



T.C.
EGE ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü



SHEFFER STROKE VE CEBİRSEL LOJİK ÜZERİNE

Doktora Tezi

Tuğçe KALKAN

Matematik Anabilim Dalı

İzmir
2023

T.C.
EGE ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü

SHEFFER STROKE VE CEBİRSEL LOJİK ÜZERİNE

Tuğçe KALKAN

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Tahsin ÖNER

Matematik Anabilim Dalı
Matematik Doktora programı

İzmir
2023

Tuğçe KALKAN tarafından DOKTORA tezi olarak sunulan “**Sheffer Stroke ve Cebirsel Lojik Üzerine**” başlıklı bu çalışma EÜ Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile EÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi’nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve 15/05/2023 tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği/oyçokluğu ile başarılı bulunmuştur.

Jüri üyeleri

İmza

Jüri Başkanı :

Raportör Üye:

Üye :

Üye :

Üye :

EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

EÜ Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin ilgili hükümleri uyarınca Doktora Tezi olarak sunduğum “Sheffer Stroke ve Cebirsel Lojik Üzerine” başlıklı bu tezin kendi çalışmam olduğunu, sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi, tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarımı ihlal edici bir davranışımın olmadığını, bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı, bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

15/05/2023

Tuğçe KALKAN

ÖZET

SHEFFER STROKE VE CEBİRSEL LOJİK ÜZERİNE

KALKAN, Tuğçe

Doktora Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Tahsin ÖNER

Mayıs 2023, 91 sayfa

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde tez konusu tanıtılarak, konu ile ilgili yapılan çalışmalar hakkında bilgi verilmiştir.

İkinci bölümde, tezin okunabilirliğini kolaylaştırmak adına bazı temel tanım ve kavramlar sunulmuştur.

Üçüncü bölümde, Sheffer stroke BCI cebirleri tanımlanarak, aksiyomlarının bağımsızlığı, süzgeçleri, bölüm grupları, homomorfizmaları, çekirdeği yardımıyla bu cebir yapıları üzerinde temel izomorfizma teoremlerinin ispatları sunulmuştur.

Tezin dördüncü bölümünde, Sheffer stroke BCK cebirlerinin tanımı verilerek, aksiyom sisteminin bağımsızlığı gösterilmiştir. Ayrıca, değişmeli, implicative ve involutory Sheffer stroke BCK cebirleri tanımlanarak aralarındaki ilişkiler araştırılmıştır. Bir Sheffer stroke BCK cebirinin (anti) fuzzy alt kümesi, (anti) fuzzy ideali, (anti) fuzzy sub-implicative ideali, bir fuzzy kümenin tümleyeni ve kartezyen çarpımları inşa edilerek bu yapılar arasındaki ilişkiler gösterilmiştir.

Tezin beşinci bölümünde, tez boyunca yapılan çalışmalar ve elde edilen sonuçlardan bahsedilmiştir.

Anahtar sözcükler: Sheffer stroke, Sheffer stroke BCI cebirleri, Sheffer stroke BCK cebirleri, (anti) fuzzy ideal, homomorfizma.

ABSTRACT

ON SHEFFER STROKE AND ALGEBRAIC LOGIC

KALKAN, Tuğçe

Ph.D. in Mathematics Department

Supervisor: Prof. Dr. Tahsin ÖNER

May 2023, 91 pages

This thesis consists of five chapters.

In the first chapter, the topic of thesis was introduced and information about the studies which is related to the topic of thesis was given.

In the second chapter, some basic definitions and concepts were presented in order to facilitate the readability of the thesis.

In the third chapter, Sheffer stroke BCI algebras were defined and proved three fundamental isomorphism theorems on these algebraic structures by means of independence of their axioms, filters, quotient groups, homomorphisms and kernels.

In the fourth chapter of the thesis, the independence of the axiom system was shown by giving the definition of Sheffer stroke BCK algebras. In addition, commutative, implicative and involutory Sheffer stroke BCK algebras were defined and their relationships were investigated. The (anti) fuzzy subset of a Sheffer stroke BCK algebra, the (anti) fuzzy ideal, the (anti) fuzzy subimplicative ideal, the complement of a fuzzy set and Cartesian products were constructed and the relationships between these structures were shown.

In the fifth chapter of the thesis, the studies carried out throughout the thesis and the results obtained were mentioned.

Keywords: Sheffer stroke, Sheffer stroke BCI algebra, Sheffer stroke BCK algebra, (anti) fuzzy ideal, homomorphism.

ÖNSÖZ

Yüksek lisans eğitimimin başından itibaren benzer konuları çalışan lisansüstü öğrencilerinin gerçekleştirdiği seminerlerde ele alınan çalışmalarla bu konuya olan merakım daha da artmıştır. Ayrıca bu konunun ülkemizde çok da yaygın çalışılmaması bu konuya olan ilgimi arttırdı. Yapılan seminerler süresince elde ettiğim bilgi ve tecrübe sonucunda doktora tez çalışmamın bu konu olması kararlaştırılmıştır. Tez konusu belirlendikten sonra konu ile ilgili yapılan çalışmalar incelenmiştir ve danışmanım ile birlikte tezin ana bölümü oluşturulmuştur. Bu konu hakkında çalışmak isteyen lisansüstü öğrencilerine katkı sağlayacağına inandığım bu tez, danışmanımla birlikte yaptığımız çalışmaların bir sentezidir.

İZMİR

15/05/2023

Tuğçe Kalkan

İÇİNDEKİLER

Sayfa

İÇ KAPAK	ii
KABUL VE ONAY SAYFASI	iii
ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI	v
ÖZET	vii
ABSTRACT	ix
ÖNSÖZ	xi
İÇİNDEKİLER	xiii
ŞEKİLLER DİZİNİ	xv
TABLolar DİZİNİ	xvii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	xix
1 GİRİŞ	1
2 ÖN BİLGİLER	4
3 SHEFFER STROKE BCI CEBİRLERİ	9
3.1 Süzgeçleri	24
3.2 Homomorfizmalar	29
4 SHEFFER STROKE BCK CEBİRLERİ	35
4.1 Anti Fuzzy İdealleri	52
4.2 Homomorfizmalar	62
4.3 Anti Fuzzy İdeallerin Kartezyen Çarpımları	77
5 SONUÇ	83
KAYNAKLAR DİZİNİ	84
TEŞEKKÜR	87
ÖZGEÇMİŞ	88

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
3.1 A kümesinin Hasse diyagramı	10
3.2 A/β kümesinin Hasse diyagramı	28
4.1 D kümesinin Hasse diyagramı	36
4.2 M_3-N_5 kafesleri	48
4.3 A kümesinin Hasse diyagramı	75
4.4 A kümesinin Hasse diyagramı	76

TABLOLAR DİZİNİ

<u>Çizelge</u>	<u>Sayfa</u>
3.1 (SBCI-1) in bağımsızlığını göstermek için işlem tablosu	9
3.2 (SBCI-2) nin bağımsızlığını göstermek için işlem tablosu	10
3.3 A üzerindeki $ $ Sheffer stroke işleminin tablosu	11
3.4 B üzerindeki $ $ Sheffer stroke işlem tablosu	16
3.5 B üzerindeki $\longrightarrow$ işlem tablosu	17
3.6 C üzerindeki $\longrightarrow$ işlem tablosu	18
3.7 C üzerindeki $ $ işlem tablosu	18
3.8 A/β üzerindeki $ _{\beta}$ Sheffer stroke işlem tablosu	28
4.1 (SBCK-1) in bağımsızlığını göstermek için işlem tablosu	36
4.2 (SBCK-2) nin bağımsızlığını göstermek için işlem tablosu	36
4.3 D üzerindeki $ $ Sheffer stroke işleminin tablosu	37
4.4 A üzerindeki $ $ Sheffer stroke işleminin tablosu	76
4.5 A üzerindeki $ $ Sheffer stroke işleminin tablosu	77

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

SimgelerAçıklama $Ker f$

f fonksiyonunun çekirdek kümesi



1 GİRİŞ

Sheffer stroke işlemi H. M. Sheffer tarafından 1913'te tanıtıldı (Sheffer, 1913). H. M. Sheffer tüm Boole fonksiyonlarının tek bir ikili işlemde elde edildiğini göstermiştir. Sheffer stroke işlemi diğer tüm Boole işlemlerinin yerine kullanıldığı için Boole cebirlerinde çok başarılı bir araç olarak kullanılmıştır (Chajda and Länger, 2022). Yani, her Boole işlemi Sheffer stroke işlemi kullanılarak yeniden ifade edilebilmektedir (McCune et al., 2002). Böylece birçok cebirsel yapı için daha basit ve kolay denetlenebilir aksiyom sistemleri elde edilebilmektedir. Bu nedenle birçok matematikçinin ilgisini çekmektedir ve çalışmalarında bu işlemi kullanıyorlardır. (Chajda, 2005; Chajda et al., 2019; Oner et al., 2021a,b,c,d, 2022a,b, 2023a,b; Oner and Senturk, 2017; Senturk and Oner, 2021; Senturk et al., 2020). Günümüz teknolojisinde, özellikle bilgisayar işlemcilerinde tek bir ikili işlem kullanılması yeterli olduğu için oldukça başarılı bir uygulamadır. Bununla birlikte, bilgisayar işlemcilerini oluşturan çiplerde her bir Boole işlemi için farklı diodlar bulunması gerekirken Sheffer stroke işlemi için tek bir diod bulunması yeterli olacaktır.

1966 yılında BCI cebirleri K. Iséki tarafından tanıtıldı (Iséki, 1966). BCI cebiri ismi, birleştirici mantığın B, C ve I aksiyomlarının birleşiminden oluşur. BCI cebirleri, programlama dilinde bir uygulaması olan BCI mantığının bir cebirsel yapısıdır. BCI cebirlerinin farklı türlerde birçok tanımı vardır. Bu tanımlar tür ve notasyona göre farklılaşırlar. Bazılarında bir sıralama bağıntısı ele alınır ancak bu diğer olası tanımlardaki aksiyomlardan türetilir. Bazı notasyonlar bir $*$ ikili işlemi ve 0 sabitini içerir. BCI cebirlerini $(A; \rightarrow, 1)$ formunda bir cebir olarak ele almanın nedenlerinden biri, mantıkla olan bağlantısını daha iyi anlamaktır (Chajda, 2014).

1966 yılında K. Iséki ve Y. Imai tarafından BCK cebirleri tanıtıldı (Imai and Iséki, 1966). Bu kavram iki farklı yoldan kaynaklanmaktadır: Bunlardan biri küme teorisine dayanmaktadır; diğeri ise klasik ve klasik olmayan önerme hesaplarındandır. Mantıksal sistemlerde implikasyon işlemiyle küme teorisinde küme farkı kavramları arasında yakın bir ilişki vardır. O halde bu ilişkiden 'en

temel ortak özellikleri nedir?’ sorusu doğmuştur. ‘Bu bakış açısından yeni bir cebir formüle edilir mi?’ ya da ‘bu genel cebir için iyi bir teori oluşturmak amacıyla bir aksiyoim sistemini nasıl bulabiliriz?’ sorularına cevap vermek için K. Iséki ve Y. Imai BCK cebirleri olarak adlandırılan genel cebirlerin yeni bir sınıfını tanıttılar. BCK cebirleri grup teorisi, fonksiyonel analiz, olasılık teorisi, topoloji gibi matematiğin birçok alanına uygulanmıştır. Birçok araştırmacı BCK cebirlerinin çeşitli kavramlarını ve özelliklerini çalışmışlardır. BCK cebirlerinin gelişmesinde ideal teorisinin önemli rolü vardır (Hong et al., 2003).

Fuzzy (bulanık) küme kavramı Zadeh tarafından tanıtıldı (Zadeh, 1965). Fuzzy küme yarıgrup, grup, halka, vektör uzayları, topoloji gibi diğer cebirsel yapılara uygulanmıştır. 1991 yılında, Xi (Xi, 1991) fuzzy küme kavramını BCK cebirlerine uygulamıştır. Biswas grupların anti fuzzy altgruplarını tanıttı (Biswas, 1990). S. M. Hong ve Y. B. Jun bu fikri BCK cebirlerine uyguladı. BCK cebirlerinin anti fuzzy idealleri kavramını tanıttılar (Hong and Jun, 1998).

Bu tezin amacı, klasik olmayan lojiklerin cebir yapılarını Sheffer stroke işlemi ile donatarak daha az sayıda ve kolay denetlenebilir aksiyomlara sahip yeni cebirsel yapılar inşa etmektir. Ayrıca, yeni cebirsel yapıların çeşitli özelliklerini, sıralama, kongrüans ve denklik bağıntılarını, ideallerini veya süzgeçlerini, homomorfizma ve bölüm gruplarını incelenmesi; esas cebir yapıları ve diğer cebir yapıları ile aralarındaki ilişkinin sunulmasıdır.

Tezin ilk bölümünde Sheffer stroke işlemi, BCI ve BCK cebirleri ve fuzzy ideal kavramı ile ilgili gerekli bilgiler verilerek çalışıldığı alanlar ifade edilecektir. Bu alanlarda çalışmalar yapmış araştırmacılar tarafından bulunan çalışmalar ortaya konulacaktır. Ayrıca, tezi oluşturan bölümlerin içerikleri kısaca özetlenecektir.

Tezin ikinci bölümünde, tezin okunabilirliğini kolaylaştıracak ve devamında kullanılacak temel tanımlar ve kavramlar ifade edilecektir.

Tezin üçüncü bölümünde ise Sheffer stroke BCI cebirleri tanımlanarak bu yeni cebirsel yapının aksiyomlarının bağımsızlığı gösterilecektir. Sheffer stroke BCI cebirleri örneklenerek özellikleri sunulacaktır. Bu cebirsel

yapı üzerinde kısmi sıralama bağıntısı tanımlanarak en büyük ve en küçük elemana sahip olduğu gösterilecektir. Sheffer stroke BCI cebirleri ve BCI cebirleri arasındaki ilişki araştırılacaktır. Son olarak, kartezyen çarpımları, süzgeçleri, kongrüans bağıntısı, homomorfizması, çekirdeği tanımlanarak bu yapılar arasındaki geçişler ve bağlantılar incelenecektir.

Tezin dördüncü bölümünde, Sheffer stroke BCK cebiri tanımlanarak aksiyom sisteminin bağımsızlığı gösterilecektir. Ardından Sheffer stroke BCK cebiri örneklenerek çeşitli özellikleri sunulacaktır. Bu yapı üzerinde bir kısmi sıralama tanımlandıktan sonra değişmeli, implicative ve involutory Sheffer stroke BCK cebirleri tanımlanacaktır ve aralarındaki ilişkiler sunulacaktır. Bir Sheffer stroke BCK cebirinin (anti) fuzzy alt kümesi, (anti) fuzzy ideali, (anti) fuzzy sub-implicative ideali, bir fuzzy kümenin tümleyeni ve kartezyen çarpımları tanımlanarak aralarındaki ilişkiler incelenecektir.

Tezin beşinci bölümünde, tez boyunca yapılan çalışmalar ve bu çalışmalardan elde edilen sonuçlar özetlenecektir.

2 ÖN BİLGİLER

Bu bölümde, tezin okunabilirliğini kolaylaştırmak amacıyla gerekli olan temel kavramlar, bazı tanım ve teoremler verilmiştir (Grätzer, 2002), (Birkhoff, 1940).

Tanım 2.1. P boştan farklı bir küme olmak üzere, P üzerinde tanımlanan $\leq$ ikili bağıntısı

(i) yansıma: $\forall \tau_1 \in P$ için $\tau_1 \leq \tau_1$,

(ii) ters-simetri: $\tau_1, \tau_2 \in P$ için $(\tau_1 \leq \tau_2 \wedge \tau_2 \leq \tau_1) \rightarrow \tau_1 = \tau_2$,

(iii) geçişme: $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \in P$ için $(\tau_1 \leq \tau_2 \wedge \tau_2 \leq \tau_3) \rightarrow \tau_1 \leq \tau_3$

özelliklerini sağlıyorsa $\leq$ bağıntısına P üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısı denir. Yukarıdaki özelliklere ek olarak,

(iv) her $\tau_1, \tau_2 \in P$ için $\tau_1 \leq \tau_2$ veya $\tau_2 \leq \tau_1$

özelligi gerçekleşiyorsa, $\leq$ bağıntısına P üzerinde bir tam sıralama bağıntısı denir.

Tanım 2.2. Üzerinde kısmi sıralama bağıntısı tanımlı olan bir P kümesine kısmi sıralı küme denir ve $(P, \leq)$ ile gösterilir.

Tanım 2.3. P bir kısmi sıralı küme, $Q \subseteq P$ ve $\tau_1 \in Q$ olsun. Her $q \in Q$ için $q \leq p$ olacak şekilde bir $p \in P$ varsa, p elemanına Q kümesi için bir üst sınır denir. Eğer p , Q kümesi için bir üst sınır ve her $q \in Q$ için $q \leq \tau_1$ durumu $p \leq \tau_1$ durumunu gerektiriyorsa $p \in P$ elemanına Q kümesinin en küçük üst sınırı veya Q kümesinin supremumu denir.

Tanım 2.4. P bir kısmi sıralı küme, $Q \subseteq P$ ve $\tau_1 \in Q$ olsun. Her $q \in Q$ için $p \leq q$ olacak şekilde bir $p \in P$ varsa, p elemanına Q kümesi için bir alt sınır denir. Eğer p , Q kümesi için bir alt sınır ve her $q \in Q$ için $\tau_1 \leq q$ durumu $\tau_1 \leq p$ durumunu gerektiriyorsa $p \in P$ elemanına Q kümesinin en büyük alt sınırı veya Q kümesinin infimumu denir.

Tanım 2.5. L boştan farklı bir küme ve $\vee$, L üzerinde join ikili operatörü olmak üzere, her $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \in L$ için

- eş güçlülük: $\tau_1 \vee \tau_1 = \tau_1$,
- değişmelilik: $\tau_1 \vee \tau_2 = \tau_2 \vee \tau_1$,
- birleşmelilik: $(\tau_1 \vee \tau_2) \vee \tau_3 = \tau_1 \vee (\tau_2 \vee \tau_3)$

özelliklerini gerçekleyen $(L, \vee)$ grupoid yapısına bir join yarı-kafes denir.

Bir join-yarı kafes, her iki elemanın bir supremuma sahip olduğu $(L, \leq)$ kısmi sıralı kümesine karşılık gelir.

Tanım 2.6. L boştan farklı bir küme ve $\wedge$, L üzerinde meet ikili operatörü olmak üzere, her $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \in L$ için

- eş güçlülük: $\tau_1 \wedge \tau_1 = \tau_1$,
- değişmelilik: $\tau_1 \wedge \tau_2 = \tau_2 \wedge \tau_1$,
- birleşmelilik: $(\tau_1 \wedge \tau_2) \wedge \tau_3 = \tau_1 \wedge (\tau_2 \wedge \tau_3)$

özelliklerini gerçekleyen $(L, \wedge)$ grupoid yapısına bir meet yarı-kafes denir.

Bir meet-yarı kafes, her iki elemanın bir infimuma sahip olduğu $(L, \leq)$ kısmi sıralı kümesine karşılık gelir.

Lemma 2.1. Bir L kısmi sıralı kümesinin bir kafes olması için gerek ve yeter koşul L kümesinden seçilen her τ_1, τ_2 elemanları için $\sup\{\tau_1, \tau_2\}$ ve $\inf\{\tau_1, \tau_2\}$ elemanlarının her ikisinin de L kümesinde olmasıdır.

Tanım 2.7. P bir kısmi sıralı küme olsun. O zaman P 'nin her A alt kümesi için P de $\sup A$ ve $\inf A$ mevcut ise P kısmi sıralı kümesine tamdır denir. Bir kısmi sıralı küme üzerinde tam olan kafese bir tam kafes denir.

Tanım 2.8. $\langle L, \wedge, \vee \rangle$ bir kafes olsun. Her $\tau \in L$ için

$$(BL) \quad \tau \wedge 0 = 0$$

$$(BL)' \quad \tau \vee 1 = 1$$

özdeşliklerini sağlayan $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$ yapısına sınırlı bir kafes denir.

Tanım 2.9. $\langle L, \wedge, \vee \rangle$ bir kafes olsun. Her $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \in L$ için

$$(D1) \quad \tau_1 \wedge (\tau_2 \vee \tau_3) = (\tau_1 \wedge \tau_2) \vee (\tau_1 \wedge \tau_3)$$

$$(D2) \quad \tau_1 \vee (\tau_2 \wedge \tau_3) = (\tau_1 \vee \tau_2) \wedge (\tau_1 \vee \tau_3)$$

özdeşliklerini sağlayan $\langle L, \wedge, \vee \rangle$ yapısına dağılmalı bir kafes denir.

Tanım 2.10. $\langle L, \wedge, \vee \rangle$ bir dağılmalı kafes olsun. Her $\tau \in L$ için

$$(B1) \quad \tau \wedge 0 = 0, \tau \vee 1 = 1,$$

$$(B2) \quad \tau \wedge \tau' = 0, \tau \vee \tau' = 1$$

özdeşliklerini sağlayan $\langle L, \wedge, \vee, ', 0, 1 \rangle$ yapısına bir Boole cebiri denir.

Tanım 2.11. A boştan farklı bir küme ve $f : A \rightarrow A$ bir dönüşüm olmak üzere, her $\tau_1, \tau_2 \in A$ için $\tau_1 \leq \tau_2$ olduğunda $f(\tau_1) \leq f(\tau_2)$ koşulu gerçekleşiyorsa, f dönüşümüne sıra-koruyan bir dönüşüm denir.

Tanım 2.12. (Van Dalen, 2004) A boştan farklı bir küme, $R_1, \dots, R_n$ ler A üzerinde bağıntılar, $F_1, \dots, F_m$ ler A üzerinde fonksiyonlar ve her $i \in I$ için c_i ler A nın sabit elemanları olmak üzere $\langle A, R_1, \dots, R_n, F_1, \dots, F_m, \{c_i : i \in I\} \rangle$ sıralı dizisine bir yapı denir.

Tanım 2.13. (McCune et al., 2002) $\mathcal{A} = (A, |)$ bir grupoid olsun. Her $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \in A$ için

$$(S1) \quad \tau_1 | \tau_2 = \tau_2 | \tau_1,$$

$$(S2) \quad (\tau_1 | \tau_1) | (\tau_1 | \tau_2) = \tau_1,$$

$$(S3) \quad \tau_1 | ((\tau_2 | \tau_3) | (\tau_2 | \tau_3)) = ((\tau_1 | \tau_2) | (\tau_1 | \tau_2)) | \tau_3,$$

$$(S4) \quad (\tau_1 | ((\tau_1 | \tau_1) | (\tau_2 | \tau_2))) | (\tau_1 | ((\tau_1 | \tau_1) | (\tau_2 | \tau_2))) = \tau_1$$

aksiyomlarını gerçekleştiriyorsa $|$ işlemine bir Sheffer stroke işlemi denir. Buna ek olarak,

$$(S5) \quad \tau_2 | (\tau_1 | (\tau_1 | \tau_1)) = \tau_2 | \tau_2$$

özdeşliğini gerçekleştiriyorsa bir ortho-Sheffer stroke işlemi olarak adlandırılır.

