

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

KESİRLİ ISI DENKLEMİ İÇİN SÖNÜM PROBLEMİ

Sevim ERTUĞ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2023

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Doktora Tezi

KESİRLİ ISI DENKLEMİ İÇİN SÖNÜM PROBLEMİ

Sevim ERTUĞ

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Nuri ÖZALP

Bu çalışma üç bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm olan giriş bölümünde klasik analizin kesirli basamaktan türev ve integrallere genelleştirmesi olarak bilinen kesirli analizin kısa bir tarihçesi verilmiştir. Ayrıca kesirli analizle ilgili bazı temel kavramlara değinilmiştir.

İkinci bölümde; ilk problem olarak parabolik denklemin tanımlı olduğu bölgenin içinde bir ısı kaynağına sahip olan ve sınırlarda akışın olmadığı tekil kaynaklı lineer olmayan kesirli bir yayılım denklemi ele alınmış ve zaman türevi Caputo kesirli türev olarak alınmıştır. Zaman yönünde kesirli basamaktan ısı denkleminin türev basmağı α ; $0 < \alpha \leq 1$ aralığındadır. İkinci problem olarak ise iki farklı tip tekil ısı kaynağına sahip (biri parabolik denklemin tanımlı olduğu bölgenin içinde ve diğeri parabolik bölgenin sınırında) parabolik denklem çalışılmıştır. Ayrıca bu çalışmada kullanılacak temel teorem, lemma ve tanımlar ile kullanılacak yöntemler açıklanmıştır. Ek olarak; denklemin çözümünün sönüm davranışı incelenmiştir. Sonlu zamanda denklem çözümünün sönüdüğü ve belirli şartlar altında zamana göre türevin patladığı ispatlanmıştır.

Üçüncü bölüm olan son bölümde, zaman-kesirli yayılım denklemleri için sonlu fark metodu oluşturularak denklemin sayısal çözümleri incelenmiştir. Uygulanan metodun kesin çözüme yakınsama oranı (t_j, x_i) noktasında $\Theta(\Delta t^{2\alpha} + \Delta x^2)$ olarak gösterilmiştir. Metodun tutarlılık ve yakınsaklık analizleri yapılmış ve önerilen sonlu metodun kararlılığı gösterilmiştir. Ek olarak; bir sönüm oranı ve bu sönüm oranından yararlanarak sönüm zamanı için bir alt sınır elde edilmiştir. Ayrıca elde edilen sonuçların sayısal ve grafiksel olarak karşılaştırıldığı bazı simülasyonlar verilmiştir.

Dördüncü bölüm, sonuç kısmına ayrılmıştır.

Temmuz 2023, 58 sayfa

Anahtar Kelimeler: Maksimum prensipleri, kesirli analiz, kesirli basamaktan türev ve integral, Caputo kesirli türev, sönüm, tekil sınır şartı, lineer olmayan parabolik denklem.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

QUENCHING PROBLEM FOR THE FRACTIONAL HEAT EQUATION

Sevim ERTUĞ

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Nuri ÖZALP

The thesis consists of three chapters.

A brief history of fractional analysis and some basic concepts related to fractional analysis are given in the first chapter.

In the second chapter, a nonlinear fractional parabolic equation with homogeneous boundaries is considered as the first problem. The time derivative is taken as the Caputo fractional derivative. Two different types of singular heat sources, one inside the region where the parabolic equation is defined and the other at the boundary of the parabolic region are studied. The finite-time quenching and blow up of time derivative for the solution is proved.

In the last chapter, a finite difference method for time-fractional parabolic problems is created and the numerical solutions of the problems are examined. The convergence rate of the method is shown to be $\Theta(\Delta t^{2\alpha} + \Delta x^2)$. Consistency and convergence analyses of the method are given and the stability of the proposed finite method is proved. In addition, a quenching ratio and a lower limit for the quenching time are obtained and some simulations are given.

The fourth part is devoted to the conclusion part.

July 2023, 58 pages

Key Words: The maximum principles, fractional analysis, fractional order derivative and integral, Caputo fractional derivative, quenching, singular boundary condition, nonlinear parabolic equation.

TEŞEKKÜR

Doktora eğitimim süresince ve tez alıőmamın baőlangı aőamasından bu yana değerli vakitlerini ayırarak tezimin her aşamasında bilgi ve tecrübeleriyle, değerli önerileri, anlayıőı, yönlendirmeleri ve desteğinden ötürü değerli hocam ve danıőmamım Prof. Dr. Nuri ÖZALP'a en içten teőekkürlerimi ve saygılarımı sunmayı bir borç bilirim.

Tüm eğitim hayatım boyunca olduğu gibi özveri ve motivasyon isteyen doktora eğitimim süresince ve çalışma hayatım boyunca hep yanımda olan, maddi ve manevi desteklerini benden esirgemeyen aileme teşekkür ederim.

Sevim ERTUĞ
Ankara, Temmuz 2023

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI	
ETİK	i
ÖZET	ii
ABSTRACT.....	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
SİMGELER DİZİNİ	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
1. GİRİŞ	1
1.1 Kesirli Analizle İlgili Temel Kavramlar	2
1.2 Kesirli Türev ve İntegraller	4
2. SÖNÜM PROBLEMLERİ	12
2.1 Kullanılan Yöntem ve Teknikler	17
2.2 Kesirli Isı Denkleminin Özellikleri.....	19
2.3 Tekil Sınır Yayılımlı Kesirli Isı Denkleminin Özellikleri.....	23
3. SAYISAL YÖNTEM	27
3.1 Ayrık Kesirli Isı Denkleminin Özellikleri	32
3.2 Ayrık Kesirli Isı Denkleminin Sönüm Çözümleri	35
3.3 Ayrık Tekil Sınır Yayılımlı Kesirli Isı Denkleminin Özellikleri ..	38
3.4 Ayrık Tekil Sınır Yayılımlı Denklemin Sönüm Çözümleri	41
3.5 Yakınsaklık, Tutarlılık ve Kararlılık Analizi	44
3.6 Sayısal Sonuçlar	50
4. SONUÇ ve DEĞERLENDİRME	54
KAYNAKLAR.....	55
ÖZGEÇMİŞ	58

SİMGELER DİZİNİ

\sum	Toplam sembolü
$\Gamma(\cdot)$	Gamma fonksiyonu
$\beta(\cdot)$	Beta fonksiyonu
$E_{\alpha,\beta}(x)$	İki parametrelili Mittag Leffler fonksiyonu
$E_{\alpha}(x)$	Tek parametrelili Mittag Leffler fonksiyonu
C	Sürekli fonksiyonlar uzayı
T	Sönüm zamanı



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1	$\alpha = 0.4$ ve farklı L değerleri için $u(x, t)$ çözümleri	51
Şekil 3.2	$\alpha = 0.4, \alpha = 0.8$ değerleri için $u(x, t)$ çözümleri	52
Şekil 3.3	$M = 800, \alpha = 0.4$ ve farklı T zamanlarındaki $u(x, t)$ çözümleri . . .	52
Şekil 3.4	$\alpha = 0.4$ ve $\alpha = 0.8$ değerleri için farklı T zamanlarındaki $u(x, t)$ çözümleri	53



1. GİRİŞ

Kesirli analiz, klasik analizin tamsayı olmayan basamaktan kesirli türevlerinin ve integrallerinin bir uzantısıdır. Kesirli analiz, klasik analizin ilerlemesiyle eş zamanlı olarak ortaya çıkan matematiksel analizin hem eski hem de yeni sayılabilecek bir konusudur. 1695 yılında Leibniz ve L'Hospital arasındaki mektuplaşmalarla başlayan ve günümüzde de fizik, matematik, biyoloji ve mühendislik alanlarında oldukça geniş uygulama alanı ile kullanımı devam etmektedir. Klasik analiz kavramlarının doğadaki olguların matematiksel olarak modellenmesinde gerçeğe en yakın halde ifade edilebilmesinin kesirli analizle mümkün olduğu gerçeği Leibniz ve Newton'un diferensiyel hesaplama tekniğini buldukları tarihe dayanır. Bu tarihten sonra pek çok matematikçinin katkısıyla mühendislik, ekonomi bilimi, visko-elastisite, elektro analitik kimya, kontrol teori ve fizik problemleri, sönüm, kaos, yayılım ve dalga hareketleri, filtreleme ve tersleme, kontrolör tasarımı gibi konularda kesirli analiz ile ilgili çalışmalar hız kazanmıştır (Xu ve Wang 2018). Riemann, Liouville, Grünwald Leitnikov bu alandaki öncü matematiçilerden yalnızca birkaçıdır. Kesirli analizin klasik analizden farklı olarak birden fazla türev tanımı bulunmaktadır. Kesirli analizdeki bu çeşitlilik problemin türüne en uygun olanının kullanılması ve böylece problemin en iyi çözümünün elde edilmesine olanak sağlar. Kesirli türevlere ilişkin en çok kullanılan tanımlar başta Riemann- Liouville ve Caputo kesirli türevi olmak üzere Grünwald-Letnikov, Weyl, Riesz ve Marchaud kesirli türevleridir (Podlubny 1999).

Keyfi bir $[a, b]$ üzerinde tanımlanan bir f fonksiyonunun α keyfi bir reel sabit olmak üzere α .basamaktan türevini ${}_aD_t^\alpha f(t)$ ile göstereyim. Burada; $f(t)$ fonksiyonunun sol ve sağ türevleri ise sırasıyla ${}_aD_t^\alpha f(t)$ ve ${}_tD_b^\alpha f(t)$ notasyonları ile ifade edilebilir. Kesirli integral ise α nın negatif değerlerine karşılık gelir. O halde $f(t)$ fonksiyonunun $\beta > 0$ basamaktan kesirli integrali ${}_aD_t^{-\beta} f(t)$ ile gösterilebilir. Kesirli diferensiyel denklem, kesirli türevleri içeren denklem olarak, kesirli integral denklem ise kesirli integralleri içeren integral denklemi olarak tanımlanabilir. Kesirli basamaktan sistemler, kesirli diferensiyel denklem veya kesirli integral denklem veya bu denklemler,

lerin bir sistemi tarafından ifade edilen sistemlerdir. Burada; a ve b değerleri kesirli diferensiyel denklemin uç noktaları olarak kullanılır (Podlubny 1999).

1.1 Kesirli Analizle İlgili Temel Kavramlar

Tanım 1.1 (Gamma Fonksiyonu) Gamma fonksiyonu $\Gamma(\cdot)$ notasyonu ile gösterilir.

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \quad (1.1)$$

şeklinde tanımlanır (Podlubny 1999).

Gamma fonksiyonu $\Gamma(\cdot)$ aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x) = x!$, $\forall x \in \mathbb{N}$.
- $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$
- Gamma fonksiyonunun limit gösterimi aşağıdaki gibidir:

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)}$$

Tanım 1.2 (Beta Fonksiyonu) Beta fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanır (Podlubny, 1999):

$$\beta(z, \omega) = \int_0^1 \tau^{z-1} (1 - \tau)^{\omega-1} d\tau, \quad Re(z) > 0, \quad Re(\omega) > 0 \quad (1.2)$$

Beta fonksiyonu $\beta(\cdot)$ aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- $\beta(z, \omega) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(\omega)}{\Gamma(z + \omega)}$
- $\beta(z, \omega) = \beta(\omega, z)$
- $0 < Re(z) < 1$, ve $z \neq 0, \pm 1, \pm 2 \dots$ olmak üzere $\Gamma(z)\Gamma(1 - z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$ dir.

Tanım 1.3 (Bir Parametrelili Mittag-Leffler Fonksiyonu) $\alpha > 0$ olmak üzere kesirli analizde yaygın kullanım alanı olan ve üstel fonksiyonun bir parametrelili genellemesi

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad (1.3)$$

olarak tanımlanan fonksiyona Mittag-Leffler fonksiyonu denir (Podlubny 1999).

Burada $\alpha = 1$ durumunda

$$E_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z$$

ve $\alpha = 2$ durumunda

$$E_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(2k+1)} = \cosh(\sqrt{z})$$

olarak ifade edilir.

Tanım 1.4 (İki Parametrelili Mittag-Leffler Fonksiyonu) $\alpha, \beta > 0$ olmak üzere iki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (1.4)$$

olarak tanımlanır (Podlubny 1999).

Böylece;

$$\begin{aligned} E_{1,1}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z, \\ E_{1,2}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^z - 1}{z}, \\ E_{1,3}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+3)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+2)!} = \frac{1}{z^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+2}}{(k+2)!} = \frac{e^z - 1 - z}{z^2}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

ve (1.5) in genelleştirilmesi durumunda

$$E_{1,m}(z) = \frac{1}{z^{m-1}} \left\{ e^z - \sum_{k=0}^{m-2} \frac{z^k}{k!} \right\}$$

olur.

Özel durumlar olarak hiperbolik sinüs ve hiperbolik kosinüs için Mittag-Leffler fonksiyonu:

$$E_{2,1}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cosh(z), \quad (1.6)$$

$$E_{2,2}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k+1)!} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{\sinh(z)}{z}.$$

Buna göre;

$$E_{\alpha,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} = E_{\alpha}(z)$$

olarak elde edilir.

Tanım 1.5 (Wright Fonksiyonu) Wright fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır (Podlubny 1999):

$$W(z; \alpha, \beta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k! \Gamma(\alpha k + 1)}$$

Kesirli lineer kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerinde kullanılan Wright fonksiyonu iki parametrelili Mittag Leffler Fonksiyonu $E_{\alpha,\beta}(z)$ ile ilişkilidir.

1.2 Kesirli Türev ve İntegraller

Bu bölümde diferensiyel ve integral notasyonların genelleştirilmiş hali verilecektir. $\alpha > 0$ keyfi reel bir sabit olmak üzere bir $f(t)$ fonksiyonunun keyfi basamaktan α . türevi ${}_a D_t^{\alpha} f(t)$ ile gösterilecektir. Kesirli integral ise α nın negatif değerlerine karşılık gelir. Yani, $\beta (> 0)$. basamaktan kesirli integral ${}_a D_t^{-\beta} f(t)$ ile gösterilmektedir (Podlubny 1999).

Tanım 1.6 (Riemann-Liouville Kesirli İntegrali) Riemann-Liouville kesirli integrali

$${}_a \mathbf{D}_t^{-\beta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^t (t-s)^{\beta-1} f(s) ds \quad (1.7)$$

şeklinde tanımlanır (Podlubny 1999).

Tanım 1.7 (Riemann-Liouville Kesirli Türevleri) Sol ve sağ Riemann-Liouville kesirli türevleri aşağıdaki gibi tanımlanır:

$${}_a \mathbf{D}_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right)^n \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s) ds, \quad (1.8)$$

$${}_t \mathbf{D}_b^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{dt} \right)^n \int_t^b (s-t)^{n-\alpha-1} f(s) ds.$$

α nın tamsayı olması durumunda sol ve sağ Riemann-Liouville kesirli türevleri

$${}_a\mathbf{D}_t^\alpha = \left(\frac{d}{dt}\right)^\alpha \quad \text{ve} \quad {}_t\mathbf{D}_b^\alpha = \left(-\frac{d}{dt}\right)^\alpha$$

şeklinde tam sayı basamaklı türevlere dönüşecek şekilde tanımlanır (Podlubny 1999).

Tanım 1.8 (Grünwald-Letnikov Kesirli Türevleri) $f, [a, b] \subset \mathbb{R}$ üzerinde integrallenebilen bir fonksiyon ve $\alpha > 0$ olmak üzere α . basamaktan sol ve sağ Grünwald-Letnikov kesirli türevleri

$${}_aD_t^\alpha f(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^{-\alpha} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{\alpha}{r} f(t-rh), \quad (1.9)$$

$${}_tD_b^\alpha f(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=b-t}} h^{-\alpha} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{\alpha}{r} f(t-rh). \quad (1.10)$$

olarak tanımlanmaktadır (Podlubny 1999).

Tanım 1.9 (Caputo Kesirli Türevleri) $n-1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $f, [a, b] \subset \mathbb{R}$ üzerinde integrallenebilen bir fonksiyon olmak üzere α . basamaktan sol ve sağ Caputo kesirli türevleri

$${}_aD_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} \left(\frac{d}{ds}\right)^n f(s) ds, \quad (1.11)$$

$${}_tD_b^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b (s-t)^{n-\alpha-1} \left(-\frac{d}{ds}\right)^n f(s) ds.$$

şeklinde tanımlanır (Podlubny 1999).

Kesirli türevler ve integraller teorisinde, Caputo ve Riemann-Liouville yaklaşımları kıyaslandığında Riemann-Liouville kesirli türev tanımı, matematiğin uygulamalarında önemli bir rol oynamasına karşın Riemann-Liouville yaklaşımının problemlerin fiziksel yorumlanmasında yetersiz kaldığı görülmüştür.

Bu iki tipten yaklaşım arasındaki önemli farklar aşağıda verilmiştir. Buna göre;

- Riemann Liouville kesirli türevinin $t = a$ noktasındaki limit değerleri; b_1, b_2, \dots, b_n

keyfi sabitler olmak üzere

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow a} [{}_a \mathbf{D}_t^{\alpha-1} f(t)] &= b_1 \\ \lim_{t \rightarrow a} [{}_a \mathbf{D}_t^{\alpha-2} f(t)] &= b_2 \\ &\vdots \\ \lim_{t \rightarrow a} [{}_a \mathbf{D}_t^{\alpha-n} f(t)] &= b_n\end{aligned}$$

biçimindeki başlangıç koşulları oluşmaktadır. Bu tipteki başlangıç koşullarına sahip başlangıç değer problemlerinin matematiksel olarak çözümü elde edilebilir ancak oluşan başlangıç koşullarını fiziksel olarak yorumlamak mümkün olmayıp kullanışlı değildir. Bu durumu ortadan kaldırmak için Caputo kesirli yaklaşımı benimsenmiştir. Caputo yaklaşımının en temel avantajı, Caputo kesirli türevli diferansiyel denklemlerin tam sayı basamaktan türev yaklaşımları ile aynı formda başlangıç koşullarına sahip olmasıdır. Bu çalışma boyunca da Caputo kesirli türev yaklaşımı kullanılmaktadır.

- Riemann-Liouville ve Caputo türevlerinin Laplace dönüşümlerinin formülleri $a = 0$ ve $n - 1 \leq \alpha \leq n$ durumunda sırasıyla aşağıda verilmiştir:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \{ {}_0 \mathbf{D}_t^{\alpha} f(t) \} dt = s^{\alpha} F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s_0^k \mathbf{D}_t^{\alpha-k-1} f(t)_{t=0}, \quad n - 1 \leq \alpha < n$$

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \{ {}_0 D_t^{\alpha} f(t) \} dt = s^{\alpha} F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s_0^k f^{(k)}(0), \quad n - 1 < \alpha \leq n$$

Burada Caputo türevinin Laplace dönüşümü tamsayı basamaklı türevlerin başlangıç değerlerinin kullanımına izin vermektedir (Podlubny 1999).

