T.C.
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Q-DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM METODU VE UYGULAMALARI

Yüksek Lisans Tezi

Madeha MOHAMMED ABDALRAHMAN IBRAHIM

Danışman

Doç. Dr. Fatma HIRA

SAMSUN
2023

TEZ KABUL VE ONAYI

Madeha MOHAMMED ABDALRAHMAN IBRAHIM tarafından, **Doç. Dr. Fatma HIRA** danışmanlığında hazırlanan **"Q-DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM METODU VE UYGULAMALARI"** başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından 1.9.2023 tarihinde yapılan sınav sonucunda oy birliği ile başarılı bulunarak Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

	Unvanı Adı Soyadı **Üniversitesi** **Ana Bilim/Ana Sanat Dalı**	**Sonuç**
Başkan	Doç. Dr. Nihat ALTINIŞIK Ondokuz Mayıs Üniversitesi Matematik Ana Bilim Dalı	x Kabul ☐ Ret
Üye	Doç. Dr. Fatma HIRA Ondokuz Mayıs Üniversitesi Matematik Ana Bilim Dalı	x Kabul ☐ Ret
Üye	Dr. Öğr. Üyesi Serpil ŞAHİN Amasya Üniversitesi Matematik Ana Bilim Dalı	x Kabul ☐ Ret

Bu tez, Enstitü Yönetim Kurulunca belirlenen ve yukarıda adları yazılı jüri üyeleri tarafından uygun görülmüştür.

Prof. Dr. Ahmet TABAK
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI

Hazırladığım Yüksek Lisans tezinin bütün aşamalarında bilimsel etiğe ve akademik kurallara riayet ettiğimi, çalışmada doğrudan veya dolaylı olarak kullandığım her alıntıya kaynak gösterdiğimi ve yararlandığım eserlerin Kaynaklar'da gösterilenlerden oluştuğunu, her unsurun enstitü yazım kılavuzuna uygun yazıldığını ve TÜBİTAK Araştırma ve Yayın Etiği Kurulu Yönetmeliği'nin 3. bölüm 9. maddesinde belirtilen durumlara aykırı davranılmadığını taahhüt ve beyan ederim.

Etik Kurul Gerekli mi?

Evet ☐ (Gerekli ise ekler kısmına ekleyiniz)

Hayır ☒

12/06/2023
Madeha MOHAMMED

TEZ ÇALIŞMASI ÖZGÜNLÜK RAPORU BEYANI

Tez Başlığı: Q-DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM METODU VE UYGULAMALARI

Yukarıda başlığı belirtilen tez çalışması için şahsım tarafından 12/06/2023 tarihinde intihal tespit programından alınmış olan özgünlük raporu sonucunda;

Benzerlik oranı : % 21

Tek kaynak oranı : % 2 çıkmıştır.

12/06/2023
Doç. Dr. Fatma HIRA

ÖZET

Q-DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM METODU VE UYGULAMALARI

Madeha MOHAMMED ABDALRAHMAN IBRAHIM
Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı
Yüksek Lisans, Haziran/2023
Danışman: Doç. Dr. Fatma HIRA

Diferansiyel dönüşüm metodu lineer olan veya lineer olmayan adi veya kısmi türevli pek çok diferansiyel denklemi çözmekte etkili bir yöntemdir. Diğer yöntemlere kıyasla kolay uygulanabilir olması ve özellikle lineer olmayan denklemlere de etkili bir şekilde uygulanabilmesi metodun tercih edilme sebeplerindendir.

Son yılların güncel konularından biri de q-analizdir. Buradaki q-türev limit almadan sadece fark oranı ile tanımlandığı için q-analiz limitsiz analiz olarak da bilinmektedir.

Diferansiyel dönüşüm metodunun q-benzeri olarak q-diferansiyel dönüşüm metodu üzerine incelemeler yapılmıştır ve yapılmaya da devam etmektedir. Bu tezde, bir boyutlu q-diferansiyel dönüşüm metodu ve temel özellikleri incelenerek bazı q-başlangıç değer problemleri üzerinde uygulamasına yer verilmiştir.

Tezin birinci bölümünde, q-analizi, diferansiyel dönüşüm metodu ve q-diferansiyel dönüşüm metodu ile ilgili literatür özetine yer verilmiştir. Tezin ikinci bölümünde, q-analizi ve diferansiyel dönüşüm metodu ile ilgili temel tanım, teorem ve özellikler verilmiştir. Tezin üçüncü bölümünde, q-diferansiyel dönüşüm metodu tanımlanarak, metotla ilgili temel teoremler ve ispatları verilmiştir. Tezin dördüncü bölümü, q-diferansiyel dönüşüm metodunun q-diferansiyel denklemlere uygulanmasına ayrılmıştır. Bu bağlamda q-Lane-Emden diferansiyel denklemi, q-Riccati diferansiyel denklemi, q-integro-diferansiyel denklemi gibi lineer ve lineer olmayan q-diferansiyel denklemi içeren başlangıç değer problemleri bu metotla çözülerek, tam çözümler veya seri çözümler elde edilmiştir. Q-türev tanımı gereği $q \to 1$ için limit alındığında q-analizdeki bulgu ve sonuçlar klasikteki karşılıklarına indirgenmektedir. Tez kapsamında incelenen problemlerde de $q \to 1$ için limit alındığında klasik karşılıkları ve çözümleri elde edilmektedir. Tezin son bölümünde diğer sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

Anahtar Sözcükler: q-diferansiyel dönüşüm metodu, q-analiz, q-başlangıç değer problemi, q-integro-diferansiyel denklem

ABSTRACT

Q-DIFFERENTIAL TRANSFORM METHOD AND ITS APPLICATIONS

MADEHA MOHAMMED ABDALRAHMAN IBRAHIM
Ondokuz Mayıs University
Institute of Graduate Studies
Department of Mathematics
Master, June/2023
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Fatma HIRA

The differential transformation method is an effective method for solving many linear or non-linear ordinary or partial differential equations. The fact that it is easy to apply compared to other methods and that it can be applied effectively to non-linear equations is one of the reasons why the method is preferred.

One of the current issues of recent years is q-calculus. Since the q-derivative here is defined only by the difference ratio without limit, q-calculus is also known as unlimited calculus.

Investigations on the q-differential transformation method as q-analogue of the differential transformation method have been made and continue to be made. In this thesis, the one-dimensional q-differential transformation method and its basic properties are examined and its application on some q-initial value problems is given.

In the first part of the thesis, literature summary about q-calculus, differential transformation method and q-differential transformation method is given. In the second part of the thesis, basic definitions, theorems and properties related to q-calculus and differential transformation method are given. In the third part of the thesis, the q-differential transformation method is defined and the basic theorems and proofs about the method are given. The fourth chapter of the thesis is devoted to the application of the q-differential transformation method to q-differential equations. In this context, initial value problems involving linear and non-linear q-differential equations such as q-Lane-Emden differential equation, q-Riccati differential equation, q-integro-differential equation are solved with this method, and exact solutions or serial solutions are obtained. By the definition of the q-derivative, when the limit for $q \to 1$ is taken, the findings and results in the q-calculus are reduced to their classical counterparts. In the problems examined within the scope of the thesis, when the limit for $q \to 1$ is taken, the classical equivalents and solutions are obtained. In the last part of the thesis, other conclusions and suggestions are given.

Keywords: q-differential transformation method, q-calculus, q-initial value problem, q-integro-differential equation

ÖN SÖZ VE TEŞEKKÜR

Çalışmamın her aşamasında bana destek olan, bilgi ve deneyimleri ile yol gösteren danışman hocam Sayın Doç. Dr. Fatma HIRA'ya ve hep yanımda olan Sudan'daki canım aileme yürekten teşekkür ederim.

Madeha MOHAMMED

İÇİNDEKİLER

TEZ KABUL VE ONAYI i
BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI ii
TEZ ÇALIŞMASI ÖZGÜNLÜK RAPORU BEYANI ii
ÖZET iii
ABSTRACT iv
ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR v
İÇİNDEKİLER vi
SİMGELER VE KISALTMALAR vii
TABLOLAR DİZİNİ viii
1. GİRİŞ 1
2. TEMEL KAVRAMLAR 4
2.1. Q-Analiz……………………………….........……………………………….4
2.2. Diferansiyel Dönüşüm Metodu ve Özellikleri...…...................……………………8
3. Q-DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM METODU VE ÖZELLİKLERİ..................……10
4. Q-DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM METODUNUN Q-DİFERANSİYEL DENKLEMLERE UYGULANMASI....……………………..…………….…..............21
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.. 33
KAYNAKLAR 34
ÖZ GEÇMİŞ.. 37

SİMGELER VE KISALTMALAR

A	: q -geometrik küme
q	: $(0,1)$ arasında bir sayı
D_q	: q -türev operatörü
$[\alpha]_q$	: α sayısının q -benzeri
$[\infty]_q$	: Sonsuzun (∞) q -benzeri
$[n]_q!$	: Faktöriyelin q -benzeri
$(a;q)_n = (1-a)_q^n$	: q -Pochhammer sembolü veya q -öteleme faktörü
$e_q(x)$	: 1.tür q -üstel fonksiyonu
$E_q(x)$	: 2.tür q -üstel fonksiyonu
$f(x)$	: Orijinal fonksiyon
$F(k)$	: Dönüştürülmüş fonksiyon
$F_q(k)$	: q -dönüştürülmüş fonksiyon

TABLOLAR DİZİNİ

Tablo 2.1. Diferansiyel dönüşüm metodunun bazı temel özellikleri 9
Tablo 3.1. q -diferansiyel dönüşüm metodunun bazı temel özellikleri................................ 19

1. GİRİŞ

Fizik, kimya ve mühendislikteki birçok problem, adi veya kısmi diferansiyel denklemler ile modellenmektedir. Bu tür denklemlerin, özellikle lineer olmayanların analitik çözümünün zor olduğu durumlarda sayısal yöntemler tercih edilmektedir. Bu yöntemlerden biri de diferansiyel dönüşüm metodudur ve yarı analitik bir metottur. Problemlere uygulanmasının kolay olması ve çoğunlukla tam çözümün elde edilmesine olanak sağlaması yönünden matematiğin yanı sıra farklı alanlarda da tercih edilen bir metottur.

Diferansiyel dönüşüm metodu aslında Taylor seri açılımına dayanmaktadır. Bu metot ile Taylor seri açılımındaki katsayılar dönüşüm değerleri olarak tanımlanıp seri formda çözüm elde edilmektedir.

Diferansiyel dönüşüm metodu ilk kez Zhou (1986) tarafından literatüre kazandırılmış ve elektrik devrelerinin oluşturduğu lineer ve lineer olmayan başlangıç değeri problemlerini çözmek için kullanılmıştır. Sonrasında metodun farklı boyutlardaki genellemeleri yapılarak çok farklı problemlere uygulanması incelenmiştir.

İki boyutlu diferansiyel dönüşüm metodu (Chen ve Ho, 1999; Ayaz, 2003) çalışmalarında ele alınmıştır ve bu metotla kısmi diferansiyel denklemler ve sistemlerinin çözümleri incelenmiştir.

