



BELİRSİZ KOSİMPLEKTİK MANİFOLDLARIN EKTRAN TRANSVERSAL CR-LİGHTLIKE ALTMANİFOLDLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SEFER POYRAZ

**MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK
ANABİLİM DALI**

**MERSİN
TEMMUZ – 2023**

BELİRSİZ KOSİMPLEKTİK MANİFOLDLARIN EKTRAN TRANSVERSAL CR-LİGHTLIKE ALTMANİFOLDLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SEFER POYRAZ
ORCID ID: 0000-0001-5516-414X

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANABİLİM DALI

DANIŞMAN
PROF. DR. EROL YAŞAR
ORCID ID: 0000-0001-8716-0901

MERSİN
TEMMUZ – 2023

ÖZET

BELİRSİZ KOSİMPLEKTİK MANİFOLDLARIN EKRAN TRANSVERSAL CR-LIGHTLIKE ALTMANİFOLDLARI

Bu tezde belirsiz kosimplektik manifoldların ekran transversal Cauchy-Riemann (ST-CR) lightlike altmanifoldları inşa edilmiş ve bu altmanifoldların geometrisi incelenmiştir.

Tez beş bölümden oluşmuştur.

Birinci ve ikinci bölümde, altmanifoldlar teorisi hakkında bazı bilgiler verilmiş, lightlike altmanifoldlardan bahsedilmiş ve lightlike geometride yapılan çalışmalar özetlenmiştir.

Üçüncü bölümde, bu çalışmada kullanılan ve literatürde yer alan temel tanım ve teoremler sunulmuştur.

Dördüncü bölüm tezin özgün kısmı olup iki alt bölüme ayrılmıştır. Birinci alt bölümde belirsiz kosimplektik manifoldlarının ekran transversal CR-lightlike altmanifoldları tanımlanmıştır. Bu altmanifoldlar üzerine indirgenen konneksiyonun metrik konneksiyon olması için gerekli ve yeterli olan koşullar elde edilmiş ve altmanifoldun çeşitli distribüsyonlarının integrallenebilirliği incelenmiştir. Kosimplektik uzay formların bu tür lightlike altmanifoldları için önemli bir karakterizasyon teoremi verilmiştir. Daha sonra belirsiz kosimplektik manifoldlarının ekran transversal CR-lightlike altmanifoldların ekran transversal CR-lightlike çarpım olması için şartlar elde edilmiştir. İkinci alt bölümde ise, belirsiz kosimplektik manifoldlarının ekran transversal CR-lightlike altmanifoldların minimal olması için koşullar bulunmuştur.

Beşinci bölümde ise sonuçlar ve öneriler sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Belirsiz Kosimplektik Manifold, Lightlike Altmanifold, Belirsiz Kosimplektik Uzay Form, Minimal Lightlike Altmanifold.

Danışman: Prof. Dr. Erol YAŞAR, Mersin Üniversitesi, Matematik Bölümü, Mersin.



ABSTRACT

SCREEN TRANSVERSAL CR-LIGHTLIKE SUBMANIFOLDS OF INDEFINITE COSYMPLECTIC MANIFOLDS

In this thesis, screen transversal Cauchy-Riemann (ST-CR) lightlike submanifolds of indefinite cosymplectic manifolds were introduced and the geometry of these submanifolds was investigated.

The thesis was consisted of five chapters.

In the first chapter and the second chapter, some information about the submanifolds theory was given, lightlike submanifolds were mentioned and studies in lightlike geometry were summarized.

In the third chapter, the basic definitions and theorems which used in this thesis and taken place in the literature were presented.

The fourth chapter is the original part of thesis and is divided into two sub-sections. In the first sub-section, the screen transversal CR-lightlike submanifolds of indefinite cosymplectic manifolds were described. Necessary and sufficient conditions for the induced connection of these submanifolds to be a metric connection were obtained and integrability of various distributions of submanifold was investigated. An important characterization theorem for such lightlike submanifolds of indefinite cosymplectic space forms was given. Later, conditions were obtained for screen transversal CR-lightlike submanifolds of indefinite cosymplectic manifolds to be screen transversal CR-lightlike product. In the second subsection, conditions were found for minimal screen transversal CR-lightlike submanifolds of indefinite cosymplectic manifolds.

In the fifth section, the results and recommendations were presented.

Keywords: Indefinite Cosymplectic Manifold, Lightlike Submanifold, Indefinite Cosymplectic Space Form, Minimal Lightlike Submanifold.

Advisor: Prof. Dr. Erol YAŞAR, Mersin University, Department of Mathematics, Mersin.

TEŞEKKÜR

Tez konumu belirleyip çalışmalarımı titizlikle takip eden, karşılaştığım her türlü sorunda yardımlarını, değerli vakitlerini ve bilgilerini esirgemeyen; çok değerli danışman hocam Sayın Prof. Dr. Erol YAŞAR'a teşekkür ederim.

Her daim yanımda olan ve beni hep cesaretlendiren, en zor anlarımda beni yalnız bırakmayan, her türlü zorluğu birlikte aştığımız; değerli eşim, hayat arkadaşım Doç. Dr. Nergiz (ÖNEN) POYRAZ'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Bana her zaman destek olan, bir problemle karşılaştığımda çözmeye çalışan Doç. Dr. Sertaç GÖKTAŞ'a çok teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
İÇ KAPAK	i
ONAY	ii
ETİK BEYAN	iii
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR	viii
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK ARAŞTIRMALARI	4
3. MATERYAL ve YÖNTEM	9
3.1. Semi-Öklidyen Uzaylar	9
3.2. Semi-Riemann Manifoldlar	11
3.3. Semi-Riemann Manifoldların Lightlike Altmanifoldları	13
3.4. Belirsiz Kosimplektik Manifoldların Lightlike Altmanifoldları	17
4. BULGULAR ve TARTIŞMA	20
4.1. Ekran Transversal CR-Lightlike Altmanifoldlar	20
4.2. Minimal Ekran Transversal CR-Lightlike Altmanifoldlar	32
5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER	38
KAYNAKLAR	39
ÖZGEÇMİŞ	44

SİMGELER VE KISALTMALAR

Kısaltma/Simgesi	Tanım
$\tilde{B}$	Altmanifold
$\tilde{B}$	Belirsiz kosimplektik manifold
$\tilde{B}(c)$	Belirsiz kosimplektik uzay form
$\tilde{\nabla}$	Lineer konneksiyon
$\tilde{\nabla}$	Levi-Civita konneksiyonu
ϕ	Hemen hemen kosimplektik yapı
μ	Distribüsyon
$T\tilde{B}$	Tanjant demet
$T_p \tilde{B}$	p noktasındaki tanjat uzay
$tr(T\tilde{B})$	Transversal demet
$Rad(T\tilde{B})$	Radikal distribüsyon
$S(T\tilde{B})$	Screen distribüsyon
$ltr(T\tilde{B})$	Lightlike transversal distribüsyon
$S(T\tilde{B}^\perp)$	Screen transversal distribüsyon
h	Altmanifoldun ikinci temel formu
h^l	Lightlike transversal ikinci temel formu
h^s	Screen transversal ikinci temel form
h^*	Screen ikinci temel form
A_V	Altmanifoldun şekil operatörü
A_ξ^*	Screen şekil operatörü
$\tilde{R}$	Riemann eğrilik tensörü
$\mathbb{R}$	Öklidyen uzay
$\Gamma(T\tilde{B})$	$T\tilde{B}$ 'nın vektör alanları uzayı

1. GİRİŞ

Nash teoreminden her Riemann manifoldu bir Öklidyen uzayın altmanifoldu olarak düşünülebilir. Buda bize Riemann yada semi-Riemann manifoldları çalışmak için doğal bir motivasyon sağlar. Non-dejenere altmanifoldlarda tanjant demet ile normal demetin kesişim kümesi sıfırı verirken, lightlike altmanifoldlarda normal demetin bir kısmı tanjant demette kaldığından tanjant demet ile normal demetin kesişim kümesi sıfırdan farklıdır. Bu yüzden non-dejenere altmanifoldları çalışmaktan daha zor ve daha farklıdır. Bu, lightlike bir altmanifold üzerinde herhangi bir indirgenmiş nesneyi tanımlamak için klasik altmanifold teorisinin her zamanki gibi kullanılamayacağı anlamına gelir. Bu anormallikle başa çıkmak için, lightlike altmanifoldlar tanıtıldı. Tanjant demetle lightlike transversal vektör demetle kesişimi sıfırı veren non-dejenere bir ekran distribüsyonu tanıtıldı. Lightlike altmanifoldların geometrisi, matematiksel fizikte, özellikle de genel görelilikte kullanılır, çünkü lightlike altmanifoldlar, olay ufukları, Cauchy'nin ufukları ve Kruskal'ın ufuklarının farklı türde ufuk modellerini üretir. Örneğin; Killing vektör alanlarının varlığı en etkili simetri olarak kullanılmıştır. Aslında Einstein'ın alan denklemleri kısmi doğrusal olmayan diferansiyel denklemlerin bir karmaşık kümesi olduğu için, çoğu tam çözümler bir veya daha fazla Killing vektör alanları varsayılarak bulunmuştur (Bejancu ve Duggal, 1995; Duggal, 1990). Özellikle, Carter bu bilgiyi aynı zamanda killing horizon olan bir lightlike hiperyüzey çalışmasında kullandı (Carter, 1969). İkincisi, Killing ve geodezik kavramları arasındaki ilişki belirtildi. Evren, $(4 + n)$ –boyutlu bir spacetime manifolduna gömülmüş dört-boyutlu bir altmanifold olarak temsil edilebilir. Ayrıca lightlike hiperyüzeyler elektromanyetizma teorisinde de çalışılmıştır (Duggal ve Bejancu, 1996). Duggal ve Bejancu lightlike altmanifoldların genel teorisinin önemli bir eksik kısmını doldurmak için lightlike altmanifoldlar ile ilgili bir kitap yayınladılar (Duggal ve Bejancu, 1996). Aynı yıl Küpeli lightlike altmanifoldlar ile ilgili bir kitap yayınladı (Küpeli, 1996). Daha sonra Duggal ve Şahin özellikle, Duggal ve Bejancu kitabının yayınlanmasından sonra yayınlanan lightlike geometrideki tüm yeni sonuçları içeren bir kitap yayınladılar (Duggal ve Şahin, 2010).

Kosimplektik manifoldların altmanifoldları, 1970 yılında Ludden tarafından tartışılmıştır (Ludden, 1970). Ondan sonra Chen altmanifoldların geometrisini inceledi (Chen, 1973). Hemen hemen kontakt yapılar, tek boyutta hemen hemen kompleks yapıların bir karşılığını sağlar ve kontakt, Sasakian ve kosimplektik gibi özel öneme sahip birkaç sınıf içerir (Blair, 2002). Hemen hemen kosimplektik manifold kavramı Goldberg ve Yano tarafından tanıtıldı. Goldberg ve Yano hemen hemen kontakt manifoldlar üzerindeki hemen hemen kosimplektik yapılar için integrallenebilirlik koşulları elde ettiler (Goldberg ve Yano, 1969). Hemen hemen Kaehler manifoldu ile R doğrusu veya S^1 çemeberi doğrudan çarpım alınarak bu yapıya ait örnekler verilmiştir. Olszak hemen hemen kosimplektik manifoldlardaki yapıları çalıştı (Olszak, 1981). Chinea ve Marrero hemen hemen kosimplektik manifolddaki konformal değişimi çalıştılar (Chinea ve Marrero, 1992). Massamba ve Mavambou

hemen hemen konformal manifold olarak adlandırılan hemen kontakt manifoldların bir sınıfını çalıştılar. Böylesi altmanifoldların alt sınıflarını incelediler ve bunlardan bazılarının demet benzeri metrik yapıların sınıfını içerdiğini gösterdiler (Massamba ve Mavambou, 2018).

$\tilde{B}$ $(2m+1)$ -boyutlu semi-Riemann manifold olsun. Bu durumda $\tilde{B}$ üzerinde ϕ $(1,1)$ -tipinde bir tensör alanı, V vektör alanı ve η 1-form olmak üzere ϕ, V, η yapı tensorleri varsa ve $\tilde{B}$ üzerinde $\tilde{g}$ semi-Riemann metriği varsa ve her $X, Y \in \chi(\tilde{B})$ ve $V \in \chi(\tilde{B})$ için aşağıdaki koşulları sağlıyorsa

$$\begin{aligned}\phi^2 X &= -X + \eta(X)V, \quad \eta(X) = \tilde{g}(X, V), \\ \tilde{g}(\phi X, \phi Y) &= -\tilde{g}(X, Y) + \eta(X)\eta(Y), \quad \eta \circ \phi = 0, \quad \phi V = 0, \quad \eta(V) = 1\end{aligned}$$

$\tilde{B}$ belirsiz hemen hemen kontakt metrik manifold olarak adlandırılır. Eğer $N_\phi + d_\eta \otimes V = 0$ ise $\tilde{B}$ normal kontakt yapısına sahiptir denir. Burada N_ϕ, ϕ nin Nijenhuis tensör alanıdır (Yano ve Kon, 1984). Normal kontakt metrik manifold Sasakian manifold olarak adlandırılır (Takahashi, 1969; Tanno, 1969). Sasakian manifold için

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_X V &= -\phi X, \\ (\tilde{\nabla}_X \phi)Y &= \tilde{g}(X, Y)V - \varepsilon \eta(Y)X\end{aligned}$$

dir.

Diğer taraftan, eğer $\tilde{B}$ belirsiz hemen hemen kontakt metrik manifoldu üzerinde her $X \in \chi(\tilde{B})$ için

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_X \phi &= 0, \\ \tilde{\nabla}_X V &= 0\end{aligned}$$

ise $\tilde{B}$ ya belirsiz kosimplektik manifold denir (Blair, 2002).

Kang ve Kim belirsiz kosimplektik manifoldların lightlike hiperyüzeylerini çalıştılar (Kang ve Kim, 2007). Jin ve Lee jenerik lightlike altmanifoldlarını tanımladılar ve bu altmanifoldlar için yeni sonuçlar elde ettiler (Jin ve Lee, 2011). Jin belirsiz kosimplektik manifoldların lightlike hiperyüzeylerinin geometrisini inceledi (Jin, 2012). Gupta belirsiz kosimplektik manifoldların V yapı vektör alanı $S(\tilde{B})$ ya ait olacak şekilde lightlike hiperyüzeylerini çalıştı (Gupta, 2012). Aynı yazar belirsiz kosimplektik manifoldların V yapı vektör alanı hiperyüzeye ait olacak şekilde lightlike hiperyüzeylerin Ricci tensörünün Ricci semi-simetrik ve paralel olması için şartlar elde etti (Gupta, 2013). Ayrıca tamamen geodezik olmayan Ricci semi-simetrik lightlike hiperyüzeyler için bir örnek vermiştir.

Duggal ve Şahin belirsiz Sasakian manifoldların kontakt CR-lightlike altmanifoldlarını tanıttılar. Sonra aynı yazarlar belirsiz Sasakian manifoldların kontakt ekran CR (SCR)-lightlike altmanifoldlarını tanıttılar (Duggal ve Şahin, 2007). Gupta, Upadhyay ve Sharfuddin belirsiz

kosimplektik manifoldların kontakt ekran CR (SCR)-lightlike altmanifoldlarını çalıştılar (Gupta vd., 2012a). Ayrıca belirsiz kosimplektik manifoldların geometrisini incelediler ve minimal kontakt ekran CR (SCR)-lightlike altmanifoldları için bazı sonuçlar buldular. Diğer taraftan bu iki altmanifoldu içeren bir kapsama bulunmadığından Duggal ve Şahin, bu iki altmanifold sınıfını da içeren belirsiz Sasakian manifoldun kontakt genelleştirilmiş CR (GCR)-lightlike altmanifoldları tanımladılar (Duggal ve Şahin, 2009). Gupta, Upadhyay ve Sharfuddin belirsiz kosimplektik manifoldların kontakt GCR-lightlike altmanifoldlarını çalıştılar (Gupta vd., 2012b). Belirsiz kosimplektik manifoldların kontakt GCR-lightlike altmanifoldlarının minimal olması için gerek ve yeter koşullar buldular. Ayrıca belirsiz kosimplektik manifoldların kontakt GCR-lightlike altmanifoldları için varlık ve yokluk teoremleri verildi ve böylesi altmanifoldlar için örnekler verdiler. Bu tip altmanifoldlar farklı manifoldlarda birçok yazar tarafından çalışılmıştır (Duggal ve Şahin, 2006; Gupta ve Sharfuddin, 2010a; Kumar ve Nagaich, 2014; (Önen) Poyraz, 2020; (Önen) Poyraz, 2021).

Yıldırım ve Şahin belirsiz Sasakian manifoldların ekran transversal lightlike altmanifoldlarını tanıttılar ve bu manifoldların reel lightlike eğrileri içerdiğini gösterdiler (Yıldırım ve Şahin, 2010). Gupta ve Sharfuddin belirsiz kosimplektik manifoldların ekran transversal lightlike altmanifoldlarını tanıttılar (Gupta ve Sharfuddin, 2010b). Burada belirsiz kosimplektik manifoldların ekran transversal, ekran transversal anti-invariant ve radikal ekran transversal lightlike altmanifoldlarını tanımladılar ve bu altmanifoldların geometrisini incelediler. Ayrıca ekran transversal anti-invariant lightlike altmanifoldları için bir karakterizasyon elde ettiler ve bu altmanifold için örnek verdiler.

Doğan, Şahin ve Yaşar belirsiz Kähler manifoldların ekran transversal CR-lightlike altmanifoldlarını tanıttılar ve bu tür lightlike altmanifoldların geometrisini incelediler (Doğan vd., 2020). Bu altmanifoldlar için örnekler verdiler ve distribüsyonların integrallenebilirliğini araştırmışlardır. Ayrıca kompleks uzay formların ekran transversal CR-lightlike altmanifoldları için karakterizasyon teoremi vermişlerdir ve ST-CR lightlike altmanifoldların minimal olması için gerek ve yeter koşullar buldular.

Poyraz belirsiz Sasakian manifoldların kontakt ekran transversal CR-lightlike altmanifoldlarını tanıttı ve böylesi altmanifoldların geometrisini inceledi ((Önen) Poyraz, 2023).

2. KAYNAK ARAŞTIRMALARI

20. yüzyılın ikinci yarısından itibaren Riemann ve semi- Riemann manifoldların geometrisi, diferansiyel geometride ve bunun matematik ve fizikteki çeşitli konulara uygulanması aktif araştırma alanları olmuştur. Berger'in kitabı (2000), 1950'den bu yana Riemann geometrisindeki önemli gelişmeleri, o zamanın diferansiyel geometri çalışmalarına atıfta bulunarak içerir. 1970'lerin ortalarında, ilgi genel görelilikte kullanılan matematiksel teori olan Lorentz geometrisi yönünde kaydı. O zamandan bu yana modern diferansiyel geometri ile matematiksel görelilik arasındaki bağlantının derinliğinde hem lokal hem de global bakış açıdan inanılmaz bir sıçrama oldu. Global lorentz geometrisinin çalışmalarının çoğu, Beem ve Ehrlich (1981) ve 1996'daki ikinci baskısında, Easley ile beraber bir kitapta tanımlanmıştır.

Riemann geometrisinde, Riemann manifoldun bir altmanifolduna indirgenmiş metrik daima Riemann'dır. Bu durumun aksine semi-Riemann manifoldun altmanifoldu üzerine indirgenmiş metriğin non-dejenere olması gerekmez. Semi-Riemann manifolddan indirgenen metrik tensör altmanifold üzerinde pozitif tanımlı (spacelike), negatif tanımlı (timelike) veya dejenere (lightlike, null) olabilir. Bilindiği gibi spacelike ve timelike altmanifoldların geometrisi, Riemann altmanifoldlarının geometrisine benzemektedir (O'Neill, 1983). Fakat, lightlike (dejenere) altmanifoldların geometrisi tamamen farklıdır. Bu durum bize altmanifoldların farklı bir tipi olan lightlike (dejenere) altmanifoldlarını tanımlama imkanı verir. Bu nedenle lightlike (dejenere) altmanifoldları diferansiyel geometrinin en önemli konularından biridir. Riemann altmanifoldunun en temel özelliği olan konneksiyonun Levi-Civita metrik konneksiyon olması lightlike altmanifoldlarda geçerli değildir (Duggal ve Bejancu, 1996). Lightlike altmanifoldların geometrisi, matematiksel fizikte, özellikle de genel görelilikte kullanılır, çünkü lightlike altmanifoldlar, olay ufukları, Cauchy'nin ufukları ve Kruskal'ın ufuklarının farklı türde ufuk modellerini üretir. Evren, $(4+n)$ -boyutlu bir spacetime manifolduna gömülmüş dört-boyutlu bir altmanifold olarak temsil edilebilir. Ayrıca lightlike hiperyüzeyler elektromanyetizma teorisinde de çalışılmıştır (Duggal ve Bejancu, 1996). Duggal ve Bejancu (1996) lightlike altmanifoldların genel teorisinin önemli bir eksik kısmını doldurmak için lightlike altmanifoldlar ile ilgili bir kitap yayınladılar. Aynı yıl Küpeli lightlike altmanifoldlar ile ilgili bir kitap yayınladı. Daha sonra Duggal ve Şahin özellikle, Duggal ve Bejancu (2010) kitabının yayınlanmasından sonra yayınlanan lightlike geometrideki tüm yeni sonuçları içeren bir kitap yayınladılar.