- Riemann-Liouville ve Caputo tanımları arasındaki diğer önemli fark da sabitin türevidir. Sabit bir sayının Caputo türevi sıfırdır. Bir problemin fiziksel olarak yorumunun yapılabilmesi için sabitin kesirli türevinin sifra eşit olması gerekir. Ancak sonlu bir alt sınır değeri için Riemann-Liouville kesirli türevi sıfır değildir. C sabit bir sayı olmak üzere Riemann-Liouville kesirli türevi aşağıdaki şekilde tanımlanır (Podlubny 1999):

$${}_0 \mathbf{D}_t^{\alpha} C = \frac{C t^{-\alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)}$$

- Caputo kesirli türevinden yola çıkarak farz edelim ki; $0 \leq n - 1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}$ ve $f(t)$, $(n + 1)$ sürekli türe ve sahip olsun. Bu durumda;

$$\begin{aligned}
\lim_{\alpha \rightarrow n} {}_a D_t^\alpha f(t) &= \lim_{\alpha \rightarrow n} \left(\frac{f^{(n)}(a)(t-a)^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha} f^{(n+1)}(s) ds \right) \\
&= f^{(n)}(a) + \int_a^t f^{(n+1)}(s) ds \\
&= f^{(n)}(t), \quad n = 1, 2, \dots
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Sonuç göstermektedir ki Caputo kesirli türevi $\alpha \rightarrow n$ için n . basamaktan tamsayı basamaklı türe ve eşittir. Caputo yaklaşımının temel avantajı, Caputo türevli kesirli diferensiyel denklemler için tanımlanan başlangıç koşulları ile tamsayı basamaklı diferensiyel denklemler için tanımlanan başlangıç koşullarının aynı olmasıdır (Podlubny 1999).

- $n - 1 < \alpha < n$ durumunda Caputo ve Riemann-Liouville yaklaşımları sırası ile aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{aligned}
{}_a D_t^\alpha ({}_a D_t^m f(t)) &= {}_a D_t^{\alpha+m} f(t), \quad m = 0, 1, 2, \dots \\
{}_a \mathbf{D}_t^m ({}_a \mathbf{D}_t^\alpha f(t)) &= {}_a D_t^{\alpha+m} f(t), \quad m = 0, 1, 2, \dots
\end{aligned}$$

Yukarıdaki ifadelerde diferensiyel operatörlerin yer değiştirmesi bazı durumlar altında gerçekleşir:

$$\begin{aligned}
{}_a D_t^\alpha ({}_a D_t^m f(t)) &= {}_a D_t^m ({}_a D_t^\alpha f(t)) = {}_a D_t^{\alpha+m} f(t) \quad (1.12) \\
f^{(s)}(0) &= 0, \quad s = n, n+1, \dots, m; \quad (m = 0, 1, 2, \dots); \quad n-1 < \alpha < n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}_a \mathbf{D}_t^m ({}_a \mathbf{D}_t^\alpha f(t)) &= {}_a \mathbf{D}_t^\alpha ({}_a \mathbf{D}_t^m f(t)) = {}_a \mathbf{D}_t^{\alpha+m} f(t), \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (1.13) \\
f^{(s)}(0) &= 0, \quad s = 0, 1, \dots, n-1; \quad (m = 0, 1, 2, \dots); \quad n-1 < \alpha < n
\end{aligned}$$

Buradan Riemann-Liouville yaklaşımının tersine Caputo türevinde $f^{(s)}(0) = 0$, ($s = 0, 1, \dots, n-1$) değerlerinde bir kısıtlama olmadığı görülmektedir (Podlubny 1999).

Tanım 1.10 (Ardışık Kesirli Türevler) $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere n . basamaktan türevler için kullanılan $\frac{d^n}{dt^n}$ ifadesi tam sayılı türevler için aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} = \frac{d}{dt} \frac{d}{dt} \dots \frac{d}{dt} f(t)$$

Kesirli türevler için ise $\frac{d}{dt}$ notasyonunun α ; $0 \leq \alpha \leq 1$ olmak üzere D^α ile değiştirilmesi durumunda

$$D^{n\alpha} f(t) = \underbrace{D^\alpha D^\alpha \dots D^\alpha}_n f(t)$$

elde edilir. D^α , Rieman-Liouville, Caputo ve Grünwald-Letnikov türevleri için kullanıldığında

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$$

olmak üzere

$$D^\alpha f(t) = D^{\alpha_1} D^{\alpha_2} \dots D^{\alpha_n} f(t)$$

şeklinde tanımlanır. Buradaki türev notasyonu problemin türüne bağlı olarak istenilen kesirli türev tanımı yerine kullanılabilir. Ancak Riemann-Liouville ve Caputo yaklaşımlarının özel halleri sırasıyla

$${}_a \mathbf{D}_t^\alpha f(t) = \frac{d}{dt} \frac{d}{dt} \dots \frac{d}{dt} {}_a \mathbf{D}_t^{-(n-\alpha)} f(t), \quad n-1 \leq \alpha < n$$

$${}_a D_t^\alpha f(t) = {}_a D_t^{-(n-\alpha)} \frac{d}{dt} \frac{d}{dt} \dots \frac{d}{dt} f(t), \quad n-1 < \alpha \leq n$$

olarak ifade edilir. Yukarıdaki ifadede her iki yaklaşımdaki türev basamağı α olmasına rağmen $D_t^{-(n-\alpha)}$ ve $\frac{d}{dt}$ operatörlerinin sıralanışı farklı olması dolayısıyla türev özellikleri de değişmektedir (Podlubny 1999).

Teorem 1.1 (Genelleştirilmiş Ortalama Değer Teoremi) $0 < \alpha \leq 1$ için $f(t) \in C[a, b]$ ve $D_t^\alpha f(t) \in C(a, b]$ ise, o zaman

$$f(t) = f(a) + \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} D_t^\alpha f(\xi) (t - a)^\alpha, \quad a \leq \xi \leq t, \quad \forall t \in (a, b] \quad (1.14)$$

(Odibat ve Shawagfeh 2007).

Burada, $\alpha = 1$ durumunda, genelleştirilmiş ortalama değer teoremi, klasik ortalama değer teoremine indirgenir. Genelleştirilmiş Taylor formülünü Caputo anlamında sunmadan önce, aşağıdaki teoreme ihtiyacımız vardır.

Teorem 1.2 $0 < \alpha \leq 1$ için $D_t^{n\alpha} f(t)$ ve $D_t^{(n+1)\alpha} f(t) \in C(a, b]$ ise o zaman

$$J_t^{n\alpha} D_t^{n\alpha} f(t) - J_t^{(n+1)\alpha} D_t^{(n+1)\alpha} f(t) = \frac{(t-a)^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)} D_t^{n\alpha} f(a) \quad (1.15)$$

ve

$$D^{n\alpha} f(t) = \underbrace{D^\alpha D^\alpha \dots D^\alpha}_n f(t)$$

ardışık kesirli türevdir (Odibat ve Shawagfeh 2007).

Teorem 1.3 (Genelleştirilmiş Taylor Teoremi) $0 < \alpha \leq 1$ için $D_t^{k\alpha} f(t) \in C(a, b]$, $k = 0, 1, 2, \dots, n+1$ ise o zaman

$$f(t) = \sum_{i=0}^n \frac{(t-a)^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha+1)} D_t^{i\alpha} f(a) + \frac{D_t^{(n+1)\alpha} f(\xi)}{\Gamma((n+1)\alpha+1)} (t-a)^{(n+1)\alpha}, \quad a \leq \xi \leq t, \quad \forall t \in (a, b] \quad (1.16)$$

olup burada

$$D_t^{n\alpha} f(t) = D_t^\alpha D_t^\alpha \dots D_t^\alpha f(t)$$

ardışık kesirli türevdir (Odibat ve Shawagfeh 2007).

İspat. (1.15) kullanılarak

$$\sum_{i=0}^n J_t^{i\alpha} D_t^{i\alpha} f(t) - J_t^{(i+1)\alpha} D_t^{(i+1)\alpha} f(t) = \sum_{i=0}^n \frac{(t-a)^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha+1)} D_t^{i\alpha} f(a).$$

elde edilir. Buradan

$$f(t) - \left(J_t^{(n+1)\alpha} D_t^{(n+1)\alpha} f \right) (t) = \sum_{i=0}^n \frac{(t-a)^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha+1)} D_t^{i\alpha} f(a). \quad (1.17)$$

İntegral için ortalama değer teoremini kullanarak

$$\begin{aligned} \left(J_t^{(n+1)\alpha} D_t^{(n+1)\alpha} f \right) (t) &= \frac{1}{\Gamma((n+1)\alpha+1)} \int_a^t (t-s)^{(n+1)\alpha} D_t^{(n+1)\alpha} f(s) ds \\ &= \frac{D_t^{(n+1)\alpha} f(\xi)}{\Gamma((n+1)\alpha+1)} \int_a^t (t-s)^{(n+1)\alpha} ds, \end{aligned}$$

elde edilir ve sonuç olarak,

$$\left(J_t^{(n+1)\alpha} D_t^{(n+1)\alpha} f \right) (t) = \frac{D_t^{(n+1)\alpha} f(\xi)}{\Gamma((n+1)\alpha+1)} (t-s)^{(n+1)\alpha} \quad (1.18)$$

bulunur. (1.17) ve (1.18) kullanılarak (1.16) elde edilir. ■

$\alpha = 1$ durumunda, Caputo genelleştirilmiş Taylor formülü (1.16) klasik Taylor formülüne indirgenir. Genelleştirilmiş Taylor serisi için, yakınsama yarıçapı R olmak üzere

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(t-a)^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha+1)} D_t^{i\alpha} f(a) \quad (1.19)$$

$$R = |t-a|^\alpha \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\Gamma(n\alpha+1)}{\Gamma((n+1)\alpha+1)} \cdot \frac{D_t^{(n+1)\alpha} f(a)}{D_t^{n\alpha} f(a)} \right| \quad (1.20)$$

yazılır.

Teorem 1.4 (Varlık ve Teklik Teoremleri) Kesirli basamaktan diferensiyel denklemler için başlangıç değer problemlerinin çözümlerinin varlık ve tekliği için aşağıdaki teoremler verilebilir (Podlubny 1999):

Aşağıdaki başlangıç değer problemini düşünelim:

$${}_0D_t^{\alpha_n} y(t) = \sum_{j=0}^n p_j(t) {}_0D_t^{\alpha_{n-j}} y(t) + p_n(t) y(t) = f(t), \quad 0 < t < T < \infty \quad (1.21)$$

$$[{}_0D_t^{\alpha_{k-1}} y(t)]_{t=0} = b_k, \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Burada

$$D_t^{\alpha_k} = {}_aD_t^{\alpha_k} \cdot {}_aD_t^{\alpha_{k-1}} \cdots {}_aD_t^{\alpha_1}$$

$${}_aD_t^{\alpha_{k-1}} = {}_aD_t^{\alpha_{k-1}} \cdot {}_aD_t^{\alpha_{k-2}} \cdots {}_aD_t^{\alpha_1}$$

$$\alpha_k = \sum_{j=0}^n \alpha_j, \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad 0 < \alpha_j \leq 1, \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

ve $f(t) \in L_1(0, T)$ dır. Yani $\int_0^T |f(t)| dt < \infty$.

Teorem 1.5 $f(t) \in L_1(0, T)$ ise

$${}_0D_t^{\alpha_n} y(t) = f(t)$$

denklemi (1.21) başlangıç değer problemini sağlayan $y(t) \in L_1(0, T)$ tek çözümüne sahiptir (Podlubny 1999).

Teorem 1.6 Eğer $f(t) \in L_1(0, T)$ ve $p_j(t)$, $(j = 1, 2, \dots, n)$ ler $[0, T]$ aralığında sürekli fonksiyonlar ise (1.21) başlangıç değer problemi bir tek $y(t) \in L_1(0, T)$ çözümüne sahiptir (Podlubny 1999).

Başlangıç değer problemlerinde $y(t)$ çözümleri ya sıfır ya da $y(t)$ nin tam sayı basamaklı türevleri şeklindedir. Bunun sebepleri arasında aşağıdaki hususlar gösterilebilir (Podlubny 1999):

- Başlangıç koşullarının sıfır ya da tamsayı basamaklı türevler ile belirlenmesi $y(t)$ çözümünün başlangıç zamanında gösterdiği davranışın fiziksel olarak yorumlanabilmesi imkânını sağlar.
- Kesirli basamaklı türevli başlangıç koşulları yerine tam sayı basamaklı türevli başlangıç koşulları nümerik yaklaşımlarda hesaplamaları kolaylaştırır.
- Başlangıç değer probleminde; kesirli analizde çeşitlilik gösteren türev yaklaşımlarında kesirli basamaktan türevli başlangıç koşulları yerine tam sayı basamaktan türevli başlangıç koşulları çözümün yanlış yorumlanabilmesi durumunu ortadan kaldırır.

2. SÖNÜM PROBLEMLERİ

Yayılm, doğada yaygın olarak görünen bir fiziksel olgudur. Mikro ölçekte, yayılım tam karışmaya yol açan atomların, bir sıvıda yüzen veya asılı parçacık ve moleküllerin rastlantısal dağılımı olarak tanımlanan Brownian hareketinden kaynaklanır. Makro düzeyde ise, difüzyonu tanımlayan ünlü Fick yasaları veya ısı iletim yasası olarak bilinen Fourier yasaları ile tanımlanır (Mehrer 2007).

Matematiksel olarak, kaynaksız ve taşınımsız tek boyutlu lineer yayılım modeli parabolik denklem olan $u_t = c^2 u_{xx}$ tarafından yönetilir. Burada u sıcaklık veya derişim vb. olarak anlaşılabilir ve c yayılım katsayısıdır. Bu model lineerdir ve kolayca çözülebilir. Ancak denkleme bir kaynak eklendiğinde problem olağandışı ve karmaşık olabilir. Dahası, tamsayı dereceli yayılım denklemleri kapsamlı bir şekilde ele alınmıştır ve literatürde verimli sonuçları vardır. Ancak, kesirli yayılım denklemleri için bu sorunun cevabı henüz başlangıç aşamasındadır. Bu durumun birkaç olası nedeni vardır. Birincisi zaman-kesirli yayılım denklemleriyle ilgili mevcut referanslar, fiziksel modellemeye çok daha fazla dikkat edildiğini, kesirli diferensiyel denklemlerin soyut matematiksel özelliklerini incelemek için nispeten az sayıda çaba harcadığını göstermektedir. 1975'te Japon uygulamalı fizikçi Kawarada aşağıdaki bir boyutlu başlangıç-sınır değer problemini ele almıştır. Kawarada'nın makalesinde, tekil bir kaynak fonksiyonuna sahip basit yayılım denklemi şu şekilde tanımlanmıştır (Kawarada 1975):

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + \frac{1}{1-u}, \quad 0 \leq x \leq L, \quad 0 \leq t < T, \\ u(0, t) &= u(L, t) = 0, \quad 0 \leq t < T \\ u(x, 0) &= 0, \quad 0 \leq x \leq L. \end{aligned} \tag{2.1}$$

L , x yönündeki uzunluğu ifade eden pozitif bir reel bir sayıdır. (2.1) modelinde u çözümünün sonlu bir T , $T < \infty$ zamanında bir (1) ulaşması durumunda u nun t zaman değişkenine göre türevi sonsuza gider. Bu olaya sönüm denilmektedir. Yani

$$\lim_{t \rightarrow T^-} \sup_{x \in [0, L]} |u_t(x, t)| = \infty \tag{2.2}$$

olarak ifade edilir. Burada, T sönüm zamanı olarak ifade edilir ve model (2.1) tarafından ilk olarak 1975 yılında tanıtılmış ve doğrusal olmayan bir ısı denkleminin çözüm kavramını temsil etmektedir. Kawarada bu çalışmasından aşağıdaki sonuçları elde etmiştir:

(S1) Eğer $L \geq 2\sqrt{2}$, ise o zaman $\lim_{t \rightarrow T^-} u(L/2, t) \rightarrow 1$.

(S2) Eğer $\lim_{t \rightarrow T^-} u(L/2, t) \rightarrow 1$ ise o zaman $\lim_{t \rightarrow T^-} u_t(x, t) = \infty$.

(S2) oluştuğunda, Kawarada u nun sonlu zamanda sönüğünü söyler. Bununla birlikte, bazı araştırmacılar sönüm fenomeninin görünümünü teşhis etmek için (S1) kullanmayı tercih etmektedir. Bu sonuç, Kawarada'nın kriterlerinden daha zayıftır. Burada, son yıllarda kapsamlı bir şekilde incelenen parabolik denklemler için patlama probleminin, esas olarak sonlu zamanda sonsuz hale gelen parabolik denklemlerin çözümleriyle ilgili olduğuna dikkat çekiyoruz. Dikkat edilirse (S1) durumunun gerçekleşmesi durumunda ısı denkleminin kaynağında patlama oluşmaktadır. Bu durum; Kawarada tarafından sönüm olarak tanımlanmıştır. Yani, belirli bir zamanda eğer kaynak fonksiyonu sonsuza giderse veya zaman değişkenine göre türev sonsuza giderse çözüm sönümlüdür denir. Problem (2.1)'de Kawarada tarafından tekil kaynağa sahip standart tek boyutlu bir yayılım modeli çalışılmıştır. Zamansal ve uzaysal türevler sırasıyla geleneksel birinci ve ikinci basamaktan türevlerdir.

Uzun yıllar çok sayıda matematikçi Kawarada'nın çalışmış olduğu problem üzerinde çalışmışlar, farklı yöntemler geliştirmiş ve literatüre kazandırmışlardır. Sönüm problemleri üzerinde hem analitik hem de nümerik yöntemler geliştirerek çözümlerin sönüm davranışlarını incelemişlerdir. Walter (1976)

$$\begin{aligned}
 u_t - u_{xx} &= f(u), \quad x \in (-a, a), \quad t > 0 \\
 u(-a, t) &= u(a, t) = 0, \quad t > 0 \\
 u(x, 0) &= 0, \quad x \in [-a, a]
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

problemi üzerinde, Acker ve Walter (1976, 1978)

$$u_t - u_{xx} = g(u, u_x), x \in (-a, a), t > 0 \quad (2.4)$$

$$u(-a, t) = u(a, t) = 0, t > 0$$

$$u(x, 0) = 0, x \in [-a, a]$$

problemi üzerinde çalışarak problem (2.1) için elde edilen sonuçları genelleştirmişlerdir. Guo (1990) çalışmasında sönm probleminin sınırlarını simetrik bir aralıkta incelemiştir:

$$u_t - u_{xx} = \epsilon(1 - u)^{-\beta}, x \in (-1, 1), t > 0 \quad (2.5)$$

$$u(-1, t) = u(1, t) = 0, t > 0$$

$$u(x, 0) = 0, u_0 < 1, x \in [-1, 1].$$

Chan ve Özalp (1995)

$$u_t - u_{xx} = f(u), x \in (0, a), t > 0 \quad (2.6)$$

$$u(0, t) = u(a, t) = -ku(a, t), t > 0$$

$$u(x, 0) = \phi(x), x \in [0, a]$$

problemini incelemiştir. Burada, $k > 0$, ve pozitif c sabitleri için $f(u) \in C^2[0, c]$ öyle ki $\lim_{u \rightarrow c^-} f(u) = \infty$, $f(0) > 0$, $f'(u) > 0$ ve $f''(u) > 0$, $x \in [0, a]$ da $\phi'' + f(\phi) \geq 0$ dir. Sönm noktasının yerini göstermişlerdir. Sınır noktaları hariç sonlu sayıda sönm noktasının varlığını ve sönm zamanında sönm noktasında u_t nin patladığını göstermişlerdir. Buna karşılık; literatürde denklemin sınırlarında iki tekil ısı kaynağına sahip olması durumu daha az incelenmiştir. Fila ve Levine (1993) çalışmasında tekilliğin sınır koşullarında oluşması durumu üzerinde çalışmışlardır:

$$u_t = u_{xx}, x \in (0, 1), t > 0 \quad (2.7)$$

$$u_x(0, t) = 0, u_x(1, t) = -u^{-\beta}(1, t), t > 0$$

$$u(x, 0) = u_0(x), u_0 > 0, x \in [0, 1].$$

T sönüm zamanı olmak üzere sönüm tanımı olarak

$$\lim_{t \rightarrow T^-} \min_{x \in [0,1]} u(x, t) \rightarrow 0$$

almışlardır.

