)$$

olsun. Bu taktirde

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} |\bar{\Delta} D_n(s)|^k < \infty \quad (1.4)$$

olduğunda $\sum a_n$ serisi $k \geq 1$ için $|D|_k$ toplanabilirdir denir [15].

Tanım 1.4.10. $D = (d_{nr})$ sonsuz matrisinin elemanları

$$d_{nr} = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & , \quad r \leq n \text{ için} \\ 0 & , \quad r > n \text{ için} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. $D = (d_{nr})$ normal matrisiyle elde edilen (R_n) dönüşüm dizisi

$$R_n = \frac{1}{n+1} \sum_{r=0}^n s_r \quad (1.5)$$

biçimindedir. Elde edilen bu (R_n) dönüşüm dizisine Cesàro ortalaması veya $(C,1)$ ortalaması denir. Eğer oluşturulan bu dönüşüm dizisi için $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = a$ oluyorsa, o halde $\sum a_n$ serisi a değerine $(C,1)$ toplanabilirdir denir [24].

Tanım 1.4.11. Eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty} |R_n - R_{n-1}| < \infty \quad (1.6)$$

oluyorsa, o zaman $\sum a_n$ serisi $|C,1|$ toplanabilirdir denir [27].

Tanım 1.4.12. Eğer $k \geq 1$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} |R_n - R_{n-1}|^k < \infty \quad (1.7)$$

oluyorsa, o zaman $\sum a_n$ serisi $|C,1|_k$ toplanabilirdir denir [12].

Aksi belirtilmedikçe çalışmamız boyunca (s_n) dizisi $\sum a_n$ serisi için kısmi toplamlar dizisi ile (p_n) dizisini, $n \rightarrow \infty$ iken

$$P_n = \sum_{r=0}^n p_r \rightarrow \infty, \quad (P_{-j} = p_{-j} = 0, \quad j \geq 1) \quad (1.8)$$

şartını sağlayan pozitif sayıların bir dizisini ifade edecektir. Ek olarak, (na_n) dizisinin n -inci mertebeden Cesàro ortalaması (\hat{h}_n) dizisi ile gösterilecektir. Bu ise

$$\hat{h}_n = \frac{1}{n+1} \sum_{r=1}^n ra_r \quad (1.9)$$

biçimindedir.

Tanım 1.4.13. Elemanları

$$d_{nr} = \begin{cases} \frac{p_r}{P_n} & , \quad r \leq n \text{ ise} \\ 0 & , \quad r > n \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan $D = (d_{nr})$ normal matrisi ile Riesz matrisi ve

$$\Gamma_n = \frac{1}{P_n} \sum_{r=0}^n p_r s_r \quad (1.10)$$

ile verilen (Γ_n) dizisi Riesz ortalaması ya da (\bar{N}, p_n) ortalaması olarak adlandırılır. Eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma_n = a$ ise $\sum a_n$ serisi a değerine (\bar{N}, p_n) toplanabilir denir [5].

Tanım 1.4.14. Eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\Gamma_n - \Gamma_{n-1}| < \infty \quad (1.11)$$

oluyorsa, o zaman $\sum a_n$ serisi $|\bar{N}, p_n|$ toplanabilir denir [28].

Tanım 1.4.15. Eğer $k \geq 1$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} |\Gamma_n - \Gamma_{n-1}|^k < \infty \quad (1.12)$$

oluyorsa, o zaman $\sum a_n$ serisi $|\bar{N}, p_n|_k$ toplanabilir denir [16]. (1.12) de ifade edilen seride her $n \in \mathbb{N}$ için $p_n = 1$ alındığı zaman $|C, 1|_k$ toplanabilmeye ulaşılır.

Tanım 1.4.16. β bir gerçel sayı olsun. Eğer $k \geq 1$ ve $\gamma \geq 0$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\beta(\gamma k + k - 1)} |\Gamma_n - \Gamma_{n-1}|^k < \infty \quad (1.13)$$

oluyorsa, o zaman $\sum a_n$ serisine $|\bar{N}, p_n, \beta; \gamma|_k$ toplanabilir denir [29]. (1.13) te verilen ifade de $\beta = 1$ ve $\gamma = 0$ alındığı zaman $|\bar{N}, p_n|_k$ toplanabilmeye ulaşılır.

Tanım 1.4.17. $D = (d_{nr})$ normal matris ve $\bar{\Delta}D_n(s) = D_n(s) - D_{n-1}(s)$ olsun. Bu takdirde

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} |\bar{\Delta}D_n(s)|^k < \infty \quad (1.14)$$

oluyorsa, o zaman $\sum a_n$ serisi $k \geq 1$ için $|D, p_n|_k$ toplanabilir denir [17]. Burada $|D, p_n|_k$ metodu için $d_{nr} = \frac{P_r}{P_n}$ alınırsa $|\bar{N}, p_n|_k$ metodu elde edilir.

Tanım 1.4.18. Eğer $k \geq 1$ ve $\gamma \geq 0$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\gamma k + k - 1} |\bar{\Delta}D_n(s)|^k < \infty \quad (1.15)$$

oluyorsa, o zaman $\sum a_n$ serisi $|D, p_n; \gamma|_k$ toplanabilir denir [18].

Bu tanımda $d_{nr} = \frac{P_r}{P_n}$ alındığında $|\bar{N}, p_n; \gamma|_k$ toplanabilme elde edilir [30]. Ayrıca bu tanımda $\gamma = 0$ alındığında $|D, p_n; \gamma|_k$ toplanabilme $|D, p_n|_k$ toplanabilmeye indirgenir.

Tanım 1.4.19. Pozitif gerçel sayıların bir dizisi (φ_n) verilsin. Eğer $k \geq 1$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^{k-1} |\bar{\Delta}D_n(s)|^k < \infty \quad (1.16)$$

oluyorsa, o zaman $\sum a_n$ serisine $\varphi - |D, p_n|_k$ toplanabilirdir denir [19]. Eğer (1.16) da verilen $\varphi - |D, p_n|_k$ tanımı için $\varphi_n = \frac{P_n}{P_n}$ seçilirse (1.14) te verilen $|D, p_n|_k$ tanımına ulaşılır.

Tanım 1.4.20. (φ_n) pozitif gerçel sayı dizisi ve $k \geq 1$ olsun. Eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^{\gamma k + k - 1} |\bar{\Delta} D_n(s)|^k < \infty \quad (1.17)$$

oluyorsa, o zaman $\sum a_n$ serisine $\varphi - |D; \gamma|_k$ toplanabilirdir denir [20]. Eğer $\gamma = 0$ alınırsa (1.17) de verilen $\varphi - |D; \gamma|_k$ toplanabilme metodu (1.16) da verilen $\varphi - |D, p_n|_k$ toplanabilme metoduna indirgenir. Ayrıca $\varphi - |D; \gamma|_k$ toplanabilme metodunda $d_{nr} = \frac{P_r}{P_n}$ seçilirse $\varphi - |\bar{N}, p_n; \gamma|_k$ toplanabilme tanımına ulaşılır [31].

Tanım 1.4.21. β bir gerçel sayı olmak üzere $k \geq 1$ ve $\gamma \geq 0$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\beta(\gamma k + k - 1)} |\bar{\Delta} D_n(s)|^k < \infty \quad (1.18)$$

oluyorsa, o zaman $\sum a_n$ serisine $|D, p_n, \beta; \gamma|_k$ toplanabilirdir denir [21].

Tanım 1.4.22. Herhangi iki toplanabilme metodu M ve N olsun. M toplanabilen her dizi, aynı değere N toplanabilirse, M ye N yi gerektirir denir ve $M \subseteq N$ ile gösterilir. Eğer $M \subseteq N$ ve $N \subseteq M$ ise, M metodu N metoduna denktir denir [24].

Tanım 1.4.23. Herhangi $\sum a_n$ serisi verilsin. Eğer $\sum a_n y_n$ serisi bir D toplanabilme metodu sayesinde toplanabiliyorsa buradaki (y_n) dizisine $\sum a_n$ serisi için D metoduna göre bir toplanabilme çarpanı olarak adlandırılır [14].

Tanım 1.4.24. $\Delta \zeta_n = \zeta_n - \zeta_{n+1}$ olmak üzere, her n pozitif tam sayısı için $\Delta^2 \zeta_n \geq 0$ oluyorsa (ζ_n) dizisine konveks dizi denir [32].

Tanım 1.4.25. (r_n) dizisi ise pozitif artan bir dizi olsun. Eğer A ve B pozitif sabitler olmak üzere

$$Ar_n \leq m_n \leq Br_n \quad (1.19)$$

ise bu taktirde (m_n) dizisi hemen hemen artan dizi olarak adlandırılır [33].

Dolayısıyla her artan dizi aynı zamanda hemen hemen artan bir dizi olur. Ancak aksi her zaman doğru olmayabilir. Tersinin doğru olmadığı duruma $m_n = ne^{(-1)^n}$ dizisi örnek verilebilir.

Tanım 1.4.26. (ϖ_n) pozitif sayıların bir dizisi verilsin. Eğer $n\Delta\varpi_n \geq -\alpha\varpi_n$ şartını sağlayan α sayısı mevcutsa (ϖ_n) dizisine quasi monoton dizi denir. Sıfıra yakınsak her monoton azalan dizinin quasi monoton dizi olduğu açıktır [34].

Tanım 1.4.27. (δ_n) negatif olmayan sayıların bir dizisi olmak üzere $T_n \geq 0$, $T_n \rightarrow 0$ ve $\Delta T_n \geq -\delta_n$ oluyorsa (T_n) dizisine δ -quasi monoton dizi denir.

Bu tanıma göre, (T_n) dizisi δ -quasi monoton dizi olmak üzere özel olarak $\alpha > 0$ için

$$\delta_n = \frac{\alpha T_n}{n} \text{ seçilirse } (T_n) \text{ dizisi quasi monoton dizi olur [34].}$$

Tanım 1.4.28. $\sum \Phi_n \delta_n < \infty$ olacak şekilde (δ_n) negatif olmayan sayıların bir dizisi ve (Φ_n) pozitif monoton artan bir dizi olsun. Eğer $c_n \rightarrow 0$ olmak üzere $\Delta c_n \geq -\delta_{n+1}$ sağlanıyorsa (c_n) dizisine (Φ, δ) -monoton dizi denir. Ayrıca (c_n) dizisi için (Φ, δ) -monoton dizilerin farklarının dizisine (Φ, δ) -pozitif denir [35].

Tanım 1.4.29. f fonksiyonu $(-\pi, \pi)$ aralığında Lebesgue anlamında integrallenebilen 2π periyotlu bir fonksiyon olsun.

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx \quad (1.20)$$

ve

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (1.21)$$

olmak üzere $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ trigonometrik serisine f fonksiyonunun Fourier serisi denir ve

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (1.22)$$

şeklinde gösterilir. Ayrıca a_n ve b_n sabitlerine Fourier katsayısı denir [5]. Burada $n = 0$

için $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$ dir.

Tanım 1.4.30. $S_n(f, x) = S_n(x)$ dizisi trigonometrik Fourier serisinin n . kısmi toplamlar dizisini gösterebilir. a_n ve b_n Fourier katsayıları olmak üzere, indis değişimi yardımıyla elde edilen

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n S_j(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^j (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n+1} \right) (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \end{aligned} \quad (1.23)$$

toplamına Fejer toplamı denir [36].

Tanım 1.4.31. $x \neq 0 \pmod{2\pi}$ için $\sum_{k=1}^n \cos kx = \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{x}\right) \cos\left(\frac{(n+1)\pi}{x}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$ olduğundan

$$D_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kx = \frac{\sin\left(\left(\frac{2n+1}{2}\right)x\right)}{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)} \quad (1.24)$$

trigonometrik polinomuna Dirichlet çekirdeği denir [7,37].

Tanım 1.4.32. $x \neq 0 \pmod{2\pi}$ için $\sum_{k=1}^n \sin kx = \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{x}\right) \sin\left(\frac{(n+1)\pi}{x}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$ olduğundan

$$\tilde{D}_n(x) = \sum_{k=1}^n \sin kx = \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)} \quad (1.25)$$

trigonometrik polinomuna eşlenik Dirichlet çekirdeği denir [7,38].

Tanım 1.4.33. $S_n(f, x) = S_n(x)$ dizisi trigonometrik Fourier serisinin n . kısmi toplamlar dizisini gösterebilir. a_n ve b_n Fourier katsayıları olmak üzere (1.24) ten

$$\begin{aligned} S_n(f, x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t)}{2} dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \left(\cos kx \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos ktdt + \sin kx \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin ktdt \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(t-x) \right) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_n(t) dt \end{aligned} \quad (1.26)$$

yazılabilir. (1.26) kullanılarak

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \left\{ \frac{1}{n+1} \sum_{r=0}^n D_r(t) \right\} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) K_n(t) dt \quad (1.27)$$

Fourier serisinin Cesàro ortalaması elde edilir. Burada

$$K_n(t) = \frac{\sum_{r=0}^n D_r(t)}{n+1} \quad (1.28)$$

ifadesine Fejer çekirdeği denir [7,32].

Tanım 1.4.34. (Hölder Eşitsizliği) $\rho > 1$ için $\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} = 1$ olsun. Tüm sonlu $r = 1, 2, \dots, m$ için $a_r \geq 0$ ve $b_r \geq 0$ olmak üzere aşağıdaki eşitsizliğe

$$\sum_{r=1}^m a_r b_r \leq \left(\sum_{r=1}^m a_r^\rho \right)^{\frac{1}{\rho}} \left(\sum_{r=1}^m b_r^{\rho'} \right)^{\frac{1}{\rho'}} \quad (1.29)$$

Hölder eşitsizliği denir [22].

Tanım 1.4.35. (Minkowski Eşitsizliği) Her sonlu $r = 1, 2, \dots, m$ için $a_r \geq 0, b_r \geq 0$ ve $\rho \geq 1$ olmak üzere aşağıdaki eşitsizliğe

$$\left(\sum_{r=1}^m (a_r + b_r)^\rho \right)^{\frac{1}{\rho}} \leq \left(\sum_{r=1}^m a_r^\rho \right)^{\frac{1}{\rho}} + \left(\sum_{r=1}^m b_r^\rho \right)^{\frac{1}{\rho}} \quad (1.30)$$

Minkowski eşitsizliği denir [22].

Tanım 1.4.36. (Abel Dönüşümü) (a_r) ve (b_r) dizileri kompleks terimli ve $s_m = \sum_{r=1}^m a_r$ olmak üzere

$$\sum_{r=1}^m a_r b_r = \sum_{r=1}^{m-1} s_r \Delta b_r + s_m b_m \quad (1.31)$$

biçiminde yazılabilir [39].

1.5. Teoremler ve Lemmalar

Teorem 1.5.1. (Silverman-Toeplitz Teoremi) $D = (d_{nr})$, $(n, r = 0, 1, 2, \dots)$ sonsuz matrisinin regüler olması için gerek ve yeterli şart

- i) Her r için $\lim_{n \rightarrow \infty} d_{nr} = 0$
 - ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=0}^{\infty} d_{nr} = 1$
 - iii) Her n için $\sup_n \sum_{r=0}^{\infty} |d_{nr}| < \infty$
- (1.32)

şartlarının gerçekleşmesidir [22].

Teorem 1.5.2. (\bar{N}, p_n) metodu regüler bir metottur ancak ve ancak $m \rightarrow \infty$ iken $P_m \rightarrow \infty$ dur [24].

Teorem 1.5.3. (ζ_n) dizisi $\sum \frac{\zeta_n}{n} < \infty$ olacak şekilde konveks bir dizi olsun. Eğer (\hbar_n) dizisi (1.9) ifadesindeki gibi tanımlanmak üzere

$$\sum_{n=1}^m \frac{|s_n|^k}{n} = O(\log m), \quad m \rightarrow \infty \quad (1.33)$$

şartını sağlarsa $k \geq 1$ için $\sum a_n \zeta_n$ serisi $|C, 1|_k$ toplanabilir [40].

$\hbar_n = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n ia_i$ olmak üzere (1.33) şartı, $m \rightarrow \infty$ iken

$$\sum_{n=1}^m \frac{|\hbar_n|^k}{n} = O(\log m) \quad (1.34)$$

şartını gerektirir tersinin doğru olması gerekmez [41].

Teorem 1.5.4. (χ_n) dizisi $n \rightarrow \infty$ iken $|\Delta \chi_n| = O\left(\frac{\chi_n}{n}\right)$ olacak şekilde hemen hemen artan bir dizi ve $\zeta_n \rightarrow 0$ olsun. Diyelim ki (B_n) dizisi de $\sum B_n \chi_n$ yakınsak, $\sum n \chi_n \delta_n < \infty$ ve her n için $|\Delta \zeta_n| \leq |B_n|$ eşitsizliğini sağlayan δ – quasi monoton bir dizi olsun. $k \geq 1$ olmak üzere, $m \rightarrow \infty$ iken

$$\sum_{n=1}^m \frac{|\zeta_n|}{n} = O(1) \quad (1.35)$$

$$\sum_{n=1}^m \frac{|\hbar_n|^k}{n} = O(\chi_m) \quad (1.36)$$

ve

$$\sum_{n=1}^m \frac{P_n}{P_n} |\hbar_n|^k = O(\chi_m) \quad (1.37)$$

şartları sağlanırsa $\sum a_n \zeta_n$ serisi $|\bar{N}, p_n|_k$ toplanabilir [42,43].

Matris toplanabilme ile ilgili teoremlere geçmeden önce bazı notasyonları verelim.

$D = (d_{nr})$ normal matris olmak üzere, $\bar{D} = (\bar{d}_{nr})$ ve $\hat{D} = (\hat{d}_{nr})$ alt yarı-matrisleri

$$\bar{d}_{nr} = \sum_{r=0}^n d_{nr}, \quad n, r = 0, 1, 2, \dots \quad (1.38)$$

ve

$$\hat{d}_{00} = \bar{d}_{00} = d_{00}, \quad n = 1, 2, \dots \text{ için } \hat{d}_{nr} = \bar{d}_{nr} - \bar{d}_{n-1,r} \quad (1.39)$$

şeklinde oluşturulabilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} D_n(s) &= \sum_{r=0}^n d_{nr} s_r = \sum_{r=0}^n d_{nr} \sum_{i=0}^r a_i \\ &= \sum_{i=0}^n a_i \sum_{r=i}^n d_{nr} = \sum_{i=0}^n a_i \bar{d}_{ni} = \sum_{r=0}^n \bar{d}_{nr} a_r \end{aligned} \quad (1.40)$$

ve $\bar{d}_{n-1,n} = \sum_{i=n}^{n-1} d_{n-1,i} = 0$ bulunur.

O halde

$$\begin{aligned} \bar{\Delta} D_n(s) &= D_n(s) - D_{n-1}(s) = \sum_{r=0}^n \bar{d}_{nr} a_r - \sum_{r=0}^{n-1} \bar{d}_{n-1,r} a_r \\ &= \sum_{r=0}^n (\bar{d}_{nr} - \bar{d}_{n-1,r}) a_r + \bar{d}_{n-1,n} a_n = \sum_{r=0}^n \hat{d}_{nr} a_r \end{aligned} \quad (1.41)$$

elde edilir.

Burada \bar{D} alt yarı matrisi seriden-diziye dönüşüm matrisi ve \hat{D} alt yarı matrisi ise seriden-seriye dönüşüm matrisidir.

Teorem 1.5.5. $D = (d_{nr})$ normal matris olmak üzere

$$n = 0, 1, \dots \text{ için } \bar{d}_{n0} = 1 \quad (1.42)$$

$$n \geq r + 1 \text{ için } d_{n-1,r} \geq d_{nr} \quad (1.43)$$

$$d_{nn} = O\left(\frac{p_n}{P_n}\right) \quad (1.44)$$

$$|\hat{d}_{n,r+1}| = O\left(r |\Delta_r \hat{d}_{nr}|\right) \quad (1.45)$$

şartlarını sağlasın. (κ_n) dizisi pozitif azalmayan ve (p_n) dizisi

$$P_n = O(np_n), \quad n \rightarrow \infty \quad (1.46)$$

şartını sağlayan pozitif sayıların bir dizisini gösterebilirsin. Diyelim ki $\zeta_n \rightarrow 0$ olacak şekilde (B_n) dizisi $\sum n\kappa_n \delta_n < \infty$, $\sum B_n \kappa_n$ yakınsak ve her n için $|\Delta \zeta_n| \leq |B_n|$ eşitsizliğini sağlayacak şekildeki bir δ -quasi monoton dizi olsun. $k \geq 1$ olmak üzere, eğer $m \rightarrow \infty$ iken

$$\sum_{n=1}^m \frac{p_n}{P_n} |\hat{h}_n|^k = O(\kappa_m) \quad (1.47)$$

şartı sağlanırsa $\sum a_n \zeta_n$ serisi $|D, p_n|_k$ toplanabilir [44].

Teorem 1.5.6. (W_n) dizisi pozitif artan bir dizi olsun. $k \geq 1$ olmak üzere, eğer (W_n) , (η_n) ve (p_n) dizileri, $m \rightarrow \infty$ iken

$$\eta_m = o(1), \quad (1.48)$$

$$\sum_{n=1}^m n W_n |\Delta^2 \eta_n| = O(1), \quad (1.49)$$

$$\sum_{n=1}^m \frac{|\hat{h}_n|^k}{n W_n^{k-1}} = O(W_m), \quad (1.50)$$

$$\sum_{n=1}^m \frac{P_n}{P_n} \frac{|\hat{h}_n|^k}{W_n^{k-1}} = O(W_m) \quad (1.51)$$

ve

$$\sum_{n=1}^m \frac{P_n}{n} = O(P_m) \quad (1.52)$$

şartlarını sağlarsa $\sum a_n \eta_n$ serisi $|\bar{N}, p_n|_k$ toplanabilir [45].

Teorem 1.5.7. (a_n) ve (b_n) sifira yakınsayan quasi monoton diziler olsun. Bu diziler

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (1.53)$$

Fourier serisinin katsayıları olmak üzere $n \rightarrow \infty$ iken $\|S_n - \sigma_n\|_1 = o(1)$ olması için gerek yeter şart $n \rightarrow \infty$ iken $(a_n + b_n) \log n = o(1)$ olmasıdır [11].

Burada σ_n Fourier serisinin Fejer toplamını, S_n ise Fourier serisinin kısmi toplamlar dizisini göstermektedir.

Teorem 1.5.8. f fonksiyonu (1.22) deki gibi tanımlı trigonometrik Fourier fonksiyonunu

$$f(x) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x) \quad (1.54)$$

biçiminde tanımlayalım.

$$\psi(t) = \frac{1}{2} \{f(x+t) + f(x-t)\} \text{ ve } \psi_1(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \psi(u) du$$

yazılabilir.

İyi biliniyor ki $\hat{h}_n(x)$ dizisi $(nC_n(x))$ dizisinin $(C,1)$ ortalaması olmak üzere, eğer $\psi_1(t) \in BV(0, \pi)$ ise bu taktirde $\hat{h}_n(x) = O(1)$ olur [46].

Teorem 1.5.9. (Euler-Maclauren Formülü) Eğer $G(x)$ fonksiyonu $[1, n]$ aralığında sürekli diferansiyellenebilir ise

$$\sum_{k=1}^n G(k) = \frac{1}{2}[G(1) + G(n)] + \int_1^n G(x)dx + \int_1^n \left\{x - \llbracket x \rrbracket - \frac{1}{2}\right\} G'(x)dx \quad (1.55)$$

dir. Örneğin $G(x) = \frac{1}{x}$ seçilirse

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \log n + \gamma + o(1) = \log n + O(1) \quad (1.56)$$

bulunur. Burada γ sabiti yaklaşık olarak $\gamma \cong 0,57721$ sayısına eşit olan Euler sabiti olarak bilinmektedir [47].

Lemma 1.5.10. Eğer (μ_n) dizisi (Φ, δ) -monoton bir dizi ve $\sum \mu_n \Delta \Phi_n$ yakınsak ise bu durumda

$$\mu_n \Phi_n = o(1), n \rightarrow \infty \quad (1.57)$$

ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{n+1} |\Delta \mu_n| < \infty \quad (1.58)$$

bulunur [35].

Lemma 1.5.11. Teorem 1.5.5 in şartları altında

$$|\zeta_n| \kappa_n = O(1), n \rightarrow \infty \quad (1.59)$$

dir [48].

Lemma 1.5.12. (κ_n) azalmayan bir dizi, (B_n) dizisi $\sum n \kappa_n \delta_n < \infty$ ve $\sum B_n \kappa_n$ yakınsak olacak şekilde δ -quasi monoton bir dizi olsun. Bu taktirde

$$m \kappa_m B_m = O(1), m \rightarrow \infty, \quad (1.60)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\kappa_n |\Delta B_n| < \infty \quad (1.61)$$

şartları sağlanır [48].