Diferensiyallenebilir geometrik yapılara sahip bazı manifoldların geometrileri ilginçtir. Bu yapılara sahip manifoldlar ve bunlar arasındaki dönüşümler diferansiyel geometride yoğun olarak araştırılmıştır. Bu manifoldlardan bazıları hemen hemen kompleks manifoldlar, hemen hemen kontakt manifoldlar ve hemen hemen çarpım manifoldlardır. Bu yapıların genellemesi olarak Yano (1963) tarafından f - yapılar takdim edilmiştir. Daha sonra bu yapının genişlemesi olarak, Goldberg ve Yano

(1970) derecesi d olan polinom yapısını takdim etmiştir. Bu yapılara sahip manifoldların lightlike altmanifoldları yoğun olarak araştırılmıştır. Bu çalışmalardan bazıları şu şekilde özetlenebilir. Atçeken ve Kılıç (2007) semi-Riemann çarpım manifoldların lightlike altmanifoldlarını takdim ettiler. Semi-Riemann çarpım reel uzay formların tamamen umbilik, eğrilik invaryant lightlike altmanifoldlarını incelediler. $\tilde{B}(c_1) \times \tilde{B}(c_2)$ ($c_1, c_2 \neq 0$) olmak üzere semi-Riemann çarpım reel uzay formunun eğrilik invaryant proper semi-invaryant lightlike altmanifoldunun olmadığını gösterdiler. Kılıç ve Şahin (2008) semi-Riemann çarpım manifoldların radikal anti-invaryant lightlike altmanifoldlarını çalıştılar. Yazarlar bu altmanifoldların geometrisini incelediler ve bir koşul altında tamamen umbilik radikal anti-invaryant lightlike altmanifoldların tamamen geodezik olduğunu gösterdiler. Kılıç, Şahin ve Keleş (2011) semi-Riemann çarpım manifoldların screen semi-invaryant lightlike altmanifoldlarını tanımladılar. Yazarlar screen semi-invaryant lightlike altmanifoldların lokal çarpım manifoldu olması için gerekli ve yeterli şartlar buldular. Tamamen umbilik screen semi-invaryant lightlike altmanifoldlar ve anti-invaryant lightlike altmanifoldlar için karakterizasyon teoremleri verdiler. Jin ve Lee (2015) belirsiz Kehler manifoldların jenerik lightlike altmanifoldlarını tanımladılar. Acet (2018) metalik semi-Riemann manifoldun lightlike hiperyüzeylerini çalıştı. İnvaryant lightlike hiperyüzeyler üzerine indirgenmiş yapının da metalik olduğunu gösterdi. Ayrıca metalik semi-Riemann manifoldun screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeylerini tanımladı, bu altmanifoldlar da oluşan distribüsyonların integrallenebilirliği için koşullar buldu ve bazı örnekler verdi. Poyraz ve Yaşar (2019) altın semi-Riemann manifoldların lightlike altmanifoldlarını takdim ettiler. Yazarlar altın semi-Riemann manifoldun radikal anti-invaryant lightlike altmanifoldunun olmadığını gösterdiler. Ayrıca altın semi-Riemann manifoldun semi-invaryant lightlike altmanifoldunu çalıştılar ve bu altmanifoldlar için örnekler verdiler. Poyraz ve Doğan (2020) altın semi-Riemann manifoldların semi-invaryant lightlike altmanifoldlarını çalıştılar. Yazarlar bu altmanifoldlardaki distribüsyonlarının integrallenebilir, tamamen geodezik ve mixed geodezik olması için şartlar elde ettiler.

Kosimplektik manifoldların altmanifoldları, 1970 yılında Ludden tarafından tartışılmıştır. Bir kosimplektik manifoldun altmanifoldunun lokal simetrik olduğunu gösterdi. Ondan sonra Chen (1973) altmanifoldların geometrisini inceledi. Kang ve Kim (2007) belirsiz kosimplektik manifoldların lightlike hiperyüzeylerini çalıştılar. Buradaki distribüsyonlar için integrallenebilirlik koşulları buldular. Belirsiz kosimplektik manifoldların tamamen umbilik lightlike hiperyüzeylerini çalıştılar ve $\tilde{B}(c)$ ($c \neq 0$) için belirsiz kosimplektik manifoldların tamamen umbilik lightlike hiperyüzeyinin olmadığını ispatladılar. Jin ve Lee (2011) jenerik lightlike altmanifoldlarını tanımladılar ve bu altmanifoldlar için yeni sonuçlar elde ettiler. Gupta, Upadhyay ve Sharfuddin (2011) belirsiz kosimplektik manifoldunun slant lightlike altmanifoldları notasyonunu tanımladılar. Slant lightlike altmanifoldları varlığı için gerek ve yeter şartlar elde ettiler. Ayrıca bu altmanifold için örnekler verdiler. Gupta (2011) belirsiz kosimplektik manifoldların ekran slant lightlike altmanifoldlarını takdim

etti. Ekran slant lightlike altmanifoldları için karakterizasyon teoremi verdi. Ayrıca ekran slant lightlike altmanifoldları için örnek verdi. Upadhyay ve Gupta (2011) belirsiz kosimplektik uzay formların V yapı vektör alanı hiperyüzeye ait olacak şekilde semi-paralel lightlike hiperyüzeylerini çalıştılar. Jin (2012) belirsiz kosimplektik manifoldların lightlike hiperyüzeylerinin geometrisini inceledi. V yapı vektör alanı sırasıyla $\tilde{B}$ ya ait olacak şekilde inceledi ve bir çok yeni sonuç elde etti. Gupta (2012) belirsiz kosimplektik manifoldların V yapı vektör alanı $S(\tilde{T}\tilde{B})$ ya ait olacak şekilde lightlike hiperyüzeylerini çalıştı. Burada distribüsyonların paralel, killing ve integrallenebilir olması için karakterizasyon teoremleri elde etti ve bu altmanifoldun mixed tamamen geodezik olması için şartlar elde etti. Aynı yazar (2013) belirsiz kosimplektik manifoldların V yapı vektör alanı hiperyüzeye ait olacak şekilde lightlike hiperyüzeylerin Ricci tensörünün Ricci semi-simetrik ve paralel olması için şartlar elde etti. Tamamen geodezik olmayan Ricci semi-simetrik lightlike hiperyüzeyler için bir örnek verdi. Sachdeva, Kumar ve Bhatia (2013) belirsiz kosimplektik manifoldun tamamen kontakt umbilik slant lightlike altmanifoldlarını çalıştılar. Belirsiz kosimplektik manifoldun uzay formunun tamamen kontakt umbilik proper slant lightlike altmanifoldlarının var olmadığını gösterdiler. Ayrıca minimal slant lightlike manifoldlar üzerinde karakterizasyon teoremleri verdiler. Jin (2014) belirsiz genelleştirilmiş uzay formunun jenerik lightlike altmanifoldlarını çalıştı. Upadhyay, Gupta ve Sharfuddin (2017) belirsiz kosimplektik manifoldların ekran konformal lightlike hiperyüzeyleri için karakterizasyon teoremi verdiler. Tamamen geodezik, ekran homotetik ve ekran konformal lightlike hiperyüzeyler için örnek verdiler.

Diğer taraftan belirsiz Kaehler manifoldların CR-lightlike altmanifoldları Duggal ve Bejancu (1996) tarafından takdim edildi. Belirsiz Sasakian manifoldların kontakt CR-lightlike altmanifoldları Duggal ve Şahin tarafından tanıtıldı. Kontakt CR-lightlike altmanifoldları kompleks ve reel alt durumlarını içermediğinden Duggal ve Şahin (2006) bu iki durumu da içeren belirsiz Kaehler manifoldların ekran CR-lightlike altmanifoldlarını tanıttılar. Daha sonra Duggal ve Şahin (2007) belirsiz Sasakian manifoldların kontakt ekran CR (SCR)-lightlike altmanifoldlarını tanıttılar. Gupta, Upadhyay ve Sharfuddin (2012a) belirsiz kosimplektik manifoldların kontakt ekran CR (SCR)-lightlike altmanifoldlarını çalıştılar ve bu altmanifoldların geometrisini incelediler. Ayrıca bu manifoldların tamamen kontakt umbilik lightlike altmanifoldlarını çalıştılar. Ayrıca belirsiz kosimplektik manifoldun minimal kontakt ekran CR (SCR)-lightlike altmanifoldları için bazı sonuçlar buldular. Bu iki altmanifoldu içeren bir kapsama bulunmadığından Duggal ve Şahin (2006), bu iki altmanifold sınıfını da içeren belirsiz Kaehler manifoldun genelleştirilmiş CR (GCR)-lightlike altmanifoldları tanımladılar. Belirsiz kompleks uzay forumunun tamamen umbilik proper GCR-lightlike altmanifoldunun olmadığını gösterdiler ve bazı karakterizasyon teoremleri ispatladılar. Sonra Duggal ve Şahin (2007) belirsiz Sasakian manifoldun kontakt genelleştirilmiş CR (GCR)-lightlike altmanifoldlarını tanımladılar. Bu altmanifoldlar için varlık ve yokluk teoremlerini ispatladılar ve minimal GCR-lightlike

altmanifoldlar üzerinde karakterizasyon teoremleri verdiler. Kontakt GCR-lightlike altmanifoldların reel hiperyüzeyler, invaryant, screen reel ve CR-lightlike altmanifoldları içerdiğini gösterdiler. Gupta vd. (2012b) belirsiz kosimplektik manifoldların kontakt GCR-lightlike altmanifoldlarını çalıştılar. Belirsiz kosimplektik manifoldların kontakt GCR-lightlike altmanifoldlarının minimal olması için gerek ve yeter koşullar buldular. Ayrıca belirsiz kosimplektik manifoldların kontakt GCR-lightlike altmanifoldları için varlık ve yokluk teoremleri verdi ve böylesi altmanifoldlar için örnekler verdiler. Jain vd. (2012) belirsiz kosimplektik manifoldların GCR-lightlike altmanifoldlarını çalıştılar. Belirsiz kosimplektik manifoldların mixed geodezik GCR-lightlike altmanifoldlarını çalıştılar ve GCR-lightlike altmanifoldların GCR-lightlike çarpım olması için bazı karakterizasyon teoremleri elde ettiler. Kumar ve Nagaich (2012) belirsiz kosimplektik manifoldların GCR-lightlike altmanifoldların lokal warped çarpımlar olması için karakterizasyon teoremleri elde ettiler. Jain vd. (2013a) belirsiz kosimplektik manifoldların GCR-lightlike altmanifoldlarında oluşan distribüsyonların integrallenebilir ve tamamen geodezik olması için şartlar araştırmışlardır. Aynı yazarlar (2013b) belirsiz kosimplektik manifoldların tamamen kontakt umbilik GCR-lightlike altmanifoldunun olmadığını gösterdiler. Ayrıca bu manifoldların tamamen geodezik GCR-lightlike altmanifoldlarını çalıştılar.

Şahin (2008) Kaehler manifoldların ekran transversal lightlike altmanifoldlarını tanıttı ve bu altmanifoldların geometrisini inceledi. Yıldırım ve Şahin (2010) belirsiz Sasakian manifoldların ekran transversal lightlike altmanifoldlarını tanıttılar ve bu manifoldların reel lightlike eğrileri içerdiğini gösterdiler. Ayrıca yazarlar bir belirsiz Sasakian uzay formunun transversal lightlike altmanifoldların varlığını (yada yokluğunu) araştırdılar ve belirsiz Sasakian manifoldların izotropik ekran transversal lightlike altmanifoldları için karakterizasyon teoremi elde ettiler. Gupta ve Sharfuddin (2010b) belirsiz kosimplektik manifoldların ekran transversal lightlike altmanifoldlarını tanıttılar. Burada belirsiz kosimplektik manifoldların ekran transversal, ekran transversal anti-invaryant ve radikal ekran transversal lightlike altmanifoldlarını tanımladılar ve bu altmanifoldların geometrisini incelediler. Belirsiz kosimplektik manifoldların ekran transversal anti-invaryant lightlike altmanifoldlarının metrik konneksiyon olması için şartlar bulmuşlardır. Ayrıca bu altmanifoldlar için örnekler verdiler.

Doğan, vd. (2020) belirsiz Kähler manifoldların ekran transversal CR-lightlike altmanifoldlarını tanıttılar ve bu tür lightlike altmanifoldların geometrisini incelediler. Ekran transversal CR-lightlike altmanifoldları için bir karakterizasyon teoremi verdiler ve bu altmanifoldların geometrisini incelediler. Ayrıca ST-CR lightlike altmanifoldların minimal olması için şartlar buldular. Poyraz (2023) belirsiz Sasakian manifoldların kontakt ekran transversal CR-lightlike altmanifoldlarını tanıttı ve bu tür lightlike altmanifoldların geometrisini inceledi. Belirsiz Sasakian manifoldun proper kontakt ekran transversal CR-lightlike altmanifoldunun indirgenmiş metrik konneksiyonunun var olmadığını gösterdi. Bu altmanifoldlar için karakterizasyon teoremleri verdi. Kontakt ekran transversal-CR lightlike altmanifoldların ekran transversal CR-lightlike çarpım olması için gerekli ve yeterli

koşullar bulmuştur. Ayrıca kontakt ekran transversal-CR lightlike altmanifoldların minimalliğini araştırmıştır ve bu altmanifoldlar için örnekler vermiştir.

Belirsiz kosimplektik manifoldlar ve lightlike altmanifoldlar için şimdiye kadar yapılan çalışmalar dikkate alındığında, bu altmanifoldlar arasında kapsayan bir bağlantının olmadığı görülmektedir. Belirsiz kosimplektik manifold durumu için de, bu altmanifoldları kapsayan genel bir lightlike altmanifoldun varlığını araştırmak iyi bir araştırma problemidir. Bu yüzden bu tezde, belirsiz kosimplektik manifoldun ekran transversal CR-lightlike altmanifoldları çalışılmış, geometrileri incelenmiş ve diğer altmanifoldlar ile olan ilişkileri tartışılmıştır. Ekran transversal CR-lightlike altmanifoldların ekran transversal CR-lightlike çarpım olması için şartlar bulunmuştur. Ayrıca kontakt tamamen umbilik ekran transversal CR-lightlike altmanifoldların ve irrasyonel ekran transversal CR-lightlike altmanifoldların ekran transversal CR-lightlike çarpım olması için şartlar araştırılmıştır. Bu altmanifoldların minimal olması için şartlar elde edilmiştir ve tamamen geodezik olmayan minimal örneği verilmiştir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Burada semi-Öklidyen uzaylar ve semi-Riemann manifoldlar ile ilgili bilgiler verilmiştir. Daha sonra lightlike altmanifoldlar, belirsiz kosimplektik manifoldlar ve bu manifoldun çalışmalarımızda bahsedeceğimiz bazı lightlike altmanifoldları tanıtılmıştır.

3.1. Semi-Öklidyen Uzaylar

Tanım 3.1.1. W bir reel reel vektör uzayı olsun. Eğer $\tilde{g} : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü, her $a, b \in \mathbb{R}$ skalerleri ve her $w_1, w_2, w_3 \in W$ vektörleri için

- i) $\tilde{g}(w_1, w_2) = \tilde{g}(w_2, w_1),$
- ii) $\tilde{g}(aw_1 + bw_2, w_3) = a\tilde{g}(w_1, w_3) + b\tilde{g}(w_2, w_3),$
 $\tilde{g}(w_1, aw_2 + bw_3) = a\tilde{g}(w_1, w_2) + b\tilde{g}(w_1, w_3)$

koşullarını sağlıyorsa, $\tilde{g}$ dönüşümüne W reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilinear form denir (O'Neill, 1983).

Tanım 3.1.2. W reel vektör uzayı ve $\tilde{g}, W$ üzerinde tanımlı simetrik bilinear form olsun. Bu durumda

- i) Her $w \in W$ ve $w \neq 0$ için $\tilde{g}(w, w) > 0$ ise $\tilde{g}$ simetrik bilinear formuna pozitif tanımlı,
- ii) Her $w \in W$ ve $w \neq 0$ için $\tilde{g}(w, w) < 0$ ise $\tilde{g}$ simetrik bilinear formuna negatif tanımlı,
- iii) Her $w \in W$ için $\tilde{g}(w, w) \geq 0$ ise $\tilde{g}$ simetrik bilinear formuna pozitif yarı-tanımlı,
- iv) Her $w \in W$ için $\tilde{g}(w, w) \leq 0$ ise $\tilde{g}$ simetrik bilinear formuna negatif yarı-tanımlı

denir (O'Neill, 1983).

Tanım 3.1.3. W bir reel vektör uzayı ve $\tilde{g}, W$ üzerinde tanımlı simetrik bilinear bir form olsun. $0 \neq w \in W$ olmak üzere her $u \in W$ için

$$\tilde{g}(u, w) = 0$$

ise, $\tilde{g}$ simetrik bilinear formuna W üzerinde dejeneredir denir. Aksi durumda $\tilde{g}$ non-dejenere olur. $\tilde{g}$ 'nin non-dejenere olması için ancak ve ancak her $u \in W$ için, $\tilde{g}(u, w) = 0$ iken $w = 0$ olmasıdır (Duggal ve Bejancu, 1996).

Tanım 3.1.4. W bir semi-Öklidyen uzay ve $\tilde{g}, W$ üzerinde tanımlı non-dejenere simetrik bilinear form olsun. $w \in W$ vektörüne

- i) $\tilde{g}(w, w) > 0$ veya $w = 0$ ise spacelike (uzayımsı),
- ii) $\tilde{g}(w, w) < 0$ ise timelike (zamansı),

iii) $\check{g}(w, w) = 0$ ve $w \neq 0$ ise lightlike (ışıksı) vektör denir (O'Neill, 1983).

Tanım 3.1.5. W bir semi-Öklidyen uzay, $\check{g}$ W üzerinde tanımlı non-dejenere simetrik bilinear form ve V , W reel vektör uzayının bir alt uzayı olsun. $\check{g}$ 'nın V alt uzayı üzerine kısıtlanmış olan $\check{g}|_V : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümünün negatif tanımlı olacak şekildeki en büyük boyutlu V alt uzayının boyutuna, $\check{g}$ simetrik bilinear formunun indeksi denir ve q ile gösterilir (O'Neill, 1983).

Tanım 3.1.6. W reel vektör uzayı üzerindeki $\check{g}$ non-dejenere simetrik bilinear forma, W reel vektör uzayı üzerinde bir skalar çarpım (veya semi-Öklidyen metriği), $(W, \check{g})$ skalar çarpım uzay (veya semi-Öklidyen uzay) olarak adlandırılır. Eğer $\check{g}$ pozitif tanımlı ise o zaman $\check{g}$ bir iç çarpım (Öklid metriği) olur ve $(W, \check{g})$ da Öklid uzayı denir. $\check{g}$ 'nın indeksi, $q = 1$ ise $\check{g}$ 'ya Lorentz metriği ve $(W, \check{g})$ 'ya da Lorentz uzayı olarak adlandırılır. Bir $(W, \check{g})$ semi-Öklidyen uzayın ortonormal bazındaki spacelike vektör sayısı p ve timelike vektör sayısı q olsun. Eğer $p, q \neq 0$ ise W , proper semi-Öklidyen uzay denir (Duggal ve Bejancu, 1996).

Tanım 3.1.7. W bir reel vektör uzayı ve V de W 'nın bir alt uzayı olsun. Eğer $\check{g}|_V$ dejenere ise V lightlike (dejenere) alt uzay olarak adlandırılır. V uzayının dik uzayı

$$V^\perp = \{w \in W \mid \check{g}(v, w) = 0, \forall v \in V\}$$

ile tanımlıdır ve $V \cap V^\perp \neq \{0\}$ 'dır (Duggal ve Bejancu, 1996).