Chan ve Yuen (2001)

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, x \in (0, a), t > 0 \\ u_x(0, t) &= (1 - u(0, t))^{-p}, u_x(a, t) = (1 - u(a, t))^{-q}, t > 0 \\ u(x, 0) &= u_0(x), 0 \leq u_0 < 1 \end{aligned} \tag{2.8}$$

problemi için, u_0 bir alt çözüm olduğunda sonlu bir T zamanında $x = a$ nın tek sönüm noktası olduğunu ve sönüm zamanında u_t nin patladığını göstermişlerdir.

Standart tek boyutlu yayılım modeli için yukarıdaki örnekler çoğaltılabilir (Deng ve Xu 1999, Salin 2003, Liang vd 2007, Lin ve Wang 1999, Zhi ve Mu 2007).

Son zamanlarda kesirli analiz kavramıyla birlikte kesirli türev ve kesirli integral konusu kapsamlı bir şekilde çalışılmaktadır. Günümüzde, kesirli basamaktan türev ve integral içeren denklemler çok sayıda mühendislik problemlerinde uygulanmıştır.

Mühendislik alanları, fiziksel süreçler, katı hal mekaniği, sinir uyarılarının iletimi, insan davranışı, akustik plazma, dalga yayılımı vb. alanlarda uygulamaları kapsamlı bir şekilde ele alınmıştır (Hilfer 2000, Kilbas 2006, Sabatier vd. 2007, Atanackovic vd. 2014, Li ve Zeng 2015, Kumar vd. 2018, Singh vd. 2018, Kumar vd. 2017, Singh vd. 2017, Baleanu vd. 2017, Baleanu vd. 2018).

Sönümlenme konusunda ise tekil ısı kaynaklı kesirli yayılım denklemi üzerine yapılan çalışmalar çok nadirdir.

Klasik yayılım denklemlerinin genellemesi olarak bilinen kesirli yayılım denklemleri soyut matematiksel özellikler yerine fiziksel uygulamanın araştırılması nedeniyle daha fazla dikkat çekmektedir.

Ayrıca, konunun çalışılmasını sınırlayan bir diğer husus, tekil ısı kaynaklı kesirli yayılım denklemlerinin çözümünün elde edilmesi zordur (Xu 2018, Xu ve Zheng 2017). Analitik çözüm için birçok teorik yöntem başarısız olabilmekte ve aynı zamanda geleneksel sayısal yöntemlerin uygulanmasında zorluklar çıkabilmektedir.

Çünkü, kullanılacak sayısal yöntemler için iterasyonlarda daha büyük depolama alanına ihtiyaç oluşmaktadır. İnsanların kesirli türev modellemesi için uygun bir prototip bulması da pek olası değildir.

Örneğin hız, klasik türevde

mesafenin birinci türevine karşılık gelmekteyken kesirli türevde, şu anda fiziksel bir niceliğin karşılığını bulmak hala zor bir iştir. Kesirli yayılım denklemlerinin, klasik yayılım modellerinden daha iyi hafızalı yayılım süreçlerini tanımlayabildiği doğrulanmıştır (Metzler ve Klafter 2000, Sun vd. 2014). Sonuç olarak, Kawarada'nın çalışmasından yola çıkılarak aşağıdaki zaman kesirli yayılım denklemleri üzerinde çalışacağız. İlk problem olarak parabolik denklemin tanımlı olduğu bölgenin içinde bir ısı kaynağına sahip olan ve sınırlarda akışın olmadığı aşağıdaki parabolik problemi ele alacağız:

$$\begin{aligned}
D_t^\alpha u &= u_{xx} + \frac{1}{1-u}, \quad 0 \leq x \leq L, \quad 0 \leq t < T, \\
u_x(0, t) &= u_x(L, t) = 0, \quad 0 \leq t < T, \\
u(x, 0) &= u_0(x), \quad 0 \leq x \leq L.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

İkinci problem olarak iki farklı tip tekil ısı kaynağına sahip (biri parabolik denklemin tanımlı olduğu bölgenin içinde ve diğeri parabolik bölgenin sınırında) aşağıdaki parabolik problemi ele alacağız:

$$\begin{aligned}
D_t^\alpha u &= u_{xx} + \frac{1}{1-u}, \quad 0 < x < L, \quad 0 < t < T, \\
u_x(0, t) &= 0, \quad u_x(L, t) = -u^{-1}(L, t), \quad 0 < t < T, \\
u(x, 0) &= u_0(x), \quad 0 \leq x \leq L.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Bu çalışmanın katkıları üç açıdan özetlenebilir. Her şeyden önce, son zamanlardaki difüzyonu tanımlayan kesirli Fick yasasının ilerlemesi nedeniyle klasik Kawarada denklemini zamansal kesirli Kawarada modeline genişletiyoruz. Isı veya enerjinin yayılımının, ısı veya enerji konsantrasyonunun kesirli türevi (bazen kesirli gradyan olarak adlandırılır) ile orantılı olduğu belirtilir. Pratik olarak, genellikle yanma işleminin ara aşamaları başlangıç durumuna bağlı olabilen karmaşık fiziksel ve kimyasal reaksiyonlar içerir. Bu nedenle, kesirli türev modeli, bu tür bir olguyu tanımlamak için iyi bir seçimdir. İkincisi, bu modelin karmaşık yanma sürecini modellemede daha fazla avantajı vardır ve sadece sönmü olgusu yanmadan kaynaklanan doğal özellikleri korumakla kalmaz, aynı zamanda kesirli türevin basamağının sıfır ile bir

arasında bir değerde değışmesi ile denklemin parametrelerine bağlı olarak daha ilginç dinamikler sunar.

Bu çalışmada, önerilen zaman kesirli yayılım denklemlerini çözmek için bir sonlu fark şeması uygulanacaktır. Sayısal simülasyonlar, farklı koşullar altında fiziksel yanma süreçlerini veren modelin sönüm özelliğini makul bir şekilde yansıtmaktadır. Sayısal metodun kararlılığı, tutarlılığı ve yakınsaklığı ispatlanacaktır. Buna göre çalışmanın geri kalanı aşağıdaki gibi düzenlenmiştir: Bu bölümde, zaman kesirli yayılım denkleminin temel özellikleri sunulmaktadır ve belirli koşullar altında problem (2.1) e karşılık gelen Kawarada denklemindekine benzer sönüm fenomeni sergilediği ispatlanacaktır. Son bölümde ise elde edilen sonuçların sayısal ve grafiksel olarak karşılaştırıldığı bazı simülasyonlar verilmiştir.

2.1 Kullanılan Yöntem ve Teknikler

Bu bölümde çalışmada kullanılacak yöntemler ve lemmalar verilmektedir. Kısmi türevli denklemlerde maksimum ve minimum problemleri önemli bir yer tutar. Diferensiyel denklemlerin çözüm karakteri maksimum prensipleri yardımıyla tahmin edilebilir. Bu nedenle, maksimum prensipleri çözümlerin açık ifadeleri bilinmemesinin diferensiyel denklemlerin incelenmesinde ve çözümleri hakkında bilgi vermesi nedeniyle sıkça başvurulan yöntemlerden biridir. Denklemlerin veya verilen sınır şartlarının durumlarına göre problemin çözümünde maksimum ve minimum değerlerinin önemi büyüktür. Eliptik ve parabolik tipten kısmi türevli denklemlerin genel incelemelerinde, fiziksel olarak gerçekleşen ısı yayılım problemleri, patlama ve sönüm problemlerinde çözüm davranışları çoğu zaman maksimum prensibi yardımıyla incelenir ve literatürde çok sayıda çalışma yer almaktadır. Maksimum prensipleri ve Hopf lemması aşağıda açıklanmıştır (Protter ve Weinberger 1967, Chan ve Liu 2016).

Tanım 2.1 Bir (x, t) noktasında eğer $a(x, t) > 0$ ise (reaksiyon-yayılım denklemini sağlayacak şekilde), o zaman

$$L[u] \equiv a(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t}$$

operatörüne paraboliktir denir. Eğer, xt -düzleminin bir D bölgesindeki her bir (x, t)

elemanı için

$$a(x, t) > \mu$$

olacak şekilde bir $\mu > 0$ sabiti var ise, L ye D bölgesinde düzgün paraboliktir denir.

Teorem 2.1 $E = (0, L) \times (0, t)$, $S_1 = \{x = 0, 0 \leq t \leq T\}$, $S_2 = \{t = 0, 0 \leq x \leq L\}$ ve $S_3 = \{x = L, 0 \leq t \leq T\}$ olsun. Bir dikdörtgensel E bölgesinde $u(x, t)$ fonksiyonu

$$L[u] = a(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} \geq 0$$

eşitsizliğini ($a(x, t) \equiv 1$, $b(x, t) \equiv 0$ için) sağlasın. Bu durumda u nun maksimum değeri $E \cup \partial E$ kapalı bölgesinin S_1 , S_2 ya da S_3 kenarlarından birinde olmalıdır.

Lemma 2.1 $u(x, t)$ fonksiyonu, xt -düzleminin bir E bölgesinde

$$L[u] = a(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t} \geq 0$$

düzgün parabolik eşitsizliğinin bir çözümü ve $a(x, t)$, $b(x, t)$ sınırlı olsun. K bir disk olsun öyle ki K nin ∂K sınırı E bölgesinin içinde olsun. M , u nun maksimumu olmak üzere E bölgesinde, K nin içinde, $u < M$, K nin sınırındaki bazı p noktalarında $u = M$ olsun. O taktirde p noktası K ya teğet olup, x -eksenine paraleldir. (Yani, p noktası K diskinde ya en alt ya da en üst noktadır.)

Lemma 2.2 Kabul edelim ki xt -düzleminin bir E bölgesinde $u(x, t)$ fonksiyonu, bir önceki lemmadaki L operatörü için $L[u] \geq 0$ eşitsizliğini sağlasın, ve E nin bir (x_0, t_0) iç noktasında $u < M$ ve E nin tamamında $u \leq M$ olsun. Eğer I , (x_0, t_0) noktasını kapsayan yatay bir yol ise o taktirde I üzerinde $u < M$ dir.

Uyarı 2.1 Bir önceki lemmadaki bilgiye göre bölge içerisindeki bir doğru üzerinde $u \equiv M$ olacak şekilde bir tek nokta bulunabiliyorsa, o taktirde bu doğru üzerindeki her noktada $u \equiv M$ dir.

Lemma 2.3 xt -düzleminin bir E bölgesinde $u(x, t)$ fonksiyonu $L[u] \geq 0$ eşitsizliğini sağlasın. $t_0 < t < t_1$ şeridi boyunca E nin bir kısmında $u < M$ olsun. Buna göre, E 'nin içinde kalan $t = t_1$ şeridinin bir kısmında $u \equiv M$ dir.

Teorem 2.2 xt -düzleminin bir E bölgesinde $u(x, t)$ fonksiyonu

$$L[u] = a(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t} \geq 0$$

düzgün parabolik eşitsizliğinin bir çözümü ve $a(x, t)$, $b(x, t)$ sınırlı olsun. Eğer E nin bir (x_1, t_1) iç noktasında $u(x, t)$ fonksiyonu M maksimum değerine ulaşıyor ve E de (x_1, t_0) noktasını içeren bir $x = x_1$, $t_0 < t < t_1$ dikey şeriti var ise, o takdirde E deki her bir $t = t_0$ doğru parçası boyunca $u \equiv M$ dir.

Lemma 2.4 (Hopf Lemması) xt -düzleminin bir E bölgesinde $u(x, t)$ fonksiyonu

$$L[u] = a(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t} \geq 0$$

düzgün parabolik eşitsizliğinin bir çözümü ve $a(x, t)$, $b(x, t)$ sınırlı olsun. P , ∂E sınırında u nun maksimuma ulaştığı nokta ve P noktasından ∂E ye çizilen normal, t eksenine paralel olmasın. E nin içinde p noktasında ∂E ye teğet bir çember çizilebilsin ve bu bölgede $u < M$ olsun. Eğer E den dış yönlü türevi $\frac{\partial}{\partial v}$ mevcut ise, o takdirde P noktasında $\frac{\partial u}{\partial v} > 0$ dir.

Teorem 2.3 Kabul edelim ki, bir E bölgesinde yukarıdaki teoremin hipotezleri sağlansın, E de $h \leq 0$ ve $[L + h](u) \geq 0$ olsun. Eğer, E nin bir (x_1, t_1) iç noktasında $u(x, t)$ fonksiyonu M maksimum değerine ulaşıyor ve eğer $M \geq 0$ ise, teoremin sonuçları sağlanır. Ayrıca, eğer bir P sınır noktasında $M \geq 0$ ise o zaman P noktasında bir önceki Lemma 2.4 ün sonuçları da sağlanır.

2.2 Kesirli Isı Denkleminin Özellikleri

Bu bölümde bazı teorik sonuçlar verilecektir.

Lemma 2.5 $u(x, t)$ fonksiyonu problem (2.9) un bir çözümü ve $(0, T)$ en geniş zaman aralığı olsun. Eğer $u(x, 0) = u_0(x) = u_0 > 0$ ise o zaman $\Omega = [0, L] \times [0, T)$ bölgesinde $u(x, t) > 0$ dir (Xu ve Wang 2018).

İspat. $U(x, t)$ fonksiyonu $u(x, t)$ fonksiyonunun bir genişlemesi olsun. $U(x, t)$ aşağıdaki gibi yazılır:

$$U(x, t) = \begin{cases} u(x, t), & (x, t) \in \Omega \\ 0, & (x, t) \in \mathbb{R}^2 - \Omega \end{cases}$$

o halde problem (2.9)

$$\begin{cases} \frac{\partial^\alpha U}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + F(U), & (x, t) \in \mathbb{R}^2 \\ U(x, 0) = U_0 \geq 0, & -\infty < x < \infty \end{cases} \quad (2.11)$$

olarak yazılır. Problem (2.11)'de kaynak fonksiyonu olarak tanımlanan $F(U)$, $f(u)$ fonksiyonunun genişlemesi olarak tanımlanırsa:

$$F(U) = \begin{cases} f(U), & (x, t) \in \Omega \\ f(U) - 1, & (x, t) \in \mathbb{R}^2 - \Omega \end{cases}$$

(2.11) ifadesinin her iki tarafına Fourier dönüşümü uygulayarak

$$\begin{cases} (D_t^\alpha \bar{U})(\xi, t) = -\xi^2 \bar{U} + \bar{F}(\bar{U}(\xi, t)) \\ \bar{U}(\xi, 0) = \bar{U}(0) \end{cases}$$

elde edilir. Buradan çözüm şu şekilde ifade edilir;

$$\bar{U}(\xi, t) = \bar{U}(0) E_\alpha [(-\xi^2)t^\alpha] + \int_0^t (t-s)^{-\alpha} E_{\alpha, \alpha} [-\xi^2(t-s)^{-\alpha}] \bar{F}(\bar{U}(\xi, s)) ds.$$

E_α ve $E_{\alpha, \alpha}$ (1.3) ve (1.4)'de tanımlanan Mittag Leffler fonksiyonlarıdır. Fourier dönüşümü ve Mittag-Leffler fonksiyonunun pozitifliğine göre, Ω 'da $u(x, t) > 0$ olduğu sonucuna varılır. ■

Teorem 2.4 $g \in C(0, T]$, $g'(t)$, $t \in (0, T]$ 'da sürekli bir fonksiyon ve $\tau = t_0$ noktasında maksimum değerine ulaşıyor ise $D_t^\alpha g(t_0) \geq 0$ 'dır (Luchko 2009).

İspat. İlk olarak aşağıdaki gibi bir yardımcı fonksiyon w ele alalım:

$$w(\tau) = g(t_0) - g(\tau), \quad \tau \in [0, T].$$

$w(\tau) \geq 0$, $\tau \in [0, T]$ sağlanır. g fonksiyonunun $[0, T]$ aralığındaki maksimum değeri $\tau = t_0$ noktasında ise yukarıdaki eşitlikte D_t^α türevi alındığında

$$D_t^\alpha w(t) = D_t^\alpha g(t_0) - D_t^\alpha g(t) \quad (2.12)$$

$$D_t^\alpha w(t) = -D_t^\alpha g(t), \quad t \in [0, T]$$

elde edilir. Burada, Caputo kesirli türevi için sabitin türevi sıfırdır. $w \in C(0, T]$ olduğundan

$$|w(\tau)| = |g(t_0) - g(\tau)| \quad (2.13)$$

$$|w(\tau)| \leq C_\varepsilon |t_0 - \tau|, \quad \tau \in [\varepsilon, T], \quad 0 < \varepsilon < T.$$

olarak ifade edilir. Caputo kesirli türevin tanımı kullanılarak

$$\begin{aligned}
D_t^\alpha w(t_0) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{t_0} (t_0 - \tau)^{-\alpha} w'(\tau) d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\varepsilon (t_0 - \tau)^{-\alpha} w'(\tau) d\tau + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_\varepsilon^{t_0} (t_0 - \tau)^{-\alpha} w'(\tau) d\tau \\
&= I_1 + I_2
\end{aligned}$$

ε , $0 < \varepsilon < t_0$ yazılır. $g \in C_t^1(0, T]$ ve $w \in C_t^1(0, T]$ ise $w' \in L(0, T)$ 'dir. $L(0, T)$; $(0, T)$ 'de Lebesgue integrallenebilir fonksiyonlar kümesidir. Buradan

$$\forall \delta > 0, \exists \varepsilon > 0 \text{ için } |I_1| \leq \delta. \quad (2.14)$$

İkinci integral I_2 için kısmi integrasyon uygulanırsa, (2.13) yardımıyla aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{(t_0 - \tau)^{-\alpha} w(\tau)}{\Gamma(1-\alpha)} \Big|_\varepsilon^{t_0} + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_\varepsilon^{t_0} \alpha (t_0 - \tau)^{-\alpha-1} w(\tau) d\tau \\
&= -\frac{(t_0 - \varepsilon)^{-\alpha} w(\varepsilon)}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_\varepsilon^{t_0} \alpha (t_0 - \tau)^{-\alpha-1} w(\tau) d\tau.
\end{aligned}$$

$\Gamma(-\alpha) < 0$, $0 < \alpha < 1$ gerçeğinden yola çıkılarak $I_2 \leq 0$ olduğu görülür ve böylece (2.12) ve (2.14) ifadelerinden teoremin ispatı tamamlanır. ■

Problem (2.9) için $T < \infty$ olmak üzere aşağıdaki parabolik denklemi düşünelim:

$$u_t^\alpha = u_{xx} + \frac{1}{1-u}, \quad 0 \leq x \leq L, \quad 0 \leq t < T$$

sınır koşulları

$$u_x(0, t) = 0 = u_x(L, t), \quad 0 \leq t < T$$

ve başlangıç koşulu

$$u(x, 0) = u_0(x) < 1, \quad 0 \leq x \leq L$$

olsun. Başlangıç koşulu u_0 düzgün pozitif bir fonksiyon olmak üzere aşağıdaki uyumluluk şartları sağlanır:

$$u_0'(0) = 0 = u_0'(L).$$

Amacımız, problem (2.9) un sönüm davranışını hem teorik olarak hem de nümerik olarak incelemektir. Problem (2.9) için ilk olarak sönüm tanımını verelim:

Tanım 2.2 Sonlu bir T zamanı için problem (2.9) un bir $u(x, t)$ çözümü vardır öyle ki

$$\lim_{t \rightarrow T^-} \max \{u(x, t) : 0 \leq x \leq L\} \rightarrow 1$$

oluyorsa problem (2.9) a sönüm problemi denir. Sönüm zamanı T ile ifade edilir (Kawarada 1975).