Genel olarak diferansiyel dönüşüm metodu farklı türden pek çok denkleme uygulanabilen kullanışlı bir metottur. Bu metotla diferansiyel ve integral denklemlerin çözümleri (Odibat, 2008; Arikoğlu ve Özkol, 2005, 2008; Moharin ve Patila, 2012; Biazar vd., 2012) çalışmalarında; denklem sistemlerinin çözümleri (Ayaz, 2004; Abdel-Halim Hassan, 2008; Ravi Kanth ve Aruna, 2008; Mirzaee, 2011) çalışmalarında; lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem çözümleri (Ravi Kanth ve Aruna, 2009; Jafari vd., 2010; Gavabaria vd., 2014; Jang vd., 2000) çalışmalarında incelenmiştir. Özdeğer problemleri (Chen ve Ho, 1996) ve fuzzy diferansiyel denklemleri (Allahviranloo vd., 2009) de diferansiyel dönüşüm metodu ile çözülmüştür. Metodun farklı alanlardaki uygulamalarına örnek olarak, KdV ve mKdV denklemlerinin soliter dalga çözümleri (Kangagil ve Ayaz, 2009), kimyadaki bazı başlangıç değer problemleri (Qin ve Lou, 2021), Euler Bernoulli kolonunun kararlılık analizinin incelenmesi (Muralikrishnan vd., 2015), konsol kirişin büyük deformasyon analizi (Abbasi ve Javed, 2020), doğrusal olmayan biyokimyasal reaksiyon modelinin güvenilir bir şekilde işlenmesi (Batiha ve Batiha, 2011) çalışmaları verilebilir.

Diferansiyel dönüşüm metodu ile farklı metotların karşılaştırması (en küçük karaler yöntemi, sonlu fark yöntemi, Laplace dönüşümü gibi) veya bu metotların birlikte (hibrid) kullanımı (Chu ve Chen, 2008; Alquran vd., 2012; Hasankhani vd., 2014; Bozyiğit vd., 2017) çalışmalarında ele alınmıştır.

Kuantum analiz (q -analiz) limitsiz analiz olarak bilinmektedir. Klasik türevi bir kuantum fark operatörü ile değiştirerek diferansiyellenemeyen fonksiyonlar kümesi ile ilgilenmeye olanak sağlar. Literatürde q -analizi ile ilgili, farklı alanlarda, oldukça fazla çalışma bulunmaktadır. Konuyla ilgili temel kaynaklar (Jackson, 1904, 1910; Jordan, 1965; Gasper ve Rahman, 1990; Ernst, 2000; Kac ve Cheung, 2002) olarak verilebilir.

Klasikte var olan tanım ve özelliklerin q -analizdeki karşılıklarına q -benzerleri denilmektedir. Diferansiyel dönüşümün q -benzeri üzerine de incelemeler yapılmıştır. Jing ve Fan (1995), q -Taylor seri açılımı ve bir boyutlu q -diferansiyel dönüşüm metodu üzerine ilk incelemeleri yapmıştır. Bu yöntem kullanılarak lineer olmayan sönümlü q -fark denklemi (Liu, 2011), lineer q -deforme Lane-Emden denklemi (Yener ve Emiroğlu, 2014) ve q -Riccati denklemi (Abdulmajeed ve Khudair, 2021) gibi denklemler çözüldü. İki boyutlu q -diferansiyel dönüşüm metodu (El-Shahed ve Gaber, 2011; Garg ve Chanchlani, 2014) çalışmalarında ele alınmıştır. Garg ve Chanchlani bu yöntemi kullanılarak q -kinetik (Garg ve Chanchlani, 2012) ve q -Schrodinger (Garg ve Chanchlani, 2013) denklemlerinin çözümlerini incelediler. İki boyutlu diferansiyel dönüşüm metodunun alternatifi olarak sunulan indirgenmiş diferansiyel dönüşüm metodunun q -benzeri (Jafari vd., 2014; Sadik ve Orie, 2021) çalışmalarında sunulmuştur. Kesirli q -diferansiyel denklemleri çözmek için kesirli q -diferansiyel dönüşüm metodu (El-Shahed vd., 2013; Chanchlani vd., 2019) çalışmalarında oluşturulmuştur.

Bu tezde, (Jing ve Fan, 1995; El-Shahed ve Gaber, 2011; Garg ve Chanchlani, 2014) çalışmaları temel alınarak bir boyutlu q -diferansiyel dönüşüm metodu üzerine incelemeler yapılmıştır. Metodun tanımı verildikten sonra temel özelliklerin q -benzerleri oluşturularak ispatları verildi. Uygulama olarak klasikteki bazı problemlerin q -benzerleri oluşturulup q -diferansiyel dönüşüm metodu ile çözümleri incelendi. Bu kapsamda q -Lane-Emden, q -Riccati, q -integro denklem tipinde lineer ve lineer olmayan q -diferansiyel denklemleri oluşturularak tam veya seri formdaki çözümleri elde edildi.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde q -analiz ve diferansiyel dönüşüm metodu ile ilgili temel tanımlar, özellikler ve teoremler verilecektir.

2.1 Q-Analiz

Tez boyunca bahsi geçen q sayısı 0 ile 1 arasında sabit bir sayıdır. q -analizi ile ilgili temel tanım ve bilgiler (Gasper ve Rahman, 1990; Kac ve Cheung, 2002; Annaby vd., 2012) kaynaklarından alınmış olup bu kaynaklarda daha ayrıntılı bilgiler bulunabilir.

Tanım 2.1. Herhangi bir reel veya kompleks α sayısının q -benzeri

$$[\alpha]_q = \frac{1-q^\alpha}{1-q} \tag{2.1}$$

ve sonsuzun $q-$ benzeri

$$[\infty]_q = \frac{1}{1-q} \tag{2.2}$$

ile tanımlıdır. $\alpha = n \in \mathbb{N}$ ise

$$[n]_q = \frac{1-q^n}{1-q} = q^{n-1} + ... + q^2 + q + 1 \tag{2.3}$$

olmaktadır.

Tanım 2.2. $n!$ ifadesinin q -benzeri

$$[n]_q ! = \begin{cases} [n]_q [n-1]_q ... [2]_q [1]_q, & n = 1,2,3,..., \\ 1, & n = 0, \end{cases} \tag{2.4}$$

ile tanımlıdır.

Tanım 2.3. $a \in \mathbb{C}$ olmak üzere q -Pochhammer sembolü veya q -öteleme faktörü

$$(a;q)_n := (1-a)_q^n = \begin{cases} \prod_{k=0}^{n-1} \left(1-aq^k\right), & n \geq 1, \\ 1, & n = 0, \end{cases} \tag{2.5}$$

şeklindedir. Buna göre $n = \infty$ için

$$\left(a;q\right)_{\infty} := \left(1-a\right)_{q}^{\infty} = \prod_{k=0}^{\infty}\left(1-aq^{k}\right) = \left(1-a\right)\left(1-aq\right)\left(1-aq^{2}\right)\ldots\left(1-aq^{n}\right)\ldots,$$

yazılır.

Tanım 2.4. q sayısı $0<q<1$ koşulunu sağlayan pozitif bir sayı olmak üzere her $x\in A$ için $qx\in A$ ise $A\subseteq\mathbb{R}$ kümesine q-geometrik küme denir.

Tanım 2.5. A bir q-geometrik küme olmak üzere A da tanımlı reel ya da kompleks değerli bir f fonksiyonunun q-fark operatörü D_q (veya Jackson q-fark operatörü)

$$D_q f(x) = \begin{cases} \dfrac{f(qx)-f(x)}{qx-x}, & x\neq 0, \\ f'(0), & x=0, \end{cases} \tag{2.6}$$

ile tanımlıdır. Bu durumda $D_q f$ ifadesine f fonksiyonunun q-türevi denir (Jackson, 1910).

(2.6) eşitliğinden $\lim\limits_{q\to 1} D_q f\left(x\right) = f'\left(x\right)$ olduğu yani $q=1$ için limit alındığında klasik türevin elde edildiği görülmektedir. Buna göre q-fark operatörü için verilen tanım, teorem ve özellikler $q\to 1$ için klasikteki karşılıklarına indirgenmektedir.

Örnek 2.6. $n\in\mathbb{N}$ olmak üzere $f(x)=x^n$ fonksiyonu için (2.6) eşitliğinden

$$D_q x^n = \frac{(qx)^n - x^n}{(q-1)x} = \frac{(q^n-1)}{(q-1)} x^{n-1}$$

yazılır. Burada (2.3) eşitliği kullanılırsa

$$D_q x^n = [n]_q x^{n-1}$$

elde edilir. $q\to 1$ için $\left[n\right]_q \to n$ olduğundan, $q\to 1$ için $D_q x^n \to Dx^n = nx^{n-1}$ olduğu görülür.

Tanım 2.7. Bir f fonksiyonunun q-integrali

$$\int_0^x f(t)\,d_q t = x(1-q)\sum_{n=0}^{\infty} q^n f(xq^n),\quad x\in A, \tag{2.7}$$

ile tanımlıdır (Jackson, 1910).

Tanım 2.8. $f,g : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonları 0 noktasında sürekli ise q-kısmi integrasyonu

$$\int_a^b g(x) D_q f(x)\,d_q x = \left(f(x)g(x)\right)\Big|_a^b - \int_a^b f(qx) D_q g(x)\,d_q x \tag{2.8}$$

ile tanımlıdır (Annaby vd., 2012).

Teorem 2.9. $f : A \to \mathbb{R}$, 0 noktasında sürekli olan bir fonksiyon ve

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,d_q t,\quad x\in A,$$

olsun. O zaman F, 0 noktasında süreklidir. Ayrıca her $x\in A$ için $D_q F(x)$ vardır ve

$$D_q F(x) = f(x)$$

şeklindedir. Diğer taraftan

$$\int_a^b D_q f(t)\,d_q t = f(b) - f(a),\ \text{her } a,b\in I,$$

olur (Annaby vd., 2012).

Tanım 2.10. Herhangi iki f ve g fonksiyonunun q-çarpımı

$$D_q\left(f(x)g(x)\right) = g(x) D_q f(x) + f(qx) D_q g(x) \tag{2.9}$$

şeklindedir (Kac and Cheung, 2000).

Tanım 2.11. Eğer f fonksiyonu A kümesinde n kez q-türevlenebilir ise yüksek mertebeli türevleri $D_q = \dfrac{d_q}{d_q x}$ ve $D_q^0 f = f$ olmak üzere

$$D_q^n f := D_q D_q^{n-1} f \tag{2.10}$$

ile tanımlanır.

Teorem 2.12. f ve g fonksiyonları n-kez q-türevlenebilir fonksiyonlar olmak üzere q-Leibniz formülü, $n \in \mathbb{N}$ için,

$$D_q^n\left(f(x)g(x)\right) = \sum_{r=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_q \left(D_q^r f\right)\left(xq^{n-r}\right) D_q^{n-r} g(x) \tag{2.11}$$

veya

$$D_q^n\left(f(x)g(x)\right) = \sum_{r=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_q q^{-r(n-r)} D_q^{n-r} f\left(xq^r\right) D_q^r g(x) \tag{2.12}$$

ile tanımlıdır (Garg ve Chanchlani, 2014). Burada $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_q = \dfrac{[n]_q!}{[n-r]_q![r]_q!}$ şeklindedir.