Tanım 3.1.8. W bir reel vektör uzayı ve $\check{g}$, W üzerinde simetrik bilinear bir form olsun. Bu durumda W 'nın

$$RadW = \{\xi \in W \mid \check{g}(\xi, w) = 0, \forall w \in W\}$$

şeklinde tanımlı alt uzayına, $\check{g}$ simetrik bilinear formuna göre W uzayının radikal (veya null) uzayı denir (Duggal ve Şahin, 1996).

Tanım 3.1.9. W bir lightlike vektör uzayı ve $RadW$, W vektör uzayının radikal uzayı olsun. Radikal uzaya tümleyen olan non-dejenere alt uzaya ekran (screen) uzay denir ve SW ile gösterilir (Duggal ve Bejancu, 1996).

Tanım 3.1.10. W bir semi-Öklidyen uzay olsun. Bu uzayın

$$\check{g}(e_i, e_j) = \check{g}(e_i^*, e_j^*) = 0, \quad \check{g}(e_i, e_j^*) = \delta_{ij}, \quad i, j \in \{1, \dots, \mu\}$$

ve

$$\check{g}(v_\alpha, e_i) = \check{g}(v_\alpha, e_i^*) = 0, \quad \check{g}(v_\alpha, v_\beta) = \varepsilon_\alpha \delta_{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta \in \{1, \dots, t\}, \quad \varepsilon_\alpha = \mp 1$$

olacak şekildeki $\{e_1, \dots, e_\mu, e_1^*, \dots, e_\mu^*, v_1, \dots, v_t\}$ bazına semi-Öklidyen uzayın quasi-ortonormal bazı denir (Duggal ve Bejancu, 1996).

Teorem 3.1.11. W bir semi-Öklidyen uzay ve V da bu uzayın bir lightlike altuzayı olsun. Bu durumda, W uzayının V boyunca bir quasi-ortonormal bazı vardır (Duggal ve Bejancu, 1996).

3.2. Semi-Riemann Manifoldlar

Bu alt bölümde semi-Riemann manifoldların altmanifoldları hakkında temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Tanım 3.2.1. $\tilde{B}$ diferensiyellenebilir bir manifold ve $p \in \tilde{B}$ noktasındaki tanjant uzay $T_p \tilde{B}$ olsun.

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{|_p} : T_p \tilde{B} \times T_p \tilde{B} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (X_p, Y_p) &\rightarrow \tilde{g}_{|_p}(X_p, Y_p) = \tilde{g}(X_p, Y_p) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı sabit indeksli, simetrik, bilinear, non-dejenere $(0, 2)$ tensör alanına $\tilde{B}$ üzerinde bir metrik tensör denir (O'Neill, 1983).

Tanım 3.2.2. $\tilde{g}$ metrik tensörü ile donatılan bir $\tilde{B}$ diferensiyellenebilir manifolduna, bir semi-Riemann manifold denir ve $(\tilde{B}, \tilde{g})$ ile gösterilir (O'Neill, 1983).

Tanım 3.2.3. $(\tilde{B}, \tilde{g})$ semi-Riemann manifoldu için, $\tilde{g}$ metrik tensörünün indeksine, semi-Riemann manifoldunun indeksi denir ve $ind \tilde{B}$ ile gösterilir (O'Neill, 1983).

İndeks q ile belirtelim. O zaman, $0 \leq q \leq boy \tilde{B}$ 'dir. Eğer $q = 0$ ise, her $p \in \tilde{B}$ için $\tilde{g}_{|_p}, T_p \tilde{B}$ üzerinde pozitif tanımlı bir iç çarpım olacağından $\tilde{B}$ bir Riemann manifoldu olur. Eğer $q = 1$ ve $n \geq 2$ ise, $\tilde{B}$ Lorentz manifold olarak adlandırılır (O'Neill, 1983).

Tanım 3.2.4. $\tilde{B}$ diferensiyellenebilir bir manifold olsun. Her $X, Y, Z \in \Gamma(T\tilde{B})$ ve $f \in C^\infty(\tilde{B}, \mathbb{R})$ için

$$\tilde{\nabla} : \Gamma(T\tilde{B}) \rightarrow \Gamma(T\tilde{B})$$

ile tanımlı ve

- 1) $\tilde{\nabla}_{X+Y} Z = \tilde{\nabla}_X Z + \tilde{\nabla}_Y Z,$
- 2) $\tilde{\nabla}_X (Y + Z) = \tilde{\nabla}_X Y + \tilde{\nabla}_X Z,$
- 3) $\tilde{\nabla}_{fX} Y = f \tilde{\nabla}_X Y,$
- 4) $\tilde{\nabla}_X (fY) = X[f]Y + f \tilde{\nabla}_X Y$

şartlarını sağlayan $\tilde{\nabla}$ dönüşümü afin (veya lineer) konneksiyon olarak adlandırılır. $\tilde{\nabla}_X Y$ vektör alanına, Y vektör alanının X vektör alanı yönündeki kovaryant türevi denir (O'Neill, 1983).

Tanım 3.2.5. $\tilde{\nabla}$, $(\tilde{B}, \tilde{g})$ semi-Riemann manifoldu üzerinde bir lineer konneksiyon olsun. $\tilde{g}$ metrik tensör alanı $\tilde{\nabla}$ 'ye göre paralel ise, yani her $X, Y, Z \in \Gamma(\tilde{TB})$ için

$$(\tilde{\nabla}_X \tilde{g})(Y, Z) = X\tilde{g}(Y, Z) - \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, Z) - \tilde{g}(Y, \tilde{\nabla}_X Z) = 0$$

ise, $\tilde{\nabla}$ 'ya metrik konneksiyon (veya Riemann konneksiyonu) denir (O'Neill, 1983).

Tanım 3.2.6. $\tilde{B}$ semi-Riemann manifoldunun lineer konneksiyonu $\tilde{\nabla}$ olsun. Her $X, Y \in \Gamma(\tilde{TM})$ için $\tilde{\nabla}$ 'nın torsiyon tensörü T

$$T(X, Y) = \tilde{\nabla}_X Y - \tilde{\nabla}_Y X - [X, Y]$$

ile tanımlanır. Eğer $T(X, Y) = 0$ ise $\tilde{\nabla}$ 'ya torsiyonsuzdur denir (O'Neill, 1983).

Teorem 3.2.7. $\tilde{B}$ semi-Riemann manifoldu üzerinde her $X, Y, Z \in \Gamma(\tilde{TB})$ vektör alanları için

- i) $[X, Y] = \tilde{\nabla}_X Y - \tilde{\nabla}_Y X$,
- ii) $X\tilde{g}(Y, Z) = \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, Z) + \tilde{g}(Y, \tilde{\nabla}_X Z)$

olacak şekilde bir tek $\tilde{\nabla}$ Levi-Civita konneksiyonu vardır ve bu konneksiyon

$$\begin{aligned} 2\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, Z) &= X\tilde{g}(Y, Z) + Y\tilde{g}(Z, X) - Z\tilde{g}(X, Y) \\ &\quad - \tilde{g}(X, [Y, Z]) + \tilde{g}(Y, [Z, X]) + \tilde{g}(Z, [X, Y]) \end{aligned}$$

Kozsul özdeşliğini sağlar (O'Neill, 1983).

Tanım 3.2.8. $\tilde{B}$ diferensiyellenebilir n – boyutlu bir manifold olsun. $\tilde{B}$ üzerinde

$$\begin{aligned} D: \tilde{B} &\rightarrow T_p \tilde{B} \\ p &\rightarrow D_p \subset T_p \tilde{B} \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı D dönüşümüne r – boyutlu distribüsyon (dağılım) ve $X \in \Gamma(\tilde{TB})$ için $X_p \in D_p$ ise, X vektör alanına da D 'ye aittir denir. Eğer her $p \in \tilde{B}$ noktası için, D_p 'de r tane diferensiyellenebilir lineer bağımsız vektör alanı varsa, D distribüsyonuna diferensiyellenebilirdir denir (Bejancu, 1986).

Tanım 3.2.9. n – boyutlu diferensiyellenebilir bir $\tilde{B}$ manifoldu üzerindeki r – boyutlu D distribüsyonu olsun. Eğer her $X, Y \in \Gamma(D)$ için $[X, Y] \in \Gamma(D)$ ise D ye involutivedir denir (Bejancu, 1986).

Teorem 3.2.10. (Frobenius Teoremi) $\tilde{B}$ üzerindeki bir D distribüsyonu integrallenebilirdir ancak ve ancak D involutivedir (Duggal ve Şahin, 2010).

Tanım 3.2.11. $\tilde{B}$ bir semi-Riemann manifoldu ve $\tilde{\nabla}$, $\tilde{B}$ üzerinde bir lineer konneksiyon olsun. Eğer her $X, Y \in \Gamma(D)$ için $\tilde{\nabla}_X Y \in \Gamma(D)$ ise, D distribüsyonuna paraleldir denir (Bejancu, 1986).

Tanım 3.2.12. $\tilde{B}$ bir semi-Riemann manifoldu ve $\tilde{\nabla}$ $\tilde{B}$ üzerindeki Levi-Civita konneksiyonu olsun. Her $X, Y, Z \in \Gamma(T\tilde{B})$ için

$$\begin{aligned} \tilde{R} : \Gamma(T\tilde{B}) \times \Gamma(T\tilde{B}) \times \Gamma(T\tilde{B}) &\rightarrow \Gamma(T\tilde{B}) \\ (X, Y, Z) &\rightarrow \tilde{R}(X, Y)Z = \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y Z - \tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X Z - \tilde{\nabla}_{[X, Y]} Z \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan $(1, 3)$ tipindeki $\tilde{R}$ fonksiyonu $\tilde{B}$ 'nin Riemann eğrilik tensörü olarak adlandırılır (O'Neill, 1983).

Tanım 3.2.13. $(\tilde{B}, \tilde{g})$ bir semi-Riemann manifoldu ve $p \in \tilde{B}$ noktasındaki $T_p \tilde{B}$ tanjant uzayının iki boyutlu bir alt uzayı P olsun. $P = Sp\{X, Y\}$ olmak üzere

$$K(P) = \frac{\tilde{R}(X, Y, X, Y)}{\tilde{g}(X, X)\tilde{g}(Y, Y) - \tilde{g}(X, Y)^2}$$

olarak tanımlanan $K(P)$ reel sayısına kesit eğriliği denir. Eğer $K(P) = c(\text{sabit})$ ise $\tilde{B}$ manifolduna c sabit kesit eğrilikli semi-Riemann manifold veya uzay form denir ve $\tilde{B}(c)$ ile gösterilir (O'Neill, 1983).

Tanım 3.2.14. $\tilde{B}(c)$ uzay formunun Riemann eğrilik tensörü her $X, Y, Z \in \Gamma(T\tilde{B})$ için

$$\tilde{R}(X, Y)Z = c \{ \tilde{g}(Y, Z)X - \tilde{g}(X, Z)Y \}$$

ile verilir (O'Neill, 1983).

3.3. Semi-Riemann Manifoldların Lightlike Altmanifoldları

Tanım 3.3.1. $\tilde{B}$, $(m+n)$ -boyutlu bir $\tilde{B}$ semi-Riemann manifoldunun, ek boyutu n olan bir altmanifoldu olsun. Her $p \in \tilde{B}$ için

$$Rad : p \in \tilde{B} \rightarrow Rad(T_p \tilde{B})$$

dönüşümü $\tilde{B}$ üzerinde $rank(Rad(T_p \tilde{B})) = r > 0$ olacak şekilde diferensiyellenebilir bir distribüsyon tanımlıyorsa, $\tilde{B}$ r -lightlike altmanifold olarak adlandırılır (Duggal ve Şahin, 1996).

r -lightlike bir altmanifold dört durumda incelenebilir (Duggal ve Şahin, 1996).

1. Durum: Eğer $r < \min\{m, n\}$ ise, o zaman $\tilde{B}$ 'nin $T\tilde{B}$ tanjant demetinde $Rad(T\tilde{B})$ 'ya tümleyen olan bir $S(T\tilde{B})$ ekran distribüsyonu vardır. $S(T\tilde{B})$, $Rad(T\tilde{B})$ 'ya ortogonal ve $\tilde{g}$ 'ya göre non-dejeneredir. $\tilde{B}$ üzerinde $S(T\tilde{B})$ sabit indekslidir ve

$$T\tilde{B} = Rad(T\tilde{B}) \perp S(T\tilde{B}) \quad (3.1)$$

olarak yazılır. $T\tilde{B}^\perp$, $T\tilde{B}$ 'nin ortogonal demeti olmak üzere; $T\tilde{B}^\perp$ içinde $Rad(T\tilde{B})$ 'ya tümleyen olan non-dejenere bir $S(T\tilde{B}^\perp)$ ekran transversal vektör demeti vardır ve

$$T\tilde{B}^\perp = Rad(T\tilde{B}) \perp S(T\tilde{B}^\perp) \quad (3.2)$$

şeklindedir. Ayrıca $S(T\tilde{B})$ ve $S(T\tilde{B}^\perp)$, sırasıyla, $T\tilde{B}$ ve $S(T\tilde{B})^\perp$ vektör demetlerinin non-dejenere alt vektör demetleri olduğu için

$$T\tilde{B} = S(T\tilde{B}) \perp S(T\tilde{B})^\perp \quad (3.3)$$

olarak yazılabilir. $S(T\tilde{B}^\perp)$ ve $S(T\tilde{B})^\perp$ demetlerinin her ikisi de non-dejenere ve $S(T\tilde{B}^\perp)$ demeti, $S(T\tilde{B})^\perp$ demetinin alt vektör demeti olduğu için

$$S(T\tilde{B})^\perp = S(T\tilde{B}^\perp) \perp S(T\tilde{B}^\perp)^\perp \quad (3.4)$$

olacak şekilde başka bir $S(T\tilde{B}^\perp)^\perp$ non-dejenere alt vektör demeti vardır. Aynı şekilde $S(T\tilde{B}^\perp)^\perp$ demetinde $Rad(T\tilde{B})$ 'ya tümleyen olan $ltr(T\tilde{B})$ lightlike transversal vektör demeti ve $T\tilde{B}$ içinde $T\tilde{B}$ ya tümleyen olan bir $tr(T\tilde{B})$ transversal vektör demeti vardır. Öyleyse

$$S(T\tilde{B}^\perp)^\perp = Rad(T\tilde{B}) \oplus ltr(T\tilde{B}) \quad (3.5)$$

ve

$$tr(T\tilde{B}) = ltr(T\tilde{B}) \perp S(T\tilde{B}^\perp)$$

dir. (3.3)-(3.5) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} T\tilde{B} &= T\tilde{B} \oplus tr(T\tilde{B}) \\ &= S(T\tilde{B}) \perp S(T\tilde{B}^\perp) \perp (Rad(T\tilde{B}) \oplus ltr(T\tilde{B})) \end{aligned} \quad (3.6)$$

bulunur.

2. Durum: Eğer $r = n < m$, $S(T\tilde{B}^\perp) = \{0\}$ ise $\tilde{B}$ koizotropik altmanifold olarak adlandırılır.

3. Durum: Eğer $r = m < n$, $S(T\tilde{M}) = \{0\}$ ise $\tilde{B}$ izotropik altmanifold olarak adlandırılır.

4. Durum: Eğer $r = m = n$, $S(T\tilde{B}) = S(T\tilde{B}^\perp) = \{0\}$ ise $\tilde{B}$ tamamen lightlike altmanifold olarak adlandırılır.

$\tilde{B}$, $\tilde{B}$ semi-Riemann manifoldunun bir lightlike altmanifoldu ve $\tilde{\nabla}$, $\tilde{B}$ 'nin Levi-Civita konneksiyonu olsun. $tr(T\tilde{B})$ $\tilde{B}$ 'nin transversal vektör demeti olmak üzere her $X, Y \in \Gamma(T\tilde{B})$ ve $V \in \Gamma(tr(T\tilde{B}))$ için Gauss ve Weingarten denklemleri

$$\tilde{\nabla}_X Y = \tilde{\nabla}_X Y + h(X, Y) \quad (3.7)$$

ve

$$\tilde{\nabla}_X V = -A_V X + \tilde{\nabla}_X^t V \quad (3.8)$$

biçiminde verilmiştir. Burada $\{\tilde{\nabla}_X Y, A_Y X\} \in \Gamma(T\tilde{B})$ ve $\{h(X, Y), \tilde{\nabla}_X^t V\} \in \Gamma(tr(TM))$ dir. $\tilde{\nabla}$ ve $\tilde{\nabla}^t$ lineer konneksiyonlarına, sırasıyla, indirgenmiş konneksiyon ve transversal konneksiyon denir. İkinci temel form olan h , $\Gamma(tr(T\tilde{B}))$ değerli simetrik bilineer form ve A_Y şekil operatörü ise $\Gamma(T\tilde{B})$ değerli bir bilineer formdur.

Dğer taraftan

$$L : tr(T\tilde{B}) \rightarrow ltr(T\tilde{B}), \quad S : tr(T\tilde{B}) \rightarrow S(T\tilde{B}^\perp)$$

projeksiyonları için,

$$Lh(X, Y) = h^l(X, Y), \quad Sh(X, Y) = h^s(X, Y)$$

olarak yazılabilir. h^l ve h^s , sırasıyla, altmanifoldun lightlike ikinci temel formu ve ekran ikinci temel formu olarak adlandırılır. Ayrıca, (3.7) ve (3.8) eşitlikleri her $X, Y \in \Gamma(T\tilde{B})$, $N \in \Gamma(ltr(T\tilde{B}))$ ve $W \in \Gamma(S(T\tilde{B}^\perp))$ için

$$\tilde{\nabla}_X Y = \tilde{\nabla}_X Y + h^l(X, Y) + h^s(X, Y), \quad (3.9)$$

$$\tilde{\nabla}_X N = -A_N X + \tilde{\nabla}_X^l N + D^s(X, N), \quad (3.10)$$

$$\tilde{\nabla}_X W = -A_W X + \tilde{\nabla}_X^s W + D^l(X, W) \quad (3.11)$$

olarak yazılabilir. Burada $\tilde{\nabla}_X Y, A_N X, A_W X \in \Gamma(T\tilde{B})$, $\tilde{\nabla}_X^l N, D^l(X, W) \in \Gamma(ltr(T\tilde{B}))$ ve $D^s(X, N), \tilde{\nabla}_X^s W \in \Gamma(S(T\tilde{B}^\perp))$ dir (Duggal ve Bejancu, 1996).

(3.9)-(3.11) kullanılarak, her $X, Y \in \Gamma(T\tilde{B})$, $N, N' \in \Gamma(ltr(T\tilde{B}))$ ve $W \in \Gamma(S(T\tilde{B}^\perp))$ için

$$\tilde{g}(h^s(X, Y), W) + \tilde{g}(Y, D^l(X, W)) = \tilde{g}(A_W X, Y), \quad (3.12)$$

$$\tilde{g}(h^l(X, Y), \xi) + \tilde{g}(Y, h^l(X, \xi)) + \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X \xi, Y) = 0, \quad (3.13)$$

$$\tilde{g}(W, D^s(X, N)) = \tilde{g}(A_W X, N) \quad (3.14)$$

ve

$$\tilde{g}(A_N X, N') + \tilde{g}(A_{N'} X, N) = 0 \quad (3.15)$$

eşitlikleri elde edilir.

$Q : \Gamma(T\tilde{B}) \rightarrow \Gamma(S(T\tilde{B}))$ projektif dönüşümü olsun. $S(T\tilde{B})$ için Gauss ve Weingarten denklemleri her $X, Y \in \Gamma(T\tilde{B})$ ve $\xi \in \Gamma(Rad(T\tilde{B}))$ için

$$\tilde{\nabla}_X QY = \nabla_X^* QY + h^*(X, QY), \quad (3.16)$$

$$\tilde{\nabla}_X \xi = -A_\xi^* X + \nabla_X^{*f} \xi \quad (3.17)$$

dir. Burada $\nabla_X^* Y, A_\xi^* X \in \Gamma(S(T\tilde{B}))$ ve $h^*(X, QY), \nabla_X^{*f} \xi \in \Gamma(Rad(T\tilde{B}))$ dir. (Bejancu ve Duggal, 1995).