Teorem 2.5 Sonlu bir T zamanı için (2.9) un bir $u(x, t)$ çözümü vardır öyle ki

$$\lim_{t \rightarrow T^-} |u(x, t)| = 1$$

sağlamyorsa Ω bölgesinde u_t patlar.

İspat. $Q = u_t^\alpha - \delta f$; $\delta > 0$ ve $f = (1 - u)^{-1}$ olarak alalım. Buradan

$$Q_t^\alpha = u_{tt}^\alpha - \delta f' u_t^\alpha, \quad Q_x = (u_t^\alpha)_x - \delta f' u_x$$

ve

$$Q_{xx} = (u_t^\alpha)_{xx} - \delta(f'' u_x^2 + f' u_{xx}).$$

ifadesi elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} Q_t^\alpha - Q_{xx} &= u_{tt}^\alpha - \delta f' u_t^\alpha - (u_t^\alpha)_{xx} + \delta f'' u_x^2 + \delta f' u_{xx} \\ &= D_t^\alpha(u_t^\alpha - u_{xx}) - \delta f'(u_t^\alpha - u_{xx}) + \delta f'' u_x^2 \\ &= D_t^\alpha(f) - \delta f' f + \delta f'' u_x^2 \\ &= f' u_t^\alpha - \delta f' f + \delta f'' u_x^2 \\ &= f'(u_t^\alpha - \delta f) + \delta f'' u_x^2 \\ Q_t^\alpha - Q_{xx} &= f' Q + \delta f'' u_x^2 \\ Q_t^\alpha - Q_{xx} - f' Q &= \delta f'' u_x^2 \geq 0, \quad \delta > 0 \end{aligned}$$

olur. Teorem 2.4 den $u_t^\alpha > 0$ dir. Ω bölgesinde $T_0 < T$ ve $\varepsilon > 0$ için $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ bir dikdörtgensel bölge tanımlayacak olursak $u_t^\alpha(a - \varepsilon, t) \geq 0$ ve $u_t^\alpha(a + \varepsilon, t) \geq 0$, $[T_0, T)$ yazılır.

Bu bölgede, $Q = u_t^\alpha - \delta f$ olarak tanımlanmış ve $Q_t^\alpha - Q_{xx} - f' Q = \delta f'' u_x^2 \geq 0$ olduğu ispat edilmiştir. Buradan $Q \geq 0$ yazılır. Böylece, $t \rightarrow T$ iken $Q \geq 0$ için

$\lim_{t \rightarrow T^-} |u(x, t)| = 1$ sağlanıyorsa

$$\begin{aligned} u_t^\alpha &\geq \delta \frac{1}{1 - u(x, t)} \\ u_t^\alpha &\rightarrow \infty \end{aligned}$$

olur. ■

2.3 Tekil Sınır Yayılımlı Kesirli Isı Denkleminin Özellikleri

Bu bölümde, problem (2.10) için sönüm davranışını inceleyeceğiz. $T \leq \infty$ olmak üzere aşağıdaki tekil sınır yayılımlı parabolik denklemi düşünelim.

$$u_t^\alpha = u_{xx} + \frac{1}{1 - u}, \quad 0 < x < L, \quad 0 < t < T,$$

ve sınır koşulları

$$u_x(0, t) = 0, \quad u_x(L, t) = -u^{-1}(L, t), \quad 0 < t < T.$$

Aşağıda belirtilen uyumluluk şartları sağlanacak şekilde başlangıç fonksiyonu $u_0 : [0, L] \rightarrow (0, 1)$ seçelim.

$$u_0'(0) = 0, \quad u_0'(L) = -u^{-1}(L), \quad 0 < t < T.$$

Ayrıca problem (2.10) için başlangıç hattı ($0 < x < L$) üzerinde $u_0(x)$ başlangıç fonksiyonunun

$$u_{xx}(x, 0) + \frac{1}{1 - u(x, 0)} \geq 0, \quad (2.15)$$

$$u_x(x, 0) \leq 0 \quad (2.16)$$

şartlarını sağladığını kabul edeceğiz.

Amacımız iki farklı tipten tekil ısı kaynağına sahip problem (2.10) un sönüm davranışını hem teorik olarak hem de nümerik olarak incelemektir. Problem (2.10) için ilk olarak sönüm tanımını verelim.

Tanım 2.3 Sonlu bir T zamanı için problem (2.10) un bir $u(x, t)$ çözümü vardır öyle ki

$$\lim_{t \rightarrow T^-} \max \{u(x, t) : 0 \leq x \leq L\} \rightarrow 1 \text{ veya } \lim_{t \rightarrow T^-} \min \{u(x, t) : 0 \leq x \leq L\} \rightarrow 0$$

oluyorsa problem (2.10) a sönüm problemi denir. Sönüm zamanı T ile gösterilir (Selçuk ve Özalp 2014).

Uyarı 2.2 $u_0(x)$, (2.16) koşulunu sağlasın. $v = u_x(x, t)$ alalım. $v(x, t)$ aşağıdaki denklemleri sağlar.

$$\begin{aligned}
(u_x)_t^\alpha &= (u_x)_{xx} + (1-u)^{-2}u_x, \quad 0 < x < L, \quad 0 < t < T \\
v_t^\alpha &= v_{xx} + (1-u)^{-2}v \\
v(0, t) &= 0, \quad v(L, t) = -u^{-1}(L, t) < 0, \quad 0 < t < T \\
v(x, 0) &= u_x(x, 0) \leq 0, \quad 0 \leq x \leq L.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Maksimum prensibinden $(0, L] \times (0, T)$ bölgesinde $v(x, t) < 0$ ve böylece $u_x(x, t) < 0$ 'dır. Ayrıca; $u(0, t) = \max_{0 \leq x \leq L} u(x, t)$ elde ederiz.

Teorem 2.6 u_0 , (2.15) ve (2.16) koşulunu sağlasın. O zaman $x = 0$ tek sönüm noktasıdır.

İspat. $(0, L] \times (0, T)$ bölgesinde $b \in (0, L]$, $a \in (0, b)$ ve $0 \leq \tau < T$ ile sınırlı bir dikdörtgensel $(a, b) \times (\tau, T)$ bölgesinde

$$J(x, t) = u_x + \varepsilon(b - x), \quad \varepsilon > 0$$

yardımcı fonksiyonu tanımlayalım. $(0, L] \times (0, T)$ bölgesinde $u_x(x, t) < 0$ olduğundan $(a, b) \times (0, \tau)$ bölgesinde de

$$J_t^\alpha(x, t) - J_{xx}(x, t) = (1-u)^{-2}u_x < 0$$

elde ederiz. Ayrıca; $(0, L] \times (0, T)$ bölgesinde $u_x(x, t) < 0$ ve yeterince küçük $\varepsilon > 0$ olduğunda $J(x, \tau) < 0$ dır. Dahası $\varepsilon > 0$, $t \in (\tau, T)$ için

$$\begin{aligned}
J(a, t) &= u_x(a, t) + \varepsilon(b - a) < 0 \\
J(b, t) &= u_x(b, t) < 0
\end{aligned}$$

dir. Maksimum prensibinden $(x, t) \in (a, b) \times (\tau, T)$ için $J(x, t) < 0$ dır. Yani $J(x, t) = u_x + \varepsilon(b - x) < 0 \Rightarrow u_x < -\varepsilon(b - x)$ elde ederiz. x e göre a dan b ye

integral alırsak

$$\begin{aligned} u(b, t) - u(a, t) &< \frac{-\varepsilon(b-a)^2}{2} \\ u(b, t) &< u(a, t) - \frac{\varepsilon(b-a)^2}{2} < 1 - \frac{\varepsilon(b-a)^2}{2} < 1 \end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece $(0, L]$ de sönüm gerçekleşmez. $x = 0$ ın tek sönüm noktası olduğu görülür. ■

Teorem 2.7 Sonlu bir T zamani için problem (2.10) un bir $u(x, t)$ çözümü vardır öyle ki

$$\lim_{t \rightarrow T^-} \max \{u(x, t) : 0 \leq x \leq L\} \rightarrow 1$$

$$\text{veya } \lim_{t \rightarrow T^-} \min \{u(x, t) : 0 \leq x \leq L\} \rightarrow 0$$

sağlanıyorsa, $(0, L] \times (0, T)$ bölgesinde u_t patlar.

İspat. Burada; $v = 1 - u$ alalım. Problem (2.10) aşağıdaki ifadeye eşit olur:

$$\begin{aligned} v_t^\alpha &= v_{xx} - v^{-1}, \quad 0 < x < L, \quad 0 < t < T, \\ v(x, 0) &= v_0(x) = 1 - u_0(x), \quad 0 \leq x \leq L. \end{aligned} \tag{2.18}$$

$Q = v_t^\alpha + \delta v^{-1}$ olarak alalım.

$$Q_t^\alpha = u_{tt}^\alpha - \delta v^{-2} v_t^\alpha, \quad Q_x = (v_t^\alpha)_x - \delta v^{-2} v_x$$

ve

$$Q_{xx} = (v_t^\alpha)_{xx} + \delta(2v^{-3}v_x^2 - v^{-2}v_{xx}).$$

ifadesi elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} Q_t^\alpha - Q_{xx} &= u_{tt}^\alpha - \delta v^{-2} v_t^\alpha - (v_t^\alpha)_{xx} - \delta 2v^{-3} v_x^2 + \delta v^{-2} v_{xx} \\ &= D_t^\alpha (v_t^\alpha - v_{xx}) - \delta v^{-2} (v_t^\alpha - v_{xx}) - \delta 2v^{-3} v_x^2 \\ &= D_t^\alpha (-v^{-1}) - \delta v^{-2} (-v^{-1}) - \delta 2v^{-3} v_x^2 \\ &= v^{-2} v_t^\alpha + \delta v^{-2} (v^{-1}) - \delta 2v^{-3} v_x^2 \\ &= v^{-2} (v_t^\alpha + \delta v^{-1}) - \delta 2v^{-3} v_x^2 \\ Q_t^\alpha - Q_{xx} &= v^{-2} (Q) - \delta 2v^{-3} v_x^2 \\ Q_t^\alpha - Q_{xx} - v^{-2} Q &= -\delta 2v^{-3} v_x^2 \leq 0, \quad \delta > 0. \end{aligned}$$

olur ve $Q \leq 0$ elde edilir. Buradan

$$v_t^\alpha \leq -\delta \frac{1}{v(x,t)}$$

olup bu ise istenendir. ■



3. SAYISAL YÖNTEM

Aşağıdaki zaman kesirli yayılım denklemini göz önüne alalım:

$$u_t^\alpha = u_{xx} + \frac{1}{1-u}, \quad 0 \leq x \leq L, \quad 0 \leq t < T, \quad (3.1)$$

Burada, $0 < \alpha \leq 1$ dir. Bu çalışmada, tekil kaynaklı kesirli yayılım denklemini üzerinde çalışılacak ve zaman yönündeki türevere Caputo türevi uygulanacaktır. $\alpha = 1$ ise problem (2.9) kesirli yayılım denklemini basit yayılım denklemini verir ki bu tip denklemler daha önceden çalışılmıştır. İlk olarak, lineer olmayan ve sınırlarda akışın olmadığı parabolik tipten problemin sönüm davranışını ele alacağız. Problem (2.9) da kaynak fonksiyonu $f(u) = \frac{1}{1-u}$ olarak tanımlanır. Yani, $f(u) \in C^2[0, 1)$ öyle ki $\lim_{u \rightarrow 1^-} f(u) = +\infty$, $f(0) > 0$, $f'(u) > 0$, $f''(u) > 0$ dir.

T en büyük zaman aralığını göstermek üzere, problem (2.9) için başlangıç fonksiyonu $0 < u_0 \leq 1$ seçimi altında bir $u(x, t) < 1$ çözümü var olacak şekilde alınır yani başlangıç fonksiyonu $u_0 : [0, L] \rightarrow [0, 1)$ 'dir. Problem (2.9) için $u(x, t)$ çözümünün Ω bölgesinde var olduğu ve sürekli olduğu kabul edilir.

Problem (2.9) için başlangıç ve sınır değerleri aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u_0, \quad 0 \leq x \leq L, \\ u_x(0, t) &= u_x(L, t) = 0, \quad 0 \leq t < T. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Problem (3.2) için

$$u'_0(0) = u'_0(L) = 0, \quad 0 \leq t < T.$$

uyumluluk şartları sağlanacak şekilde $u_0 : [0, L] \rightarrow [0, 1)$ başlangıç fonksiyonu ele alalım.

Problem (2.10) için ise başlangıç ve sınır değerleri ise aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u_0, \quad 0 \leq x \leq L, \\ u_x(0, t) &= 0, \quad u_x(L, t) = -u^{-1}(L, t), \quad 0 < t < T. \end{aligned} \quad (3.3)$$

T en büyük zaman aralığını göstermek üzere, $u(x, t) \in C^{2,1}$ problem (2.10)'un bir çözümünü olsun. Problem (3.3) için

$$u'_0(0) = u'_0(L) = -u^{-1}(L), \quad 0 < t < T.$$

uyumluluk şartları sağlanacak şekilde $u_0 : [0, L] \rightarrow (0, 1)$ başlangıç fonksiyonunu artmayan bir fonksiyon seçelim.

Problem (2.9) için çalışma boyunca $\Omega = [0, L] \times [0, T]$ ve $\Theta = ([0, L] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times (0, T))$ ve $S = \{L\} \times (0, T)$ olarak tanımlanmıştır. L diferensiyel operatörünü $Lu = u_{xx} - D_t^\alpha$ olarak tanımlayalım. Böylece problem (2.9), $Lu + f(u) = 0$ şeklinde yazılabilir. $M \in \mathbb{N}$ olmak üzere uzay boyutunda (x -boyunca) adım uzunluğu $\Delta x = L/M$ olsun. Bu durumda uzay grid noktaları $x_i = i\Delta x$, $i = 0, 1, \dots, M$ şeklinde verilir. Zaman boyutunda (t -boyunca) adım uzunluğu $\Delta t = T/N$, $N \in \mathbb{N}$ olsun. Zaman grid noktaları $t_j = j\Delta t$, $j = 0, 1, \dots, N$ ile verilir. Problem (2.9) için u çözümüne $U_i^j(t) = (U_0^j(t), U_1^j(t), \dots, U_M^j(t))^T$ ile yaklaşalım. Zaman yönündeki kesirli basamaktan türevin nümerik yaklaşımı aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha U(x_i, t_j)}{\partial t^\alpha} &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{t_j} (t_j - s)^{-\alpha} \frac{\partial u(x_i, s)}{\partial s} ds \\ &\approx \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{k=1}^j \frac{U(x_i, t_k) - U(x_i, t_{k-1})}{\Delta t} [(t_j - t_{k-1})^{1-\alpha} - (t_j - t_k)^{1-\alpha}] \end{aligned}$$

Burada

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_j - s)^{-\alpha} ds = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} [(t_j - t_{k-1})^{1-\alpha} - (t_j - t_k)^{1-\alpha}]$$

olarak verilir.

$0 < \alpha < 1$, $1 \leq k \leq j$ ve $1 \leq j \leq N$ olmak üzere eşitlik yeniden düzenlenirse zaman yönündeki türev aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{t_j} (t_j - s)^{-\alpha} \frac{\partial u(x_i, s)}{\partial s} ds = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{k=1}^j T_{j,k} [(U_i^k - U_i^{k-1})]$$

ve

$$T_{j,k} = \frac{(t_j - t_{k-1})^{1-\alpha} - (t_j - t_k)^{1-\alpha}}{\Delta t}, \quad 1 \leq k \leq j, \quad 1 \leq j \leq N.$$

olarak ifade edilir. $[0, T]$ aralığında zamansal boyuttaki her bir ağ ve herhangi bir $j = 0, 1, 2, \dots, N$ için

$$T_{j,k} > 0, \quad T_{j,k} > T_{j,k-1}, \quad 1 \leq k \leq j, \quad 1 \leq j \leq N.$$

yazılır. Burada; $T_{j,j} = \Delta t^{-\alpha}$ olduğu görülmektedir. Nümerik yaklaşımlarda kullanılacak olan bazı notasyonlar ise aşağıdaki gibi verilecektir:

$$\begin{aligned} \delta_x^+ U_0^j(t) &= \frac{U_1^j - U_0^j}{\Delta x}, \\ \delta_x^+ U_M^j(t) &= \frac{U_M^j - U_{M-1}^j}{\Delta x}, \\ \delta_x^2 &= \frac{U_{i+1}^j - 2U_i^j + U_{i-1}^j}{\Delta x^2}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Ayrıca, Neumann sınır şartı probleme uygulanırken x eksenini yönünde M ve t eksenini yönünde N adet alt aralık ile oluşturulan ayrık küme

$$\Omega = \{x_1 = 0, x_2 = \Delta x, \dots, x_{n+1} = L; t_1 = 0, t_2 = \Delta t, \dots\}$$

olarak elde edilebilir. Sınır şartlarını fark denklemlerine yansıtmak için tanımlı bölgenin dışında

$$x_0 = x_1 - \Delta x, \quad x_{N+2} = x_{N+1} + \Delta x$$

sanal noktalarının var olduğunu düşünelim.

- $u_x(0, t_j) = u_x(x_1, t_j) = 0$ sınır şartı, merkezi fark yaklaşımı ile

$$\frac{u(x_2, t_j) - u(x_0, t_j)}{2\Delta x} + \Theta(\Delta x^2) = 0$$

olarak ifade edilebilir ve $u(x_0, t_j)$ yapay sınırların değerleri

$$\begin{aligned} u(x_2, t_j) - u(x_0, t_j) &= 0 \\ u(x_2, t_j) &= u(x_0, t_j) \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

- $u_x(0, t_j) = u_x(x_1, t_j) = 0$ sınır şartı, ileri yönde fark yaklaşımı ile

$$\frac{u(x_1, t_j) - u(x_0, t_j)}{\Delta x} = 0$$

$$u(x_1, t_j) = u(x_0, t_j)$$

olarak elde edilir.

- $u_x(L, t_j) = u_x(x_{N+1}, t_j) = 0$ sınır şartı, merkezi fark yaklaşımı ile

$$\frac{u(x_{N+2}, t_j) - u(x_N, t_j)}{2\Delta x} + \Theta(\Delta x^2) = 0$$

olarak elde edilir ve $u(x_{N+2}, t_j)$ yapay sınırların değerleri

$$u(x_{N+2}, t_j) - u(x_N, t_j) = 0$$

$$u(x_{N+2}, t_j) = u(x_N, t_j)$$

olarak elde edilir.

- $u_x(L, t_j) = u_x(x_{N+1}, t_j) = 0$ sınır şartı, ileri yönde fark yaklaşımı ile

$$\frac{u(x_{N+1}, t_j) - u(x_N, t_j)}{\Delta x} = 0$$

$$u(x_{N+1}, t_j) = u(x_N, t_j)$$

olarak elde edilir.