Tanım 2.13. Klasik analizde üstel fonksiyonun seri açılımı $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ şeklindedir. Bunun q-benzeri olarak iki tane q-üstel fonksiyonu tanımlanmıştır. Birinci tür q-üstel fonksiyonu $e_q(x)$

$$e_q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{[n]_q!} = \frac{1}{(1-(1-q)x)_q^{\infty}}, \quad |x| < [\infty]_q, \tag{2.13}$$

ile ikinci tür q-üstel fonksiyonu $E_q(x)$

$$E_q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q^{n(n-1)/2} \frac{x^n}{[n]_q!} = (1+(1-q)x)_q^{\infty}, \quad x \in \mathbb{C}, \tag{2.14}$$

ile tanımlıdır (Kac ve Cheung, 2002). Bu fonksiyonlar için

$$\begin{aligned} &e_q(x)E_q(-x) = 1, \\ &e_q(0) = E_q(0) = 1, \\ &\lim_{q\to 1} E_q(x) = e^x = \lim_{q\to 1} e_q(x), \\ &e_{q^{-1}}(x) = E_q(x), \end{aligned} \tag{2.15}$$

ve

$$\begin{aligned} &D_q e_q(x) = e_q(x), \\ &D_q E_q(x) = E_q(qx), \end{aligned} \tag{2.16}$$

eşitlikleri sağlanır.

Tanım 2.14. Birinci tür q -trigonometrik fonksiyonları

$$\cos_q(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{[2n]_q!} \tag{2.17}$$

$$\sin_q(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{[2n+1]_q!} \tag{2.18}$$

ile tanımlıdır ve

$$\cos_q(0)=1,\ \ \sin_q(0)=0, \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned} D_q\sin_q(\lambda x)&=\lambda\cos_q(\lambda x),\\ D_q\cos_q(\lambda x)&=-\lambda\sin_q(\lambda x), \end{aligned} \tag{2.20}$$

olmaktadır.

2.2. Diferansiyel Dönüşüm Metodu ve Temel Özellikleri

Tanım 2.15. Bir f fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü

$$F(k)=\frac{1}{k!}\left(\frac{d^k f(x)}{dx^k}\right)_{x=0} \tag{2.21}$$

ile tanımlıdır. Burada $f(x)$ orijinal fonksiyon, $F(k)$ dönüştürülmüş fonksiyondur. $F(k)$ fonksiyonunun ters diferansiyel dönüşümü

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}F(k)x^k \tag{2.22}$$

olur. (2.21) ve (2.22) eşitliklerinin birleştirilmesiyle

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{d^k f(x)}{dx^k}\right)_{x=0}x^k \tag{2.23}$$

yazılır.

Diferansiyel dönüşümün sağladığı temel özellikler (2.21) eşitliği ve türevin özellikleri ile kolayca ispatlanabilir. $F(k)$, $G(k)$ ve $H(k)$ sırasıyla $f(x)$, $g(x)$

ve $h(x)$ fonksiyonlarının diferansiyel dönüşüm karşılığı olmak üzere, bu özelliklerden bazıları Tablo 2.1 ile verilmiştir.

Tablo 2.1. Diferansiyel dönüşüm metodunun bazı temel özellikleri

Orijinal fonksiyon	**Dönüştürülmüş fonksiyon**
$f(x)=\alpha g(x)\pm\beta h(x),\alpha,\beta\in\mathbb{R},$	$F(k)=\alpha G(k)\pm\beta H(k)$
$f(x)=x^n,\ n\in\mathbb{N},$	$F(k)=\delta(k-n)=\begin{cases}1,\ k=n\\0,\ k\neq n.\end{cases}$
$f(x)=\dfrac{dg(x)}{dx}$	$F(k)=(k+1)G(k+1)$
$f(x)=\dfrac{d^r g(x)}{dx^r}$	$F(k)=(k+1)(k+2)...(k+r)G(k+r)$
$f(x)=g(x)h(x)$	$F(k)=\sum\limits_{r=0}^{k}G(k-r)H(r)$
$f(x)=\int\limits_0^x g(t)\,dt$	$F(k)=\dfrac{G(k-1)}{k},\ k\geq 1,$
$f(x)=e^{\lambda x},\ \lambda\in\mathbb{R},$	$F(k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}$
$f(x)=\cos(ax+b),\ a,b\in\mathbb{R},$	$F(k)=\dfrac{a^k}{k!}\cos\left(\dfrac{k\pi}{2}+b\right)$
$f(x)=\sin(ax+b),\ a,b\in\mathbb{R},$	$F(k)=\dfrac{a^k}{k!}\sin\left(\dfrac{k\pi}{2}+b\right)$

3. Q-DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM METODU VE ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde, bir boyutlu q-diferansiyel dönüşüm metodunun tanımı verilerek temel özellikleri teorem olarak verilip, ispatlanacaktır.

Tanım 3.1. Bir f fonksiyonunun q-diferansiyel dönüşümü

$$F_q(k) = \frac{1}{[k]_q!}\left(\frac{d_q^k f(x)}{d_q x^k}\right)_{x=0} \tag{3.1}$$

ile tanımlanır. Burada $F_q(k)$, $f(x)$ fonksiyonunun q-diferansiyel dönüşümüdür (Jing ve Fan, 1995). Ters q - diferansiyel dönüşümden

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} F_q(k) x^k \tag{3.2}$$

yazılır. (3.1) ve (3.2) eşitliklerinin birleştirilmesiyle

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{[k]_q!}\left(\frac{d_q^k f(x)}{d_q x^k}\right)_{x=0} x^k \tag{3.3}$$

elde edilir.

Bundan sonraki teoremlerde bahsi geçen $f(x)$, $g(x)$ ve $h(x)$ uygun mertebeden q-türevlenebilir fonksiyonlardır ve $F_q(k)$, $G_q(k)$ ve $H_q(k)$ fonksiyonları sırasıyla bu fonksiyonların q-diferansiyel dönüşüm karşılığıdır.

Teorem 3.1. Eğer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için $f(x) = \alpha g(x) \pm \beta h(x)$ ise

$$F_q(k) = \alpha G_q(k) \pm \beta H_q(k) \tag{3.4}$$

olur, yani q-diferansiyel dönüşüm lineerlik özelliğini sağlar.

İspat. (3.1) tanımından ve q türevin lineerlik özelliğinden

$$\begin{aligned} F_q(k) &= \frac{1}{[k]_q!}\left(\frac{d_q{}^k f(x)}{d_q x^k}\right)_{x=0} \\ &= \frac{1}{[k]_q!}\left(\frac{d_q{}^k}{d_q x^k}(\alpha g(x) \pm \beta h(x))\right)_{x=0} \\ &= \frac{\alpha}{[k]_q!}\left(\frac{d_q{}^k g(x)}{d_q x^k}\right)_{x=0} \pm \frac{\beta}{[k]_q!}\left(\frac{d_q{}^k h(x)}{d_q x^k}\right)_{x=0} \end{aligned}$$

yazılır buradan da

$$F_q(k) = \alpha G_q(k) \pm \beta H_q(k)$$

olduğu elde edilir.

Teorem 3.2. Eğer $n \in \mathbb{N}$ için $f(x) = x^n$ ise

$$F_q(k) = \delta(k-n) \tag{3.5}$$

olur. Burada $\delta(k-n) = \begin{cases} 1, & k = n, \\ 0, & k \neq n, \end{cases}$ Dirac Delta fonksiyonudur.

İspat. (3.1) tanımından

$$F_q(k) = \frac{1}{[k]_q!}\left(\frac{d_q{}^k f(x)}{d_q x^k}\right)_{x=0} = \frac{1}{[k]_q!}\left(\frac{d_q{}^k x^n}{d_q x^k}\right)_{x=0} \tag{3.6}$$

yazılır. Örnek 2.6 dikkate alınırsa

$$\frac{d_q{}^k x^n}{d_q x^k} = \begin{cases} [n]_q [n-1]_q \ldots [n-(k-1)]_q \, x^{n-k}, & k < n, \\ [n]_q [n-1]_q \ldots [2]_q [1]_q, & k = n, \\ 0, & k > n, \end{cases} \tag{3.7}$$

elde edilir. (3.7) eşitliği (3.6) da yerine yazılıp $x = 0$ değeri için hesaplama yapılırsa

$$\begin{aligned} F_q(k) &= \frac{1}{[k]_q!}\left(\frac{d_q{}^k x^n}{d_q x^k}\right)_{x=0} \\ &= \frac{1}{[k]_q!}\begin{cases} 0, & k < n \text{ ve } k > n, \\ [n]_q!, & k = n, \end{cases} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da

$$F_q(k)=\begin{cases}0, & k\neq n,\\ 1, & k=n,\end{cases}$$

olup Dirac Delta fonksiyonunun tanımı gereği

$$F_q(k)=\delta(k-n)$$

elde edilir.

Teorem 3.3. Eğer $f(x)=\dfrac{d_q g(x)}{d_q x}$ ise

$$F_q(k)=[k+1]_q\, G_q(k+1) \tag{3.8}$$

olur.

İspat. (3.1) tanımdan

$$F_q(k)=\frac{1}{[k]_q!}\left(\frac{d_q^{\,k} f(x)}{d_q x^k}\right)_{x=0}=\frac{1}{[k]_q!}\left(\frac{d_q^{\,k}}{d_q x^k}\frac{d_q g(x)}{d_q x}\right)_{x=0} \tag{3.9}$$

yazılır. (2.10) eşitliği dikkate alınırsa, (3.9) eşitliği

$$F_q(k)=\frac{1}{[k]_q!}\left(\frac{d_q^{\,k+1} g(x)}{d_q x^{k+1}}\right)_{x=0} \tag{3.10}$$

olarak yazılır. (2.3) tanımına göre düzenleme yapılırsa

$$\begin{aligned}F_q(k)&=\frac{1}{[k]_q!}\frac{[k+1]_q}{[k+1]_q}\left(\frac{d_q^{\,k+1} g(x)}{d_q x^{k+1}}\right)_{x=0}\\ &=\frac{[k+1]_q}{[k+1]_q!}\left(\frac{d_q^{\,k+1} g(x)}{d_q x^{k+1}}\right)_{x=0}\end{aligned}$$

olup buradan da

$$F_q(k)=[k+1]_q\, G_q(k+1)$$

elde edilir.

Teorem 3.4. Eğer $f(x)=\dfrac{d_q^n g(x)}{d_q x^n}$ ise

$$F_q(k)=[k+1]_q[k+2]_q\ldots[k+n]_q\, G_q(k+n) \tag{3.11}$$

olur.