Lemma 1.5.13. Teorem 1.5.4 ün şartları altında

$$|\zeta_n| \chi_n = O(1), \quad n \rightarrow \infty \quad (1.62)$$

dir [42].

Lemma 1.5.14. (χ_n) hemen hemen artan bir dizi, (B_n) dizisi $\sum n\chi_n\delta_n < \infty$ ve $\sum B_n\chi_n$ yakınsak olacak şekilde δ – quasi monoton bir dizi olsun. Bu takdirde,

$$m\chi_m B_m = O(1), \quad m \rightarrow \infty \quad (1.63)$$

ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\chi_n |\Delta B_n| < \infty \quad (1.64)$$

sonuçlarına ulaşılır [43].

Lemma 1.5.15. Teorem 1.5.6 nın şartları altında aşağıdaki sonuçlar

$$nW_n |\Delta \eta_n| = O(1), \quad n \rightarrow \infty \quad (1.65)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} W_n |\Delta \eta_n| < \infty \quad (1.66)$$

$$\eta_n W_n = O(1), \quad n \rightarrow \infty \quad (1.67)$$

elde edilir [49].

Lemma 1.5.16. (u_n) ve (v_n) iki reel dizi olsun. (v_n) kesin artan ve $+\infty$ a ıraksasın öyle ki

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1} - u_n}{v_{n+1} - v_n} = l_1 \quad \text{ve} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l_2 \quad (1.68)$$

olsun. Eğer l_1 limiti mevcutsa (sonlu ya da sonsuz), o zaman l_1 limiti var ve $l_1 = l_2$ limitleri eşit olur [50].

Lemma 1.5.17. $D_n(x)$ ve $\tilde{D}_n(x)$ sırasıyla Dirichlet ve eşlenik Dirichlet çekirdeğini gösterebilirsin. $x \neq 0 \pmod{2\pi}$ ise $0 < |x| \leq \pi$ için $|D_n(x)| \leq \frac{\pi}{2|x|}$ ve $|\tilde{D}_n(x)| \leq \frac{\pi}{x}$ dir. Ayrıca iyi biliniyor ki her x için $|D_n(x)| \leq n + \frac{1}{2}$ tahmini geçerlidir. Böylece Lebesgue sabiti olarak bilinen

$$L_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(x)| dx = \|D_n(x)\| \sim \frac{4}{\pi^2} \log n \quad (1.69)$$

ve eşlenik Lebesgue sabiti olarak bilinen

$$\tilde{L}_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{D}_n(x)| dx = \|\tilde{D}_n(x)\| \sim \frac{4}{\pi} \log n \quad (1.70)$$

tahminleridir [7, 32].

2. BÖLÜM

YÖNTEM VE MATERYAL

Bu bölüm çalışma boyunca kullanılan yöntem ve materyallerle ilgili bilgileri açıklamak için verilmiştir.

2.1. Yöntem

Bu tezde konveks diziler, quasi monoton diziler, (Φ, δ) –monoton diziler, toplanabilme metotları ve Fourier serileri ile ilgili araştırmalar yapılmıştır. Ayrıca Fourier serilerinin toplanabilirliğinde kullanılan Dirichlet çekirdeği, Fejer çekirdeği ve Fourier serilerinin L_1 normuna göre yakınsaması ile ilgili kaynaklar incelenmiştir. Yapılan araştırmalar sonucunda toplanabilme çarpanı yardımıyla oluşturulan serilerin mutlak Cesàro, mutlak Riesz ve mutlak matris toplanabilmesi üzerine teoremler ile Fourier serilerinin L_1 normuna göre yakınsaması üzerine bir teorem oluşturulmuştur. Bu oluşturulan teoremler ile makaleler arası ilişkiler incelenmiştir.

Belirlenen teoremlerin genelleştirilmesi için $|\bar{N}, p_n|_k$, $|D, p_n|_k$, $|D, p_n; \gamma|_k$, $\varphi - |D, p_n|_k$, $\varphi - |D, \gamma|_k$ ve $|D, p_n, \beta; \gamma|_k$ mutlak toplanabilme metotları kullanılmıştır. Fourier serilerinin L_1 yakınsaklığı için quasi monoton diziler ve (\bar{N}, p_n) ortalaması kullanılmıştır.

2.2. Materyal

Toplanabilme teorisi ve Fourier serileri ile alakalı kitaplar, sonsuz serilerin mutlak Cesàro toplanabilirliği, mutlak Riesz toplanabilirliği ve mutlak matris toplanabilirliği ile ilgili makaleler, grafik için GeoGebra programından materyal olarak faydalanılmıştır.

3. BÖLÜM

(Φ, δ) -MONOTON DİZİLERİN TOPLANABİLME METOTLARINA UYGULAMALARI

Bu bölümde konveks ve (Φ, δ) monoton dizi tanımlarını kullanarak $|\bar{N}, p_n|_k$, $|D, p_n|_k$ ve $|D, p_n; \gamma|_k$ toplanabilme metotları ile alakalı teoremlerin ifadesi ve ispatı yapılacaktır.

3.1. $\sum a_n \mu_n$ Serisinin $|\bar{N}, p_n|_k$ Toplanabilmesi

İlk olarak konveks diziler kullanarak yapılmış olan Teorem 1.5.3 ü daha genel bir dizi olan (Φ, δ) -monoton diziler kullanılarak genelleştirilecek ve bir örnek verilecektir.

Teorem 3.1.1. (p_n) pozitif sayılarının bir dizisi (1.46) şartını sağlansın. (μ_n) dizisi $\sum \mu_n \Delta \Phi_n$ serisi yakınsak olan (Φ, δ) -monoton bir dizi olmak üzere $m \rightarrow \infty$ iken

$$\sum_{n=1}^m n |\Delta^2 \mu_n| \Phi_n = O(1) \quad (3.1)$$

ve

$$\sum_{n=1}^m \frac{p_n}{P_n} |\bar{h}_n|^k = O(\Phi_m) \quad (3.2)$$

şartlarını sağlarsa, $\sum a_n \mu_n$ serisi $k \geq 1$ için $|\bar{N}, p_n|_k$ toplanabilirdir [51].

Eğer $\mu_n = \frac{2^{(-1)^n}}{n^4}$ ve $\Phi_n = \log n$ seçilirse, Teorem 3.1.1 in tüm şartları sağlanır fakat

Teorem 1.5.3 ün şartları sağlanmaz.

Lemma 3.1.2 Teoremin şartları altında

$$n \Phi_n |\Delta \mu_n| = O(1), n \rightarrow \infty \quad (3.3)$$

dir [51].

Lemma 3.1.2 nin ispatı: $(n\Phi_n)$, pozitif monoton artan dizi olduğundan ve (3.1) kullanılarak

$$n\Phi_n |\Delta\mu_n| = n\Phi_n \left| \sum_{j=n}^{\infty} \Delta(\Delta\mu_j) \right| \leq \sum_{j=n}^{\infty} j\Phi_j |\Delta^2\mu_j| < \infty$$

bulunur.

Buradan $n \rightarrow \infty$ iken $n\Phi_n |\Delta\mu_n| = O(1)$ elde edilir.

Teorem 3.1.1 in ispatı: $\sum a_n \mu_n$ serisinin (\bar{N}, p_n) ortalamasını I_n ile gösterelim. İndis değişimi kullanılarak

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{P_n} \sum_{r=0}^n p_r \sum_{i=0}^r a_i \mu_i = \frac{1}{P_n} \sum_{i=0}^n a_i \mu_i \sum_{r=i}^n p_r \\ &= \frac{1}{P_n} \sum_{r=0}^n a_r \mu_r (P_n - P_{r-1}) \end{aligned} \quad (3.4)$$

bulunur. Şimdi $n \geq 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \bar{\Delta} I_n &= I_n - I_{n-1} = \frac{1}{P_n} \sum_{r=1}^n (P_n - P_{r-1}) a_r \mu_r - \frac{1}{P_{n-1}} \sum_{r=1}^{n-1} (P_{n-1} - P_{r-1}) a_r \mu_r \\ &= \left(-\frac{1}{P_n} + \frac{1}{P_{n-1}} \right) \sum_{r=1}^n P_{r-1} a_r \mu_r \\ &= \frac{P_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{r=1}^n \frac{P_{r-1} \mu_r}{r} r a_r \end{aligned} \quad (3.5)$$

elde edilir. Buradan da Abel dönüşümünden faydalanılırsa

$$\bar{\Delta} I_n = \frac{P_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{r=1}^{n-1} \Delta \left(\frac{P_{r-1} \mu_r}{r} \right) \sum_{i=1}^r i a_i + \frac{P_n \mu_n}{n P_n} \sum_{i=1}^n i a_i$$

bulunur. Ayrıca (1.9) dan $(n+1)h_n = \sum_{i=1}^n i a_i$ olduğundan

$$\bar{\Delta} I_n = \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{r=1}^{n-1} \Delta \left(\frac{P_{r-1} \mu_r}{r} \right) (r+1) \hbar_r + \frac{p_n \mu_n}{n P_n} (n+1) \hbar_n$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned} \Delta \left(\frac{P_{r-1} \mu_r}{r} \right) &= \frac{P_{r-1} \mu_r}{r} - \frac{P_r \mu_{r+1}}{r+1} \\ &= \frac{(r+1) P_{r-1} \mu_r - r P_r \mu_{r+1}}{r(r+1)} \\ &= \frac{(r+1) P_{r-1} \mu_r - r P_r \mu_{r+1} + (r+1) P_r \mu_r - (r+1) P_r \mu_r}{r(r+1)} \\ &= \frac{(r+1) P_{r-1} \mu_r - r P_r \mu_{r+1} - (r+1) P_r \mu_r + (r+1) P_r \mu_r - P_r \mu_{r+1} + P_r \mu_{r+1}}{r(r+1)} \\ &= \frac{P_r \Delta \mu_r}{r} - \frac{p_r \mu_r}{r} + \frac{P_r \mu_{r+1}}{r(r+1)} \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} \bar{\Delta} I_n &= \left(\frac{n+1}{n} \right) \frac{p_n}{P_n} \mu_n \hbar_n - \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{r=1}^{n-1} \frac{r+1}{r} p_r \mu_r \hbar_r + \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{r=1}^{n-1} \frac{r+1}{r} P_r \Delta \mu_r \hbar_r \\ &\quad + \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{r=1}^{n-1} P_r \mu_{r+1} \frac{\hbar_r}{r} \\ &= I_{n,1} + I_{n,2} + I_{n,3} + I_{n,4} \end{aligned}$$

bulunur. $\omega = 1, 2, 3, 4$ olmak üzere teoremin ispatı için Minkovski eşitsizliğinden yararlanarak

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} |I_{n,\omega}|^k < \infty$$

olduğunun gösterilmesi yeterlidir.

Öncelikle $\frac{n+1}{n}$ in sınırlı olduğu, (μ_n) dizisinin (Φ, δ) monoton ve $\mu_n \rightarrow 0$ şartından

μ_n^{k-1} dizisinin sınırlı olacağı kullanılırsa

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^m \left(\frac{P_n}{P_n} \right)^{k-1} |I_{n,1}|^k &= O(1) \sum_{n=1}^m \frac{P_n}{P_n} |\mu_n \mu_n^{k-1}| |\hbar_n|^k \\ &= O(1) \sum_{n=1}^m \frac{P_n}{P_n} |\mu_n| |\hbar_n|^k \end{aligned}$$

bulunur. $\Delta|\mu_n| \leq |\Delta\mu_n|$ olmak üzere bu toplama Abel dönüşümü uygulandığında

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^m \left(\frac{P_n}{P_n} \right)^{k-1} |I_{n,1}|^k &= O(1) \sum_{n=1}^{m-1} \Delta|\mu_n| \sum_{j=1}^n \frac{P_j}{P_j} |\hbar_j|^k + O(1) |\mu_m| \sum_{j=1}^m \frac{P_j}{P_j} |\hbar_j|^k \\ &= O(1) \sum_{n=1}^{m-1} |\Delta\mu_n| \sum_{j=1}^n \frac{P_j}{P_j} |\hbar_j|^k + O(1) \mu_m \sum_{j=1}^m \frac{P_j}{P_j} |\hbar_j|^k \end{aligned}$$

elde edilir. (3.2) şartı ve Lemma 1.5.10 kullanılırsa, $m \rightarrow \infty$ iken

$$\sum_{n=1}^m \left(\frac{P_n}{P_n} \right)^{k-1} |I_{n,1}|^k = O(1) \sum_{n=1}^{m-1} |\Delta\mu_n| \Phi_n + O(1) \mu_m \Phi_m = O(1)$$

olur.

İkinci olarak Hölder eşitsizliğinden faydalanır ve toplamların sırası değiştirilirse

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{P_n} \right)^{k-1} |I_{n,2}|^k &= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \frac{P_n}{P_n P_{n-1}} \left\{ \sum_{r=1}^{n-1} P_r |\hbar_r|^k |\mu_r|^k \right\} \times \left\{ \frac{1}{P_{n-1}} \sum_{r=1}^{n-1} P_r \right\}^{k-1} \\ &= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \frac{P_n}{P_n P_{n-1}} \left\{ \sum_{r=1}^{n-1} P_r |\hbar_r|^k |\mu_r|^k \right\} \\ &= O(1) \sum_{r=1}^m |\mu_r|^{k-1} |\mu_r| P_r |\hbar_r|^k \sum_{n=r+1}^{m+1} \frac{P_n}{P_n P_{n-1}} \end{aligned}$$

bulunur. Burada

$$\sum_{n=r+1}^{m+1} \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} = \sum_{n=r+1}^{m+1} \left(\frac{1}{P_{n-1}} - \frac{1}{P_n} \right) \leq \frac{1}{P_r} \quad (3.6)$$

ve teoremin hipotezi gereğince (μ_n) dizisinin tanımından $\mu_n^{k-1} = O(1)$ olacağından

$$\sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} |I_{n,2}|^k = O(1) \sum_{r=1}^m |\mu_r| \frac{p_r}{P_r} |\hbar_r|^k$$

bulunur. Bu son ifadeye Abel dönüşümü uygulandığında

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^m \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} |I_{n,2}|^k &= O(1) \sum_{r=1}^{m-1} \Delta |\mu_r| \sum_{j=1}^r \frac{p_j}{P_j} |\hbar_j|^k + O(1) |\mu_m| \sum_{j=1}^m \frac{p_j}{P_j} |\hbar_j|^k \\ &= O(1) \sum_{r=1}^{m-1} |\Delta \mu_r| \sum_{j=1}^r \frac{p_j}{P_j} |\hbar_j|^k + O(1) \mu_m \sum_{j=1}^m \frac{p_j}{P_j} |\hbar_j|^k \end{aligned}$$

elde edilir. (3.2) şartından ve Lemma 1.5.10 dan yararlanılırsa, $m \rightarrow \infty$ iken

$$\sum_{n=1}^m \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} |I_{n,2}|^k = O(1) \sum_{n=1}^{m-1} |\Delta \mu_n| \Phi_n + O(1) \mu_m \Phi_m = O(1)$$

elde edilir.

(1.46) şartı kullanıldığında

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} |I_{n,3}|^k &= \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} \left(\frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \right)^k \left| \sum_{r=1}^{n-1} \frac{r+1}{r} P_r \Delta \mu_r \hbar_r \right|^k \\ &= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \frac{P_n}{P_n P_{n-1}^k} \left\{ \sum_{r=1}^{n-1} P_r |\Delta \mu_r| |\hbar_r| \right\}^k \\ &= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \frac{P_n}{P_n P_{n-1}^k} \left\{ \sum_{r=1}^{n-1} r P_r |\Delta \mu_r| |\hbar_r| \right\}^k \end{aligned}$$

bulunur. Yukarıdaki bu son ifade de Hölder eşitsizliğinden faydalanılırsa

$$\sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} |I_{n,3}|^k = O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \frac{P_n}{P_n P_{n-1}} \left\{ \sum_{r=1}^{n-1} r p_r |\Delta \mu_r| |\hbar_r|^k \right\} \times \left\{ \frac{1}{P_{n-1}} \sum_{r=1}^{n-1} r p_r |\Delta \mu_r| \right\}^{k-1}$$

elde edilir. Lemma 3.12 den $r|\Delta \mu_r| = O\left(\frac{1}{\Phi_r}\right) = O(1)$ olacağından

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} |I_{n,3}|^k &= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \frac{P_n}{P_n P_{n-1}} \left\{ \sum_{r=1}^{n-1} r p_r |\Delta \mu_r| |\hbar_r|^k \right\} \times \left\{ \frac{1}{P_{n-1}} \sum_{r=1}^{n-1} p_r \right\}^{k-1} \\ &= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \frac{P_n}{P_n P_{n-1}} \left\{ \sum_{r=1}^{n-1} r p_r |\Delta \mu_r| |\hbar_r|^k \right\} \end{aligned}$$

olur. İndis değişiminden ve (3.6) eşitsizliğinden faydalanarak

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} |I_{n,3}|^k &= O(1) \sum_{r=1}^m r p_r |\Delta \mu_r| |\hbar_r|^k \sum_{n=r+1}^{m+1} \frac{P_n}{P_n P_{n-1}} \\ &= O(1) \sum_{r=1}^m r |\Delta \mu_r| \frac{p_r}{P_r} |\hbar_r|^k \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \Delta(r|\Delta \Phi_r|) &= r|\Delta \Phi_r| - (r+1)|\Delta \Phi_{r+1}| = r(|\Delta \Phi_r| - |\Delta \Phi_{r+1}|) - |\Delta \Phi_{r+1}| \\ &\leq r|\Delta^2 \Phi_r| + |\Delta \Phi_{r+1}| \end{aligned} \tag{3.7}$$

eşitsizliğinden faydalanarak elde edilen son toplama Abel kısmi toplam formülü uygulanırsa (3.2) şartından

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} |I_{n,3}|^k &= O(1) \sum_{r=1}^{m-1} \Delta(r|\Delta \mu_r|) \sum_{j=1}^r \frac{p_j}{P_j} |\hbar_j|^k + O(1) m |\Delta \mu_m| \sum_{j=1}^m \frac{p_j}{P_j} |\hbar_j|^k \\ &= O(1) \sum_{r=1}^{m-1} r |\Delta^2 \mu_r| \Phi_r + O(1) \sum_{r=1}^{m-1} |\Delta \mu_r| \Phi_{r+1} + O(1) m |\Delta \mu_m| \Phi_m \end{aligned}$$

olur. Son ifade de (1.58), (3.1) ve (3.3) şartları kullanılırsa, $m \rightarrow \infty$ iken

$$\sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} |I_{n,3}|^k = O(1)$$

elde edilir.

Son olarak $P_r = O(rp_r)$ şartı ve Hölder eşitsizliğinden faydalanılırsa

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} |I_{n,4}|^k &= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \frac{P_n}{P_n P_{n-1}^k} \left\{ \sum_{r=1}^{n-1} \frac{P_r}{r} |\mu_{r+1}| |\hbar_r| \right\}^k \\ &= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \frac{P_n}{P_n P_{n-1}^k} \left\{ \sum_{r=1}^{n-1} p_r |\mu_{r+1}| |\hbar_r| \right\}^k \\ &= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \frac{P_n}{P_n P_{n-1}^k} \left\{ \sum_{r=1}^{n-1} p_r |\mu_{r+1}|^k |\hbar_r|^k \right\} \times \left\{ \frac{1}{P_{n-1}} \sum_{r=1}^{n-1} p_r \right\}^{k-1} \\ &= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \frac{P_n}{P_n P_{n-1}^k} \sum_{r=1}^{n-1} p_r |\mu_{r+1}|^k |\hbar_r|^k \end{aligned}$$

bulunur. Bu ifadeye indis değişimi uygulamak suretiyle (3.6) eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} |I_{n,4}|^k &= O(1) \sum_{r=1}^m |\mu_{r+1}|^{k-1} |\mu_{r+1}| p_r |\hbar_r|^k \sum_{n=r+1}^{m+1} \frac{P_n}{P_n P_{n-1}^k} \\ &= O(1) \sum_{r=1}^m |\mu_{r+1}| \frac{p_r}{P_r} |\hbar_r|^k \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan sonra $I_{n,1}$ in ispatında olduğu gibi ilerlenirse, $m \rightarrow \infty$ iken

$$\sum_{n=1}^m \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} |I_{n,4}|^k = O(1)$$

bulunur. Böylece teoremimizin ispatı da tamamlanmış olur.

3.2. $\sum a_n \varepsilon_n$ Serisinin $|D, p_n|_k$ Toplanabilmesi

(Φ, δ) -monoton diziler yardımıyla serilerin matris toplanabilirliği ile ilgili aşağıdaki teorem verilir ve ispatlanacaktır. Ayrıca Fourier serileri üzerine teoremin bir uygulaması verilecektir.

Teorem 3.2.1. (1.42)-(1.45) şartlarını sağlamak üzere pozitif normal bir matrisi $D = (d_{nr})$ verilsin. Ek olarak, $n \rightarrow \infty$ iken $\varepsilon_n \rightarrow 0$ ve (μ_n) dizisi $|\Delta \varepsilon_n| \leq \frac{\mu_n}{n}$ olmak üzere $\sum \mu_n \Phi_n$ yakınsak olacak şekilde bir (Φ, δ) -monoton dizi olsun. Eğer (1.46) şartı ve

$$\sum_{n=1}^m \frac{p_n}{P_n} |\bar{h}_n|^k = O\left(\frac{\Phi_m}{m}\right), \quad m \rightarrow \infty \quad (3.8)$$

şartını sağlayan $\sum a_n \varepsilon_n$ serisi $k \geq 1$ için $|D, p_n|_k$ toplanabilirdir [52].

Lemma 3.2.2. Teorem 3.2.1 in şartları altında, $n \rightarrow \infty$ iken

$$|\varepsilon_n| \Phi_n = O(1) \quad (3.9)$$

olur [52].

Lemma 3.2.2 nin ispatı: $n \rightarrow \infty$ iken $\varepsilon_n \rightarrow 0$ olduğundan

$$|\varepsilon_n| \Phi_n = \left| \sum_{r=n}^{\infty} \Delta \varepsilon_r \right| \Phi_n \leq \Phi_n \sum_{r=n}^{\infty} |\Delta \varepsilon_r|$$

olur. (Φ_n) dizisinin artan olduğu ve hipotezden her n için $|\Delta \varepsilon_n| \leq \mu_n$ eşitsizliğinden faydalanılırsa

$$|\varepsilon_n| \Phi_n \leq \sum_{r=0}^{\infty} \Phi_r |\Delta \varepsilon_r| \leq \sum_{r=0}^{\infty} \Phi_r \mu_r < \infty$$

elde edilir.

Lemma 3.2.3. Eğer (μ_n) dizisi $\sum \mu_n \Phi_n$ yakınsak olacak şekilde (Φ, δ) -monoton dizi ise

$$\Phi_n \mu_n = o(1), \quad n \rightarrow \infty \quad (3.10)$$

ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n |\Delta \mu_n| < \infty \quad (3.11)$$

olur [52].

Lemma 3.2.3 ün ispatı: $\sum \mu_n \Phi_n$ yakınsak olduğundan genel terimi $\mu_n \Phi_n = o(1)$ olduğu açıktır.

Diğer taraftan $\Phi_n |\Delta \mu_n| \leq \Phi_n (|\mu_n| + |\mu_{n+1}|) \leq 2\Phi_n \max\{|\mu_n|, |\mu_{n+1}|\}$ olduğundan $m \rightarrow \infty$ iken

$$\sum_{n=1}^m \Phi_n |\Delta \mu_n| = O(1) \sum_{n=1}^m 2\Phi_n \max\{|\mu_n|, |\mu_{n+1}|\} = O(1)$$

bulunur.