Son olarak kesirli ısı denklemi (2.9) un $0 \leq i \leq M$, $0 \leq j \leq N$ aralığında sonlu fark formülleri yardımıyla ayırık hale getirilmiş hali aşağıdaki şekilde verilmiştir:

$$\frac{1}{\Gamma(2 - \alpha)} \sum_{k=1}^j T_{j,k} [(U_i^k - U_i^{k-1})] = \frac{U_{i-1}^j(t) - 2U_i^j(t) + U_{i+1}^j(t)}{\Delta x^2} + F_i^j, \quad (3.5)$$

$$U_i(0) = \phi_i \quad (3.6)$$

$$U'_0(0) = U'_0(M) = 0 \quad (3.7)$$

eşitlik (3.5) in sol tarafı aşağıdaki gibi düzenlenirse

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{k=1}^j T_{j,k} [(U_i^k - U_i^{k-1})] &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left\{ \sum_{k=1}^{j-1} T_{j,k} [(U_i^k - U_i^{k-1})] + T_{j,j} [(U_i^j - U_i^{j-1})] \right\} \\ \dots &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left\{ \sum_{k=1}^{j-1} T_{j,k} [(U_i^k - U_i^{k-1})] + \Delta t^{-\alpha} [(U_i^j - U_i^{j-1})] \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan;

$$\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{k=1}^{j-1} T_{j,k} [(U_i^k - U_i^{k-1})] + \Delta t^{-\alpha} [(U_i^j - U_i^{j-1})] = \frac{U_{i-1}^j(t) - 2U_i^j(t) + U_{i+1}^j(t)}{\Delta x^2} + F_i^j \quad (3.8)$$

ifadesine ulaşılır. (3.8) düzenlendiğinde

$$\begin{aligned} &-\frac{\Delta t^\alpha}{\Delta x^2} \Gamma(2-\alpha) U_{i-1}^j + \left(1 + 2\frac{\Delta t^\alpha}{\Delta x^2} \Gamma(2-\alpha)\right) U_i^j - \frac{\Delta t^\alpha}{\Delta x^2} \Gamma(2-\alpha) U_{i+1}^j \\ \dots &= U_i^{j-1} - \Delta t^\alpha \sum_{k=1}^{j-1} T_{j,k} [(U_i^k - U_i^{k-1})] + F_i^j \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. $\frac{\Delta t^\alpha}{\Delta x^2} \Gamma(2-\alpha) = K$ olarak tanımlanırsa son eşitlik

$$-K U_{i-1}^j + (1 + 2K) U_i^j - K U_{i+1}^j = U_i^{j-1} - \Delta t^\alpha \sum_{k=1}^{j-1} T_{j,k} [(U_i^k - U_i^{k-1})] + F_i^j \quad (3.9)$$

olarak yazılır. (2.9) için sonlu fark formülleri yardımıyla elde edilen yöntemde her zaman (j) iterasyonunda yukarıda elde edilen üç-köşgensel matris sistemi bulunur. Son ifade de κ bir üç-köşgensel matris ve \mathcal{L} fark operatörü olmak üzere (3.9) vektörel formda aşağıdaki gibi yazılır:

$$\kappa U^j = \mathcal{L} U^{j-1} + F^j \quad (3.10)$$

$$\mathcal{L} U^{j-1} = U_i^{j-1} - \Delta t^\alpha \sum_{k=1}^{j-1} T_{j,k} [(U_i^k - U_i^{k-1})] \quad (3.11)$$

$$\kappa = \begin{pmatrix} (1+2K) & -K & & & \\ -K & (1+2K) & -K & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & -K & (1+2K) & -K & \\ & & -K & (1+2K) & \end{pmatrix}$$

Elde edilen yöntem kapalı bir yöntemdir. Bu denklem sistemini her adımda U^j ye göre çözmek suretiyle her adımda bir sonraki adımdaki yaklaşımlar elde edilir.

\mathcal{L} operatörü kesirli türevin karakteri nedeniyle belleğe sahip bir tür operatör olarak değerlendirilebilir. Bu, t_j zamanındaki U^j değerlerinin U üzerindeki etkisinin önceki $t_0, t_1, t_2, \dots, t_{j-1}$ zamanlarında hesaplanan tüm $U^0, U^1, U^2, \dots, U^{j-1}$ değerlerine bağlı olduğu anlamına gelir. Kesirli olmayan durumlardakine kıyasla temel fark, \mathcal{L} yi hesaplamak için önceki tüm zaman değerleri $t_0, t_1, t_2, \dots, t_{j-1}$ için sayısal çözümlerin gerekli olması, kesirli olmayan denklemler için ise yalnızca bir önceki t_{j-1} çözümünün gerekli olmasıdır. t_{j-1} zamanındaki çözümden t_j zamanındaki çözümü elde etmek için hesaplama maliyeti, j ile artar, yani (3.11)'in ikinci kısmında yer alan toplamdaki terim sayısı arttıkça artar. Bu da, t_0 dan t_j ye gitmek için hesaplama maliyetinin j^2 ile büyüdüğü anlamına gelir.

3.1 Ayırık Kesirli Isı Denkleminin Özellikleri

Lemma 3.1 $n \geq 0$ ve b_i^n ve V_i^n iki dizi olsun. $b_i^n \leq 0$ öyle ki $0 \leq i \leq M$ için

$$\begin{aligned} \partial_t^\alpha V_i^n - \delta^2 V_i^n + b_i^n V_i^n &\geq 0 \\ V_i^0 &\geq 0 \end{aligned}$$

ise bu durumda

$$V_i^n \geq 0, \quad 0 \leq i \leq M, \quad n \geq 0$$

eşitsizliği sağlar.

İspat. Basit bir hesaplama aşağıdakileri verir:

$$-KV_{i-1}^n + (1 + 2K)V_i^n - KV_{i+1}^n + b_i^n V_i^n \geq V_i^{n-1} - \Delta t^\alpha \sum_{k=1}^{n-1} T_{n,k} [(V_i^k - V_i^{k-1})]$$

$n = 1$ için

$$\begin{aligned} -KV_{i-1}^1 + (1 + 2K)V_i^1 - KV_{i+1}^1 + b_i^1 V_i^1 &\geq V_i^0 \geq 0 \\ -KV_{i-1}^1 + (1 + 2K)V_i^1 - KV_{i+1}^1 + b_i^1 V_i^1 &\geq 0 \\ V_i^1 &\geq 0 \end{aligned}$$

$n = 2$ için

$$\begin{aligned}
-KV_{i-1}^2 + (1 + 2K)V_i^2 - KV_{i+1}^2 + b_i^2V_i^2 &\geq V_i^1 - \Delta t^\alpha T_{2,1} [(V_i^1 - V_i^0)] \\
-KV_{i-1}^2 + (1 + 2K)V_i^2 - KV_{i+1}^2 + b_i^2V_i^2 &\geq V_i^1 - \Delta t^\alpha (2^{1-\alpha} - 1)\Delta t^{-\alpha} [(V_i^1 - V_i^0)] \\
-KV_{i-1}^2 + (1 + 2K)V_i^2 - KV_{i+1}^2 + b_i^2V_i^2 &\geq V_i^1 - (2^{1-\alpha} - 1) [(V_i^1 - V_i^0)] \\
-KV_{i-1}^2 + (1 + 2K)V_i^2 - KV_{i+1}^2 + b_i^2V_i^2 &\geq (2 - 2^{1-\alpha})V_i^1 + (2^{1-\alpha} - 1)V_i^0 \geq 0 \\
V_i^2 &\geq 0 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Sonuç olarak $V_i^{n-1} \geq 0$, $0 \leq i \leq M$ ise tümevarımdan $V_i^n \geq 0$ olduğu görülür. Bu teoremi ispatlar. ■

Lemma 3.2 $n \geq 0$ ve b_i^n , V_i^n ve W_i^n üç dizi olsun. $b_i^n \leq 0$ öyle ki $0 \leq i \leq M$ için

$$\begin{aligned}
\partial_t^\alpha V_i^n - \delta^2 V_i^n + b_i^n V_i^n &\leq \partial_t^\alpha W_i^n - \delta^2 W_i^n + b_i^n W_i^n \\
V_i^0 &\leq W_i^0
\end{aligned}$$

ise bu durumda

$$V_i^n \leq W_i^n \quad 0 \leq i \leq M, \quad n \geq 0$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $Z_i^n = W_i^n - V_i^n$ vektörü tanımlayalım. $0 \leq i \leq M$ için basit bir hesaplama ile

$$\partial_t^\alpha Z_i^n - \delta^2 Z_i^n + b_i^n Z_i^n \geq 0$$

$Z_i^0 \geq 0$ ve Lemma 3.1'den $Z_i^n \geq 0 \Rightarrow W_i^n \geq V_i^n$ elde edilir. ■

Lemma 3.3 U_i^n , $n \geq 0$ için bir dizi olsun öyle ki $\|U_i^n\|_\infty < 1$ ise o zaman

$$\partial_t^\alpha (1 - U_i^n)^{-1} \geq (1 - U_i^n)^{-2} \partial_t^\alpha U_i^n, \quad 0 \leq i_0 \leq M$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Taylor seri açılımı kullanılarak

$$\partial_t^\alpha (1 - U_i^n)^{-1} = (1 - U_i^n)^{-2} \partial_t^\alpha U_i^n + (1 - U_i^n)^{-3} \Delta t (\partial_t^\alpha U_i^n)^2, \quad 0 \leq i \leq M.$$

θ_i^n , U_i^n ve U_i^{n+1} arasında bir değerdir. Sonuç olarak

$$\partial_t^\alpha (1 - U_i^n)^{-1} \geq (1 - U_i^n)^{-2} \partial_t^\alpha U_i^n, \quad 0 \leq i_0 \leq M.$$

ifadesi yazılarak ispat tamamlanır. ■

Lemma 3.4 $n \geq 0$ için U_i^n ayrık problem (3.5)'in bir çözümü olsun. Bu durumda;

$$\partial_t^\alpha U_i^n \geq 0, \quad 0 \leq i \leq M, \quad t \in (0, T).$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Z_i^n vektörünü düşünelim, öyle ki $Z_i^n = \partial_t^\alpha U_i^n$ olsun.

$$\partial_t^\alpha U_i^n - \delta^2 U_i^n - (1 - U_i^n)^{-1} = 0$$

ifadesinde eşitliğin her iki tarafında ∂_t^α alınarak Lemma 3.3 yardımıyla

$$\partial_t^\alpha \partial_t^\alpha U_i^n - \delta^2 \partial_t^\alpha U_i^n = \partial_t^\alpha [(1 - U_i^n)^{-1}]$$

$$\partial_t^\alpha \partial_t^\alpha U_i^n - \delta^2 \partial_t^\alpha U_i^n = \partial_t^\alpha [(1 - U_i^n)^{-1}] \geq [(1 - U_i^n)^{-2}] \partial_t^\alpha U_i^n$$

$$\partial_t^\alpha Z_i^n - \delta^2 Z_i^n - (1 - U_i^n)^{-2} Z_i^n \geq 0$$

elde edilir. Lemma 3.1 kullanılarak $Z_i^0 \geq 0$ ve $0 \leq i \leq M$ için $Z_i^n \geq 0 \Rightarrow Z_i^n = \partial_t^\alpha U_i^n \geq 0$ elde edilir. ■

Lemma 3.5 $n \geq 0$ için U_i^n ayrık problem (3.5)'in çözümü olsun. Bu durumda

$0 \leq i \leq M$, $n \geq 0$ için

$$U_i^n \geq 0$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Basit bir hesaplama ile (3.9) ifadesinden

$$-KU_{i-1}^n + (1 + 2K)U_i^n - KU_{i+1}^n - (1 - U_i^n)^{-1} + \Delta t^\alpha \sum_{k=1}^{n-1} T_{n,k} [(U_i^k - U_i^{k-1})] = U_i^{n-1}$$

yazılır. $U_i^0 > 0$ ve $\|U_i^n\|_\infty < 1$ bilgisi kullanılarak $n = 1$ için

$$-KU_{i-1}^1 + (1 + 2K)U_i^1 - KU_{i+1}^1 - (1 - U_i^1)^{-1} = U_i^0 > 0$$

$U_i^1 > 0$ elde edilir.

$n = 2$ için

$$\begin{aligned} -KU_{i-1}^2 + (1 + 2K)U_i^2 - KU_{i+1}^2 - (1 - U_i^2)^{-1} &= U_i^1 - \Delta t^\alpha T_{2,1} [(U_i^1 - U_i^0)] \\ -KU_{i-1}^2 + (1 + 2K)U_i^2 - KU_{i+1}^2 - (1 - U_i^2)^{-1} &= U_i^1 - \beta \Delta t^\alpha \Delta t^{-\alpha} \\ -KU_{i-1}^2 + (1 + 2K)U_i^2 - KU_{i+1}^2 - (1 - U_i^2)^{-1} + \beta &= U_i^1 \geq 0 \end{aligned}$$

$\beta = (2^{1-\alpha} - 1) > 0$ dir. Dolayısıyla; $U_i^2 \geq 0$ 'dir. Buradan da $U_i^{n-1} \geq 0, 0 \leq i \leq M$ elde edilir ve tümevarımdan $U_i^n \geq 0$ olduğu görülür. İspat tamamlanır. ■

Lemma 3.6 $n \geq 0$ için U_i^n ayrık problemin (3.5) çözümü olsun. Bu durumda

$0 \leq i \leq M, n \geq 0$ için

$$U_{i+1}^n \geq U_i^n$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $0 \leq i \leq M, n \geq 0$ için $Z_i^n = U_{i+1}^n - U_i^n$ olarak tanımlansın. Basit bir hesaplama ile

$$\partial_t^\alpha Z_i^n - \delta^2 Z_i^n - (1 - \xi_i^n)^{-2} Z_i^n = 0, \quad 0 \leq i \leq M$$

elde edilir. ξ_i^n, U_{i+1}^n ve U_i^n arasındaki ara değerdir. Lemma 3.1 kullanılarak $Z_i^0 \geq 0$ ve $Z_i^n \geq 0$ yazılır. Buradan da $Z_i^n = U_{i+1}^n - U_i^n \geq 0 \Rightarrow U_{i+1}^n \geq U_i^n$ ifadesi bulunur.

■

3.2 Ayrık Kesirli Isı Denkleminin Sönüm Çözümleri

Lemma 3.7 $U_i^n \in \mathbb{R}^{M+1}$ olsun. Eğer $\|U_i^n\|_\infty < 1$ ise, bu durumda

$$\delta^2(1 - U_i^n)^{-1} \geq (1 - U_i^n)^{-2} \delta^2 U_i^n, \quad 0 \leq i \leq M.$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $f(s) = (1 - s)^{-1}$ alalım. f , pozitif s değerleri için konveks bir fonksiyondur. Taylor serisi açılımı uygulandığında

$$f(U_{i+1}) = f(U_i) + (U_{i+1} - U_i)f'(U_i) + \frac{(U_{i+1} - U_i)^2}{h^2} f''(\psi_i)$$

$$f(U_{i+1}) - f(U_i) = f'(U_i)\delta U_i + \frac{(U_{i+1} - U_i)^2}{h^2} f''(\psi_i) \quad (3.12)$$

$$f(U_{i-1}) = f(U_i) + (U_{i-1} - U_i)f'(U_i) + \frac{(U_{i-1} - U_i)^2}{h^2} f''(\xi_i)$$

$$f(U_{i-1}) - f(U_i) = f'(U_i)\delta U_i + \frac{(U_{i-1} - U_i)^2}{h^2} f''(\xi_i). \quad (3.13)$$

(3.12) ve (3.13) ifadeleri taraf tarafa toplanır

$$f(U_{i+1}) - f(U_i) + f(U_{i-1}) - f(U_i) = 2f'(U_i)\delta^2 U_i + \frac{(U_{i+1} - U_i)^2}{h^2} f''(\psi_i) + \frac{(U_{i-1} - U_i)^2}{h^2} f''(\xi_i)$$

$$2\delta^2 f(U_i) = 2f'(U_i)\delta^2 U_i + \frac{(U_{i+1} - U_i)^2}{h^2} f''(\psi_i) + \frac{(U_{i-1} - U_i)^2}{h^2} f''(\xi_i)$$

$$\delta^2 f(U_i) = f'(U_i)\delta^2 U_i + \frac{(U_{i+1} - U_i)^2}{2h^2} f''(\psi_i) + \frac{(U_{i-1} - U_i)^2}{2h^2} f''(\xi_i) \quad (3.14)$$

elde edilir. (3.14) de ψ_i değeri U_{i+1} ve U_i arasında bir değer ve ξ_i değeri de U_{i-1} ve U_i arasında bir değerdir. $\|U_i^n\|_\infty < 1$ olduğundan

$$\delta^2(1 - U_i)^{-1} = (1 - U_i)^{-2}\delta^2 U_i + \frac{(U_{i+1} - U_i)^2}{2h^2} f''(\psi_i) + \frac{(U_{i-1} - U_i)^2}{2h^2} f''(\xi_i)$$

$$\delta^2(1 - U_i)^{-1} \geq (1 - U_i)^{-2}\delta^2 U_i$$

olup, ispat tamamlanır. ■

Teorem 3.1 U_i^n , (3.5) ayrık probleminin bir çözümü olsun. $U_i^n > 0$ ve negatif olmayan bir A sabiti olduğunu varsayalım öyle ki (3.5) ayrık probleminin başlangıç koşulu olan (3.6) aşağıdaki koşulu sağlasın:

$$\delta^2 \phi_i + (1 - \phi_i)^{-1} \geq A(1 - \phi_i)^{-1}, \quad 0 \leq i \leq M. \quad (3.15)$$

Bu durumda, (3.5) ayrık problemin çözümü U_i^n sonlu bir T zamanında sönümlenir ve aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$T \leq \left[\frac{(1 - \|\phi_i\|_\infty)^2}{2A\Gamma(2 - \alpha)} \right]^{1/\alpha}.$$

İspat. $[0, T)$, maksimum zaman aralığı $\|U_i\|_\infty < 1$ ve olsun. $J_i(t)$ fonksiyonunu aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$J_i(t) = \frac{\partial^\alpha U_i^n(t)}{\partial t^\alpha} - A(1 - U_i^n(t))^{-1}, \quad 0 \leq i \leq M.$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^\alpha J_i(t)}{\partial t^\alpha} - \delta^2 J_i(t) &= \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \left(\frac{\partial^\alpha U_i^n(t)}{\partial t^\alpha} - A(1 - U_i^n(t))^{-1} \right) - \delta^2 \left(\frac{\partial^\alpha U_i^n(t)}{\partial t^\alpha} - A(1 - U_i^n(t))^{-1} \right) \\
&= \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \left(\frac{\partial^\alpha U_i^n(t)}{\partial t^\alpha} \right) - \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} (A(1 - U_i^n(t))^{-1}) - \delta^2 \frac{\partial^\alpha U_i^n(t)}{\partial t^\alpha} + \delta^2 A(1 - U_i^n(t))^{-1} \\
&= \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \left(\frac{\partial^\alpha U_i^n(t)}{\partial t^\alpha} - \delta^2 \frac{\partial^\alpha U_i^n(t)}{\partial t^\alpha} \right) - \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} (A(1 - U_i^n(t))^{-1}) \frac{\partial^\alpha U_i^n(t)}{\partial t^\alpha} + \delta^2 A(1 - U_i^n(t))^{-1}
\end{aligned}$$

(Lemma 3.7 kullanılarak)

$$\begin{aligned}
&\geq \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} ((1 - U_i^n(t))^{-1}) - A(1 - U_i^n(t))^{-2} \frac{\partial^\alpha U_i^n(t)}{\partial t^\alpha} + A(1 - U_i^n(t))^{-1} \delta^2 U_i^n(t) \\
&= (1 - U_i^n(t))^{-2} \frac{\partial^\alpha U_i^n(t)}{\partial t^\alpha} - A(1 - U_i^n(t))^{-2} \frac{\partial^\alpha U_i^n(t)}{\partial t^\alpha} + A(1 - U_i^n(t))^{-2} \delta^2 U_i^n(t) \\
&= (1 - U_i^n(t))^{-2} \left[\frac{\partial^\alpha U_i^n(t)}{\partial t^\alpha} - A \frac{\partial^\alpha U_i^n(t)}{\partial t^\alpha} + A \delta^2 U_i^n(t) \right] \\
&= (1 - U_i^n(t))^{-2} \left[\frac{\partial^\alpha U_i^n(t)}{\partial t^\alpha} - A(1 - U_i^n(t))^{-1} \right] \\
&= (1 - U_i^n(t))^{-2} [J_i(t)]
\end{aligned}$$