Ayrıca yukarıdaki denklemler kullanılarak her $X, Y \in \Gamma(T\tilde{B})$, $\xi \in \Gamma(Rad(T\tilde{B}))$ ve $N \in \Gamma(ltr(T\tilde{B}))$ için

$$\tilde{g}(h^l(X, QY), \xi) = \tilde{g}(A_\xi^* X, QY) \quad (3.18)$$

ve

$$\tilde{g}(h^*(X, QY), N) = \tilde{g}(A_N X, QY) \quad (3.19)$$

bulunur. Ayrıca (3.13) eşitliğinden

$$\tilde{g}(h^l(X, \xi), \xi) = 0 \quad (3.20)$$

ve

$$A_\xi^* \xi = 0 \quad (3.21)$$

olduğu kolayca görülür (Bejancu ve Duggal, 1995).

$\tilde{\nabla}$ 'nın metrik konneksiyon olduğu ve (3.9) kullanılırsa, $\tilde{B}$ 'nın indirgenen $\tilde{\nabla}$ konneksiyonu ve her $X, Y, Z \in \Gamma(T\tilde{B})$ için

$$(\tilde{\nabla}_X \tilde{g})(Y, Z) = \tilde{g}(h^l(X, Y), Z) + \tilde{g}(h^l(X, Z), Y) \quad (3.22)$$

dir. Buradan $\tilde{\nabla}$ 'nın metrik konneksiyon olması için ancak ve ancak $h^l = 0$ olmasıdır.

Teorem 3.3.2. $\tilde{B}$ semi-Riemann manifoldu $\tilde{B}$, $\tilde{B}$ 'nın bir r – lightlike yada koizotropik altmanifoldu olsun. O zaman $\tilde{B}$ üzerine indirgenen $\tilde{\nabla}$ lineer konneksiyonunun bir metrik konneksiyon olması için ancak ve ancak aşağıdakilerin sağlanmasıdır (Duggal ve Bejancu, 1996).

- 1) Herhangi bir $\xi \in \Gamma(Rad(T\tilde{B}))$ için A_ξ^* , $\Gamma(T\tilde{B})$ üzerinde sıfırdır.
- 2) $Rad(T\tilde{B})$ bir Killing distribüsyondur.
- 3) $Rad(T\tilde{B})$, $\tilde{\nabla}$ 'ya göre paralel bir distribüsyondur.

Tanım 3.3.3. $\tilde{B}$ semi-Riemann manifoldu $\tilde{B}$, $\tilde{B}$ 'nın bir lightlike altmanifoldu olsun. Her $X, Y \in \Gamma(T\tilde{B})$ için

$$h(X, Y) = H\tilde{g}(X, Y) \quad (3.23)$$

olacak şekilde $\tilde{B}$ üzerinde diferensiyellenebilir bir $H \in \Gamma(tr(T\tilde{B}))$ varsa, $\tilde{B}$ 'ya tamamen umbiliktir denir. (Duggal ve Jin, 2003). Eğer $H = 0$ ise $\tilde{B}$ altmanifolduna tamamen geodezik denir.

Ayrıca tamamen umbiliklik şu şekilde de verilebilir:

$\tilde{B}$ 'nın tamamen umbilik olması için ancak ve ancak her U koordinat komşuluğunda her $X, Y \in \Gamma(T\tilde{B})$, $W \in \Gamma(S(T\tilde{B}^\perp))$ için

$$h^l(X, Y) = H^l \tilde{g}(X, Y), \quad D^l(X, W) = 0 \quad (3.24)$$

ve

$$h^s(X, Y) = H^s \tilde{g}(X, Y) \quad (3.25)$$

olacak şekilde $H^l \in \Gamma(\text{ltr}(\tilde{T}\tilde{B}))$ ve $H^s \in \Gamma(S(\tilde{T}\tilde{B}^\perp))$ diferensiyellenebilir vektör alanlarının bulunmasıdır (Duggal ve Jin, 2003).

Tanım 3.3.4. $\tilde{B}$ semi-Riemann manifoldu $\tilde{B}$, $\tilde{B}$ semi-Riemann manifoldunun bir lightlike altmanifoldu olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa, $\tilde{B}$ 'ya minimaldir denir (Bejancu ve Duggal, 2005).

- i) $\text{Rad}(\tilde{T}\tilde{B})$ üzerinde $h^s = 0$ 'dır.
- ii) $S(\tilde{T}\tilde{B})$ üzerinde $izh = 0$ 'dır.

Tanım 3.3.5. $\tilde{B}$ semi-Riemann manifoldu $\tilde{B}$, $\tilde{B}$ semi-Riemann manifoldunun bir lightlike altmanifoldu olsun. Her $X \in \Gamma(\tilde{T}\tilde{B})$ ve $\xi \in \Gamma(\text{Rad}(\tilde{T}\tilde{B}))$ için $\tilde{\nabla}_X \xi \in \Gamma(\tilde{T}\tilde{B})$ ise $\tilde{B}$ ya irrasyonel lightlike altmanifold denir (Küpeli, 1996).

3.4. Belirsiz Kosimplektik Manifoldların Lightlike Altmanifoldları

Tanım 3.4.1. $\tilde{B}$ $(2m+1)$ -boyutlu semi-Riemann manifold olsun. Bu durumda $\tilde{B}$ üzerinde sırasıyla ϕ $(1,1)$ -tipinde bir tensör alanı, V vektör alanı ve η 1-form olmak üzere ϕ, V, η yapı tensörleri varsa ve $\tilde{B}$ üzerinde $\tilde{g}$ semi-Riemann metriği varsa ve her $X, Y \in \chi(\tilde{B})$ ve $V \in \chi(\tilde{B})$ için aşağıdaki koşulları sağlıyorsa

$$\phi^2 X = -X + \eta(X)V, \quad \eta(X) = \tilde{g}(X, V), \quad (3.26)$$

$$\tilde{g}(\phi X, \phi Y) = -\tilde{g}(X, Y) + \eta(X)\eta(Y), \quad \eta \circ \phi = 0, \quad \phi V = 0, \quad \eta(V) = 1 \quad (3.27)$$

$\tilde{B}$ belirsiz hemen hemen kontakt metrik manifold olarak adlandırılır.

Tanım 3.4.2. $\tilde{B}$ belirsiz hemen hemen kontakt metrik manifoldu üzerinde her $X \in \chi(\tilde{B})$ için

$$\tilde{\nabla}_X \phi = 0, \quad (3.28)$$

$$\tilde{\nabla}_X V = 0 \quad (3.29)$$

ise $\tilde{B}$ ya belirsiz kosimplektik manifold denir (Blair, 2002).

Tanım 3.4.3. $\tilde{B}$ belirsiz kosimplektik manifoldu ve $\tilde{B}$ nın yapı vektör alanı V olsun. $p \in \tilde{B}$ de V ye ortogonal bir X olsun. O zaman $\{X, \phi X\}$ çiftinin gerdiği π -kesitin eğriliği

$$K = \frac{\tilde{g}(\tilde{R}(X, \phi X)\phi X, X)}{(\tilde{g}(X, X))^2}$$

olarak tanımlanır ve X 'e göre π -kesit eğriliği denir. Eğer K , her noktada X 'in seçilişinden bağımsızsa bu durumda $K = c$ (sabit) olur.

Eğer $\tilde{B}$ belirsiz kosimplektik manifoldun $T_x\tilde{B}$ üzerindeki düzlem kesiti V ye ortogonal X ve ϕX tarafından geriliyorsa ϕ düzlem kesitine ϕ -kesit denir. Burada X , $\tilde{B}$ üzerinde null olmayan vektör alanıdır. X ile belirlenmiş ϕ yönündeki K kesitsel eğriliği ϕ -kesitsel eğrilik olarak adlandırılır. Eğer $\tilde{B}$ ϕ -kesitin her bir noktasına bağlı olmayan c kesit eğriliğine sahip ise bu durumda c $\tilde{B}$ da sabittir. Bu durumda $\tilde{B}$ belirsiz kosimplektik uzay formu denir ve $\tilde{B}(c)$ ile gösterilir. $\tilde{B}(c)$ nin eğrilik tensörü

$$\begin{aligned} \tilde{R}(X, Y)Z &= \frac{c}{4} \{ \tilde{g}(Y, Z)X - \tilde{g}(X, Z)Y + \eta(X)\eta(Z)Y - \eta(Y)\eta(Z)X + \eta(Y)\tilde{g}(X, Z)V \\ &\quad - \eta(X)\tilde{g}(Y, Z)V + \tilde{g}(\phi X, Z)\phi Y + \tilde{g}(\phi Y, Z)\phi X + 2\tilde{g}(X, \phi Y)\phi Z \} \end{aligned} \quad (3.30)$$

ile verilir (Ludden, 1970).

Bu çalışma boyunca örnekleri anlamak için aşağıdaki yapı dikkate alınacaktır. $(\mathbb{R}_q^{2m+1}\phi_0, V, \eta, \tilde{g})$ nin alışılmış kosimplektik yapısı

$$\begin{aligned} \eta &= dz, V = \partial z, \\ \tilde{g} &= \eta \otimes \eta - \sum_{i=1}^{\frac{q}{2}} dx^i \otimes dx^i + dy^i \otimes dy^i + \sum_{i=q+1}^m dx^i \otimes dx^i + dy^i \otimes dy^i, \\ \phi_0((\sum_{i=1}^m X_i \partial x^i + Y_i \partial y^i) + Z \partial z) &= (\sum_{i=1}^m Y_i \partial x^i - X_i \partial y^i) \end{aligned}$$

ile verilir. Burada (x^i, y^i, z) kartezyen koordinatlardır ve q çift sayı olarak dikkate alınacaktır.

Tanım 3.4.4. $\tilde{B}$ bir belirsiz kosimplektik manifoldu ve $\tilde{B}$, $\tilde{B}$ nin V 'ye teğet olacak şekildeki lightlike altmanifoldu olsun. Eğer

$$\phi(Rad(\tilde{T}\tilde{B})) = Rad(\tilde{T}\tilde{B}) \text{ ve } \phi(S(\tilde{T}\tilde{B})) = S(\tilde{T}\tilde{B})$$

ise $\tilde{B}$, $\tilde{B}$ 'nin invaryant lightlike altmanifoldu olarak adlandırılır (Gupta vd., 2012a).

Tanım 3.4.5. $\tilde{B}$ bir belirsiz kosimplektik manifoldu ve $\tilde{B}$, $\tilde{B}$ nin V 'ye teğet olacak şekildeki lightlike altmanifoldu olsun. Eğer aşağıdakiler sağlanıyorsa, $\tilde{B}$, $\tilde{B}$ nin CR (Cauchy-Riemann)-lightlike altmanifoldu olarak adlandırılır.

i) $Rad(\tilde{T}\tilde{B})$,

$$Rad(\tilde{T}\tilde{B}) \cap \phi(Rad(\tilde{T}\tilde{B})) = \{0\}$$

olacak şekilde anti-invaryant bir distribüsyondur.

ii) $\tilde{B}$ üzerinde

$$S(\tilde{T}\tilde{B}) = \{\phi(Rad(\tilde{T}\tilde{B})) \oplus \sigma'\} \perp \sigma_0 \perp \{V\}, \phi(\mu_0) = \mu_0, \phi(\mu') = \Omega_1 \perp \Omega_2$$

olacak şekilde μ_0 ve μ' vektör demetleri vardır. Burada μ_0 altmanifold üzerinde non-dejenere invariant bir distribüsyon, $\{V\}$ de V tarafından üretilen 1-boyutlu distribüsyon ve Ω_1, Ω_2 de sırasıyla, $ltr(T\tilde{B}), S(T\tilde{B}^\perp)$ in vektör alt demetleridir.

Tanım 3.4.6. $\tilde{B}$ bir belirsiz kosimplektik manifoldu ve $\tilde{B}, \tilde{B}$ nin V 'ye teğet olacak şekildeki lightlike altmanifoldu olsun. Aşağıdakiler sağlanıyorsa, $\tilde{B}, \tilde{B}$ 'nin bir SCR (ekran Cauchy-Riemann) lightlike altmanifoldu olarak adlandırılır (Gupta vd., 2012a).

(A) $S(T\tilde{B})$ 'nin

$$S(T\tilde{B}) = \mu \perp \mu^\perp \perp \{V\}, \mu \cap \mu^\perp = \{0\},$$

$$\phi(\mu) = \mu, \phi(\mu^\perp) \subseteq S(T\tilde{B}^\perp)$$

olacak şekilde reel non-dejenere bir invariant μ distribüsyonu vardır. Burada $\mu^\perp, S(T\tilde{B})$ da $\mu \perp \{V\}$ 'nin ortogonal tümleyenidir ve $\{V\}$ de V tarafından üretilen 1-boyutlu distribüsyondur.

(B) $Rad(T\tilde{B}), \phi$ invarianttır.

Tanım 3.4.7. $\tilde{B}$ bir belirsiz kosimplektik manifoldu ve $\tilde{B}, \tilde{B}$ nin yapı vektör alanı V 'ye teğet olacak şekildeki lightlike altmanifoldu olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa $\tilde{B}, \tilde{B}$ 'nin bir GCR (Genelleştirilmiş Cauchy-Riemann) lightlike altmanifoldu olarak adlandırılır.

(A) $Rad(T\tilde{B})$ 'nin

$$Rad(T\tilde{B}) = \mu_1 \oplus \mu_2, \phi(\mu_1) = \mu_1, \phi(\mu_2) \subset S(T\tilde{B})$$

olacak şekilde μ_1 ve μ_2 altdemetleri vardır.

(B) $S(T\tilde{B})$ 'nin

$$S(T\tilde{B}) = \{\phi(\mu_2) \oplus \mu'\} \perp \mu_0 \perp \{V\}, \phi(\mu_0) = \mu_0, \phi(\mu') = \Omega_1 \perp \Omega_2$$

olacak şekilde μ_0 ve μ' altdemetleri vardır. Burada $\mu_0, \tilde{B}$ üzerinde non-dejenere invariant bir distribüsyon, $\{V\}$ de V tarafından üretilen 1-boyutlu distribüsyon, Ω_1 ve Ω_2 de, sırasıyla, $ltr(T\tilde{B})$ ve $S(T\tilde{B}^\perp)$ 'in vektör altdemetleridir (Gupta vd., 2012b).

Tanım 3.4.8. $\tilde{B}$ bir belirsiz kosimplektik manifoldu ve $\tilde{B}, \tilde{B}$ nin V 'ye teğet olacak şekildeki lightlike altmanifoldu olsun. Eğer

$$\phi(Rad(T\tilde{B})) \subset S(T\tilde{B}^\perp)$$

ise $\tilde{B}, \tilde{B}$ 'nin ekran transversal lightlike altmanifoldu olarak adlandırılır (Gupta ve Sharfuddin, 2010b).

4. BULGULAR ve TARTIŞMA

Bu bölümde ilk olarak belirsiz bir kosimplektik manifoldunun ekran transversal CR-lightlike altmanifoldları tanıtılmıştır. Burada oluşan distribüsyonların integrallenebilirliği ve tamamen geodezikliği araştırılmıştır. Daha sonra ise belirsiz kosimplektik manifoldunun ekran transversal CR-lightlike altmanifoldları için tamamen geodezik olmayan minimal bir örnek verilmiş ve bu altmanifold için minimallik şartları bulunmuştur.

4.1. Ekran Transversal CR-Lightlike Altmanifoldlar

Bu bölümde, belirsiz kosimplektik manifoldların ekran transversal Cauchy-Riemann (ST-CR) lightlike altmanifoldlar tanıtılmıştır. Bölüm içerisinde, ekran transversal CR-lightlike altmanifoldlara ilişkin örnek verilmiş ve distribüsyonların integrallenebilir olması için şartlar bulunmuştur. Kosimplektik uzay formların ekran transversal CR-lightlike altmanifoldları için bir karakterizasyon teoremi ispatlanmıştır. $\tilde{B}$ ekran transversal CR-lightlike altmanifoldunun ekran transversal-CR lightlike çarpım olması için şartlar bulunmuştur. Ayrıca kontakt tamamen umbilik ekran transversal CR-lightlike altmanifoldunun ve irrasyonel ekran transversal CR-lightlike altmanifoldunun ekran transversal-CR lightlike çarpım olması için şartlar elde edilmiştir.

Tanım 4.1.1. $\tilde{B}$ bir belirsiz kosimplektik manifoldu ve $\tilde{B}$, $\tilde{B}$ nın yapı vektör alanı V 'ye teğet olacak şekilde bir r – lightlike altmanifoldu olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa $\tilde{B}$ bir ekran transversal CR-lightlike (ST-CR) altmanifold olarak adlandırılır.

(A) $Rad(T\tilde{B})$,

$$Rad(T\tilde{B}) = \mu_1 \oplus \mu_2, \quad \phi(\mu_1) \subset S(T\tilde{B}), \quad \phi(\mu_2) \subset S(T\tilde{B}^\perp)$$

olacak şekilde μ_1 ve μ_2 alt demetlerine sahiptir.

(B) $S(T\tilde{B})$ için

$$S(T\tilde{B}) = \{\phi(\mu_1) \oplus \mu'\} \perp \mu_0 \perp \{V\}, \quad \phi(\mu_0) = \mu_0, \quad \phi(\mu') = \Omega_1 \perp \omega, \quad \phi(\Omega_2) \subset S(T\tilde{B}^\perp)$$

eşitliklerini sağlayan μ_0 ve μ' altdemetleri vardır. Burada μ_0 , $\tilde{B}$ üzerinde non-dejenere bir distribüsyon; Ω_1, Ω_2 $ltr(T\tilde{B})$ 'ya ve ω da $S(T\tilde{B}^\perp)$ 'e ait vektör altdemetleridir.

Ekran transversal CR-lightlike altmanifold tanımından

$$T\tilde{B} = \{\mu \oplus \bar{\mu}\} \perp \{V\}$$

olarak yazılabilir. Burada

$$\mu = \mu_0 \oplus \mu_1 \oplus \phi(\mu_1)$$

ve

$$\bar{\mu} = \mu_2 \oplus \phi(\Omega_1) \oplus \phi(\omega)$$

dir.

μ nün invaryant bir distribüsyon ve $\bar{\mu}$ nin de anti-invaryant bir distribüsyon olduğu açıktır. Ayrıca

$$ltr(T\bar{B}) = \Omega_1 \oplus \Omega_2, \phi(\Omega_1) \subset S(T\bar{B}), \phi(\Omega_2) \subset S(T\bar{B}^\perp)$$

ve

$$S(T\bar{B}^\perp) = \{\phi(\sigma_2) \oplus \phi(\Omega_2)\} \perp \omega$$

eşitlikleri vardır.

Eğer $\mu_1 \neq \{0\}$, $\mu_2 \neq \{0\}$, $\mu_0 \neq \{0\}$ ve $\omega \neq \{0\}$ ise, o zaman $\tilde{B}$ belirsiz kosimplektik manifoldunun proper ekran transversal CR-lightlike altmanifoldu olarak adlandırılır. Bir proper ekran transversal CR-lightlike altmanifold için aşağıdakiler doğrudur.

- 1) (A) dan $boy(Rad(T\tilde{B})) \geq 2$ 'dir.
- 2) (B) koşulundan, $boy(\mu) = 2s \geq 4$, $boy(\mu') \geq 2$ ve $boy(\mu_2) = boy(\Omega_2)$ 'dir. O zaman $boy(\tilde{B}) \geq 8$ ve $boy(\tilde{B}) \geq 13$ olur.
- 3) Herhangi bir 8 – boyutlu ekran transversal CR-lightlike altmanifold 2 – lightlike olmalıdır.
- 4) (A) koşulu gereğince ve $\tilde{B}$ bir kosimplektik manifold olduğundan, $index(\tilde{B}) \geq 2$ 'dir.

Önerme 4.1.2. $\tilde{B}$ belirsiz kosimplektik manifoldunun bir $\tilde{B}$ ekran transversal CR-lightlike altmanifoldu olsun. O zaman $\tilde{B}$ nın CR-lightlike altmanifold olması için ancak ve ancak $\mu_2 = \{0\}$ olmasıdır. Benzer şekilde $\tilde{B}$ nın ekran transversal lightlike altmanifold olması için ancak ve ancak $\mu_1 = \{0\}$ olmasıdır.