Teorem 3.2.1 in ispatı: $(\bar{\mathcal{U}}_n)$ dizisi $\sum a_n \varepsilon_n$ serisi için D dönüşümünü gösterebilirsin. (1.40) ve (1.41) den indis değişimi uygulanarak

$$\bar{\mathcal{U}}_n = \sum_{r=0}^n d_{nr} \sum_{i=0}^r a_i \varepsilon_i = \sum_{i=0}^n a_i \varepsilon_i \sum_{r=i}^n d_{nr} = \sum_{i=0}^n a_i \varepsilon_i \bar{d}_{ni} = \sum_{r=0}^n a_r \varepsilon_r \bar{d}_{nr}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \Delta \bar{\mathcal{U}}_n &= \sum_{r=0}^n a_r \varepsilon_r \bar{d}_{nr} - \sum_{r=0}^{n-1} a_r \varepsilon_r \bar{d}_{n-1,r} = \sum_{r=0}^{n-1} a_r \varepsilon_r (\bar{d}_{nr} - \bar{d}_{n-1,r}) + a_n \varepsilon_n \bar{d}_{nn} \\ &= \sum_{r=0}^n a_r \varepsilon_r \hat{d}_{nr} = \sum_{r=1}^n \frac{a_r \varepsilon_r \hat{d}_{nr}}{r} \end{aligned} \quad (3.12)$$

elde edilir. Diğer taraftan yukarıdaki toplam için Abel dönüşümü uygulanırsa

$$\bar{\Delta}\bar{\mathfrak{U}}_n = \sum_{r=1}^{n-1} \Delta_r \left(\frac{\varepsilon_r \hat{d}_{nr}}{r} \right) \sum_{i=1}^r ia_i + \frac{\hat{d}_m \varepsilon_n}{n} \sum_{i=1}^n ia_i$$

olur. Burada

$$\begin{aligned} \Delta_r \left(\frac{\hat{d}_{nr} \varepsilon_r}{r} \right) &= \frac{\hat{d}_{nr} \varepsilon_r}{r} - \frac{\hat{d}_{n,r+1} \varepsilon_{r+1}}{r+1} = \frac{(r+1)\hat{d}_{nr} \varepsilon_r - r\hat{d}_{n,r+1} \varepsilon_{r+1}}{r(r+1)} \\ &= \frac{(r+1)\hat{d}_{nr} \varepsilon_r - (r+1)\hat{d}_{n,r+1} \varepsilon_r + (r+1)\hat{d}_{n,r+1} \varepsilon_r - r\hat{d}_{n,r+1} \varepsilon_{r+1} + \hat{d}_{n,r+1} \varepsilon_{r+1} - \hat{d}_{n,r+1} \varepsilon_{r+1}}{r(r+1)} \\ &= \frac{(r+1)\Delta_r(\hat{d}_{nr}) \varepsilon_r + (r+1)\hat{d}_{n,r+1} \Delta \varepsilon_r + \hat{d}_{n,r+1} \varepsilon_{r+1}}{r(r+1)} \end{aligned}$$

olduğundan ve $\hbar_n = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n ia_i$ eşitliğinden

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}\bar{\mathfrak{U}}_n &= \sum_{r=1}^{n-1} \Delta_r \left(\frac{\varepsilon_r \hat{d}_{nr}}{r} \right) (r+1)\hbar_r + \frac{\hat{d}_m \varepsilon_n}{n} (n+1)\hbar_n \\ &= \left(\frac{n+1}{n} \right) d_{mn} \varepsilon_n \hbar_n + \sum_{r=1}^{n-1} \frac{(r+1)}{r} \Delta_r(\hat{d}_{nr}) \varepsilon_r \hbar_r \\ &\quad + \sum_{r=1}^{n-1} \frac{(r+1)}{r} \hat{d}_{n,r+1} \Delta_r(\varepsilon_r) \hbar_r + \sum_{r=1}^{n-1} \hat{d}_{n,r+1} \varepsilon_{r+1} \frac{\hbar_r}{r} \\ &= \bar{\mathfrak{U}}_{n,1} + \bar{\mathfrak{U}}_{n,2} + \bar{\mathfrak{U}}_{n,3} + \bar{\mathfrak{U}}_{n,4} \end{aligned}$$

elde edilir. $\ell = 1, 2, 3, 4$ olmak üzere teoremin ispatının tamamlanması için

$$\left| \bar{\mathfrak{U}}_{n,1} + \bar{\mathfrak{U}}_{n,2} + \bar{\mathfrak{U}}_{n,3} + \bar{\mathfrak{U}}_{n,4} \right|^k \leq 4^k \left(\left| \bar{\mathfrak{U}}_{n,1} \right|^k + \left| \bar{\mathfrak{U}}_{n,2} \right|^k + \left| \bar{\mathfrak{U}}_{n,3} \right|^k + \left| \bar{\mathfrak{U}}_{n,4} \right|^k \right)$$

eşitsizliği kullanılarak

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} \left| \bar{\mathfrak{U}}_{n,\ell} \right|^k < \infty$$

olduğunun gösterilmesi yeterli olacaktır.

Öncelikle $\frac{n+1}{n}$ sınırlı ve hipotezin $\varepsilon_n \rightarrow 0$ şartından $|\varepsilon_n| = O(1)$ olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^m \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} |\mathfrak{V}_{n,1}|^k &= \sum_{n=1}^m \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} \left| \frac{n+1}{n} d_{nm} \varepsilon_n \hbar_n \right|^k \\ &= O(1) \sum_{n=1}^m \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} d_{nm}^k |\varepsilon_n|^k |\hbar_n|^k \\ &= O(1) \sum_{n=1}^m \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} d_{nm}^k |\varepsilon_n|^{k-1} |\varepsilon_n| |\hbar_n|^k \\ &= O(1) \sum_{n=1}^m \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} d_{nm}^k |\varepsilon_n| |\hbar_n|^k \end{aligned}$$

olur. Burada (1.44) şartından $d_{nm} = O\left(\frac{p_n}{P_n}\right)$ olduğu ve Abel kısmi toplam formülü uygulanarak

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^m \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} |\mathfrak{V}_{n,1}|^k &= O(1) \sum_{n=1}^m \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} \left(\frac{p_n}{P_n} \right)^k |\varepsilon_n| |\hbar_n|^k \\ &= O(1) \sum_{n=1}^m \frac{p_n}{P_n} |\varepsilon_n| |\hbar_n|^k \\ &= O(1) \sum_{n=1}^{m-1} \Delta |\varepsilon_n| \left| \sum_{i=1}^n \frac{p_i}{P_i} \hbar_i \right|^k + O(1) |\varepsilon_m| \left| \sum_{i=1}^m \frac{p_i}{P_i} \hbar_i \right|^k \end{aligned}$$

elde edilir. $\Delta |\varepsilon_n| \leq |\Delta \varepsilon_n| \leq \frac{\mu_n}{n}$ ve (3.8) şartından

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^m \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} |\mathfrak{V}_{n,1}|^k &= O(1) \sum_{n=1}^{m-1} |\Delta \varepsilon_n| \left| \sum_{i=1}^n \frac{p_i}{P_i} \hbar_i \right|^k + O(1) |\varepsilon_m| \left| \sum_{i=1}^m \frac{p_i}{P_i} \hbar_i \right|^k \\ &= O(1) \sum_{n=1}^{m-1} |\Delta \varepsilon_n| \frac{\Phi_n}{n} + O(1) |\varepsilon_m| \frac{\Phi_m}{m} \end{aligned}$$

$$= O(1) \sum_{n=1}^{m-1} \mu_n \Phi_n + O(1) |\varepsilon_m| \Phi_m$$

bulunur. (3.9) dan dolayı, $m \rightarrow \infty$ iken

$$\sum_{n=1}^m \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} |\mathfrak{V}_{n,1}|^k = O(1)$$

elde edilir.

İkinci olarak $\ell = 2$ durumu için Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} |\mathfrak{V}_{n,2}|^k &= \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} \left| \sum_{r=1}^{n-1} \frac{r+1}{r} \Delta(\hat{d}_{nr}) \varepsilon_r \hat{h}_r \right|^k \\ &= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} \left(\sum_{r=1}^{n-1} |\Delta(\hat{d}_{nr})| |\varepsilon_r| |\hat{h}_r| \right)^k \\ &= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} \left(\sum_{r=1}^{n-1} |\Delta(\hat{d}_{nr})| |\varepsilon_r|^k |\hat{h}_r|^k \right) \times \left(\sum_{r=1}^{n-1} |\Delta(\hat{d}_{nr})| \right)^{k-1} \end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan \bar{D} ve \hat{D} matrislerinin tanımından

$$\begin{aligned} \Delta_r(\hat{d}_{nr}) &= \hat{d}_{nr} - \hat{d}_{n,r+1} = \bar{d}_{nr} - \bar{d}_{n-1,r} - \bar{d}_{n,r+1} + \bar{d}_{n-1,r+1} \\ &= \sum_{i=r}^n d_{ni} - \sum_{i=r}^{n-1} d_{ni} - \sum_{i=r+1}^n d_{ni} + \sum_{i=r+1}^{n-1} d_{ni} = d_{nr} - d_{n-1,r} \end{aligned} \quad (3.13)$$

dir. Ayrıca (1.42) den $\bar{d}_{n0} = 1$ ve (1.43) ten $n \geq r+1$ için $d_{n-1,r} \geq d_{nr}$ olduğundan

$$\sum_{r=1}^{n-1} |\Delta_r(\hat{d}_{nr})| = \sum_{r=1}^{n-1} |d_{nr} - d_{n-1,r}| = \sum_{r=1}^{n-1} (d_{n-1,r} - d_{nr}) = 1 - d_{n0} - 1 + d_{n0} + d_{nn} \leq d_{nn} \quad (3.14)$$

elde edilir. (3.14) eşitsizliği ve (1.44) şartından $d_{nn} = O\left(\frac{P_n}{p_n}\right)$ olduğu kullanılarak

$$\sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} |\mathfrak{V}_{n,2}|^k = O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} d_{nn}^{k-1} \left(\sum_{r=1}^{n-1} |\Delta_r(\hat{d}_{nr})| |\varepsilon_r|^k |\hat{h}_r|^k \right)$$

$$\begin{aligned}
&= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} \left(\frac{p_n}{P_n} \right)^{k-1} \left(\sum_{r=1}^{n-1} \left| \Delta_r(\hat{d}_{nr}) \right| |\varepsilon_r|^k |\hat{h}_r|^k \right) \\
&= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \sum_{r=1}^{n-1} \left| \Delta_r(\hat{d}_{nr}) \right| |\varepsilon_r|^k |\hat{h}_r|^k
\end{aligned}$$

bulunur. Burada hipotezin $\varepsilon_n \rightarrow 0$ şartından $|\varepsilon_n| = O(1)$ ve indis değişimi uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} |\bar{\mathfrak{U}}_{n,2}|^k &= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \sum_{r=1}^{n-1} \left| \Delta(\hat{d}_{nr}) \right| |\varepsilon_r|^{k-1} |\varepsilon_r| |\hat{h}_r|^k \\
&= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \sum_{r=1}^{n-1} \left| \Delta(\hat{d}_{nr}) \right| |\varepsilon_r| |\hat{h}_r|^k \\
&= O(1) \sum_{r=1}^m |\varepsilon_r| |\hat{h}_r|^k \sum_{n=r+1}^{m+1} \left| \Delta_r(\hat{d}_{nr}) \right|
\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca (3.13) ten $\Delta_r(\hat{d}_{nr}) = d_{nr} - d_{n-1,r}$ ve (1.43) şartından

$$\begin{aligned}
\sum_{n=r+1}^{m+1} \left| \Delta_r(\hat{d}_{nr}) \right| &= \sum_{n=r+1}^{m+1} |d_{nr} - d_{n-1,r}| = \sum_{n=r+1}^{m+1} (d_{n-1,r} - d_{nr}) \\
&\leq d_{rr} - d_{m+1,r} \leq d_{rr}
\end{aligned} \tag{3.15}$$

olduğundan ve (1.44) şartından $d_{nn} = O\left(\frac{p_n}{P_n}\right)$ olduğundan dolayı

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} |\bar{\mathfrak{U}}_{n,2}|^k &= O(1) \sum_{r=1}^m |\varepsilon_r| |\hat{h}_r|^k d_{rr} \\
&= O(1) \sum_{r=1}^m |\varepsilon_r| |\hat{h}_r|^k \frac{p_r}{P_r}
\end{aligned}$$

bulunur. Burada $\bar{\mathfrak{U}}_{n,1}$ in ispatında olduğu gibi ilerlenirse, $m \rightarrow \infty$ iken

$$\sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} |\mathfrak{V}_{n,2}|^k = O(1)$$

bulunur.

(1.45) şartından $|\hat{d}_{n,r+1}| = O(r|\Delta_r \hat{d}_{nr}|)$ ve $|\Delta \varepsilon_r| \leq \frac{\mu_r}{r}$ olduğundan

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} |\mathfrak{V}_{n,3}|^k &= \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} \left| \sum_{r=1}^{n-1} \frac{(r+1)}{r} \hat{d}_{n,r+1} \Delta(\varepsilon_r) \hbar_r \right|^k \\ &= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} \left\{ \sum_{r=1}^{n-1} |\hat{d}_{n,r+1}| |\Delta \varepsilon_r| |\hbar_r| \right\}^k \\ &= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} \left\{ \sum_{r=1}^{n-1} r |\Delta_r(\hat{d}_{nr})| |\Delta \varepsilon_r| |\hbar_r| \right\}^k \\ &= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} \left\{ \sum_{r=1}^{n-1} r |\Delta_r(\hat{d}_{nr})| \frac{\mu_r}{r} |\hbar_r| \right\}^k \end{aligned}$$

bulunur. Bu ifadeye hipotezin $\varepsilon_n \rightarrow 0$ şartından $|\varepsilon_n| = O(1)$ olduğu kullanılıp ardından Hölder eşitsizliğinden faydalanılırsa

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} |\mathfrak{V}_{n,3}|^k &= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} \left\{ \sum_{r=1}^{n-1} |\Delta_r(\hat{d}_{nr})| \mu_r |\hbar_r| \right\}^k \\ &= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} \left\{ \sum_{r=1}^{n-1} |\Delta_r(\hat{d}_{nr})| \mu_r |\hbar_r|^k \right\} \times \left\{ \sum_{r=1}^{n-1} |\Delta_r(\hat{d}_{nr})| \mu_r \right\}^{k-1} \\ &= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} \left\{ \sum_{r=1}^{n-1} |\Delta_r(\hat{d}_{nr})| \mu_r |\hbar_r|^k \right\} \times \left\{ \sum_{r=1}^{n-1} |\Delta_r(\hat{d}_{nr})| \right\}^{k-1} \end{aligned}$$

elde edilir. (3.14) ten $\sum_{r=1}^{n-1} |\Delta_r(\hat{d}_{nr})| \leq d_{nm}$ eşitsizliği ve (1.44) şartından $d_{nm} = O\left(\frac{p_n}{P_n}\right)$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} |\mathfrak{U}_{n,3}|^k &= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} d_{nn}^{k-1} \sum_{r=1}^{n-1} |\Delta_r(\hat{d}_{nr})| \mu_r |\hbar_r|^k \\
&= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} \left(\frac{p_n}{P_n} \right)^{k-1} \left\{ \sum_{r=1}^{n-1} |\Delta_r(\hat{d}_{nr})| \mu_r |\hbar_r|^k \right\} \\
&= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \left\{ \sum_{r=1}^{n-1} |\Delta_r(\hat{d}_{nr})| \mu_r |\hbar_r|^k \right\}
\end{aligned}$$

bulunur. İndis değişimi kullanılıp (3.15) şartından $\sum_{n=r+1}^{m+1} |\Delta_r(\hat{d}_{nr})| \leq d_{rr}$ eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} |\mathfrak{U}_{n,3}|^k &= O(1) \sum_{r=1}^m \mu_r |\hbar_r|^k \sum_{n=r}^{m+1} |\Delta_r(\hat{d}_{nr})| \\
&= O(1) \sum_{r=1}^m \mu_r |\hbar_r|^k d_{rr} \\
&= O(1) \sum_{r=1}^m \mu_r |\hbar_r|^k \frac{p_r}{P_r}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan Abel dönüşümü ile (3.8) şartı uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} |\mathfrak{U}_{n,3}|^k &= O(1) \sum_{r=1}^{m-1} |\Delta_r \mu_r| \sum_{i=1}^r \frac{p_i}{P_i} |\hbar_i|^k + O(1) \mu_m \sum_{i=1}^m \frac{p_i}{P_i} |\hbar_i|^k \\
&= O(1) \sum_{r=1}^{m-1} |\Delta \mu_r| \Phi_r + O(1) \mu_m \Phi_m
\end{aligned}$$

bulunur. Bu ifadeye (3.10) ve (3.11) şartları uygulanırsa, $m \rightarrow \infty$ iken

$$\sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} |\mathfrak{U}_{n,3}|^k = O(1)$$

elde edilir.

$\ell = 4$ durumunda ise (1.45) şartından $|\hat{d}_{n,r+1}| = O\left(r|\Delta_r \hat{d}_{nr}|\right)$ olduğundan

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1} |\mathfrak{V}_{n,4}|^k &= \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1} \left| \sum_{r=1}^{n-1} \hat{d}_{n,r+1} \varepsilon_{r+1} \frac{\hbar_r}{r} \right|^k \\ &\leq \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1} \left(\sum_{r=1}^{n-1} |\hat{d}_{n,r+1}| |\varepsilon_{r+1}| \frac{|\hbar_r|}{r} \right)^k \\ &= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1} \left(\sum_{r=1}^{n-1} r |\Delta_r \hat{d}_{nr}| |\varepsilon_r| \frac{|\hbar_r|}{r} \right)^k \end{aligned}$$

bulunur. Buradan hipotezin $\varepsilon_n \rightarrow 0$ şartından $|\varepsilon_n| = O(1)$ ve Hölder eşitsizliğinden faydalanarak

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1} |\mathfrak{V}_{n,4}|^k &= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1} \left(\sum_{r=1}^{n-1} |\Delta_r \hat{d}_{nr}| |\varepsilon_{r+1}| |\hbar_r| \right)^k \\ &= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1} \left(\sum_{r=1}^{n-1} |\Delta_r \hat{d}_{nr}| |\varepsilon_{r+1}| |\varepsilon_{r+1}|^{k-1} |\hbar_r|^k \right) \times \left(\sum_{r=1}^{n-1} |\Delta_r \hat{d}_{nr}| \right)^{k-1} \\ &= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1} \left(\sum_{r=1}^{n-1} |\Delta_r \hat{d}_{nr}| |\varepsilon_{r+1}| |\hbar_r|^k \right) \times \left(\sum_{r=1}^{n-1} |\Delta_r \hat{d}_{nr}| \right)^{k-1} \end{aligned}$$

olur. (3.14) ten $\sum_{r=1}^{n-1} |\Delta_r(\hat{d}_{nr})| \leq d_{nm}$ eşitsizliği ve (1.44) şartından $d_{nm} = O\left(\frac{P_n}{p_n}\right)$ olduğu

kullanılıp indis değişimi uygulanırsa

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1} |\mathfrak{V}_{n,4}|^k &= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1} \left(\sum_{r=1}^{n-1} |\Delta_r \hat{d}_{nr}| |\varepsilon_{r+1}| |\hbar_r|^k \right) d_{nm}^{k-1} \\ &= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1} \left(\sum_{r=1}^{n-1} |\Delta_r \hat{d}_{nr}| |\varepsilon_{r+1}| |\hbar_r|^k \right) \times \left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \left(\sum_{r=1}^{n-1} |\Delta_r \hat{d}_{nr}| |\varepsilon_{r+1}| |\hat{h}_r|^k \right) \\
&= O(1) \sum_{r=1}^m |\varepsilon_{r+1}| |\hat{h}_r|^k \sum_{n=r+1}^{m+1} |\Delta_r \hat{d}_{nr}|
\end{aligned}$$

bulunur. Şimdi (3.15) ten $\sum_{n=r+1}^{m+1} |\Delta_r(\hat{d}_{nr})| \leq d_{rr}$ eşitsizliği ve (1.44) şartından $d_m = O\left(\frac{p_n}{P_n}\right)$

olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1} |\mathfrak{U}_{n,4}|^k &= O(1) \sum_{r=1}^m |\varepsilon_{r+1}| |\hat{h}_r|^k d_{rr} \\
&= O(1) \sum_{r=1}^m |\varepsilon_{r+1}| |\hat{h}_r|^k \frac{p_r}{P_r}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da $\mathfrak{U}_{n,1}$ in ispatında olduğu gibi ilerlenirse, $m \rightarrow \infty$ iken

$$\sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1} |\mathfrak{U}_{n,4}|^k = O(1)$$

elde edilir.

Böylece Teorem 3.2.1 in ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 3.2.2. (1.22) deki gibi tanımlı f fonksiyonunun trigonometrik Fourier fonksiyonu (1.54) deki gibi tanımlansın.

Eğer $\psi_1(t) \in BV(0, \pi)$ ve (p_n) , (ε_n) , (μ_n) ve $D = (d_{nr})$ matrisi Teorem 3.2.1 in şartlarını sağlarsa $\sum C_n(x) \varepsilon_n$ serisi $k \geq 1$ için $|D, p_n|_k$ toplanabilirdir [52].

Teorem 3.2.2 nin ispatı: Teorem 1.5.8 den $\hat{h}_n(x) = O(1)$ olduğundan dolayı teoremin ispatı açıktır.

3.3. $\sum a_n \mu_n$ Serisinin $|D, p_n; \gamma|_k$ Toplanabilmesi

Burada Teorem 3.1.1 i $|D, p_n; \gamma|_k$ toplanabilmeye genelleştiren bir teoremin ifadesi ve ispatı verilecektir.

Teorem 3.3.1. $D = (d_{nr})$ matrisi (1.42)-(1.45) şartlarını ve $\gamma \geq 0$ için

$$\sum_{n=r+1}^{m+1} \left(\frac{P_n}{P_n} \right)^{\gamma k} |\Delta_r(\hat{d}_{nr})| = O \left(\left(\frac{P_r}{P_r} \right)^{\gamma k-1} \right) \quad (3.16)$$

şartını sağlayacak şekilde pozitif bir normal matris olsun. $k \geq 1$ için Teorem 3.1.1 in tüm şartları altında (3.2) şartı yerine

$$\sum_{n=1}^m \left(\frac{P_n}{P_n} \right)^{\gamma k-1} |\hat{h}_n|^k = O(\Phi_m), \quad m \rightarrow \infty \quad (3.17)$$

şartı sağlanıyorsa, $\sum a_n \mu_n$ serisi $|D, p_n; \gamma|_k$ toplanabilirdir [53].

Teorem 3.3.1 in ispatı: $\sum a_n \mu_n$ serisinin D dönüşümünü Θ_n ile gösterelim. (3.12) deki gibi benzer işlemlerle

$$\bar{\Delta} \Theta_n = \sum_{r=1}^n \frac{\hat{d}_{nr} \mu_r}{r} r a_r$$

olur. Buradan Abel dönüşümünden faydalanılırsa

$$\bar{\Delta} \Theta_n = \sum_{r=1}^{n-1} \Delta_r \left(\frac{\mu_r \hat{d}_{nr}}{r} \right) \sum_{j=1}^r j a_j + \frac{\hat{d}_{nn} \mu_n}{n} \sum_{j=1}^n j a_j$$

olur. Burada

$$\begin{aligned} \Delta_r \left(\frac{\hat{d}_{nr} \mu_r}{r} \right) &= \frac{\hat{d}_{nr} \mu_r}{r} - \frac{\hat{d}_{n,r+1} \mu_{r+1}}{r+1} = \frac{(r+1) \hat{d}_{nr} \mu_r - r \hat{d}_{n,r+1} \mu_{r+1}}{r(r+1)} \\ &= \frac{(r+1) \hat{d}_{nr} \mu_r - (r+1) \hat{d}_{n,r+1} \mu_r + (r+1) \hat{d}_{n,r+1} \mu_r - r \hat{d}_{n,r+1} \mu_{r+1} - \hat{d}_{n,r+1} \mu_{r+1} + \hat{d}_{n,r+1} \mu_{r+1}}{r(r+1)} \end{aligned}$$

$$= \frac{(r+1)\Delta_r(\hat{d}_{nr})\mu_r + (r+1)\hat{d}_{n,r+1}\Delta\mu_r + \hat{d}_{n,r+1}\mu_{r+1}}{r(r+1)}$$

olması nedeniyle

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}\Theta_n &= \sum_{r=1}^{n-1} \Delta_r \left(\frac{\mu_r \hat{d}_{nr}}{r} \right) (r+1)\hbar_r + \frac{\hat{d}_{nn}\mu_n}{n} (n+1)\hbar_n \\ &= \left(\frac{n+1}{n} \right) d_{nn}\mu_n \hbar_n + \sum_{r=1}^{n-1} \frac{(r+1)}{r} \Delta_r(\hat{d}_{nr})\mu_r \hbar_r \\ &\quad + \sum_{r=1}^{n-1} \frac{(r+1)}{r} \hat{d}_{n,r+1} \Delta_r(\mu_r) \hbar_r + \sum_{r=1}^{n-1} \hat{d}_{n,r+1} \mu_{r+1} \frac{\hbar_r}{r} \\ &= \Theta_{n,1} + \Theta_{n,2} + \Theta_{n,3} + \Theta_{n,4} \end{aligned} \tag{3.18}$$

elde edilir. $\omega = 1, 2, 3, 4$ olmak üzere teoremin ispatının tamamlanması için Minkowski eşitsizliğinden faydalanarak

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\gamma k + k - 1} |\Theta_{n,\omega}|^k < \infty$$

olduğunun gösterilmesi yeterli olacaktır.