$0 \leq i \leq M$ için (3.15) ifadesinden $J_i(0) \geq 0$ olduğu görülmektedir. Buradan da Lemma 3.1 kullanılarak $J_i(t) \geq 0$ yazılır.

$$\begin{aligned}
J_i(t) &\geq 0 \\
\frac{\partial^\alpha U_i^n(t)}{\partial t^\alpha} &\geq \frac{A}{1 - U_i^n(t)} \\
(1 - U_i^n(t)) \frac{\partial^\alpha U_i^n(t)}{\partial t^\alpha} &\geq A, \quad U_i^n(0) = \phi_i
\end{aligned}$$

elde edilir. Eşitsizliğin her iki tarafında s 'e göre 0 dan t 'ye integral alınırsa

$$\begin{aligned}
&\int_0^t (1 - U_i^n(t)) \int_0^t \frac{(t-s)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial U_i^n}{\partial s} ds ds \geq A \\
&\frac{t^{-\alpha+1}}{A\Gamma(2-\alpha)} \left[\frac{(1 - \phi_i)^2 - (1 - U_i^n(t))^2}{2} \right] \geq t
\end{aligned}$$

elde edilir. $U_i^n(0) = \phi_i$ ve $U_i^n(T) = 1$ olması nedeniyle

$$t^\alpha = \left[\frac{(1 - \phi_i)^2}{2A\Gamma(2 - \alpha)} \right]$$

$$T \leq \left[\frac{(1 - U_i^n(0))^2}{2A\Gamma(2 - \alpha)} \right]^{1/\alpha} = \left[\frac{(1 - \phi_i)^2}{2A\Gamma(2 - \alpha)} \right]^{1/\alpha} = \left[\frac{(1 - \|\phi_i\|_\infty)^2}{2A\Gamma(2 - \alpha)} \right]^{1/\alpha} \quad (3.16)$$

elde edilir. Sonuç olarak ayrık problemin sönüm zamanı için bir sınır elde edilir. ■

3.3 Ayrık Tekil Sınır Yayılımlı Kesirli Isı Denkleminin Özellikleri

Bu bölümde bazı lemmalar verilecektir. İlk olarak, ayrık tekil sınır yayılımlı lineer olmayan parabolik denklemin kurulumu üzerinde duracağız. $M \geq 3$ pozitif bir tamsayı ve $\Delta x = 1/M$ olsun. Noktasal düzlem üzerinde $x_i = i\Delta x$, $0 \leq i \leq M$ alalım. $(0, L] \times (0, T)$ bölgesinde problem (2.10) un çözümü $u(x, t)$ için yaklaşık çözüm $U_i^n(t) = (U_0^n(t), U_1^n(t), \dots, U_M^n(t))^T$ ve başlangıç koşulu u_0 için ise $\varphi_i(t) = (\varphi_0(t), \varphi_1(t), \dots, \varphi_M(t))^T$ alalım. Buna göre ayrık denklemler aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\begin{aligned}\partial_t^\alpha U_i^n &= \delta^2 U_i^n + (1 - U_i^n)^{-1}, \quad 0 \leq i \leq M-1, \\ \partial_t^\alpha U_M^n &= \delta^2 U_M^n - \frac{2}{\Delta x} (U_M^n)^{-1} + (1 - U_M^n)^{-1} \\ U_i^0 &= \varphi_i, \quad 0 \leq i \leq M, \quad n \geq 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial_t^\alpha U_i^n &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{k=1}^n T_{n,k} [(U_i^k - U_i^{k-1})], \quad 0 \leq i \leq M \quad (3.17) \\ \delta^2 U_i^n &= \frac{U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n}{\Delta x^2}, \quad 1 \leq i \leq M-1, \\ \delta^2 U_0^n &= \frac{2U_1^n - 2U_0^n}{\Delta x^2}, \\ \delta^2 U_M^n &= \frac{2U_{M-1}^n - 2U_M^n}{\Delta x^2} \\ \varphi_i &> 0, \quad 0 \leq i \leq M, \quad n \geq 0.\end{aligned}$$

Lemma 3.8 $n \geq 0$ ve b_i^n ve V_i^n iki dizi olsun. $b_i^n \leq 0$ öyle ki $0 \leq i \leq M$ için

$$\begin{aligned}\partial_t^\alpha V_i^n - \delta^2 V_i^n + b_i^n V_i^n &\geq 0 \\ V_i^0 &\geq 0\end{aligned}$$

ise bu durumda

$$V_i^n \geq 0, \quad 0 \leq i \leq M, \quad n \geq 0$$

eşitsizliği sağlar.

İspat. Basit bir hesaplama, 0

$$-KV_{i-1}^n + (1 + 2K)V_i^n - KV_{i+1}^n + b_i^n V_i^n \geq V_i^{n-1} - \Delta t^\alpha \sum_{k=1}^{n-1} T_{n,k} [(V_i^k - V_i^{k-1})]$$

$\leq i \leq M - 1, n \geq 0$ olduğunu gösterir. $n = 1$ için

$$\begin{aligned} -KV_{i-1}^1 + (1 + 2K)V_i^1 - KV_{i+1}^1 + b_i^1 V_i^1 &\geq V_i^0 \geq 0 \\ V_i^1 &\geq 0 \end{aligned}$$

$n = 2$ için

$$\begin{aligned} -KV_{i-1}^2 + (1 + 2K)V_i^2 - KV_{i+1}^2 + b_i^n V_i^n &\geq V_i^1 - \Delta t^\alpha T_{2,1} [(V_i^1 - V_i^0)] \\ -KV_{i-1}^2 + (1 + 2K)V_i^2 - KV_{i+1}^2 + b_i^n V_i^n &\geq V_i^1 - \Delta t^\alpha (2^{1-\alpha} - 1) \Delta t^{-\alpha} [(V_i^1 - V_i^0)] \\ -KV_{i-1}^2 + (1 + 2K)V_i^2 - KV_{i+1}^2 + b_i^2 V_i^2 &\geq V_i^1 - (2^{1-\alpha} - 1) [(V_i^1 - V_i^0)] \\ -KV_{i-1}^2 + (1 + 2K)V_i^2 - KV_{i+1}^2 + b_i^2 V_i^2 &\geq (2 - 2^{1-\alpha})V_i^1 + (2^{1-\alpha} - 1)V_i^0 \geq 0 \\ V_i^2 &\geq 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

$i = 0$ için

$$-2KV_1^n + (1 + 2K)V_0^n + b_0^n V_0^n \geq V_0^{n-1} \geq 0$$

$i = M$ için

$$-2KV_{M-1}^n + (1 + 2K)V_M^n + b_M^n V_M^n \geq V_M^{n-1} \geq 0$$

elde edilir. Sonuç olarak $V_i^{n-1} \geq 0, 0 \leq i \leq M$ ise bu durumda tümevarımdan $V_i^n \geq 0$ olduğu görülür. Bu teoremi ispatlar. ■

Lemma 3.9 $n \geq 0$ için U_i^n ayrık problemin (3.17) bir çözümü olsun. Buradan

$$\partial_t^\alpha U_i^n \geq 0, \quad 0 \leq i \leq M, \quad t \in (0, T).$$

elde edilir.

İspat. Z_i^n vektörünü düşünelim, $Z_i^n = \partial_t^\alpha U_i^n$ olsun.

$$\partial_t^\alpha U_i^n - \delta^2 U_i^n - (1 - U_i^n)^{-1} = 0$$

ifadesinde eşitliğin her iki tarafında ∂_t^α alınarak $0 \leq i \leq M - 1$ için Lemma 3.3 yardımıyla

$$\partial_t^\alpha Z_i^n - \delta^2 Z_i^n - (1 - U_i^n)^{-2} Z_i^n \geq 0,$$

elde edilir. $i = M$ için

$$\partial_t^\alpha Z_M^n - \delta^2 Z_M^n - \frac{2}{\Delta x} (U_M^n)^{-2} - (1 - U_M^n)^{-2} Z_M^n \geq 0$$

elde edilir. $Z_i^0 \geq 0$ olduğu için bu bölümdeki Lemma 3.8 kullanılarak $0 \leq i \leq M$ için $Z_i^n \geq 0 \Rightarrow Z_i^n = \partial_t^\alpha U_i^n \geq 0$ elde edilir. ■

Lemma 3.10 $n \geq 0$ için U_i^n ayrık problemin (3.17) çözümü olsun.

Buradan $1 \leq i \leq M - 1$, $n \geq 0$ için

$$U_i^n \geq 0$$

elde edilir.

İspat. Basit bir hesaplama ile (3.9) ifadesinden $1 \leq i \leq M - 1$, $n \geq 0$ için

$$-KU_{i-1}^n + (1 + 2K)U_i^n - KU_{i+1}^n + \Delta t^\alpha \sum_{k=1}^{n-1} T_{n,k} [(U_i^k - U_i^{k-1})] - (1 - U_i^n)^{-1} = U_i^{n-1}$$

$U_i^0 > 0$ ve $\|U_i^n\|_\infty < 1$ bilgisi kullanılarak $n = 1$ için

$$-KU_{i-1}^1 + (1 + 2K)U_i^1 - KU_{i+1}^1 - (1 - U_i^1)^{-1} = U_i^0 > 0$$

$U_i^1 > 0$ elde edilir. $n = 2$ için

$$-KU_{i-1}^2 + (1 + 2K)U_i^2 - KU_{i+1}^2 - (1 - U_i^2)^{-1} = U_i^1 - \Delta t^\alpha T_{2,1} [(U_i^1 - U_i^0)]$$

$$-KU_{i-1}^2 + (1 + 2K)U_i^2 - KU_{i+1}^2 - (1 - U_i^2)^{-1} = U_i^1 - \beta \Delta t^\alpha \Delta t^{-\alpha}$$

$$-KU_{i-1}^2 + (1 + 2K)U_i^2 - KU_{i+1}^2 - (1 - U_i^2)^{-1} + \beta = U_i^1 \geq 0$$

$\beta = (2^{1-\alpha} - 1) > 0$ dir. Dolayısıyla; $U_i^2 \geq 0$ elde edilir.

$i = 0$ için

$$-2KU_1^n + (1 + 2K)U_0^n + \Delta t^\alpha \sum_{k=1}^{n-1} T_{n,k} [(U_0^k - U_0^{k-1})] - (1 - U_0^n)^{-1} = U_0^{n-1}$$

$i = M$ için

$$-2KU_{M-1}^n + (1 + 2K)U_M^n + \frac{2}{\Delta x} (U_M^n)^{-1} + \Delta t^\alpha \sum_{k=1}^{n-1} T_{n,k} [(U_M^k - U_M^{k-1})] - (1 - U_M^n)^{-1} = U_M^{n-1}$$

yazılır. $U_i^{n-1} \geq 0$, $0 \leq i \leq M$ elde edilir ve tümevarımdan $U_i^n \geq 0$ olduğu görülür.

İspat tamamlanır. ■

Lemma 3.11 $n \geq 0$ için U_i^n ayrık problemin (3.17) çözümü olsun. Bu durumda

$0 \leq i \leq M-1, n \geq 0$ için

$$U_{i+1}^n \leq U_i^n$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $0 \leq i \leq M-1, n \geq 0$ için $Z_i^n = U_i^n - U_{i+1}^n$ alalım. Dolayısıyla; $Z_i^n = U_i^n - U_{i+1}^n, 0 \leq i \leq M-2$ ve $Z_{M-1}^n = U_{M-1}^n - U_M^n$ yazılır. Basit bir hesaplama ile $0 \leq i \leq M-2$ için

$$\partial_t^\alpha Z_i^n - \delta^2 Z_i^n - (1 - \xi_i^n)^{-2} Z_i^n = 0$$

$i = M$ için

$$\partial_t^\alpha Z_{M-1}^n - \delta^2 Z_{M-1}^n + \frac{2}{\Delta x} (U_M^n)^{-1} - (1 - \xi_{M-1}^n)^{-2} Z_{M-1}^n = 0$$

elde edilir. ξ_i^n, U_{i+1}^n ve U_i^n arasındaki ara değerdir. $Z_i^0 \geq 0$ olduğu için Lemma 3.8 yardımıyla $Z_i^n \geq 0$ yazılır. Buradan da $Z_i^n = U_i^n - U_{i+1}^n \geq 0 \Rightarrow U_i^n \geq U_{i+1}^n$ ifadesi bulunur. ■

3.4 Ayrık Tekil Sınır Yayılımlı Denklemin Sönüm Çözümleri

Uyarı 3.1 İlerleyen bölümde problem (2.10) un sonlu bir zamanda sönümlendiğini göstereceğiz ve sönüm zamanını hesaplayacağız. $V_i^n = 1 - U_i^n$ olarak tanımlayalım. Dolayısıyla problem (2.10) ayrık formda aşağıdaki gibi yazılır:

$$\delta_t^\alpha V_i^n = \delta^2 V_i^n - (V_i^n)^{-1}, \quad 0 \leq i \leq M-1 \quad (3.18)$$

$$\delta_t^\alpha V_M^n = \delta^2 V_M^n - \frac{2}{\Delta x} (1 - V_M^n)^{-1} - (V_M^n)^{-1}$$

$$V_i^0 = \xi_i = 1 - \varphi_i, \quad 0 \leq i \leq M, \quad n \geq 0. \quad (3.19)$$

Lemma 3.12 $V_i^n, n \geq 0$ bir dizi ve $\|V_i^n\|_\infty > 0$ ise o zaman

$$\delta_t^\alpha (V_i^n)^{-1} \geq -(V_i^n)^{-2} \delta_t^\alpha V_i^n, \quad 0 \leq i \leq M$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Taylor Seri açılımı uygulandığında ξ_i değeri V_i^n ve V_i^{n+1} arasında bir değer ve $\|V_i^n\|_\infty > 0$ kullanılarak;

$$\delta_t^\alpha (V_i)^{-1} = -(V_i)^{-2} \delta_t^\alpha V_i + (\xi_i)^{-3} \Delta t (\delta_t^\alpha V_i)^2$$

$$\delta_t^\alpha (V_i)^{-1} \geq -(V_i^n)^{-2} \delta_t^\alpha V_i^n.$$

İspat tamamlanır. ■

Lemma 3.13 $V_i^n \in \mathbb{R}^{M+1}$ bir dizi olsun öyle ki $\|V_i^n\|_\infty > 0$ ise bu durumda

$$\delta^2 (V_i^n)^{-1} \geq -(V_i^n)^{-2} \delta^2 V_i^n, \quad 0 \leq i \leq M$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. ψ_0 değeri V_1 ve V_0 arasında, ξ_M değeri de V_{M-1} ve V_M arasında bir değer ve ψ_i değeri V_{i+1} ve V_i arasında ve ξ_i değeri de V_{i-1} ve V_i arasında bir değerdir. $\|V_i^n\|_\infty > 0$ kullanılarak aşağıdaki gibi ispat tamamlanır.

$1 \leq i \leq M - 1, n \geq 0$ için

$$\delta^2 (V_i)^{-1} = -(V_i)^{-2} \delta^2 V_i + \frac{(V_{i-1} - V_i)^2}{2h^2} f''(\xi_i) + \frac{(V_{i+1} - V_i)^2}{2h^2} f''(\psi_i)$$

$i = 0$ için

$$\begin{aligned} \delta^2 (V_0)^{-1} &= -(V_0)^{-2} \delta^2 V_0 + \frac{(V_{-1} - V_0)^2}{2h^2} f''(\xi_0) + \frac{(V_1 - V_0)^2}{2h^2} f''(\psi_0) \\ &= -(V_0)^{-2} \delta^2 V_0 + \frac{(V_1 - V_0)^2}{h^2} f''(\psi_0) \end{aligned}$$

$i = M$ için

$$\begin{aligned} \delta^2 (V_M)^{-1} &= -(V_M)^{-2} \delta^2 V_M + \frac{(V_{M+1} - V_M)^2}{2h^2} f''(\psi_M) + \frac{(V_{M-1} - V_M)^2}{2h^2} f''(\xi_M) \\ &= -(V_M)^{-2} \delta^2 V_M + \frac{(V_{M-1} - V_M)^2}{h^2} f''(\xi_M) \end{aligned}$$

$$\delta^2 (V_i)^{-1} \geq -(V_i)^{-2} \delta^2 V_i.$$

■

Teorem 3.2 U_i^n , (3.5) ayrık probleminin bir çözümü olsun. $A \in (0, 1]$ sabiti olduğunu varsayalım öyle ki ayrık problem (3.17) nin başlangıç koşulu aşağıdaki eşitsizlikleri sağlasın:

$$\delta^2 \xi_i - (\xi_i)^{-1} \leq -A(\xi_i)^{-1}, \quad 0 \leq i \leq M - 1 \quad (3.20)$$

$$\delta^2 \xi_M + \frac{2}{\Delta x} (1 - \xi_M)^{-1} - (\xi_i)^{-1} \leq -A(\xi_M)^{-1}. \quad (3.21)$$

Bu durumda, ayrık problemin (3.17) çözümü U_i^n sonlu bir T zamanında sönümlenir ve

$$T \leq \left[\frac{(1 - \|\varphi_i\|_\infty)^2}{2A\Gamma(2 - \alpha)} \right]^{1/\alpha}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $[0, T)$, maksimum zaman aralığı olsun ve $V_i^n = (1 - \|U_i^n\|_\infty)$. J_i^n fonksiyonunu aşağıdaki gibi tanımlayalım;

$$J_i^n = \delta_t^\alpha (V_i^n) + A(V_i^n)^{-1}, \quad 0 \leq i \leq M, \quad n \geq 0.$$

Buradan

$$\begin{aligned} \delta_t^\alpha J_i^n - \delta^2 J_i^n &= \delta_t^\alpha [\delta_t^\alpha (V_i^n) + A(V_i^n)^{-1}] - \delta^2 [\delta_t^\alpha (V_i^n) + A(V_i^n)^{-1}] \\ &= \delta_t^\alpha [\delta_t^\alpha (V_i^n) - \delta^2 (V_i^n)] + A\delta_t^\alpha (V_i^n)^{-1} - A\delta^2 (V_i^n)^{-1} \\ &= \delta_t^\alpha (V_i^n)^{-1} [-1 + A] - A\delta^2 (V_i^n)^{-1}, \end{aligned}$$

$0 \leq i \leq M - 1, n \geq 0$ için

$$\delta_t^\alpha J_i^n - \delta^2 J_i^n = -(1 - A)\delta_t^\alpha [(V_i^n)^{-1}] - A\delta^2 [(V_i^n)^{-1}]$$

$i = M$ için

$$\delta_t^\alpha J_M^n - \delta^2 J_M^n = -(1 - A)\delta_t^\alpha (V_M^n)^{-1} - \frac{2}{\Delta x} (1 - V_M^n)^{-1} - A\delta^2 (V_M^n)^{-1}.$$

Lemma 3.12 ve Lemma 3.13 kullanılarak

$$\begin{aligned} \delta_t^\alpha J_i^n - \delta^2 J_i^n &\leq (1 - A)(V_i^n)^{-2} \delta_t^\alpha [(V_i^n)] + (V_i^n)^{-2} A\delta^2 [(V_i^n)] \\ &= (V_i^n)^{-2} \delta_t^\alpha (V_i^n) - A(V_i^n)^{-2} \delta_t^\alpha (V_i^n) + (V_i^n)^{-2} A\delta^2 [(V_i^n)] \\ &= (V_i^n)^{-2} [\delta_t^\alpha (V_i^n) - A\delta_t^\alpha (V_i^n) + A\delta^2 (V_i^n)] \\ &= (V_i^n)^{-2} [\delta_t^\alpha (V_i^n) + A(V_i^n)^{-1}] \\ \delta_t^\alpha J_i^n - \delta^2 J_i^n &\leq (V_i^n)^{-2} J_i^n. \end{aligned}$$

Dolayısıyla;

$$\delta_t^\alpha J_i^n - \delta^2 J_i^n - (V_i^n)^{-2} J_i^n \leq 0$$

elde edilir. (3.20) ifadesi ve Lemma 3.8 kullanılarak $J_i(0) \leq 0$ olduğu görülmektedir. Buradan da $J_i(t) \leq 0$ ise o zaman

$$\begin{aligned} J_i^n &= \delta_t^\alpha(V_i^n) + A(V_i^n)^{-1} \leq 0 \\ \delta_t^\alpha(V_i^n) &\leq -A(V_i^n)^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_t^\alpha(V_i^n) &\leq \frac{-A}{V_i^n(t)} \\ (V_i^n(t))\delta_t^\alpha(V_i^n) &\leq -A, \quad V_i^n(0) = \xi_i. \end{aligned}$$

Eşitsizliğin her iki tarafında s 'e göre 0 dan t 'ye integral alınırsa

$$\begin{aligned} \int_0^t (V_i^n(t)) \int_0^t \frac{(t-s)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial V_i^n}{\partial s} ds ds &= \int_0^t (V_i^n(t)) \partial V_i^n \int_0^t \frac{(t-s)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} ds \leq -At \\ \frac{t^{-\alpha+1}}{A\Gamma(2-\alpha)} \frac{(V_i^n(t))^2}{2} \Big|_0^t &\geq t \\ t^\alpha &= \frac{(1-\varphi_i)^2}{2A\Gamma(2-\alpha)}. \end{aligned}$$

$\|\varphi_i\|_\infty = \varphi_0$ ve $V_i^n(T) = 0$ kullanılarak

$$T \leq \left[\frac{(1-\|\varphi_i\|_\infty)^2}{2A\Gamma(2-\alpha)} \right]^{1/\alpha}. \quad (3.22)$$

bulunur. ■

Sonuç 3.1 İfade (3.22), $[t_0, T)$ arasında integrallenirse

$$\begin{aligned} T - t_0 &\leq \left[\frac{(1-U_i^n(t))^2}{2A\Gamma(2-\alpha)} \right]^{1/\alpha} \\ \|U_i^n\|_\infty &\leq 1 - C^{1/2}(T-t_0)^{\alpha/2} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $C = 2A\Gamma(2-\alpha)$ 'dir. Bu sonuç aynı zamanda ayrık problemin söntüleme zamanının sınırlılığı için önemlidir.