Lemma 2.2. (McCune et al., 2002) $\mathcal{A} = (A, |)$ bir grupoid olsun. O zaman $\leq$ ikili bağıntısı A kümesi üzerinde $\tau_1, \tau_2 \in A$ için

$$\tau_1 \leq \tau_2 \quad \text{eğer ve yalnız eğer} \quad \tau_1 | \tau_2 = \tau_1 | \tau_1$$

şeklinde tanımlanırsa, $\leq$ bağıntısı A kümesi üzerinde bir kısmi sıralamadır.

Lemma 2.3. (McCune et al., 2002) $|, A$ üzerinde bir Sheffer stroke ve $\leq$, $\mathcal{A} = (A, |)$ yapısı üzerinde endüklenmiş bir kısmi sıralama olsun. O zaman $\tau_1, \tau_2 \in A$ için aşağıdaki önermeler gerçekleşir:

- (i) $\tau_1 \leq \tau_2$ olması için gerek ve yeter koşul $\tau_2 | \tau_2 \leq \tau_1 | \tau_1$ olmasıdır.
- (ii) $\tau_1 | (\tau_2 | (\tau_1 | \tau_1)) = \tau_1 | \tau_1$, $\mathcal{A}$ yapısının birimidir.
- (iii) Her $\tau_3 \in A$ için $\tau_1 \leq \tau_2$ ise $\tau_2 | \tau_3 \leq \tau_1 | \tau_3$ dir.
- (iv) $\tau_3 \in A$ için, $\tau_3 \leq \tau_1$ ve $\tau_3 \leq \tau_2$ ise $\tau_1 | \tau_2 \leq \tau_3 | \tau_3$ dir.

Tanım 2.14. (Chajda, 2014) A boştan farklı bir küme olsun. O zaman $\longrightarrow$, A üzerinde bir ikili işlem ve 1 , A 'nın seçkin elemanı olmak üzere her $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \in A$ için

$$(B_1) \quad (\tau_1 \rightarrow \tau_2) \rightarrow ((\tau_2 \rightarrow \tau_3) \rightarrow (\tau_1 \rightarrow \tau_3)) = 1,$$

$$(B_2) \quad 1 \rightarrow \tau_1 = \tau_1,$$

$$(B_3) \quad \tau_1 \rightarrow ((\tau_1 \rightarrow \tau_2) \rightarrow \tau_2) = 1,$$

$$(B_4) \quad \tau_1 \rightarrow \tau_1 = 1,$$

$$(B_5) \quad (\tau_1 \rightarrow \tau_2 = 1 \text{ ve } \tau_2 \rightarrow \tau_1 = 1) \text{ ise } o \text{ zaman } \tau_1 = \tau_2$$

aksiyomlarını gerçekleyen $\mathcal{A} = \langle A, \longrightarrow, 1 \rangle$ cebir yapısına bir BCI-cebiri denir.

Lemma 2.4. (Chajda, 2014) $\mathcal{A} = \langle A, \longrightarrow, 1 \rangle$ bir BCI cebiri olsun. O zaman A kümesi üzerinde $\tau_1, \tau_2 \in A$ için

$$\tau_1 \leq \tau_2 \quad \text{eğer ve yalnız eğer} \quad \tau_1 \longrightarrow \tau_2 = 1$$

şeklinde tanımlanan $\leq$ ikili bağıntısı A üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısıdır. Ayrıca, bu sıralama A üzerinde bir doğal sıralamadır ve bu sıralamaya göre 1 , A 'nın en büyük elemanıdır. Eğer A BCI cebiri en küçük elemana sahip ise sınırlı BCI cebiri olarak adlandırılır.

Tanım 2.15. (Iséki and Tanaka, 1978) A boştan farklı bir küme olsun. O zaman $*$, A üzerinde bir ikili işlem ve 0 , A 'nın seçkin elemanı olmak üzere her $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \in A$ için

$$(BCK-1) \quad ((\tau_1 * \tau_2) * (\tau_1 * \tau_3)) * (\tau_3 * \tau_2) = 0,$$

$$(BCK-2) \quad (\tau_1 * (\tau_1 * \tau_2)) * \tau_2 = 0,$$

$$(BCK-3) \quad \tau_1 * \tau_1 = 0,$$

(BCK-4) $\tau_1 * \tau_2 = 0$ ve $\tau_2 * \tau_1 = 0$ ise o zaman $\tau_1 = \tau_2$,

(BCK-5) $0 * \tau_1 = 0$

aksiyomlarını gerçekleyen $\mathcal{A} = \langle A, *, 0 \rangle$ cebir yapısına bir BCK-cebiri denir.

Lemma 2.5. (Iséki and Tanaka, 1978) $\mathcal{A} = \langle A, *, 0 \rangle$ bir BCK cebiri olsun. O zaman A kümesi üzerinde $\tau_1, \tau_2 \in A$ için

$$\tau_1 \leq \tau_2 \quad \text{eğer ve yalnız eğer} \quad \tau_1 * \tau_2 = 0$$

şeklinde tanımlanan $\leq$ ikili bağıntısı A üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısıdır.

Tanım 2.16. (Bărbăcioru, 1967; Iséki and Tanaka, 1978; Meng and Jun, 1994; Tanaka, 1975) $\mathcal{A} = \langle A, *, 0 \rangle$ bir BCK-cebiri olsun. O zaman

(i) Eğer $(\tau_1 * \tau_2) * \tau_3 = (\tau_1 * \tau_3) * (\tau_2 * \tau_3)$ ise A 'ya pozitif implicative BCK-cebiri denir.

(ii) Eğer $\tau_1 * (\tau_2 * \tau_1) = \tau_1$ ise, A 'ya bir implicative BCK-cebiri denir.

(iii) Eğer $\tau_1 * (\tau_1 * \tau_2) = \tau_2 * (\tau_2 * \tau_1)$ ise A 'ya değişmeli BCK-cebiri denir.

(iv) Eğer A , 1 en büyük elemanına ve her $\tau \in A$ için $N\tau$ ile gösterilen $1 * \tau$ elemanına sahip ise A 'ya sınırlı BCK-cebiri denir.

(v) Eğer her $\tau \in A$ için $NN\tau = \tau$ sağlanıyorsa A 'ya involutory BCK-cebiri denir.

Tanım 2.17. (Huang, 2006; Iséki, 1979) A bir BCK-cebiri olsun. O zaman

(i) Eğer her $\tau_1, \tau_2 \in A$ için $A(\tau_1, \tau_2) = \{t \in A : t * \tau_1 \leq \tau_2\}$, τ_1 o τ_2 ile gösterilen en büyük elemana sahip ise A 'ya (S) koşuluna sahiptir denir.

(ii) Eğer Lemma 2.5'te tanımlanan $\leq$ bağıntısı A üzerinde kısmi sıralama bağıntısı ve $(A, \leq)$ bir kafes ise $(A, *, \leq)$ bir BCK kafesidir.

3 SHEFFER STROKE BCI CEBİRLERİ

Bu bölümde, Sheffer stroke BCI cebiri kavramı incelenecektir. Sheffer stroke BCI cebiri tanımlanarak, bu cebir yapısının aksiyomlarının bağımsızlığı gösterilecektir. Bu cebir yapısı üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısı verilerek, bu yapının en küçük ve en büyük elemana sahip olduğu gösterilecektir. Sheffer stroke BCI cebirleri ve BCI cebirleri arasındaki ilişkiler ortaya konacaktır. BCI cebirlerinin kafes yapısı oluşturup oluşturmayacağı araştırılacaktır.

Tanım 3.1. *A boştan farklı bir küme ve $|$, A üzerinde Sheffer stroke işlemi olmak üzere her $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \in A$ için*

$$(SBCI-1) \quad (\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) | (((\tau_2 | (\tau_3 | \tau_3)) | ((\tau_1 | (\tau_3 | \tau_3)) | (\tau_1 | (\tau_3 | \tau_3)))) | ((\tau_2 | (\tau_3 | \tau_3)) | ((\tau_1 | (\tau_3 | \tau_3)) | (\tau_1 | (\tau_3 | \tau_3))))) = \tau_1 | (\tau_1 | \tau_1),$$

$$(SBCI-2) \quad \tau_1 | (\tau_2 | \tau_2) = \tau_2 | (\tau_1 | \tau_1) = 1 \text{ ise o zaman } \tau_1 = \tau_2$$

aksiyomlarını sağlayan (2) tipindeki $\langle A, | \rangle$ yapısına bir Sheffer stroke BCI cebiri denir.

Lemma 3.1. *(SBCI-1) ve (SBCI-2) aksiyomları bağımsızdır.*

Kanıt. Bir cebirsel yapının aksiyom sisteminin bağımsızlığı, o yapıyı oluşturan aksiyomlardan herhangi birinin diğer aksiyomlar kullanılarak türetilmediğini ifade eder. Bir aksiyom sisteminin bağımsızlığını göstermek için bağımsızlığı gösterilmek istenen aksiyomun yanlış, diğerlerinin doğru olduğu bir model inşa edilmelidir. Bunun için, $(\{0, 1\}, |)$ yapısını göz önünde bulunduralım.

(i) (SBCI-1) aksiyomunun bağımsızlığını göstermek için $(\{0, 1\}, |_1)$ üzerindeki $|_1$ işlemi Tablo 3.1'deki gibi tanımlayalım:

$ _1$	0	1
0	1	0
1	1	0

Tablo 3.1: (SBCI-1) in bağımsızlığını göstermek için işlem tablosu

O halde $|_1$ işlemi (SBCI-2) aksiyomunu sağlar fakat

$$\begin{aligned}
 0 &= 0|(0|0) \\
 &\neq (0|(1|1))|(((1|(1|1))|((0|(1|1))|(0|(1|1))))|((1|(1|1))| \\
 &\quad ((0|(1|1))|(0|(1|1)))) \\
 &= 1|(1|1) \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

olduğundan (SBCI-1) aksiyomunu sağlamaz.

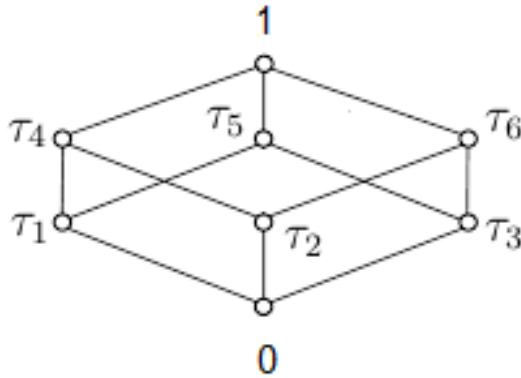
(ii) (SBI-2) aksiyomunun bağımsızlığını göstermek için $(\{0, 1\}, |_2)$ üzerindeki $|_2$ işlemini Tablo 3.2'deki gibi tanımlayalım:

$ _2$	0	1
0	1	1
1	0	1

Tablo 3.2: (SBCI-2) nin bağımsızlığını göstermek için işlem tablosu

O halde $|_2$ işlemi (SBCI-1) aksiyomunu sağlar fakat $0|(1|1) = 0|(0|0) = 1|(0|0)$ iken $1 \neq 0$ olduğundan (SBCI-2) aksiyomunu sağlamaz. $\square$

Örnek 3.1. $A = \{0, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5, \tau_6, 1\}$, Şekil 3.1'de bulunan Hasse diyagramına sahip bir küme ve A üzerindeki $|$ işlemi Tablo 3.3'deki işlem tablosuna sahip bir ikili işlem olsun.



Şekil 3.1: A kümesinin Hasse diyagramı

	0	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4	τ_5	τ_6	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
τ_1	1	τ_6	1	1	τ_6	τ_6	1	τ_6
τ_2	1	1	τ_5	1	τ_5	1	τ_5	τ_5
τ_3	1	1	1	τ_4	1	τ_4	τ_4	τ_4
τ_4	1	τ_6	τ_5	1	τ_3	τ_6	τ_5	τ_3
τ_5	1	τ_6	1	τ_4	τ_6	τ_2	τ_4	τ_2
τ_6	1	1	τ_5	τ_4	τ_5	τ_4	τ_1	τ_1
1	1	τ_6	τ_5	τ_4	τ_3	τ_2	τ_1	0

Tablo 3.3: A üzerindeki $|$ Sheffer stroke işleminin tablosu

O halde $\langle A, | \rangle$ yapısı bir Sheffer stroke BCI cebiri belirtir.

Lemma 3.2. $\langle A, | \rangle$ bir Sheffer stroke BCI cebiri olsun. O zaman her $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \in A$ için aşağıdaki özellikler vardır:

- (i) $(\tau_1 | (\tau_1 | \tau_1)) | (\tau_1 | \tau_1) = \tau_1$,
- (ii) $\tau_1 | (\tau_1 | \tau_1) = 1$,
- (iii) $\tau_1 | (((\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) | (\tau_2 | \tau_2)) | ((\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) | (\tau_2 | \tau_2))) = \tau_1 | (\tau_1 | \tau_1)$,
- (iv) $1 | (\tau_1 | \tau_1) = \tau_1$,
- (v) $\tau_1 | (1 | 1) = 1$,
- (vi) $(\tau_1 | 1) | (\tau_1 | 1) = \tau_1$,
- (vii) $\tau_1 | ((\tau_2 | (\tau_3 | \tau_3)) | (\tau_2 | (\tau_3 | \tau_3))) = \tau_2 | ((\tau_1 | (\tau_3 | \tau_3)) | (\tau_1 | (\tau_3 | \tau_3)))$,
- (viii) $(\tau_1 | ((\tau_2 | (\tau_3 | \tau_3)) | (\tau_2 | (\tau_3 | \tau_3)))) | ((\tau_2 | (\tau_1 | (\tau_3 | \tau_3)) | (\tau_1 | (\tau_3 | \tau_3))) | (\tau_2 | (\tau_1 | (\tau_3 | \tau_3)) | (\tau_1 | (\tau_3 | \tau_3)))) = 1$.

Kanıt. $\langle A, | \rangle$ bir Sheffer stroke BCI cebiri olsun.

- (i) (S2) aksiyomunda, eş zamanlı olarak, τ_2 yerine $\tau_1 | \tau_1$ yerleştirilirse, $(\tau_1 | (\tau_1 | \tau_1)) | (\tau_1 | \tau_1) = \tau_1$ elde edilir.
- (ii) (SBCI-1) aksiyomunda, eş zamanlı olarak, τ_2 yerine τ_1 ve τ_3 yerine $\tau_1 | \tau_1$

yerleştirilerek, (S1), (S2), (S3) aksiyomları ve (i) denklemi kullanılarak

$$\begin{aligned}
1 &= (\tau_1|(\tau_1|\tau_1))|(((\tau_1|((\tau_1|\tau_1)|(\tau_1|\tau_1)))|((\tau_1|((\tau_1|\tau_1)|(\tau_1|\tau_1)))|(\tau_1|((\tau_1|\tau_1)|(\tau_1|\tau_1))))|((\tau_1|((\tau_1|\tau_1)|(\tau_1|\tau_1)))|((\tau_1|((\tau_1|\tau_1)|(\tau_1|\tau_1)))|(\tau_1|((\tau_1|\tau_1)|(\tau_1|\tau_1)))))) \\
&= (\tau_1|(\tau_1|\tau_1))|(((\tau_1|\tau_1)|((\tau_1|\tau_1)|(\tau_1|\tau_1)))|((\tau_1|\tau_1)|((\tau_1|\tau_1)|(\tau_1|\tau_1)))) \\
&= (\tau_1|(\tau_1|\tau_1))|(((\tau_1|\tau_1)|\tau_1)|((\tau_1|\tau_1)|\tau_1)) \\
&= (((\tau_1|(\tau_1|\tau_1))|(\tau_1|\tau_1))|((\tau_1|(\tau_1|\tau_1))|(\tau_1|\tau_1)))|\tau_1 \\
&= \tau_1|(\tau_1|\tau_1)
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır.

(iii) (S3) aksiyomunda, τ_2 yerine $\tau_1|(\tau_2|\tau_2)$ ve τ_3 yerine $\tau_2|\tau_2$ yerleştirilerek, (S1), (S3) aksiyomları ve (ii) denklemi kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\tau_1|((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_2|\tau_2))|((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_2|\tau_2)) \\
&= \tau_1|((\tau_2|\tau_2)|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|((\tau_2|\tau_2)|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2)))) \\
&= ((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2)))|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2)) \\
&= (\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2))) \\
&= 1 \\
&= \tau_1|(\tau_1|\tau_1) \\
&\text{elde edilir.}
\end{aligned}$$

(iv) (ii) denklemi, (S1) ve (S2) aksiyomları kullanılarak

$$\begin{aligned}
1|(\tau_1|\tau_1) &= (\tau_1|(\tau_1|\tau_1))|(\tau_1|\tau_1) \\
&= (\tau_1|\tau_1)|(\tau_1|(\tau_1|\tau_1)) \\
&= \tau_1
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır.

(v) (iv) denklemi, (S1) ve (S2) aksiyomlarından

$$\begin{aligned}
\tau_1|(1|1) &= (1|(\tau_1|\tau_1))|(1|1) \\
&= 1
\end{aligned}$$

elde edilir.

(vi) (S1), (S3) aksiyomları ve (iv) denkleminde

$$(\tau_1|1)|(\tau_1|1) = (1|((\tau_1|\tau_1)|(\tau_1|\tau_1)))|(1|((\tau_1|\tau_1)|(\tau_1|\tau_1))) = (\tau_1|\tau_1)|(\tau_1|\tau_1) = \tau_1$$

dir.

(vii) (S1) ve (S2) aksiyomları kullanılarak

$$\begin{aligned}
 \tau_1|((\tau_2|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_2|(\tau_3|\tau_3))) &= (((\tau_1|\tau_2)|(\tau_1|\tau_2))|(\tau_3|\tau_3)) \\
 &= (((\tau_2|\tau_1)|(\tau_2|\tau_1))|(\tau_3|\tau_3)) \\
 &= \tau_2|((\tau_1|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_1|(\tau_3|\tau_3)))
 \end{aligned}$$

elde edilir.

(viii) (ii) ve (vii) denklemleri kullanılarak elde edilir.

□

Lemma 3.3. $\langle A, | \rangle$ bir Sheffer stroke BCI cebiri olsun. O zaman A kümesi üzerinde $\tau_1, \tau_2 \in A$ için

$$\tau_1 \leq \tau_2 \quad \text{eğer ve yalnız eğer} \quad \tau_1|(\tau_2|\tau_2) = 1$$

şeklinde tanımlanan $\leq$ ikili bağıntısı, A 'nın her τ_1 elemanı için $\tau_1 \leq 1$ olacak şekilde A üzerinde doğal sıralama olarak adlandırılan bir kısmi sıralama bağıntısıdır. Ayrıca her $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \in A$ için $\tau_3 \leq \tau_1|(\tau_3|\tau_3)$ tür ve $\tau_1 \leq \tau_2$ ise o zaman $\tau_2|(\tau_3|\tau_3) \leq \tau_1|(\tau_3|\tau_3)$ tür.

Kanıt. $\langle A, | \rangle$ bir Sheffer stroke BCI cebiri olsun ve A kümesi üzerinde $\leq$ ikili bağıntısı $\tau_1, \tau_2 \in A$ için $\tau_1 \leq \tau_2$ eğer ve yalnız eğer $\tau_1|(\tau_2|\tau_2) = 1$ şeklinde tanımlansın.

- **Yansıma:** Lemma 3.2 (ii)' den her $\tau_1 \in A$ için $\tau_1|(\tau_1|\tau_1) = 1$ olduğundan $\tau_1 \leq \tau_1$ dir.
- **Ters simetri:** $\tau_1 \leq \tau_2$ ve $\tau_2 \leq \tau_1$ olsun. Bu durumda $\tau_1|(\tau_2|\tau_2) = 1$ ve $\tau_2|(\tau_1|\tau_1) = 1$ dir. O halde (SBCI-2) aksiyomundan $\tau_1 = \tau_2$ sonucuna varılır.
- **Geçişme:** $\tau_1 \leq \tau_2$ ve $\tau_2 \leq \tau_3$ olsun. O zaman $\tau_1|(\tau_2|\tau_2) = 1$ ve $\tau_2|(\tau_3|\tau_3) =$

1 dir. Böylece, Lemma 3.2 (iv) ve (SBCI-1) kullanılarak

$$\begin{aligned}
1 &= ((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(((\tau_2|(\tau_3|\tau_3))|((\tau_1|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_1|(\tau_3|\tau_3))))| \\
&\quad ((\tau_2|(\tau_3|\tau_3))|((\tau_1|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_1|(\tau_3|\tau_3))))) \\
&= 1|(((\tau_2|(\tau_3|\tau_3))|((\tau_1|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_1|(\tau_3|\tau_3))))|((\tau_2|(\tau_3|\tau_3))| \\
&\quad ((\tau_1|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_1|(\tau_3|\tau_3))))) \\
&= ((\tau_2|(\tau_3|\tau_3))|((\tau_1|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_1|(\tau_3|\tau_3)))) \\
&= 1|((\tau_1|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_1|(\tau_3|\tau_3))) \\
&= \tau_1|(\tau_3|\tau_3)
\end{aligned}$$

elde edilir, yani, $\tau_1 \leq \tau_3$ sonucuna ulaşılır. O halde bu bağıntı A üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısıdır. Ayrıca, Lemma 3.2 (v)'den her $\tau_1 \in A$ için $\tau_1 \leq 1$ sonucuna ulaşılır.

$\tau_1 \leq \tau_2$ ve $\tau_3 \in A$ kabul edelim.

$$\begin{aligned}
1 &= ((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|((\tau_2|(\tau_3|\tau_3))|((\tau_1|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_1|(\tau_3|\tau_3))))| \\
&\quad ((\tau_2|(\tau_3|\tau_3))|((\tau_1|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_1|(\tau_3|\tau_3)))) \\
&= 1|(((\tau_2|(\tau_3|\tau_3))|((\tau_1|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_1|(\tau_3|\tau_3))))|((\tau_2|(\tau_3|\tau_3))|((\tau_1|(\tau_3|\tau_3))| \\
&\quad (\tau_1|(\tau_3|\tau_3))))) \\
&= ((\tau_2|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_1|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_1|(\tau_3|\tau_3)))
\end{aligned}$$

sonucuna varılır. O halde, $\tau_2|(\tau_3|\tau_3) \leq \tau_1|(\tau_3|\tau_3)$ elde edilir. Burada τ_2 yerine 1 yazılırsa $\tau_3 = 1|(\tau_3|\tau_3) \leq \tau_1|(\tau_3|\tau_3)$ sonucuna ulaşılır. $\square$

$\langle A, | \rangle$ Sheffer stroke BCI cebiri olsun. $1 = 0|0$, A 'nın en büyük elemanı ve $0 = 1|1$, A 'nın en küçük elemanıdır.

Lemma 3.4. $(A, |, 1)$ bir Sheffer stroke BCI cebiri olsun. O zaman her $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \in A$ için aşağıdaki özellikler sağlanır:

1. $\tau_1 \leq \tau_2|(\tau_1|\tau_1)$,
2. $\tau_1 \leq (\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_2|\tau_2)$,
3. $\tau_1|(\tau_2|\tau_2) \leq (\tau_2|(\tau_3|\tau_3))|((\tau_1|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_1|(\tau_3|\tau_3)))$,

4. Eğer $\tau_1 \leq \tau_2$ ise o zaman $\tau_3|(\tau_1|\tau_1) \leq \tau_3|(\tau_2|\tau_2)$ dir.

Kanıt. 1. (S1), (S2), (S3) aksiyomları ve Lemma 3.2 (ii) and (v) kullanılarak

$$\begin{aligned} \tau_1|((\tau_2|(\tau_1|\tau_1))|(\tau_2|(\tau_1|\tau_1))) &= \tau_1|(((\tau_1|\tau_1)|\tau_2)|((\tau_1|\tau_1)|\tau_2)) \\ &= ((\tau_1|(\tau_1|\tau_1))|(\tau_1|(\tau_1|\tau_1)))|\tau_2 \\ &= \tau_2|(1|1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

elde edilir, yani $\tau_1 \leq \tau_2(\tau_1|\tau_1)$ sonucuna ulaşılır.