Öncelikle $\frac{n+1}{n} = O(1)$ ve (1.44) şartından $d_{nn} = O\left(\frac{p_n}{P_n}\right)$ olduğundan

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^m \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\gamma k + k - 1} |\Theta_{n,1}|^k &= \sum_{n=1}^m \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\gamma k + k - 1} \left| \frac{n+1}{n} d_{nn} \mu_n \hbar_n \right|^k \\ &= O(1) \sum_{n=1}^m \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\gamma k + k - 1} d_{nn}^k |\mu_n|^k |\hbar_n|^k \\ &= O(1) \sum_{n=1}^m \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\gamma k + k - 1} \left(\frac{p_n}{P_n} \right)^k |\mu_n|^k |\hbar_n|^k \end{aligned}$$

$$= O(1) \sum_{n=1}^m \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\gamma k - 1} |\mu_n|^k |\tilde{h}_n|^k$$

bulunur. $\mu_n \rightarrow 0$ şartından $|\mu_n| = O(1)$ olduğundan dolayı

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^m \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\gamma k + k - 1} |\Theta_{n,1}|^k &= O(1) \sum_{n=1}^m \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\gamma k - 1} |\mu_n|^{k-1} |\mu_n| |\tilde{h}_n|^k \\ &= O(1) \sum_{n=1}^m \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\gamma k - 1} |\mu_n| |\tilde{h}_n|^k \end{aligned}$$

dir. Burada $\Delta|\mu_n| \leq |\Delta\mu_n|$ olduğu ve Abel dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^m \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\gamma k + k - 1} |\Theta_{n,1}|^k &= O(1) \sum_{n=1}^{m-1} \Delta|\mu_n| \sum_{i=1}^n \left(\frac{p_i}{P_i} \right)^{\gamma k - 1} |\tilde{h}_i|^k + O(1) |\mu_m| \sum_{i=1}^m \left(\frac{p_i}{P_i} \right)^{\gamma k - 1} |\tilde{h}_i|^k \\ &= O(1) \sum_{n=1}^{m-1} |\Delta\mu_n| \sum_{i=1}^n \left(\frac{p_i}{P_i} \right)^{\gamma k - 1} |\tilde{h}_i|^k + O(1) |\mu_m| \sum_{i=1}^m \left(\frac{p_i}{P_i} \right)^{\gamma k - 1} |\tilde{h}_i|^k \end{aligned}$$

bulunur. (3.17) şartından

$$\sum_{n=1}^m \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\gamma k + k - 1} |\Theta_{n,1}|^k = O(1) \sum_{n=1}^{m-1} |\Delta\mu_n| \Phi_n + O(1) |\mu_m| \Phi_m$$

bulunur. Lemma 1.5.10 un (1.57) ve (1.58) şartları kullanılırsa, $m \rightarrow \infty$ iken

$$\sum_{n=1}^m \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\gamma k + k - 1} |\Theta_{n,1}|^k = O(1)$$

sonucuna ulaşılır.

Şimdi, Hölder eşitsizliğinden faydalanılırsa

$$\sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\gamma k + k - 1} |\Theta_{n,2}|^k = \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\gamma k + k - 1} \left| \sum_{r=1}^{n-1} \frac{r+1}{r} \Delta_r(\hat{d}_{nr}) \mu_r \tilde{h}_r \right|^k$$

$$\begin{aligned}
&= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\gamma k + k - 1} \left(\sum_{r=1}^{n-1} \left| \Delta_r(\hat{d}_{nr}) \right| |\mu_r| |\hbar_r| \right)^k \\
&= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\gamma k + k - 1} \left(\sum_{r=1}^{n-1} \left| \Delta_r(\hat{d}_{nr}) \right| |\mu_r|^k |\hbar_r|^k \right) \times \left(\sum_{r=1}^{n-1} \left| \Delta_r(\hat{d}_{nr}) \right| \right)^{k-1}
\end{aligned}$$

bulunur. (3.14) ten $\sum_{r=1}^{n-1} \left| \Delta_r(\hat{d}_{nr}) \right| = O(d_{nm})$ ve (1.44) şartından $d_{nm} = O\left(\frac{P_n}{p_n}\right)$ olduğu

kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\gamma k + k - 1} \left| \Theta_{n,2} \right|^k &= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\gamma k + k - 1} \left(\sum_{r=1}^{n-1} \left| \Delta_r(\hat{d}_{nr}) \right| |\mu_r|^k |\hbar_r|^k \right) \times d_{nm}^{k-1} \\
&= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\gamma k} \left(\sum_{r=1}^{n-1} \left| \Delta_r(\hat{d}_{nr}) \right| |\mu_r|^k |\hbar_r|^k \right)
\end{aligned}$$

bulunur. İndis değişimi yapılarak $\mu_n \rightarrow 0$ şartından $|\mu_n| = O(1)$ olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\gamma k + k - 1} \left| \Theta_{n,2} \right|^k &= O(1) \sum_{r=1}^m |\mu_r|^k |\hbar_r|^k \sum_{n=r+1}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\gamma k} \left| \Delta_r(\hat{d}_{nr}) \right| \\
&= O(1) \sum_{r=1}^m |\mu_r|^{k-1} |\mu_r| |\hbar_r|^k \sum_{n=r+1}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\gamma k} \left| \Delta_r(\hat{d}_{nr}) \right| \\
&= O(1) \sum_{r=1}^m |\mu_r| |\hbar_r|^k \sum_{n=r+1}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\gamma k} \left| \Delta_r(\hat{d}_{nr}) \right|
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.16) şartından

$$\sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\gamma k + k - 1} \left| \Theta_{n,2} \right|^k = O(1) \sum_{r=1}^m |\mu_r| |\hbar_r|^k \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\gamma k - 1}$$

bulunur. $\Theta_{n,1}$ in ispatında olduğu gibi ilerlenirse $m \rightarrow \infty$ iken

$$\sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\gamma k + k - 1} \left| \Theta_{n,2} \right|^k = O(1)$$

sonucuna ulaşılır.

Şimdi (1.45) şartı kullanılıp daha sonra Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\gamma k+k-1} |\Theta_{n,3}|^k &= \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\gamma k+k-1} \left| \sum_{r=1}^{n-1} \frac{r+1}{r} \hat{d}_{n,r+1} \Delta \mu_r \hat{h}_r \right|^k \\
&= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\gamma k+k-1} \left(\sum_{r=1}^{n-1} \hat{d}_{n,r+1} |\Delta \mu_r| |\hat{h}_r| \right)^k \\
&= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\gamma k+k-1} \left(\sum_{r=1}^{n-1} r |\Delta_r(\hat{d}_{nr})| |\Delta \mu_r| |\hat{h}_r| \right)^k \\
&= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\gamma k+k-1} \left(\sum_{r=1}^{n-1} r |\Delta_r(\hat{d}_{nr})| |\Delta \mu_r| |\hat{h}_r|^k \right) \\
&\quad \times \left(\sum_{r=1}^{n-1} r |\Delta_r(\hat{d}_{nr})| |\Delta \mu_r| \right)^{k-1}
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan (3.3) ten $r |\Delta \mu_r| = O\left(\frac{1}{\Phi_r}\right) = O(1)$ olduğundan

$$\sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\gamma k+k-1} |\Theta_{n,3}|^k = O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\gamma k+k-1} \left(\sum_{r=1}^{n-1} r |\Delta_r(\hat{d}_{nr})| |\Delta \mu_r| |\hat{h}_r|^k \right) \times \left(\sum_{r=1}^{n-1} |\Delta_r(\hat{d}_{nr})| \right)^{k-1}$$

olur. Ayrıca, (3.14) ten $\sum_{r=1}^{n-1} |\Delta_r(\hat{d}_{nr})| = O(d_{nn})$ ve (1.44) şartından $d_{nn} = O\left(\frac{p_n}{P_n}\right)$ olduğu

kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\gamma k+k-1} |\Theta_{n,3}|^k &= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\gamma k+k-1} \left(\sum_{r=1}^{n-1} r |\Delta_r(\hat{d}_{nr})| |\Delta \mu_r| |\hat{h}_r|^k \right) \times d_{nn}^{k-1} \\
&= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\gamma k+k-1} \left(\sum_{r=1}^{n-1} r |\Delta_r(\hat{d}_{nr})| |\Delta \mu_r| |\hat{h}_r|^k \right) \times \left(\frac{p_n}{P_n} \right)^{k-1}
\end{aligned}$$

$$= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\gamma k} \sum_{r=1}^{n-1} r \left| \Delta_r(\hat{d}_{nr}) \right| \left| \Delta \mu_r \right| \left| \hat{h}_r \right|^k$$

elde edilir.

Yukarıdaki toplama indis değişimi ve (3.16) şartı uygulanırsa

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\gamma k+k-1} \left| \Theta_{n,3} \right|^k &= O(1) \sum_{r=1}^m r \left| \Delta \mu_r \right| \left| \hat{h}_r \right|^k \sum_{n=r+1}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\gamma k} \left| \Delta_r(\hat{d}_{nr}) \right| \\ &= O(1) \sum_{r=1}^m r \left| \Delta \mu_r \right| \left| \hat{h}_r \right|^k \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\gamma k-1} \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca (3.7) den $\Delta(r|\Delta \mu_r|) \leq r|\Delta^2 \mu_r| + |\Delta \mu_{r+1}|$ eşitsizliği göz önünde tutularak yukarıdaki toplama Abel dönüşümü uygulandığında

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\gamma k+k-1} \left| \Theta_{n,3} \right|^k &= O(1) \sum_{r=1}^{m-1} \Delta(r|\Delta \mu_r|) \sum_{i=1}^r \left(\frac{P_i}{p_i} \right)^{\gamma k-1} \left| \hat{h}_i \right|^k + O(1)m|\Delta \mu_m| \sum_{i=1}^m \left(\frac{P_i}{p_i} \right)^{\gamma k-1} \left| \hat{h}_i \right|^k \\ &= O(1) \sum_{r=1}^{m-1} r|\Delta^2 \mu_r| \sum_{i=1}^r \left(\frac{P_i}{p_i} \right)^{\gamma k-1} \left| \hat{h}_i \right|^k + O(1) \sum_{r=1}^{m-1} |\Delta \mu_r| \sum_{i=1}^r \left(\frac{P_i}{p_i} \right)^{\gamma k-1} \left| \hat{h}_i \right|^k \\ &\quad + O(1)m|\Delta \mu_m| \sum_{i=1}^m \left(\frac{P_i}{p_i} \right)^{\gamma k-1} \left| \hat{h}_i \right|^k \end{aligned}$$

elde edilir. (3.17) şartından

$$\sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\gamma k+k-1} \left| \Theta_{n,3} \right|^k = O(1) \sum_{r=1}^{m-1} r|\Delta^2 \mu_r| \Phi_r + O(1) \sum_{r=1}^{m-1} |\Delta \mu_r| \Phi_r + O(1)m|\Delta \mu_m| \Phi_m$$

bulunur. (1.58), (3.1) ve (3.3) şartları uygulandığında $m \rightarrow \infty$ iken

$$\sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\gamma k+k-1} \left| \Theta_{n,3} \right|^k = O(1)$$

elde edilir.

Son olarak, (1.45) şartı kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\gamma k+k-1} |\Theta_{n,4}|^k &= \sum_{r=1}^{m-1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\gamma k+k-1} \left| \hat{d}_{n,r+1} \mu_{r+1} \frac{\hbar_r}{r} \right|^k \\
&\leq \sum_{r=1}^{m-1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\gamma k+k-1} \left(\left| \hat{d}_{n,r+1} \right| \left| \mu_{r+1} \right| \frac{|\hbar_r|}{r} \right)^k \\
&= O(1) \sum_{r=1}^{m-1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\gamma k+k-1} \left(r \left| \Delta_r(\hat{d}_{nr}) \right| \left| \mu_{r+1} \right| \frac{|\hbar_r|}{r} \right)^k \\
&= O(1) \sum_{r=1}^{m-1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\gamma k+k-1} \left(\left| \Delta_r(\hat{d}_{nr}) \right| \left| \mu_{r+1} \right| |\hbar_r| \right)^k
\end{aligned}$$

bulunur. Bu toplama Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\gamma k+k-1} |\Theta_{n,4}|^k = O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\gamma k+k-1} \left(\sum_{r=1}^{n-1} \left| \Delta_r(\hat{d}_{nr}) \right| \left| \mu_{r+1} \right|^k |\hbar_r|^k \right) \times \left(\sum_{r=1}^{n-1} \left| \Delta_r(\hat{d}_{nr}) \right| \right)^{k-1}$$

olur. (3.14) ten $\sum_{r=1}^{n-1} \left| \Delta_r(\hat{d}_{nr}) \right| = O(d_m)$ ve (1.44) ten $d_m = O\left(\frac{p_n}{P_n}\right)$ olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\gamma k+k-1} |\Theta_{n,4}|^k &= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\gamma k+k-1} \left(\sum_{r=1}^{n-1} \left| \Delta_r(\hat{d}_{nr}) \right| \left| \mu_{r+1} \right|^k |\hbar_r|^k \right) \times d_m^{k-1} \\
&= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\gamma k} \left(\sum_{r=1}^{n-1} \left| \Delta_r(\hat{d}_{nr}) \right| \left| \mu_{r+1} \right|^k |\hbar_r|^k \right)
\end{aligned}$$

bulunur. İndis değişimi yapılarak $\mu_n \rightarrow 0$ şartından $|\mu_n| = O(1)$ olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\gamma k+k-1} |\Theta_{n,4}|^k &= O(1) \sum_{r=1}^m \left| \mu_{r+1} \right|^k |\hbar_r|^k \sum_{n=r+1}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\gamma k} \left| \Delta_r(\hat{d}_{nr}) \right| \\
&= O(1) \sum_{r=1}^m \left| \mu_{r+1} \right|^{k-1} \left| \mu_{r+1} \right| |\hbar_r|^k \sum_{n=r+1}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\gamma k} \left| \Delta_r(\hat{d}_{nr}) \right|
\end{aligned}$$

$$= O(1) \sum_{r=1}^m |\mu_{r+1}| |\hbar_r|^k \sum_{n=r+1}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\gamma k} \left| \Delta_r(\hat{d}_{nr}) \right|$$

elde edilir. (3.16) şartından

$$\sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\gamma k + k - 1} |\Theta_{n,4}|^k = O(1) \sum_{r=1}^m |\mu_{r+1}| |\hbar_r|^k \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\gamma k - 1}$$

bulunur. $\Theta_{n,1}$ in ispatında olduğu gibi ilerlenirse, $m \rightarrow \infty$ iken

$$\sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\gamma k + k - 1} |\Theta_{n,4}|^k = O(1)$$

olur.

Böylece $\omega = 1, 2, 3, 4$ için teoremimizin ispatı, $m \rightarrow \infty$ iken

$$\sum_{n=1}^m \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\gamma k + k - 1} |\Theta_{n,\omega}|^k = O(1)$$

sağlandığından tamamlanır.

4. BÖLÜM

SONSUZ SERİLERİN $\varphi-|D, p_n|_k$ VE $\varphi-|D, \gamma|_k$ TOPLANABİLMESİ ÜZERİNE TEOREMLER

Bu bölümde δ -quasi monoton dizileri kullanarak $\sum a_n \zeta_n$ serisinin $\varphi-|D, p_n|_k$ ve $\varphi-|D, \delta|_k$ toplanabilmesini içeren iki genel teorem ifade ve ispat edilmiştir.

4.1. $\sum a_n \zeta_n$ Serisinin $\varphi-|D, p_n|_k$ Toplanabilmesi

İlk olarak Teorem 1.5.5 i $\varphi-|D, p_n|_k$ toplanabilmeye genelleştiren teoremin ifadesi ile ispatı yapılacaktır.

Teorem 4.1.1. $\left(\frac{\varphi_n p_n}{P_n}\right)$ dizisi artmayan bir dizi olsun. $k \geq 1$ için Teorem 1.5.5 in tüm şartları ve (1.47) şartı yerine

$$\sum_{n=1}^m \varphi_n^{k-1} \left(\frac{p_n}{P_n}\right)^k |\tilde{h}_n|^k = O(\kappa_m), \quad m \rightarrow \infty \quad (4.1)$$

sağlandığında $\sum a_n \zeta_n$ serisi $\varphi-|D, p_n|_k$ toplanabilirdir denir [54].

Teorem 4.1.1 in ispatı: $\sum a_n \zeta_n$ serisinin D dönüşümünü Υ_n ile gösterelim. (1.40) ve (1.41) den indis değişimi uygulanarak

$$\Upsilon_n = \sum_{r=0}^n d_{nr} \sum_{i=0}^r a_i \zeta_i = \sum_{i=0}^n a_i \zeta_i \sum_{r=i}^n d_{nr} = \sum_{r=0}^n a_r \zeta_r \bar{d}_{nr}$$

olduğundan

$$\bar{\Delta} \Upsilon_n = \sum_{r=0}^n a_r \zeta_r \bar{d}_{nr} - \sum_{r=0}^{n-1} a_r \zeta_r \bar{d}_{n-1,r} = \sum_{r=0}^n a_r \zeta_r \hat{d}_{nr} = \sum_{r=1}^n \frac{a_r \zeta_r \hat{d}_{nr}}{r}$$

olur. Elde edilen bu son toplama Abel dönüşümü uygulanarak

$$\bar{\Delta}\Upsilon_n = \sum_{r=1}^{n-1} \Delta_r \left(\frac{\varsigma_r \hat{d}_{nr}}{r} \right) \sum_{i=1}^r ia_i + \frac{\hat{d}_{mn} \varsigma_n}{n} \sum_{i=1}^n ia_i$$

bulunur. Ayrıca

$$\begin{aligned} \Delta_r \left(\frac{\hat{d}_{nr} \varsigma_r}{r} \right) &= \frac{\hat{d}_{nr} \varsigma_r}{r} - \frac{\hat{d}_{n,r+1} \varsigma_{r+1}}{r+1} \\ &= \frac{(r+1)\hat{d}_{nr} \varsigma_r - r\hat{d}_{n,r+1} \varsigma_{r+1}}{r(r+1)} \\ &= \frac{(r+1)\hat{d}_{nr} \varsigma_r - (r+1)\hat{d}_{n,r+1} \varsigma_r + (r+1)\hat{d}_{n,r+1} \varsigma_r - r\hat{d}_{n,r+1} \varsigma_{r+1} - \hat{d}_{n,r+1} \varsigma_{r+1} + \hat{d}_{n,r+1} \varsigma_{r+1}}{r(r+1)} \\ &= \frac{(r+1)\Delta_r(\hat{d}_{nr}) \varsigma_r + (r+1)\hat{d}_{n,r+1} \Delta_r \varsigma_r + \hat{d}_{n,r+1} \varsigma_{r+1}}{r(r+1)} \end{aligned}$$

olduğundan ve $\hbar_n = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n ia_i$ eşitliğinden

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}\Upsilon_n &= \sum_{r=1}^{n-1} \Delta_r \left(\frac{\varsigma_r \hat{d}_{nr}}{r} \right) (r+1)\hbar_r + \frac{\hat{d}_{mn} \varsigma_n}{n} (n+1)\hbar_n \\ &= \sum_{r=1}^{n-1} \frac{(r+1)}{r} \Delta_r(\hat{d}_{nr}) \varsigma_r \hbar_r + \sum_{r=1}^{n-1} \frac{(r+1)}{r} \hat{d}_{n,r+1} \Delta_r(\varsigma_r) \hbar_r \\ &\quad + \sum_{r=1}^{n-1} \hat{d}_{n,r+1} \varsigma_{r+1} \frac{\hbar_r}{r} + \left(\frac{n+1}{n} \right) \hat{d}_{mn} \varsigma_n \hbar_n \\ &= \Upsilon_{n,1} + \Upsilon_{n,2} + \Upsilon_{n,3} + \Upsilon_{n,4} \end{aligned} \tag{4.2}$$

elde edilir. $s=1,2,3,4$ olmak üzere teoremin ispatının tamamlanması için Minkowski eşitsizliğinden

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^{k-1} |\Upsilon_{n,s}|^k < \infty$$

olduğunun gösterilmesi yeterli olacaktır.

Öncelikle $\frac{n+1}{n} = O(1)$ olduğu ile Hölder eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{k-1} |\Upsilon_{n,1}|^k &= \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{k-1} \left| \sum_{r=1}^{n-1} \frac{(r+1)}{r} \Delta_r(\hat{d}_{nr}) \varsigma_r \hbar_r \right|^k \\ &= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{k-1} \left(\sum_{r=1}^{n-1} |\Delta_r(\hat{d}_{nr})| |\varsigma_r| |\hbar_r| \right)^k \\ &= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{k-1} \left(\sum_{r=1}^{n-1} |\Delta_r(\hat{d}_{nr})| |\varsigma_r|^k |\hbar_r|^k \right) \times \left(\sum_{r=1}^{n-1} |\Delta_r(\hat{d}_{nr})| \right)^{k-1} \end{aligned}$$

olur. (3.14) ve (1.44) birlikte düşünülürse $\sum_{r=1}^{n-1} |\Delta_r(\hat{d}_{nr})| = O(d_m) = O\left(\frac{p_n}{P_n}\right)$ olacağından

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{k-1} |\Upsilon_{n,1}|^k &= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{k-1} \left(\sum_{r=1}^{n-1} |\Delta_r(\hat{d}_{nr})| |\varsigma_r|^k |\hbar_r|^k \right) \times d_m^{k-1} \\ &= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{\varphi_n p_n}{P_n} \right)^{k-1} \left(\sum_{r=1}^{n-1} |\Delta_r(\hat{d}_{nr})| |\varsigma_r|^k |\hbar_r|^k \right) \end{aligned}$$

elde edilir. $\varsigma_n \rightarrow 0$ şartından $|\varsigma_n| = O(1)$ olur. Ek olarak $\left(\frac{\varphi_n p_n}{P_n}\right)$ dizisinin artmayan

olduğundan indis değişimi uygulanırsa

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{k-1} |\Upsilon_{n,1}|^k &= O(1) \sum_{r=1}^m |\varsigma_r|^k |\hbar_r|^k \sum_{n=r+1}^{m+1} \left(\frac{\varphi_n p_n}{P_n} \right)^{k-1} |\Delta_r(\hat{d}_{nr})| \\ &= O(1) \sum_{r=1}^m |\varsigma_r| |\varsigma_r|^{k-1} |\hbar_r|^k \left(\frac{\varphi_r p_r}{P_r} \right)^{k-1} \sum_{n=r+1}^{m+1} |\Delta_r(\hat{d}_{nr})| \\ &= O(1) \sum_{r=1}^m |\varsigma_r| |\hbar_r|^k \left(\frac{\varphi_r p_r}{P_r} \right)^{k-1} \sum_{n=r+1}^{m+1} |\Delta_r(\hat{d}_{nr})| \end{aligned}$$

olur. (3.15) ve (1.44) şartlarından

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{k-1} |\Upsilon_{n,1}|^k &= O(1) \sum_{r=1}^m \left(\frac{\varphi_r P_r}{P_r} \right)^{k-1} |\varsigma_r| |\hbar_r|^k d_{rr} \\
&= O(1) \sum_{r=1}^m \left(\frac{\varphi_r P_r}{P_r} \right)^{k-1} |\varsigma_r| |\hbar_r|^k \left(\frac{P_r}{P_r} \right) \\
&= O(1) \sum_{r=1}^m \varphi_r^{k-1} \left(\frac{P_r}{P_r} \right)^k |\varsigma_r| |\hbar_r|^k
\end{aligned}$$

elde edilir. Teoremin hipotezinden $\Delta|\varsigma_r| \leq |\Delta\varsigma_r| \leq B_r$ eşitsizliği ile elde edilen bu son ifadeye Abel dönüşümü uygulandığında

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{k-1} |\Upsilon_{n,1}|^k &= O(1) \sum_{r=1}^{m-1} \Delta|\varsigma_r| \sum_{i=1}^r \varphi_i^{k-1} \left(\frac{P_i}{P_i} \right)^k |\hbar_i|^k + O(1) |\varsigma_m| \sum_{i=1}^m \varphi_i^{k-1} \left(\frac{P_i}{P_i} \right)^k |\hbar_i|^k \\
&= O(1) \sum_{r=1}^{m-1} |\Delta\varsigma_r| \sum_{i=1}^r \varphi_i^{k-1} \left(\frac{P_i}{P_i} \right)^k |\hbar_i|^k + O(1) |\varsigma_m| \sum_{i=1}^m \varphi_i^{k-1} \left(\frac{P_i}{P_i} \right)^k |\hbar_i|^k \\
&= O(1) \sum_{r=1}^{m-1} B_r \sum_{i=1}^r \varphi_i^{k-1} \left(\frac{P_i}{P_i} \right)^k |\hbar_i|^k + O(1) |\varsigma_m| \sum_{i=1}^m \varphi_i^{k-1} \left(\frac{P_i}{P_i} \right)^k |\hbar_i|^k
\end{aligned}$$

bulunur. Burada önce (4.1) şartı uygulandığında Lemma 1.5.11 in (1.59) şartından ve $\sum B_n \kappa_n$ yakınsak olduğundan, $m \rightarrow \infty$ iken

$$\sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{k-1} |\Upsilon_{n,1}|^k = O(1) \sum_{r=1}^{m-1} B_r \kappa_r + O(1) |\varsigma_m| \kappa_m = O(1)$$

elde edilir.