İspat: $\tilde{B}$, $\tilde{B}$ 'nın bir CR-lightlike altmanifoldu olduğunu varsayalım. Öyleyse tanımdan $\tilde{B}$ 'nın $\phi(Rad(T\tilde{B})) \cap Rad(T\tilde{B}) = \{0\}$ olacak şekilde bir $\phi(Rad(T\tilde{B}))$ distribüsyonu vardır. Böylece $Rad(T\tilde{B}) = \mu_1$ 'dir. Buradan $\mu_2 = \{0\}$ dır. Bu da $\phi(ltr(T\tilde{B})) \cap ltr(T\tilde{B}) = \{0\}$ ve $\phi(ltr(T\tilde{B})) \subset S(T\tilde{B})$ olduğunu gösterir. Tersine, $\tilde{B}$, $\tilde{B}$ belirsiz kosimplektik manifoldunun bir ekran transversal CR-lightlike altmanifoldu ve $\mu_2 = \{0\}$ olduğunu varsayalım. O zaman $Rad(T\tilde{B}) = \mu_1$ olup, $\phi(Rad(T\tilde{B})) \cap Rad(T\tilde{B}) = \{0\}$ olur. Başka bir deyişle, $\phi(Rad(T\tilde{B}))$, $S(T\tilde{B})$ 'nın bir alt vektör demetidir ve buradan $\tilde{B}$ bir CR-lightlike altmanifold olur.

Aynı şekilde, $\tilde{B}$, $\tilde{B}$ 'nın bir ekran transversal lightlike altmanifoldu olduğunu varsayalım. O zaman Tanım 3.4.8. den $\phi(Rad(T\tilde{B})) \subset S(T\tilde{B}^\perp)$ dir. Ekran transversal CR-lightlike altmanifoldu tanımından $Rad(TM) = \mu_2$ 'dir yani, $\mu_1 = \{0\}$ 'dır. Buradan $\phi(ltr(T\tilde{B})) \subset S(T\tilde{B}^\perp)$ bulunur. Tersine, $\tilde{B}$, $\tilde{B}$ belirsiz kosimplektik manifoldunun bir ekran transversal CR-lightlike altmanifoldu ve $\mu_1 = \{0\}$

olduğunu varsayalım. Bu durumda $Rad(T\tilde{B}) = \mu_2$ 'dir. Buradan $\phi(Rad(T\tilde{B})) \cap Rad(T\tilde{B}) = \{0\}$ ve $\phi(\mu_2) \subset S(T\tilde{B}^\perp)$ dir. Buradan $\phi(Rad(T\tilde{B})) \subset S(T\tilde{B}^\perp)$ olup, $\tilde{B}$ bir ekran transversal lightlike altmanifolddur.

Örnek 4.1.3. $(\tilde{B} = \mathbb{R}_4^{13}, \tilde{g})$ bir $(-, -, +, +, +, -, -, +, +, +, +, +, +)$ işaretli semi-Öklidyen uzay ve $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, z)$, $\mathbb{R}_4^{13}$ ün standart koordinat sistemi olsun. $\tilde{B}$ 'nın

$$x^3 = x^1 \cos \alpha, y^3 = x^1 \sin \alpha, x^2 = y^4, x^5 = \sqrt{1 + (y^5)^2}$$

ile verilen bir $\tilde{B}$ altmanifoldu olsun. Bu durumda

$$Z_1 = \partial x_2 + \partial y_4, Z_2 = \partial x_1 + \cos \alpha \partial x_3 + \sin \alpha \partial y_3,$$

$$Z_3 = \partial x_4 - \partial y_2, Z_4 = \frac{1}{2} \{ \partial x_4 + \partial y_2 \},$$

$$Z_5 = \partial x_6, Z_6 = \partial y_6,$$

$$Z_7 = y^5 \partial x_5 + x^5 \partial y_5, Z_8 = V = \partial z$$

olmak üzere $T\tilde{B} = Sp\{Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5, Z_6, Z_7, Z_8\}$ dir. Buradan, Z_1 ve Z_2 lightlike vektörler olup $Rad T\tilde{B} = Sp\{Z_1, Z_2\}$, dir. Böylece $\tilde{B}$, 13-boyutlu bir 2-lightlike altmanifolddur. Diğer taraftan, $\phi_0(Z_1) = Z_3 \in \Gamma(S(T\tilde{B}))$ ve $\phi_0(Z_5) = Z_6 \in \Gamma(S(T\tilde{B}))$ olur. Öyleyse, $\mu_1 = Sp\{Z_1\}$, $\mu_2 = Sp\{Z_2\}$ ve $\mu_0 = Sp\{Z_5, Z_6\}$ olur. Bu durumda

$$N_1 = \frac{1}{2}(-\partial x_2 + \partial y_4), N_2 = \frac{1}{2}(-\partial x_1 + \cos \alpha \partial x_3 + \sin \alpha \partial y_3)$$

olarak elde edilir. Buradan $\Omega_1 = Sp\{N_1\}$ ve $\Omega_2 = Sp\{N_2\}$ dir. Ayrıca $S(TM^\perp) = Sp\{\phi_0(Z_2), \phi_0(N_2), \phi_0(Z_7)\}$ ve $\omega = Sp\{\phi_0(Z_7) = W\}$ olur. Böylece $\sigma' = Sp\{\phi_0(N_1) = Z_4, \phi_0(W) = -Z_7\}$ olup $\tilde{B}$ da bir proper ekran transversal-CR lightlike altmanifolddur.

Örnek 4.1.4. Belirsiz kosimplektik manifoldunun her CR-lightlike altmanifoldu $\mu_2 = \{0\}$ olan bir ekran transversal-CR lightlike altmanifolddur.

Örnek 4.1.5. Belirsiz kosimplektik manifoldunun her ekran transversal lightlike altmanifoldu $\mu_1 = \{0\}$ olan bir ekran transversal-CR lightlike altmanifolddur.

Önerme 4.1.6. Belirsiz kosimplektik manifoldunun koizotropik, izotropik yada tamamen lightlike bir $\tilde{B}$ proper ekran transversal-CR lightlike altmanifoldu yoktur. Herhangi bir koizotropik ekran transversal-CR lightlike altmanifold, bir CR-lightlike altmanifold ve izotropik ekran transversal-CR lightlike altmanifold da bir ekran transversal lightlike altmanifolddur.

İspat: $\tilde{B}$ nın bir proper ekran transversal-CR lightlike altmanifold olduğunu varsayalım. O zaman $\mu_1 \neq \{0\}$, $\mu_2 \neq \{0\}$, $\mu_0 \neq \{0\}$ ve $\omega \neq \{0\}$ olduğundan, hem $S(T\tilde{B}) \neq \{0\}$ hem de $S(T\tilde{B}^\perp) \neq \{0\}$ dir. Öyleyse $\tilde{B}$ koizotropik, izotropik yada tamamen lightlike bir altmanifold olamaz. Diğer taraftan $\tilde{B}$ koizotropik bir ekran transversal-CR lightlike altmanifold olsun. O zaman $S(T\tilde{B}^\perp) = \{0\}$ 'dir. Öyleyse $\phi(\mu_2) = \{0\}$ ve $Rad(T\tilde{B}) = \mu_1$ olur. Böylece $\phi(Rad(T\tilde{B})) = \phi(\mu_1) \subset \Gamma(S(T\tilde{B}))$ olacağından, $\tilde{B}$ bir CR-lightlike altmanifolddur. Aynı şekilde eğer $\tilde{B}$ bir izotropik ekran transversal-CR lightlike altmanifold ise, o zaman $S(T\tilde{B}) = \{0\}$ dir. Bu durumda $\phi(\mu_1) = \{0\}$ ve $Rad(T\tilde{B}) = \mu_2$ dir. Böylece $\phi(Rad(T\tilde{B})) = \phi(\mu_2) \subset \Gamma(S(T\tilde{B}^\perp))$ olacağından, $\tilde{B}$ da bir ekran transversal lightlike altmanifolddur. Böylece ispat biter.

$\Gamma(T\tilde{B})$ 'dan $\Gamma(\mu_0)$, $\Gamma(\phi(\mu_1))$, $\Gamma(\phi(\Omega_1))$, $\Gamma(\phi(S))$, $\Gamma(\mu_1)$ ve $\Gamma(\mu_2)$ üzerine olan izdüşümler, sırasıyla, P_0 , P_1 , P_2 , P_3 , S_1 ve S_2 ile gösterilsin. Aynı şekilde $\Gamma(tr(T\tilde{B}))$ 'dan $\Gamma(\phi(\mu_2))$, $\Gamma(\phi(\Omega_2))$, $\Gamma(\omega)$, $\Gamma(\Omega_1)$ ve $\Gamma(\Omega_2)$ üzerine olan izdüşümler de sırasıyla, R_1 , R_2 , R_3 , Q_1 ve Q_2 olsun. Bu durumda herhangi bir $X \in \Gamma(T\tilde{B})$

$$\begin{aligned} X &= PX + SX \\ &= P_0X + P_1X + P_2X + P_3X + S_1X + S_2X \end{aligned} \quad (4.1)$$

biçiminde yazılabilir. Burada $PX \in \Gamma(\mu)$ ve $SX \in \Gamma(\bar{\mu})$ 'dır. (4.1) eşitliğine ϕ kosimplektik yapısı uygularsak

$$\phi X = \phi X + \nu X \quad (4.2)$$

olur, burada $\phi X \in \Gamma(T\tilde{B})$ ve $\nu X \in \Gamma(tr(T\tilde{B}))$ dir.

(4.1) eşitliğine ϕ kosimplektik yapısı uygulanır ve ϕP_0 , ϕP_1 , ϕP_2 , ϕP_3 , ϕS_1 , ϕS_2 sırasıyla, ϕ_0 , ϕ_1 , ν_L , ν_S , ϕ_1 , ν_2 ile belirtilirse, herhangi bir $X \in \Gamma(T\tilde{B})$ için

$$\phi X = \phi_0X + \phi_1X + \phi_1X + \nu_LX + \nu_SX + \nu_2X \quad (4.3)$$

yazılımı doğru olur. Burada $\phi_0X \in \Gamma(\mu_0)$, $\phi_1X \in \Gamma(\mu_1)$, $\nu_LX \in \Gamma(\Omega_1)$, $\nu_SX \in \Gamma(\omega)$, $\phi_1X \in \Gamma(\phi(\mu_1))$ ve $\nu_2X \in \Gamma(\phi(\mu_2))$ dir.

Benzer şekilde, herhangi bir $W \in \Gamma(tr(T\tilde{B}))$

$$W = R_1W + R_2W + R_3W + Q_1W + Q_2W \quad (4.4)$$

olarak yazılabilir. ϕR_1 , ϕR_2 , ϕR_3 , ϕQ_1 ve ϕQ_2 sırasıyla, B_2 , B_S , B_L , C_L ve C_L ile gösterilirse, bu durumda

$$\begin{aligned}\phi W &= BW + CW \\ &= B_2W + B_5W + B_LW + C_LW + C_LW\end{aligned}\quad (4.5)$$

dır. Burada $BV \in \Gamma(\tilde{TB})$ ve $CV \in \Gamma(tr(\tilde{TB}))$ dır.

(4.3) diferensiyellenip elde edilen eşitlikte (3.9) kullanılırsa,

$$\tilde{\nabla}_X(\phi Y + \nu_L Y + \nu_S Y + \nu_{\bar{2}} Y) = \phi(\tilde{\nabla}_X Y + h^l(X, Y) + h^s(X, Y))$$

bulunur. Elde edilen son eşitlikte konneksiyonun lineerlik özelliği kullanılırsa,

$$\tilde{\nabla}_X \phi Y + \tilde{\nabla}_X \nu_L Y + \tilde{\nabla}_X \nu_S Y + \tilde{\nabla}_X \nu_{\bar{2}} Y = \phi \tilde{\nabla}_X Y + \phi h^l(X, Y) + \phi h^s(X, Y)$$

bulunur. (3.9), (3.10), (3.11) ve (4.5) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}&\tilde{\nabla}_X \phi Y + h^l(X, \phi Y) + h^s(X, \phi Y) + \{-A_{\nu_L Y} X + \tilde{\nabla}_X^l(\nu_L Y) + D^s(X, \nu_L Y)\} \\ &+ \{-A_{\nu_S Y} X + \tilde{\nabla}_X^s(\nu_S Y) + D^l(X, \nu_S Y)\} + \{-A_{\nu_{\bar{2}} Y} X + \tilde{\nabla}_X^s(\nu_{\bar{2}} Y) + D^l(X, \nu_{\bar{2}} Y)\} \\ &= \phi \tilde{\nabla}_X Y + \nu_L \tilde{\nabla}_X Y + \nu_S \tilde{\nabla}_X Y + \nu_{\bar{2}} \tilde{\nabla}_X Y + Bh^l(X, Y) + Ch^l(X, Y) + Bh^s(X, Y) + Ch^s(X, Y)\end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitliğin teğet, lightlike transversal ve ekran transversal kısımları alınarak, sırasıyla,

$$\tilde{\nabla}_X \phi Y - \phi \tilde{\nabla}_X Y = (\tilde{\nabla}_X \phi)Y = A_{\nu_L Y} X + A_{\nu_S Y} X + A_{\nu_{\bar{2}} Y} X + Bh(X, Y), \quad (4.6)$$

$$D^l(X, \nu_S Y) + D^l(X, \nu_{\bar{2}} Y) = \nu_L(\tilde{\nabla}_X Y) - \tilde{\nabla}_X^l(\nu_L Y) - h^l(X, \phi Y) + Ch^l(X, Y) \quad (4.7)$$

ve

$$\begin{aligned}D^s(X, \nu_L Y) &= \nu_S(\tilde{\nabla}_X Y) + \nu_{\bar{2}}(\tilde{\nabla}_X Y) - \tilde{\nabla}_X^s(\nu_S Y) \\ &\quad - \tilde{\nabla}_X^s(\nu_{\bar{2}} Y) - h^s(X, \phi Y) + Ch^s(X, Y)\end{aligned}\quad (4.8)$$

olarak bulunur.

Teorem 4.1.7. $\tilde{B}$ belirsiz kosimplektik manifoldu $\tilde{B}$, $\tilde{B}$ nın bir ekran transversal-CR lightlike olsun. O zaman $\tilde{\nabla}$ nın bir metrik konneksiyon olması ancak ve ancak her $X \in \Gamma(\tilde{TB})$ için aşağıdaki şartların sağlanmasıdır.

- i) $\xi \in \Gamma(\mu_1)$ için $\tilde{\nabla}_X^* \phi \xi + h^*(X, \phi \xi) \in \Gamma(\phi(\mu_1))$ ve $Bh(X, \phi \xi) = 0$ olur.
- ii) $\xi \in \Gamma(\mu_2)$ için $A_{\phi \xi} X \in \Gamma(\phi(\mu_1))$ ve $B\tilde{\nabla}_X^s \phi \xi + BD^l(X, \phi \xi) = 0$ olur.

İspat: $\tilde{\nabla}$ nın bir metrik konneksiyon olduğunu varsayalım. Teorem 3.3.2. den $Rad(\tilde{TB})$ paraleldir yani her $X \in \Gamma(\tilde{TB})$ ve $\xi \in \Gamma(Rad(\tilde{TB}))$ için $\tilde{\nabla}_X \xi \in \Gamma(Rad(\tilde{TB}))$ dir. (3.26) ve (3.28) kullanılırsa

$$\tilde{\nabla}_X \xi = -\phi \tilde{\nabla}_X \phi \xi$$

olur. Son eşitlikte (3.7), (3.16), (4.2) ve (4.5) kullanılırsa her $\xi \in \Gamma(\mu_1)$ için

$$\tilde{\nabla}_X \xi + h(X, \xi) = -\phi \tilde{\nabla}_X^* \phi \xi - \phi h^*(X, \phi \xi) - \nu \tilde{\nabla}_X^s \phi \xi - \nu h^s(X, \phi \xi) - Bh(X, \phi \xi) - Ch(X, \phi \xi)$$

olur. Bu eşitliğin teğet kısmı alınır

$$\tilde{\nabla}_X \xi = -\phi \tilde{\nabla}_X^* \phi \xi - \phi h^*(X, \phi \xi) - Bh(X, \phi \xi)$$

olur. Buradan (i) elde edilir.

Benzer şekilde (3.7), (3.11), (4.2) ve (4.5) kullanılırsa $\xi \in \Gamma(\mu_2)$ için

$$\tilde{\nabla}_X \xi + h(X, \xi) = \phi A_{\phi \xi} X + \nu A_{\phi \xi} X - B \tilde{\nabla}_X^s \phi \xi - C \tilde{\nabla}_X^s \phi \xi - BD^l(X, \phi \xi) - CD^l(X, \phi \xi)$$

bulunur. Bu eşitliğin teğet kısmı alınır

$$\tilde{\nabla}_X \xi = \phi A_{\phi \xi} X - B \tilde{\nabla}_X^s \phi \xi - BD^l(X, \phi \xi)$$

olur. Buradan (ii) elde edilir. Böylece ispat biter.

Teorem 4.1.8. $\tilde{B}(c)$ $c \neq 1$ olmak üzere, belirsiz kosimplektik uzay formu ve $\tilde{B}$, $\tilde{B}(c)$ 'nin bir lightlike altmanifoldu olsun. O zaman $\tilde{B}$ 'nin $\tilde{B}(c)$ 'nin bir ekran transversal-CR lightlike altmanifoldu olması için ancak ve ancak aşağıdaki şartların sağlanmasıdır.

i)

$$\mu = \mu_0 \perp \mu_1 \perp \phi(\mu_1)$$

ile tanımlı distribüsyon, $p \in \tilde{B}$ için $T_p \tilde{B}$ 'nin maksimal invaryant alt uzayıdır. Burada

$$Rad(\tilde{TB}) = \mu_1 \perp \mu_2 \text{ ve } \mu_0 \text{ non-dejenere invaryant bir distribüsyondur.}$$

ii) Her $X, Y \in \Gamma(\mu)$, $\xi \in \Gamma(Rad(\tilde{TB}))$ ve $N \in \Gamma(ltr(\tilde{TB}))$ için

$$\tilde{g}(\tilde{R}(X, Y)\xi, N) = 0$$

olacak şekilde $\tilde{B}$ 'nin bir lightlike transversal vektör demeti vardır.

iii) Her $X, Y \in \Gamma(\mu)$ ve $W', W'' \in \Gamma(\phi(\omega))$ için

$$\tilde{g}(\tilde{R}(X, Y)W', W'') = 0$$

olacak şekilde $\tilde{B}$ üzerinde $\phi(\omega)$ alt vektör demeti vardır. Burada $\phi(\omega)$, μ ye ortogonaldır ve $\tilde{R}$, $\tilde{B}(c)$ 'nin eğrilik tensörüdür.

İspat: $\Rightarrow$: $\tilde{B}$, $\tilde{B}(c)$, $c \neq 1$ belirsiz kosimplektik uzay formunun bir ekran transversal-CR lightlike altmanifoldu olsun. $\mu = \mu_0 \perp \mu_1 \perp \phi(\mu_1)$ olduğundan, i) elde edilir. Ayrıca her $X, Y \in \Gamma(\mu)$, $\xi \in \Gamma(Rad(\tilde{TB}))$ ve $N \in \Gamma(ltr(\tilde{TB}))$ için, (3.30) dan

$$\tilde{g}(\tilde{R}(X, Y)\xi, N) = -\frac{c}{2} \tilde{g}(\phi X, Y) \tilde{g}(\phi \xi, N) = 0$$

$\tilde{g}(\phi X, Y) \neq 0$ ve $\tilde{g}(\phi \xi, N) = 0$ olduğu için $\tilde{g}(\tilde{R}(X, Y)\xi, N) = 0$ bulunur. Böylece ii) elde edilir.

Aynı işlemler yapılarak, her $X, Y \in \Gamma(\mu)$ ve $W', W'' \in \Gamma(\phi(\omega))$ için

$$\tilde{g}(\tilde{R}(X, Y)W', W'') = -\frac{c}{2} \tilde{g}(\phi X, Y) \tilde{g}(\phi W', W'') = 0$$

olur. Buradan iii) sağlanır.