2. (S1), (S3) aksiyomları ve Lemma 3.2 (ii) kullanılarak

$$\begin{aligned} &\tau_1|(((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_2|\tau_2))|((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_2|\tau_2))) \\ &= \tau_1|(((\tau_2|\tau_2)|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2)))|((\tau_2|\tau_2)|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2)))) \\ &= ((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2)))|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2)) \\ &= (\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2))) \\ &= 1 \end{aligned}$$

elde edilir, yani $\tau_1 \leq (\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_2|\tau_2)$ dir.

3. (SBCI-1) aksiyomundan elde edilir.

4. (S1), Lemma 2.3 (i) ve (iii)' den

$$\begin{aligned} \tau_1 \leq \tau_2 &\Leftrightarrow \tau_2|\tau_2 \leq \tau_1|\tau_1 \\ &\Leftrightarrow (\tau_1|\tau_1)|\tau_3 \leq (\tau_2|\tau_2)|\tau_3 \\ &\Leftrightarrow \tau_3|(\tau_1|\tau_1) \leq \tau_3|(\tau_2|\tau_2) \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır.

□

Teorem 3.1. $\langle A, | \rangle$ bir Sheffer stroke BCI cebiri olsun. Eğer $\tau_1 \longrightarrow \tau_2 := \tau_1|(\tau_2|\tau_2)$ şeklinde tanımlanırsa, o zaman $\langle A, \longrightarrow, 1 \rangle$ yapısı bir BCI cebiridir.

Kanıt. $\langle A, |, 1 \rangle$ bir Sheffer stroke BCI cebiri olsun ve $\tau_1 \longrightarrow \tau_2 := \tau_1|(\tau_2|\tau_2)$ ile tanımlansın.

(B₁) (SBCI-1), (SBCI-2), Lemma 3.2 (ii), (iii) ve (iv) kullanılarak

$$\begin{aligned}
& (\tau_1 \rightarrow \tau_2) \rightarrow ((\tau_2 \rightarrow \tau_3) \rightarrow (\tau_1 \rightarrow \tau_3)) \\
&= (\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) | (((\tau_2 | (\tau_3 | \tau_3)) | ((\tau_1 | (\tau_3 | \tau_3)) | (\tau_1 | (\tau_3 | \tau_3)))) | \\
&\quad ((\tau_2 | (\tau_3 | \tau_3)) | ((\tau_1 | (\tau_3 | \tau_3)) | (\tau_1 | (\tau_3 | \tau_3)))) \\
&= \tau_1 | (\tau_1 | \tau_1) \\
&= 1
\end{aligned}$$

elde edilir.

(B₂) $1 \rightarrow \tau_1 = 1 | (\tau_1 | \tau_1) = \tau_1$.

(B₃) $\tau_1 \rightarrow ((\tau_1 \rightarrow \tau_2) \rightarrow \tau_2) = \tau_1 | (((\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) | (\tau_2 | \tau_2)) | ((\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) | (\tau_2 | \tau_2))) = \tau_1 | (\tau_1 | \tau_1) = 1$ dir.

(B₄) $\tau_1 \rightarrow \tau_1 = \tau_1 | (\tau_1 | \tau_1) = 1$.

(B₅) $\tau_1 \rightarrow \tau_2 = \tau_1 | (\tau_2 | \tau_2) = 1$ ve $\tau_2 \rightarrow \tau_1 = \tau_2 | (\tau_1 | \tau_1) = 1$ ise o zaman $\tau_1 = \tau_2$ dir.

O halde, $\langle A, \rightarrow, 1 \rangle$ yapısı bir BCI cebiridir. $\square$

Örnek 3.2. $B := \{0, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5, \tau_6, 1\}$ olmak üzere Tablo 3.4'de verilen işlem tablosuna sahip $\langle B, | \rangle$ Sheffer stroke BCI cebirini göz önünde bulunduralım:

$ $	0	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4	τ_5	τ_6	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
τ_1	1	τ_6	1	1	τ_6	τ_6	1	τ_6
τ_2	1	1	τ_5	1	τ_5	1	τ_5	τ_5
τ_3	1	1	1	τ_4	1	τ_4	τ_4	τ_4
τ_4	1	τ_6	τ_5	1	τ_3	τ_6	τ_5	τ_3
τ_5	1	τ_6	1	τ_4	τ_6	τ_2	τ_4	τ_2
τ_6	1	1	τ_5	τ_4	τ_5	τ_4	τ_1	τ_1
1	1	τ_6	τ_5	τ_4	τ_3	τ_2	τ_1	0

Tablo 3.4: B üzerindeki $|$ Sheffer stroke işlem tablosu

O halde bu Sheffer stroke BCI cebiri aracılığıyla tanımlanan BCI cebiri

Tablo 3.5' deki işlem tablosuna sahiptir:

$\rightarrow$	0	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4	τ_5	τ_6	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
τ_1	τ_6	1	τ_6	τ_6	1	1	τ_6	1
τ_2	τ_5	τ_5	1	τ_5	1	τ_5	1	1
τ_3	τ_4	τ_4	τ_4	1	τ_4	1	1	1
τ_4	τ_3	τ_5	τ_6	τ_3	1	τ_5	τ_6	1
τ_5	τ_2	τ_4	τ_2	τ_6	τ_4	1	τ_6	1
τ_6	τ_1	τ_1	τ_4	τ_5	τ_4	τ_5	1	1
1	0	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4	τ_5	τ_6	1

Tablo 3.5: B üzerindeki $\rightarrow$ işlem tablosu

$\langle A, \rightarrow, 0, 1 \rangle$ bir sınırlı BCI cebiri olsun ve her $\tau_1 \in A$ için $\tau_1^0 = \tau_1 \rightarrow 0$ ile tanımlansın.

Teorem 3.2. $\langle A, \rightarrow, 0, 1 \rangle$ bir sınırlı BCI cebiri olsun. O zaman $\tau_1 | \tau_2 := \tau_1 \rightarrow \tau_2^0$ ile tanımlı $\langle A, | \rangle$ yapısı bir Sheffer stroke BCI cebiridir.

Kanıt. $\langle A, \rightarrow, 0, 1 \rangle$ bir sınırlı BCI cebiri olsun ve $\tau_1 | \tau_2 := \tau_1 \rightarrow \tau_2^0$ ile tanımlansın.

(SBCI-1): Lemma 3.2 (ii) ve Tanım 2.14 (B_1)'den

$$\begin{aligned}
& (\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) | (((\tau_2 | (\tau_3 | \tau_3)) | (((\tau_1 | (\tau_3 | \tau_3)) | (\tau_1 | (\tau_3 | \tau_3)))) | ((\tau_2 | (\tau_3 | \tau_3)) | \\
& (((\tau_1 | (\tau_3 | \tau_3)) | (\tau_1 | (\tau_3 | \tau_3)))))) \\
& = (\tau_1 \rightarrow \tau_2) | ((\tau_2 \rightarrow \tau_3) | ((\tau_1 \rightarrow \tau_3) | (\tau_1 \rightarrow \tau_3))) | ((\tau_2 \rightarrow \tau_3) | \\
& ((\tau_1 \rightarrow \tau_3) | (\tau_1 \rightarrow \tau_3))) \\
& = (\tau_1 \rightarrow \tau_2) \rightarrow ((\tau_2 \rightarrow \tau_3) \rightarrow (\tau_1 \rightarrow \tau_3)) \\
& = 1 \\
& = \tau_1 | (\tau_1 | \tau_1)
\end{aligned}$$

elde edilir.

(SBCI-2): $\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2) = \tau_2 (\tau_1 | \tau_1) = 1$ olsun. O halde $\tau_1 \rightarrow \tau_2 = \tau_2 \rightarrow \tau_1 = 1$ ve böylece Tanım 2.14 (B_5)'den $\tau_1 = \tau_2$ elde edilir. $\square$

Örnek 3.3. $C = \{0, \tau_1, \tau_2, 1\}$ olmak üzere Tablo 3.6'daki işlem tablosuna sahip $\langle C, \rightarrow, 1 \rangle$ BCI cebirini göz önünde bulunduralım:

$\rightarrow$	0	τ_1	τ_2	1
0	1	1	1	1
τ_1	τ_2	1	τ_2	1
τ_2	τ_1	τ_1	1	1
1	0	τ_1	τ_2	1

Tablo 3.6: C üzerindeki $\rightarrow$ işlem tablosu

O halde bu BCI cebiri aracılığıyla tanımlanan Sheffer stroke BCI cebiri

Tablo 3.7' deki işlem tablosuna sahiptir:

$ $	0	τ_1	τ_2	1
0	1	1	1	1
τ_1	1	τ_2	1	τ_2
τ_2	1	1	τ_1	τ_1
1	1	τ_2	τ_1	0

Tablo 3.7: C üzerindeki $|$ işlem tablosu

Lemma 3.5. $(A, |, 1)$ bir Sheffer stroke BCI cebiri olsun. O zaman her $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \in A$ için aşağıdakiler vardır:

1. $\tau_1|((\tau_2|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_2|(\tau_3|\tau_3))) = (\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|((\tau_1|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_1|(\tau_3|\tau_3)))$,
2. $\tau_1|(\tau_2|\tau_2) = ((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_2|\tau_2)$,
3. $(\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_2|\tau_2) = (\tau_2|(\tau_1|\tau_1))|(\tau_1|\tau_1)$.

Kanıt. $(A, |, 1)$ bir Sheffer stroke BCI cebiri olsun.

1. Lemma 3.4 (1)'den $\tau_2 \leq \tau_1|(\tau_2|\tau_2)$ dir. Lemma 3.2 (vii) ve Lemma 3.3 kullanılarak

$$\begin{aligned}
& (\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|((\tau_1|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_1|(\tau_3|\tau_3))) \\
& \leq \tau_2|((\tau_1|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_1|(\tau_3|\tau_3))) \\
& = \tau_1|((\tau_2|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_2|(\tau_3|\tau_3)))
\end{aligned}$$

elde edilir. Lemma 3.2 (ii), (vii) ve (SBCI-1) kullanılarak

$$\begin{aligned}
& (\tau_2|(\tau_3|\tau_3))|(((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|((\tau_1|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_1|(\tau_3|\tau_3))))|((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))| \\
& ((\tau_1|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_1|(\tau_3|\tau_3)))) \\
& = (\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(((\tau_2|(\tau_3|\tau_3))|((\tau_1|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_1|(\tau_3|\tau_3))))|((\tau_2|(\tau_3|\tau_3))|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& ((\tau_1|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_1|(\tau_3|\tau_3)))) \\
& = \tau_1|(\tau_1|\tau_1) \\
& = 1
\end{aligned}$$

sonucuna varılır. Lemma 3.3 kullanılarak

$$\tau_2|(\tau_3|\tau_3) \leq (\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|((\tau_1|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_1|(\tau_3|\tau_3)))$$

elde edilir. Lemma 3.4 (4), Lemma 3.2 (vii), (S3) ve (S2)' den

$$\begin{aligned}
\tau_1|((\tau_2|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_2|(\tau_3|\tau_3))) & \leq \tau_1|(((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|((\tau_1|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_1|(\tau_3|\tau_3)))) \\
& \quad |((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|((\tau_1|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_1|(\tau_3|\tau_3)))) \\
& = (\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|((\tau_1|((\tau_1|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_1|(\tau_3| \\
& \quad \tau_3))))|(\tau_1|((\tau_1|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_1|(\tau_3|\tau_3)))) \\
& = (\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|((\tau_1|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_1|(\tau_3|\tau_3)))
\end{aligned}$$

bulunur. O halde,

$$\tau_1|((\tau_2|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_2|(\tau_3|\tau_3))) = (\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|((\tau_1|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_1|(\tau_3|\tau_3)))$$

sonucuna ulaşılır.

2. Lemma 3.4 (2) denkleminde τ_1 yerine $\tau_1|(\tau_2|\tau_2)$ yerleştirilirse, $\tau_1|(\tau_2|\tau_2) \leq ((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_2|\tau_2)$ elde edilir. Lemma 3.2 (ii), (vii), (S1), (S2) ve (1) kullanılarak

$$\begin{aligned}
& (((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_2|\tau_2))|((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2))) \\
& = \tau_1|((((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_2|\tau_2))|((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_2|\tau_2))| \\
& \quad (\tau_2|\tau_2))|(\tau_2|\tau_2))) \\
& = (\tau_1|((((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_2|\tau_2))|((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_2|\tau_2))))| \\
& \quad ((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2))) \\
& = (((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_2|\tau_2))|((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2))))|((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))| \\
& \quad (\tau_1|(\tau_2|\tau_2))) \\
& = (((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2)))|((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_2|\tau_2)))|((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))| \\
& \quad (\tau_1|(\tau_2|\tau_2)))) \\
& = (\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2))) \\
& = 1,
\end{aligned}$$

yani, $((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_2|\tau_2) \leq \tau_1|(\tau_2|\tau_2)$ elde edilir. Böylece,
 $\tau_1|(\tau_2|\tau_2) = ((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_2|\tau_2)$ sonucuna varılır.

3. (1) ve (2) denklemleri, (S1),(S2) aksiyomları ve Lemma 3.2 (ii) and (vii) kullanılarak

$$\begin{aligned}
& ((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_2|\tau_2))|(((\tau_2|(\tau_1|\tau_1))|(\tau_1|\tau_1))|((\tau_2|(\tau_1|\tau_1))|(\tau_1|\tau_1))) \\
&= (((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_2|\tau_2))|(((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_1|\tau_1))| \\
&\quad (((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_1|\tau_1)))|(((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_1|\tau_1))| \\
&\quad (((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_1|\tau_1))) \\
&= ((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_1|\tau_1))|((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_2|\tau_2))| \\
&\quad (\tau_1|\tau_1)))|(((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_1|\tau_1))|((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_2|\tau_2))| \\
&\quad (\tau_1|\tau_1))) \\
&= (((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_2|\tau_2))|(((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_1|\tau_1))|((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_1|\tau_1)))) \\
&\quad |(((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_1|\tau_1))|(((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_1|\tau_1))) \\
&= (((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_1|\tau_1))|(((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))| \\
&\quad (\tau_2|\tau_2))|(\tau_1|\tau_1))|(((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_1|\tau_1))) \\
&= 1
\end{aligned}$$

elde edilir. $(\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_2|\tau_2) \leq (\tau_2|(\tau_1|\tau_1))|(\tau_1|\tau_1)$ sonucuna ulaşılır.

Benzer şekilde $(\tau_2|(\tau_1|\tau_1))|(\tau_1|\tau_1) \leq (\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_2|\tau_2)$ dir. O halde,

$$(\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_2|\tau_2) = (\tau_2|(\tau_1|\tau_1))|(\tau_1|\tau_1)$$

elde edilir.

□

Teorem 3.3. $(A, |, 1)$, $(2, 0)$ tipinde bir Sheffer stroke BCI-cebiridir eğer ve yalnız eğer A , her $\tau_1, \tau_2 \in A$ için aşağıdaki koşulları sağlar:

- (i) $(\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_2|\tau_2) = (\tau_2|(\tau_1|\tau_1))|(\tau_1|\tau_1)$,
- (ii) $1|(\tau_1|\tau_1) = \tau_1$,
- (iii) $\tau_1|(1|1) = 1$,
- (iv) $\tau_1|(\tau_1|\tau_1) = 1$.

Kanıt. ($\Rightarrow$) Lemma 3.5 (3), Lemma 3.2 (iv), (v), (ii) kullanılarak elde edilir.

($\Leftarrow$) $(A; |, 1)$ yukarıdaki koşulları sağlayan bir yapı olsun.

(SBCI-1): (S1), (S2), (S3), (i), (iii), (iv) kullanılarak

$$\begin{aligned}
& (\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) | (((\tau_2 | (\tau_3 | \tau_3)) | ((\tau_1 | (\tau_3 | \tau_3)) | (\tau_1 | (\tau_3 | \tau_3)))) | ((\tau_2 | (\tau_3 | \tau_3)) | ((\tau_1 | (\tau_3 | \tau_3)) | (\tau_1 | (\tau_3 | \tau_3)))))) \\
& = ((\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) | ((\tau_1 | (((\tau_2 | (\tau_3 | \tau_3)) | (\tau_3 | \tau_3)) | ((\tau_2 | (\tau_3 | \tau_3)) | (\tau_3 | \tau_3)))) | (\tau_1 | (((\tau_2 | (\tau_3 | \tau_3)) | (\tau_3 | \tau_3)) | ((\tau_2 | (\tau_3 | \tau_3)) | (\tau_3 | \tau_3)))))) \\
& = ((\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) | ((\tau_1 | (((\tau_3 | (\tau_2 | \tau_2)) | (\tau_2 | \tau_2)) | ((\tau_3 | (\tau_2 | \tau_2)) | (\tau_2 | \tau_2)))) | (\tau_1 | (((\tau_3 | (\tau_2 | \tau_2)) | (\tau_2 | \tau_2)) | ((\tau_3 | (\tau_2 | \tau_2)) | (\tau_2 | \tau_2)))))) \\
& = (\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) | (((\tau_3 | (\tau_2 | \tau_2)) | ((\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) | (\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)))) | ((\tau_3 | (\tau_2 | \tau_2)) | ((\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) | (\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)))))) \\
& = (\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) | (((((\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) | (\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2))) | (\tau_3 | (\tau_2 | \tau_2))) | (((\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) | (\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2))) | (\tau_3 | (\tau_2 | \tau_2)))))) \\
& = (((\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) | ((\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) | (\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)))) | ((\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) | ((\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) | (\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)))) | (\tau_3 | (\tau_2 | \tau_2))) \\
& = (\tau_3 | (\tau_2 | \tau_2)) | (1 | 1) \\
& = 1
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır.

(SBCI-2): $\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2) = 1$ ve $\tau_2 | (\tau_1 | \tau_1) = 1$ olsun. (i) ve (ii) kullanılarak

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= 1 | (\tau_1 | \tau_1) \\
&= (\tau_2 | (\tau_1 | \tau_1)) | (\tau_1 | \tau_1) \\
&= (\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) | (\tau_2 | \tau_2) \\
&= 1 | (\tau_2 | \tau_2) \\
&= \tau_2
\end{aligned}$$

elde edilir. □

Sonuç 3.1. *Bir Sheffer stroke BCI-cebiri her $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \in A$ için*

$$(SBCI-1) (\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) | (((\tau_2 | (\tau_3 | \tau_3)) | ((\tau_1 | (\tau_3 | \tau_3)) | (\tau_1 | (\tau_3 | \tau_3)))) | (\tau_2 | (\tau_3 | \tau_3))) \\ | (((\tau_1 | (\tau_3 | \tau_3)) | (\tau_1 | (\tau_3 | \tau_3)))) = \tau_1 | (\tau_1 | \tau_1),$$

$$(i) (\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) | (\tau_2 | \tau_2) = (\tau_2 | (\tau_1 | \tau_1)) | (\tau_1 | \tau_1)$$

koşullarını sağlayan $(2, 0)$ tipinde bir cebirdir.

Önerme 3.1. $\langle A, | \rangle$ bir Sheffer stroke BCI-cebiri ve $\leq$ bağıntısı A üzerinde bir doğal sıralama olsun. O zaman $\langle A, \leq \rangle$ yapısı (1) en büyük elemanına sahip bir join-yarı kafestir ve $\tau_1 \vee \tau_2 = (\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) | (\tau_2 | \tau_2)$ dir.

Kanıt. $\langle A, | \rangle$ bir Sheffer stroke BCI-cebiri ve $\leq$ bağıntısı A üzerinde bir doğal sıralama olsun. O halde Lemma 3.4 (1) ve (2)'den $\tau_1 \leq (\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) | (\tau_2 | \tau_2)$ ve $\tau_2 \leq (\tau_2 | (\tau_1 | \tau_1)) | (\tau_1 | \tau_1)$ elde edilir. Bu durumda, $(\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) | (\tau_2 | \tau_2)$; τ_1 ve τ_2 için bir üst sınırdır. $\tau_1, \tau_2 \leq \tau_3$ olduğunu kabul edelim. O zaman Lemma 3.3 kullanılarak $(\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) | (\tau_2 | \tau_2) \leq (\tau_3 | (\tau_2 | \tau_2)) | (\tau_2 | \tau_2) = (\tau_2 | (\tau_3 | \tau_3)) | (\tau_3 | \tau_3) = 1 | (\tau_3 | \tau_3) = \tau_3$ sonucuna ulaşılır. Öyleyse, $(\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) | (\tau_2 | \tau_2)$; τ_1 ve τ_2 'nin en küçük üst sınırıdır (supremumudur), yani $\tau_1 \vee \tau_2 = (\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) | (\tau_2 | \tau_2)$ elde edilir. $\square$

Sonuç 3.2. $\langle A, | \rangle$ bir Sheffer stroke BCI-cebiri olsun. O halde her $\tau_1, \tau_2 \in A$ için

$$\tau_1 \leq \tau_2 \quad \text{eğer ve yalnız eğer} \quad \tau_1 \vee \tau_2 = \tau_2$$

dir.

Teorem 3.4. $(A, |, 1)$ bir Sheffer stroke BCI-cebiri ve $\tau_1 \vee \tau_2 = (\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) | (\tau_2 | \tau_2)$ olsun. $\vee$ aşağıdaki özellikleri sağlar:

1. $\tau_1 \vee \tau_1 = \tau_1$,
2. $1 \vee \tau_1 = 1$,
3. $\tau_1 \vee \tau_2 = \tau_2$ ve $\tau_2 \vee \tau_1 = \tau_1$ ise o zaman $\tau_1 = \tau_2$ dir,
4. $\tau_1 \vee \tau_2 = (\tau_1 \vee \tau_2) \vee \tau_2 = \tau_1 \vee (\tau_1 \vee \tau_2)$,
5. $(\tau_1 \vee \tau_3) \vee ((\tau_1 \vee \tau_2) \vee \tau_3) = (\tau_1 \vee \tau_2) \vee \tau_3$.

Kanıt. Önerme 3.1'den elde edilir. $\square$

Sheffer stroke BCI-cebirinin sıralı kümesini ifade etmek için $\langle A, \leq \rangle$ üzerinde bir bağıntı tanımlamak gerekir. Bu yüzden, her $\tau \in A$ için $\varphi_\tau(x) = x|(\tau|\tau)$ tanımlayalım. $\varphi_\tau(x) = x^\tau$ ile gösterelim. Yani $x^\tau = x|(\tau|\tau)$ olur.