Şimdi $|\Delta\varsigma_r| \leq |B_r|$ şartı ve (1.45) şartı kullanıldığında

$$\sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{k-1} |\Upsilon_{n,2}|^k = \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{k-1} \left| \sum_{r=1}^{n-1} \frac{r+1}{r} \hat{d}_{n,r+1} \Delta\varsigma_r \hbar_r \right|^k$$

$$\begin{aligned}
&= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{k-1} \left(\sum_{r=1}^{n-1} \hat{d}_{n,r+1} \left| \Delta_{\mathcal{G}_r} \right| \left| \hat{h}_r \right| \right)^k \\
&= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{k-1} \left(\sum_{r=1}^{n-1} r \left| \Delta_r(\hat{d}_{nr}) \right| \left| \Delta_{\mathcal{G}_r} \right| \left| \hat{h}_r \right| \right)^k \\
&= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{k-1} \left(\sum_{r=1}^{n-1} r \left| \Delta_r(\hat{d}_{nr}) \right| \left| B_r \right| \left| \hat{h}_r \right| \right)^k
\end{aligned}$$

bulunur. Yukarıdaki toplama Hölder eşitsizliği uygulanıp Lemma 1.5.12 nin (1.60)

şartından $r |B_r| = O\left(\frac{1}{\kappa_r}\right) = O(1)$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{k-1} \left| \Upsilon_{n,2} \right|^k &= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{k-1} \left(\sum_{r=1}^{n-1} r \left| \Delta_r(\hat{d}_{nr}) \right| \left| B_r \right| \left| \hat{h}_r \right|^k \right) \times \left(\sum_{r=1}^{n-1} r \left| \Delta_r(\hat{d}_{nr}) \right| \left| B_r \right| \right)^{k-1} \\
&= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{k-1} \left(\sum_{r=1}^{n-1} r \left| \Delta_r(\hat{d}_{nr}) \right| \left| B_r \right| \left| \hat{h}_r \right|^k \right) \times \left(\sum_{r=1}^{n-1} \left| \Delta_r(\hat{d}_{nr}) \right| \right)^{k-1}
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.14) ve (1.44) dan dolayı $\sum_{r=1}^{n-1} \left| \Delta_r(\hat{d}_{nr}) \right| = O(\hat{d}_{nn}) = O\left(\frac{P_n}{P_n}\right)$ olup indis

değişimi uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{k-1} \left| \Upsilon_{n,2} \right|^k &= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{k-1} d_m^{k-1} \sum_{r=1}^{n-1} r \left| \Delta_r(\hat{d}_{nr}) \right| \left| B_r \right| \left| \hat{h}_r \right|^k \\
&= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{\varphi_n P_n}{P_n} \right)^{k-1} \sum_{r=1}^{n-1} r \left| \Delta_r(\hat{d}_{nr}) \right| \left| B_r \right| \left| \hat{h}_r \right|^k \\
&= O(1) \sum_{r=1}^m r \left| B_r \right| \left| \hat{h}_r \right|^k \sum_{n=r+1}^{m+1} \left(\frac{\varphi_n P_n}{P_n} \right)^{k-1} \left| \Delta_r(\hat{d}_{nr}) \right|
\end{aligned}$$

dir. Buradan $\left(\frac{\varphi_n P_n}{P_n} \right)$ dizisi artmayan, (3.15) ve (1.44) şartlarından

$$\sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{k-1} \left| \Upsilon_{n,2} \right|^k = O(1) \sum_{r=1}^m \left(\frac{\varphi_r P_r}{P_r} \right)^{k-1} r \left| B_r \right| \left| \hat{h}_r \right|^k \sum_{n=r+1}^{m+1} \left| \Delta_r(\hat{d}_{nr}) \right|$$

$$\begin{aligned}
&= O(1) \sum_{r=1}^m \left(\frac{\varphi_r P_r}{P_r} \right)^{k-1} r |B_r| |\hbar_r|^k d_{rr} \\
&= O(1) \sum_{r=1}^m \varphi_r^{k-1} \left(\frac{P_r}{P_r} \right)^k r |B_r| |\hbar_r|^k
\end{aligned}$$

bulunur. Abel dönüşümü uygulandığında

$$\sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{k-1} |\Upsilon_{n,2}|^k = O(1) \sum_{r=1}^{m-1} \Delta(r|B_r|) \sum_{i=1}^r \varphi_i^{k-1} \left(\frac{P_i}{P_i} \right)^k |\hbar_i|^k + O(1) m |B_m| \sum_{i=1}^m \varphi_i^{k-1} \left(\frac{P_i}{P_i} \right)^k |\hbar_i|^k$$

olur. Burada

$$\begin{aligned}
\Delta(r|B_r|) &= r|B_r| - (r+1)|B_{r+1}| = r|B_r| - (r+1)|B_{r+1}| + |B_r| - |B_r| \\
&= (r+1)\Delta(|B_r|) - |B_r| \leq 2r|\Delta B_r| + |B_r|
\end{aligned} \tag{4.3}$$

olduğundan ve (4.1) şartından

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{k-1} |\Upsilon_{n,2}|^k &= O(1) \sum_{r=1}^{m-1} \Delta(r|B_r|) \kappa_r + O(1) m B_m \kappa_m \\
&= O(1) \sum_{v=1}^{m-1} v |\Delta B_v| \kappa_v + O(1) \sum_{v=2}^m B_v \kappa_v + O(1) m B_m \kappa_m \\
&= O(1), \quad m \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

elde edilir. (1.45) şartından

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{k-1} |\Upsilon_{n,3}|^k &= \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{k-1} \left| \sum_{r=1}^{n-1} \hat{d}_{n,r+1} \varsigma_{r+1} \frac{\hbar_r}{r} \right|^k \leq \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{k-1} \left(\sum_{r=1}^{n-1} |\hat{d}_{n,r+1}| |\varsigma_{r+1}| \frac{|\hbar_r|}{r} \right)^k \\
&= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{k-1} \left(\sum_{r=1}^{n-1} r |\Delta_r(\hat{d}_{nr})| |\varsigma_{r+1}| \frac{|\hbar_r|}{r} \right)^k
\end{aligned}$$

bulunur. Elde edilen bu ifadeye Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{k-1} |\Upsilon_{n,3}|^k = O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{k-1} \left(\sum_{r=1}^{n-1} |\Delta_r(\hat{d}_{nr})| |\varsigma_{r+1}|^k |t_r|^k \right) \times \left(\sum_{r=1}^{n-1} |\Delta_r(\hat{d}_{nr})| \right)^{k-1}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitliğin en sağındaki toplama (3.14) teki eşitsizlik ve (1.44) şartı uygulandığında

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{k-1} |\Upsilon_{n,3}|^k &= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{k-1} \left(\sum_{r=1}^{n-1} |\Delta_r(\hat{d}_{nr})| |\varsigma_{r+1}|^k |\hbar_r|^k \right) d_m^{k-1} \\ &= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{\varphi_n p_n}{P_n} \right)^{k-1} \sum_{r=1}^{n-1} |\Delta_r(\hat{d}_{nr})| |\varsigma_{r+1}|^k |\hbar_r|^k \end{aligned}$$

bulunur. $\varsigma_n \rightarrow 0$ şartından $|\varsigma_n| = O(1)$ ve $\left(\frac{\varphi_n p_n}{P_n} \right)$ dizisi artmayan oldukları göz önünde tutulup indis değişimi uygulanırsa

$$\sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{k-1} |\Upsilon_{n,3}|^k = O(1) \sum_{r=1}^m |\varsigma_{r+1}| |\hbar_r|^k \left(\frac{\varphi_r p_r}{P_r} \right)^{k-1} \sum_{n=r+1}^{m+1} |\Delta_r(\hat{d}_{nr})|$$

elde edilir. (3.15) ve (1.44) şartından $\sum_{n=r+1}^{m+1} |\Delta_r(\hat{d}_{nr})| = O(d_{rr}) = O\left(\frac{p_r}{P_r}\right)$ olduğu için

$$\sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{k-1} |\Upsilon_{n,3}|^k = O(1) \sum_{r=1}^m \varphi_r^{k-1} \left(\frac{p_r}{P_r} \right)^k |\varsigma_{r+1}| |\hbar_r|^k$$

bulunur. Burada $\Upsilon_{n,1}$ in ispatında olduğu gibi ilerlenirse, $m \rightarrow \infty$ iken

$$\sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{k-1} |\Upsilon_{n,3}|^k = O(1)$$

sonucuna ulaşılır. Son olarak (1.44) şartından $d_m = O\left(\frac{p_n}{P_n}\right)$ ve $\varsigma_n \rightarrow 0$ şartından

$|\varsigma_n| = O(1)$ olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^m \varphi_n^{k-1} |\Upsilon_{n,4}|^k &= \sum_{n=1}^m \varphi_n^{k-1} \left| \frac{n+1}{n} d_{nn} \varsigma_n \hbar_n \right|^k \\
&= O(1) \sum_{n=1}^m \varphi_n^{k-1} d_{nn}^k |\varsigma_n|^k |\hbar_n|^k \\
&= O(1) \sum_{n=1}^m \varphi_n^{k-1} \left(\frac{P_n}{P_n} \right)^k |\varsigma_n| |\varsigma_n|^{k-1} |\hbar_n|^k \\
&= O(1) \sum_{n=1}^m \varphi_n^{k-1} \left(\frac{P_n}{P_n} \right)^k |\varsigma_n| |\hbar_n|^k
\end{aligned}$$

bulunur. Burada $\Upsilon_{n,1}$ in ispatında olduğu gibi ilerlenirse, $m \rightarrow \infty$ iken

$$\sum_{n=1}^m \varphi_n^{k-1} |\Upsilon_{n,4}|^k = O(1)$$

sonucuna ulaşılır. Böylece $s = 1, 2, 3, 4$ için teoremimizin ispatı, $m \rightarrow \infty$ iken

$$\sum_{n=1}^m \varphi_n^{k-1} |\Upsilon_{n,s}|^k = O(1)$$

sağlandığından tamamlanır.

4.2. $\sum a_n \varsigma_n$ Serisinin $\varphi - |D; \gamma|_k$ Toplanabilmesi

Bu kısım içerisinde Teorem 1.5.4 ü genelleştiren bir teoremin ifadesi ile ispatı yer alacaktır.

Teorem 4.2.1. $\varphi_n P_n = O(P_n)$ ve $D = (d_{nr})$ matrisi (1.42)-(1.44) şartlarını sağlayacak şekilde pozitif bir normal matris olsun. Eğer $k \geq 1$ ve $0 \leq \gamma < 1/k$ için Teorem 1.5.4 ün tüm şartları sırasıyla (1.36) ve (1.37) yerine $m \rightarrow \infty$ iken

$$\sum_{n=1}^m \varphi_n^{\gamma k} \frac{1}{n} |\hbar_n|^k = O(\chi_m) \quad (4.4)$$

ve

$$\sum_{n=1}^m \varphi_n^{\gamma k-1} |\hat{h}_n|^k = O(\chi_m) \quad (4.5)$$

şartları alınmak suretiyle

$$\sum_{n=r+1}^{m+1} \varphi_n^{\gamma k} \left| \Delta_r(\hat{d}_{nr}) \right| = O(\varphi_r^{\gamma k-1}) \quad (4.6)$$

ve

$$\sum_{n=r+1}^{m+1} \varphi_n^{\gamma k} \left| \hat{d}_{n,r+1} \right| = O(\varphi_r^{\gamma k}) \quad (4.7)$$

şartları sağlanırsa, o zaman $\sum a_n \varsigma_n$ serisi $\varphi - |D; \gamma|_k$ toplanabilir [55].

Teorem 4.2.1 in ispatı: $\sum a_n \varsigma_n$ serisinin D dönüşümünü Υ_n ile gösterelim. Bu taktirde (4.2) den

$$\begin{aligned} \bar{\Delta} \Upsilon_n &= \left(\frac{n+1}{n} \right) d_m \varsigma_n \hat{h}_n + \sum_{r=1}^{n-1} \frac{(r+1)}{r} \Delta_r(\hat{d}_{nr}) \varsigma_r \hat{h}_r \\ &+ \sum_{r=1}^{n-1} \frac{(r+1)}{r} \hat{d}_{n,r+1} \Delta_r(\varsigma_r) \hat{h}_r + \sum_{r=1}^{n-1} \hat{d}_{n,r+1} \varsigma_{r+1} \frac{\hat{h}_r}{r} \end{aligned}$$

biçiminde düzenlenirse

$$\bar{\Delta} \Upsilon_n = \Upsilon_{n,1} + \Upsilon_{n,2} + \Upsilon_{n,3} + \Upsilon_{n,4}$$

yazılabilir. $u = 1, 2, 3, 4$ olmak üzere Teorem 4.2.1 in ispatının tamamlanması için Minkowski eşitsizliğinden

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^{\gamma k+k-1} |\Upsilon_{n,u}|^k < \infty$$

olduğunun gösterilmesi yeterli olacaktır.

Öncelikle $\frac{n+1}{n} = O(1)$ ve (1.44) şartından

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^m \varphi_n^{\gamma_{k+k-1}} |\Upsilon_{n,1}|^k &= \sum_{n=1}^m \varphi_n^{\gamma_{k+k-1}} \left| \frac{n+1}{n} d_m \varsigma_n \hbar_n \right|^k \\
&= O(1) \sum_{n=1}^m \varphi_n^{\gamma_{k+k-1}} d_m^k |\varsigma_n|^k |\hbar_n|^k \\
&= O(1) \sum_{n=1}^m \varphi_n^{\gamma_{k-1}} \left(\frac{\varphi_n P_n}{P_n} \right)^k |\varsigma_n| |\varsigma_n|^{k-1} |\hbar_n|^k
\end{aligned}$$

olur. Lemma 1.5.13 teki (1.62) şartından $|\varsigma_n|^{k-1} = O(1)$ dir. Ayrıca $\varphi_n P_n = O(P_n)$ ve

$\Delta |\varsigma_n| \leq |\Delta \varsigma_n| \leq |B_n|$ olduğundan Abel dönüşümü uygulandığında

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^m \varphi_n^{\gamma_{k+k-1}} |\Upsilon_{n,1}|^k &= O(1) \sum_{n=1}^m \varphi_n^{\gamma_{k-1}} \left(\frac{\varphi_n P_n}{P_n} \right)^k |\varsigma_n| |\hbar_n|^k \\
&= O(1) \sum_{n=1}^m \varphi_n^{\gamma_{k-1}} |\varsigma_n| |\hbar_n|^k \\
&= O(1) \sum_{n=1}^{m-1} \Delta |\varsigma_n| \sum_{i=1}^n \varphi_i^{\gamma_{k-1}} |\hbar_i|^k + O(1) |\varsigma_m| \sum_{i=1}^m \varphi_i^{\gamma_{k-1}} |\hbar_i|^k
\end{aligned}$$

olur. Burada (4.5) ve (1.62) kullanılarak

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^m \varphi_n^{\gamma_{k+k-1}} |\Upsilon_{n,1}|^k &= O(1) \sum_{n=1}^{m-1} |\Delta \varsigma_n| \chi_n + O(1) |\varsigma_m| \chi_m \\
&= O(1) \sum_{n=1}^{m-1} |B_n| \chi_n + O(1) |\varsigma_m| \chi_m \\
&= O(1), m \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi Hölder eşitsizliği ve (3.14) ten $\sum_{r=1}^{n-1} |\Delta_r(\hat{d}_{nr})| \leq d_m$ olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{\gamma_{k+k-1}} |\Upsilon_{n,2}|^k &= \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{\gamma_{k+k-1}} \left| \sum_{r=1}^{n-1} \frac{(r+1)}{r} \Delta_r(\hat{d}_{nr}) \varsigma_r \hbar_r \right|^k \\
&= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{\gamma_{k+k-1}} \left(\sum_{r=1}^{n-1} \left| \Delta_r(\hat{d}_{nr}) \right| |\varsigma_r| |\hbar_r| \right)^k \\
&= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{\gamma_{k+k-1}} \left(\sum_{r=1}^{n-1} \left| \Delta_r(\hat{d}_{nr}) \right| |\varsigma_r|^k |\hbar_r|^k \right) \times \left(\sum_{r=1}^{n-1} \left| \Delta_r(\hat{d}_{nr}) \right| \right)^{k-1} \\
&= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{\gamma_{k+k-1}} d_m^{k-1} \left(\sum_{r=1}^{n-1} \left| \Delta_r(\hat{d}_{nr}) \right| |\varsigma_r|^k |\hbar_r|^k \right) \\
&= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{\gamma_k} \left(\frac{\varphi_n P_n}{P_n} \right)^{k-1} \left(\sum_{r=1}^{n-1} \left| \Delta_r(\hat{d}_{nr}) \right| |\varsigma_r|^k |\hbar_r|^k \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. $\varphi_n P_n = O(P_n)$, indis değişimi ve (4.6) şartı kullanılarak

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{\gamma_{k+k-1}} |\Upsilon_{n,2}|^k &= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{\gamma_k} \left(\sum_{r=1}^{n-1} \left| \Delta_r(\hat{d}_{nr}) \right| |\varsigma_r|^k |\hbar_r|^k \right) \\
&= O(1) \sum_{r=1}^m |\varsigma_r|^{k-1} |\varsigma_r| |\hbar_r|^k \sum_{n=r+1}^{m+1} \varphi_n^{\gamma_k} \left| \Delta_r(\hat{d}_{nr}) \right| \\
&= O(1) \sum_{r=1}^m \varphi_r^{\gamma_{k-1}} |\varsigma_r| |\hbar_r|^k
\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla $\Upsilon_{n,1}$ in ispatında olduğu şekilde ilerlenirse, $m \rightarrow \infty$ iken

$$\sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{\gamma_{k+k-1}} |\Upsilon_{n,2}|^k = O(1)$$

elde edilir. Tekrar H3lder eşitsizliği ile teoremin hipotezinden $B_n \rightarrow 0$ olduğu kullanıldığında

$$\sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{\gamma_{k+k-1}} |\Upsilon_{n,3}|^k = O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{\gamma_{k+k-1}} \left(\sum_{r=1}^{n-1} \left| \hat{d}_{n,r+1} \right| \left| \Delta_r(\varsigma_r) \right| |\hbar_r| \right)^k$$

$$\begin{aligned}
&= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{\gamma_{k+k-1}} \left(\sum_{r=1}^{n-1} \left| \hat{d}_{n,r+1} \right| \left| B_r \right| \left| \hat{h}_r \right| \right)^k \\
&= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{\gamma_{k+k-1}} \left(\sum_{r=1}^{n-1} \left| \hat{d}_{n,r+1} \right| \left| B_r \right| \left| \hat{h}_r \right|^k \right) \times \left(\sum_{r=1}^{n-1} \left| \hat{d}_{n,r+1} \right| \left| B_r \right| \right)^{k-1} \\
&= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{\gamma_{k+k-1}} \left(\sum_{r=1}^{n-1} \left| \hat{d}_{n,r+1} \right| \left| B_r \right| \left| \hat{h}_r \right|^k \right) \times \left(\sum_{r=1}^{n-1} \left| \hat{d}_{n,r+1} \right| \right)^{k-1}
\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca (1.38), (1.39) ve (1.43) kullanılarak

$$\begin{aligned}
\hat{d}_{n,r+1} &= \bar{d}_{n,r+1} - \bar{d}_{n-1,r+1} = \sum_{i=r+1}^n d_{ni} - \sum_{i=r+1}^{n-1} d_{n-1,i} \\
&= d_{nn} + \sum_{i=r+1}^{n-1} (d_{ni} - d_{n-1,i}) \leq d_{nn}
\end{aligned} \tag{4.8}$$

olduğundan (3.14), (1.44) ve indis değişimi uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{\gamma_{k+k-1}} \left| \Upsilon_{n,3} \right|^k &= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{\gamma_{k+k-1}} \left(\sum_{r=1}^{n-1} \left| \hat{d}_{n,r+1} \right| \left| B_r \right| \left| \hat{h}_r \right|^k \right) d_{nn}^{k-1} \\
&= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{\gamma_k} \left(\frac{\varphi_n p_n}{P_n} \right)^{k-1} \sum_{r=1}^{n-1} \left| \hat{d}_{n,r+1} \right| \left| B_r \right| \left| \hat{h}_r \right|^k
\end{aligned}$$

olur. $\varphi_n p_n = O(P_n)$, (4.7) şartı ve Abel dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{\gamma_{k+k-1}} \left| \Upsilon_{n,3} \right|^k &= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{\gamma_k} \sum_{r=1}^{n-1} \left| \hat{d}_{n,r+1} \right| \left| B_r \right| \left| \hat{h}_r \right|^k \\
&= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{\gamma_k} \sum_{r=1}^{n-1} \left| \hat{d}_{n,r+1} \right| \left| B_r \right| \left| \hat{h}_r \right|^k \\
&= O(1) \sum_{r=1}^m \left| B_r \right| \left| \hat{h}_r \right|^k \sum_{n=r+1}^{m+1} \varphi_n^{\gamma_k} \left| \hat{d}_{n,r+1} \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= O(1) \sum_{r=1}^m \varphi_r^{\gamma k} r |B_r| \frac{|\hbar_r|^k}{r} \\
&= O(1) \sum_{r=1}^{m-1} \Delta(r|B_r|) \sum_{i=1}^r \varphi_i^{\gamma k} \frac{|\hbar_i|^k}{i} + O(1) m B_m \sum_{i=1}^m \varphi_i^{\gamma k} \frac{|\hbar_i|^k}{i}
\end{aligned}$$

bulunur. (4.3), (4.4), (1.63) ve (1.64) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{\gamma k+k-1} |\Upsilon_{n,3}|^k &= O(1) \sum_{r=1}^{m-1} \Delta(r|B_r|) \chi_r + O(1) m B_m \chi_m \\
&= O(1) \sum_{r=1}^{m-1} r |\Delta B_r| \chi_r + O(1) \sum_{r=1}^{m-1} |B_r| \chi_r + O(1) m B_m \chi_m \\
&= O(1), m \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

elde edilir.

Son olarak (1.35), (4.8) ve $\varphi_n p_n = O(P_n)$ olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{\gamma k+k-1} |\Upsilon_{n,4}|^k &\leq \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{\gamma k+k-1} \left(\sum_{r=1}^{n-1} \hat{d}_{n,r+1} \left| \varsigma_{r+1} \frac{|\hbar_r|}{r} \right| \right)^k \\
&\leq \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{\gamma k+k-1} \left(\sum_{r=1}^{n-1} \hat{d}_{n,r+1} \left| \varsigma_{r+1} \frac{|\hbar_r|^k}{r} \right| \right) \times \left(\sum_{r=1}^{n-1} \hat{d}_{n,r+1} \left| \varsigma_{r+1} \right| \right)^{k-1} \\
&= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{\gamma k+k-1} d_m^{k-1} \sum_{r=1}^{n-1} \hat{d}_{n,r+1} \left| \varsigma_{r+1} \frac{|\hbar_r|^k}{r} \right| \\
&= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{\gamma k} \left(\frac{\varphi_n p_n}{P_n} \right)^{k-1} \sum_{r=1}^{n-1} \hat{d}_{n,r+1} \left| \varsigma_{r+1} \frac{|\hbar_r|^k}{r} \right| \\
&= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{\gamma k} \sum_{r=1}^{n-1} \hat{d}_{n,r+1} \left| \varsigma_{r+1} \frac{|\hbar_r|^k}{r} \right|
\end{aligned}$$

bulunur. Şimdi toplamların sırası değiştirilir ve (4.7) şartı kullanılırsa

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{\gamma_{k+k-1}} |\Upsilon_{n,4}|^k &= O(1) \sum_{r=1}^m |\zeta_{r+1}| \frac{|\hbar_r|^k}{r} \sum_{n=r+1}^{m+1} \varphi_n^{\gamma_k} |\hat{d}_{n,r+1}| \\ &= O(1) \sum_{r=1}^m |\zeta_{r+1}| \frac{|\hbar_r|^k}{r} \varphi_r^{\gamma_k} \end{aligned}$$

elde edilir. Son toplama Abel dönüşümü, $|\Delta \zeta_r| \leq |B_r|$ ve (4.4) şartı uygulanırsa

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{\gamma_{k+k-1}} |\Upsilon_{n,4}|^k &= O(1) \sum_{r=1}^{m-1} \Delta |\zeta_{r+1}| \sum_{i=1}^r \frac{|\hbar_i|^k}{i} \varphi_i^{\gamma_k} + O(1) |\zeta_{m+1}| \sum_{i=1}^m \frac{|\hbar_i|^k}{i} \varphi_i^{\gamma_k} \\ &= O(1) \sum_{r=1}^{m-1} |\Delta \zeta_{r+1}| \sum_{i=1}^r \frac{|\hbar_i|^k}{i} \varphi_i^{\gamma_k} + O(1) |\zeta_{m+1}| \sum_{i=1}^m \frac{|\hbar_i|^k}{i} \varphi_i^{\gamma_k} \\ &= O(1) \sum_{r=1}^{m-1} |B_{r+1}| \chi_{r+1} + O(1) |\zeta_{m+1}| \chi_{m+1} \end{aligned}$$

bulunur. Burada $\sum B_n \chi_n$ yakınsak ve (1.62) şartından, $m \rightarrow \infty$ iken

$$\sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{\gamma_{k+k-1}} |\Upsilon_{n,4}|^k = O(1)$$

elde edilir.