$\Leftarrow$): Tersine, i), ii) ve iii) nin sağlandığını varsayalım. i)'den $\mu = \mu_0 \perp \mu_1 \perp \phi(\mu_1)$ maksimal distribüsyonu ve $Rad(T\tilde{B}) = \mu_1 \perp \mu_2$ için, $T\tilde{B}$ üzerinde $\phi(\mu_1)$, ϕ 'ye göre invaryantken μ_2 invaryant değildir. Böylece $\phi(\mu_2) \subset \Gamma(tr(T\tilde{B}))$ olarak yazılabilir. $\phi(\mu_1) \neq \mu_2$ olduğu açıktır ve $\phi(\mu_1)$, $S(T\tilde{B})$ üzerinde bir distribüsyondur. Ayrıca, $ltr(T\tilde{B}) = \Omega_1 \perp \Omega_2$ ve $\xi_1 \in \Gamma(\sigma_1)$, $N_1 \in \Gamma(\Omega_1)$ için $\tilde{g}(\phi\xi_1, N_1) = -\tilde{g}(\xi_1, \phi N_1) = 0$ olacağından $\phi(\Omega_1)$ de $S(T\tilde{B})$ üzerinde bir distribüsyondur. $\phi(\mu_2) \neq \Omega_1$ ve $\phi(\mu_2) \neq \Omega_2$ olduğu açıktır. Böylece $\phi(\mu_2) \subset S(T\tilde{B}^\perp)$ dir. Benzer şekilde $\xi_2 \in \Gamma(\mu_2)$ ve $N_2 \in \Gamma(\Omega_2)$ için $\tilde{g}(\phi\xi_2, N_2) = -\tilde{g}(\xi_2, \phi N_2) = 0$ olacağından $\phi(\Omega_2) \subset S(T\tilde{B}^\perp)$ dir. iii)'den, $\omega \perp \mu$ olacak şekilde bir non-dejenere ω distribüsyonu vardır ve her $X, Y \in \Gamma(\mu)$, $W', W'' \in \Gamma(\omega)$ için

$$\tilde{g}(\tilde{R}(X, Y)W', W'') = \frac{c}{2} \tilde{g}(X, \phi Y) \tilde{g}(\phi W', W'') = 0$$

dir. Buradan $\tilde{g}(\phi W', W'') = 0$ dir, yani $\omega \perp \phi(\omega)$ olur. Ayrıca her $\xi \in \Gamma(Rad(T\tilde{B}))$ ve $W \in \Gamma(S(T\tilde{B}^\perp))$ için $\tilde{g}(\phi\xi, W) = \tilde{g}(\xi, \phi W) = 0$ olduğundan yani $\phi(\omega) \perp Rad(T\tilde{B})$ olur. Ayrıca bu bize $\phi(\omega)$ nın $ltr(T\tilde{B})$ ya ait olmadığını verir. ω ve μ distribüsyonları ortogonal olduğu için, her $X \in \Gamma(\mu)$ ve $W \in \Gamma(\omega)$ için

$$\tilde{g}(X, W) = \tilde{g}(\phi X, W) = -\tilde{g}(X, \phi W) = 0$$

bulunur. Yani $\phi(\omega)$ da μ 'ye ortogondur. Öyleyse $\phi(\omega)$, $S(T\tilde{B})$ üzerinde ve ω da $S(T\tilde{B}^\perp)$ üzerinde distribüsyon olur. O zaman yukarıdaki argümanları özetlersek

$$S(T\tilde{B}) = \{\phi(\mu_1) \oplus \phi(\Omega_1)\} \perp \phi(\omega) \perp \mu_0 \perp \{V\},$$

eşitliğini buluruz. Böylece $\tilde{B}$, $\tilde{B}$ nın bir ekran transversal-CR lightlike altmanifoldu olur ve buradan ispat biter.

Teorem 4.1.9. $\tilde{B}$ belirsiz kosimplektik manifoldu ve $\tilde{B}$, $\tilde{B}$ nın bir ekran transversal-CR lightlike altmanifoldu olsun. O zaman her $X, Y \in \Gamma(\mu \perp \{V\})$ ve $Z, W \in \Gamma(\bar{\mu})$ için

i) $\mu \perp \{V\}$ distribüsyonunun integrallenebilir olması için ancak ve ancak

$$h(X, \phi Y) = h(\phi X, Y) \quad (4.9)$$

olmasıdır.

ii) $\bar{\mu}$ distribüsyonunun integrallenebilir olması için ancak ve ancak

$$A_{\phi Z} W = A_{\phi W} Z \quad (4.10)$$

olmasıdır.

İspat: Her $X \in \Gamma(\sigma \perp \{V\})$ için $\nu X = 0$ olduğu açıktır. O zaman (4.7) ve (4.8) kullanılarak her $X, Y \in \Gamma(\mu \perp \{V\})$ için

$$\begin{aligned} \nu_L(\tilde{\nabla}_X Y) + \nu_S(\tilde{\nabla}_X Y) + \nu_{\tilde{2}}(\tilde{\nabla}_X Y) &= h^l(X, \phi Y) + h^s(X, \phi Y) \\ &\quad - Ch^l(X, Y) - Ch^s(X, Y) \end{aligned}$$

yani

$$\nu(\tilde{\nabla}_X Y) = h(X, \phi Y) - Ch(X, Y) \quad (4.11)$$

bulunur. h 'nın simetrik oluşu dikkate alınır

$$\nu(\tilde{\nabla}_X Y - \tilde{\nabla}_Y X) = \nu([X, Y]) = h(X, \phi Y) - h(\phi X, Y) \quad (4.12)$$

olur. Buradan i) sağlanır.

$Z \in \Gamma(\bar{\mu})$ için $\phi Z = 0$ dir. Bununla beraber (4.6) eşitliği kullanılırsa her $Z, W \in \Gamma(\bar{\mu})$ için

$$(\tilde{\nabla}_Z \phi)W = A_{\nu_L W} Z + A_{\nu_S W} Z + A_{\nu_{\tilde{2}} W} Z + Bh(Z, W) \quad (4.13)$$

ve buradan

$$-\phi \tilde{\nabla}_Z W = A_{\nu_L W} Z + A_{\nu_S W} Z + A_{\nu_{\tilde{2}} W} Z + Bh(Z, W) \quad (4.14)$$

elde edilir. (4.14) eşitliğinde Z ile W yer değiştirirse

$$-\phi \tilde{\nabla}_W Z = A_{\nu_L Z} W + A_{\nu_S Z} W + A_{\nu_{\tilde{2}} Z} W + Bh(W, Z) \quad (4.15)$$

bulunur. (4.14) ve (4.15) ten

$$\phi(\tilde{\nabla}_W Z - \tilde{\nabla}_Z W) = \phi([W, Z]) = A_{\nu_W} Z - A_{\nu_Z} W \quad (4.16)$$

olup ii) sağlanır ve ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.10. $\tilde{B}$ belirsiz kosimplektik manifoldu ve $\tilde{B}$, $\tilde{B}$ nin bir ekran transversal-CR lightlike altmanifoldu olsun. O zaman $\mu \perp \{V\}$ nin integrallenebilir olması için ancak ve ancak her $X, Y \in \Gamma(\mu \perp \{V\})$ için aşağıdaki şartların sağlanmasıdır.

- i) $h^l(X, \phi Y) - h^l(Y, \phi X) \in \Gamma(\Omega_2)$ 'dir.
- ii) $h^s(X, \phi Y) - h^s(Y, \phi X) \in \Gamma(\phi(\Omega_2))$ 'dir.

İspat: Ekran transversal-CR lightlike altmanifoldu tanımından $\mu \perp \{V\}$ nin integrallenebilir olması için ancak ve ancak şart her $X, Y \in \Gamma(\mu \perp \{V\})$ için $[X, Y] \in \Gamma(\mu \perp \{V\})$ olmasıdır. Yani her $X, Y \in \Gamma(\mu \perp \{V\})$, $N_2 \in \Gamma(\Omega_2)$, $\xi_1 \in \Gamma(\mu_1)$ ve $W \in \Gamma(\omega)$ için

$$\tilde{g}([X, Y], \phi \xi_1) = \tilde{g}([X, Y], N_2) = \tilde{g}([X, Y], \phi W) = 0$$

olmalıdır. (3.9), (3.27) ve (3.28) den

$$\begin{aligned}\tilde{g}([X, Y], \phi \xi_1) &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y - \tilde{\nabla}_Y X, \phi \xi_1) = \tilde{g}(\tilde{\nabla}_Y \phi X - \tilde{\nabla}_X \phi Y, \xi_1) \\ &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_Y \phi X + h^l(Y, \phi X) + h^s(Y, \phi X) - \tilde{\nabla}_X \phi Y - h^l(X, \phi Y) - h^s(X, \phi Y), \xi_1)\end{aligned}\quad (4.17)$$

dir.

Ayrıca (3.9), (3.27) ve (3.28) kullanılarak

$$\begin{aligned}\tilde{g}([X, Y], N_2) &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y - \tilde{\nabla}_Y X, N_2) = \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X \phi Y - \tilde{\nabla}_Y \phi X, \phi N_2) \\ &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X \phi Y + h^l(X, \phi Y) + h^s(X, \phi Y) - \tilde{\nabla}_Y \phi X - h^l(Y, \phi X) - h^s(Y, \phi X), \phi N_2)\end{aligned}\quad (4.18)$$

ve

$$\begin{aligned}\tilde{g}([X, Y], \phi W) &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y - \tilde{\nabla}_Y X, \phi W) = \tilde{g}(\tilde{\nabla}_Y \phi X - \tilde{\nabla}_X \phi Y, W) \\ &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_Y \phi X + h^l(Y, \phi X) + h^s(Y, \phi X) \\ &\quad - \tilde{\nabla}_X \phi Y - h^l(X, \phi Y) - h^s(X, \phi Y), W)\end{aligned}\quad (4.19)$$

elde edilir. (4.17)-(4.19)'dan ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.11. $\tilde{B}$ belirsiz kosimplektik manifoldu ve $\tilde{B}$, $\tilde{B}$ nin bir ekran transversal-CR lightlike altmanifoldu olsun. O zaman $\bar{\mu}$ nin integrallenebilir olması için ancak ve ancak her $X, Y \in \Gamma(\bar{\mu})$ için

$$A_{\phi X} Y - A_{\phi Y} X \in \Gamma(\bar{\mu}) \quad (4.20)$$

olmasıdır.

İspat: $\bar{\mu}$ nin integrallenebilir olduğunu varsayalım. O zaman her $X, Y \in \Gamma(\bar{\mu})$, $N_1 \in \Gamma(\Omega_1)$ ve $Z \in \Gamma(\mu_0)$ için

$$\tilde{g}([X, Y], Z) = \tilde{g}([X, Y], N_1) = \tilde{g}([X, Y], \phi N_1) = \tilde{g}([X, Y], V) = 0$$

olmalıdır. (3.8), (3.27), (3.28) ve (3.29) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}\tilde{g}([X, Y], Z) &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y - \tilde{\nabla}_Y X, Z) \\ &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X \phi Y - \tilde{\nabla}_Y \phi X, \phi Z) = \tilde{g}(A_{\phi X} Y - A_{\phi Y} X, \phi Z),\end{aligned}\quad (4.21)$$

$$\begin{aligned}\tilde{g}([X, Y], N_1) &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y - \tilde{\nabla}_Y X, N_1) \\ &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X \phi Y - \tilde{\nabla}_Y \phi X, \phi N_1) = \tilde{g}(A_{\phi X} Y - A_{\phi Y} X, \phi N_1),\end{aligned}\quad (4.22)$$

$$\begin{aligned}\tilde{g}([X, Y], \phi N_1) &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y - \tilde{\nabla}_Y X, \phi N_1) \\ &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_Y \phi X - \tilde{\nabla}_X \phi Y, N_1) = \tilde{g}(A_{\phi Y} X - A_{\phi X} Y, N_1)\end{aligned}\quad (4.23)$$

ve

$$\tilde{g}([X, Y], V) = \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y - \tilde{\nabla}_Y X, V) = \tilde{g}(X, \tilde{\nabla}_Y V) - \tilde{g}(Y, \tilde{\nabla}_X V) = 0 \quad (4.24)$$

olur. (4.21)-(4.23) eşitliklerinden, $A_{\phi X} Y - A_{\phi Y} X$ 'in sırasıyla, $\Gamma(\mu_0)$, $\Gamma(\phi(\mu_1))$ ve $\Gamma(\mu_1)$ distribüsyonlarında bileşeni yoktur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.12. $\tilde{B}$ belirsiz kosimplektik manifoldu ve $\tilde{B}$, $\tilde{B}$ nın bir ekran transversal-CR lightlike altmanifoldu olsun. O zaman $\mu \perp \{V\}$ distribüsyonunun $\tilde{B}$ da tamamen geodezik olması için ancak ve ancak her $X, Y \in \Gamma(\mu \perp \{V\})$ için $Bh(X, \phi Y) = 0$ olmasıdır.

İspat: $\mu \perp \{V\}$, $\tilde{B}$ üzerinde tamamen geodezik olsun. O zaman her $X, Y \in \Gamma(\mu \perp \{V\})$ için $\tilde{\nabla}_X Y \in \Gamma(\mu \perp \{V\})$ 'dir. O zaman her $X, Y \in \Gamma(\mu \perp \{V\})$, $\xi_1 \in \Gamma(\mu_1)$, $N_2 \in \Gamma(\Omega_2)$ ve $W \in \Gamma(\omega)$ için

$$\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, \phi \xi_1) = \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, N_2) = \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, \phi W) = 0$$

dır. (3.9), (3.27) ve (3.28) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, \phi \xi_1) &= -\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X \phi Y, \xi_1) \\ &= -\tilde{g}(h^l(X, \phi Y), \xi_1) \end{aligned} \quad (4.25)$$

olur. Yani, $h^l(X, \phi Y)$ 'nin $\Gamma(\Omega_1)$ 'de bileşeni yoktur.

Benzer şekilde

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, N_2) &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X \phi Y, \phi N_2) \\ &= \tilde{g}(h^s(X, \phi Y), \phi N_2) \end{aligned} \quad (4.26)$$

ve

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, \phi W) &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, \phi W) \\ &= -\tilde{g}(h^s(X, \phi Y), W) \end{aligned} \quad (4.27)$$

bulunur. (4.26) ve (4.27) denklemlerinden de $h^s(X, \phi Y)$ 'nin $\Gamma(\phi(\mu_2))$ ve $\Gamma(\phi(S))$ 'de bileşeninin olmadığı açıktır. Buradan ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.13. $\tilde{B}$ belirsiz kosimplektik manifoldu ve $\tilde{B}$, $\tilde{B}$ nın bir ekran transversal-CR lightlike altmanifoldu olsun. O zaman $\bar{\mu}$ distribüsyonunun $\tilde{B}$ da tamamen geodezik foliasyon tanımlaması için ancak ve ancak aşağıdakilerin sağlanmasıdır.

- i) $A_{N_1} X$ in $\phi(\mu_1) \perp \phi(\omega)$ da hiç bileşeni yoktur.
- ii) $A_{\phi Y} X$ in $\mu_0 \perp \mu_1$ de hiç bileşeni yoktur.

İspat: $\bar{\mu}$ distribüsyonunun $\tilde{B}$ da tamamen geodezik foliasyon tanımlaması için ancak ve ancak her $X, Y \in \Gamma(\bar{\mu})$, $N_1 \in \Gamma(\Omega_1)$ ve $Z \in \Gamma(\mu_0)$ için

$$\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, N_1) = \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, \phi N_1) = \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, Z) = \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, V) = 0$$

olmasıdır. $\tilde{\nabla}$ metrik konneksiyon olduğundan ve (3.8), (3.27) ve (3.28) den

$$\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, N_1) = \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X \phi Y, \phi N_1) = -\tilde{g}(A_{\phi Y} X, \phi N_1) \quad (4.28)$$

dir. Ayrıca (3.8), (3.27) ve (3.28) den

$$\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, \phi N_1) = -\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X \phi Y, N_1) = \tilde{g}(A_{\phi Y} X, N_1) \quad (4.29)$$

$$\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, Z) = \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X \phi Y, \phi Z) = -\tilde{g}(A_{\phi Y} X, \phi Z) \quad (4.30)$$

elde edilir. Benzer şekilde $\tilde{\nabla}$ nın metrik konneksiyon oluşu ve (3.8) ve (3.29) eşitlikleri kullanılırsa

$$\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, V) = -\tilde{g}(Y, \tilde{\nabla}_X V) = 0 \quad (4.31)$$

dir. Böylece (4.28)-(4.31) eşitliklerinden ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.14. $\tilde{B}$ belirsiz kosimplektik manifoldu ve $\tilde{B}$, $\tilde{B}$ nın bir ekran transversal-CR lightlike altmanifoldu olsun. O zaman $\bar{\mu}$ nin $\tilde{B}$ da tamamen geodezik olması için ancak ve ancak her $X, Y \in \Gamma(\bar{\mu})$ için $A_{\bar{Y}} X \in \Gamma(\bar{\mu})$ olmasıdır.

İspat: $\bar{\mu}$ nin $\tilde{B}$ üzerinde tamamen geodezik olsun. O zaman her $X, Y \in \Gamma(\bar{\mu})$ için $\tilde{\nabla}_X Y \in \Gamma(\bar{\mu})$ olacağından (4.6) eşitliği kullanılırsa

$$\tilde{\nabla}_X \phi Y - \phi \tilde{\nabla}_X Y = A_{\bar{Y}} X + A_{\bar{Y}} X + A_{\bar{Y}} X + Bh(X, Y)$$

dir. Buradan

$$0 = A_{\bar{Y}} X + Bh(X, Y)$$

bulunur. Buradan

$$-Bh(X, Y) = A_{\bar{Y}} X \in \Gamma(\bar{\mu})$$

olur.

Tersine, her $X, Y \in \Gamma(\bar{\mu})$ için $A_{\bar{Y}} X \in \Gamma(\bar{\mu})$ olsun. (4.6) eşitliğinden

$$-A_{\bar{Y}} X = \phi \tilde{\nabla}_X Y + Bh(X, Y)$$

elde edilir. Buradan $\phi \tilde{\nabla}_X Y = 0$ 'dır. Böylece ispat biter.

Tanım 4.1.15. $\tilde{B}$ belirsiz kosimplektik manifoldu ve $\tilde{B}$, $\tilde{B}$ nın bir ekran transversal-CR lightlike altmanifoldu olsun. Eğer $\mu \perp \{V\}$ ve $\bar{\mu}$ $\tilde{B}$ da tamamen geodezik foliasyon tanımlıyorsa, $\tilde{B}$ ekran transversal-CR lightlike çarpım olarak adlandırılır.

Teorem 4.1.16. $\tilde{B}$ belirsiz kosimplektik manifoldu ve $\tilde{B}$, $\tilde{B}$ nın bir ekran transversal-CR lightlike altmanifoldu olsun. Eğer $(\tilde{\nabla}_X \phi)Y = 0$ ise, $\tilde{B}$ ekran transversal-CR lightlike çarpımdır.

İspat: $X, Y \in \Gamma(\bar{\mu})$ olsun. Öyleyse (4.2) eşitliğinden $\phi Y = 0$ dir. $(\tilde{\nabla}_X \phi)Y = 0$ ve $\phi Y = 0$ oluşu (4.6) eşitliğinde kullanılırsa $\phi \tilde{\nabla}_X Y = 0$ bulunur. Buradan $\tilde{\nabla}_X Y \in \Gamma(\bar{\sigma})$ bulunur. Böylece $\bar{\sigma}$, $\tilde{B}$ da tamamen geodezik foliasyon tanımlar. Şimdi $X, Y \in \Gamma(\mu \perp \{V\})$ alalım. Böylece (4.2)

eşitliğinden $\omega Y = 0$ dir. $(\tilde{\nabla}_X \varphi)Y = 0$ ve $\omega Y = 0$ oluşu (4.6) eşitliğinde kullanılırsa $Bh(X, Y) = 0$ bulunur. Bu da bize Teorem 4.1.12'den $\mu \perp \{V\}$ nin $\tilde{B}$ da tamamen geodezik foliasyon tanımladığını verir. Böylece $\tilde{B}$ ekran transversal-CR lightlike çarpımdır ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.17. $\tilde{B}$ belirsiz kosimplektik manifoldu ve $\tilde{B}$, $\tilde{B}$ nin bir irrasyonel ekran transversal-CR lightlike altmanifoldu olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa, $\tilde{B}$ ekran transversal-CR lightlike çarpımdır.

i) Her $X \in \Gamma(T\tilde{B})$ ve $U \in \Gamma(tr(T\tilde{B}))$ için $\tilde{\nabla}_X U \in \Gamma(S(T\tilde{B}^\perp))$ dir.

ii) Her $Y \in \Gamma(\mu \perp \{V\})$ için $A_\xi^* Y \in \Gamma(\phi(\mu_1) \perp \phi(\omega))$ dir.