Lemma 3.6. $(A, |, 1)$ bir Sheffer stroke BCI-cebiri olsun. O zaman her $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \in A$ için aşağıdaki özellikler vardır:

1. $\tau_1 \leq \tau_1^{\tau_2\tau_2}$,
2. $\tau_1^{\tau_1} = 1$ ve $1^{\tau_1} = \tau_1$,
3. $((\tau_1 \vee \tau_2) \vee \tau_1)^{\tau_1} = (\tau_1 \vee \tau_2)^{\tau_1}$,
4. $(\tau_1 \vee \tau_2)^{\tau_2\tau_2} = \tau_1 \vee \tau_2$,
5. $(\tau_1 \vee \tau_2)^{\tau_2} = \tau_1|(\tau_2|\tau_2)$,
6. $\tau_2 \leq \tau_1^{\tau_2}$,
7. $\tau_1 \leq \tau_2$ ise o zaman $\tau_2^{\tau_3} \leq \tau_1^{\tau_3}$ ve $\tau_3^{\tau_1} \leq \tau_3^{\tau_2}$ dir,
8. $\tau_1^{\tau_2} \leq (\tau_2^{\tau_3})^{\tau_1^{\tau_3}}$.

Kanıt. 1. Lemma 3.4 (2)'den $\tau_1 \leq (\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_2|\tau_2) = \tau_1 \vee \tau_2$ elde edilir.

2. Lemma 3.2 (ii) ve (iv)'den $\tau_1^{\tau_1} = \tau_1|(\tau_1|\tau_1) = 1$ ve $1^{\tau_1} = 1|(\tau_1|\tau_1) = \tau_1$ sonucuna varılır.

3. Lemma 3.5 (2) kullanılarak

$$\begin{aligned} ((\tau_1 \vee \tau_2) \vee \tau_1)^{\tau_1} &= (((\tau_1 \vee \tau_2)|(\tau_1|\tau_1))|(\tau_1|\tau_1))|(\tau_1|\tau_1) \\ &= (\tau_1 \vee \tau_2)|(\tau_1|\tau_1) \\ &= (\tau_1 \vee \tau_2)^{\tau_1} \end{aligned}$$

elde edilir.

4. Lemma 3.5 (2) kullanılarak

$$\begin{aligned} (\tau_1 \vee \tau_2)^{\tau_2\tau_2} &= (((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_2|\tau_2) \\ &= (\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_2|\tau_2) \\ &= \tau_1 \vee \tau_2 \end{aligned}$$

dir.

5. Lemma 3.5 (2)'den

$$\begin{aligned} (\tau_1 \vee \tau_2)^{\tau_2} &= ((\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) | (\tau_2 | \tau_2)) | (\tau_2 | \tau_2) \\ &= \tau_1 | (\tau_2 | \tau_2) \end{aligned}$$

elde edilir.

6. Lemma 3.4 (1)'den elde edilir.

7. $\tau_1 \leq \tau_2$ olduğunu varsayalım. O zaman Lemma 3.3 ve Lemma 3.4 (4) kullanılarak $\tau_2 | (\tau_3 | \tau_3) \leq \tau_1 | (\tau_3 | \tau_3)$ ve $\tau_3 | (\tau_1 | \tau_1) \leq \tau_3 | (\tau_2 | \tau_2)$ sonucuna ulaşılır. O halde, $\tau_2^{\tau_3} \leq \tau_1^{\tau_3}$ ve $\tau_3^{\tau_1} \leq \tau_3^{\tau_2}$ dir.

8. Lemma 3.4 (3)'den elde edilir.

□

3.1 Süzgeçleri

Bu kısımda, Sheffer stroke BCI cebirlerinin süzgeçleri tanıtılarak çeşitli özellikleri incelenecektir.

Tanım 3.2. Her $\tau_1, \tau_2 \in A$ için

$$(SF-1) \ 1 \in F,$$

$$(SF-2) \ \tau_1 \in F \text{ ve } \tau_1 | (\tau_2 | \tau_2) \in F \text{ ise o zaman } \tau_2 \in F$$

özelliklerini sağlayan A 'nın boştan farklı bir F altkümüne A Sheffer stroke BCI cebirinin bir süzgeci (filtresi) denir.

Örnek 3.4. Örnek 3.1'deki A Sheffer stroke BCI cebirini göz önünde bulunduralım. O zaman A 'nın kendisi, $\{\tau_4, 1\}$, $\{\tau_5, 1\}$, $\{\tau_6, 1\}$, $\{\tau_1, \tau_4, \tau_5, 1\}$, $\{\tau_3, \tau_5, \tau_6, 1\}$, $\{1\}$ altkümeleri A 'nın süzgeçleridir.

Teorem 3.5. $(A, |, 1)$ bir Sheffer stroke BCI-cebiri olsun. A 'nın tüm süzgeçlerinin kümesi K_A bir tam kafestir.

Kanıt. $(A, |, 1)$ bir Sheffer stroke BCI-cebiri olsun. $\{F_i\}_{i \in I}$ A 'nın süzgeçlerinin bir kümesi olsun. (SF-1)'den her $i \in I$ için $1 \in F_i$ olduğundan $1 \in \bigcup_{i \in I} F_i$ ve

$1 \in \bigcap_{i \in I} F_i$ dir.

- (i) Her $\tau_1, \tau_2 \in A$ için $\tau_1 \in \bigcap_{i \in I} F_i$ ve $\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2) \in \bigcap_{i \in I} F_i$ olduğunu kabul edelim. Yani, her $i \in I$ için $\tau_1 \in F_i$ ve $\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2) \in F_i$ dir. O halde (SF-2)'den her $i \in I$ için $\tau_2 \in F_i$ dir. O halde $\tau_2 \in \bigcap_{i \in I} F_i$ dir.
- (ii) η , A nın $\bigcup_{i \in I} F_i$ 'yi içeren tüm süzgeçlerinin kümesi olsun. O zaman (i)'den $\bigcap \eta$, A nın bir süzgecidir. Eğer $\bigwedge_{i \in I} F_i = \bigcap_{i \in I} F_i$ ve $\bigvee_{i \in I} F_i = \bigcap \eta$ ise o zaman $(K_A, \bigwedge, \bigvee)$ bir tam kafestir.

□

Sonuç 3.3. $(A, |, 1)$ bir Sheffer stroke BCI-cebiri ve B , A nın bir alt kümesi olsun. A 'nın B kümesini kapsayan minimal süzgeci vardır.

Kanıt. $(A, |, 1)$ bir Sheffer stroke BCI-cebiri ve B , A nın bir alt kümesi olsun. $\varepsilon = \{F : F, A$ 'nın B 'yi kapsayan bir süzgecidir} kabul edelim. O halde $\langle B \rangle = \{\tau \in A : \tau \in \bigcap_{F \in \varepsilon} F\}$, A 'nın B kümesini kapsayan minimal süzgecidir. □

Tanım 3.3. F , A Sheffer stroke BCI cebirinin bir süzgeci olsun. A üzerinde bir β_F ikili bağıntısı her $\tau_1, \tau_2 \in A$ için

$$\tau_1 \beta_F \tau_2 \Leftrightarrow \tau_1 | (\tau_2 | \tau_2) \in F \text{ ve } \tau_2 | (\tau_1 | \tau_1) \in F \quad (3.1)$$

ile tanımlanır.

Tanım 3.4. A bir Sheffer stroke BCI cebiri olsun. Eğer her $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \in A$ için $\tau_1 \beta^* \tau_2$ iken $\tau_1 | \tau_3 \beta^* \tau_2 | \tau_3$ oluyorsa o zaman β^* denklik bağıntısına A üzerinde bir kongrüans bağıntısı denir.

Örnek 3.5. Örnek 3.1'de verilen A Sheffer stroke BCI cebirini göz önünde bulunduralım. A 'nın bir $\{\tau_5, 1\}$ süzgeci yardımıyla tanımlanan $\beta^* = \{(0, 0), (\tau_1, \tau_1), (\tau_2, \tau_2), (\tau_3, \tau_3), (\tau_4, \tau_4), (\tau_5, \tau_5), (\tau_6, \tau_6), (1, 1), (\tau_5, 1), (1, \tau_5), (0, \tau_2), (\tau_2, 0), (\tau_3, \tau_6), (\tau_6, \tau_3), (\tau_1, \tau_4), (\tau_4, \tau_1)\}$ denklik bağıntısı bir kongrüans bağıntısıdır.

Lemma 3.7. A bir Sheffer stroke BCI cebiri olsun. O zaman A üzerindeki bir β^* denklik bağıntısının A üzerinde bir kongrüans bağıntısı olması için gerek ve yeter koşul her $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4 \in A$ için $\tau_1 \beta^* \tau_2$ ve $\tau_3 \beta^* \tau_4$ ise $\tau_1 | \tau_3 \beta^* \tau_2 | \tau_4$ olmasıdır.

Kant. A bir Sheffer stroke BCI cebiri olsun. A üzerindeki bir β^* denklik bağıntısının A üzerinde bir kongrüans bağıntısı ve $\tau_1\beta^*\tau_2$ ile $\tau_3\beta^*\tau_4$ olacak şekilde $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4 \in A$ olduğunu varsayalım. O zaman (S1) aksiyomundan $\tau_1|\tau_3\beta^*\tau_2|\tau_3$ ve $\tau_2|\tau_3\beta^*\tau_2|\tau_4$ elde edilir. O halde β^* denklik bağıntısının geçişkenlik özelliğinden $\tau_1|\tau_3\beta^*\tau_2|\tau_4$ olur.

Diğer yönden, her $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4 \in A$ için $\tau_1\beta^*\tau_2$ ve $\tau_3\beta^*\tau_4$ ise $\tau_1|\tau_3\beta^*\tau_2|\tau_4$ olduğunu kabul edelim. $\tau_1\beta^*\tau_2$ olacak şekilde $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \in A$ olsun. $\tau_3\beta^*\tau_3$ olduğundan $\tau_1|\tau_3\beta^*\tau_2|\tau_3$ elde edilir. O halde β^* denklik bağıntısı A üzerinde bir kongrüans bağıntısıdır. $\square$

Lemma 3.8. F , A Sheffer stroke BCI cebirinin bir süzgeci ve β_F , A üzerinde (3.1) ifadesindeki gibi tanımlanan bir ikili bağıntı olsun. O halde β_F bağıntısı A üzerinde bir kongrüans bağıntısıdır.

Kant. F , A Sheffer stroke BCI cebirinin bir süzgeci ve β_F , A üzerinde (3.1) ifadesindeki gibi tanımlı bir ikili bağıntı olsun. İlk olarak, β_F bağıntısının A üzerinde bir denklik bağıntısı olduğunu gösterelim.

- Yansıma özelliği: Lemma 3.2 (ii) ve (SF-1)'den $\tau_1|(\tau_1|\tau_1) = 1 \in F$ dir. Yani her $\tau_1 \in A$ için $\tau_1\beta_F\tau_1$ elde edilir.

- Simetri özelliği: τ_1 ve τ_2 , $\tau_1\beta_F\tau_2$ olacak şekilde A 'nın iki elemanı olsun. O zaman $\tau_1|(\tau_2|\tau_2) \in F$ ve $\tau_2|(\tau_1|\tau_1) \in F$ dir. Buradan $\tau_2|(\tau_1|\tau_1) \in F$ ve $\tau_1|(\tau_2|\tau_2) \in F$ olduğuna göre $\tau_2\beta_F\tau_1$ elde edilir.

- Geçişme özelliği: $\tau_1\beta_F\tau_2$ ve $\tau_2\beta_F\tau_3$ olacak şekilde $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \in A$ olsun. O zaman $\tau_1|(\tau_2|\tau_2), \tau_2|(\tau_1|\tau_1) \in F$ ve $\tau_2|(\tau_3|\tau_3), \tau_3|(\tau_2|\tau_2) \in F$ olur. (SBCI-1)'den her $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \in A$ için $\tau_1|(\tau_2|\tau_2) \leq (\tau_2|\tau_3|\tau_3)|(\tau_1|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_1|(\tau_3|\tau_3))$ olduğundan $(\tau_2|(\tau_3|\tau_3))|((\tau_1|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_1|(\tau_3|\tau_3))) \in F$ elde edilir. O halde (SF-2)'den $\tau_1|(\tau_3|\tau_3) \in F$. Benzer şekilde her $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \in A$ için $\tau_3|(\tau_2|\tau_2) \leq (\tau_2|(\tau_1|\tau_1))|((\tau_3|(\tau_1|\tau_1))|(\tau_3|(\tau_1|\tau_1)))$ olduğundan $(\tau_2|(\tau_1|\tau_1))|((\tau_3|(\tau_1|\tau_1))|(\tau_3|(\tau_1|\tau_1))) \in F$ dir. O halde $\tau_3|(\tau_1|\tau_1) \in F$ elde edilir. Yani $\tau_1\beta_F\tau_3$ sonucuna ulaşılır.

Şimdi β_F denklik bağıntısının A üzerinde bir kongrüans bağıntısı olduğunu gösterelim. $\tau_1\beta_F\tau_2$ ve $\tau_3\beta_F\tau_4$ olacak şekilde $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4 \in A$ olsun. O zaman $\tau_1|(\tau_2|\tau_2), \tau_2|(\tau_1|\tau_1) \in F$ ve $\tau_3|(\tau_4|\tau_4), \tau_4|(\tau_3|\tau_3) \in F$ elde edilir.

(1): (S1) ve (S2) aksiyomlarından

$$(\tau_1|\tau_1)|((\tau_2|\tau_2)|(\tau_2|\tau_2)), (\tau_2|\tau_2)|((\tau_1|\tau_1)|(\tau_1|\tau_1)) \in F \text{ ve} \\ (\tau_3|\tau_3)|((\tau_4|\tau_4)|(\tau_4|\tau_4)), (\tau_4|\tau_4)|((\tau_3|\tau_3)|(\tau_3|\tau_3)) \in F. \text{ O halde}$$

$$(\tau_2|\tau_2)|((\tau_1|\tau_1)|(\tau_1|\tau_1)) \\ \leq (\tau_3|((\tau_2|\tau_2)|(\tau_2|\tau_2)))|((\tau_3|((\tau_1|\tau_1)|(\tau_1|\tau_1)))|(\tau_3|((\tau_1|\tau_1)|(\tau_1|\tau_1)))) \\ = (\tau_3|\tau_2)|((\tau_3|\tau_1)|(\tau_3|\tau_1)),$$

ve böylece (SF-2)'den $(\tau_3|\tau_2)|((\tau_3|\tau_1)|(\tau_3|\tau_1)) \in F$ elde edilir. Benzer şekilde, yukarıdaki ifadede eş zamanlı olarak, τ_1 yerine τ_2 , τ_2 yerine τ_1 yazılırsa $(\tau_3|\tau_1)|((\tau_3|\tau_2)|(\tau_3|\tau_2)) \in F$ elde edilir. O halde, $\tau_3|\tau_1\beta_F\tau_3|\tau_2$ sonucuna ulaşılır.

(2): (1) şıkında, eş zamanlı olarak, τ_3 yerine τ_2 , τ_1 yerine τ_3 ve τ_2 yerine τ_4 yazılırsa, $\tau_2|\tau_3\beta_F\tau_2|\tau_4$ sonucuna ulaşılır.

Öyleyse, β_F bağıntısının geçişme özelliğinden $\tau_1|\tau_3\beta_F\tau_2|\tau_4$ elde edilir. Sonuç olarak, Lemma 3.7'den β_F denklik bağıntısı A üzerinde bir kongrüans bağıntısıdır. $\square$

Teorem 3.6. F , A Sheffer stroke BCI cebirinin bir süzgeci ve β , A üzerinde F yardımıyla tanımlanan bir kongrüans bağıntısı olsun. O zaman $A/F \equiv A/\beta = \{[\tau_1]_\beta : \tau_1 \in A\}$ bir bölüm kümesi ve A/β üzerinde her $\tau_1, \tau_2 \in A$ için $[\tau_1]_\beta|_\beta[\tau_2]_\beta = [\tau_1|\tau_2]_\beta$ ile tanımlı $|_\beta$ Sheffer işlemi olmak üzere $\langle A/\beta, |_\beta \rangle$ yapısı bir Sheffer stroke BCI cebiri ve $F = [1]_\beta$ dir.

Kanıt. F 'nin A 'nın bir süzgeci, β bağıntısının A üzerinde F yardımıyla tanımlanan bir kongrüans bağıntısı, $A/\sim = \{[\tau_1]_\beta : \tau_1 \in A\}$ bir bölüm kümesi ve $|_\beta$ Sheffer stroke işleminin her $\tau_1, \tau_2 \in A$ için $[\tau_1]_\beta|_\beta[\tau_2]_\beta = [\tau_1|\tau_2]_\beta$ olarak tanımlandığını kabul edelim.

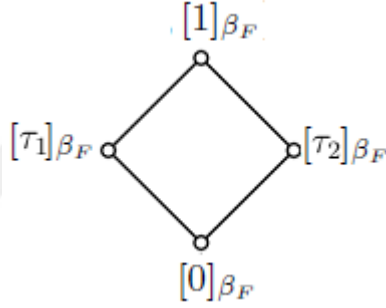
Öncelikle $F = [1]_\beta$ olduğunu gösterelim. Bir $\tau_1 \in [1]_\beta$ için, Lemma 3.2 (iv) ve (v)'den $\tau_1\beta 1$, yani, $1 = \tau_1|(1|1) \in F$ and $\tau_1 = 1|(\tau_1|\tau_1) \in F$ olduğu açıktır. Bu yüzden, $[1]_\beta \subseteq F$ dir. Lemma 3.2 (iv), (v) ve (SF-2)'den her $\tau_1 \in A$ için $1 = \tau_1|(1|1) \in F$ ve $\tau_1 = 1|(\tau_1|\tau_1) \in F$ dir. Böylece $\tau_1\beta 1$, yani, $\tau_1 \in [1]_\beta$ elde edilir. O zaman $F \subseteq [1]_\beta$. A/F in tanımından $[0]_\beta$, A/F in bir elemanıdır.

Şimdi $A/F \equiv A/\beta = \{[\tau_1]_\beta : \tau_1 \in A\}$ nin bir Sheffer stroke BCI-cebiri olduğunu gösterelim. $(A, |, 1)$ bir Sheffer stroke BCI cebiri olduğundan ve $|_\beta$ ikili işlemi tanımından

$$\begin{aligned}
& (SBCI - 1) \quad ([\tau_1]_\beta | ([\tau_2]_\beta | [\tau_2]_\beta)) | ((([\tau_2]_\beta | ([\tau_3]_\beta | [\tau_3]_\beta)) | ((([\tau_1]_\beta | ([\tau_3]_\beta | [\tau_3]_\beta)) | \\
& ([\tau_1]_\beta | ([\tau_3]_\beta | [\tau_3]_\beta))))) | ((([\tau_2]_\beta | ([\tau_3]_\beta | [\tau_3]_\beta)) | ((([\tau_1]_\beta | ([\tau_3]_\beta | [\tau_3]_\beta)) | \\
& ([\tau_1]_\beta | ([\tau_3]_\beta | [\tau_3]_\beta))))) = 1 \\
& (SBCI - 2) \quad [\tau_1]_\beta | ([\tau_2]_\beta | [\tau_2]_\beta) = [\tau_1]_\beta | ([\tau_1]_\beta | [\tau_1]_\beta) \text{ ve } [\tau_2]_\beta | ([\tau_1]_\beta | [\tau_1]_\beta) \\
& = [\tau_1]_\beta | ([\tau_1]_\beta | [\tau_1]_\beta) \text{ ise o zaman } [\tau_1]_\beta = [\tau_2]_\beta \text{ dir.}
\end{aligned}$$

□

Örnek 3.6. Örnek 3.1’de verilen A Sheffer stroke BCI cebirini göz önünde bulunduralım. A ’nın bir $F = \{\tau_4, 1\}$ süzgeci yardımıyla A üzerinde $\beta_F = \{(0, 0), (\tau_1, \tau_1), (\tau_2, \tau_2), (\tau_3, \tau_3), (\tau_4, \tau_4), (\tau_5, \tau_5), (\tau_6, \tau_6), (1, 1), (0, \tau_3), (\tau_3, 0), (\tau_4, 1), (1, \tau_4), (\tau_1, \tau_5), (\tau_5, \tau_1), (\tau_2, \tau_6), (\tau_6, \tau_2)\}$ kongrüans bağıntısı tanımlansın. O zaman $A/F \equiv A/\beta = \{[0]_{\beta_F}, [\tau_1]_{\beta_F}, [\tau_2]_{\beta_F}, [1]_{\beta_F}\}$ bölüm kümesi olmak üzere $\langle A/\beta, |_\beta \rangle$ yapısı Şekil 3.2’deki Hasse diyagramına ve Tablo 3.8’deki işlem tablosuna sahip bir Sheffer stroke BCI cebiridir.

Şekil 3.2: A/β kümesinin Hasse diyagramı

$ _{\beta_F}$	$[0]_{\beta_F}$	$[\tau_1]_{\beta_F}$	$[\tau_2]_{\beta_F}$	$[1]_{\beta_F}$
$[0]_{\beta_F}$	$[1]_{\beta_F}$	$[1]_{\beta_F}$	$[1]_{\beta_F}$	$[1]_{\beta_F}$
$[\tau_1]_{\beta_F}$	$[1]_{\beta_F}$	$[\tau_2]_{\beta_F}$	$[1]_{\beta_F}$	$[\tau_2]_{\beta_F}$
$[\tau_2]_{\beta_F}$	$[1]_{\beta_F}$	$[1]_{\beta_F}$	$[\tau_1]_{\beta_F}$	$[\tau_1]_{\beta_F}$
$[1]_{\beta_F}$	$[1]_{\beta_F}$	$[\tau_2]_{\beta_F}$	$[\tau_1]_{\beta_F}$	$[0]_{\beta_F}$

Tablo 3.8: A/β üzerindeki $|_\beta$ Sheffer stroke işlem tablosu

Önerme 3.2. $(A, |, 1)$ bir Sheffer stroke BCI-cebiri ve $\{F_i, i \in \lambda\}$, A ’nın süzgeçlerinin bir kümesi olsun. O zaman $\bigcap_{i \in \lambda} F_i$, A ’nın bir süzgecidir.

Kanıt. $\{F_i, i \in \lambda\}$, A 'nın süzgeçlerinin bir kümesi olsun.

(SF-1): (SF-1)'den her $i \in \lambda$ için $1 \in F_i$ olduğundan $1 \in \bigcap_{i \in \lambda} F_i$ dir.

(SF-2): Her $\tau_1, \tau_2 \in A$ için $\tau_1 \in \bigcap_{i \in \lambda} F_i$ ve $\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2) \in \bigcap_{i \in \lambda} F_i$ olduğunu kabul edelim. Yani her $i \in \lambda$ için $\tau_1 \in F_i$ ve $\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2) \in F_i$ dir. (SF-2)'den her $i \in \lambda$ için $\tau_2 \in F_i$ dir. O halde $\tau_2 \in \bigcap_{i \in \lambda} F_i$ elde edilir. O halde $\bigcap_{i \in \lambda} F_i$, A 'nın bir süzgecidir.

□

Uyarı 3.1. *Bir Sheffer stroke BCI cebirinin süzgeçlerinin birleşimi Sheffer stroke BCI cebiri olmak zorunda değildir.*

Kanıt. Örnek 3.1 de verilen Sheffer stroke BCI cebirini göz önünde bulunduralım. $F_1 = \{\tau_4, 1\}$ ve $F_2 = \{\tau_5, 1\}$ A 'nın iki süzgecidir. Ancak bu süzgeçlerin birleşimi A için bir süzgeç değildir. Çünkü $\tau_4, \tau_5 \in F_1 \cup F_2$ ve $\tau_4 | (\tau_1 | \tau_1) = \tau_5 \in F_1 \cup F_2$ fakat $\tau_1 \notin F_1 \cup F_2$ dir.