Böylece $u = 1, 2, 3, 4$ için teoremimizin ispatı, $m \rightarrow \infty$ iken

$$\sum_{n=1}^m \varphi_n^{\gamma_{k+k-1}} |\Upsilon_{n,u}|^k = O(1)$$

sağlandığından tamamlanır.

5. BÖLÜM

SONSUZ SERİLERİN $|D, p_n, \beta; \gamma|_k$ TOPLANABİLMESİ ÜZERİNE TEOREMLER

Bu bölümde $|D, p_n, \beta; \gamma|_k$ toplanabilme ile ilgili iki teorem ispatlanıp bir uygulaması verilecektir.

5.1. $\sum a_n \mu_n$ Serisinin $|D, p_n, \beta; \gamma|_k$ Toplanabilmesi

İlk olarak Teorem 3.1.1 i daha genel olan $|D, p_n, \beta; \gamma|_k$ toplanabilmeye genelleştiren bir teoremin ifade ve ispatı yapılacaktır.

Teorem 5.1.1. $k \geq 1$ ve $\gamma \geq 0$ için $-\beta(\gamma k + k - 1) > 0$ olmak üzere $D = (d_{nr})$ matrisi (1.42)-(1.45) şartlarını ve

$$\sum_{n=v+1}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\beta(\gamma k + k - 1) - k + 1} \left| \Delta_r(\hat{d}_{nr}) \right| = O \left(\left(\frac{P_r}{p_r} \right)^{\beta(\gamma k + k - 1) - k} \right) \quad (5.1)$$

şartını sağlayacak şekilde pozitif bir normal matris olsun. Teorem 3.1.1 in bütün şartları altında (3.2) şartı yerine

$$\sum_{n=1}^m \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\beta(\gamma k + k - 1) - k} |\hat{h}_n|^k = O(\Phi_m), \quad m \rightarrow \infty \quad (5.2)$$

şartı sağlanırsa $\sum a_n \mu_n$ serisi $|D, p_n, \beta; \gamma|_k$ toplanabilirdir [56].

Teorem 5.1.1 in ispatı: $\sum a_n \mu_n$ serisinin D dönüşümünü Θ_n ile gösterelim. (3.18) den

$$\bar{\Delta} \Theta_n = \sum_{r=1}^{n-1} \frac{(r+1)}{r} \Delta_r(\hat{d}_{nr}) \mu_r \hat{h}_r + \sum_{r=1}^{n-1} \frac{(r+1)}{r} \hat{d}_{n,r+1} \Delta_r(\mu_r) \hat{h}_r$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{r=1}^{n-1} \hat{d}_{n,r+1} \mu_{r+1} \frac{\hbar_r}{r} + \left(\frac{n+1}{n} \right) d_{nn} \mu_n \hbar_n \\
& = \Theta_{n,1} + \Theta_{n,2} + \Theta_{n,3} + \Theta_{n,4}
\end{aligned}$$

bulunmuştur. $v = 1, 2, 3, 4$ olmak üzere teoremin ispatı için Minkowski eşitsizliğinden

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\beta(\gamma k + k - 1)} |\Theta_{n,v}|^k < \infty$$

olduğunun gösterilmesi yeterli olacaktır.

Öncelikle, Hölder eşitsizliği kullanılır, ardından (3.14) ve (1.44) şartı beraber düşünülürse

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\beta(\gamma k + k - 1)} |\Theta_{n,1}|^k &= \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\beta(\gamma k + k - 1)} \left| \sum_{r=1}^{n-1} \frac{(r+1)}{r} \Delta_r(\hat{d}_{nr}) \mu_r \hbar_r \right|^k \\
&= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\beta(\gamma k + k - 1)} \left(\sum_{r=1}^{n-1} |\Delta_r(\hat{d}_{nr})| |\mu_r| |\hbar_r| \right)^k \\
&= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\beta(\gamma k + k - 1)} \left(\sum_{r=1}^{n-1} |\Delta_r(\hat{d}_{nr})| |\mu_r|^k |\hbar_r|^k \right) \times \left(\sum_{r=1}^{n-1} |\Delta_r(\hat{d}_{nr})| \right)^{k-1} \\
&= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\beta(\gamma k + k - 1)} d_{nn}^{k-1} \sum_{r=1}^{n-1} |\Delta_r(\hat{d}_{nr})| |\mu_r|^k |\hbar_r|^k \\
&= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\beta(\gamma k + k - 1) - k + 1} \sum_{r=1}^{n-1} |\Delta_r(\hat{d}_{nr})| |\mu_r|^k |\hbar_r|^k
\end{aligned}$$

bulunur. Yukarıdaki toplama indis değişikliği yapıldıktan sonra (5.1) şartı uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\beta(\gamma k + k - 1)} |\Theta_{n,1}|^k &= O(1) \sum_{r=1}^m |\mu_r| |\mu_r|^{k-1} |\hbar_r|^k \sum_{n=r+1}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\beta(\gamma k + k - 1) - k + 1} |\Delta_r(\hat{d}_{nr})| \\
&= O(1) \sum_{r=1}^m \left(\frac{P_r}{p_r} \right)^{\beta(\gamma k + k - 1) - k} |\mu_r| |\hbar_r|^k
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan (5.2) şartı ve Abel dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\beta(\gamma k+k-1)} |\Theta_{n,1}|^k &= O(1) \sum_{r=1}^{m-1} \Delta |\mu_r| \sum_{i=1}^r \left(\frac{P_i}{p_i} \right)^{\beta(\gamma k+k-1)-k} |\hbar_i|^k \\
&\quad + O(1) |\mu_m| \sum_{i=1}^m \left(\frac{P_i}{p_i} \right)^{\beta(\gamma k+k-1)-k} |\hbar_i|^k \\
&= O(1) \sum_{r=1}^{m-1} |\Delta \mu_r| \Phi_{r+1} + O(1) |\mu_m| \Phi_m
\end{aligned}$$

olur. Lemma 1.5.10 un (1.57) ve (1.58) şartları kullanıldığında

$$\sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\beta(\gamma k+k-1)} |\Theta_{n,1}|^k = O(1), \quad m \rightarrow \infty$$

elde edilir.

İkinci olarak

$$\sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\beta(\gamma k+k-1)} |\Theta_{n,2}|^k = \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\beta(\gamma k+k-1)} \left| \sum_{r=1}^{n-1} \frac{(r+1)}{r} \hat{d}_{n,r+1} (\Delta \mu_r) \hbar_r \right|^k$$

olup Hölder eşitsizliği ve (1.45) şartından

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\beta(\gamma k+k-1)} |\Theta_{n,2}|^k &= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\beta(\gamma k+k-1)} \left(\sum_{r=1}^{n-1} |\hat{d}_{n,r+1}| |\Delta \mu_r| |\hbar_r| \right)^k \\
&= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\beta(\gamma k+k-1)} \left(\sum_{r=1}^{n-1} r |\Delta_r(\hat{d}_{nr})| |\Delta \mu_r| |\hbar_r| \right)^k \\
&= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\beta(\gamma k+k-1)} \left(\sum_{r=1}^{n-1} r |\Delta_r(\hat{d}_{nr})| |\Delta \mu_r| |\hbar_r|^k \right) \\
&\quad \times \left(\sum_{r=1}^{n-1} r |\Delta_r(\hat{d}_{nr})| |\Delta \mu_r| \right)^{k-1}
\end{aligned}$$

elde edilir. En sağdaki toplama (3.3) ten $r|\Delta\mu_r| = O(1/\Phi_r) = O(1)$ olduğu, (3.14) ve (1.44) uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\beta(\gamma k+k-1)} |\Theta_{n,2}|^k &= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\beta(\gamma k+k-1)} \left(\sum_{r=1}^{n-1} r |\Delta_r(\hat{d}_{nr})| |\Delta\mu_r| |\hbar_r|^k \right) \\
&\quad \times \left(\sum_{r=1}^{n-1} |\Delta_r(\hat{d}_{nr})| \right)^{k-1} \\
&= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\beta(\gamma k+k-1)} \left(\sum_{r=1}^{n-1} r |\Delta_r(\hat{d}_{nr})| |\Delta\mu_r| |\hbar_r|^k \right) \times d_{nn}^{k-1} \\
&= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\beta(\gamma k+k-1)-k+1} \sum_{r=1}^{n-1} r |\Delta_r(\hat{d}_{nr})| |\Delta\mu_r| |\hbar_r|^k
\end{aligned}$$

bulunur. (5.1) şartı ve indis değişimi yardımı ile

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\beta(\gamma k+k-1)} |\Theta_{n,2}|^k &= O(1) \sum_{r=1}^m r |\Delta\mu_r| |\hbar_r|^k \sum_{n=r+1}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\beta(\gamma k+k-1)-k+1} |\Delta_r(\hat{d}_{nr})| \\
&= O(1) \sum_{r=1}^m r |\Delta\mu_r| |\hbar_r|^k \left(\frac{P_r}{p_r} \right)^{\beta(\gamma k+k-1)-k}
\end{aligned}$$

dir. Ayrıca (3.7) den $\Delta(r|\Delta\mu_r|) \leq r|\Delta^2\mu_r| + |\Delta\mu_{r+1}|$ bulunmuştu. Bu durumda (5.2) şartı ve Abel dönüşümünden faydalanılırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\beta(\gamma k+k-1)} |\Theta_{n,2}|^k &= O(1) \sum_{r=1}^{m-1} \Delta(r|\Delta\mu_r|) \sum_{i=1}^r \left(\frac{P_i}{p_i} \right)^{\beta(\gamma k+k-1)-k} |\hbar_i|^k \\
&\quad + O(1)m |\Delta\mu_m| \sum_{i=1}^m \left(\frac{P_i}{p_i} \right)^{\beta(\gamma k+k-1)-k} |\hbar_i|^k \\
&= O(1) \sum_{r=1}^{m-1} r |\Delta^2\mu_r| \sum_{i=1}^r \left(\frac{P_i}{p_i} \right)^{\beta(\gamma k+k-1)-k} |\hbar_i|^k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + O(1) \sum_{r=1}^{m-1} |\Delta \mu_{r+1}| \sum_{i=1}^r \left(\frac{P_i}{p_i} \right)^{\beta(\gamma k+k-1)-k} |\tilde{h}_i|^k \\
& + O(1) m |\Delta \mu_m| \sum_{i=1}^m \left(\frac{P_i}{p_i} \right)^{\beta(\gamma k+k-1)-k} |\tilde{h}_i|^k \\
& = O(1) \sum_{r=1}^{m-1} r |\Delta^2 \mu_r| \Phi_r + O(1) \sum_{r=1}^{m-1} |\Delta \mu_{r+1}| \Phi_r + O(1) m |\Delta \mu_m| \Phi_m
\end{aligned}$$

bulunur. (3.1), (1.58) ve (3.3) şartları kullanıldığında $m \rightarrow \infty$ iken

$$\sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\beta(\gamma k+k-1)} |\Theta_{n,2}|^k = O(1)$$

elde edilir. (1.45) ve Hölder eşitsizliği yardımı ile

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\beta(\gamma k+k-1)} |\Theta_{n,3}|^k & = \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\beta(\gamma k+k-1)} \left| \sum_{r=1}^{n-1} \hat{d}_{n,r+1} \mu_{r+1} \frac{\tilde{h}_r}{r} \right|^k \\
& = O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\beta(\gamma k+k-1)} \left(\sum_{r=1}^{n-1} |\hat{d}_{n,r+1}| |\mu_{r+1}| \frac{|\tilde{h}_r|}{r} \right)^k \\
& = O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\beta(\gamma k+k-1)} \left(\sum_{r=1}^{n-1} r |\Delta_r(\hat{d}_{nr})| |\mu_{r+1}| \frac{|\tilde{h}_r|}{r} \right)^k \\
& = O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\beta(\gamma k+k-1)} \left(\sum_{r=1}^{n-1} |\Delta_r(\hat{d}_{nr})| |\mu_{r+1}|^k |\tilde{h}_r|^k \right) \\
& \quad \times \left(\sum_{r=1}^{n-1} |\Delta_r(\hat{d}_{nr})| \right)^{k-1}
\end{aligned}$$

bulunur. (3.14) ve (1.44) beraber düşünülüp indis değişimi ve (5.1) şartından

$$\sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\beta(\gamma k+k-1)} |\Theta_{n,3}|^k = O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\beta(\gamma k+k-1)} \sum_{r=1}^{n-1} |\Delta_r(\hat{d}_{nr})| |\mu_{r+1}|^k |\tilde{h}_r|^k d_{nr}^{k-1}$$

$$\begin{aligned}
&= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\beta(\gamma k+k-1)-k+1} \sum_{r=1}^{n-1} \left| \Delta_r(\hat{d}_{nr}) \right| |\mu_{r+1}|^k |\hbar_r|^k \\
&= O(1) \sum_{r=1}^m |\mu_{r+1}|^k |\hbar_r|^k \sum_{n=r+1}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\beta(\gamma k+k-1)-k+1} \left| \Delta_r(\hat{d}_{nr}) \right| \\
&= O(1) \sum_{r=1}^m \left(\frac{P_r}{p_r} \right)^{\beta(\gamma k+k-1)-k} |\mu_{r+1}|^k |\hbar_r|^k
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan $\Theta_{n,1}$ in ispatında olduğu şekilde ilerlenirse, $m \rightarrow \infty$ iken

$$\sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\beta(\gamma k+k-1)} \left| \Theta_{n,3} \right|^k = O(1)$$

elde edilir. $\Theta_{n,4}$ için $\frac{n+1}{n} = O(1)$, (1.44) ve $\mu_n \rightarrow 0$ şartı kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\beta(\gamma k+k-1)} \left| \Theta_{n,4} \right|^k &= \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\beta(\gamma k+k-1)} \left| \frac{n+1}{n} d_{mn} \mu_n \hbar_n \right|^k \\
&= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\beta(\gamma k+k-1)} d_{mn}^k |\mu_n|^k |\hbar_n|^k \\
&= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\beta(\gamma k+k-1)-k} |\mu_n| |\mu_n|^{k-1} |\hbar_n|^k \\
&= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\beta(\gamma k+k-1)-k} |\mu_n| |\hbar_n|^k
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan $\Theta_{n,1}$ in ispatında olduğu gibi ilerlenirse, $m \rightarrow \infty$ iken

$$\sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\beta(\gamma k+k-1)} \left| \Theta_{n,4} \right|^k = O(1)$$

elde edilir.

Böylece $v = 1, 2, 3, 4$ için teoremimizin ispatı $m \rightarrow \infty$ iken

$$\sum_{n=1}^m \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\beta(\gamma k + k - 1)} |\Theta_{n,v}|^k = O(1)$$

sağlandığından tamamlanır.

5.2. $\sum a_n \eta_n$ Serisinin $|D, p_n, \beta; \gamma|_k$ Toplanabilmesi ve Fourier Serilerine Uygulaması

Bu kısımda daha zayıf şartlar altında $|D, p_n, \beta; \gamma|_k$ toplanabilme ile ilgili bir teoremin ifadesi ve ispatını yapıp Fourier serilerini kullanarak bir uygulaması verilecektir.

Teorem 5.2.1. $k \geq 1$ ve $\gamma \geq 0$ için $-\beta(\gamma k + k - 1) + k > 0$ olmak üzere $D = (d_{nr})$ pozitif normal matrisi (1.42) - (1.44) ve

$$\sum_{r=1}^{n-1} \frac{|\hat{d}_{n,r+1}|}{r} = O(d_{nn}), \quad n \rightarrow \infty \quad (5.3)$$

$$\sum_{n=r+1}^{m+1} \left(\frac{P_n}{P_r} \right)^{\beta(\gamma k + k - 1) - k + 1} |\Delta_r(\hat{d}_{nr})| = O \left\{ \left(\frac{P_r}{P_r} \right)^{\beta(\gamma k + k - 1) - k} \right\}, \quad m \rightarrow \infty \quad (5.4)$$

$$\sum_{n=r+1}^{m+1} \left(\frac{P_n}{P_r} \right)^{\beta(\gamma k + k - 1) - k + 1} |\hat{d}_{n,r+1}| = O(1), \quad m \rightarrow \infty \quad (5.5)$$

$$\sum_{n=1}^m \left(\frac{P_n}{P_n} \right)^{\beta(\gamma k + k - 1) - k} \frac{|\hat{h}_n|^k}{W_n^{k-1}} = O(W_m), \quad m \rightarrow \infty \quad (5.6)$$

şartlarını sağlasın.

Eğer Teorem 1.5.6'nın (1.48)-(1.50) şartları sağlanırsa $\sum a_n \eta_n$ serisi $|D, p_n, \beta; \gamma|_k$ toplanabilir [57]. Burada $\Delta_r(\hat{d}_{nr}) = \hat{d}_{nr} - \hat{d}_{n,r+1}$ eşitliğini göstermektedir.

Teorem 5.2.1 in ispatı: (Θ_n) , $\sum a_n \eta_n$ serisinin D dönüşümünü gösterebilir. Bu takdirde (1.40) ve (1.41) kullanılarak

$$\bar{\Delta} \Theta_n = \sum_{r=1}^n \frac{\hat{d}_{nr} \eta_r}{r} r a_r$$

elde edilir.

Abel dönüşümü kullanılarak

$$\begin{aligned} \bar{\Delta} \Theta_n &= \sum_{r=1}^{n-1} \Delta_r \left(\frac{\hat{d}_{nr} \eta_r}{r} \right) \sum_{j=1}^r j a_j + \frac{\hat{d}_{nn} \eta_n}{n} \sum_{j=1}^n j a_j \\ &= \sum_{r=1}^{n-1} \frac{r+1}{r} \Delta_r (\hat{d}_{nr}) \eta_r \hbar_r + \sum_{r=1}^{n-1} \frac{r+1}{r} \hat{d}_{n,r+1} \Delta \eta_r \hbar_r \\ &\quad + \sum_{r=1}^{n-1} \hat{d}_{n,r+1} \eta_{r+1} \frac{\hbar_r}{r} + \left(\frac{n+1}{n} \right) d_{nn} \eta_n \hbar_n \\ &= \Theta_{n,1} + \Theta_{n,2} + \Theta_{n,3} + \Theta_{n,4} \end{aligned}$$

bulunur.

$s = 1, 2, 3, 4$ olmak üzere Teorem 5.2.1 i ispatlamak için Minkowski eşitsizliğinden faydalanarak

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\beta(\gamma k + k - 1)} |\Theta_{n,s}|^k < \infty$$

olduğunun gösterilmesi yeterlidir.

İlk olarak Hölder eşitsizliğinden faydalanıp ardından (1.67) şartından $|\eta_n| = O\left(\frac{1}{W_n}\right)$ olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\beta(\gamma k + k - 1)} |\Theta_{n,1}|^k &= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\beta(\gamma k + k - 1)} \left(\sum_{r=1}^{n-1} |\Delta_r(\hat{d}_{nr})| |\eta_r| |\hbar_r| \right)^k \\ &= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\beta(\gamma k + k - 1)} \left(\sum_{r=1}^{n-1} |\Delta_r(\hat{d}_{nr})| |\eta_r|^k |\hbar_r|^k \right) \times \left(\sum_{r=1}^{n-1} |\Delta_r(\hat{d}_{nr})| \right)^{k-1} \end{aligned}$$

bulunur. Buradan (1.44) ve indis değişimi uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\beta(\gamma k+k-1)} |\Theta_{n,1}|^k &= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\beta(\gamma k+k-1)} d_m^{k-1} \sum_{r=1}^{n-1} |\Delta_r(\hat{d}_{nr})| |\eta_r| |\eta_r|^{k-1} |\hat{h}_r|^k \\
&= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\beta(\gamma k+k-1)-k+1} \sum_{r=1}^{n-1} |\Delta_r(\hat{d}_{nr})| |\eta_r| \frac{|\hat{h}_r|^k}{W_r^{k-1}} \\
&= O(1) \sum_{r=1}^m |\eta_r| \frac{|\hat{h}_r|^k}{W_r^{k-1}} \sum_{n=r+1}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\beta(\gamma k+k-1)-k+1} |\Delta_r(\hat{d}_{nr})|
\end{aligned}$$

elde edilir. (5.4) şartı ve Abel dönüşümü uygulandığında

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\beta(\gamma k+k-1)} |\Theta_{n,1}|^k &= O(1) \sum_{r=1}^m \left(\frac{P_r}{p_r} \right)^{\beta(\gamma k+k-1)-k} |\eta_r| \frac{|\hat{h}_r|^k}{W_r^{k-1}} \\
&= O(1) \sum_{r=1}^{m-1} \Delta |\eta_r| \sum_{i=1}^r \left(\frac{P_i}{p_i} \right)^{\beta(\gamma k+k-1)-k} \frac{|\hat{h}_i|^k}{W_i^{k-1}} \\
&\quad + O(1) |\eta_m| \sum_{i=1}^m \left(\frac{P_i}{p_i} \right)^{\beta(\gamma k+k-1)-k} \frac{|\hat{h}_i|^k}{W_i^{k-1}}
\end{aligned}$$

bulunur. (5.6) ve Lemma 1.5.15 ten

$$\sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\beta(\gamma k+k-1)} |\Theta_{n,1}|^k = O(1) \sum_{r=1}^{m-1} |\Delta \eta_r| W_r + O(1) \eta_m W_m = O(1), \quad m \rightarrow \infty$$

bulunur.

Şimdi $r |\Delta \eta_r| = O\left(\frac{1}{W_r}\right) = O(1)$ olduğu, (5.3) şartı ve Hölder eşitsizliği uygulanarak

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\beta(\gamma k+k-1)} |\Theta_{n,2}|^k &= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\beta(\gamma k+k-1)} \left(\sum_{r=1}^{n-1} \hat{d}_{n,r+1} |\Delta \eta_r| |\hat{h}_r| \right)^k \\
&= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\beta(\gamma k+k-1)} \left(\sum_{r=1}^{n-1} \hat{d}_{n,r+1} (r |\Delta \eta_r|)^k \frac{|\hat{h}_r|^k}{r} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\sum_{r=1}^{n-1} \frac{|\hat{d}_{n,r+1}|}{r} \right)^{k-1} \\
& = O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\beta(\gamma k+k-1)} d_{nm}^{k-1} \left(\sum_{r=1}^{n-1} |\hat{d}_{n,r+1}| (r|\Delta\eta_r|) (r|\Delta\eta_r|)^{k-1} \frac{|\hat{h}_r|^k}{r} \right) \\
& = O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\beta(\gamma k+k-1)-k+1} \left(\sum_{r=1}^{n-1} |\hat{d}_{n,r+1}| (r|\Delta\eta_r|) (r|\Delta\eta_r|)^{k-1} \frac{|\hat{h}_r|^k}{r} \right) \\
& = O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\beta(\gamma k+k-1)-k+1} \left(\sum_{r=1}^{n-1} |\hat{d}_{n,r+1}| (r|\Delta\eta_r|) \frac{|\hat{h}_r|^k}{r W_r^{k-1}} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. İndis değişimi ve (5.5) şartı kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\beta(\gamma k+k-1)} |\Theta_{n,2}|^k & = O(1) \sum_{r=1}^m r |\Delta\eta_r| \frac{|\hat{h}_r|^k}{r W_r^{k-1}} \sum_{n=r+1}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\beta(\gamma k+k-1)-k+1} |\hat{d}_{n,r+1}| \\
& = O(1) \sum_{r=1}^m (r|\Delta\eta_r|) \frac{|\hat{h}_r|^k}{r W_r^{k-1}}
\end{aligned}$$

bulunur. Abel kısmi toplam formülü, teoremin hipotezi ve Lemma 1.5.15 kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\beta(\gamma k+k-1)} |\Theta_{n,2}|^k & = O(1) \sum_{r=1}^{m-1} \Delta(r|\Delta\eta_r|) \sum_{i=1}^r \frac{|\hat{h}_i|^k}{i W_i^{k-1}} + O(1) m |\Delta\eta_m| \sum_{i=1}^m \frac{|\hat{h}_i|^k}{i W_i^{k-1}} \\
& = O(1) \sum_{r=1}^{m-1} r |\Delta^2\eta_r| W_r + O(1) \sum_{r=1}^{m-1} |\Delta\eta_{r+1}| W_{r+1} + O(1) m |\Delta\eta_m| W_m \\
& = O(1), m \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

elde edilir.