İspat. (3.1) tanımdan

$$F_q(k)=\frac{1}{[k]_q!}\left(\frac{d_q{}^k f(x)}{d_q x^k}\right)_{x=0}=\frac{1}{[k]_q!}\left(\frac{d_q{}^k}{d_q x^k}\frac{d_q^n g(x)}{d_q x^n}\right)_{x=0} \tag{3.12}$$

yazılır. Yine (2.10) eşitliği dikkate alınırsa, (3.12) eşitliği

$$F_q(k)=\frac{1}{[k]_q!}\left(\frac{d_q{}^{k+n} g(x)}{d_q x^{k+n}}\right)_{x=0}$$

olarak yazılır. (2.3) tanımına göre düzenleme yapılırsa

$$\begin{aligned}F_q(k)&=\frac{1}{[k]_q!}\frac{[k+1]_q[k+2]_q\dots[k+n]_q}{[k+1]_q[k+2]_q\dots[k+n]_q}\left(\frac{d_q{}^{k+n} g(x)}{d_q x^{k+n}}\right)_{x=0}\\&=\frac{[k+1]_q[k+2]_q\dots[k+n]_q}{[k+n]_q!}\left(\frac{d_q{}^{k+n} g(x)}{d_q x^{k+n}}\right)_{x=0}\end{aligned}$$

olup buradan da

$$F_q(k)=[k+1]_q[k+2]_q\dots[k+n]_q\,G_q(k+n)$$

elde edilir.

Teorem 3.5. Eğer $\lambda\in\mathbb{R}$ için $f(x)=e_q(\lambda x)$ ise

$$F_q(k)=\frac{\lambda^k}{[k]_q!} \tag{3.13}$$

olur.

İspat. (3.1) tanımdan

$$F_q(k)=\frac{1}{[k]_q!}\left(\frac{d_q{}^k f(x)}{d_q x^k}\right)_{x=0}=\frac{1}{[k]_q!}\left(\frac{d_q{}^k e_q(\lambda x)}{d_q x^k}\right)_{x=0} \tag{3.14}$$

yazılır. (2.16) eşitliği dikkate alınırsa, (3.14) eşitliğinden

$$F_q(k)=\frac{1}{[k]_q!}\left(\lambda^k e_q(\lambda x)\right)_{x=0} \tag{3.15}$$

elde edilir. $x=0$ yazıldığında (2.15) eşitliği dikkate alınırsa (3.15) eşitliğinden

$$F_q(k)=\frac{\lambda^k}{[k]_q!}$$

elde edilir.

Teorem 3.6. Eğer $\lambda \in \mathbb{R}$ için $f(x) = E_q(\lambda x)$ ise

$$F_q(k) = \frac{\lambda^k q^{\frac{k(k-1)}{2}}}{[k]_q!} \tag{3.16}$$

olur.

İspat. (3.1) tanımdan

$$F_q(k) = \frac{1}{[k]_q!}\left(\frac{d_q{}^k f(x)}{d_q x^k}\right)_{x=0} = \frac{1}{[k]_q!}\left(\frac{d_q{}^k E_q(\lambda x)}{d_q x^k}\right)_{x=0} \tag{3.17}$$

yazılır. (2.16) eşitliği dikkate alınırsa, (3.17) eşitliğinden

$$F_q(k) = \frac{1}{[k]_q!}\left(\lambda^k q^{\frac{k(k-1)}{2}} E_q(\lambda q^k x)\right)_{x=0} \tag{3.18}$$

elde edilir. $x = 0$ yazıldığında ve (2.15) eşitliği dikkate alınırsa (3.18) eşitliğinden

$$F_q(k) = \frac{\lambda^k q^{\frac{k(k-1)}{2}}}{[k]_q!}$$

elde edilir.

Teorem 3.7. Eğer g bir q-integrallenebilir fonksiyon olmak üzere $f(x) = \int_0^x g(t)\, d_q t$ ise

$$F_q(k) = \frac{G_q(k-1)}{[k]_q}, \quad k \geq 1, \tag{3.19}$$

olur.

İspat. (3.1) tanımdan

$$F_q(k) = \frac{1}{[k]_q!}\left(\frac{d_q{}^k f(x)}{d_q x^k}\right)_{x=0} = \frac{1}{[k]_q!}\left(\frac{d_q{}^k}{d_q x^k}\int_0^x g(t)\, d_q t\right)_{x=0} \tag{3.20}$$

yazılır. Teorem 2.9 dikkate alınırsa, (3.20) eşitliği

$$F_q(k) = \frac{1}{[k]_q!}\left(\frac{d_q{}^{k-1}}{d_q x^{k-1}} g(x)\right)_{x=0} \tag{3.21}$$

olup (2.4) tanımından (3.21) eşitliği

$$F_q(k)=\frac{1}{[k]_q[k-1]_q!}\left(\frac{d_q^{\,k-1}}{d_q x^{k-1}}g(x)\right)_{x=0}$$

olarak yazılır. Buna göre de

$$F_q(k)=\frac{G_q(k-1)}{[k]_q},\quad k\geq 1,$$

elde edilir.

İki fonksiyonun çarpımının q -diferansiyel dönüşümünü (Teorem 3.10) ispatlamakta kullanılacak olan aşağıdaki iki önerme verilsin.

Önerme 3.8. Bir f fonksiyonu için

$$f\left(q^k x\right)=\sum_{r=0}^{k}\begin{bmatrix}k\\r\end{bmatrix}_q (q-1)^r q^{\frac{r(r-1)}{2}} x^r D_q^r f(x) \tag{3.22}$$

olur.

İspat. (2.6) tanımı kullanılırsa $D_q f(x)=\dfrac{f(qx)-f(x)}{qx-x}$ eşitliğinden

$$f(qx)=(q-1)xD_q f(x)+f(x) \tag{3.23}$$

elde edilir. Buna göre (3.22) eşitliği $k=1$ için sağlanır. İkinci türev alınırsa

$$D_q^2 f(x)=\frac{f\left(q^2x\right)-(q+1)f(qx)+qf(x)}{q(q-1)^2x^2}$$

olup buradan

$$f\left(q^2x\right)=q(q-1)^2x^2D_q^2 f(x)+(q+1)f(qx)-qf(x) \tag{3.24}$$

elde edilir. (3.23) eşitliği (3.24) eşitliğinde yerine yazılır ve düzenleme yapılırsa

$$f\left(q^2x\right)=q(q-1)^2x^2D_q^2 f(x)+[2]_q(q-1)xD_q f(x)+f(x) \tag{3.25}$$

elde edilir. Buna göre de (3.22) eşitliği $k=2$ için sağlanır. Benzer şekilde üçüncü türev alınırsa

$$D_q^3 f(x)=\frac{f\left(q^3x\right)-\left(1+q+q^2\right)f\left(q^2x\right)+q\left(1+q+q^2\right)f(qx)-q^3f(x)}{q^3(q-1)^3x^3}$$

olup buradan

$$f\left(q^3x\right)=q^3\left(q-1\right)^3x^3D_q^3f\left(x\right)+\left[3\right]_q f\left(q^2x\right)-q\left[3\right]_q f\left(qx\right)+q^3f\left(x\right) \qquad \textbf{(3.26)}$$

elde edilir. Burada (3.23) ve (3.25) yerlerine yazılır ve düzenleme yapılırsa

$$f\left(q^3x\right)=q^3\left(q-1\right)^3x^3D_q^3f\left(x\right)+\left[3\right]_q q\left(q-1\right)^2x^2D_q^2f\left(x\right)+\left[3\right]_q\left(q-1\right)xD_qf\left(x\right)+f\left(x\right)$$

bulunur ve bu da $k=3$ için (3.22) eşitliği ile aynıdır. Benzer şekilde türev almaya devam edip eşitliklerin yerine yazılmasıyla (3.22) eşitliğinin her k değeri için sağlandığı gösterilmiş olur.

Önerme 3.9. (3.22) eşitliğinin n . mertebeden q -türevi

$$D_q^n f\left(q^kx\right)=\sum_{r=0}^{k}\begin{bmatrix}k\\r\end{bmatrix}_q\left(q-1\right)^r q^{\frac{r(r-1)}{2}}\sum_{j=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\j\end{bmatrix}_q q^{-j(n-j)+rj}\frac{\left[r\right]_q!}{\left[r-n+j\right]_q!}x^{r+j-n}D_q^{r+j}f\left(x\right) \qquad \textbf{(3.27)}$$

olur.

İspat. (3.22) eşitliğinden q -türevi alınırsa

$$D_q^n f\left(q^kx\right)=\sum_{r=0}^{k}\begin{bmatrix}k\\r\end{bmatrix}_q\left(q-1\right)^r q^{\frac{r(r-1)}{2}}D_q^n\left\{x^rD_q^rf\left(x\right)\right\}$$

yazılır. Eşitliğin sağ tarafında q -Leibniz formulü (Teorem 2.12) uygulanırsa

$$\begin{aligned}D_q^n f\left(q^kx\right)&=\sum_{r=0}^{k}\begin{bmatrix}k\\r\end{bmatrix}_q\left(q-1\right)^r q^{\frac{r(r-1)}{2}}\sum_{j=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\j\end{bmatrix}_q q^{-j(n-j)+rj}D_q^{n-j}(x^r)D_q^{r+j}f\left(x\right)\\&=\sum_{r=0}^{k}\begin{bmatrix}k\\r\end{bmatrix}_q\left(q-1\right)^r q^{\frac{r(r-1)}{2}}\sum_{j=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\j\end{bmatrix}_q q^{-j(n-j)+rj}\frac{\left[r\right]_q!}{\left[r-n+j\right]_q!}x^{r-n+j}D_q^{r+j}f\left(x\right)\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.10. Eğer $f\left(x\right)=g\left(x\right)h\left(x\right)$ ise

$$F_q\left(k\right)=\sum_{r=0}^{k}G_q\left(r\right)H_q\left(k-r\right) \qquad \textbf{(3.28)}$$

olur.