□

Önerme 3.3. $(A, |, 1)$ bir Sheffer stroke BCI-cebiri ve $\{F_i, i \in \lambda\}$, A 'nın süzgeçlerinin bir zinciri olsun. O zaman $\bigcup_{i \in \lambda} F_i$, A 'nın bir süzgecidir.

Kanıt. $\{F_i, i \in \lambda\}$ A 'nın süzgeçlerinin bir zinciri olsun. (SF-1) aksiyomu açıktır.

(SF-2): Her $\tau_1, \tau_2 \in A$ için $\tau_1 \in \bigcup_{i \in \lambda} F_i$ ve $(\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) \in \bigcup_{i \in \lambda} F_i$ kabul edelim. O zaman $\tau_1 \in F_j$ ve $\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2) \in F_k$ olacak şekilde $F_j, F_k \in \{F_i\}_{i \in \lambda}$ vardır. O halde ya $F_j \subseteq F_k$ ya da $F_k \subseteq F_j$ dir. Eğer $F_j \subseteq F_k$ ise o zaman $\tau_1 \in F_k$ ve $\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2) \in F_k$ dir. F_k , A 'nın bir süzgeci olduğundan $\tau_2 \in F_k$ sonucuna varılır. Benzer şekilde $F_k \subseteq F_j$ olduğunda da elde edilir. O zaman $\tau_2 \in \bigcup_{i \in \lambda} F_i$ olur. Sonuç olarak $\bigcup_{i \in \lambda} F_i$, A 'nın bir süzgecidir.

□

3.2 Homomorfizmalar

Bu kısımda, Sheffer stroke BCI cebirleri üzerinde tanımlı homomorfizmalar tanımlanarak çeşitli özellikleri ve süzgeçleri ile aralarındaki bağlantılar araştırılacaktır.

Tanım 3.5. $\langle A, |_A \rangle$ ve $\langle B, |_B \rangle$ iki Sheffer stroke BCI cebiri olsun. Eğer her $\tau_1, \tau_2 \in A$ için

$$f(\tau_1|_A\tau_2) = f(\tau_1)|_Bf(\tau_2)$$

ise o zaman A 'dan B 'ye tanımlanan bir $f : A \longrightarrow B$ dönüşümüne bir homomorfizma denir. Ayrıca, $f(1_A) = 1_B$ olduğunu belirtelim.

Lemma 3.9. $\langle A, |_A \rangle$ ve $\langle B, |_B \rangle$ iki Sheffer stroke BCI cebiri ve f, A üzerinde tanımlı bir homomorfizma olsun. O halde $f(A)$, B 'nin bir süzgecidir.

Teorem 3.7. $\langle A, |_A \rangle$ ve $\langle B, |_B \rangle$ iki Sheffer stroke BCI cebiri ve f, A üzerinde tanımlı bir homomorfizma olsun. O halde aşağıdaki özellikler sağlanır:

- (a) Eğer F , A 'nın bir süzgeci ise o zaman $f(F)$, B 'nin bir süzgecidir.
- (b) Eğer P , B 'nin bir süzgeci ise o zaman $f^{-1}(P)$, A 'nın bir süzgecidir.

Kanıt. $\langle A, |_A \rangle$ ve $\langle B, |_B \rangle$ iki Sheffer stroke BCI cebiri ve f, A üzerinde tanımlı bir homomorfizma olsun.

(a) F 'in, A 'nın bir süzgeci olduğunu kabul edelim. $1_A \in F$ olduğundan $1_B = f(1_A) \in f(F)$ elde edilir. $f(\tau_1), f(\tau_1|_A(\tau_2|_A\tau_2)) = f(\tau_1)|_B(f(\tau_2)|_Bf(\tau_2)) \in f(F)$ olsun. $\tau_1, \tau_1|_A(\tau_2|_A\tau_2) \in F$ elde edilir. F , A 'nın bir süzgeci olduğundan $\tau_2 \in F$ yani, $f(\tau_2) \in f(F)$ sonucuna ulaşılır.

(b) P 'nin, B 'nin bir süzgeci olduğunu kabul edelim. $f(1_A) = 1_B \in P$ olduğundan $1_A = f^{-1}f(1_A) = f^{-1}(1_B) \in f^{-1}(P)$ elde edilir. $\tau_1, \tau_1|_A(\tau_2|_A\tau_2) \in f^{-1}(P)$, yani, $f(\tau_1), f(\tau_1)|_B(f(\tau_2)|_Bf(\tau_2)) = f(\tau_1|_A(\tau_2|_A\tau_2)) \in ff^{-1}(P) \subseteq P$ olsun. P , B 'nin bir süzgeci olduğundan $f(\tau_2) \in P$ yani, $\tau_2 \in f^{-1}(P)$ sonucuna ulaşılır. $\square$

Teorem 3.8. $F, (A, |, 1)$ Sheffer stroke BCI-cebirinin bir süzgeci olsun. $P, F \subseteq P$ olacak şekilde A 'nın bir süzgecidir eğer ve yalnız eğer $P/F = \{[\tau_1]_F \in A/F : \tau_1 \in P\}$, A/F Sheffer stroke BCI-cebirinin bir süzgecidir.

Kanıt. $(\Rightarrow)$ Theorem 3.6'dan $(A/F, |, 1)$ bir Sheffer stroke BCI-cebiridir. O halde P/F in tanımından $F = [1]_F \in P/F$ elde edilir. $[\tau_1]_F, [\tau_1|_A(\tau_2|_A\tau_2)]_F = [\tau_1]_F|_F([\tau_2]_F|_F[\tau_2]_F) \in P/F$ kabul edelim. Yani, $\tau_1, \tau_1|_A(\tau_2|_A\tau_2) \in P$ dir. P , A 'nın bir süzgeci olduğundan $\tau_2 \in P$, yani, $[\tau_2]_F \in P/F$ sonucuna ulaşılır.

($\Leftarrow$) P/F tanımından elde edilir. $\square$

Teorem 3.9. $\langle A, |_A \rangle$ ve $\langle B, |_B \rangle$ iki Sheffer stroke BCI cebiri ve f , A üzerinde tanımlı bir homomorfizma olsun. O halde $\text{Ker} f = \{\tau_1 \in A : f(\tau_1) = 1_B\}$, A 'nın bir süzgecidir.

Kanıt. $f(1_A) = 1_B$ olduğundan $1_A \in \text{Ker} f$ dir. $\tau_1 \in \text{Ker} f$ ve $\tau_1|_A(\tau_2|_A\tau_2) \in \text{Ker} f$ olduğunu varsayalım. O halde $f(\tau_1) = 1_B$ ve $f(\tau_1|_A(\tau_2|_A\tau_2)) = 1_B$ elde edilir. Lemma 3.2 (iv)'den

$$\begin{aligned} f(\tau_2) &= 1_B|_B(f(\tau_2)|_B f(\tau_2)) \\ &= f(\tau_1)|_B(f(\tau_2)|_B f(\tau_2)) \\ &= f(\tau_1|_A(\tau_2|_A\tau_2)) \\ &= 1_B \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\tau_2 \in \text{Ker} f$ dir, yani $\text{Ker} f$, A 'nın bir süzgecidir. $\square$

Teorem 3.10. $(A, |, 1)$ bir Sheffer stroke BCI-cebiri ve F , A 'nın bir süzgeci olsun. $\tau_1 \mapsto [\tau_1]_F$ ile tanımlı $g : A \rightarrow A/F$ homomorfizması vardır.

Kanıt. Teorem 3.6 ve Tanım 3.5'den $g : A \rightarrow A/F$ bir homomorfizmadır. Bu homomorfizma doğal homomorfizma olarak adlandırılır. $\square$

Teorem 3.11. $(A, |, 1)$ bir Sheffer stroke BCI-cebiri ve F , A 'nın bir süzgeci olsun. O halde bir $h(\tau_1) = [\tau_1]_F$ ile tanımlı $h : A \rightarrow A/F$ kanonik örten homomorfizması vardır ve $\text{Ker} h = F$ 'dir.

Kanıt. Teorem 3.10'dan $h : A \rightarrow A/F$, $\tau_1 \mapsto [\tau_1]_F$ bir homomorfizmadır ve tanımından örtendir. Lemma 3.2 (iv) ve (v)'den

$$\begin{aligned} \text{Ker} h &= \{\tau_1 \in A : h(\tau_1) = [1]_F\} \\ &= \{\tau_1 \in A : [\tau_1]_F = [1]_F\} \\ &= \{\tau_1 \in A : \tau_1 \beta_F 1\} \\ &= \{\tau_1 \in A : \tau_1|(1|1) = 1 \in F \text{ ve } 1|(\tau_1|\tau_1) = \tau_1 \in F\} \\ &= \{\tau_1 \in A : \tau_1 \in F\} \\ &= F \end{aligned}$$

elde edilir. $\square$

Teorem 3.12. $\langle A, |_A \rangle$ ve $\langle B, |_B \rangle$ iki Sheffer stroke BCI cebiri ve $f : A \rightarrow B$ bir homomorfizma olsun. $h : A \rightarrow A/Kerf$ doğal homomorfizma olmak üzere $f = g \circ h$ olacak şekilde sadece bir tane $g : A/Kerf \rightarrow B$ homomorfizması vardır. Ayrıca, h örten ve g birebirdir.

Kanıt. Teorem 3.9'dan $Kerf$, A 'nın bir süzgecidir ve dolayısıyla Teorem 3.6'dan $A/Kerf$ bir Sheffer stroke BCI-cebiridir.

$$g : A/Kerf \rightarrow B$$

$$[\tau_1]_{Kerf} \mapsto f(\tau_1)$$

$[\tau_1]_{Kerf} = [\tau_2]_{Kerf}$ olacak şekilde $[\tau_1]_{Kerf}, [\tau_2]_{Kerf} \in A/Kerf$ varsayalım. O zaman $\tau_1 \beta_{Kerf} \tau_2$ dir, yani $\tau_1|_A(\tau_2|_A \tau_2), \tau_2|_A(\tau_1|_A \tau_1) \in Kerf$ dir. O zaman $f(\tau_1)|_B(f(\tau_2)|_B f(\tau_2)) = f(\tau_1|_A(\tau_2|_A \tau_2)) = 1_B$ ve $f(\tau_2)|_B(f(\tau_1)|_B f(\tau_1)) = f(\tau_2|_A(\tau_1|_A \tau_1)) = 1_B$ dir. (SBCI-2)'den

$$g([\tau_1]_{Kerf}) = f(\tau_1) = f(\tau_2) = g([\tau_2]_{Kerf})$$

elde edilir. O halde g iyi tanımlıdır.

$$[\tau_1]_{Kerf}, [\tau_2]_{Kerf} \in A/Kerf \text{ kabul edelim.}$$

$$\begin{aligned} g([\tau_1]_{Kerf}|_{Kerf}[\tau_2]_{Kerf}) &= g([\tau_1|_A \tau_2]_{Kerf}) \\ &= f(\tau_1|_A \tau_2) \\ &= f(\tau_1)|_B f(\tau_2) \\ &= g([\tau_1]_{Kerf})|_B g([\tau_2]_{Kerf}). \end{aligned}$$

$g(Kerf) = g([1_A]_{Kerf}) = f(1_A) = 1_B$ dir ve böylece g bir homomorfizmadır.

Her $\tau_1 \in A$ için

$$g \circ h(\tau_1) = g(h(\tau_1)) = g([\tau_1]_{Kerf}) = f(\tau_1)$$

dir. O halde $f = g \circ h$ elde edilir.

Şimdi g 'nin tekliğini gösterelim. $f = k \circ h$ olacak şekilde $k : A/Kerf \rightarrow B$ bir homomorfizma olsun. $[\tau_1]_{Kerf} \in A/Kerf$ için

$$k([\tau_1]_{Kerf}) = k(h(\tau_1)) = k \circ h(\tau_1) = f(\tau_1) = g \circ h(\tau_1) = g(h(\tau_1)) = g([\tau_1]_{Kerf})$$

dir. O halde $k = g$ olur.

Ayrıca, h 'nin örten olduğu açıktır.

$g([\tau_1]_{Kerf}) = g([\tau_2]_{Kerf})$ olacak şekilde $[\tau_1]_{Kerf}, [\tau_2]_{Kerf} \in A/Kerf$ olsun.

O zaman $f(\tau_1) = f(\tau_2)$ dir. Lemma 3.2 (ii)'den

$f(\tau_1|_A(\tau_2|_A\tau_2)) = f(\tau_1)|_B(f(\tau_2)|_Bf(\tau_2)) = f(\tau_1)|_B(f(\tau_1)|_Bf(\tau_1)) = 1_B$ ve benzer şekilde $f(\tau_2|_A(\tau_1|_A\tau_1)) = 1_B$ elde edilir. Böylece $\tau_1|_A(\tau_2|_A\tau_2), \tau_2|_A(\tau_1|_A\tau_1) \in Kerf$ olur. $\tau_1\beta_{Kerf}\tau_2$, yani, $[\tau_1]_{Kerf} = [\tau_2]_{Kerf}$ elde edilir. Böylece g birebirdir. $\square$

Sonuç 3.4. (1. İzomorfizma Teoremi) $\langle A, |_A \rangle$ ve $\langle B, |_B \rangle$ iki Sheffer stroke BCI cebiri ve $f : A \rightarrow B$ bir homomorfizma olsun. O zaman $A/Kerf \cong f(A)$ dir. Eğer f örten ise o zaman $A/Kerf \cong B$ dir.

Teorem 3.13. (2. İzomorfizma Teoremi) $G, (A, |, 1)$ Sheffer stroke BCI cebirinin bir altceberi ve F, A 'nın bir süzgeci olsun. O zaman her $\tau_1 \in G$ için $GF = \bigcup [\tau_1]_F$ ve $GF/F = \{[\tau_1]_F \in A/F : \tau_1 \in GF\}$ olmak üzere $GF/F \cong G/G \cap F$ dir.

Kanıt. İlk olarak GF 'nin A için bir altcebir olduğunu gösterelim. G, A 'nın bir altceberi olduğundan, $1 \in G$ elde edilir. O halde $1 \in F = [1]_F \subseteq \bigcup [\tau_1]_F = GF$ dir. Böylece, her $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \in GF \subseteq A$ için (SBCI-1) ve (SBCI-2) sağlanır.

O zaman $GF/F, A/F$ 'nin bir alt cebiridir. GF/F bir Sheffer stroke BCI-cebiri ve $G \subseteq GF$ olduğundan, bir $f : G \rightarrow GF/F, \tau_1 \mapsto [\tau_1]_F$ dönüşümü homomorfizmadır. Lemma 3.2 (iv)-(v) kullanılarak

$$\begin{aligned} Kerf &= \{\tau_1 \in G : f(\tau_1) = [1]_F\} \\ &= \{\tau_1 \in G : [\tau_1]_F = [1]_F\} \\ &= \{\tau_1 \in G : \tau_1\beta_F 1\} \\ &= \{\tau_1 \in G : \tau_1|(1|1) = 1 \in F \text{ ve } 1|(\tau_1|\tau_1) = \tau_1 \in F\} \\ &= \{\tau_1 \in G : \tau_1 \in F\} \\ &= G \cap F. \end{aligned}$$

Her $[x]_F \in GF/F$ için, $x \in GF = \bigcup [\tau_1]_F$ dir. O halde $x \in [\tau_1]_F$ olacak şekilde $\tau_1 \in G$ vardır, ve böylece $[x]_F = [\tau_1]_F$ elde edilir. O zaman $f(\tau_1) =$

$[\tau_1]_F = [x]_F$, yani, f örtendir. Sonuç 3.4'den $G/G \cap F = G/\text{Ker } f \cong f(G) = GF/F$ sonucuna varılır. $\square$

Teorem 3.14. (3. İzomorfizma Teoremi) $F \subseteq P$ olacak şekilde F ve P , $(A, |, 1)$ Sheffer stroke BCI-cebirinin süzgeçleri olsun. O halde $(A/F)/(P/F) \cong A/P$ dir.

Kanıt. Teorem 3.8' den $P/F = \{[\tau_1]_F \in A/F : \tau_1 \in P\}$, $A/F = \{[\tau_1]_F : \tau_1 \in A\}$ Sheffer stroke BCI-cebirinin bir süzgecidir. $(A/F)/(P/F) = \{[[\tau_1]_F]_{P/F} : [\tau_1]_F \in A/F\}$, A/F Sheffer stroke BCI-cebiri üzerinde, P/F süzgeci ile Sheffer stroke BCI-cebiri olarak tanımlanabilir. Teorem 3.6'dan $A/P = \{[\tau_1]_P : \tau_1 \in A\}$, A üzerinde P süzgeci yardımıyla tanımlanan bir Sheffer stroke BCI-cebiridir. $f : (A/F)/(P/F) \rightarrow A/P, [[\tau_1]_F]_{P/F} \mapsto [\tau_1]_P$ tanımlansın.

Her $[[\tau_1]_F]_{P/F}, [[\tau_2]_F]_{P/F} \in (A/F)/(P/F)$ için

$$\begin{aligned} f([[\tau_1]_F]_{P/F} |_{P/F} [[\tau_2]_F]_{P/F}) &= f([[\tau_1]_F]_F |_F [\tau_2]_F]_{P/F}) \\ &= f([[\tau_1 | \tau_2]_F]_{P/F}) \\ &= [\tau_1 | \tau_2]_P \\ &= [\tau_1]_P |_P [\tau_2]_P \\ &= f([[\tau_1]_F]_{P/F}) |_P f([[\tau_2]_F]_{P/F}), \end{aligned}$$

olduğundan $P = [1]_P = f([1]_F)_{P/F}$ ve $[0]_P = f([0]_F)_{P/F}$ elde edilir. O halde f bir homomorfizmadır.

f bir monomorfizmadır: $f([[\tau_1]_F]_{P/F}) = [\tau_1]_P = [\tau_2]_P = f([[\tau_2]_F]_{P/F})$, yani, $\tau_1 \beta \tau_2$ olacak şekilde $[\tau_1]_P, [\tau_2]_P \in A/P$ kabul edelim. O halde $\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)$, $\tau_2 | (\tau_1 | \tau_1) \in P$, yani, $[\tau_1]_F |_F ([\tau_2]_F |_F [\tau_2]_F) = [\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)]_F, [\tau_2]_F |_F ([\tau_1]_F |_F [\tau_1]_F) = [\tau_2 | (\tau_1 | \tau_1)]_F \in P/F$ elde edilir. O zaman $[\tau_1]_F \beta_{P/F} [\tau_2]_F$ dir. Böylece $[[\tau_1]_F]_{P/F} = [[\tau_2]_F]_{P/F}$ olur.

f bir epimorfizmadır: f nin tanımından elde edilir. Sonuç olarak, f bir izomorfizmadır, yani, $(A/F)/(P/F) \cong A/P$ elde edilir. $\square$

4 SHEFFER STROKE BCK CEBİRLERİ

Bu bölümde Sheffer stroke BCK cebiri kavramı incelenecektir. Sheffer stroke BCK cebiri tanımlanarak, bu cebir yapısının aksiyomlarının bağımsızlığı gösterilecektir. Bu cebir yapısı üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısı verilerek, bu bağıntı yardımıyla çeşitli özellikler sunulacaktır. Değişmeli, implicative, involutory Sheffer stroke BCK cebirleri tanımlanarak bu kavramlara ilişkin özellikler ve aralarındaki ilişkiler çalışılacaktır.

Tanım 4.1. A boştan farklı bir küme ve $|$, A üzerinde Sheffer stroke işlemi olmak üzere her $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \in A$ için

$$(SBCK-1) \quad (((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2)))|(\tau_1|(\tau_3|\tau_3)))|(((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2)))|(\tau_1|(\tau_3|\tau_3))))|(\tau_1|(\tau_3|\tau_3)))|(\tau_3|(\tau_2|\tau_2)) = 0|0,$$

$$(SBCK-2) \quad (\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2)) = 0 \text{ ve } (\tau_2|(\tau_1|\tau_1))|(\tau_2|(\tau_1|\tau_1)) = 0 \text{ ise o zaman } \tau_1 = \tau_2$$

aksiyomlarını sağlayan (2) tipindeki $\langle A, | \rangle$ yapısına bir Sheffer stroke BCK cebiri denir.

A üzerinde $\leq$ kısmi sıralama bağıntısı

$$\tau_1 \leq \tau_2 \Leftrightarrow (\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2)) = 0$$

ile tanımlanır.

Lemma 4.1. $(SBCK-1)$ ve $(SBCK-2)$ aksiyomları bağımsızdır.

Kanıt. $(\{0, 1\}, |)$ yapısını göz önünde bulunduralım.

- (i) $(SBCK-1)$ aksiyomunun bağımsızlığını göstermek için $(\{0, 1\}, |_3)$ üzerindeki $|_3$ işlemini Tablo 4.1'deki gibi tanımlayalım:

$ _3$	0	1
0	1	0
1	1	0

Tablo 4.1: (SBCK-1) in bağımsızlığını göstermek için işlem tablosu

O halde $|_3$ işlemi (SBCK-2) aksiyomunu sağlar fakat $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = 1$ ve $\tau_3 = 1$ olduğunda (SBCK-1) aksiyomunu sağlamaz.

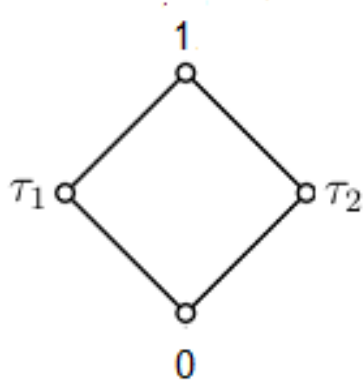
(ii) (SBCK-2) aksiyomunun bağımsızlığını göstermek için $(\{0, 1\}, |_4)$ üzerindeki $|_4$ işlemi Tablo 4.2'deki gibi tanımlayalım:

$ _4$	0	1
0	0	1
1	0	0

Tablo 4.2: (SBCK-2) nin bağımsızlığını göstermek için işlem tablosu

O halde $|_4$ işlemi (SBCK-1) aksiyomunu sağlar fakat $(0|(1|1))|(0|(1|1)) = 0|0 = 0$ ve $(1|(0|0))|(1|(0|0)) = 0|0 = 0$ iken $1 \neq 0$ olduğundan (SBCK-2) aksiyomunu sağlamaz. $\square$

Örnek 4.1. $D = \{0, \tau_1, \tau_2, 1\}$, Şekil 4.1'de bulunan Hasse diyagramına sahip bir küme ve D üzerindeki $|$ işlemi Tablo 4.3'deki işlem tablosuna sahip bir ikili işlem olsun.

Şekil 4.1: D kümesinin Hasse diyagramı

$ $	0	τ_1	τ_2	1
0	1	1	1	1
τ_1	1	τ_2	1	τ_2
τ_2	1	1	τ_1	τ_1
1	1	τ_2	τ_1	0

Tablo 4.3: D üzerindeki $|$ Sheffer stroke işleminin tablosu

O halde $\langle D, | \rangle$ yapısı bir Sheffer stroke BCK cebiri belirtir.