Tekrar, Hölder eşitsizliği ile (5.3) şartı kullanıldığında

$$\sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\beta(\gamma k+k-1)} |\Theta_{n,3}|^k = O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\beta(\gamma k+k-1)} \left(\sum_{r=1}^{n-1} |\hat{d}_{n,r+1}| |\eta_{r+1}| \frac{|\hat{h}_r|}{r} \right)^k$$

$$\begin{aligned}
&= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\beta(\gamma k+k-1)} \left(\sum_{r=1}^{n-1} |\hat{d}_{n,r+1}| |\eta_{r+1}|^k \frac{|\hbar_r|^k}{r} \right) \\
&\quad \times \left(\sum_{r=1}^{n-1} \frac{|\hat{d}_{n,r+1}|}{r} \right)^{k-1} \\
&= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\beta(\gamma k+k-1)} d_m^{k-1} \sum_{r=1}^{n-1} |\hat{d}_{n,r+1}| |\eta_{r+1}| |\eta_{r+1}|^{k-1} \frac{|\hbar_r|^k}{v} \\
&= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\beta(\gamma k+k-1)-k+1} \sum_{r=1}^{n-1} |\hat{d}_{n,r+1}| |\eta_{r+1}| \frac{|\hbar_r|^k}{r W_r^{k-1}}
\end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan indis değişimi yapılarak (5.5) şartı kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\beta(\gamma k+k-1)} |\Theta_{n,3}|^k &= O(1) \sum_{r=1}^m |\eta_{r+1}| \frac{|\hbar_r|^k}{r W_r^{k-1}} \sum_{n=r+1}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\beta(\gamma k+k-1)-k+1} |\hat{d}_{n,r+1}| \\
&= O(1) \sum_{r=1}^m |\eta_{r+1}| \frac{|\hbar_r|^k}{r W_r^{k-1}}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Buradan Abel dönüşümü uygulandıktan sonra (1.50) şartı ve Lemma 1.5.15 ten

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\beta(\gamma k+k-1)} |\Theta_{n,3}|^k &= O(1) \sum_{r=1}^{m-1} \Delta |\eta_{r+1}| \sum_{i=1}^r \frac{|\hbar_i|^k}{i W_i^{k-1}} + O(1) m |\Delta \eta_m| \sum_{i=1}^m \frac{|\hbar_i|^k}{i W_i^{k-1}} \\
&= O(1) \sum_{r=1}^{m-1} |\Delta \eta_{r+1}| W_{r+1} + O(1) m |\Delta \eta_m| W_m = O(1), \quad m \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

bulunur.

Son olarak Teorem 5.2.1 in hipotezleri ve Lemma 1.5.15 ten

$$\sum_{n=1}^m \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\beta(\gamma k+k-1)} |\Theta_{n,4}|^k = O(1) \sum_{n=1}^m \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\beta(\gamma k+k-1)} d_m^k |\eta_n|^k |\hbar_n|^k$$

$$= O(1) \sum_{n=1}^m \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\beta(\gamma k + k - 1) - k} |\eta_n| \frac{|\hbar_n|^k}{W_n^{k-1}}$$

bulunur. Benzer şekilde $\Theta_{n,1}$ in ispatında olduğu gibi ilerlenirse, $m \rightarrow \infty$ iken

$$\sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\beta(\gamma k + k - 1)} |\Theta_{n,4}|^k = O(1)$$

elde edilir.

Böylece teoremimizin ispatı $s = 1, 2, 3, 4$ için

$$\sum_{n=1}^m \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\beta(\gamma k + k - 1)} |\Theta_{n,s}|^k = O(1), \quad m \rightarrow \infty$$

sağlandığından tamamlanır.

Teorem 5.2.2. (1.22) deki gibi tanımlı f fonksiyonunun trigonometrik Fourier fonksiyonu (1.54) deki gibi tanımlansın. $\psi_1(t) \in BV(0, \pi)$ olsun. $k \geq 1$, $\gamma \geq 0$ ve $-\beta(\gamma k + k - 1) > 0$ olmak üzere $(p_n), (\eta_n), (W_n)$ dizileri ve $D = (d_{nr})$ matrisi Teorem 5.2.1 in şartlarını sağlarsa $\sum C_n(x) \eta_n$ serisi $|D, p_n, \beta; \gamma|_k$ toplanabildir.

Teorem 5.2.2 nin ispatı: Teorem 1.5.8 den $\hbar_n(x) = O(1)$ olduğundan dolayı teoremin ispatı açıktır.

6. BÖLÜM

FOURIER SERİLERİNİN L_1 YAKINSAMASI ÜZERİNE TEOREM VE UYGULAMASI

6.1. Riesz Ortalaması Yardımıyla Fourier Serilerinin L_1 Yakınsaması ve Uygulaması

Bilindiği üzere Fourier serilerinin L_1 normuna göre yakınsaması için gerek yeter koşullar üzerine birçok çalışma [8]-[11] yapılmıştır. Bu bölümde Teorem 1.5.7 daha genel Riesz ortalaması alınarak ispatlanacaktır. Bunun için Riesz çekirdeği tanımlanıp özellikleri gösterilecektir. Teoremimizin ispatından sonra bir Fourier serisi örneği verilip grafiklerindeki değişim incelenecektir.

Tanım 6.1.1. $S_n(f, x) = S_n(x)$ dizisi trigonometrik Fourier serisinin n. kısmi toplamlar dizisini gösterebilir. a_n ve b_n Fourier katsayıları olmak üzere,

$$S_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_n(t)dt \quad (6.1)$$

yazılabilir. (1.24) ve (1.26) kullanılarak

$$\bar{t}_n(x) = \frac{1}{P_n} \sum_{r=0}^n p_r \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_r(t)dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\bar{K}_n(t)dt \quad (6.2)$$

Fourier serisinin Riesz ortalaması elde edilir. Burada

$$\bar{K}_n(t) = \frac{1}{P_n} \sum_{r=0}^n p_r D_r(t) \quad (6.3)$$

ifadesine Riesz çekirdeği denir.

Teorem 6.1.2. $f(x)$ Fourier serisi (1.53) teki gibi tanımlansın ve pozitif sayıların bir (p_n) dizisi

$$P_n \sim O(np_n) \quad (6.4)$$

şartını sağlasın. $\bar{\tau}_n(x)$ dizisi $S_n(x)$ in (\bar{N}, p_n) ortalamasını göstermek üzere $n \rightarrow \infty$ iken $\|S_n(x) - \bar{\tau}_n(x)\| = o(1)$ dir ancak ve ancak $(a_n + b_n) \log n = o(1)$ dir [58].

Teoremin ispatı için aşağıdaki lemmalara ihtiyaç vardır.

Lemma 6.1.3 (a_n) dizisi $n \rightarrow \infty$ iken $a_n \rightarrow 0$ şartını sağlayan bir quasi monoton dizi olsun ve $a_n \log n = o(1)$ şartını sağlasın. Eğer (6.4) şartı sağlanırsa

$$\frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^n P_k |\Delta a_k| \log k = o(1), n \rightarrow \infty \quad (6.5)$$

dur [58].

Lemma 6.1.3 ün İspatı: Abel kısmi toplam formülü kullanılarak

$$\begin{aligned} \frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^n p_k a_k \log k &= \frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^{n-1} \Delta(a_k \log k) \sum_{r=1}^k p_r + \frac{1}{P_n} a_n \log n \sum_{r=1}^n p_r \\ &= \frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^{n-1} \Delta(a_k \log k) P_k + \frac{1}{P_n} a_n \log n P_n \end{aligned}$$

elde edilir.

Ayrıca

$$\begin{aligned} \Delta(a_k \log k) &= a_k \log k - a_{k+1} \log(k+1) + a_{k+1} \log k - a_{k+1} \log k \\ &= \log k \Delta a_k + a_{k+1} \Delta \log k \end{aligned}$$

olduğundan

$$\frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^{n-1} P_k \log k \Delta a_k = \frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^n p_k a_k \log k + \frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^{n-1} P_k a_{k+1} (\bar{\Delta} \log k) - a_n \log n$$

bulunur. Eşitsizliğin sağ tarafındaki ilk toplam için Stolz teoremi kullanılarak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n p_k a_k \log k - \sum_{k=1}^{n-1} p_k a_k \log k}{P_n - P_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n a_n \log n}{P_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \log n = 0$$

elde edilir. Böylece

$$\frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^n p_k a_k \log k = o(1), n \rightarrow \infty \quad (6.6)$$

bulunur.

Benzer şekilde eşitliğin sağ tarafındaki ikinci toplam için

$$0 < \bar{\Delta} \log k = \log(k+1) - \log k = \log\left(\frac{k+1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}$$

eşitsizliği ve (6.4) şartı ile birlikte Stolz teoremi uygulanırsa

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n k p_k a_{k+1} (\bar{\Delta} \log k) - \sum_{k=1}^{n-1} k p_k a_{k+1} (\bar{\Delta} \log k)}{P_n - P_{n-1}} \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n p_k a_{k+1} - \sum_{k=1}^{n-1} p_k a_{k+1}}{P_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n a_{n+1}}{P_n} = 0 \end{aligned}$$

dir. Sandviç teoremi gereğince

$$\frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^{n-1} P_k a_{k+1} (\bar{\Delta} \log k) = o(1), n \rightarrow \infty$$

bulunur.

Bu nedenle hipotezden $n \rightarrow \infty$ iken $a_n \log n = o(1)$ olduğundan

$$\frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^{n-1} P_k \log k \Delta a_k = o(1), n \rightarrow \infty \quad (6.7)$$

elde edilir.

Diğer taraftan (a_n) quasi monoton dizi olduğundan $\alpha > 0$ için $|\Delta a_k| \leq \Delta a_k + \frac{2\alpha a_k}{k}$ olduğu açıktır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^{n-1} P_k \log k |\Delta a_k| &\leq \frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^n P_k \log k \left(\Delta a_k + \frac{2\alpha a_k}{k} \right) \\ &= \frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^n P_k \log k \Delta a_k + \frac{2\alpha}{P_n} \sum_{k=1}^n P_k \frac{a_k}{k} \log k \end{aligned}$$

olur. Eşitsizliğin en sağındaki toplama Stolz teoremini uygulanırsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\alpha \left(\sum_{k=1}^n p_k a_k \log k - \sum_{k=1}^{n-1} p_k a_k \log k \right)}{P_n - P_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\alpha p_n a_n \log n}{p_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2\alpha a_n \log n = 0 \quad (6.8)$$

bulunur. Bu nedenle (6.7) ve (6.8) den $n \rightarrow \infty$ iken

$$\frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^{n-1} P_k \log k |\Delta a_k| = o(1)$$

elde edilir.

Lemma 6.1.4. (p_n) pozitif artmayan bir dizi olsun. $\bar{K}_n(t)$ Riesz çekirdeği aşağıdaki özellikleri sağlar:

- i. $\bar{K}_n(t)$, 2π periyotlu negatif olmayan çift bir fonksiyondur.
- ii. Her n için, $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{K}_n(t) dt = 1$.
- iii. Her $\delta > 0$ için $[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$ aralığında $\bar{K}_n(t) \rightarrow 0$ düzgün yakınsar [58].

Lemma 6.1.4 ün ispatı:

i. Dirichlet çekirdeği 2π periyotlu çift fonksiyon olduğundan (1.28) den

$$\bar{K}_n(t) = \frac{1}{P_n} \sum_{r=0}^n p_r D_r(t) = \frac{1}{P_n} \sum_{r=0}^n p_r D_r(-t) = \bar{K}_n(-t) \quad (6.9)$$

ve

$$\bar{K}_n(t) = \frac{1}{P_n} \sum_{r=0}^n p_r D_r(t) = \frac{1}{P_n} \sum_{r=0}^n p_r D_r(t+2\pi) = \bar{K}_n(t+2\pi) \quad (6.10)$$

olup Riesz çekirdeğinin 2π periyotlu çift fonksiyon olduğu açıktır. Şimdi Riesz çekirdeğinin negatif olmayan bir fonksiyon olduğunu gösterelim. Öncelikle Abel kısmi toplam formülü kullanılarak

$$\begin{aligned} \bar{K}_n(t) &= \frac{1}{P_n} \sum_{r=0}^n p_r D_r(t) = \frac{1}{P_n} \sum_{r=0}^n p_r \frac{\sin\left((2r+1)\frac{t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \\ &= \frac{1}{P_n} \sum_{r=0}^{n-1} \Delta p_r \sum_{j=0}^r \frac{\sin\left((2j+1)\frac{t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} + \frac{p_n}{P_n} \sum_{j=0}^n \frac{\sin\left((2j+1)\frac{t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \end{aligned}$$

bulunur. Burada içerideki toplamları $\sin\left(\frac{t}{2}\right)$ ile çarpıp bölünürse

$$\bar{K}_n(t) = \frac{1}{P_n} \sum_{r=0}^{n-1} \Delta p_r \sum_{j=0}^r \frac{\sin\left((2j+1)\frac{t}{2}\right) \sin\left(\frac{t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right) \sin\left(\frac{t}{2}\right)} + \frac{p_n}{P_n} \sum_{j=0}^n \frac{\sin\left((2j+1)\frac{t}{2}\right) \sin\left(\frac{t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right) \sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

bulunur. $\sin a \sin b = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2}$ özdeşliği uygulanır ve (p_n) dizisinin pozitif

olduğu göz önünde bulundurulursa

$$\begin{aligned}
\bar{K}_n(t) &= \frac{1}{P_n} \sum_{r=0}^{n-1} \Delta p_r \sum_{j=0}^r \frac{\cos jt - \cos(j+1)t}{4 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} + \frac{p_n}{P_n} \sum_{j=0}^n \frac{\cos jt - \cos(j+1)t}{4 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} \\
&= \frac{1}{P_n} \sum_{r=0}^{n-1} \Delta p_r \frac{1}{4 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} \{1 - \cos((r+1)t)\} + \frac{p_n}{P_n} \frac{1}{4 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} \{1 - \cos((n+1)t)\} \\
&= \frac{1}{P_n} \sum_{r=0}^{n-1} \Delta p_r \frac{\left\{1 - \left(1 - 2 \sin^2\left(r+1\right)\left(\frac{t}{2}\right)\right)\right\}}{4 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} + \frac{p_n}{P_n} \frac{\left\{1 - \left(1 - 2 \sin^2\left(n+1\right)\left(\frac{t}{2}\right)\right)\right\}}{4 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} \\
&= \frac{1}{P_n} \sum_{r=0}^{n-1} (p_r - p_{r+1}) \frac{\sin^2\left((r+1)\frac{t}{2}\right)}{2 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} + \frac{p_n}{P_n} \frac{\sin^2\left((n+1)\frac{t}{2}\right)}{2 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} \geq 0
\end{aligned}$$

elde edilir.

ii. Öncelikle (1.22) de $f(x) = 1$ alınırsa $\frac{a_0}{2} = 1$, $a_n = b_n = 0$ ve $S_n(f, x) = 1$ elde edilir.

Bu nedenle (1.26) dan

$$1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_r(t) dt \quad (6.11)$$

bulunur. Bu eşitlik Dirichlet integrali olarak bilinmektedir. O halde

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{K}_n(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{P_n} \sum_{r=0}^n p_r D_r(t) dt = \frac{1}{P_n} \sum_{r=0}^n p_r \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_r(t) dt = \frac{1}{P_n} \sum_{r=0}^n p_r = 1$$

elde edilir.

iii. Verilen bir $\delta > 0$ sayısı için $\delta \leq |t| \leq \pi$ olmak üzere (p_n) pozitif artmayan dizi

ve $\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)$ bu aralıkta artan bir fonksiyon olduğundan $\sin^2\left(\frac{t}{2}\right) \geq \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)$ dir.

Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
\bar{K}_n(t) &= \frac{1}{P_n} \sum_{r=0}^n p_r D_r(t) = \frac{1}{P_n} \sum_{r=0}^n p_r \frac{\sin\left(\frac{(2r+1)t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \\
&\leq \frac{p_0}{P_n} \sum_{r=0}^n \frac{\sin\left(\frac{(2r+1)t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \\
&= \frac{p_0}{2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)P_n} \sum_{r=0}^n \sin\left(\frac{(2r+1)t}{2}\right) \sin\left(\frac{t}{2}\right) \\
&= \frac{p_0}{4\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)P_n} \sum_{r=0}^n \left\{ \cos\left(\frac{2rt}{2}\right) - \cos\left(\frac{2(r+1)t}{2}\right) \right\} \\
&= \frac{p_0}{4\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)P_n} \left\{ 1 - \cos\left(\frac{2(n+1)t}{2}\right) \right\} \\
&= \frac{p_0}{4\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)P_n} \left\{ 1 - \left(1 - 2\sin^2\left(\frac{(n+1)t}{2}\right) \right) \right\} \\
&= \frac{p_0}{2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)P_n} \sin^2\left(\frac{(n+1)t}{2}\right) \leq \frac{C}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)P_n}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada C sabit bir reel sayıdır. Böylece Lemma 6.1.4 ün ispatı tamamlanır.

Lemma 6.1.5. $f \in L_1$ ve (p_n) pozitif artmayan bir dizi olsun. Bu takdirde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |\bar{\tau}_n(x) - f(x)| dx = 0$$

dir [58].

Lemma 6.1.5 in ispatı: Lemma 6.1.4 ün (i) ve (iii) özellikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} |\bar{r}_n(x) - f(x)| dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \bar{K}_n(t) dt - f(x) \right| dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \bar{K}_n(t) dt - \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \bar{K}_n(t) dt \right) \right| dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{K}_n(t) \{f(x-t) - f(x)\} dt \right| dx \\
&\leq \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \bar{K}_n(t) |f(x-t) - f(x)| dt dx \\
&\quad + \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} \bar{K}_n(t) |f(x-t) - f(x)| dt dx \\
&= J_1 + J_2.
\end{aligned}$$

İlk olarak J_1 için, $f \in L_1$ ve Lemma 6.1.4 (ii) den dolayı

$$\begin{aligned}
J_1 &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \bar{K}_n(t) |f(x-t) - f(x)| dt dx = \int_{-\delta}^{\delta} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{K}_n(t) |f(x-t) - f(x)| dx dt \\
&= \int_{-\delta}^{\delta} \bar{K}_n(t) \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)| dx dt \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \bar{K}_n(t) dt < \frac{\varepsilon}{2\pi} \pi = \frac{\varepsilon}{2} \tag{6.12}
\end{aligned}$$

bulunur. Şimdi J_2 için, integrallerin sınırları sabit olduğu akılda tutularak integrallerin sırası değiştirilirse

$$J_2 = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} \bar{K}_n(t) |f(x-t) - f(x)| dt dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{K}_n(t) |f(x-t) - f(x)| dx dt \\
&= \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} \bar{K}_n(t) \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)| dx dt
\end{aligned}$$

olur. Her $\delta > 0$ için, Lemma 6.1.4 (iii) den

$$J_2 = 2\|f\|_1 \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} \bar{K}_n(t) dt \leq 2\|f\|_1 \sup_{\delta \leq |t| \leq \pi} \bar{K}_n(t) < \frac{\varepsilon}{2} \quad (6.13)$$

bulunur. O halde (6.12) ve (6.13) birleştirilerek Lemma 6.1.5 in ispatı tamamlanır.

Teorem 6.1.2 nin ispatı: Sadece kosinüs serisinin ispatı yapılacaktır. Sinüs serisinin ispatı temelde aynıdır. Toplamların sırası değiştirilerek

$$\begin{aligned}
\|S_n(x) - \bar{v}_n(x)\| &= \left\| \sum_{k=1}^n a_k \cos kx - \frac{1}{P_n} \sum_{r=1}^n p_r \sum_{k=1}^r a_k \cos kx \right\| \\
&= \left\| \sum_{k=1}^n a_k \cos kx - \frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^n a_k \cos kx (P_n - P_{k-1}) \right\| \\
&= \frac{1}{P_n} \left\| \sum_{k=1}^n P_{k-1} a_k \cos kx \right\|
\end{aligned}$$

olur. Abel kısmi toplam formülü uygulanırsa

$$\|S_n(x) - \bar{v}_n(x)\| \leq \frac{1}{P_n} \left\| \sum_{k=1}^{n-1} \Delta(P_{k-1} a_k) \sum_{j=1}^k \cos jx + P_{n-1} a_n \sum_{j=1}^n \cos jx \right\|$$

bulunur.

$$\Delta(P_{k-1} a_k) = P_{k-1} a_k - P_k a_{k+1} - P_k a_k + P_k a_k = P_k \Delta a_k - p_k a_k$$

olduğu kullanılarak

$$\|S_n(x) - \bar{\tau}_n(x)\| \leq \frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^{n-1} P_k |\Delta a_k| \left\| D_k(x) - \frac{1}{2} \right\| + \frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^{n-1} p_k a_k \left\| D_k(x) - \frac{1}{2} \right\| + \frac{P_{n-1}}{P_n} a_n \left\| D_n(x) - \frac{1}{2} \right\|$$

elde edilir. (1.69) ve (1.70) ten

$$\begin{aligned} \|S_n(x) - \bar{\tau}_n(x)\| &\leq \frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^{n-1} P_k \log k |\Delta a_k| + \frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^{n-1} p_k a_k \log k + \frac{P_{n-1}}{P_n} a_n \log n \\ &= o(1), \quad n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise ispatımızın gereklilik kısmını tamamlar.

Şimdi teoremimizin yeter kısmını ispatlayalım. Kabul edelim ki $n \rightarrow \infty$ iken

$\|S_n - \bar{\tau}_n\| = o(1)$ olsun. Üçgen eşitsizliği kullanılarak

$$\|S_n - \bar{\tau}_n\| + \|\bar{\tau}_n - f\| \geq \|S_n - f\| \geq C \sum_{k=1}^n \frac{a_{n+k}}{k}$$

C pozitif sabit olmak üzere Lemma 6.1.5 ten $n \rightarrow \infty$ iken $\|\bar{\tau}_n - f\| = o(1)$ olduğundan

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_{n+k}}{k} = o(1), \quad n \rightarrow \infty$$

elde edilir.

Ayrıca (a_n) dizisi quasi monoton dizi olup $n^{-\alpha} a_n \downarrow 0$ olduğundan ve Euler-Maclauren

formülünden $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \log n + \gamma + o(1)$ olduğu kullanılarak

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_{n+k}}{k} \geq n^\alpha \sum_{k=1}^n \frac{a_{n+k}}{k(n+k)^\alpha} \geq \frac{n^\alpha a_{2n} \log n}{(2n)^\alpha} = \left(\frac{1}{2}\right)^\alpha a_{2n} \log n$$

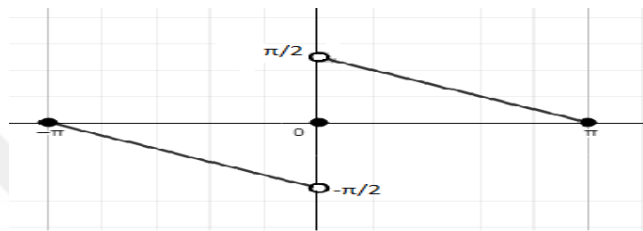
elde edilir. Dolayısıyla $a_n \log n = o(1)$, $n \rightarrow \infty$ elde edilir. Böylece Teorem 6.1.2 in ispatı tamamlanır.

Teoremimizle ilgili aşağıdaki örneği verelim.