İspat. (3.1) tanımdan

$$F_q\left(k\right)=\frac{1}{\left[k\right]_q!}\left(\frac{d_q^{\,k}f\left(x\right)}{d_qx^k}\right)_{x=0}=\frac{1}{\left[k\right]_q!}\left(\frac{d_q^{\,k}}{d_qx^k}g\left(x\right)h\left(x\right)\right)_{x=0} \qquad \textbf{(3.29)}$$

yazılır. Teorem 2.12 dikkate alınırsa, (3.29) eşitliğinden

$$F_q(k)=\frac{1}{[k]_q!}\left(\sum_{r=0}^{k}\begin{bmatrix}k\\r\end{bmatrix}_q q^{-r(k-r)}D_q^r g\left(q^{k-r}x\right)D_q^{k-r}h(x)\right)_{x=0}$$
$$=\left(\sum_{r=0}^{k}\frac{1}{[k-r]_q![r]_q!}q^{-r(k-r)}D_q^r g\left(q^{k-r}x\right)D_q^{k-r}h(x)\right)_{x=0}$$

olup buradan da

$$F_q(k)=\sum_{r=0}^{k}\left(\frac{q^{-r(k-r)}D_q^r g\left(q^{k-r}x\right)}{[r]_q!}\right)_{x=0}\left(\frac{D_q^{k-r}h(x)}{[k-r]_q!}\right)_{x=0} \qquad \textbf{(3.30)}$$

yazılır. (3.30) eşitliğinin sağ tarafındaki birinci parantez içindeki ifadenin eşitini bulmak için (3.22) eşitliği $k-r$ için yazılıp (3.27) eşitliği r için kullanılırsa

$$\left(\frac{q^{-r(k-r)}D_q^r g\left(q^{k-r}x\right)}{[r]_q!}\right)_{x=0}$$
$$=\left(\frac{q^{-r(k-r)}}{[r]_q!}\sum_{i=0}^{k-r}\begin{bmatrix}k-r\\i\end{bmatrix}_q (q-1)^i q^{\frac{i(i-1)}{2}}\sum_{j=0}^{r}\begin{bmatrix}r\\j\end{bmatrix}_q q^{-j(r-j)+ij}\frac{[i]_q!}{[i-r+j]_q!}x^{i-r+j}D_q^{i+j}g(x)\right)_{x=0}$$

olup bu eşitlikte $x=0$ yazılırsa $i+j=r$ hariç diğer tüm terimler sıfır olacağından buradan kalan terim sadece

$$\left(\frac{D_q^r g(x)}{[r]_q!}\right)_{x=0}$$

olacaktır. Bu (3.30) da yerine yazılırsa

$$F_q(k)=\sum_{r=0}^{k}\left(\frac{q^{-r(k-r)}D_q^r g\left(q^{k-r}x\right)}{[r]_q!}\right)_{x=0}\left(\frac{D_q^{k-r}h(x)}{[k-r]_q!}\right)_{x=0}$$
$$=\sum_{r=0}^{k}\left(\frac{D_q^r g(x)}{[r]_q!}\right)_{x=0}\left(\frac{D_q^{k-r}h(x)}{[k-r]_q!}\right)_{x=0}$$
$$=\sum_{r=0}^{k}G_q(r)H_q(k-r)$$

elde edilir.

Teorem 3.11. Eğer $f(x)=g(qx)$ ise

$$F_q(k)=q^k G_q(k) \qquad \textbf{(3.31)}$$

olur.

İspat. (3.1) tanımdan

$$F_q(k)=\frac{1}{[k]_q!}\left(\frac{d_q{}^k f(x)}{d_q x^k}\right)_{x=0}=\frac{1}{[k]_q!}\left(\frac{d_q{}^k g(qx)}{d_q x^k}\right)_{x=0} \tag{3.32}$$

yazılır. (2.6) tanımı ve q -türevin lineerlik özelliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} F_q(k)&=\frac{1}{[k]_q!}\left(\frac{d_q{}^k}{d_q x^k}\big((q-1)xD_q g(x)+g(x)\big)\right)_{x=0} \\ &=\frac{1}{[k]_q!}\left((q-1)\frac{d_q{}^k}{d_q x^k}\big(xD_q g(x)\big)+\frac{d_q{}^k}{d_q x^k}g(x)\right)_{x=0} \end{aligned} \tag{3.33}$$

yazılır. $D_q^k\big(xD_q g(x)\big)$ türevi için (2.9) kuralı ard arda uygulanırsa

$$D_q^k\big(xD_q g(x)\big)=[k]_q D_q^k g(x)+q^k x D_q^{k+1} g(x) \tag{3.34}$$

elde edilir. (3.34) eşitliği (3.33) eşitliğinde yerine yazılır ve $x=0$ kullanılırsa

$$\begin{aligned} F_q(k)&=\frac{1}{[k]_q!}\big((q-1)[k]_q D_q^k g(x)+D_q^k g(x)\big)_{x=0} \\ &=\frac{1}{[k]_q!}\left((q-1)\frac{q^k-1}{q-1}D_q^k g(x)+D_q^k g(x)\right)_{x=0} \\ &=\frac{1}{[k]_q!}\big(q^k D_q^k g(x)\big)_{x=0} \end{aligned}$$

kalır ve buradan da

$$F_q(k)=q^k G_q(k)$$

olduğu elde edilir.

Teorem 3.12. Eğer $f(x)=\cos_q(\lambda x)$ ise

$$F_q(k)=C_q(k)=\begin{cases} 0, & k \text{ tek ise} \\ \dfrac{(-1)^{\frac{k}{2}}\lambda^k}{[k]_q!}, & k \text{ çift ise} \end{cases} \tag{3.35}$$

olur.

İspat. (3.1) tanımdan

$$F_q(k)=\frac{1}{[k]_q!}\left(\frac{d_q{}^k f(x)}{d_q x^k}\right)_{x=0}=\frac{1}{[k]_q!}\left(\frac{d_q{}^k \cos_q(\lambda x)}{d_q x^k}\right)_{x=0}$$

yazılır. Burada (2.19) ve (2.20) özellikleri kullanılırsa (3.35) elde edilir.

Teorem 3.13. Eğer $f(x)=\sin_q(\lambda x)$ ise

$$F_q(k)=S_q(k)=\begin{cases}\dfrac{(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}\lambda^k}{[k]_q!}, & k \text{ tek ise}\\ 0, & k \text{ çift ise}\end{cases} \tag{3.36}$$

olur.

İspat. (3.1) tanımdan

$$F_q(k)=\frac{1}{[k]_q!}\left(\frac{d_q{}^k f(x)}{d_q x^k}\right)_{x=0}=\frac{1}{[k]_q!}\left(\frac{d_q{}^k \sin_q(\lambda x)}{d_q x^k}\right)_{x=0}$$

yazılır. Burada (2.19) ve (2.20) özellikleri kullanılırsa (3.36) elde edilir.

$F_q(k)$, $G_q(k)$ ve $H_q(k)$ sırasıyla $f(x)$, $g(x)$ ve $h(x)$ fonksiyonlarının q-diferansiyel dönüşüm karşılığı olmak üzere, yukarıda verilen teoremlere göre q-diferansiyel dönüşüm metodunun bazı temel özellikleri Tablo 3.1 ile verilmiştir.

Tablo 3.1. q-diferansiyel dönüşüm metodunun bazı temel özellikleri

Orijinal fonksiyon	**q-Dönüştürülmüş fonksiyon**
$f(x)=\alpha g(x)\pm\beta h(x),\alpha,\beta\in\mathbb{R},$	$F_q(k)=\alpha G_q(k)\pm\beta H_q(k)$
$f(x)=x^n,\ n\in\mathbb{N},$	$F_q(k)=\delta(k-n)=\begin{cases}1,\ k=n\\ 0,\ k\neq n.\end{cases}$
$f(x)=\dfrac{d_q g(x)}{d_q x}$	$F_q(k)=[k+1]_q G_q(k+1)$
$f(x)=\dfrac{d_q^r g(x)}{d_q x^r}$	$F_q(k)=[k+1]_q[k+2]_q\ldots[k+r]_q G_q(k+r)$
$f(x)=g(x)h(x)$	$F_q(k)=\sum_{r=0}^{k}G_q(r)H_q(k-r)$
$f(x)=\int_0^x g(t)d_q t$	$F_q(k)=\dfrac{G_q(k-1)}{[k]_q},\ k\geq 1,$
$f(x)=e_q(\lambda x),\ \lambda\in\mathbb{R},$	$F_q(k)=\dfrac{\lambda^k}{[k]_q!}$

Tablo 3.1. q- diferansiyel dönüşüm metodunun bazı temel özellikleri (devamı)

Orijinal fonksiyon	q- **Dönüştürülmüş fonksiyon**
$f(x)=E_q(\lambda x),\ \lambda\in\mathbb{R},$	$F_q(k)=\dfrac{\lambda^k q^{\frac{k(k-1)}{2}}}{[k]_q!}$
$f(x)=g(qx)$	$F_q(k)=q^k G_q(k)$
$f(x)=\cos_q(\lambda x)$	$F_q(k)=C_q(k)=\begin{cases}0, & k \text{ tek ise}\\ \dfrac{(-1)^{\frac{k}{2}}\lambda^k}{[k]_q!}, & k \text{ çift ise}\end{cases}$
$f(x)=\sin_q(\lambda x)$	$F_q(k)=S_q(k)=\begin{cases}\dfrac{(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}\lambda^k}{[k]_q!}, & k \text{ tek ise}\\ 0, & k \text{ çift ise}\end{cases}$

4. Q-DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM METODUNUN Q-DİFERANSİYEL DENKLEMLERE UYGULANMASI

Bu bölümde, önceki bölümde verilen q -diferansiyel dönüşüm metodu ve temel özellikleri bazı q -başlangıç değer problemlerine uygulanarak bu problemlerin çözümleri elde edilecektir. Ele alınan q -başlangıç değer problemlerindeki denklemler lineer ve lineer olmayan q -diferansiyel denklemleri türünde olup q -Lane-Emden, q -Riccati ve q -integro-diferansiyel denklem içeren örneklere de yer verilecektir.

Örnek çözümlerinde $Y_q(k)$ fonksiyonu $y(x)$ fonksiyonunun $q-$ diferansiyel dönüşümü olarak alınacaktır.

Örnek 4.1. Birinci mertebeden lineer q -diferansiyel denklemi

$$D_q y(x) = y(qx) \tag{4.1}$$

ve

$$y(0) = 1 \tag{4.2}$$

başlangıç koşulu ile oluşturulan problem ele alınsın.

(4.1) denklemine q -diferansiyel dönüşüm metodu uygulanırsa ve (3.31) eşitliği kullanılırsa

$$[k+1]_q Y_q(k+1) = q^k Y_q(k)$$

veya

$$Y_q(k+1) = \frac{1}{[k+1]_q} q^k Y_q(k) \tag{4.3}$$

yineleme bağıntısı elde edilir. (4.2) başlangıç koşuluna da q -diferansiyel dönüşüm metodu uygulanırsa

$$Y_q(0) = 1 \tag{4.4}$$

değeri bulunur. (4.3) bağıntısı $k=0$ için yazılır ve (4.4) değeri kullanılırsa

$$Y_q(1) = 1 \tag{4.5}$$

bulunur. (4.3) bağıntısı $k=1$ için yazılır ve (4.5) değeri kullanılırsa

$$Y_q(2) = \frac{q}{[2]_q} \tag{4.6}$$

bulunur. Benzer şekilde devam edilirse

$k = 2$ için

$$Y_q(3) = \frac{q^2}{[3]_q} Y_q(2) = \frac{q^2}{[3]_q} \frac{q}{[2]_q} = \frac{q^3}{[3]_q!},$$

$k = 3$ için

$$Y_q(4) = \frac{q^3}{[4]_q} Y_q(3) = \frac{q^3}{[4]_q} \frac{q^3}{[3]_q!} = \frac{q^6}{[4]_q!},$$

$k = 4$ için

$$Y_q(5) = \frac{q^4}{[5]_q} Y_q(4) = \frac{q^4}{[5]_q} \frac{q^6}{[4]_q!} = \frac{q^{10}}{[5]_q!},$$

ve genelleme yapılırsa

$$Y_q(k) = \frac{q^{\frac{k(k-1)}{2}}}{[k]_q!},\ k = 0,1,2,..., \tag{4.7}$$

dönüşüm değerleri elde edilir. Bu $Y_q(k)$ değerleri (3.2) eşitliğinde yerine yazılırsa (4.1)-(4.2) probleminin çözümü

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{\frac{k(k-1)}{2}}}{[k]_q!} x^k$$

olarak elde edilir. (2.14) eşitliği dikkate alınırsa problemin çözümü

$$y(x) = E_q(x)$$

şeklinde tam çözüm olarak bulunur. (4.1) -(4.2) probleminin klasik formu $q \to 1$ için

$$y'(x) = y(x),$$
$$y(0) = 1,$$

olup çözümü $y(x) = e^x$ şeklindedir.