Lemma 4.2. $\langle A, | \rangle$ bir Sheffer stroke BCK cebiri olsun. O zaman her $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \in A$ için aşağıdaki özellikler vardır:

- (1) $(\tau_1 | (\tau_1 | \tau_1)) | (\tau_1 | \tau_1) = \tau_1$,
- (2) $(\tau_1 | (\tau_1 | \tau_1)) | (\tau_1 | (\tau_1 | \tau_1)) = 0$,
- (3) $\tau_1 | (((\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) | (\tau_2 | \tau_2)) | ((\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) | (\tau_2 | \tau_2))) = 0 | 0$,
- (4) $(0 | 0) | (\tau_1 | \tau_1) = \tau_1$,
- (5) $\tau_1 | 0 = 0 | 0$,
- (6) $(\tau_1 | (0 | 0)) | (\tau_1 | (0 | 0)) = \tau_1$,
- (7) $(0 | (\tau_1 | \tau_1)) | (0 | (\tau_1 | \tau_1)) = 0$,
- (8) $\tau_1 | ((\tau_2 | (\tau_3 | \tau_3)) | (\tau_2 | (\tau_3 | \tau_3))) = \tau_2 | ((\tau_1 | (\tau_3 | \tau_3)) | (\tau_1 | (\tau_3 | \tau_3)))$,
- (9) $((\tau_1 | (((\tau_2 | (\tau_3 | \tau_3)) | (\tau_2 | (\tau_3 | \tau_3)))) | ((\tau_2 | (\tau_1 | (\tau_3 | \tau_3)) | (\tau_1 | (\tau_3 | \tau_3))) | (\tau_2 | (\tau_1 | (\tau_3 | \tau_3)) | (\tau_1 | (\tau_3 | \tau_3)))))) = 0 | 0$,
- (10) $((\tau_1 | (\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2))) | (\tau_1 | (\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)))) | (\tau_2 | \tau_2) = 0 | 0$.

Kanıt. $\langle A, | \rangle$ bir Sheffer stroke BCK cebiri olsun.

- (1) (S2) aksiyomunda, eş zamanlı olarak, τ_2 yerine $\tau_1 | \tau_1$ yerleştirilirse, $(\tau_1 | (\tau_1 | \tau_1)) | (\tau_1 | \tau_1) = \tau_1$ elde edilir.
- (2) (SBCK-1) aksiyomunda, eş zamanlı olarak, τ_2 yerine $\tau_1 | \tau_1$ ve τ_3 yerine τ_1

yerleştirilerek ve (S2), (S3) ve (1) kullanılarak

$$\begin{aligned}
0|0 &= (((\tau_1|((\tau_1|\tau_1)|(\tau_1|\tau_1))))|(\tau_1|((\tau_1|\tau_1)|(\tau_1|\tau_1))))|(\tau_1|(\tau_1|\tau_1))|(((\tau_1|((\tau_1|\tau_1)|(\tau_1|\tau_1)|(\tau_1|\tau_1))))|(\tau_1|((\tau_1|\tau_1)|(\tau_1|\tau_1))))|(\tau_1|(\tau_1|\tau_1))|(\tau_1|((\tau_1|\tau_1)|(\tau_1|\tau_1)))) \\
&= ((((\tau_1|\tau_1)|(\tau_1|\tau_1))|(\tau_1|(\tau_1|\tau_1))))|((\tau_1|\tau_1)|(\tau_1|\tau_1))|(\tau_1|(\tau_1|\tau_1))|(\tau_1|\tau_1)) \\
&= ((\tau_1|(\tau_1|(\tau_1|\tau_1)))|(\tau_1|(\tau_1|(\tau_1|\tau_1))))|(\tau_1|\tau_1) \\
&= \tau_1|(((\tau_1|(\tau_1|\tau_1))|(\tau_1|\tau_1))|((\tau_1|(\tau_1|\tau_1))|(\tau_1|\tau_1))) \\
&= \tau_1|(\tau_1|\tau_1).
\end{aligned}$$

(S2)'den $(\tau_1 | (\tau_1 | \tau_1)) | (\tau_1 | (\tau_1 | \tau_1)) = 0$ elde edilir.

(3) (S3) aksiyomunda τ_2 yerine $\tau_1|(\tau_2|\tau_2)$ ve τ_3 yerine $\tau_2|\tau_2$ yerleştirilerek ve (S1), (S3) ve (2) kullanılarak

$$\begin{aligned}
\tau_1|((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_2|\tau_2))|((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_2|\tau_2)) &= \tau_1|(((\tau_2|\tau_2)|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2)))|((\tau_2|\tau_2)| \\
&\quad (\tau_1|(\tau_2|\tau_2)))) \\
&= ((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2)))| \\
&\quad (\tau_1|(\tau_2|\tau_2)) \\
&= (\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))| \\
&\quad (\tau_1|(\tau_2|\tau_2))) \\
&= 0|0
\end{aligned}$$

sonucuna varılır.

(4) (1), (2) ve (S2)'den $(0|0)|(\tau_1|\tau_1) = (\tau_1|(\tau_1|\tau_1))|(\tau_1|\tau_1) = \tau_1$ elde edilir.

(5) (4), (S1) ve (S2) kullanılarak

$$\begin{aligned}\tau_1|0 &= \tau_1|((0|0)|(0|0)) \\ &= ((0|0)|(\tau_1|\tau_1))|((0|0)|(0|0)) \\ &= ((0|0)|(0|0))|((0|0)|(\tau_1|\tau_1)) \\ &= (0|0)\end{aligned}$$

elde edilir.

(6) (S1), (S2) ve (4) kullanılarak

$$\begin{aligned}
 (\tau_1|(0|0))|(\tau_1|(0|0)) &= ((0|0)|((\tau_1|\tau_1)|(\tau_1|\tau_1)))|((0|0)|((\tau_1|\tau_1)|(\tau_1|\tau_1))) \\
 &= (\tau_1|\tau_1)|(\tau_1|\tau_1) \\
 &= \tau_1
 \end{aligned}$$

elde edilir.

(7) (5), (S1) ve (S2)'den $(0|(\tau_1|\tau_1))|(0|(\tau_1|\tau_1)) = (0|0)|(0|0) = 0$ dir.

(8) (S1) ve (S3) kullanılarak

$$\begin{aligned}
 \tau_1|((\tau_2|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_2|(\tau_3|\tau_3))) &= (((\tau_1|\tau_2)|(\tau_1|\tau_2))|(\tau_3|\tau_3)) \\
 &= (((\tau_2|\tau_1)|(\tau_2|\tau_1))|(\tau_3|\tau_3)) \\
 &= \tau_2|((\tau_1|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_1|(\tau_3|\tau_3)))
 \end{aligned}$$

elde edilir.

(9) (2) ve (8)'den elde edilir.

(10) (3) ve (S3)'ten elde edilir. □

Önerme 4.1. $(A, |, 0)$ bir Sheffer stroke BCK-cebiri olsun. Her $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \in A$ için aşağıdaki özellikler sağlanır:

- (i) Eğer $\tau_1 \leq \tau_3$ ise o zaman $(\tau_2|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_2|(\tau_3|\tau_3)) \leq (\tau_2|(\tau_1|\tau_1))|(\tau_2|(\tau_1|\tau_1))$,
- (ii) $((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2)))|(\tau_3|\tau_3) = ((\tau_1|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_1|(\tau_3|\tau_3)))|(\tau_2|\tau_2)$,
- (iii) $((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2))) \leq \tau_3 \Leftrightarrow ((\tau_1|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_1|(\tau_3|\tau_3))) \leq \tau_2$,
- (iv) $(\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2)) \leq \tau_1$,
- (v) $\tau_1 \leq \tau_2|(\tau_1|\tau_1)$,
- (vi) $\tau_1 \leq (\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_2|\tau_2)$,
- (vii) Eğer $\tau_1 \leq \tau_2$ ise o zaman $\tau_3|(\tau_1|\tau_1) \leq \tau_3|(\tau_2|\tau_2)$ dir.

Kanıt. (i): $\tau_1 \leq \tau_3$ olduğunu kabul edelim. (SBCK-1)'den

$$\begin{aligned}
 &(((\tau_2|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_2|(\tau_3|\tau_3)))|(\tau_2|(\tau_1|\tau_1)))|(((\tau_2|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_2|(\tau_3|\tau_3)))|(\tau_2|(\tau_1|\tau_1))) \\
 &\leq (\tau_1|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_1|(\tau_3|\tau_3))
 \end{aligned}$$

dir. Böylece

$$(((\tau_2|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_2|(\tau_3|\tau_3)))|(\tau_2|(\tau_1|\tau_1)))|(((\tau_2|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_2|(\tau_3|\tau_3)))|(\tau_2|(\tau_1|\tau_1)))$$

$$\leq 0$$

elde edilir. Lemma 4.2 (6) ve (S2)'den

$$(((\tau_2|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_2|(\tau_3|\tau_3)))|(\tau_2|(\tau_1|\tau_1)))|(((\tau_2|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_2|(\tau_3|\tau_3)))|(\tau_2|(\tau_1|\tau_1)))) = 0$$

sonucuna varılır. O zaman, $(\tau_2|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_2|(\tau_3|\tau_3)) \leq (\tau_2|(\tau_1|\tau_1))|(\tau_2|(\tau_1|\tau_1))$ dir.

(ii): Lemma 4.2 (3) ve (S3) kullanılarak $(\tau_1|(\tau_1|(\tau_3|\tau_3)))|(\tau_1|(\tau_1|(\tau_3|\tau_3))) \leq \tau_3$

elde edilir. (SBCK-1) ve (i)'den,

$$\begin{aligned} & (((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2)))|(\tau_3|\tau_3))|(((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2)))|(\tau_3|\tau_3))) \\ & \leq (((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2)))|(\tau_1|(\tau_1|(\tau_3|\tau_3))))|(((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2)))| \\ & (\tau_1|(\tau_1|(\tau_3|\tau_3)))) \\ & \leq (((\tau_1|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_1|(\tau_3|\tau_3)))|(\tau_2|\tau_2))|(((\tau_1|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_1|(\tau_3|\tau_3)))|(\tau_2|\tau_2))) \end{aligned}$$

dir. Lemma 2.3 (i) and (S2) kullanılarak

$$((\tau_1|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_1|(\tau_3|\tau_3)))|(\tau_2|\tau_2) \leq ((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2)))|(\tau_3|\tau_3)$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlikte τ_2 ve τ_3 'ü değiştirerek,

$$((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2)))|(\tau_3|\tau_3) \leq ((\tau_1|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_1|(\tau_3|\tau_3)))|(\tau_2|\tau_2)$$

sonucuna ulaşılır. (SBCK-2)'den

$$((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2)))|(\tau_3|\tau_3) = ((\tau_1|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_1|(\tau_3|\tau_3)))|(\tau_2|\tau_2)$$

dir.

(iii): (ii)'nin açık bir sonucudur.

(iv): (ii), Lemma 4.2 (2), (7) ve (S2) kullanılarak $((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2)))|(\tau_1|\tau_1) =$

$((\tau_1|(\tau_1|\tau_1))|(\tau_1|(\tau_1|\tau_1)))|(\tau_2|\tau_2) = 0|(\tau_2|\tau_2) = 0|0$ dir. Sonuç olarak,

$(\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2)) \leq \tau_1$ elde edilir.

(v): (S1), (S3) aksiyomları ve Lemma 4.2 (2) ve (5) kullanılarak

$$\begin{aligned} \tau_1|((\tau_2|(\tau_1|\tau_1))|(\tau_2|(\tau_1|\tau_1))) &= \tau_1|(((\tau_1|\tau_1)|\tau_2)|((\tau_1|\tau_1)|\tau_2)) \\ &= ((\tau_1|(\tau_1|\tau_1))|(\tau_1|(\tau_1|\tau_1)))|\tau_2 \\ &= 0|\tau_2 \\ &= \tau_2|0 \\ &= 0|0, \end{aligned}$$

yani, $\tau_1 \leq \tau_2 | (\tau_1 | \tau_1)$ dir.

(vi): (S1), (S3) ve Lemma 4.2 (2) kullanılarak

$$\begin{aligned}
 \tau_1 | (((\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) | (\tau_2 | \tau_2)) | ((\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) | (\tau_2 | \tau_2))) &= \tau_1 | (((\tau_2 | \tau_2) | (\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2))) | \\
 &\quad ((\tau_2 | \tau_2) | (\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)))) \\
 &= ((\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) | (\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2))) \\
 &\quad | (\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) \\
 &= (\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) | ((\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) | \\
 &\quad (\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2))) \\
 &= 0 | 0,
 \end{aligned}$$

yani, $\tau_1 \leq (\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) | (\tau_2 | \tau_2)$ dir.

(vii): (S1), Lemma 2.3 (i) ve (iii)'den

$$\begin{aligned}
 \tau_1 \leq \tau_2 &\Leftrightarrow \tau_2 | \tau_2 \leq \tau_1 | \tau_1 \\
 &\Leftrightarrow (\tau_1 | \tau_1) | \tau_3 \leq (\tau_2 | \tau_2) | \tau_3 \\
 &\Leftrightarrow \tau_3 | (\tau_1 | \tau_1) \leq \tau_3 | (\tau_2 | \tau_2)
 \end{aligned}$$

elde edilir. □

Tanım 4.2. *A bir Sheffer stroke BCK-cebiri olsun. O zaman*

(i) *Eğer $((\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) | (\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2))) | (\tau_3 | \tau_3) = ((\tau_1 | (\tau_3 | \tau_3)) | (\tau_1 | (\tau_3 | \tau_3))) | (\tau_2 | (\tau_3 | \tau_3))$ ise o zaman A'ya bir pozitif implicative Sheffer stroke BCK-cebiri denir.*

(ii) *Eğer $\tau_1 | (\tau_2 | (\tau_1 | \tau_1)) = \tau_1 | \tau_1$ ise o zaman A'ya bir implicative Sheffer stroke BCK-cebiri denir.*

(iii) *Eğer $\tau_1 | (\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) = \tau_2 | (\tau_2 | (\tau_1 | \tau_1))$ ise o zaman A'ya bir değişmeli Sheffer stroke BCK-cebiri denir.*

(iv) *A'nın 1 en büyük elemanı ve her $\tau \in A$ için $N\tau$ ile gösterilen $(1 | (\tau | \tau)) | (1 | (\tau | \tau))$ elemanı varsa A'ya sınırlı Sheffer stroke BCK-cebiri denir.*

(v) *Eğer her $\tau \in A$ için $NN\tau = \tau$ ise o zaman A'ya bir involutory Sheffer stroke BCK-cebiri denir.*

Örnek 4.2. *Örnek 4.1'de verilen D Sheffer stroke BCK cebirini göz önünde bulunduralım. D pozitif implicative, implicative, değişmeli, sınırlı ve involutory Sheffer stroke BCK-cebiridir.*

Önerme 4.2. *A bir Sheffer stroke BCK-cebiri olsun. Her $\tau_1, \tau_2 \in A$ için aşağıdakiler sağlanır:*

- (i) $N1 = 0$ ve $N0 = 1$,
- (ii) $(N\tau_1|(N\tau_2|N\tau_2))|(N\tau_1|(N\tau_2|N\tau_2)) \leq (\tau_2|(\tau_1|\tau_1))|(\tau_2|(\tau_1|\tau_1))$,
- (iii) Eğer $\tau_2 \leq \tau_1$ ise o zaman $N\tau_1 \leq N\tau_2$ dir,
- (iv) $N\tau_1|(\tau_2|\tau_2) = N\tau_2|(\tau_1|\tau_1)$.

Kanıt. A bir Sheffer stroke BCK-cebiri olsun.

(i) (S1), (S2) ve Lemma 4.2 (2) kullanılarak,

$$\begin{aligned}
 N1 &= (1|(1|1))|(1|(1|1)) \\
 &= ((0|0)|((0|0)|(0|0)))|((0|0)|((0|0)|(0|0))) \\
 &= ((0|0)|0)|((0|0)|0) \\
 &= (0|(0|0))|(0|(0|0)) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
 N0 &= (1|(0|0))|(1|(0|0)) \\
 &= ((0|0)|(0|0))|((0|0)|(0|0)) \\
 &= 0|0 \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

elde edilir.

(ii) (S1), (S2), Lemma 4.2 (2) ve (4) kullanılarak

$$\begin{aligned}
 &(N\tau_1|(N\tau_2|N\tau_2))|(N\tau_1|(N\tau_2|N\tau_2))|(\tau_2|(\tau_1|\tau_1)) \\
 &= (((((0|0)|(\tau_1|\tau_1))|((0|0)|(\tau_1|\tau_1)))|((0|0)|(\tau_2|\tau_2)))|(((0|0)|(\tau_1|\tau_1))|((0|0)|(\tau_1|\tau_1))))|((0|0)|(\tau_2|\tau_2)))|(\tau_2|(\tau_1|\tau_1)) \\
 &= (((\tau_1|\tau_1)|\tau_2)|((\tau_1|\tau_1)|\tau_2))|(\tau_2|(\tau_1|\tau_1)) \\
 &= ((\tau_2|(\tau_1|\tau_1))|(\tau_2|(\tau_1|\tau_1)))|(\tau_2|(\tau_1|\tau_1)) \\
 &= 0|0,
 \end{aligned}$$

yani, $(N\tau_1|(N\tau_2|N\tau_2))|(N\tau_1|(N\tau_2|N\tau_2)) \leq (\tau_2|(\tau_1|\tau_1))|(\tau_2|(\tau_1|\tau_1))$ elde edilir.

(iii) $\tau_2 \leq \tau_1$ olduğunu varsayalım. O halde $(\tau_2|(\tau_1|\tau_1))|(\tau_2|(\tau_1|\tau_1)) = 0$ elde edilir. Lemma 4.2 (2) ve (S1)'i kullanarak

$$\begin{aligned} (N\tau_1|(N\tau_2|N\tau_2))|(N\tau_1|(N\tau_2|N\tau_2)) &= ((\tau_1|\tau_1)|\tau_2)|((\tau_1|\tau_1)|\tau_2) \\ &= (\tau_2|(\tau_1|\tau_1))|(\tau_2|(\tau_1|\tau_1)) = 0 \text{ sonucuna varılır. O halde } N\tau_1 \leq N\tau_2 \text{ dir.} \end{aligned}$$

(iv) (S1) ve Lemma 4.2 (4) kullanılarak

$$N\tau_1|(\tau_2|\tau_2) = (\tau_1|\tau_1)|(\tau_2|\tau_2) = (\tau_2|\tau_2)|(\tau_1|\tau_1) = N\tau_2|(\tau_1|\tau_1)$$

elde edilir. $\square$

Teorem 4.1. *A bir sınırlı Sheffer stroke BCK-cebiri olsun. O zaman her $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \in A$ için aşağıdaki özellikler birbirine denktir:*

- (i) *A involutory'dir,*
- (ii) $\tau_1|(\tau_2|\tau_2) = N\tau_2|(N\tau_1|N\tau_1),$
- (iii) $\tau_1|(N\tau_2|N\tau_2) = \tau_2|(N\tau_1|N\tau_1),$
- (iv) $\tau_1 \leq N\tau_2$ ise o zaman $\tau_2 \leq N\tau_1$ dir.

Kanıt. A bir sınırlı Sheffer stroke BCK-cebiri olsun.

(i) $\Rightarrow$ (ii): A involutory olduğundan, her $\tau_1 \in A$ için $NN\tau_1 = \tau_1$ elde edilir.

Önerme 4.2 (iv) kullanılarak

$$\tau_1|(\tau_2|\tau_2) = NN\tau_1|(\tau_2|\tau_2) = N\tau_2|(N\tau_1|N\tau_1)$$

sonucuna ulaşılır.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): (ii)'den $\tau_1|(N\tau_2|N\tau_2) = NN\tau_2|(N\tau_1|N\tau_1)$ ve $\tau_2|(N\tau_1|N\tau_1) = NN\tau_1|(N\tau_2|N\tau_2)$ elde edilir. Ayrıca Önerme 4.2 (iv) kullanılarak,

$$NN\tau_2|(N\tau_1|N\tau_1) = NN\tau_1|(N\tau_2|N\tau_2)$$

sonucuna varılır. O halde, $\tau_1|(N\tau_2|N\tau_2) = \tau_2|(N\tau_1|N\tau_1)$ elde edilir.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Eğer $\tau_1 \leq N\tau_2$ ise o zaman $(\tau_1|(N\tau_2|N\tau_2))|(\tau_1|(N\tau_2|N\tau_2)) = 0$ dir.

Böylece, (iii) den $(\tau_2|(N\tau_1|N\tau_1))|(\tau_2|(N\tau_1|N\tau_1)) = 0$ dir. O halde, $\tau_2 \leq N\tau_1$ elde edilir.

(iv) $\Rightarrow$ (i): $NN\tau_1 \leq \tau_1$ olduğu açıktır. $N\tau_1 \leq N\tau_1$ dir ve böylece (iv)'den $\tau_1 \leq NN\tau_1$ sonucuna ulaşılır. O halde her $\tau_1 \in A$ için $NN\tau_1 = \tau_1$ olur. Yani, A involutory'dir. $\square$

Teorem 4.2. *A bir implicative Sheffer stroke BCK-cebiri olsun. O zaman*

- (a) *A bir değişmeli Sheffer stroke BCK-cebiridir.*
- (b) *A bir pozitif implicative Sheffer stroke BCK-cebiridir.*

Kanıt. (a): Önerme 4.1 (ii), Lemma 4.2 (10) ve Tanım 4.2 (ii)'den,

$$\begin{aligned}
 \tau_1 | (\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) &= ((\tau_1 | (\tau_2 | (\tau_1 | \tau_1))) | (\tau_1 | (\tau_2 | (\tau_1 | \tau_1)))) | (\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) \\
 &= ((\tau_1 | (\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2))) | (\tau_1 | (\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)))) | (\tau_2 | (\tau_1 | \tau_1)) \\
 &= \tau_2 | (\tau_2 | (\tau_1 | \tau_1))
 \end{aligned}$$

elde edilir. O halde A bir değişmeli Sheffer stroke BCK-cebiridir.

(b): $\tau_1 | \tau_1 = \tau_1 | (\tau_2 | (\tau_1 | \tau_1))$ eşitliğinde τ_1 yerine $(\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) | (\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2))$ yazılarak, (S1), (S2) aksiyomları, Lemma 4.2 (2) ve (4) kullanılarak

$$\begin{aligned}
 \tau_1 | (\tau_2 | \tau_2) &= ((\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) | (\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2))) | (\tau_2 | (\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2))) \\
 &= ((\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) | (\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2))) | (\tau_2 | \tau_2)
 \end{aligned}$$

dir. O halde A bir pozitif implicative Sheffer stroke BCK-cebiridir. $\square$

Teorem 4.3. *A hem değişmeli hem de pozitif implicative Sheffer stroke BCK-cebiri olsun. O halde A bir implicative Sheffer stroke BCK-cebiridir.*

Kanıt. Önerme 4.1 (v) kullanılarak, $\tau_1 \leq \tau_2 | (\tau_1 | \tau_1)$ elde edilir. Önerme 4.1 (vii), Lemma 2.3 (i) ve (S2)'den

$$\Rightarrow (\tau_2 | (\tau_1 | \tau_1)) | (\tau_2 | (\tau_1 | \tau_1)) \leq \tau_1 | \tau_1.$$

$$\Rightarrow \tau_1 | (((\tau_2 | (\tau_1 | \tau_1)) | (\tau_2 | (\tau_1 | \tau_1))) | ((\tau_2 | (\tau_1 | \tau_1)) | (\tau_2 | (\tau_1 | \tau_1)))) \leq \tau_1 | ((\tau_1 | \tau_1) | (\tau_1 | \tau_1))$$

$$\Rightarrow \tau_1 | (\tau_2 | (\tau_1 | \tau_1)) \leq \tau_1 | \tau_1.$$

O halde, $(\tau_1 | (\tau_2 | (\tau_1 | \tau_1))) | \tau_1 = \tau_1 | (\tau_1 | (\tau_2 | (\tau_1 | \tau_1))) = 0 | 0$ elde edilir.