Örnek 6.1.6. $[-\pi, \pi]$ aralığında 2π periyotlu

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi-x}{2}, & 0 < x \leq \pi \text{ için} \\ 0, & x = 0 \text{ için} \\ \frac{-\pi-x}{2}, & -\pi \leq x < 0 \text{ için} \end{cases} \quad (6.14)$$

fonksiyonunu ele alalım. $[-\pi, \pi]$ aralığında f fonksiyonu çizilirse



Şekil 5. $f(x)$ fonksiyonunun grafiği

f fonksiyonu orijine göre simetrik olduğundan tek fonksiyondur. Dolayısıyla tüm a_n Fourier katsayıları 0 olur. O zaman kısmi integrasyon formülünü kullanarak b_n Fourier katsayıları

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\pi-x}{2} \sin nx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left\{ \left(\frac{\pi-x}{2} \right) \left(\frac{-\cos nx}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{-\sin nx}{n^2} \right) \right\} \Bigg|_0^{\pi} = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

bulunur. Buradan $[-\pi, \pi]$ aralığında $f(x)$ in Fourier serisi

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} \quad (6.15)$$

dir. (6.15) in kısmi toplamlar dizisi $S_n(x)$

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k} \quad (6.16)$$

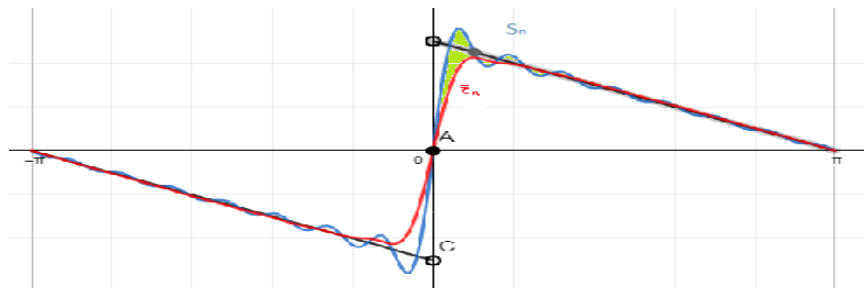
bulunur. Eğer Teorem 6.1.2 de $p_n = 1$ alınırsa (6.4) şartı sağlanır. Ayrıca $(b_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ dizisi quasi monoton dizi olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \log n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n} = 0$$

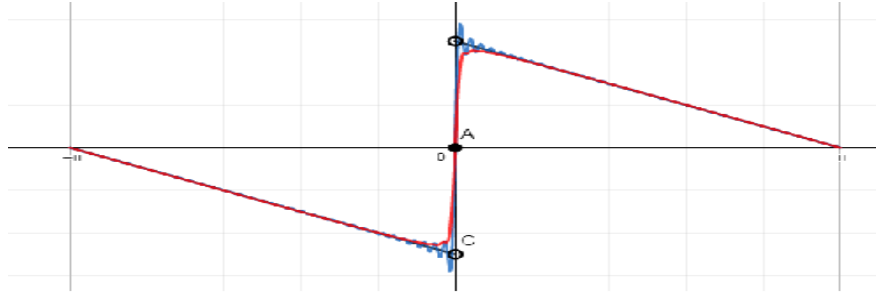
sağlanır. Lemma 1.5.17 den

$$\begin{aligned} \|S_n(x) - \bar{\tau}_n(x)\| &= \left\| \sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k} - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^j \frac{\sin kx}{k} \right\| = \left\| \sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k} \sum_{j=k}^n 1 \right\| \\ &= \left\| \sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k} (n-k+1) \right\| \\ &\leq \frac{2}{n} \left\| \sum_{k=1}^n \sin kx \right\| \\ &= \frac{2}{n} \|\tilde{D}_n(x)\| \sim \frac{2 \log n}{n} = o(1), n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Şimdi aşağıda $n=15$ ve $n=75$ için $f(x)$ (siyah), $S_n(x)$ (mavi) ve $\bar{\tau}_n(x)$ (kırmızı) fonksiyonlarının grafiklerini çizelim.



Şekil 6. $n=15$ için $f(x)$ fonksiyonunun Riesz ortalaması



Şekil 7. $n = 75$ için $f(x)$ fonksiyonunun Riesz ortalaması

Buradan $S_n(x)$ ve $\bar{r}_n(x)$ arasındaki alan n değeri arttıkça yeterince küçük kalmaktadır ve her iki grafikte de süreksizlik noktasında Fourier serisinde aşınım görülmektedir. Fakat Fourier serisinin (\bar{N}, P_n) ortalaması daha yavaş ve yumuşak yakınsadığı için buradaki aşınım azalmaktadır.

7. BÖLÜM

SONUÇ VE ÖNERİLER

7.1. Sonuçlar

Sonuç 7.1.1. Teorem 3.1.1 de tüm n ler için $p_n = 1$ alındığında sonsuz serilerin $|C, 1|_k$ toplanabilmesi ile alakalı bir sonuç bulunur.

Sonuç 7.1.2. Teorem 3.2.1 de $d_{nr} = \frac{P_r}{P_n}$ alındığında (1.42)-(1.45) şartları otomatik olarak sağlanır ve sonsuz serilerin $|\bar{N}, p_n|_k$ toplanabilmesine ilişkin bir sonuç ortaya çıkar.

Sonuç 7.1.3. Teorem 3.2.1 de $d_{nr} = \frac{P_r}{P_n}$ ve tüm n ler için $p_n = 1$ alındığında sonsuz serilerin $|C, 1|_k$ toplanabilmesine ilişkin bir sonuç ortaya çıkar.

Sonuç 7.1.4. Teorem 3.3.1 de $\gamma = 0$ ve $d_{nr} = \frac{P_r}{P_n}$ alındığında Teorem 3.1.1 elde edilir [51]. Bu durumda (3.16) şartı direkt sağlanırken (3.17) şartı (3.2) şartına indirgenir.

Sonuç 7.1.5. Teorem 3.3.1 de $\gamma = 0$ alındığında sonsuz seriler için $|D, p_n|_k$ toplanabilirliği ile alakalı bir sonuç ortaya çıkar.

Sonuç 7.1.6. Teorem 4.1.1 de $\varphi_n = \frac{P_n}{p_n}$ alındığında Teorem 1.5.5 elde edilir [44]. Bu

taktirde $\left(\frac{\varphi_n P_n}{P_n}\right)$ dizisinin artmayan olması şartına gerek kalmaz ve (4.1) şartı da (1.47) şartına indirgenir.

Sonuç 7.1.7. Teorem 4.1.1 de $\varphi_n = \frac{P_n}{p_n}$ ve $d_{nr} = \frac{P_r}{P_n}$ seçilirse sonsuz serilerin $|\bar{N}, p_n|_k$ toplanabilmesine dair bir sonuca ulaşılır [48].

Sonuç 7.1.8. Teorem 4.1.1 de $\varphi_n = n$, $d_{nr} = \frac{P_r}{P_n}$ ve tüm n ler için $p_n = 1$ alındığında $\kappa_n \sim \log n$ durumunda sonsuz serilerin $|C, 1|_k$ toplanabilmesine ilişkin bir sonuca ulaşılır [59].

Sonuç 7.1.9. Teorem 4.2.1 de $\gamma = 0$, $\varphi_n = \frac{P_n}{p_n}$ ve $d_{nr} = \frac{P_r}{P_n}$ alındığında Teorem 1.5.4 elde edilir. Bu taktirde (4.4) ve (4.5) şartları sırası ile (1.36) ve (1.37) şartlarına indirgenir.

Sonuç 7.1.10. Teorem 4.2.1 de de $\gamma = 0$ ve $\varphi_n = \frac{P_n}{p_n}$ alındığında sonsuz seriler için $|D, p_n|_k$ toplanabilmesine dair bir sonuç elde edilir [60].

Sonuç 7.1.11. Teorem 5.1.1 de $\beta = 1$, $\gamma = 0$ ve $d_{nr} = \frac{P_r}{P_n}$ alındığında Teorem 3.1.1 elde edilir [51]. Bu durumda (5.1) şartı direkt sağlanırken (5.2) şartı (3.2) şartına indirgenir.

Sonuç 7.1.12. Teorem 5.1.1 de $\beta = 1$ ve $\gamma = 0$ için sonsuz serilerin $|D, p_n|_k$ toplanabilmesine dair bir sonuç bulunur.

Sonuç 7.1.13. Teorem 5.1.1 de $\beta = 1$, $\gamma = 0$, $d_{nr} = \frac{P_r}{P_n}$ ve tüm n ler için $p_n = 1$ alındığında sonsuz serilerin $|C, 1|_k$ toplanabilmesine ilişkin bir sonuca ulaşılır.

Sonuç 7.1.14. Teorem 5.2.1 de $\beta = 1$, $\gamma = 0$ ve $d_{nr} = \frac{P_r}{P_n}$ alınırsa Teorem 1.5.6 elde edilir. Bu taktirde (5.3)-(5.5) şartları otomatik sağlanırken (5.6) şartı (1.51) e indirgenir.

Sonuç 7.1.15. Teorem 5.2.2 de $\beta = 1$, $\gamma = 0$ ve $d_{nr} = \frac{P_r}{P_n}$ alınırsa Fourier serilerinin $|\bar{N}, p_n|_k$ toplanabilmesi ile ilişkin bir sonuca ulaşılır [45].

Sonuç 7.1.16. Teorem 6.1.2 de tüm n ler için alındığında (6.4) şartına gerek kalmaz ve Teorem 1.5.7 elde edilir. Lemma 6.1.3, [11] de verilen lemmaya indirgenir. Ayrıca tanımlamış olduğumuz $\bar{K}_n(t)$ Riesz çekirdeği Fejer çekirdeğine dönüşeceğinden Lemma 6.1.4 ve Lemma 6.1.5 Fejer toplamı için bilinen özelliklere indirgenir.

7.2. Öneriler

Bu tez çalışmasında elde edilen teoremler ve uygulamalar ileride yapılacak çalışmalara ışık tutacaktır. Özellikle Fourier serilerinin toplanabilmesi ile ilgili çalışmalar sinyal işleme, görüntü işleme, ısı dalgı denklemleri gibi mühendislik biliminin çeşitli alanlarına katkı sağlayabilir. İyi bilinen Fourier serilerinin süreksizlik noktalarında ortaya çıkan aşınımı azaltmak için (Gibbs Fenomeni) toplanabilme metotları ile yeni bulguların elde edilmesi araştırılabilir. Fourier serilerinin yakınsaması ile ilgili yeni çalışmaların elde edilmesi için farklı normlu uzaylar düşünülebilir. Aynı şekilde Fourier serilerinin katsayılarını uygun şartlar altında daha genel diziler alınarak altıncı bölümdeki çalışma geliştirilebilir.



KAYNAKÇA

1. Cauchy, A. L., 1821. *Analyse Algébrique*. Chez Debure Frères, Paris, 576 pp.
2. Frobenius, G., 1880. Ueber die Leibnitzsche Reihe. (German). **Journal für die Reine und Angewandte Mathematik**, **89**: 262–264.
3. Hölder, O., 1882. Grenzwerthe von Reihen an der Convergengzgrenze. (German). **Mathematische Annalen**, **20** (4): 535–549.
4. Cesàro, E., 1890. Sur la multiplication des séries. **Bulletin des Sciences Mathématiques**, **14**: 114–120.
5. Hardy, G. H., 1973. *Divergent Series*. Oxford University Press, Oxford, 396 pp.
6. Fejér, L., 1900. Sur les fonctions intégrables et bornées. **Comptes Rendus de L'Académie des Sciences (Paris)**, 984-987.
7. Bary, N. K., 1964. *A treatise on trigonometric series*, Vol I and Vol II, Pergamon Press, London, 553 pp.
8. Young, W. H., 1913. On the Fourier series of bounded functions. **Proceedings of the London Mathematical Society**, **12** (2): 41-70.
9. Kolmogorov, A. N., 1923. Sur l'ordre de grandeur des coefficients de la série de Fourier-Lebesgue. **Bulletin l'Académie Polonaise des Science, Série des Sciences Mathématiques, Astronomiques et Physiques**, **8**: 3-86.
10. Telyakovskii, S. A., Fomin, G. A., 1975. On convergence in L metric of Fourier series with quasi monotone coefficients. **Trudy Matematicheskogo Instituta Imeni Steklova** **134**, 310-313 (Russian)
11. Garret, J. W., Rees, C. S., Stanojevič, Č. V., 1978. On L^1 -convergence of Fourier series with quasi-monotone coefficients. **Proceedings of the American Mathematical Society**, **72**: 535-537.
12. Flett, T. M., 1957. On an extension of absolute summability and some theorems of Littlewood and Paley. **Proceedings of the London Mathematical Society**, **7**: 113-141.
13. Das, G., 1969. Tauberian theorems for absolute Nörlund summability. **Proceedings London Mathematical Society**, **19** (3): 357-384.
14. Kishore, N., Hotta, G. C., 1970. On $|\bar{N}, p_n|$ summability factors. **Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)**, **31**: 9- 12.
15. Tanovič-Miller, N., 1979. On strong summability. **Glasnik Matematički**, **34** (14): 87-97.

16. Bor, H., 1985. On two summability methods. **Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society**, **1**: 147-149.
17. Sulaiman, W. T., 2003. Inclusion theorems for absolute matrix summability methods of an infinite series (IV). **Indian Journal of Pure and Applied Mathematics**, **34** (11): 1547-1557.
18. Özarlan, H. S., Ögdük H. N., 2004. Generalizations of two theorems on absolute summability methods. **Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications**, **1** (2): Art. 13, 7 pp.
19. Özarlan, H. S., 2016. On generalized absolute matrix summability methods. **International Journal of Analysis and Applications**, **12** (1): 66-70.
20. Özarlan, H. S., 2018. A new study on generalised absolute matrix summability methods. **Maejo International Journal of Science and Technology**, **12** (3): 199-205.
21. Özarlan, H. S., Karakaş, A., 2019. A new study on absolute summability factors of infinite series. **Maejo International Journal of Science and Technology**, **13** (3): 257-265.
22. Maddox, I. J., 1970. Elements of Functional Analysis. Cambridge University Press, London, 208 pp.
23. Mc Fadden, L., 1942. Absolute Nörlund summability. **Duke Mathematical Journal**, **9** (1): 168-207.
24. Petersen, G. M., 1966. Regular Matrix Transformations. Mc Graw Hill Publishing Company Limited, London-New York-Toronto, 142 pp.
25. Ayres, F. Jr., 1962. Schaum's Outline of Theory and Problems of Matrices. New York, 219 pp.
26. Boos, J., 2000. Classical and Modern Methods in Summability. Oxford University, London, 600 pp.
27. Fekete, M., 1911. Zur Theorie der divergenten reihen. **Mathematical és Természeti Tudományok Akadémiai Közleményei (Budapest)**, **29**: 719-726.
28. Mazhar, S. M., 1966. On the summability factors of infinite series. **Publicationes Mathematicae Debreen**, (13): 229-236.
29. Gürkan, A. N., 1998. Sonsuz Serilerin Mutlak Toplanabilme Metodları. Erciyes Üniversitesi, Doktora Tezi, Kayseri.

30. Bor, H., 1993. On local property of $\left| \overline{N}, p_n; \delta \right|_k$ summability of factored Fourier series. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, **179** (2): 646-649.
31. Seyhan, H., 1997. On the local property of $\varphi - \left| \overline{N}, p_n; \delta \right|_k$ summability of factored Fourier series. **Bulletin of the Institute of Mathematics Academia Sinica**, **25**: 311-316.
32. Zygmund, A., 1959. Trigonometric Series. Vol I. Cambridge University Press.
33. Bari, N. K., Stechkin, S. B., 1956. Best approximation and differential properties of two conjugate functions. **Trudy Moskovskogo Matematicheskogo Obshchestva**, **5**: 483-522.
34. Boas, R. P., 1965. Quasi-positive sequences and trigonometric series. **Proceedings of the London Mathematical Society** (3), 14a: 38-46.
35. Robertson, M. M., 1968. A generalization of quasi-monotone sequences. **Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society**, **16** (1): 37-41.
36. Fejér, L., 1903. Untersuchungen über Fouriersche reihen. **Mathematische Annalen**, **58**:51-69.
37. Dirichlet, P. G. L., 1829. Sur la convergence des séries trigonometriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données. **Journal für die Reine und Angewandte Mathematik**, **4**: 157-169.
38. Tauber, A., 1891. Über den zusammenhang des reellen und imaginären Theiles einer Potenzreihe. **Monatshefte für Mathematik und Physik**, **2**: 79-118.
39. Abel, N. H., 1826. Untersuchungen über die reihe: $1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3 + \dots$
(German). **Journal für die Reine und Angewandte Mathematik**, **1**: 311-339.
40. Mazhar, S. M., 1966. On $|C,1|_k$ summability factors of infinite series. **Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)**, **27**: 67-70.
41. Bor, H., 1991. On the absolute Cesàro summability factors. **Revue d'Analyse Numérique et de Théorie de l'Approximation**, **20** (1): 11-14.
42. Bor, H., 2000. An application of almost increasing and δ -quasi-monotone sequences. **Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics**, **1** (2): Art. 18, 1-6.
43. Bor, H., 2002. Corrigendum on the paper "An application of almost increasing and δ -quasi-monotone sequences". **Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics**, **3** (1): Art. 16, 1-2.

44. Özarıslan, H. S., şakar, M. Ö., 2015. A new application of absolute matrix summability. **Mathematical Sciences and Applications E-Notes**, **3** (1): 36-43.
45. Bor, H., 2021. A new note on factored infinite series and trigonometric Fourier series. **Comptes Rendus Mathématique Académie des Science**, **359** (3): 323-328.
46. Chen, K. K., 1945. Functions of bounded variation and the Cesàro means of a Fourier series. **Academia Sinica Science Record**, **1**: 283-289.
47. Powell, R. E., Shah, S. M., 1988. Summability Theory and Applications. Revised Edition, Prentice-Hall of India Private Limited, New Delhi, 153 pp.
48. Bor, H., 1991. On quasi-monotone sequences and their applications. **Bulletin Australian Mathematical Society**, **43**: 187-192.
49. Bor, H., 1994. On the absolute Riesz summability factors. **The Rocky Mountain Journal of Mathematics**, **24** (4): 1263-1271.
50. Stolz, O., 1879. Über die grenzverte der quotienten. **Mathematische Annalen**, **15**: 556-559.
51. Özarıslan, H. S., şakar, M. Ö., 2022. A new application of (ϕ, δ) -monotone sequences. **Russian Mathematics**, **66**: 30-34.
52. Özarıslan, H. S., şakar, M. Ö., 2018. A new application of (ϕ, δ) -monotone sequences to infinite series and Fourier series, 23. *7th International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling*, 20-24 Haziran, İstanbul, 23 pp.
53. Özarıslan, H. S., şakar, M. Ö., 2022. On absolute matrix summability involving (ϕ, δ) -monotone sequences. **Conference Proceeding Science and Technology**, **5** (1): 9-13.
54. Özarıslan, H. S., şakar, M. Ö., 2019. A new study on quasi monotone sequences, 24-30. *8th International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling*, 10-13 Mart, İstanbul, 24-30.
55. Özarıslan, H. S., şakar, M. Ö., 2023. An application of quasi-monotone sequences to infinite series, (incelemede).
56. Özarıslan, H. S., şakar, M. Ö., 2024. A general result on (ϕ, δ) -monotone sequences. **Azerbaijan Journal of Mathematics** 14 (1).
57. Özarıslan, H. S., şakar, M. Ö., 2023. A new note on summability of infinite series and Fourier series. **Conference Proceeding Science and Technology (baskıda)**

58. Özarlan, H. S., Şakar, M. Ö., 2023. A note on L^1 -convergence of Fourier series with Riesz mean, **Mathematical Notes** (baskıda).
59. Mazhar, S. M., 1977. On generalized quasi-convex sequence and its applications. **Indian Journal Pure Appl. Math.**, **8**: 784-790.
60. Özarlan, H. S., 2019. An application of absolute matrix summability using almost increasing and δ -quasi monotone sequences. **Kyungpook Mathematical Journal**, **59** (2):233-240.



ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Mehmet Öner ŞAKAR
Uyruğu : Türkiye (T.C)

EĞİTİM

| Derece | Kurum | Mezuniyet Tarihi |
|---------------|---------------------------------------|------------------|
| Yüksek Lisans | Erciyes Üniversitesi, Matematik | 2014 |
| Lisans | Gaziosmanpaşa Üniversitesi, Matematik | 2012 |
| Lise | Gebze Sarkuysan Lisesi, Gebze/Kocaeli | 2005 |

İŞ DENEYİMLERİ

| Yıl | Kurum | Görev |
|------------|-------------------------------------|------------------|
| 2021-Halen | Hopa Nuri Vatan Anadolu Lisesi | Öğretmen |
| 2016-2021 | Şehit Nedim Tuğaltay Anadolu Lisesi | Öğretmen |
| 2012-2013 | Yeni Ufuklar Ortaokulu | Öğretmen |
| 2011-2012 | Final Dershane | Stajyer Öğretmen |
| 2006-2009 | Tuzla İçmeler Şişecam- Paşabahçe | İşçi |

YABANCI DİL

İngilizce

YAYINLAR

- Özarslan, H. S., Şakar, M. Ö. (2015). A new application of absolute matrix summability. *Mathematical Sciences and Applications E-Notes*, 3, ss. 36-43.
- Özarslan, H. S., Şakar, M. Ö. (2022). A new application of (ϕ, δ) -monotone sequences. *Russian Mathematics*, 66, ss. 30-34.

3. Özarıslan, H. S., Şakar, M. Ö., Kartal, B. (2023). Applications of quasi power increasing sequences to infinite series. *Journal of Applied Mathematics and Informatics*, 41(1), ss. 1-9.
4. Özarıslan, H. S., Şakar, M. Ö., 2024. A general result on (ϕ, δ) -monotone sequences. *Azerbaijan Journal of Mathematics* 14 (1).
5. Özarıslan, H. S., Şakar, M. Ö., 2023. A note on L_1 -convergence of Fourier series with Riesz mean, *Mathematical Notes* (baskıda).

HAKEMLİ KONGRE/SEMPOZYUM BİLDİRİ KİTAPLARINDA YER ALAN YAYINLAR

1. Özarıslan, H. S., Şakar, M. Ö. A New Application of Absolute Matrix Summability, 3rd International Eurasian Conference on Mathemaical Sciences and Applications, Vienna, Avusturya, 25-28 Ağustos 2014, ss. 93.
2. Özarıslan, H. S., Şakar, M. Ö., A New Application of (ϕ, δ) -Monotone Sequences to Infinite Series and Fourier Series, 7th International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling, 20-24 Haziran 2018, İstanbul, Türkiye, pp. 23.
3. Özarıslan, H. S., Şakar, M. Ö., New Application on (ϕ, δ) -Monotone Sequences, The Mediterranean International Conference of Pure & Applied Mathematics and Releated Areas, 26-29 Ekim 2018, Antalya, Türkiye, pp. 76-80.
4. Özarıslan, H. S., Şakar, M. Ö., A New Study on Quasi Monotone Sequences, 8th International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling, 10-13 Mart 2019, İstanbul, Türkiye, pp. 24-30.
5. Özarıslan, H. S., Kartal, B. Şakar, M. Ö., A General Theorem Involving Quasi Power Increasing Sequences, 4th International Conference On Mathematic “An Istanbul Meeting For World Mathematicians”, 27-30 Ekim 2020, İstanbul, Türkiye, pp. 12-17.
6. Özarıslan, H. S., Şakar, M. Ö., Kartal, B., Application Of Almost Increasing Sequence to Infinite Series, 4th International Conference on Mathematics “An

- Istanbul Meeting For World Mathematicians”, 27-30 Ekim 2020, İstanbul, Türkiye, pp. 110-116.
7. Özarlan, H. S., Kartal, B. Şakar, M. Ö., On General Results on Absolute Matrix Summability Factors, 5th International Conference On Mathematic “An Istanbul Meeting For World Mathematicians”, 01-03 Aralık 2021, İstanbul, Türkiye, pp. 185-193.
 8. Özarlan, H. S., Şakar, M. Ö., Kartal, B., On Summability of Infinite Series and Fourier Series, 4th International Conference on Mathematic “An Istanbul Meeting For World Mathematicians”, ”, 01-03 Aralık 2021, İstanbul, Türkiye, pp. 512-519.
 9. Özarlan, H. S., Şakar, M. Ö., On Absolute Matrix Summability Involving (ϕ, δ) –Monotone Sequences, 5th International Online Conference on Mathematical Advences and Applications, 11-14 Mayıs 2022, İstanbul, Türkiye, pp. 24-30.
 10. Özarlan, H. S., Şakar, M. Ö., A New Note on Summability of Infinite Series and Fourier Series, 6th International Online Conference on Mathematical Advences and Applications, 10-13 Mayıs 2023, İstanbul, Türkiye, pp.

YURT DIŞINDA ARAŞTIRMA VE GÖZLEM

1. Hasan Priştine Üniversitesi, Kosova, Temmuz 2021