Yener ve Emiroğlu (2014), birkaç tane q -Lane-Emden denklemi oluşturarak çözümlerini q -diferansiyel dönüşüm metodu ile incelemiştir. Benzer şekilde bir q -Lane-Emden probleminin çözümü aşağıdaki örnekte incelenecektir.

Örnek 4.2. Aşağıdaki q -Lane-Emden problemi ele alınsın:

$$D_q^2 y(x) + \frac{(q^2+1)}{x} D_q y(x) + [2]_q y(x)] = \frac{[2]_q}{[3]_q} x^3 + x^2 + (1+[3]_q)x + (2+q^2)\,, \quad \textbf{(4.8)}$$

$$\begin{aligned} y(0) &= 0, \\ D_q y(0) &= 0. \end{aligned} \quad \textbf{(4.9)}$$

(4.8) denklemine q -diferansiyel dönüşüm metodu uygulanması için önce denklem x ile çarpılıp düzenlenirse

$$xD_q^2 y(x) + (q^2+1) D_q y(x) + [2]_q xy(x)] = \frac{[2]_q}{[3]_q} x^4 + x^3 + (1+[3]_q)x^2 + (2+q^2)x \quad \textbf{(4.10)}$$

denklemi elde edilir. Şimdi (4.10) denklemine q -diferansiyel dönüşüm metodu uygulanırsa

$$\begin{aligned} &\sum_{r=0}^{k} \delta(r-1)[k-r+1]_q [k-r+2]_q Y_q(k-r+2) + (q^2+1)[k+1]_q Y_q(k+1) \\ &+[2]_q \sum_{r=0}^{k} \delta(r-1) Y_q(k-r) \\ &= \frac{[2]_q}{[3]_q} \delta(k-4) + \delta(k-3) + \left(1+[3]_q\right)\delta(k-2) + \left(2+q^2\right)\delta(k-1) \end{aligned} \quad \textbf{(4.11)}$$

yineleme bağıntısı elde edilir. (4.9) başlangıç koşullarına da q -diferansiyel dönüşüm metodu uygulanırsa

$$Y_q(0) = 0 \quad \textbf{(4.12)}$$

ve

$$Y_q(1) = 0 \quad \textbf{(4.13)}$$

elde edilir. (4.11) eşitliği $k=0$ için yazılırsa $\left(q^2+1\right)Y_q(1) = 0$ olup buradan $Y_q(1) = 0$ bulunur. (4.11) eşitliği $k=1$ için yazılırsa

$$[1]_q [2]_q Y_q(2) + \left(q^2+1\right)[2]_q Y_q(2) + [2]_q Y_q(0) = 2 + q^2$$

olur. Burada (4.12) eşitliği yerine yazılır ve düzenleme yapılırsa

$$[2]_q Y_q(2)\left(2+q^2\right)=2+q^2$$

olup

$$Y_q(2)=\frac{1}{[2]_q} \tag{4.14}$$

bulunur. Benzer şekilde $k=2$ için

$$[2]_q[3]_q Y_q(3)+\left(q^2+1\right)[3]_q Y_q(3)+[2]_q Y_q(1)=1+[3]_q$$

olup

$$[3]_q Y_q(3)\left(2+q+q^2\right)=\left(2+q+q^2\right)$$

yazılırsa buradan

$$Y_q(3)=\frac{1}{[3]_q} \tag{4.15}$$

bulunur. Benzer şekilde

$k=3$ için $[3]_q[4]_q Y_q(4)+\left(q^2+1\right)[4]_q Y_q(4)+[2]_q Y_q(2)=1$ eşitliğinden $Y_q(4)=0$,

$k=4$ için $[4]_q[5]_q Y_q(5)+\left(q^2+1\right)[5]_q Y_q(5)+[2]_q Y_q(3)=\frac{[2]_q}{[3]_q}$ eşitliğinden $Y_q(5)=0$,

$k=5$ için $[5]_q[6]_q Y_q(6)+\left(q^2+1\right)[6]_q Y_q(6)+[2]_q Y_q(4)=0$ eşitliğinden $Y_q(6)=0$,

ve genel olarak

$$Y_q(k)=0,\ k\geq 4, \tag{4.16}$$

dönüşüm değerleri bulunur. Bu değerler (3.2) eşitliğinde yerlerine yazılırsa (4.8)-(4.9) probleminin tam çözümü

$$y(x)=\frac{1}{[2]_q}x^2+\frac{1}{[3]_q}x^3$$

olarak bulunur.

Örnek 4.3. Lineer olmayan q-denklemine örnek olarak q-Riccati diferansiyel denklemi

$$D_q y(x)=2y^2(x)+xy(x)+1 \tag{4.17}$$

ve

$$y(0)=0 \qquad \textbf{(4.18)}$$

başlangıç koşulu ile tanımlı problem ele alınsın (Abdulmajeed ve Khudair, 2021).

(4.17) denklemine q -diferansiyel dönüşüm metodu uygulanırsa

$$[k+1]_q\, Y_q(k+1)=2\sum_{r=0}^{k} Y_q(r)\, Y_q(k-r)+\sum_{r=0}^{k}\delta(r-1)Y_q(k-r)+\delta(k) \qquad \textbf{(4.19)}$$

bağıntısı elde edilir. (4.18) koşulundan

$$Y_q(0)=0 \qquad \textbf{(4.20)}$$

olur. (4.19) bağıntısı $k=0$ için yazılırsa

$$[1]_q\, Y_q(1)=2Y_q(0)\, Y_q(0)+1$$

olup (4.20) eşitliği kullanılırsa

$$Y_q(1)=1 \qquad \textbf{(4.21)}$$

bulunur. (4.19) bağıntısı $k=1$ için yazılırsa

$$[2]_q\, Y_q(2)=2\{Y_q(0)\, Y_q(1)+Y_q(1)\, Y_q(0)\}+Y_q(0)$$

olup (4.20) ve (4.21) eşitliklerinin kullanılmasıyla

$$Y_q(2)=0 \qquad \textbf{(4.22)}$$

bulunur. Benzer şekilde (4.19) bağıntısı $k=2$ için yazılırsa

$$[3]_q\, Y_q(3)=2\{Y_q(0)\, Y_q(2)+Y_q(1)\, Y_q(1)+Y_q(2)\, Y_q(0)\}+Y_q(1)$$

olup $[3]_q\, Y_q(3)=3$ eşitliğinden

$$Y_q(3)=\frac{3}{[3]_q} \qquad \textbf{(4.23)}$$

dönüşüm değeri bulunur. Benzer şekilde

$k=3$ için

$$[4]_q\, Y_q(4)=2\{Y_q(0)\, Y_q(3)+Y_q(1)\, Y_q(2)+Y_q(2)\, Y_q(1)+Y_q(3)\, Y_q(0)\}+Y_q(2)$$

yazılır ve buradan

$$Y_q(4)=0 \qquad \textbf{(4.24)}$$

bulunur.

$k=4$ için

$$[5]_q Y_q(5)=2\{Y_q(0)Y_q(4)+Y_q(1)Y_q(3)+Y_q(2)Y_q(2)+Y_q(3)Y_q(1)+Y_q(4)Y_q(0)\}+Y_q(3)$$

yazılır ve buradan

$$Y_q(5)=\frac{15}{[3]_q[5]_q} \tag{4.25}$$

bulunur.

$k=5$ için

$$\begin{aligned}[6]_q Y_q(6)=2\{&Y_q(0)Y_q(5)+Y_q(1)Y_q(4)+Y_q(2)Y_q(3)+Y_q(3)Y_q(2)\\&+Y_q(4)Y_q(1)+Y_q(5)Y_q(0)\}+Y_q(4)\end{aligned}$$

yazılır ve buradan

$$Y_q(6)=0 \tag{4.26}$$

bulunur.

$k=6$ için

$$\begin{aligned}[7]_q Y_q(7)=2\{&Y_q(0)Y_q(6)+Y_q(1)Y_q(5)+Y_q(2)Y_q(4)+Y_q(3)Y_q(3)\\&+Y_q(4)Y_q(2)+Y_q(5)Y_q(1)+Y_q(6)Y_q(0)\}+Y_q(5)\end{aligned}$$

yazılır ve buradan

$$Y_q(7)=\frac{1}{[3]_q[5]_q[7]_q}\left\{75+18\frac{[5]_q}{[3]_q}\right\} \tag{4.27}$$

bulunur. Buna göre $Y_q(2k)=0,\ k=0,1,2,...,$ olmaktadır. Bulunan dönüşüm değerleri (3.2) eşitliğinde yerlerine yazılırsa

$$y(x)=x+\frac{3}{[3]_q}x^3+\frac{15}{[3]_q[5]_q}x^5+\frac{1}{[3]_q[5]_q[7]_q}\left\{75+\frac{18[5]_q}{[3]_q}\right\}x^7+\dots\ . \tag{4.28}$$

seri çözümü elde edilir.

(4.17)-(4.18) probleminin $q\to 1$ için klasik Riccati denkleminden oluşan problemin çözümü (4.28) eşitliğinde $q\to 1$ yazılırsa

$$\begin{aligned}y(x)&=x+x^3+x^5+x^7+\dots\\&=\frac{x}{1-x^2}\end{aligned}$$

olmaktadır.

Örnek 4.4. İkinci mertebeden lineer olmayan q -diferansiyel denklemi

$$D_q^2 y(x)+\left(D_q y(x)\right)^2+[2]_q^2 y(x)=q^3+3q^2+2q \tag{4.29}$$

ve

$$\begin{aligned} y(0)&=[2]_q, \\ D_q y(0)&=0, \end{aligned} \tag{4.30}$$

başlangıç koşulları ile oluşturulan problem dikkate alınsın.