Lemma 4.2 (2), (4), (5), (6), (S2), Tanım 4.2 (i), (ii), (iii) kullanılarak

$$\begin{aligned}
(\tau_1 | (\tau_2 | (\tau_1 | \tau_1))) | (\tau_1 | (\tau_2 | (\tau_1 | \tau_1))) &= (\tau_1 | (\tau_2 | (\tau_1 | \tau_1))) | (0 | 0) \\
&= ((\tau_1 | (\tau_2 | (\tau_1 | \tau_1))) | ((\tau_1 | (\tau_2 | (\tau_1 | \tau_1))) | \tau_1)) \\
&= ((\tau_1 | (\tau_2 | (\tau_1 | \tau_1))) | ((\tau_1 | (\tau_2 | (\tau_1 | \tau_1))) | ((\tau_1 | \tau_1) | \\
&\quad (\tau_1 | \tau_1))) \\
&= (\tau_1 | \tau_1) | (((\tau_1 | \tau_1) | ((\tau_1 | (\tau_2 | (\tau_1 | \tau_1)))) | \\
&\quad (\tau_1 | (\tau_2 | (\tau_1 | \tau_1)))) \\
&= (\tau_1 | \tau_1) | (((\tau_1 | (\tau_2 | (\tau_1 | \tau_1))) | (\tau_1 | (\tau_2 | (\tau_1 | \tau_1)))) | \\
&\quad (\tau_1 | \tau_1)) \\
&= (\tau_1 | \tau_1) | (((\tau_1 | (\tau_1 | \tau_1)) | (\tau_1 | (\tau_1 | \tau_1))) | \\
&\quad ((\tau_2 | (\tau_1 | \tau_1)) | (\tau_1 | \tau_1))) \\
&= (\tau_1 | \tau_1) | (0 | ((\tau_2 | (\tau_1 | \tau_1)) | (\tau_1 | \tau_1))) \\
&= (\tau_1 | \tau_1) | (0 | 0) \\
&= \tau_1
\end{aligned}$$

elde edilir. (S2)'den $\tau_1 | (\tau_2 | (\tau_1 | \tau_1)) = \tau_1 | \tau_1$ dir. O zaman A bir implicative Sheffer stroke BCK-cebiridir. $\square$

Tanım 4.3. A bir Sheffer stroke BCK-cebiri olsun. O halde

(i) Eğer $A(\tau_1, \tau_2) = \{t \in A : (t | (\tau_1 | \tau_1)) | (t | (\tau_1 | \tau_1)) \leq \tau_2\}$ kümesi $\tau_1, \tau_2 \in A$ için $\tau_1 \circ \tau_2$ ile gösterilen en büyük elemana sahip ise A 'ya (S) koşuluna sahiptir denir. Ayrıca, her $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \in A$ için

$$((\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) | (\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2))) | (\tau_3 | \tau_3) = (\tau_1 | ((\tau_2 \circ \tau_3) | (\tau_2 \circ \tau_3))),$$

dir.

(ii) $\leq$, A üzerinde Tanım 4.1 de olduğu gibi bir kısmi sıralama bağıntısı olmak koşuluyla; eğer $(A, \leq)$ bir kafes ise $(A, |, \leq)$ 'ya Sheffer stroke BCK-kafesi denir.

Örnek 4.3. Örnek 4.1'de verilen Sheffer stroke BCK-cebirini göz önünde bulunduralım. $\tau_1 \circ \tau_2 = \tau_1 \vee \tau_2$ olmak üzere; $(D, |, 0)$, (S) koşuluna sahip Sheffer stroke BCK-cebiridir. Ayrıca, $(D, |, \leq)$ bir Sheffer stroke BCK-kafesidir.

Önerme 4.3. *A bir sınırlı Sheffer stroke BCK-cebiri olsun. O halde A, (S) koşulunu sağlar. Bu durumda*

$$\tau_1 \circ \tau_2 = (1|(((1|(\tau_1|\tau_1))|(1|(\tau_1|\tau_1)))|(\tau_2|\tau_2)))|(1|(((1|(\tau_1|\tau_1))|(1|(\tau_1|\tau_1)))|(\tau_2|\tau_2))))$$

dir.

Kanıt. A bir sınırlı Sheffer stroke BCK-cebiri olsun. Her $\tau_1, \tau_2 \in A$ için $\tau_1 \circ \tau_2 = (1|(((1|(\tau_1|\tau_1))|(1|(\tau_1|\tau_1)))|(\tau_2|\tau_2)))|(1|(((1|(\tau_1|\tau_1))|(1|(\tau_1|\tau_1)))|(\tau_2|\tau_2))))$ olarak tanımlayalım. Önerme 4.1 (ii) ve Lemma 4.2 (3)'ten

$$\begin{aligned} & ((\tau_1 \circ \tau_2)|(\tau_1|\tau_1))|((\tau_1 \circ \tau_2)|(\tau_1|\tau_1)) \\ &= (((1|(((1|(\tau_1|\tau_1))|(1|(\tau_1|\tau_1)))|(\tau_2|\tau_2))))|(1|(((1|(\tau_1|\tau_1))|(1|(\tau_1|\tau_1)))|(\tau_2|\tau_2))))|(\tau_1|\tau_1))|(((1|(((1|(\tau_1|\tau_1))|(1|(\tau_1|\tau_1)))|(\tau_2|\tau_2))))|(1|(((1|(\tau_1|\tau_1))|(1|(\tau_1|\tau_1)))|(\tau_2|\tau_2))))|(\tau_1|\tau_1)) \\ &= (((1|(\tau_1|\tau_1))|(1|(\tau_1|\tau_1)))|(((1|(\tau_1|\tau_1))|(1|(\tau_1|\tau_1)))|(\tau_2|\tau_2)))|(((1|(\tau_1|\tau_1))|(1|(\tau_1|\tau_1)))|(\tau_2|\tau_2))) \\ &\leq \tau_2 \end{aligned}$$

elde edilir. $\tau_3 \in A$ için (S2), (S3) ve Lemma 4.2 (4) kullanılarak

$$\begin{aligned} \tau_3|((\tau_1 \circ \tau_2)|(\tau_1 \circ \tau_2)) &= \tau_3|(1|(((1|(\tau_1|\tau_1))|(1|(\tau_1|\tau_1)))|(\tau_2|\tau_2)))) \\ &= \tau_3|((0|0)|(((0|0)|(\tau_1|\tau_1))|((0|0)|(\tau_1|\tau_1)))|(\tau_2|\tau_2))) \\ &= \tau_3|(((\tau_1|\tau_1)|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_1|\tau_1))|(\tau_2|\tau_2)) \\ &= ((\tau_3|(\tau_1|\tau_1))|(\tau_3|(\tau_1|\tau_1)))|(\tau_2|\tau_2) \end{aligned}$$

sonucuna varılır. O halde A, (S) koşulunu sağlar. $\square$

Teorem 4.4. *Her involutory Sheffer stroke BCK-cebiri, (S) koşulunu sağlar.*

Kanıt. A involutory Sheffer stroke BCK-cebiri olsun. 1, A'nın en büyük elemanı ve $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \in A$ olsun. A involutory olduğundan ve Teorem 4.1'den

$$N\tau_1|(N\tau_2|\tau_2) = \tau_2|(\tau_1|\tau_1) \quad (4.1)$$

dir. ” $\circ$ ” işlemini,

$$\tau_1 \circ \tau_2 = N((N\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(N\tau_1|(\tau_2|\tau_2)))$$

olarak tanımlayalım. τ_1 'in involutory özelliği, Önerme 4.1(ii) ve (4.1) denkleminde

$$\begin{aligned}
(\tau_1|((\tau_2 \circ \tau_3)|(\tau_2 \circ \tau_3))) &= NN\tau_1|(N((N\tau_2|(\tau_3|\tau_3))|(N\tau_2|(\tau_3|\tau_3)))) \\
&\quad (N((N\tau_2|(\tau_3|\tau_3))|(N\tau_2|(\tau_3|\tau_3)))) \\
&= ((N\tau_2|(\tau_3|\tau_3))|(N\tau_2|(\tau_3|\tau_3))|(N\tau_1|N\tau_1)) \\
&= ((N\tau_2|(N\tau_1|N\tau_1))|(N\tau_2|(N\tau_1|N\tau_1))|(\tau_3|\tau_3)) \\
&= ((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_3|\tau_3))
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece A , (S) koşulunu sağlar. $\square$

İddia 4.1. *A bir sınırlı Sheffer stroke BCK-cebiri olsun. O halde her değişmeli Sheffer stroke BCK-cebiri bir involutory Sheffer stroke BCK-cebiridir.*

Sonuç 4.1. *Her sınırlı değişmeli Sheffer stroke BCK-cebiri, (S) koşulunu sağlar.*

Kanıt. Teorem 4.4 ve İddia 4.1'den elde edilir. $\square$

Sonuç 4.2. *Herhangi bir implicative Sheffer stroke BCK-cebiri (S) koşulunu ve*

$$\tau_1 \circ \tau_2 = \tau_1 \vee \tau_2$$

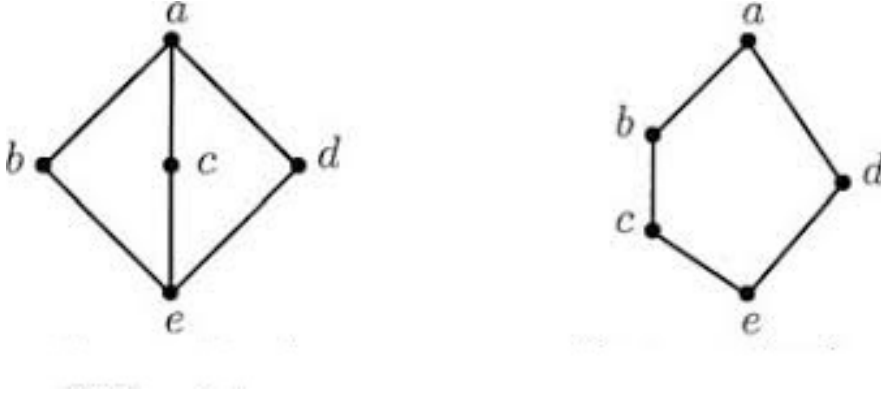
denklemini sağlar. Ayrıca, τ_1 ve τ_2 nin A 'da bir en küçük üst sınırı $(\tau_1 \vee \tau_2)$ vardır ve

$$\tau_1 \vee \tau_2 = (1|(((1|(\tau_1|\tau_1))|(1|(\tau_1|\tau_1))|(\tau_2|\tau_2)))|(1|(((1|(\tau_1|\tau_1))|(1|(\tau_1|\tau_1))|(\tau_2|\tau_2))))$$

dir.

Teorem 4.5. *A , (S) koşulunu sağlayan bir pozitif implicative Sheffer stroke BCK-cebiri olsun. $(A, \leq)$ bir kafes ise dağılmalı kafestir.*

Kanıt. Kafes teorisine göre, bir kafesin dağılmalı olması için gerek ve yeter koşul ne dörtgen alt kafesini ne de beşgen alt kafesini içermesidir. Hasse diyagramları aşağıdaki gibi olan $(A, \leq)$ kafesinin ya dörtgen alt kafesini ya da beşgen alt kafesini içerdiğini kabul edelim.

Şekil 4.2: M_3-N_5 kafesleri

İlk diyagram için, $b \vee c = a$ ve $b \vee d = a$ dir. Sonuç 4.2'den $b \circ c = a$ ve $b \circ d = a$ dir. Tanım 4.3 ve Lemma 4.2 (2)'den

$$\begin{aligned} ((a|(b|b))|(a|(b|b))|(c|c)) &= a|((b \circ c)|(b \circ c)) \\ &= a|(a|a) \\ &= 0|0 \end{aligned}$$

elde edilir. Yani, $((a|(b|b))|(a|(b|b))) \leq c$ sonucuna varılır. Benzer şekilde $((a|(b|b))|(a|(b|b))) \leq d$ dir. Bu yüzden, $((a|(b|b))|(a|(b|b))) \leq c \wedge d$ olur. $c \wedge d = e$ olduğundan $((a|(b|b))|(a|(b|b))) \leq e$ dir. $e \leq b$ olduğundan ve Sonuç 4.2'den $b \circ e = b \vee e = b$ dir. Tanım 4.3'ten

$$\begin{aligned} ((a|(b|b))|(a|(b|b))) &= (a|((b \circ e)|(b \circ e))|(a|((b \circ e)|(b \circ e))) \\ &= (((a|(b|b))|(a|(b|b))|(e|e))|(((a|(b|b))|(a|(b|b))|(e|e))) \\ &\leq e|(e|e)|(e|(e|e)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $a \leq b$ olur ve $a > b$ olması ile çelişir.

İkinci diyagram için, $c \vee d = a$ dır. Sonuç 4.2'den $c \circ d = a$ olur. Tanım 4.3'ten ve $b \leq a$ olduğundan

$$\begin{aligned} ((b|(c|c))|(b|(c|c))|(d|d)) &= b|((c \circ d)|(c \circ d)) \\ &= (b|(a|a)) \\ &= 0|0 \end{aligned}$$

dir. Yani, $((b|(c|c))|(b|(c|c))) \leq d$ olur. Önerme 4.1 (iv)'den $((b|(c|c))|(b|(c|c))) \leq b$ dir. O zaman $((b|(c|c))|(b|(c|c))) \leq b \wedge d = e$ ve böylece $((b|(c|c))|(b|(c|c))|(e|e)) = 0|0$ olur. Sonuç 4.2 kullanılarak $b|((c \circ e)|(c \circ e)) = 0|0$ elde edilir. Yani, $e \leq c$, $c \circ e = e \vee c = c$. Böylece,

$$\begin{aligned}
 ((b|(c|c))|(b|(c|c))) &= (b|((c \circ e)|(c \circ e)))(b|((c \circ e)|(c \circ e))) \\
 &= (((b|(c|c))|(b|(c|c))|(e|e))|(((b|(c|c))|(b|(c|c))|(e|e))) \\
 &\leq (e|(e|e))(e|(e|e)) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $b \leq c$ dir ve $b > c$ ile çelişir. O halde $(A, \leq)$ dağılmalı kafestir. $\square$

Lemma 4.3. *A bir Sheffer stroke BCK kafesi olsun. O zaman*

her $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \in A$ için $(\tau_1|((\tau_2 \wedge \tau_3)|(\tau_2 \wedge \tau_3)))(\tau_1|((\tau_2 \wedge \tau_3)|(\tau_2 \wedge \tau_3))) = ((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))(\tau_1|(\tau_2|\tau_2))) \vee ((\tau_1|(\tau_3|\tau_3))(\tau_1|(\tau_3|\tau_3)))$ dir.

Kanıt. A bir Sheffer stroke BCK-kafesi ve $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \in A$ olsun. $\tau_2 \wedge \tau_3 \leq \tau_2$ ve $\tau_2 \wedge \tau_3 \leq \tau_3$ olduğundan ve Önerme 4.1 (i)'den

$$((\tau_1|(\tau_3|\tau_3))(\tau_1|(\tau_3|\tau_3))) \leq (\tau_1|((\tau_2 \wedge \tau_3)|(\tau_2 \wedge \tau_3)))(\tau_1|((\tau_2 \wedge \tau_3)|(\tau_2 \wedge \tau_3)))$$

ve

$$((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))(\tau_1|(\tau_2|\tau_2))) \leq (\tau_1|((\tau_2 \wedge \tau_3)|(\tau_2 \wedge \tau_3)))(\tau_1|((\tau_2 \wedge \tau_3)|(\tau_2 \wedge \tau_3)))$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}
 &((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))(\tau_1|(\tau_2|\tau_2))) \vee ((\tau_1|(\tau_3|\tau_3))(\tau_1|(\tau_3|\tau_3))) \\
 &\leq (\tau_1|((\tau_2 \wedge \tau_3)|(\tau_2 \wedge \tau_3)))(\tau_1|((\tau_2 \wedge \tau_3)|(\tau_2 \wedge \tau_3)))
 \end{aligned}$$

dir.

$$(\tau_1|(\tau_2|\tau_2))(\tau_1|(\tau_2|\tau_2)) \leq ((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))(\tau_1|(\tau_2|\tau_2))) \vee ((\tau_1|(\tau_3|\tau_3))(\tau_1|(\tau_3|\tau_3)))$$

olduğundan ve Önerme 4.1 (i) ve Lemma 4.2 (3)'ten

$$(\tau_1|(((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))(\tau_1|(\tau_2|\tau_2))) \vee ((\tau_1|(\tau_3|\tau_3))(\tau_1|(\tau_3|\tau_3))))|(((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|$$

$$\begin{aligned}
& (\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) \vee ((\tau_1 | (\tau_3 | \tau_3)) | (\tau_1 | (\tau_3 | \tau_3))) | (\tau_1 | (((\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) | (\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2))) \\
& \vee ((\tau_1 | (\tau_3 | \tau_3)) | (\tau_1 | (\tau_3 | \tau_3))) | (((\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) | (\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2))) \vee ((\tau_1 | (\tau_3 | \tau_3)) | \\
& (\tau_1 | (\tau_3 | \tau_3)))))) \\
& \leq (\tau_1 | (\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2))) | (\tau_1 | (\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2))) \\
& \leq \tau_2 \text{ ve } \tau_3 \text{ dir. Böylece} \\
& (\tau_1 | (((\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) | (\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2))) \vee ((\tau_1 | (\tau_3 | \tau_3)) | (\tau_1 | (\tau_3 | \tau_3)))) | (((\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) | \\
& (\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2))) \vee ((\tau_1 | (\tau_3 | \tau_3)) | (\tau_1 | (\tau_3 | \tau_3)))))) | (\tau_1 | (((\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) | (\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2))) \\
& \vee ((\tau_1 | (\tau_3 | \tau_3)) | (\tau_1 | (\tau_3 | \tau_3))) | (((\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) | (\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2))) \\
& \vee ((\tau_1 | (\tau_3 | \tau_3)) | (\tau_1 | (\tau_3 | \tau_3)))))) \\
& \leq \tau_2 \wedge \tau_3
\end{aligned}$$

olur. Önerme 4.1 (iii)'den

$$\begin{aligned}
& (\tau_1 | ((\tau_2 \wedge \tau_3) | (\tau_2 \wedge \tau_3))) | (\tau_1 | ((\tau_2 \wedge \tau_3) | (\tau_2 \wedge \tau_3))) \leq ((\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) | (\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2))) \\
& \vee ((\tau_1 | (\tau_3 | \tau_3)) | (\tau_1 | (\tau_3 | \tau_3)))
\end{aligned}$$

sonucuna varılır. O halde

$$\begin{aligned}
& (\tau_1 | ((\tau_2 \wedge \tau_3) | (\tau_2 \wedge \tau_3))) | (\tau_1 | ((\tau_2 \wedge \tau_3) | (\tau_2 \wedge \tau_3))) \\
& = ((\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) | (\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2))) \vee ((\tau_1 | (\tau_3 | \tau_3)) | (\tau_1 | (\tau_3 | \tau_3)))
\end{aligned}$$

elde edilir. $\square$

Lemma 4.4. *A bir sınırlı Sheffer stroke BCK-cebiri ve $\tau_1, \tau_2 \in A$ olsun.*

(1) *Eğer τ_1 ve τ_2 'nin en büyük alt sınırı $\tau_1 \wedge \tau_2$ varsa o zaman $N\tau_1$ ve $N\tau_2$ 'nin en küçük üst sınırı $N\tau_1 \vee N\tau_2$ vardır ve $N\tau_1 \vee N\tau_2 = N(\tau_1 \wedge \tau_2)$ dir.*

(2) *Eğer A involutory ve τ_1 ve τ_2 'nin en küçük üst sınırı $\tau_1 \vee \tau_2$ varsa o zaman $N\tau_1$ ve $N\tau_2$ 'nin en büyük alt sınırı $N\tau_1 \wedge N\tau_2$ vardır ve $N\tau_1 \wedge N\tau_2 = N(\tau_1 \vee \tau_2)$ dir.*

Kanıt. Lemma 4.3'ten eğer τ_1 ve τ_2 nin en büyük alt sınırı $\tau_1 \wedge \tau_2$ varsa o zaman herhangi $\tau_3 \in A$ için en küçük üst sınır $((\tau_3 | (\tau_1 | \tau_1)) | (\tau_3 | (\tau_1 | \tau_1))) \vee ((\tau_3 | (\tau_2 | \tau_2)) | (\tau_3 | (\tau_2 | \tau_2)))$ vardır ve

$$\begin{aligned}
& (\tau_3 | (\tau_1 | \tau_1)) | (\tau_3 | (\tau_1 | \tau_1)) \vee ((\tau_3 | (\tau_2 | \tau_2)) | (\tau_3 | (\tau_2 | \tau_2))) \\
& = ((\tau_3 | ((\tau_1 \wedge \tau_2) | (\tau_1 \wedge \tau_2))) | (\tau_3 | ((\tau_1 \wedge \tau_2) | (\tau_1 \wedge \tau_2))))
\end{aligned}$$

dir.

(1) τ_3 'ün A 'nın en büyük elemanı olduğunu kabul edelim. Eğer $\tau_1 \wedge \tau_2$ varsa o halde $((\tau_3 | (\tau_1 | \tau_1)) | (\tau_3 | (\tau_1 | \tau_1))) \vee ((\tau_3 | (\tau_2 | \tau_2)) | (\tau_3 | (\tau_2 | \tau_2)))$ vardır ve

$$\begin{aligned}
& (\tau_3 | (\tau_1 | \tau_1)) | (\tau_3 | (\tau_1 | \tau_1)) \vee ((\tau_3 | (\tau_2 | \tau_2)) | (\tau_3 | (\tau_2 | \tau_2))) \\
& = ((\tau_3 | ((\tau_1 \wedge \tau_2) | (\tau_1 \wedge \tau_2))) | (\tau_3 | ((\tau_1 \wedge \tau_2) | (\tau_1 \wedge \tau_2))))
\end{aligned}$$

dir. $((\tau_3 | (\tau_1 | \tau_1)) | (\tau_3 | (\tau_1 | \tau_1))) = N\tau_1$ olduğundan $N\tau_1 \vee N\tau_2$ vardır ve $N\tau_1 \vee N\tau_2 = N(\tau_1 \wedge \tau_2)$ dir.