İspat: (i) sağlansın. Bu durumda (3.10) ve (3.11) den her $X \in \Gamma(T\tilde{B})$ için $A_N X = 0$, $A_W X = 0$, $D^l(X, W) = 0$ ve $\tilde{\nabla}_X^l N = 0$ dir. Öyleyse $X, Y \in \Gamma(\mu \perp \{V\})$ ve $W \in \Gamma(S(T\tilde{B}^\perp))$ oluşu (3.12) eşitliğinde kullanırsa $\tilde{g}(h^s(X, Y), W) = 0$ bulunur. Bu eşitlikte $S(T\tilde{B}^\perp)$ in non-dejenere oluşu kullanılırsa $h^s(X, Y) = 0$ bulunur. Buradan $Bh^s(X, Y) = 0$ dir. Şimdi $X, Y \in \Gamma(\mu \perp \{V\})$ ve $\xi \in \Gamma(Rad(T\tilde{B}))$ için, (ii) ve $\tilde{B}$ nin irrasyonel oluşu (3.18) de kullanılırsa $\tilde{g}(h^l(X, Y), \xi) = \tilde{g}(Y, A_\xi^* X) = 0$ bulunur. Buradan $h^l(X, Y) = 0$ bulunur. Böylece $Bh^l(X, Y) = 0$ dir. O zaman Teorem 4.1.12'den $\mu \perp \{V\}$ $\tilde{B}$ da tamamen geodezik foliasyon tanımlar.

Diğer taraftan $X, Y \in \Gamma(\bar{\mu})$ için $\phi Y = \nu Y \in \Gamma(\Omega_1 \perp \omega \perp \phi(\mu_2)) \subset \Gamma(tr(T\tilde{B}))$ dir. (4.6) eşitliği dikkate alınırsa $\phi \tilde{\nabla}_X Y = -Bh(X, Y)$ bulunur. Son eşitliğin $\bar{\mu}$ boyunca bileşenleri karşılaştırılırsa $\phi \tilde{\nabla}_X Y = 0$ bulunur. Buradan $\tilde{\nabla}_X Y \in \Gamma(\bar{\mu})$ olur. Böylece $\bar{\mu}$ $\tilde{B}$ da tamamen geodezik foliasyon tanımlar. $\tilde{B}$ ekran transversal-CR lightlike çarpımdır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Tanım 4.1.18. $\tilde{B}$ bir belirsiz kosimplektik manifoldu ve $\tilde{B}$, $\tilde{B}$ nin V 'ye teğet olacak şekildeki lightlike altmanifoldu olsun. Eğer h her $X, Y \in \Gamma(T\tilde{B})$ için

$$h(X, Y) = [\tilde{g}(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)]\alpha \quad (4.32)$$

ise $\tilde{B}$ ya kontakt tamamen umbilik altmanifold ve $\alpha = 0$ ise $\tilde{B}$ ya tamamen geodezik altmanifold denir. Burada α , $\tilde{B}$ da transversal vektör alanıdır (Gupta vd., 2012a).

Teorem 4.1.19. $\tilde{B}$ belirsiz kosimplektik manifoldu ve $\tilde{B}$, $\tilde{B}$ nın bir kontakt tamamen umbilik ekran transversal-CR lightlike altmanifoldu olsun. Eğer $X \in \Gamma(T\tilde{B})$ ve $Y \in \Gamma(\mu \perp \{V\})$ için $Bh(X, \phi Y) = 0$ ise, $\tilde{B}$ ekran transversal-CR lightlike çarpımdır.

İspat: Her $X, Y \in \Gamma(\mu \perp \{V\})$ için hipotezden $Bh(X, \phi Y) = 0$ dir. O zaman Teorem 4.1.12'den $\mu \perp \{V\}$, $\tilde{B}$ da tamamen geodezik foliasyon tanımlar.

Şimdi $X, Y \in \Gamma(\bar{\mu})$ alalım. $Y \in \Gamma(\bar{\mu})$ için $\phi Y = \nu Y \in \Gamma(\Omega_1 \perp \omega \perp \phi(\sigma_2)) \subset \Gamma(tr(T\tilde{B}))$ dir. (4.6) dan

$$-\phi \tilde{\nabla}_X Y = A_{\nu Y} X + Bh(X, Y) \quad (4.33)$$

bulunur. (3.8) eşitliği (4.33) eşitliğinde dikkate alınırsa ve $\tilde{\nabla}$ nın metrik konneksiyon oluşu kullanılırsa, her $Z \in \Gamma(\mu_0)$ için

$$\begin{aligned} -\tilde{g}(\phi \tilde{\nabla}_X Y, Z) &= \tilde{g}(A_{\nu Y} X + Bh(X, Y), Z) \\ &= -\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X \phi Y, Z) = \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, \phi Z) \\ &= -\tilde{g}(Y, \tilde{\nabla}_X \phi Z) = -\tilde{g}(Y, \tilde{\nabla}_X Z') \end{aligned} \quad (4.34)$$

bulunur. Burada σ_0 invariant olduğundan $\phi Z = Z' \in \Gamma(D_0)$ dir. Her $X \in \Gamma(\bar{\mu})$ ve $Z \in \Gamma(D_0)$ için (3.28) den

$$\tilde{\nabla}_X \phi Z = \phi \tilde{\nabla}_X Z \quad (4.35)$$

dir. (4.35) eşitliğinde (3.7), (4.2) ve (4.5) eşitliği kullanılırsa

$$\tilde{\nabla}_X \phi Z + h(X, \phi Z) = \phi \tilde{\nabla}_X Z + \nu \tilde{\nabla}_X Z + Bh(X, Z) + Ch(X, Z) \quad (4.36)$$

bulunur. Elde edilen eşitliğin transversal kısmı alınır

$$\nu \tilde{\nabla}_X Z = h(X, \phi Z) - Ch(X, Z) \quad (4.37)$$

bulunur. (4.32) den

$$h(X, \phi Z) = [\tilde{g}(X, \phi Z) - \eta(X)\eta(\phi Z)]\alpha = 0$$

$$h(X, Z) = [\tilde{g}(X, Z) - \eta(X)\eta(Z)]\alpha = 0$$

bulunur. Son eşitlikler (4.36) eşitliğinde kullanılırsa $\nu \tilde{\nabla}_X Z = 0$ bulunur. Bu da bize $\tilde{\nabla}_X Z \in \Gamma(\mu)$ olduğunu gösterir. Böylece (4.34) eşitliğinden $\tilde{g}(\phi \tilde{\nabla}_X Y, Z) = 0$ bulunur. μ_0 distribüsyonu non-dejenere olduğundan $\phi \tilde{\nabla}_X Y = 0$ bulunur yani $\tilde{\nabla}_X Y \in \Gamma(\bar{\mu})$ dir. Buradan $\bar{\mu}$, $\tilde{B}$ da tamamen geodezik foliasyon tanımlar ve $\tilde{B}$ ekran transversal-CR lightlike çarpımdır. Buradan ispat tamamlanır.

4.2. Minimal Ekran Transversal-CR Lightlike Altmanifoldlar

Bu bölümde, belirsiz kosimplektik manifoldunun tamamen geodezik olmayan minimal ekran transversal-CR lightlike altmanifoldu için bir örnek verilmiş ve ekran transversal-CR lightlike altmanifoldun minimal olması için şartlar verilmiştir.

Örnek 4.2.1. $(\tilde{B} = \mathbb{R}_4^{15}, \tilde{g})$ bir $(-, -, +, +, +, +, +, -, -, +, +, +, +, +)$ işaretli semi-Öklidyen uzay ve $(\partial x_1, \partial x_2, \partial x_3, \partial x_4, \partial x_5, \partial x_6, \partial x_7, \partial y_1, \partial y_2, \partial y_3, \partial y_4, \partial y_5, \partial y_6, \partial y_7, \partial z)$, $\mathbb{R}_4^{15}$ ün standart koordinat sistemi olsun. $\tilde{B}$ altmanifoldu

$$\begin{aligned} x^1 &= u^1 \cosh \alpha + u^3 \sinh \alpha + \frac{u^4}{2} \sinh \alpha, \quad x^2 = \sqrt{2} u^2, \\ x^3 &= u^1 \sinh \alpha + u^3 \cosh \alpha + \frac{u^4}{2} \cosh \alpha, \quad x^4 = u^2, \\ x^5 &= \cos u^4 \cosh u^5, \quad x^6 = -\cos u^6 \sinh u^7, \quad x^7 = \sin u^6 \sinh u^7, \\ y^1 &= u^1 \sinh \alpha - u^3 \cosh \alpha + \frac{u^4}{2} \cosh \alpha, \quad y^2 = u^2, \\ y^3 &= u^1 \cosh \alpha - u^3 \sinh \alpha + \frac{u^4}{2} \sinh \alpha, \quad y^4 = \sqrt{2} u^4, \\ y^5 &= \sin u^4 \sinh u^5, \quad y^6 = \cos u^6 \cosh u^7, \quad y^7 = -\sin u^6 \cosh u^7 \end{aligned}$$

ile verilsin. Bu durumda

$$Z_1 = \cosh \alpha \partial x_1 + \sinh \alpha \partial x_3 + \sinh \alpha \partial y_1 + \cosh \alpha \partial y_3,$$

$$Z_2 = \sqrt{2} \partial x_2 + \partial x_4 + \partial y_2 + \sqrt{2} \partial y_4,$$

$$Z_3 = \sinh \alpha \partial x_1 + \cosh \alpha \partial x_3 - \cosh \alpha \partial y_1 - \sinh \alpha \partial y_3,$$

$$Z_4 = \frac{1}{2} (\sinh \alpha \partial x_1 + \cosh \alpha \partial x_3 + \cosh \alpha \partial y_1 + \sinh \alpha \partial y_3),$$

$$Z_5 = -\sin u^4 \cosh u^5 \partial x_5 + \cos u^4 \sinh u^4 \partial y_5,$$

$$Z_6 = \cos u^4 \sinh u^5 \partial x_5 + \sin u^4 \cosh u^5 \partial y_5,$$

$$Z_7 = \sin u^6 \sinh u^7 \partial x_6 + \cos u^6 \sinh u^7 \partial x_7 - \sin u^6 \cosh u^7 \partial y_6 - \cos u^6 \cosh u^7 \partial y_7,$$

$$Z_8 = -\cos u^6 \cosh u^7 \partial x_6 + \sin u^6 \cosh u^7 \partial x_7 + \cos u^6 \sinh u^7 \partial y_6 - \sin u^6 \sinh u^7 \partial y_7, \quad Z_9 = V = \partial z$$

vektörleri $\tilde{T\tilde{B}}$ 'yi gerer. $\phi_0(Z_1) = Z_3$, $\phi_0(Z_5) = Z_6$ olduğundan, $Rad(\tilde{T\tilde{B}}) = Sp\{Z_1, Z_2\}$,

$\mu_1 = Sp\{Z_1\}$, $\mu_2 = Sp\{Z_2\}$ ve $\mu_0 = Sp\{Z_5, Z_6\}$ olur. Diğer taraftan

$$\text{ltr}(\tilde{T\tilde{B}}) = Sp\{N_1 = \frac{1}{2} (-\cosh \alpha \partial x_1 - \sinh \alpha \partial x_3 + \sinh \alpha \partial y_1 + \cosh \alpha \partial y_3),$$

$$N_2 = \frac{1}{2} (-\sqrt{2} \partial x_2 - \partial x_4 + \partial y_2 + \sqrt{2} \partial y_4)\},$$

$$\phi_0(N_1) = Z_4, \quad S(\tilde{T\tilde{B}}^\perp) = Sp\{\phi_0(Z_2), \phi_0(N_2), \phi_0(Z_7), \phi_0(Z_8)\}$$

dir.

$$\begin{aligned}
& \{\xi_1=Z_1, \xi_2=Z_2, \phi_0(\xi_1)=Z_3, \phi_0(N_1)=Z_4, \\
& e_1=\frac{1}{\sqrt{\cosh^2 u^5 - \cos^2 u^4}} Z_5, e_2=\frac{1}{\sqrt{\cosh^2 u^5 - \cos^2 u^4}} Z_6, \\
& e_3=\frac{1}{\sqrt{\sinh^2 u^7 + \cosh^2 u^7}} Z_7, e_4=\frac{1}{\sqrt{\sinh^2 u^7 + \cosh^2 u^7}} Z_8, V=Z_9, \\
& W_1=\phi_0(\xi_2), W_2=\phi_0(N_2), W_3=\frac{1}{\sqrt{\sinh^2 u^7 + \cosh^2 u^7}} \phi_0(Z_7), \\
& W_4=\frac{1}{\sqrt{\sinh^2 u^7 + \cosh^2 u^7}} \phi_0(Z_8), N_1, N_2\}
\end{aligned}$$

olup $\tilde{B}$, $\tilde{B} = R_4^{15}$ uzayının bir ekran transversal-CR lightlike altmanifoldudur. Burada $\varepsilon_1=\check{g}(e_1, e_1)=1$, $\varepsilon_2=\check{g}(e_2, e_2)=1$, $\varepsilon_3=\check{g}(e_3, e_3)=1$ ve $\varepsilon_4=\check{g}(e_4, e_4)=1$ dir. Gauss formülü kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& h(\xi_1, \xi_1) = h(\xi_2, \xi_2) = h(e_1, e_1) = h(e_2, e_2) = 0, \\
& h(\phi_0(\xi_1), \phi_0(\xi_1)) = h(\phi_0(N_1), \phi_0(N_1)) = h^l(e_3, e_3) = h^l(e_4, e_4) = 0, \\
& h^s(e_3, e_3) = -\frac{1}{(\sinh^2 u^7 + \cosh^2 u^7)^{\frac{3}{2}}} W_4, h^s(e_4, e_4) = \frac{1}{(\sinh^2 u^7 + \cosh^2 u^7)^{\frac{3}{2}}} W_4
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$izh_{\check{g}|S(\tilde{TB})} = \varepsilon_3 h^s(e_3, e_3) + \varepsilon_4 h^s(e_4, e_4) = h^s(e_3, e_3) + h^s(e_4, e_4) = 0$$

dir. Böylece $\tilde{B}$, $\tilde{B} = \mathbb{R}_4^{15}$ 'ün tamamen geodezik olmayan minimal bir ekran transversal-CR lightlike altmanifoldudur.

$\{\xi_1, \dots, \xi_q, e_1, \dots, e_m, V\}$, $\Gamma(\tilde{TB})$ ya ait olacak şekilde $\{\xi_1, \dots, \xi_q, e_1, \dots, e_m, V, W_1, \dots, W_n, N_1, \dots, N_q\}$ quasi-ortonormal bazını alalım.

$\{\xi_1, \dots, \xi_p\}$, μ_1 'in bazı; $\{\xi_{p+1}, \dots, \xi_q\}$, μ_2 'nin bazı ve $\{e_1, \dots, e_{2l}\}$, μ_0 'ın bazı olacak şekilde $\{\xi_1, \dots, \xi_q, e_1, \dots, e_m\}$ bazını alalım. Ayrıca $\mathcal{W}$ 'nin $\{W_1, \dots, W_k\}$ bazını Ω_1 'in $\{N_1, \dots, N_p\}$ bazını ve $\{N_{p+1}, \dots, N_q\}$ bazını alalım bu Ω_2 nin durumunda $\tilde{B}$ nin quasi-ortonormal bazı aşağıdaki gibidir $\{\xi_1, \dots, \xi_p, \xi_{p+1}, \dots, \xi_q, e_1, \dots, e_l, \phi e_1, \dots, \phi e_l, \phi \xi_1, \dots, \phi \xi_p, \phi N_1, \dots, \phi N_p, \phi W_1, \dots, \phi W_k\}$.

Teorem 4.2.2. $\tilde{B}$ belirsiz kosimplektik manifoldu ve $\tilde{B}$, $\tilde{B}$ nin bir kontakt tamamen umbilik ekran transversal-CR lightlike altmanifoldu olsun. O zaman $\tilde{B}$ nin minimal olması için ancak ve ancak $\xi_q \in \Gamma(Rad(\tilde{TB}))$ ve $W_\alpha \in \Gamma(S(T\tilde{B}^\perp))$ için

$$izA_{\xi_q}^* \Big|_{\sigma_0 \perp \phi(\omega)} = izA_{W_\alpha} \Big|_{\sigma_0 \perp \phi(\omega)} = 0$$

olmasıdır.

İspat: Minimal tamımından $\tilde{B}$ 'nın minimal olması için ancak ve ancak $Rad(T\tilde{B})$ üzerinde $h^s = 0$ ve $S(T\tilde{B})$ üzerinde $izh = 0$ olmasıdır. $\tilde{B}$ kontakt tamamen umbilik olduğundan $Rad(T\tilde{B})$ üzerinde $h^s = 0$ dır. Öyleyse

$$\begin{aligned} izh|_{S(T\tilde{B})} &= izh|_{\sigma_0} + izh|_{\phi(\omega)} + izh|_{\phi(\sigma_1)} + izh|_{\phi(\Omega_1)} \\ &= \sum_{i=1}^{2l} h(e_i, e_i) + \sum_{\beta=1}^k h(\phi W_\beta, \phi W_\beta) + \sum_{j=1}^p h(\phi \xi_j, \phi \xi_j) + \sum_{j=1}^p h(\phi N_j, \phi N_j) = 0 \end{aligned}$$

olmalıdır. Öte yandan $\tilde{B}$ 'nın tamamen umbilik oluşu kullanılırsa, (4.32) den

$$h(\phi \xi_j, \phi \xi_j) = \tilde{g}(\phi \xi_j, \phi \xi_{jk}) \alpha = 0,$$

$$h(\phi N_j, \phi N_j) = \tilde{g}(\phi N_j, \phi N_j) \alpha = 0$$

yazılabilir. Böylece

$$\begin{aligned} izh|_{S(T\tilde{B})} &= izh|_{\sigma_0} + izh|_{\phi(\omega)} \\ &= \sum_{i=1}^{2l} \varepsilon_i \left[h^l(e_i, e_i) + h^s(e_i, e_i) \right] + \sum_{\beta=1}^k \varepsilon_\beta \left[h^l(\phi W_\beta, \phi W_\beta) + h^s(\phi W_\beta, \phi W_\beta) \right] \\ &= \sum_{i=1}^{2l} \varepsilon_i \left[\frac{1}{r} \sum_{q=1}^r \tilde{g}(h^l(e_i, e_i), \xi_q) N_q + \frac{1}{n-r} \sum_{\alpha=1}^{n-r} \tilde{g}(h^s(e_i, e_i), W_\alpha) W_\alpha \right] \\ &\quad + \sum_{\beta=1}^k \varepsilon_\beta \left[\frac{1}{r} \sum_{q=1}^r \tilde{g}(h^l(\phi W_\beta, \phi W_\beta), \xi_q) N_q + \frac{1}{n-r} \sum_{\alpha=1}^{n-r} \tilde{g}(h^s(\phi W_\beta, \phi W_\beta), W_\alpha) W_\alpha \right] \end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca (3.12) ve (3.18) eşitliğinden

$$\tilde{g}(h^l(e_i, e_i), \xi_q) N_q = \tilde{g}(A_{\xi_q}^* e_i, e_i) N_q,$$

$$\tilde{g}(h^s(e_i, e_i), W_\alpha) W_\alpha = \tilde{g}(A_{W_\alpha} e_i, e_i) W_\alpha,$$

$$\tilde{g}(h^l(\phi W_\beta, \phi W_\beta), \xi_q) N_q = \tilde{g}(A_{\xi_q}^* \phi W_\beta, \phi W_\beta) N_q,$$

$$\tilde{g}(h^s(\phi W_\beta, \phi W_\beta), W_\alpha) W_\alpha = \tilde{g}(A_{W_\alpha} \phi W_\beta, \phi W_\beta) W_\alpha$$

yazılabilir. Böylece yukarıdaki eşitlikler kullanılarak

$$\begin{aligned} izh|_{S(T\tilde{B})} &= \sum_{i=1}^{2l} \varepsilon_i \left[\frac{1}{r} \sum_{q=1}^r \tilde{g}(A_{\xi_q}^* e_i, e_i) N_q \right] + \sum_{\beta=1}^k \varepsilon_\beta \left[\frac{1}{r} \sum_{q=1}^r \tilde{g}(A_{\xi_q}^* \phi W_\beta, \phi W_\beta) N_q \right] \\ &\quad + \sum_{i=1}^{2l} \varepsilon_i \left[\frac{1}{n-r} \sum_{\alpha=1}^{n-r} \tilde{g}(A_{W_\alpha} e_i, e_i) W_\alpha \right] + \sum_{\beta=1}^k \varepsilon_\beta \left[\frac{1}{n-r} \sum_{\alpha=1}^{n-r} \tilde{g}(A_{W_\alpha} \phi W_\beta, \phi W_\beta) W_\alpha \right] \end{aligned}$$

bulunur. Buradan $\tilde{B}$ 'nın minimal olması için ancak ve ancak $izA_{\xi_q}^*|_{\sigma_0 \perp \phi(\omega)} = izA_{W_\alpha}|_{\sigma_0 \perp \phi(\omega)} = 0$ olmasıdır.