(4.30) koşullarına q -diferansiyel dönüşüm metodu uygulanırsa sırasıyla

$$Y_q(0)=[2]_q \tag{4.31}$$

ve

$$Y_q(1)=0 \tag{4.32}$$

bulunur. (4.29) denklemine q -diferansiyel dönüşüm metodu uygulanırsa

$$\begin{aligned} &[k+1]_q[k+2]_q Y_q(k+2)+\sum_{r=0}^{k}[r+1]_q Y_q(r+1)[k-r+1]_q Y_q(k-r+1)+[2]_q^2 Y_q(k) \\ &=\left(q^3+3q^2+2q\right)\delta(k) \end{aligned} \tag{4.33}$$

bağıntısı yazılır. Buradan $k=0,1,2,...,$ değerleri için sırasıyla

$$Y_q(2)=-1,\ Y_q(3)=0,\ Y_q(4)=0,$$

ve genel olarak

$$Y_q(k)=0,\quad k\geq 3,$$

dönüşüm değerleri bulunur. Bu değerler (3.2) eşitliğinde yerlerine yazılarak problemin tam çözümü

$$y(x)=[2]_q-x^2$$

elde edilir. (4.29)-(4.30) probleminin klasik formu

$$y''(x)+\left(y'(x)\right)^2+4y(x)=6,$$

$$\begin{aligned} y(0)&=2, \\ y'(0)&=0, \end{aligned}$$

ve çözümü

$$y(x)=2-x^2$$

şeklindedir.

Bir sonraki örnekte Wazwaz'ın (2001) Adomian ayrıştırma metodu ile, Arikoğlu ve Özkol'un (2005) diferansiyel dönüşüm metodu ile çözdüğü integro-diferansiyel denklemden oluşan aşağıdaki sınır değer probleminin q-benzeri oluşturularak q-diferansiyel dönüşüm metodu ile çözümü incelenecektir. Bahsi geçen klasik problem

$$y''(x)=1+\int_0^x e^{-t}y^2(t)\,dt\ ,$$

$$y(0)=1,\ y'(0)=1,$$
$$y(1)=e,\ y'(1)=e,$$

şeklindedir. Bu problemin q-benzeri başlangıç değer problemi olarak oluşturulmuştur.

Örnek 4.5. Aşağıdaki q-integro-diferansiyel denklem içeren başlangıç değer problemi

$$D_q^2 y(x)=1+\int_0^x E_q(-t)\,y^2(t)\,d_qt, \tag{4.34}$$

$$y(0)=1,\ D_q y(0)=1, \tag{4.35}$$

dikkate alınsın ve ilave koşul olarak $D_q^2 y(0)=1$ olsun.

Başlangıç koşullarına q-diferansiyel dönüşüm metodu uygulanırsa sırasıyla

$$Y_q(0)=1,\ Y_q(1)=1,\ Y_q(2)=\frac{1}{[2]_q!} \tag{4.36}$$

bulunur. (4.34) denklemine q-diferansiyel dönüşüm metodu uygulanırsa $k\geq 1$ için

$$[k+1]_q[k+2]_q Y_q(k+2)=\delta(k)+\frac{1}{[k]_q}\sum_{r=0}^{k-1}\frac{(-1)^r q^{\frac{r(r-1)}{2}}}{[r]_q!}\sum_{i=0}^{k-1-r}Y_q(i)\,Y_q(k-1-r-i) \tag{4.37}$$

bağıntısı elde edilir. (4.37) eşitliği $k=1,2,3,...,$ için yazılır ve (4.36) eşitlikleri kullanılırsa

$$Y_q(3)=\frac{1}{[3]_q!},\ Y_q(4)=\frac{1}{[4]_q!},$$

ve genel olarak

$$Y_q(k)=\frac{1}{[k]_q!},\quad k=0,1,2,...,$$

dönüşüm değerleri bulunur. Bu değerler (3.2) eşitliğinde yerlerine yazılarak problemin çözümü

$$y(x)=1+x+\frac{1}{[2]_q!}x^2+\frac{1}{[3]_q!}x^3+\frac{1}{[4]_q!}x^4+...+\frac{1}{[n]_q!}x^n+...$$

olup (2.13) tanımından tam çözüm

$$y(x)=e_q(x)$$

olarak bulunur.

Yüksek mertebeli integro-diferansiyel denklem ile oluşturulan (Wazwaz, 2001)

$$y^{(\mathrm{iv})}(x)=x\left(1+e^x\right)+3e^x+y(x)-\int_0^x y(t)\,dt,$$

$$y(0)=1,\ y'(0)=1\ ,$$

$$y(1)=e,\ y'(1)=e\,,$$

sınır değer probleminin q -benzeri oluşturulup (başlangıç değer problemi olarak) q -diferansiyel dönüşüm metodu ile çözümü sıradaki örnekte incelenecektir.

Örnek 4.6. Yüksek mertebeli q -integro-diferansiyel denklemi

$$D_q^4 y(x)=\frac{1}{q}\left(x-e_q(qx)\right)+e_q(x)\left([4]_q+q^4x\right)+y(x)-\int_0^x y(t)\,d_qt \qquad \textbf{(4.38)}$$

ve başlangıç koşulları

$$y(0)=\frac{1}{q},\ D_qy(0)=1,\ D_q^2y(0)=[2]_q\,,\ D_q^3y(0)=[3]_q \qquad \textbf{(4.39)}$$

ve $D_q^4y(0)=[4]_q$ ile oluşturulan problem ele alınsın.

Öncelikle (4.39) başlangıç koşullarından

$$Y_q(0)=\frac{1}{2},\ Y_q(1)=1,\ Y_q(2)=1,\ Y_q(3)=\frac{1}{[2]_q!},\ Y_q(4)=\frac{1}{[3]_q!},\qquad \textbf{(4.40)}$$

bulunur. (4.38) denklemine q -diferansiyel dönüşüm metodu uygulanırsa $k\geq 1$ için

$$[k+1]_q[k+2]_q[k+3]_q[k+4]_q Y_q(k+4)=\frac{1}{q}\delta(k-1)-\frac{1}{q}\frac{q^k}{[k]_q!}+\frac{[4]_q}{[k]_q!}$$
$$+q^4\sum_{r=0}^{k}\delta(r-1)\frac{1}{[k-r]_q!}+Y_q(k)-\frac{Y_q(k-1)}{[k]_q}$$

(4.41)

bağıntısı elde edilir. (4.41) eşitliği $k=1,2,3,...,$ için yazılır ve (4.40) eşitlikleri kullanılırsa

$$Y_q(5)=\frac{1}{[4]_q!},\ Y_q(6)=\frac{1}{[5]_q!},$$

ve genel olarak

$$Y_q(k)=\frac{1}{[k-1]_q!},\quad k\geq 1,$$

dönüşüm değerleri bulunur. Bu değerler (3.2) eşitliğinde yerlerine yazılarak problemin çözümü

$$y(x)=\frac{1}{q}+x+x^2+\frac{1}{[2]_q!}x^3+\frac{1}{[3]_q!}x^4+...+\frac{1}{[n-1]_q!}x^n+...$$

olup bunun düzenlenmesi ile

$$y(x)=\frac{1}{q}+x\left\{1+x+\frac{x^2}{[2]_q!}+\frac{x^3}{[3]_q!}+\frac{x^4}{[4]_q!}+...\right\}$$
$$=\frac{1}{q}+xe_q(x)$$

tam çözümü bulunur.

Son örnek olarak yine bir Lane-Emden denklemi dikkate alınarak onun q -benzeri oluşturulup çözümü incelenecektir. Klasik form olarak

$$y''+\frac{1}{x}y'+\cos x+\frac{1}{x}\sin x=0,$$

$$y'(0)=0,\ y(1)=\cos 1,$$

problemi, (Ramos, 2004) çalışmasında parçalı yarı doğrusallaştırma yöntemi ile, (Özdemir, 2019) tezinde sonlu fark yöntemi ile çözülerek $y(x)=\cos x$ tam çözümü bulunmuştur.

Örnek 4.7. Aşağıdaki q -Lane-Emden problemi dikkate alınsın:

$$D_q^2 y(x)+\frac{1}{x}D_q y(x)+\cos_q(x)+\frac{1}{x}\sin_q(x)=0 \qquad \textbf{(4.42)}$$

$$y(0)=1,\ D_q y(0)=0\,. \qquad \textbf{(4.43)}$$

(4.41) denklemi önce x ile çarpılıp sonra elde edilen denkleme q -diferansiyel dönüşüm metodu uygulanırsa

$$\sum_{r=0}^{k}\delta(r-1)[k-r+1]_q[k-r+2]_q Y_q(k-r+2)+[k+1]_q Y_q(k+1)$$
$$+\sum_{r=0}^{k}C_q(r)\delta(k-r-1)+S_q(k)=0 \qquad \textbf{(4.44)}$$

bağıntısı elde edilir. Burada $C_q(k)$ ve $S_q(k)$, sırasıyla $\cos_q(x)$ ve $\sin_q(x)$ fonksiyonlarının q -diferansiyel dönüşüm karşılıkları olarak alınmıştır. (4.43) başlangıç koşullarına da q -diferansiyel dönüşüm metodu uygulanırsa

$$Y_q(0)=1,\ Y_q(1)=0 \qquad \textbf{(4.45)}$$

bulunur. (4.44) eşitliği $k=0$ için yazılırsa

$$Y_q(1)=0$$

elde edilir. (4.44) eşitliği $k=1$ için yazılırsa

$$[1]_q[2]_q Y_q(2)+[2]_q Y_q(2)+1.1+1=0$$

olup buradan da

$$Y_q(2)=\frac{-1}{[2]_q!}$$

bulunur. Benzer şekilde $k=2$ için $[2]_q[3]_q Y_q(3)+[3]_q Y_q(3)+0.1+0=0$ eşitliğinden

$$Y_q(3)=0$$

bulunur. $k=3$ için $[3]_q[4]_q Y_q(4)+[4]_q Y_q(4)+\left(\dfrac{-1}{[2]_q!}\right)1+\left(\dfrac{-1}{[3]_q!}\right)=0$ eşitliğinden

$$\left([3]_q+1\right)[4]_q Y_q(4)=\frac{1}{[2]_q!}\left(\frac{[3]_q+1}{[3]_q}\right)$$

yazılırsa buradan

$$Y_q(4)=\frac{1}{[4]_q!}$$

bulunur. $k=4$ için $[4]_q[5]_q Y_q(5)+[5]_q Y_q(5)+0.1+0=0$ eşitliğinden

$$Y_q(5)=0$$

olur. . $k=5$ için $[5]_q[6]_q Y_q(6)+[6]_q Y_q(6)+\left(\dfrac{1}{[4]_q!}\right)1+\left(\dfrac{1}{[5]_q!}\right)=0$ eşitliğinden

$$\left([5]_q+1\right)[6]_q Y_q(6)=\frac{-1}{[4]_q!}\left(\frac{[5]_q+1}{[5]_q}\right)$$

yazılırsa buradan

$$Y_q(6)=\frac{-1}{[6]_q!}$$

olur. Bulunan değerlere göre genelleme yapılırsa

$$Y_q(2k+1)=0,\ Y_q(2k)=\frac{(-1)^k}{[2k]_q!},\ k=0,1,2,\dots\ ,$$

dönüşüm değerleri bulunur ve seri çözümü

$$y(x)=1-\frac{x^2}{[2]_q!}+\frac{x^4}{[4]_q!}-\frac{x^6}{[6]_q!}+\dots$$

olarak yazılır. (2.16) eşitliğinden problemin tam çözümü

$$y(x)=\cos_q(x)$$

olarak bulunur.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde, bir boyutlu q -diferansiyel dönüşüm metodu tanımlanarak temel özellikleri incelendi. Klasikteki bazı problemlerin q -benzerleri oluşturularak q -diferansiyel dönüşüm metodu ile çözümleri elde edildi. Bu kapsamda q -Lane-Emden, q -Riccati, q -integro denklem tipinde lineer ve lineer olmayan q -diferansiyel denklemleri oluşturularak tam ve seri çözümleri elde edildi.