3.5 Yakınsaklık, Tutarlılık ve Kararlılık Analizi

Bu bölümde uygulanan sonlu farklar yönteminin yakınsaklık, tutarlılık ve kararlılık analizleri yapılacaktır.

Sonsuz sayıda ondalıklı basamaklı ifadeler sonlu fark denklemlerinin çözümünde kullanılabilir olsaydı u tam çözümü elde edilebilirdi. Bu durum pratikte mümkün olmamakla birlikte sonlu sayıda ondalık basamak içeren hesaplamalarda her zaman yuvarlama hatası olmaktadır. Bu yüzden, bulduğumuz çözüm aslında u değildir. Bulunan çözüm N ile gösterilsin ve nümerik çözüm olarak adlandırılın.

Ω bölgesinde (x_i, t_j) ağı ile örülsün. Eğer

$$Lu = f, \quad (x, t) \in \Omega \quad (3.23)$$

kısmi türevli denklemlerdeki tüm türevler fark denklemi ile değiştirilirse sonuç,

$$D[\omega_{i,j}] = f_{i,j}, \quad (x, t) \in \Omega \quad (3.24)$$

sonlu fark denklemi (3.24) olur. Eşitlik (3.23) deki sürekli problem ayrık hale getirilerek (3.24) elde edilmiş olur. Bu ayrık denklemin (i, j) noktalarındaki $\omega_{i,j}$ çözümü kısmi türevli denklemlerin aynı noktalarındaki tam çözümü $u(x, t)$ ye yaklaşır.

Tanım 3.1 (Sayısal Hata) $Lu = f$ çözümünün fark denkleminde verdiği hataya lokal kesme hatası denir ve bu hata aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$N_{i,j} = D[u_{i,j}] - f_{i,j}$$

Tanım 3.2 (Yakınsaklık) Kısmi türevli denklemi yaklaşık olarak ifade eden bir adımli sonlu fark metodunun yakınsak olması ile diferensiyel denklemin çözümü $u(x, t)$ ve sonlu fark denkleminin çözümü $\omega(i, j)$ ise

- $\omega(i, 0) = u(x, 0), \quad i\Delta x \rightarrow x$
- $\omega(i, j) \rightarrow u(x_i, t_j)$ ve $(i\Delta x, j\Delta t) \rightarrow (x, t), \quad (\Delta x, \Delta t) \rightarrow 0$

olarak ifade edilir.

Tanım 3.3 (Tutarlılık) Bir $Lu = f$ lineer kısmi türevli denklemi ve $L_{(\Delta x, \Delta t)}\omega = f$ sonlu fark denklemi verilmiş olsun. Her basamaktan türevi sürekli olan bir $\phi(x, t)$ fonksiyonu için $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$ iken

$$L\phi - L_{(\Delta x, \Delta t)}\phi \rightarrow 0$$

olması durumunda sonlu fark denklemi verilen kısmi türevli denklem ile tutarlıdır denir. Buradaki yaklaşım her ağ noktasında noktasal yakınsaklıktır.

Tanım 3.4 (Kararlılık) Kısmi türevli denklemlerin sonlu farklar yöntemiyle nümerik çözümü elde edilirken hesaplamamın her aşamasında hatalar ortaya çıkar. Eğer ortaya çıkan bu hatalar hesaplama ilerledikçe sınırsız olarak büyümüyorsa bu yöntem kararlıdır denir. Sayısal yöntemlerin kararlılığını Fourier yöntemi ile de inceleyebiliriz. Bu yöntemde

$$\psi_j^n = \xi^n e^{i\beta_j \Delta x} \quad (3.25)$$

şeklinde çözümlerin olmasından faydalanılır. Eğer $|\xi| \leq 1$ ise sayısal yöntem kararlıdır; $|\xi| > 1$ ise kararsızdır denir.

Teorem 3.3 (Lax-Richtmyer Denklik Teoremi) Başlangıç değer problemi iyi kurulumlu olarak verilen bir kısmi türevli denklem için tutarlı bir sonlu fark denklemi yakınsaktır ancak ve ancak bu sonlu fark denklemi kararlı ise. Yani; sonlu fark yönteminin yakınsak olması için gerek ve yeter koşul tutarlı ve kararlı olmasıdır. (Strikwerda 1989)

Teorem 3.4 Uygulanan yöntemin (3.5) kesin çözüme yakınsama oranı (t_j, x_i) noktasında $\Theta(\Delta t^{2\alpha} + \Delta x^2)$ dir.

İspat. Genelleştirilmiş Taylor teoremi (1.16) kullanılırsa

$$\begin{aligned} u(t) &= \sum_{i=0}^n \frac{(t-a)^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha+1)} D_t^{i\alpha} u(a) + \frac{D_t^{(n+1)\alpha} u(a)}{\Gamma((n+1)\alpha+1)} (t-a)^{(n+1)\alpha} \\ &= \frac{(t-a)^0}{\Gamma(\alpha+1)} D_t^0 u(a) + \frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} D_t^\alpha u(a) + \frac{(t-a)^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} D_t^{2\alpha} u(a) + \dots \\ &= u(a) + \frac{\Delta t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} D_t^\alpha u(a) + \Theta(\Delta t)^{2\alpha} + \dots \end{aligned}$$

olup, sayısal yöntemin zaman yönündeki yakınsama oranı $\Delta t^{2\alpha}$ olarak bulunur.

Yer değiştirme yani uzaysal alanda yakınsama oranı ise Taylor serisi açılımları yardımı ile bulunur. Taylor serisi açılımları aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{aligned} u_{i+1,j} &= u_{i,j} + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \Delta x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \Theta(\Delta x^3) \\ u_{i-1,j} &= u_{i,j} - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \Delta x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \Theta(\Delta x^3) \end{aligned}$$

Bu ifadeler

$$\frac{\partial^\alpha U(x_i, t_j)}{\partial t^\alpha} = \frac{U_{i-1}^j(t) - 2U_i^j(t) + U_{i+1}^j(t)}{\Delta x^2} + F_i^j \quad (3.26)$$

eşitliğinde yerine yazıldığında uzaysal yönde yakınsama oranı Δx^2 olarak bulunur ki sonuç olarak

$$N_{i,j} = (u_t^\alpha - K u_{xx} - F_i^j) + \Delta t^{2\alpha} D_t^{2\alpha} u + K u_{xxxx} \Delta x^2 + \dots$$

elde edilir. (Burada $N_{i,j}$: "Lokal Kesme Hatası" anlamındadır).

Yöntemin yakınsama oranı $\Theta(\Delta t^{2\alpha} + \Delta x^2)$ dir. Bu da göstermektedir ki uygulanan sayısal yöntemin zaman yönündeki yakınsama oranı $\Delta t^{2\alpha}$ ve uzaysal yönde yakınsama oranı ise Δx^2 dir. Ek olarak nümerik hatanın ana kısmı Δt ve $\Delta x \rightarrow 0$ iken sifıra yakınsak olup, dolayısıyla uygulanan yöntem tutarlıdır. ■

Yakınsaklık analizi için çoğu zaman yakınsaklık analizi yerine kararlılık ve tutarlılık analizlerini yapmak tercih edilir. Bu bağlamda; nümerik analizin en önemli teoremlerinden biri ise Lax Theoremi'dir. Bu teorem; yakınsaklık (convergence) ile kararlılık (stability) + tutarlılık (consistency) birbirini çift yönlü olarak gerektirdiğini ifade etmektedir.

Teorem 3.5 Uygulanan yöntem (3.5) kararlıdır.

İspat. Kapalı sonlu fark yönteminin kararlılık analizi için denklem (3.9) kullanılır. Buna göre

$$-K U_{i-1}^j + (1 + 2K) U_i^j - K U_{i+1}^j = \Delta t^\alpha \sum_{k=0}^{j-1} [T_{j,k+1} - T_{j,k}] U_i^k + F_i^j,$$

$0 \leq i \leq M - 1, 0 \leq j \leq N$ yazılabilir. \tilde{U}_i^j denklem (3.9) için yaklaşık çözüm olsun ve

$$\xi_i^j = U_i^j - \tilde{U}_i^j, \quad 0 \leq i \leq M, \quad 0 \leq j \leq N$$

değerini yuvarlama hatası olarak alalım.

$$\xi_i^j = (\xi_0^j, \xi_1^j, \dots, \xi_M^j)^T$$

ve sonsuz normu

$$\|\xi_i^j\|_\infty = \max_{0 \leq i \leq M} |\xi_i^j| = |\xi_m^j|.$$

Yuvarlama hatası aşağıdaki denklemi sağlar:

$$-K \xi_{i-1}^j + (1 + 2K) \xi_i^j - K \xi_{i+1}^j = \Delta t^\alpha \sum_{k=0}^{j-1} [T_{j,k+1} - T_{j,k}] \xi_i^k.$$

Sonlu fark yönteminin kararlı olup olmadığını kontrol etmek için, yuvarlama hatası ξ_i^j nin boyutunun zaman içinde nasıl geliştiğini inceleyelim:

$$L_1 \xi_i^j = -K \xi_{i-1}^j + (1 + 2K) \xi_i^j - K \xi_{i+1}^j \quad (3.27)$$

ve

$$L_2 \xi_i^{j-1} = \Delta t^\alpha \sum_{k=0}^{j-1} [T_{j,k+1} - T_{j,k}] \xi_i^k \quad (3.28)$$

olarak tanımlayalım. Buradan eşitlikler (3.27) ve (3.28)

$$L_1 \xi_i^j = L_2 \xi_i^{j-1}$$

olarak yazılır. Denklem (3.28) ve $[T_{j,k+1} - T_{j,k}] > 0$ olduğu dikkate alınarak

$$|L_2 \xi_i^{j-1}| = \left| \Delta t^\alpha \sum_{k=0}^{j-1} [T_{j,k+1} - T_{j,k}] \xi_i^k \right| \leq |\xi_i^{j-1}| \Delta t^\alpha \sum_{k=0}^{j-1} [T_{j,k+1} - T_{j,k}]$$

elde edilir. Burada,

$$|\xi_i^{j-1}| = \max_{0 \leq k \leq j-1} |\xi_i^k|$$

olarak tanımlanabilir. $\sum_{k=0}^{j-1} [T_{j,k+1} - T_{j,k}] = \Delta t^{-\alpha}$ dir. Burada $T_{j,j} = \Delta t^{-\alpha}$ ve $T_{j,0} = 0$ dir.

$$|L_2 \xi_i^{j-1}| = \left| \Delta t^\alpha \sum_{k=0}^{j-1} [T_{j,k+1} - T_{j,k}] \xi_i^k \right| \leq |\xi_i^{j-1}|$$

yazılır. Sonuç olarak

$$\begin{aligned} \|\xi_i^j\|_\infty &= |\xi_m^j| = |-K \xi_m^j + (1 + 2K) \xi_m^j - K \xi_m^j| \\ &= |L_1 \xi_m^j| = |L_2 \xi_m^{j-1}| \leq |\xi_m^{j-1}| = \|\xi_m^{j-1}\|_\infty \end{aligned}$$

elde edilir. Yani

$$\|\xi_i^j\|_\infty = \|\xi_i^0\|_\infty, \quad 0 \leq j \leq N.$$

Dolayısıyla, uygulanan yöntem (3.5) kararlıdır. ■

Uyarı 3.2 Sayısal yöntemin kararlılığını Fourier yöntemi ile de inceleyebiliriz. Buna göre

$$\psi_j^n = \xi^n e^{i\beta j \Delta x} \quad (3.29)$$

olsun. (3.29) ifadesini (3.8) denkleminde yerine yazalım. Buradan

$$\begin{aligned} & \Delta t^\alpha \sum_{k=1}^{n-1} T_{n,k} (\xi^k e^{i\beta j \Delta x} - \xi^{k-1} e^{i\beta j \Delta x}) + [(\xi^n e^{i\beta j \Delta x} - \xi^{n-1} e^{i\beta j \Delta x})] \\ &= K \{ \xi^n e^{i\beta(j-1)\Delta x} - 2\xi^n e^{i\beta j \Delta x} + \xi^n e^{i\beta(j+1)\Delta x} \} + \delta F \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \Delta t^\alpha \sum_{k=1}^{n-1} T_{n,k} \xi^k e^{i\beta j \Delta x} (1 - \xi^{-1}) + \xi^n e^{i\beta j \Delta x} [(1 - \xi^{-1})] \\ &= K \xi^n e^{i\beta j \Delta x} \{ e^{-i\beta \Delta x} - 2 + e^{i\beta \Delta x} \} + \delta F \end{aligned}$$

elde edilir. $K = \frac{\Delta t^\alpha \Gamma(2 - \alpha)}{\Delta x^2}$ ve $\delta = \Delta t^\alpha \Gamma(2 - \alpha)$ dir.

$n = 0$ için

$$\begin{aligned} [(1 - \xi^{-1})] - K \{ e^{-i\beta \Delta x} - 2 + e^{i\beta \Delta x} \} - \delta F &= 0 \\ [(1 - \xi^{-1})] - K \{ -2 \sin^2 \beta \Delta x \} - \delta F &= 0 \\ (1 - \xi^{-1}) &= K \{ -2 \sin^2 \beta \Delta x \} + \delta F \\ \xi^{-1} &= 1 - K \{ -2 \sin^2 \beta \Delta x \} - \delta F \\ \xi &= \frac{1}{1 + K \{ 2 \sin^2 \beta \Delta x \} - \delta F} \\ |\xi| &\leq 1 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece Von Neumann kararlılık analizine göre $|\xi| \leq 1$ olduğundan yöntem kararlıdır.

Teorem 3.6 Uygulanan (3.5) yöntemi yakınsaktır.

İspat. $u(x_i, t_j)$ denklem (2.9) un kesin çözümü olsun. $\varepsilon_i^j = u(x_i, t_j) - U_i^j$ olarak tanımlansın. Buradan hata denklemi

$$L_1 \varepsilon_i^j = L_2 \varepsilon_i^{j-1} + N_{i,j} \quad (3.30)$$

$N_{i,j}$, denklem (3.5)'in lokal kesme hatası olmak üzere

$$\|\varepsilon_i^j\|_\infty = \max_{0 \leq i \leq M} |\varepsilon_i^j| = |\varepsilon_m^j|$$

sonsuz normu olarak tanımlanır. Buradan,

$$\begin{aligned} \|\varepsilon_i^j\|_\infty &= |\varepsilon_m^j| = |L_1 \varepsilon_m^j| = |L_2 \varepsilon_m^{j-1} + N_{i,j}| \\ &\leq |L_2 \varepsilon_m^{j-1}| + |N_{i,j}| \leq |\varepsilon_m^{j-1}| + |N_{i,j}| \leq \|\varepsilon_i^{j-1}\|_\infty + N_{i,j} \max \end{aligned}$$

$$N_{i,j \max} = \max_{j,m} |N_{i,j}|.$$

$j = 1$ için

$$\|\varepsilon_i^1\|_\infty = \|\varepsilon_i^0\|_\infty + N_{i,j \max} = N_{i,j \max}$$

elde edilir.

$$\|\varepsilon_i^j\|_\infty \leq N_{i,j \max}, \quad 0 \leq j \leq N$$

$$N_{i,j \max} \leq C (\Delta t^{2\alpha} + \Delta x^2), \quad 0 \leq j \leq N$$

Sonuç olarak uygulanan yöntem yakınsaktır. ■

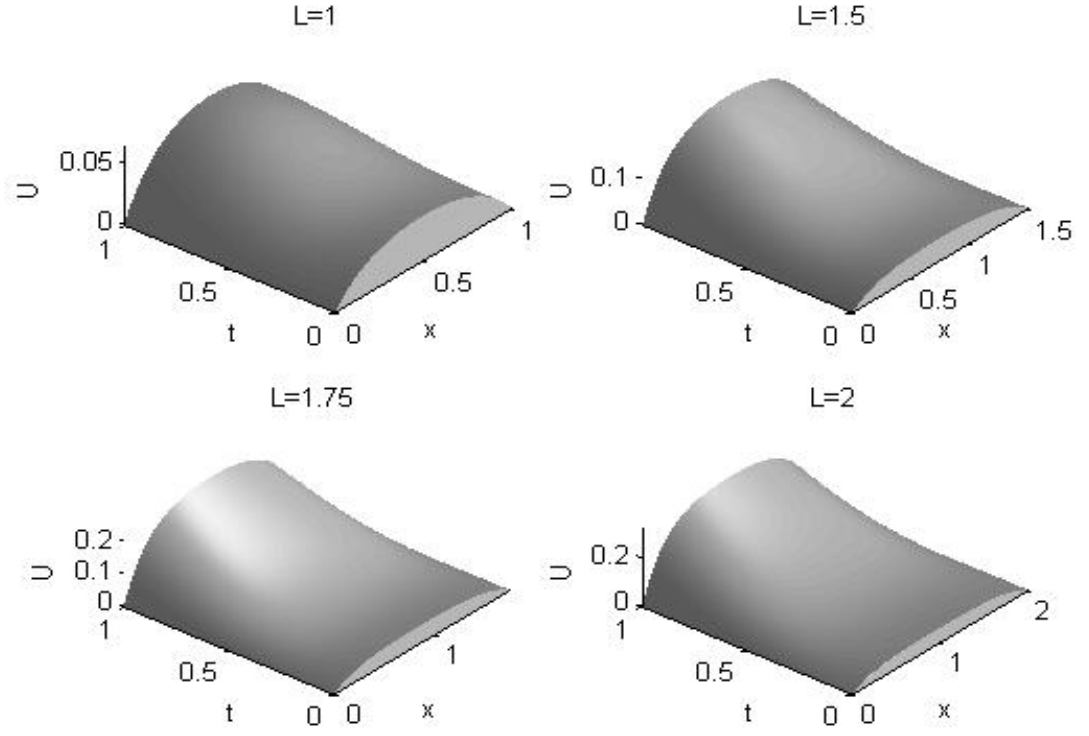
3.6 Sayısal Sonuçlar

Bu bölümde tekil kaynaklı zaman kesirli yayılım denklemi için önerilen sonlu fark yönteminin bazı sayısal simülasyonları ve sayısal sonuçları verilmektedir.