Buradan ispat biter.

Teorem 4.2.3. $\tilde{B}$ belirsiz kosimplektik manifoldu ve $\tilde{B}$, $\tilde{B}$ ’nin bir ekran transversal-CR lightlike altmanifoldu olsun. O zaman $\tilde{B}$ ’nin minimal olması için ancak ve ancak $\xi_q \in \Gamma(Rad(\tilde{TB}))$ ve $W_\alpha \in \Gamma(S(\tilde{TB}^\perp))$ için

$$izA_{\xi_q}^* \Big|_{S(\tilde{TB})} = izA_{W_\alpha} \Big|_{S(\tilde{TB})} = 0$$

ve her $\xi_1, \xi_2 \in \Gamma(Rad(\tilde{TB}))$ ve $W \in \Gamma(S(\tilde{TB}^\perp))$ için $\tilde{g}(\xi_2, D^l(\xi_1, W)) = 0$ olmasıdır.

İspat: $Rad(\tilde{TB})$ üzerinde $h^l = 0$ dir (Bejan ve Duggal, 2005). Ekran transversal-CR lightlike altmanifold tanımından $\tilde{B}$ ’nin minimal olması için ancak ve ancak $Rad(\tilde{TB})$ üzerinde $h^s = 0$ ve $S(\tilde{TB})$ üzerinde $izh = 0$ olmasıdır. (3.12) den $\xi_1, \xi_2 \in \Gamma(Rad(\tilde{TB}))$ ve $W \in \Gamma(S(\tilde{TB}^\perp))$ için

$$\tilde{g}(h^s(\xi_1, \xi_2), W) = -\tilde{g}(\xi_2, D^l(\xi_1, W))$$

bulunur. Yani $\tilde{g}(\xi_2, D^l(\xi_1, W)) = 0$ bulunur. Diğer taraftan

$$izh \Big|_{S(\tilde{TB})} = \sum_{i=1}^{2l} h(e_i, e_i) + \sum_{\beta=1}^k h(\phi W_\beta, \phi W_\beta) + \sum_{j=1}^p h(\phi \xi_j, \phi \xi_j) + \sum_{j=1}^p h(\phi N_j, \phi N_j) = 0$$

olmalıdır. Yani

$$\begin{aligned} izh \Big|_{S(\tilde{TB})} &= \frac{1}{r} \sum_{q=1}^r \sum_{j=1}^p \left\{ \tilde{g}(h^l(\phi \xi_j, \phi \xi_j), \xi_q) N_q + \tilde{g}(h^l(\phi N_j, \phi N_j), \xi_q) N_q \right\} \\ &+ \frac{1}{n-r} \sum_{j=1}^p \sum_{\alpha=1}^{n-r} \varepsilon_\alpha \left\{ \tilde{g}(h^s(\phi \xi_j, \phi \xi_j), W_\alpha) W_\alpha + \tilde{g}(h^s(\phi N_j, \phi N_j), W_\alpha) W_\alpha \right\} \\ &+ \frac{1}{n-r} \sum_{\alpha=1}^{n-r} \varepsilon_\alpha \left\{ \sum_{i=1}^{2l} \tilde{g}(h^s(e_i, e_i), W_\alpha) W_\alpha + \sum_{\beta=1}^k \tilde{g}(h^s(\phi W_\beta, \phi W_\beta), W_\alpha) W_\alpha \right\} \\ &+ \frac{1}{r} \sum_{q=1}^r \left\{ \sum_{i=1}^{2l} \tilde{g}(h^l(e_i, e_i), \xi_q) N_q + \sum_{\beta=1}^k \tilde{g}(h^l(\phi W_\beta, \phi W_\beta), \xi_q) N_q \right\} \end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca (3.12) ve (3.18) eşitliğinden

$$\tilde{g}(h^l(\phi \xi_j, \phi \xi_j), \xi_q) N_q = \tilde{g}(A_{\xi_q}^* \phi \xi_j, \phi \xi_j) N_q,$$

$$\tilde{g}(h^l(\phi N_j, \phi N_j), \xi_q) N_q = \tilde{g}(A_{\xi_q}^* \phi N_j, \phi N_j) N_q,$$

$$\tilde{g}(h^s(\phi \xi_j, \phi \xi_j), W_\alpha) W_\alpha = \tilde{g}(A_{W_\alpha} \phi \xi_j, \phi \xi_j) W_\alpha,$$

$$\tilde{g}(h^s(\phi N_j, \phi N_j), W_\alpha) W_\alpha = \tilde{g}(A_{W_\alpha} \phi N_j, \phi N_j) W_\alpha,$$

$$\tilde{g}(h^s(e_i, e_i), W_\alpha) W_\alpha = \tilde{g}(A_{W_\alpha} e_i, e_i) W_\alpha,$$

$$\tilde{g}(h^s(\phi W_\beta, \phi W_\beta), W_\alpha) W_\alpha = \tilde{g}(A_{W_\alpha} \phi W_\beta, \phi W_\beta) W_\alpha,$$

$$\tilde{g}\left(h^l(e_i, e_i), \xi_q\right) N_q = \tilde{g}\left(A_{\xi_q}^* e_i, e_i\right) N_q,$$

$$\tilde{g}\left(h^l(\phi W_\beta, \phi W_\beta), \xi_q\right) N_q = \tilde{g}\left(A_{\xi_q}^* \phi W_\beta, \phi W_\beta\right) N_q$$

yazılabilir. Böylece yukarıdaki eşitlikler kullanılarak

$$\begin{aligned} izh\Big|_{S(T\tilde{B})} &= \frac{1}{r} \sum_{q=1}^r \sum_{j=1}^p \left\{ \tilde{g}\left(A_{\xi_q}^* \phi \xi_j, \phi \xi_j\right) N_q + \tilde{g}\left(A_{\xi_q}^* \phi N_j, \phi N_j\right) N_q \right\} \\ &+ \frac{1}{n-r} \sum_{\alpha=1}^{n-r} \epsilon_\alpha \sum_{j=1}^p \left\{ \tilde{g}\left(A_{W_\alpha} \phi \xi_j, \phi \xi_j\right) W_\alpha + \tilde{g}\left(A_{W_\alpha} \phi N_j, \phi N_j\right) W_\alpha \right\} \\ &+ \frac{1}{n-r} \sum_{\alpha=1}^{n-r} \epsilon_\beta \left\{ \sum_{j=1}^{2l} \tilde{g}\left(A_{W_\alpha} e_i, e_i\right) W_\alpha + \sum_{\alpha=1}^k \tilde{g}\left(A_{W_\alpha} \phi W_\beta, \phi W_\beta\right) W_\alpha \right\} \\ &+ \sum_{q=1}^r \frac{1}{r} \left\{ \sum_{j=1}^{2l} \tilde{g}\left(A_{\xi_q}^* e_i, e_i\right) N_q + \sum_{\beta=1}^k \tilde{g}\left(A_{\xi_q}^* \phi W_\beta, \phi W_\beta\right) N_q \right\} \end{aligned}$$

bulunur. Buradan $\tilde{B}$ nin minimal olması için ancak ve ancak $izA_{\xi_q}^* \Big|_{S(T\tilde{B})} = izA_{W_\alpha} \Big|_{S(T\tilde{B})} = 0$ ve her $\xi_1, \xi_2 \in \Gamma(Rad(T\tilde{B}))$ ve $W \in \Gamma(S(T\tilde{B}^\perp))$ için $\tilde{g}(\xi_2, D^l(\xi_1, W)) = 0$ olmasıdır. Buradan ispat tamamlanmış olur.



5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Bu tezde belirsiz kosimplektik manifoldunun bir ekran transversal-CR lightlike altmanifoldu tanıtılmıştır. Bu altmanifold, en genel altmanifold sınıflarını oluşturmaktadır. Bir çok manifoldun (belirsiz sasakiyan, semi-Riemann çarpım manifoldları, altın semi-Riemann manifoldları vb.) lightlike altmanifoldları, bu sınıflar göz önüne bulundurulmadan literatürde çalışılmıştır. Böylece ekran transversal-CR lightlike altmanifoldu dikkate alınarak bir çok manifoldun lightlike altmanifoldları karakterize edilecek ve bu altmanifoldların geometrisi incelenecektir. Bu altmanifold sınıfı, bu sebeplerden dolayı literatüre yeni çalışma alanları kazandıracaktır.

KAYNAKLAR

- Acet, B.E. (2018). "Lightlike hypersurfaces of metallic semi-Riemannian manifolds." *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, Vol. 15, No. 12, pp. 185–201.
- Atçeken, M., and Kılıç, E. (2007). "Semi-invariant lightlike submanifolds of a semi-Riemannian product manifold." *Kodai Math. J.*, Vol. 30, No. 3, pp. 361–378.
- Beem, J. K., and Ehrlich, P. E. (1996). *Global Lorentzian Geometry*, Marcel Dekker, Inc. New York, First Edition, 1981. Second Edition (with Easley, K. L.).
- Bejan, C. L., and Duggal, K. L. (2005). "Global lightlike manifolds and harmonicity." *Kodai Math. J.*, Vol. 28, pp. 131-145.
- Bejancu, A. (1986). *Geometry of CR-Submanifolds*, Kluwer Academica.
- Bejancu, A., and Duggal, K. L. (1995). "Lightlike submanifolds of semi-Riemannian manifolds." *Acta Applicandae Mathematica*, Vol. 38, pp. 197-215.
- Berger, M. (2000). "Riemannian Geometry During the Second Half of the Twentieth Century." *Lecture Series*, 17, Amer. Math. Soc.
- Blair, D.E. (2002). "Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds, "Progress in Mathematics." 203, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA.
- Carter, B., (1969). "Killing horizons and orthogonally transitive groups in spacetime." *J. Math. Phys.*, Vol. 10, No. 1, pp. 70-81.
- Chen, B.Y. (1973). *Geometry of submanifolds*, M. Dekker, New York.
- Chinea, D., and Marrero, J. C. (1992) "Conformal changes of almost cosymplectic manifolds." *Demonstratio Math*, Vol. 25, No. 3, pp. 641–656.
- Doğan, B., Şahin, B., and Yaşar, E. (2020). "Screen transversal cauchy Riemann lightlike submanifolds." *Filomat*, Vol. 34, No. 5, pp. 1581-1599.
- Duggal, K. L. (1990). "Space time manifolds and contact structures." *Internat. J. Math. and Math. Sci*, Vol. 13, pp. 545-554.
- Duggal, K. L., and Bejancu, A. (1996). *Lightlike Submanifolds of Semi-Riemannian Manifolds and Its Applications*, Kluwer Academic.

Duggal, K. L., and Jin, D. H. (2003). "Totally umbilical lightlike submanifolds." *Kodai Math J.*, Vol. 26, pp. 49-68.

Duggal, K. L., and Şahin, B. (2005). "Screen Cauchy Riemann lightlike submanifolds." *Acta Mathematica Hungarica*, Vol. 106, No. 1-2, pp. 137-165.

Duggal, K. L., and Şahin, B. (2006). "Generalized Cauchy Riemann lightlike submanifolds of Kaehler manifolds." *Acta Mathematica Hungarica*, Vol. 112, No. 1-2, pp. 107-130.

Duggal, K.L., and Şahin, B. (2007). "Lightlike submanifolds of indefinite Sasakian manifolds." *Int. J. Math. Math. Sci.*, Vol. 2007, Art. No. 57585.

Duggal, K.L., and Şahin, B. (2009). "Generalized Cauchy-Riemann Lightlike Submanifolds of Indefinite Sasakian Manifolds." *Acta Mathematica Hungarica*, Vol. 122, pp. 45-58.

Duggal, K. L., and Şahin, B. (2010). *Differential Geometry of Lightlike Submanifolds*, Birkhäuser.

Goldberg, S. I., and Yano, K. (1969). "Integrability of almost cosymplectic structures." *Pacific Journal of Mathematics*, Vol. 31, pp. 373–382.

Goldberg, S.I., and Yano, K. (1970). "Polynomial structures on manifolds." *Kodai Math. Sem. Rep.*, Vol. 22, pp. 199–218.

Gupta, R. S. (2011). "Screen slant lightlike submanifolds of indefinite cosymplectic manifolds." *Georgian Math J*, Vol. 18, pp. 83-97.

Gupta, R. S. (2012). "Geometry of lightlike hypersurfaces of an indefinite cosymplectic manifolds." In *AIP Conference Proceedings*, American Institute of Physics, Vol. 1479, No. 1, pp. 1651-1654.

Gupta, R. S. (2013). "Ricci Semi-Symmetric Lightlike Hypersurfaces of an Indefinite Cosymplectic Space Form." *Kyungpook Mathematical Journal*, Vol. 53, No. 4, pp. 593–602.

Gupta, R.S., and Sharfuddin, A. (2010). "Generalized Cauchy-Riemann Lightlike Submanifolds of Indefinite Kenmotsu Manifolds." *Note di Matematica*, Vol. 30, No. 2, pp. 49-59.

Gupta, R.S., and Sharfuddin, A. (2010). "Screen transversal lightlike submanifolds of indefinite cosymplectic manifolds." *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, Vol. 124, pp. 145-156.

Gupta, R. S., Upadhyay, A., and Sharfuddin, A. (2011). "Slant lightlike submanifolds of indefinite cosymplectic manifolds." *Mediterranean Journal of Mathematics*, Vol. 8, No. 2, pp. 215-227.

Gupta, R.S. Upadhyay, A., and Sharfuddin, A. (2012). "Lightlike submanifolds of indefinite cosymplectic manifolds." *An. Ştiinţ. Univ. "Al. I. Cuza" Iaşi. Mat. (N.S.)*, Vol. 58, pp. 157-180.

Gupta, R.S. Upadhyay, A., and Sharfuddin, A. (2012). "Generalised Cauchy-Riemann lightlike submanifolds of indefinite cosymplectic manifolds." *An. Ştiinţ. Univ. "Al. I. Cuza" Iaşi. Mat. (N.S.)*, Vol. 58, No. 2, pp. 381-394.

Jain, V., Kumar, R., and Nagaich, R. K. (2012). "On GCR-lightlike product of indefinite cosymplectic manifolds." *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, Vol. 2012, Article ID 605816.

Jain, V., Kumar, R., and Nagaich, R. K. (2013). "Integrability of distributions in GCR-lightlike submanifolds of indefinite cosymplectic manifolds." *Lobachevskii Journal of Mathematics*, Vol. 34, pp. 76-84.

Jain, V., Kumar, R., and Nagaich, R. K. (2013). "Non existence of totally contact umbilical GCR-lightlike submanifolds of indefinite cosymplectic manifolds." *Vietnam Journal of Mathematics*, Vol. 41, pp. 121-134.

Jin, D. H. (2012). "Geometry of lightlike hypersurfaces of an indefinite cosymplectic manifold." *Communications of the Korean Mathematical Society*, Vol. 27, No. 1, pp.185-195.

Jin, D.H. (2014). "Indefinite generalized sasakian space form admitting a generic lightlike submanifold." *Bull. Korean Math. Soc.*, Vol. 51, No. 6, pp. 1711–1726.

Jin, D. H., and Lee, J. W. (2011). "Generic lightlike submanifolds of an indefinite cosymplectic manifold." *Mathematical Problems in Engineering*, Vol. 2011, Art. No. 610986.

Jin, D.H., and Lee, W.J. (2015) "Generic lightlike submanifolds of an indefinite kaehler manifold." *Int. J. Pure Appl. Math*, Vol. 101, No. 4, pp. 543–560.

Kang, T. H., and Kim, S. K. (2007). "Lightlike hypersurfaces of indefinite cosymplectic manifolds." *In International Mathematical Forum*, Vol. 2, No. 67, pp. 3303-3316.

Kılıç, E., and Şahin, B. (2008). "Radical anti-invariant lightlike submanifolds of a semi-Riemannian product manifold." *Turkish J. Math*, Vol. 32, pp. 429–449.

Kılıç, E., Şahin, B., and Keleş, S. (2011). "Screen semi-invariant lightlike submanifolds of semi-Riemannian product manifolds." *Int. Electron. J. Geom*, Vol. 4, pp. 120–135.

- Kumar, R., and Nagaich, R. K. (2012). "Characterization of gcr-lightlike warped product of indefinite cosymplectic manifolds." *Novi Sad J. Math*, Vol. 42, No. 2, pp.117-132.
- Kumar,S. R., and Nagaich, R.K. (2014). "GCR-lightlike submanifolds of a semi-Riemannian product manifold." *Bull. Korean Math. Soc.*, Vol.51, No. 3, pp. 883-899.
- Küpeli, D. N. (1996). *Singular Semi-Riemannian Geometry*, Kluwer Acad. Publishers, Dortrecht.
- Ludden, G.D. (1970). "Submanifolds of cosymplectic manifolds." *J. Differential Geometry*, Vol. 4, No. 2, pp. 237-244.
- Massamba, F., and Mavambou, A. M. (2018). "A class of locally conformal almost cosymplectic manifolds." *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, Vol.41, pp. 545-563.
- Nomizu, K. (1966). *Fundamental of Linear Algebra*, McGraw-Hill Book Com.
- Olszak, Z. (1981). "On almost cosymplectic manifolds." *Kodai Math. J.*, Vol.4, no. 2, pp. 239–250.
- O'Neill, B. (1983). *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*, New York, Academic Press.
- (Önen) Poyraz, N. (2020). "Golden GCR-lightlike submanifolds of golden semi-Riemannian manifolds." *Mediterranean Journal of Mathematics*, Vol.17, No.5, pp. 1-16.
- (Önen) Poyraz, N. (2021). "A study on GCR-lightlike submanifolds of semi-Riemannian product manifolds." *Journal of Universal Mathematics*, Vol.4, No.1, pp. 25-33.
- (Önen) Poyraz, N. (2023). "Contact screen transversal Cauchy-Riemann lightlike submanifolds of indefinite Sasakian manifolds." *Filomat*, Vol.37, No.16, pp. 5427-5441.
- Poyraz, N. Ö., and Doğan, B. (2020). "Semi-invariant lightlike submanifolds of golden semi-Riemannian manifolds." *Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, Vol. 22, No.1, pp. 106-121.
- Poyraz, N. Ö., and Yaşar, E. (2019). "Lightlike submanifolds of golden semi-Riemannian manifolds." *Journal of Geometry and Physics*, Vol.141, pp. 92-104.
- Sachdeva, R., Kumar, R., and Bhatia, S. S. (2013). "Nonexistence of totally contact umbilical slant lightlike submanifolds of indefinite cosymplectic manifolds." *International Scholarly Research Notices*, Vol. 2013, Art. No. 231869.

Şahin, B. (2008). "Screen transversal lightlike submanifolds of Kaehler manifolds." *Chaos, Solitons & Fractals*, Vol. 38, pp. 1439-1448.

Şahin, B. (2012). *Manifoldların Diferensiyel Geometrisi*, Nobel Akademik Yayıncılık, Ankara.

Takahashi, T. (1969). "Sasakian manifold with pseudo-Riemannian metric." *Tohoku Math. J.*, Vol. 21, pp. 271–290.

Tanno, S. (1969). "Sasakian manifolds with constant ϕ -holomorphic sectional curvature." *Tohoku Math. J.*, Vol. 21, pp. 501-507.

Upadhyay, A., and Gupta, S. R. (2011). "Semi-parallel lightlike hypersurfaces of indefinite cosymplectic space forms." *Publications de l'Institut Mathematique*, Vol. 89, No. 103, pp. 69-75.

Upadhyay, A., Gupta, R. S., and Sharfuddin, A. (2017). "Screen conformal lightlike hypersurfaces of an indefinite cosymplectic manifold." *Georgian Mathematical Journal*, Vol. 24, No. 4, pp. 609-620.

Yano, K. (1963). "On a structure defined by a tensor field f of type $(1,1)$ satisfying $f^3 + f = 0$." *Tensor N.S.*, Vol. 14, pp. 99–109.

Yano, K., and Kon, M. (1984). *Structures on Manifolds*, World Scientific.

Yıldırım, C., and Şahin, B. (2010). "Screen transversal lightlike submanifolds of indefinite Sasakian manifolds." *An. Ştiinţ. Univ. "Ovidius" Constanţa Ser. Mat.*, Vol. 18, No. 2, pp. 315–336.