Bu tezde incelenen problemler farklı metotların q -benzerleri için (q -Adomian ayrıştırma metodu, q -varyasyon iterasyon metodu, gibi) incelenirse metotların kullanışlığı veya yakınsama hızı karşılaştırması yapılabilir.

Literatürde iki boyutlu q -diferansiyel dönüşüm metodu üzerine incelemeler de yapılmış olup daha farklı q -kısmi diferansiyel denklemler için problemler oluşturularak çözümleri incelenebilir.

Son zamanların güncel çalışma konularından biri de q,ω -analizidir veya Hahn analizidir (Hahn, 1949; Annaby vd., 2012). Bu analizdeki $D_{q,\omega}$ fark operatörü; D_q fark ve Δ_ω ileri fark operatörünün birleştirilmesiyle oluşturulmuştur ve bu üç operatör arasında

$$\lim_{q\to 1} D_{q,\omega} f(x) = \Delta_\omega f(x),$$
$$\lim_{\omega\to 0} D_{q,\omega} f(x) = D_q f(x),$$
$$\lim_{q\to 1,\omega\to 0} D_{q,\omega} f(x) = f'(x),$$

bağıntısı mevcuttur. Bu operatör için q,ω -diferansiyel dönüşüm metodunun incelenmesi durumunda tezdeki bulgular ve sonuçlar bu incelemeleri oldukça kolaylaştıracaktır. Yine günümüzün popüler çalışma konularından olan kesirli analiz için de kesirli q -diferansiyel dönüşüm metodu üzerine de incelemeler yapılmak istendiğinde tezdeki bulgular bu konuda yapılacak çalışmalara da öncülük edecektir.

KAYNAKLAR

Abbasi, H. and Javed, A. (2020). Implementation of differential transform method (DTM) for large deformation analysis of cantilever beam. *IOP Conference Series Materials Science and Engineering* 899, 012003.

Abdel-Halim, H. H. (2008). Application to differential transformation method for solving systems of differential equations. *Applied Mathematical Modelling,* 32, 2552–2559.

Abdulmajeed, A.Y. and Khudair, A.R. (2021). Solving Riccati type q -difference equations via difference transform method. *Al-Qadisiyah Journal of Pure Science*, 26:4.

Allahviranloo, T., Kiani, N.A. and Motamedi, N. (2009). Solving fuzzy differential equations by differential transformation method. *Information Sciences*. 179 956–966.

Alquran, M. and Al-khaled, K., Ali, M., Ta'any, A. (2012). The combained Laplace transform-differential transform method for solving linear nonhomogeneous PDEs. *Journal of Mathematics and Computer Science*. 2(3), 690-701.

Annaby, M. H., Hamza, A.E. and Aldwoah, K.A. (2012). Hahn difference operator and associated Jackson-Nörlund integrals. *Journal of Optimization Theory and Applications.* 154, 133-153.

Arikoglu, A. and Ozkol, I. (2005). Solution of boundary value problems for integro-differential equations by using differential transform method. *Appl. Math Comput*. 168 (2), 1145-1158.

Arikoglu, A. and Ozkol, I. (2008). Solutions of integral and integro-differential equationsystems by using differential transform method. *Computers and Mathematics with Applications.* 56, 2411–2417.

Ayaz, F. (2003). On the two-dimensional differential transform method. *Appl. Math. Comput.* 143, 361-374.

Ayaz, F. (2004). Solutions of the system of differential equations by differential transform method. *Applied Mathematics and Computation.* 147, 547–567.

Batiha, A. M. and Batiha, B. (2011). Differential transformation method for a reliable treatment of the nonlinear biochemical reaction model. *Advanced Studies in Biolog*y. 3, 355- 360.

Biazar, J., Eslami, M. and Islam, M. R. (2012). Differential transform method for special systems of integral equations. *Journal of King Saud University-Science*. 24, 3, 211-214.

Bozyigit, B., Yesilce, Y. and Catal, S. (2017). Differential transform method and Adomian decomposition method for free vibration analysis of fluid conveying timoshenko pipeline. *Structural Engineering and Mechanics.* 62:1, 65-77.

Chanchlani, L., Alha, S. and Gupta, J. (2019). Generalization of Taylor's formula and differential transform method for composite fractional q -derivative. *Ramanujan J.* 48, 21-32.

Chen, C. K and Ho, S. H (1996). Application of differential transformation to eigenvalue problems. *Applied Mathematics and Computation,* 79, 173-188.

Chen, C. K., and Ho, S. H. (1999). Solving partial differential equations by two-dimensional differential transform*, Appl. Math. Comput.,* 106, 171-179.

Chu, H. P. and Chen, C. L. (2008). Hybrid differential transform and finite difference method to solve the nonlinear heat conduction problem. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 13, 1605-1614.

Devadass, K.M. and Rajendran, M. (2015). Application of differential transformation method for stability analysis of Euler Bernoulli column. *International Journal of Advance Research in Science and Engineering*. 4, 2319-8354.

El-Shahed, M. and Gaber, M., Al-Yami, M. (2013). The fractional q-differential transformation and its application. *Commun Nonlinear Sci. Numer. Simulat*. 18, 42-55.

El-Shahed, M. and Gaber, M. (2011). Two-dimensional q-differential transformation and its application. *Applied Mathematics and Computation*. 217, 9165-9172.

Ernst, T. (2000). *The history of q-calculus and a new method*. Citeseer, Sweden.

Garg, M. and Chanchlani, L. (2012). On fractional q-kinetic equation. *Mat. Bilt.* 36, 33-46.

Garg, M. and Chanchlani, L. (2013). Solution of nonlinear q-Schrodinger equation by two-dimensional q-differential transform method. *Kuwait J. Sci.*, 40:2, 17-30.

Garg, M. and Chanchlani, L. (2014). On two-dimensional q-differential transform method. *Afr. Mat.* 25, 529-538.

Gasper, G. and Rahman, M. (1990). *Basic Hypergeometric Series*. Cambridge Univ. Press, New York.

Gavabaria, R. H., Ganjib, D. D. and Bozorgic, A. (2014). Applications of the two-dimensional differential transform and least square method for solving nonlinear wave equations. *New Trends in Mathmatical Sciences,* 2:2, 95- 105.

Hahn, W. (1949). Über orthogonalpolynome, die q-differenzenlgleichungen genügen. *Math. Nachr.* 2, 4-34.

Jackson, F. H. (1904). A generalization of functions $\Gamma(n)$ and x^n. *Proceedings of the Royal Society of London.* 74, 64-72.

Jackson, F. H. (1910). On q-definite integrals, *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics.* 41, 193-203.

Jafari, H., Haghbin, A., Hesam, S. and Baleanu, D. (2014). Solving partial q-differential equations within reduced q-differential transformation method. *Rom. Journ. Phys.,* 59:5-6, 399-407.

Jafarı, H., Alıpour, M. and Tajadodı, H. (2010). Two-dimensional differential transform method for solving nonlinear partial differential equations. *International Journal of Research and Reviews in Applied Sciences*, 2:1, 2076-7366.

Jang, M. and Chen, C., Liy, Y. (2000). On solving the initial-value problems using the differential transformation method. *Applied Mathematics and Computations*. 115 (2-3), 145-160.

Jing, S. C. and Fan, H. Y. (1995). q-Taylor's formula with its q-remainder. *Commun. Theor. Phys.*, 23, 117-120.

Jordan, C. (1965). *Calculus of Finite Differences*. Chelsea, New York.

Kac, V. and Cheung, P. (2002). *Quantum calculus*, Universitext, New York: Springer.

Kangalgil, F. and Ayaz, F. (2009). Solitary wave solutions for the KdV and mKdV equations by differential transform method, *Chaos, Solitons & Fractals*. 41:1, 464-472.

Kanth, A. S. V. R and Aruna, K. (2008). Differential transform method for solving linear and non-linear systems of partial differential equations. *Physics Letters A.* 372, 6896–6898.

Kanth, A. S. V. R and Aruna, K. (2009). Differential transform method for solving the linear and nonlinear Klein–Gordon equation. *Computer Physics Communications*. 180, 708–711.

Liu, H. K. (2011). Application of a differential transformation method to strongly nonlinear damped q -difference equations. *Comput. Math. Appl.* 61, 2555-2561.

Mirzaee, F. (2011). Differential transform method for solving linear and nonlinear systems of ordinary differential equations. *Applied Mathematical Sciences.* 5, 70, 3465-3472.

Moharir, S. and Patila N. A. (2012). Application of differential transform method for solving differential and integral equations. *Scientific Reviews & Chemical Communications*. 2:3, 293-298.

Odibat, Z. M. (2008). Differential transform method for solving Volterra integral equation with separable kernels. *Mathematical and Computer Modelling.* 48, 1144-1149.

Özdemir, G. (2019). *Lane-Emden denkleminin sonlu fark yöntemi ile çözümü*, Basılmamış Yüksek Lisans Tezi, İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, 47, Malatya.

Qin, Y., and Lou, Q. (2021). Differential transform method for the solutions to some initial value problems in chemistry, *Journal of Mathematical Chemistry*. 59, 1046-1053.

Ramos, J. I. (2004). Piecewise quasilinearization techniques for singular boundary-value problems. *Computer Physics Communications*. 158, 12-25.

Sadik, M. O. and Orie, B. O. (2004). Application of q -calculus to the solution of partial q -differential equations. *Applied Mathematics.* 12, 669-678.

Wazwaz, A. M. (2001). A reliable algorithm for solving boundary value problems for higher-order integro-differential equations. *Appl. Math. Comput.,* 118, 327-342.

Yener, G. and Emiroğlu, I. (2014). q -deformed Lane Emden differential equations and its solution by q -differential transform method, *Int. J. Contemp. Math. Sciences*. 9:4, 163-174.

Zhou, J. K. (1986). *Differential transformation method and its application for electrical circuits*, Hauzhang University Press, Wuhan, China (1), 96-102.

ÖZ GEÇMİŞ

Madeha MOHAMMED, 2018 yılında Sudan'da Aljazera Üniversitesi Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Fakültesi Bilgisayar ve Matematik Bölümünden mezun oldu. 2020 yılında Ondokuz Mayıs Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı Yüksek Lisans programına girdi.

İletişim Bilgileri

ORCID ID : 0000-0002-3255-6308

Yayınlar:

1. Mohammed, M ve F. Hıra (2023). Solution of q-integro-differential equations using q-differential transform nethod. *7'th International Conference on Computational Mathematics and Engineering Science,* Elazığ.

Kazanılan Ödüller, Teşvikler ve Burslar

1. Türkiye Bursları, 2019.