$[0, L]$ bölgesinin uzunluğuna bağlı olarak söndürme fenomeninin gözlemlenebileceği veya görülmeyebileceği bilinmektedir. $0 \leq x \leq L$ aralığında başlangıç koşulu olarak $u(x, 0) = 0.0005x^2(x-L)^2$ alınmıştır. İlk olarak zaman kesirli diferensiyel denklemde L değerlerine göre değişimi gözlemlenmektedir. Buna göre; ilk aşamada sabit değer olarak kesirli türevin basamağı $\alpha = 0.4$ alındığında farklı L sayısı seçimleri üzerine yöntemin sayısal çözümü simüle edilir. Sayısal çözümlerin birkaç özel durumu Şekil 3.1 de gösterilmektedir.

Şekil 3.1 de, L birden ikiye değişmesi durumunda sayısal çözümün kararlı davranıştan söndürme davranışına değiştiğini gözlemliyoruz. Söndürme zamanı $[0, 1]$ de bulunur. Şekil 3.1(a) ve 3.1(d) nin karşılaştırılması, söndürme olayı ortaya çıktığında, u nun zaman türevinin Şekil 3.1(d) de patladığını göstermektedir. L nispeten küçük olsa da, u çözümü mevcuttur ve Şekil 3.1(a) da zaman türevi sıfıra yaklaşır.

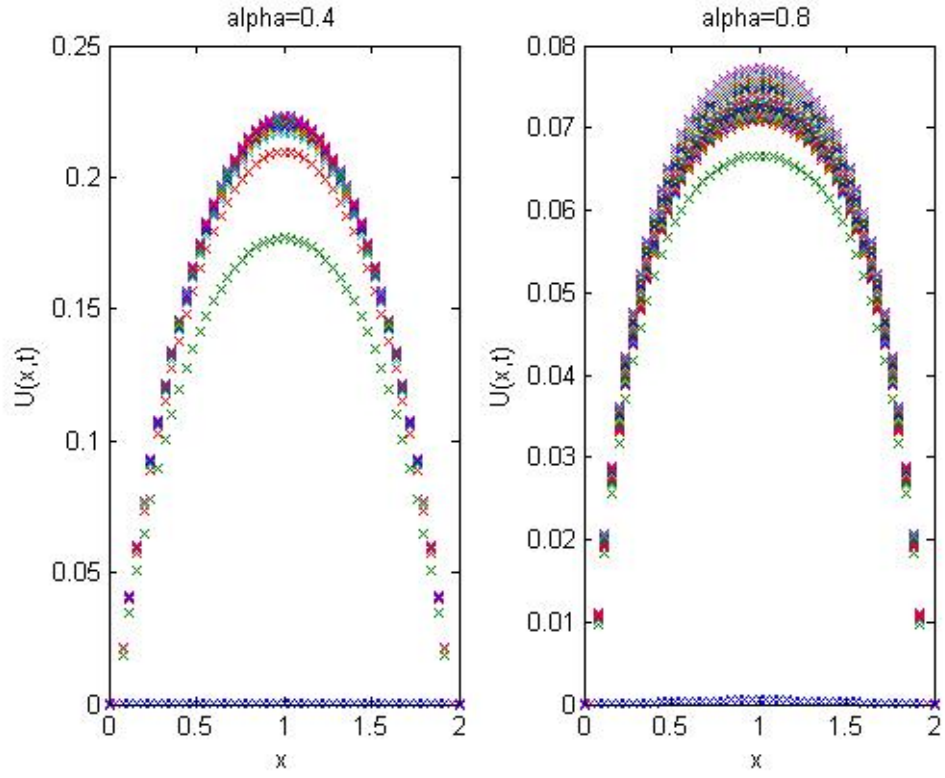
Şekil 3.2 de α basamağının çözüm dinamikleri üzerindeki etkisi gözlemlenmektedir. α nın etkisinin çözüm üzerindeki etkisi açıktır. Şekil 3.2(a) daki α değeri küçük seçilirse yani $\alpha = 0.4$ değeri için çözüm sönüm noktasına çok daha hızlı yakınsar. Şekil 3.2(b) deki α değeri büyük seçilirse yani $\alpha = 0.8$ değerinde ise başlangıç koşulundan kararlı bir dengeye kadar artacaktır. Burada, büyük α değerinde kesirli türevin güçlü hafıza yeteneği nedeniyle yavaş yayılım hızına karşılık gelir. Sayısal



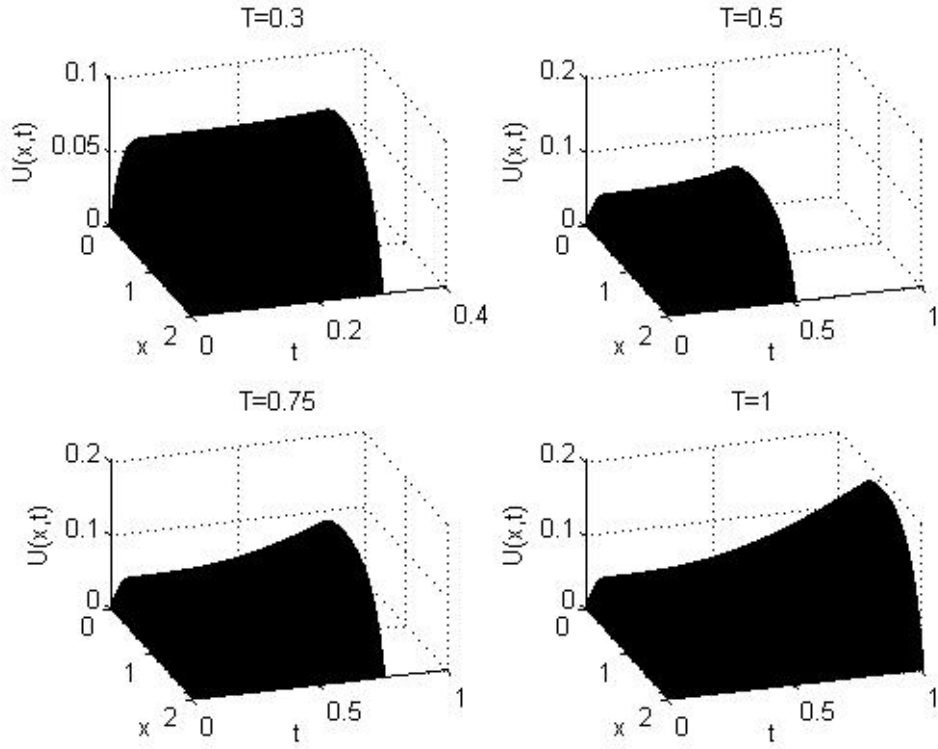
Şekil 3.1 $\alpha = 0.4$ ve farklı L değerleri için $u(x, t)$ çözümleri

testimizde, Şekil 3.2(a) da maksimum $u(x, t)$ değeri yaklaşık 0.25 iken, Şekil 3.2(b) de bu değer yaklaşık 0.08 dir. Bu, (x, t) deki çözümün daha büyük α ile daha yavaş yayıldığını göstermektedir.

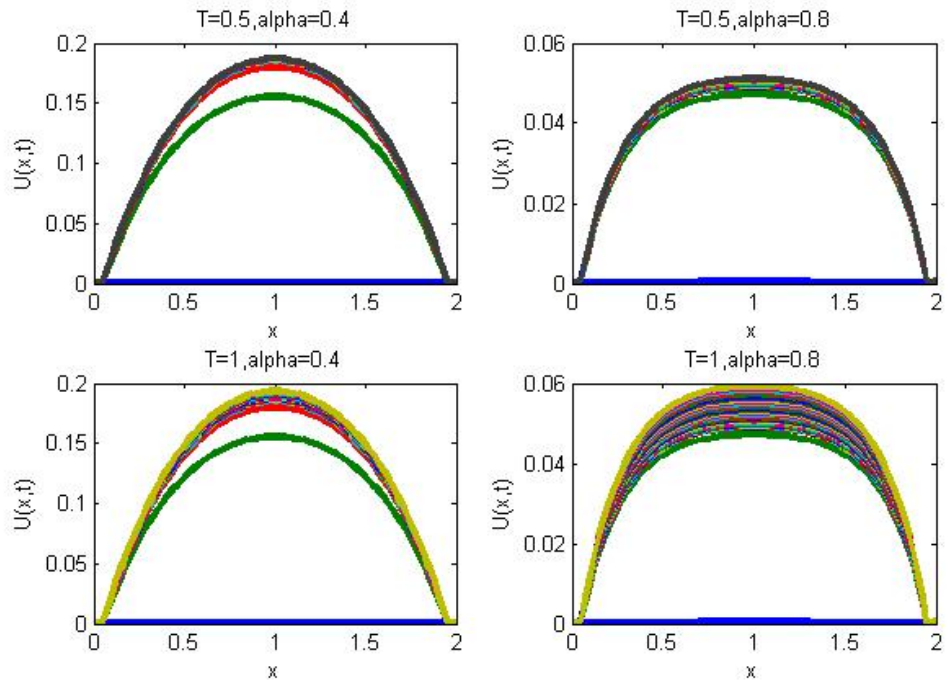
Şekil 3.3 ve Şekil 3.4 te Neumann sınır şartlı kapalı sonlu fark yönteminin $M = 800$ de ürettiği çözümleri görülmektedir. $x = L/2$ de hem $\alpha = 0.4$ değerinde hem de $\alpha = 0.8$ değerinde sonlu bir T zamanında sönüm durumunun gerçekleştiği yapılan nümerik deneylerle gösterilmiştir. Sayısal çözümün $x = L/2$ de $\alpha = 0.4$ ve $\alpha = 0.8$ değerlerinde u nun zaman türevinin $\alpha = 0.4$ değerinde $\alpha = 0.8$ değerine göre artan bir oranda büyüdüğünü göstermektedir.



Şekil 3.2 $\alpha = 0.4, \alpha = 0.8$ değerleri için $u(x, t)$ çözümleri



Şekil 3.3 $M = 800, \alpha = 0.4$ ve farklı T zamanlarındaki $u(x, t)$ çözümleri



Şekil 3.4. $\alpha = 0.4$ ve $\alpha = 0.8$ değerleri için farklı T zamanlarındaki $u(x, t)$ çözümleri

4. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

Son zamanlarda kesirli analiz kavramıyla birlikte kesirli türev ve kesirli integral konusu kapsamlı bir şekilde çalışılmaktadır. Günümüzde, kesirli basamaktan türev ve integral içeren diferensiyel denklemler çok sayıda mühendislik problemlerinde uygulanmıştır. Bu çalışmada ise kesirli ısı denklemi için iki farklı sönüm problemi ele alınmıştır. Parabolik denklemlerin bir örneği olarak ısı denklemi üzerinde yapılan çalışmalar son yıllarda artış göstermekte olup bu alanda en çok çalışılan alanlardan biri de sönüm ve patlama problemleridir. Literatürde, kısmi türevli diferansiyel denklemler kapsamında sönüm ve patlama problemlerini ele alan çok sayıda kaynak mevcuttur. Kesirli analiz çeşitli mühendislik alanlarında çalışılmakta olsa bile kesirli türev ve integral içeren sönüm ve patlama problemleri için yapılan çalışmalar çok nadirdir. Bu tez ile tekil ısı kaynaklı kesirli yayılım denklemleri üzerine yapılan bir çalışma olarak literatürdeki eksiklik giderilmeye çalışılmıştır. Bu amaçla ilk problem, parabolik denklemin tanımlı olduğu bölgenin içinde bir ısı kaynağına sahip olan ve sınırlarda akışın olmadığı tekil kaynaklı lineer olmayan kesirli bir yayılım denklemi çalışılmıştır. İkinci problem ise iki farklı tip tekil ısı kaynağına sahip biri denklemin tanımlı olduğu bölgenin içinde ve diğeri bölgenin sınırında bir parabolik denklem ele alınmıştır. Çalışılan parabolik tipten denklemlerin çözümünün sönüm davranışı incelenmiştir. Sonlu zamanda denklemlerin çözümünün söndüğü ve belirli şartlar altında zamana göre türevin patladığı ispatlanmıştır. Üçüncü bölümde, zaman-kesirli yayılım denklemleri için sonlu fark metodu oluşturularak denklemin sayısal çözümleri incelenmiştir. Uygulanan metodun kesin çözüme yakınsama oranı gösterilmiş olup uygulanan metodun tutarlılık, yakınsaklık, ve kararlılığı da gösterilmiştir. Denklemler için bir sönüm oranı ve bu sönüm oranından yararlanarak sönüm zamanı için bir sınır elde edilmiştir. Ayrıca elde edilen sonuçların sayısal ve grafiksel olarak karşılaştırıldığı bazı simülasyonlar verilmiştir.

KAYNAKLAR

- Acker, A. and Walter, W. 1976. The quenching problem for nonlinear parabolic differential equations. *Lecture Notes in Mathematics*, 564, 1-12, Springer, New York.
- Atanackovic, T.M., Pilipovi, S. and Stankovi, B. 2014. *Fractional Calculus with Applications in Mechanics: Vibrations and Diffusion Processes*. John Wiley & Sons.
- Baleanu, D., Kumar, D. and Singh, J. 2017. A new analysis for fractional model of regularized long-wave equation arising in ion acoustic plasma waves. *Math. Method Appl. Sci.*, 40, (15), 5642–5653.
- Baleanu, D., Kumar, D. and Singh, J. 2018. A new numerical algorithm for fractional Fitzhugh-Nagumo equation arising in transmission of nerve impulses. *Nonlinear Dyn.*, 91, (1), 307–317.
- Chan, C.Y. and Ozalp, N. 1995. Singular reactions-diffusion mixed boundary value quenching problems. *Dynamical Systems and Applications*. World Sci. Ser. Appl. Anal., 4, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 127-137.
- Chan, C.Y. and Yuen, S.I. 2001. Parabolic problems with nonlinear absorptions and releases at the boundaries. *Appl. Math. Comput.*, 121, 203-209.
- Chan C.Y. and Liu, H.T. 2016. A Maximum principle for Fractional Diffusion Differential Equations. *Quarterly of Applied Mathematics*, 3, 421-427.
- Deng, K. and Xu, M. 1999. Quenching for a nonlinear diffusion equation with a singular boundary condition. *Z. Angew. Math. Phys.*, 50, 574-584.
- Fila, M. and Levine, H.A. 1993. Quenching on the boundary. *Nonlinear Anal.*, 21, 795–802.
- Guo, J.S. 1990. On the quenching behavior of the solution a semilinear parabolic equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 151 (1), 58-79.
- Hilfer R. 2000. *Applications of Fractional Calculus in Physics*. World Scientific Publishing.
- Kawarada, H. 1975, On solutions of initial boundary value problem. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 10, 729-736.
- Kilbas, A.A. and Srivastava, H.M. and Trujillo, J.J. 2006. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier.
- Kumar, D., Singh, J. and Qurashi, M. 2017. A novel numerical approach for a nonlinear fractional dynamical model of interpersonal and romantic relationships. *Entropy*, 19, (7), 375–391.

- Kumar, D., Singh, J. and Baleanu, D. 2018. Analysis of regularized long-wave equation associated with a new fractional operator with Mittag-Leffler type kernel. *Physica A.*, 492, 155–167.
- Luchko, Y. 2009. Maximum principle for the generalized time-fractional diffusion equations. *Journal Mathematical Analysis And App.*, 351, 218–223.
- Li, C.P. and Zeng, F.H. 2015. *Numerical Methods for Fractional Calculus*. Chapman and Hall/CRC Press.
- Liang, K.W., Lin, P. and Tan, R.C.E. 2007. Numerical solution of quenching problems using mesh-dependent variable temporal steps. *Applied Numerical Mathematics*, 57, 791-800.
- Lin, Z. and Wang, M. 1999. The blow-up properties of solutions to semilinear heat equations with nonlinear boundary conditions. *Z. angew. Math.Phys.*, 50, 361-374.
- Mehrer, H. 2007. *Diffusion in Solids: Fundamentals. Methods, Materials. Diffusion-Controlled Processes*, Springer, Berlin.
- Metzler, R. and Klafter, J. 2000. The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach. *Phys. Report.*, 339 1–77.
- Odibat Z. and Shawagfeh N.T. 2007. Generalized Taylor's formula. *Applied Mathematics and Computation*, 186, 286–293.
- Podlubny I. 1999. *Fractional Differential Equations*. Academic Press.
- Protter, M.H. and Weinberger, H. F. 1967. *Maximum principles in differential equations*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- Sabatier, J., Agrawal, O.P. and Machado, J. 2007. *Advances in Fractional Calculus*, Springer.
- Salin, T. 2003. On quenching with logarithmic singularity. *Nonlinear Anal.*, 52, 261-289.
- Selçuk, B. ve Özalp N. 2014. The quenching behaviour of a semilinear heat equation with a singular boundary outflux. *Quarterly of Applied Mathematics*, 4, 747–752.
- Singh, J., Kumar, D. and Baleanu, D. 2017. Modified Kawahara equation within a fractional derivative with non-singular kernel. *Therm. Sci.*, 22 (2) 789–796.
- Singh, J., Kumar, D. and Baleanu, D. 2018. An efficient numerical algorithm for the fractional Drinfeld-Sokolov Wilson equation. *Appl. Math. Comput.*, 335, 12–24.
- Strikwerda, C. (1989). *Sonlu Fark Şemaları ve Kısmi Diferansiyel Denklemler*. Chapman ve Hall, ISBN 0-534-09984-X, 26-222.

- Sun, H.G., Zhang, Y. and Chen, W. 2014. Use of a variable-index fractional-derivative model to capture transient dispersion in heterogeneous media. *J. Contam. Hydrol.*, 157, 47–58.
- Walter, W. 1976. Parabolic differential equations with a singular nonlinear term. *Funkcialaj Ekvacio*, 19, 271-277.
- Xu, Y. and Zheng, Z.S. 2017. Quenching phenomenon of a time-fractional diffusion equation with singular source term. *Math. Method Appl. Sci.*, 40 (16), 5750–5759.
- Xu, Y. 2018. Quenching phenomenon in a fractional diffusion equation and its numerical simulation. *Int. J. Comput. Math.*, 95 (1) 98–113.
- Xu, Y. and Wang, Z. 2018. Quenching phenomenon of a time fractional Kawarada equation. *Journal of Computational and Non.Dynamics.*, doi:10.1115/1.4041085.
- Zhi, Y. and Mu, C. 2007. The quenching behavior of a nonlinear parabolic equation with a nonlinear boundary outflux. *Appl. Math.Comput.*, 184, 624-630.