(2) Eğer $\tau_1 \vee \tau_2$ varsa, $\tau_1 \leq \tau_1 \vee \tau_2$ ve $\tau_2 \leq \tau_1 \vee \tau_2$ olduğundan ve Önerme 4.2 (iii) kullanılarak $N(\tau_1 \vee \tau_2) \leq N\tau_1$ and $N(\tau_1 \vee \tau_2) \leq N\tau_2$ elde edilir. Böylece $N(\tau_1 \vee \tau_2)$, $N\tau_1$ ve $N\tau_2$ nin bir alt sınırıdır. τ_3 , $N\tau_1$ ve $N\tau_2$ nin bir alt sınırı olsun. $\tau_3 \leq N\tau_1$ and $\tau_3 \leq N\tau_2$ olduğundan ve Teorem 4.1'den $\tau_1 \leq N\tau_3$ and $\tau_2 \leq N\tau_3$ dir. Böylece $\tau_1 \vee \tau_2 \leq N\tau_3$ olur. Teorem 4.1 (iv) kullanılarak $\tau_3 \leq N(\tau_1 \vee \tau_2)$ sonucuna varılır. Böylece $N\tau_1 \wedge N\tau_2$, $N\tau_1$ ve $N\tau_2$ nin en büyük alt sınırıdır. O halde $N\tau_1 \wedge N\tau_2$ vardır ve $N\tau_1 \wedge N\tau_2 = N(\tau_1 \vee \tau_2)$ dir. $\square$

Teorem 4.6. *A bir involutory Sheffer stroke BCK-cebiri olsun. O zaman aşağıdakiler denktir:*

- (1) $(A, \leq)$ bir alt yarı kafestir,
- (2) $(A, \leq)$ bir üst yarı kafestir,
- (3) $(A, \leq)$ bir kafestir.

Ayrıca, Sheffer stroke BCK-kafesi $(A, \leq)$

$$\tau_1 \wedge \tau_2 = N(N\tau_1 \vee N\tau_2) \text{ ve } \tau_1 \vee \tau_2 = N(N\tau_1 \wedge N\tau_2)$$

olmak üzere bir dağılmalı kafestir.

Kanıt. (1) $\Rightarrow$ (2): $(A, \leq)$ bir alt yarı kafes olduğundan her $\tau_1, \tau_2 \in A$ için $N\tau_1 \wedge N\tau_2$ vardır. Lemma 4.4 (1)'den $NN\tau_1 \vee NN\tau_2$ vardır. Ayrıca A involutory olduğundan $NN\tau_1 \vee NN\tau_2 = \tau_1 \vee \tau_2$ dir. O halde $\tau_1 \vee \tau_2$ vardır ve $(A, \leq)$ bir üst yarı kafestir.

(2) $\Rightarrow$ (3): $(A, \leq)$ bir üst yarı kafes olduğundan, Lemma 4.4 (2) ve bir önceki ispattan $(A, \leq)$ bir kafestir.

(3) $\Rightarrow$ (1): Açıktır. Ayrıca, eğer $(A, \leq)$ bir kafes ise Lemma 4.4'ten her $\tau_1, \tau_2 \in A$ için

$$NN\tau_1 \wedge NN\tau_2 = N(N\tau_1 \vee N\tau_2) \text{ ve } NN\tau_1 \vee NN\tau_2 = N(N\tau_1 \wedge N\tau_2)$$

dir. Böylece, involüsyondan

$$\tau_1 \wedge \tau_2 = N(N\tau_1 \vee N\tau_2) \text{ ve } \tau_1 \vee \tau_2 = N(N\tau_1 \wedge N\tau_2)$$

dir. □

Sonuç 4.3. *A bir sınırlı Sheffer stroke BCK-cebiri olsun. O zaman herhangi implicative Sheffer stroke BCK-cebiri bir Boole cebiridir.*

Kanıt. Teorem 4.2, İddia 4.1, Teorem 4.5 ve Teorem 4.6'dan elde edilir. □

4.1 Anti Fuzzy İdealleri

Bu kısımda, Sheffer stroke BCK cebirlerinin anti fuzzy idealleri ve anti fuzzy altcebirleri tanıtılarak, bu kavramlara ilişkin özellikler ve aralarındaki bağlantılar incelenecektir. Bir fuzzy altkümenin tümleyeni ve bir Sheffer stroke BCK cebirinin anti fuzzy implicative ideali ve anti fuzzy subimplicative ideali tanımlanarak anti fuzzy ideal ile aralarındaki ilişkiler gösterilecektir.

Tanım 4.4. *Her $\tau_1, \tau_2 \in A$ için*

$$(I1) \ 0 \in I,$$

$$(I2) \ (\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) | (\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) \in I \text{ ve } \tau_2 \in I \text{ ise o zaman } \tau_1 \in I$$

koşullarını sağlayan A 'nın boştan farklı bir I altkümesine A Sheffer stroke BCK cebirinin bir ideali denir.

Tanım 4.5. *Her $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \in A$ için*

$$(i) \ 0 \in I,$$

$$(ii) \ (((\tau_1 | (\tau_2 | (\tau_1 | \tau_1))) | (\tau_1 | (\tau_2 | (\tau_1 | \tau_1)))) | (\tau_3 | \tau_3)) | (((\tau_1 | (\tau_2 | (\tau_1 | \tau_1))) |$$

$$(\tau_1 | (\tau_2 | (\tau_1 | \tau_1)))) | (\tau_3 | \tau_3)) \in I \text{ ve } \tau_3 \in I \text{ ise o zaman } \tau_1 \in I$$

koşullarını sağlayan A 'nın boştan farklı bir I altkümesine A Sheffer stroke BCK cebirinin bir implicative ideali denir.

Tanım 4.6. *Her $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \in A$ için*

$$(i) \ 0 \in I,$$

$$(ii) \ ((((\tau_1 | (\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2))) | (\tau_1 | (\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)))) | (\tau_3 | \tau_3)) | (((\tau_1 | (\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2))) |$$

$$(\tau_1 | (\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)))) | (\tau_3 | \tau_3)) \in I \text{ ve } \tau_3 \in I \text{ ise o zaman}$$

$$(\tau_2 | (\tau_2 | (\tau_1 | \tau_1))) | (\tau_2 | (\tau_2 | (\tau_1 | \tau_1))) \in I$$

koşullarını sağlayan A 'nın boştan farklı bir I altkümesine A Sheffer stroke BCK cebirinin bir sub-implicative ideali denir.

Tanım 4.7. S boştan farklı bir küme olsun. S 'nin bir μ fuzzy kümesi $\mu : S \rightarrow [0, 1]$ olacak şekilde bir fonksiyondur.

Tanım 4.8. Her $\tau_1, \tau_2 \in A$ için $\mu(\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) | (\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) \geq \min\{\mu(\tau_1), \mu(\tau_2)\}$ koşulunu sağlayan A 'nın bir μ fuzzy altkümesine fuzzy altcebir denir.

Tanım 4.9. A bir Sheffer stroke BCK cebiri olsun.

(a) Her $\tau_1, \tau_2 \in A$ için

- $\mu(0) \geq \mu(\tau_1)$,
- $\mu(\tau_1) \geq \min\{\mu(\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) | (\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)), \mu(\tau_2)\}$

koşullarını sağlayan A 'nın bir μ fuzzy altkümesine fuzzy ideal denir.

(b) Her $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \in A$ için

- $\mu(0) \geq \mu(\tau_1)$,
- $\mu((\tau_2 | (\tau_2 | (\tau_1 | \tau_1))) | (\tau_2 | (\tau_2 | (\tau_1 | \tau_1)))) \geq \min\{\mu(((\tau_1 | (\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2))) | (\tau_1 | (\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)))) | (\tau_3 | \tau_3)) | (((\tau_1 | (\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2))) | (\tau_1 | (\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)))) | (\tau_3 | \tau_3))), \mu(\tau_3)\}$

koşullarını sağlayan A 'nın bir μ fuzzy altkümesine fuzzy sub-implicative ideal denir.

(c) Her $\tau_1, \tau_2 \in A$ için

- $\mu((\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) | (\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2))) \leq \max\{\mu(\tau_1), \mu(\tau_2)\}$,

koşulunu sağlayan A 'nın bir μ fuzzy altkümesine anti fuzzy altcebir denir.

Örnek 4.4. Örnek 4.1'de verilen D Sheffer stroke BCK cebirini göz önünde bulunduralım. $t_0 \leq t_1$ olacak şekilde $t_0, t_1 \in [0, 1]$ olsun. $\mu : D \rightarrow [0, 1]$ kümesini $\mu(0) = t_0$, $\mu(\tau_1) = \mu(\tau_2) = \mu(1) = t_1$ ile tanımlayalım. O halde μ , A 'nın anti fuzzy altcebiridir.

Önerme 4.4. A bir Sheffer stroke BCK-cebiri olsun. Eğer μ , A 'nın bir anti fuzzy altcebiridir ise o zaman her $\tau_1 \in A$ için $\mu(0) \leq \mu(\tau_1)$ dir.

Kanıt. Lemma 4.2 (2)'den $(\tau_1|(\tau_1|\tau_1))|(\tau_1|(\tau_1|\tau_1)) = 0$ dır. Böylece $\mu(0) = \mu((\tau_1|(\tau_1|\tau_1))|(\tau_1|(\tau_1|\tau_1))) \leq \max\{\mu(\tau_1), \mu(\tau_1)\} = \mu(\tau_1)$ elde edilir. $\square$

Tanım 4.10. *A bir Sheffer stroke BCK-cebiri olsun. Her $\tau_1, \tau_2 \in A$ için*

(i) $\mu(0) \leq \mu(\tau_1)$,

(ii) $\mu(\tau_1) \leq \max\{\mu(\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2)), \mu(\tau_2)\}$,

koşullarını sağlayan A'nın bir μ fuzzy altkümesine anti fuzzy ideal denir.

Örnek 4.5. *Örnek 4.4'de verilen μ fuzzy altkümelerini göz önüne alalım. μ D'nin bir anti fuzzy idealidir.*

Teorem 4.7. *A bir Sheffer stroke BCK-cebiri olsun.*

(i) *A'nın her anti fuzzy ideali sıra koruyandır.*

(ii) *A'nın her anti fuzzy ideali anti fuzzy altcebirdir.*

Kanıt. (i) μ , A'nın bir anti fuzzy ideali olsun. $\tau_1 \leq \tau_2$ olacak şekilde $\tau_1, \tau_2 \in A$ alalım. O zaman

$$\mu(\tau_1) \leq \max\{\mu(\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2)), \mu(\tau_2)\} = \max\{\mu(0), \mu(\tau_2)\} = \mu(\tau_2)$$

dir.

(ii) Önerme 4.1 (iv)'den $(\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2)) \leq \tau_1$ dir ve (i)'den

$\mu(\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2)) \leq \mu(\tau_1)$ elde edilir. Böylece Tanım 4.10 (ii)'den

$\mu(\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2)) \leq \mu(\tau_1) \leq \max\{\mu(\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2)), \mu(\tau_2)\} \leq$

$\max\{\mu(\tau_1), \mu(\tau_2)\}$ elde edilir. O halde μ , A'nın anti fuzzy altcebirdir. $\square$

Gözlem 4.1. *A bir Sheffer stroke BCK-cebiri olsun. A'nın her anti fuzzy altcebirinin anti fuzzy ideal olmak zorunda olmadığı aşağıdaki örnekte gösterilmiştir:*

Örnek 4.6. *Örnek 4.1'de verilen D Sheffer stroke BCK cebirini göz önüne alalım. $t_0 \leq t_1 \leq t_2$ olacak şekilde $t_0, t_1, t_2 \in [0, 1]$ alalım. $\mu : D \rightarrow [0, 1]$ kümesini $\mu(0) = t_0$, $\mu(\tau_1) = \mu(\tau_2) = t_1$, $\mu(1) = t_2$ ile tanımlayalım. μ , D'nin anti fuzzy altcebirdir fakat anti fuzzy ideali değildir. Çünkü $\mu(1) = t_2 > t_1 = \max\{\mu(1|(\tau_1|\tau_1))|(1|(\tau_1|\tau_1)), \mu(\tau_1)\}$ dir.*

Önerme 4.5. *A bir Sheffer stroke BCK-cebiri ve μ , A 'nın bir anti fuzzy ideali olsun. Eğer her $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \in A$ için $(\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) | (\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) \leq \tau_3$ ise o zaman $\mu(\tau_1) \leq \max\{\mu(\tau_2), \mu(\tau_3)\}$ dir.*

Kanıt. $(\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) | (\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) \leq \tau_3$ olsun. Tanım 4.10 (ii)'den

$$\begin{aligned} \mu(\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) | (\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) &\leq \max\{((\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) | (\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2))) | (\tau_3 | \tau_3)) | \\ &\quad (((\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) | (\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2))) | (\tau_3 | \tau_3)), \mu(\tau_3)\} \\ &= \max\{\mu(0), \mu(\tau_3)\} \\ &= \mu(\tau_3) \end{aligned}$$

elde edilir. O halde $\mu(\tau_1) \leq \max\{\mu(\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) | (\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)), \mu(\tau_2)\} \leq \max\{\mu(\tau_3), \mu(\tau_2)\}$ sonucuna varılır. $\square$

Önerme 4.6. *A bir Sheffer stroke BCK-cebiri olsun. μ , A 'nın bir fuzzy idealidir eğer ve yalnız eğer μ 'nün tümleyeni μ^c , A 'nın anti fuzzy idealidir.*

Kanıt. μ , A 'nın bir fuzzy ideali ve $\tau_1, \tau_2 \in A$ olsun.

$$\mu^c(0) = 1 - \mu(0) \leq 1 - \mu(\tau_1) = \mu^c(\tau_1) \text{ ve}$$

$$\begin{aligned} \mu^c(\tau_1) &= 1 - \mu(\tau_1) \\ &\leq 1 - \min\{\mu(\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) | (\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)), \mu(\tau_2)\} \\ &= 1 - \min\{1 - \mu^c(\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) | (\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)), 1 - \mu^c(\tau_2)\} \\ &= \max\{\mu^c(\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) | (\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)), \mu^c(\tau_2)\} \end{aligned}$$

dir. O halde μ^c , A 'nın anti fuzzy idealidir. Terside benzer şekilde ispatlanabilir. $\square$

Teorem 4.8. *A bir Sheffer stroke BCK-cebiri ve μ , A 'nın bir anti fuzzy ideali olsun. O zaman $A_\mu := \{\tau_1 \in A | \mu(\tau_1) = \mu(0)\}$ A 'nın idealidir.*

Kanıt. $0 \in A_\mu$ olduğu açıktır. $(\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) | (\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) \in A_\mu$ ve $\tau_2 \in A_\mu$ olacak şekilde $\tau_1, \tau_2 \in A$ olsun. O halde $\mu(\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) | (\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) = \mu(0) = \mu(\tau_2)$ dir. Tanım 4.10 (ii)'den $\mu(\tau_1) \leq \max\{\mu(\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) | (\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)), \mu(\tau_2)\} = \mu(0)$ elde edilir. Tanım 4.10 (i)'den $\mu(\tau_1) = \mu(0)$ ve böylece $\tau_1 \in A_\mu$ sonucuna ulaşılır. $\square$

Tanım 4.11. *A bir Sheffer stroke BCK-cebiri ve μ , A 'nın bir fuzzy altkümesi olsun. $t \in [0, 1]$ için μ 'nün t -kesiti $\mu^t := \{\tau_1 \in A \mid \mu(\tau_1) \geq t\}$ kümesidir. μ 'nün alt sınır t -kesiti $\mu^t := \{\tau_1 \in A \mid \mu(\tau_1) \leq t\}$ kümesidir. $t \in [0, 1]$ için $\mu^1 = A$ ve $\mu_t \cup \mu^t = A$ olduğu açıktır. Eğer $t_1 \leq t_2$ ise $\mu^{t_1} \subseteq \mu^{t_2}$ dir.*

Teorem 4.9. *A bir Sheffer stroke BCK-cebiri ve μ , A 'nın bir fuzzy altkümesi olsun. μ , A 'nın bir anti fuzzy idealidir eğer ve yalnız eğer $t \geq \mu(0)$ olacak şekilde her $t \in [0, 1]$ için μ^t , A 'nın bir idealidir.*

Kanıt. μ , A 'nın bir anti fuzzy ideali ve $t \geq \mu(0)$ olacak şekilde $t \in [0, 1]$ olsun. $0 \in \mu^t$ olduğu açıktır. $(\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) | (\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) \in \mu^t$ ve $\tau_2 \in \mu^t$ olacak şekilde $\tau_1, \tau_2 \in A$ olsun. O halde $\mu(\tau_1) \leq \max\{\mu(\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) | (\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)), \mu(\tau_2)\} \leq t$ dir. Böylece $\tau_1 \in \mu^t$ dir. μ^t , A 'nın bir idealidir.

Her $\tau_1 \in A$ için $\mu(0) \leq \mu(\tau_1)$ olduğunu gösterelim. Eğer değilse $\mu(0) > \mu(\tau_{1_0})$ olacak şekilde $\tau_{1_0} \in A$ vardır. $t_0 := \frac{1}{2}\{\mu(0) + \mu(\tau_{1_0})\}$ alırsak $0 \leq \mu(\tau_{1_0}) < t_0 < \mu(0) \leq 1$ olur. $\tau_{1_0} \in \mu^{t_0}$ yani $\mu^{t_0} \neq \emptyset$ dir. Fakat μ^{t_0} , A 'nın bir ideali olduğundan $0 \in \mu^{t_0}$ yani $\mu(0) \leq t_0$ dir. Bu bir çelişkidir. O halde her $\tau_1 \in A$ için $\mu(0) \leq \mu(\tau_1)$ dir.

Şimdi her $\tau_1, \tau_2 \in A$ için $\mu(\tau_1) \leq \max\{\mu(\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) | (\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)), \mu(\tau_2)\}$ olduğunu gösterelim. Eğer değil ise $\mu(\tau_{1_0}) > \max\{\mu(\tau_{1_0} | (\tau_{2_0} | \tau_{2_0})) | (\tau_{1_0} | (\tau_{2_0} | \tau_{2_0})), \mu(\tau_{2_0})\}$ olacak şekilde $\tau_{1_0}, \tau_{2_0} \in A$ vardır. $s_0 := \frac{1}{2}\{\mu(\tau_{1_0}) + \max\{\mu(\tau_{1_0} | (\tau_{2_0} | \tau_{2_0})) | (\tau_{1_0} | (\tau_{2_0} | \tau_{2_0})), \mu(\tau_{2_0})\}\}$ alırsak $s_0 < \mu(\tau_{1_0})$ ve $0 \leq \max\{\mu(\tau_{1_0} | (\tau_{2_0} | \tau_{2_0})) | (\tau_{1_0} | (\tau_{2_0} | \tau_{2_0})), \mu(\tau_{2_0})\} < s_0 \leq 1$ dir. O halde $s_0 > \mu(\tau_{1_0} | (\tau_{2_0} | \tau_{2_0})) | (\tau_{1_0} | (\tau_{2_0} | \tau_{2_0}))$ ve $s_0 > \mu(\tau_{2_0})$ yani $(\tau_{1_0} | (\tau_{2_0} | \tau_{2_0})) | (\tau_{1_0} | (\tau_{2_0} | \tau_{2_0})) \in \mu^{s_0}$ ve $\tau_{2_0} \in \mu^{s_0}$ olur. μ^{s_0} , A 'nın ideali olduğundan $\tau_{1_0} \in \mu^{s_0}$ yani $\mu(\tau_{1_0}) \leq s_0$ dir. Bu bir çelişkidir. μ , A 'nın bir anti fuzzy idealidir. $\square$

Tanım 4.12. *A bir Sheffer stroke BCK-cebiri ve μ , A 'nın bir fuzzy altkümesi olsun. $t \in [0, 1]$ için μ^t 'nin λ_{μ^t} bulanıklaştırma kümesi A 'nın*

$$\lambda_{\mu^t}(\tau_1) := \begin{cases} \mu(\tau_1), & \tau_1 \in \mu^t \text{ ise,} \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

ile tanımlı fuzzy altkümesidir. Her $\tau_1 \in A$ için $\lambda_{\mu^t} \leq \mu$, yani $\lambda_{\mu^t}(\tau_1) \leq \mu(\tau_1)$ ve $(\lambda_{\mu^t})^t = \mu^t$ olduğu açıktır.

Örnek 4.7. Örnek 4.1’de verilen D Sheffer stroke BCK cebirini göz önünde bulunduralım. $t_0 \leq t_1 \leq t_2$ olacak şekilde $t_0, t_1, t_2 \in [0, 1]$ olsun. $\mu : D \rightarrow [0, 1]$ kümesini $\mu(0) = t_0$, $\mu(\tau_1) = \mu(\tau_2) = t_1$ ve $\mu(1) = t_2$ ile tanımlayalım. O zaman $\mu^{t_0} = \{0\}$, $\mu^{t_1} = \{0, \tau_1, \tau_2\}$, $\mu^{t_2} = \{0, \tau_1, \tau_2, 1\}$ dir. Böylece $\lambda_{\mu^{t_1}}(0) := \mu(0) = t_0$, $\lambda_{\mu^{t_1}}(\tau_1) := \mu(\tau_1) = t_1$, $\lambda_{\mu^{t_1}}(\tau_2) := \mu(\tau_2) = t_1$, $\lambda_{\mu^{t_1}}(1) := 0$ elde edilir. $\lambda_{\mu^{t_2}}(0) := \mu(0) = t_0$, $\lambda_{\mu^{t_2}}(\tau_1) := \mu(\tau_1) = t_1$, $\lambda_{\mu^{t_2}}(\tau_2) := \mu(\tau_2) = t_1$, $\lambda_{\mu^{t_2}}(1) := \mu(1) = t_2$ olduğu da açıktır.

Teorem 4.10. A bir Sheffer stroke BCK-cebiri olsun. Eğer μ , A ’nın bir anti fuzzy ideali ise o zaman $t \in [0, 1]$ ve $t \geq \mu(0)$ olmak üzere λ_{μ^t} ’de A ’nın anti fuzzy idealidir.

Kanıt. Teorem 4.9’den $s \in [0, 1]$ ve $s \geq \lambda_{\mu^t}(0)$ olmak üzere $(\lambda_{\mu^t})^s$ nin A ’nın bir ideali olduğunu göstermek yeterlidir. $0 \in (\lambda_{\mu^t})^s$ olduğu açıktır. $((\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) | (\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)))$, $\tau_2 \in (\lambda_{\mu^t})^s$ olacak şekilde $\tau_1, \tau_2 \in A$ olsun. $\tau_1 \in (\lambda_{\mu^t})^s$ yani $(\lambda_{\mu^t})(\tau_1) \leq s$ olduğunu gösterelim. μ^t , A ’nın ideali olduğu için eğer $((\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) | (\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)))$, $\tau_2 \in \mu^t$ ise o zaman $\tau_1 \in \mu^t$ olur.

$$\begin{aligned} \lambda_{\mu^t}(\tau_1) &= \mu(\tau_1) \\ &\leq \max\{\mu(\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) | (\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)), \mu(\tau_2)\} \\ &= \max\{\lambda_{\mu^t}(\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) | (\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)), \lambda_{\mu^t}(\tau_2)\} \\ &\leq s, \end{aligned}$$

ve böylece $\tau_1 \in (\lambda_{\mu^t})^s$ dir. Eğer $(\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) | (\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) \notin \mu^t$ ya da $\tau_2 \in \mu^t$ ise o zaman $\lambda_{\mu^t}(\tau_1) \leq s$, böylece $\tau_1 \in (\lambda_{\mu^t})^s$ olduğu açıktır. Bu yüzden λ_{μ^t} , A ’nın idealidir. $\square$

Tanım 4.13. *A bir Sheffer stroke BCK-cebiri olsun. Her $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \in A$ için*

- (i) $\mu(0) \leq \mu(\tau_1)$,
- (ii) $\mu(\tau_1) \leq \max\{\mu(\tau_3), \mu((((\tau_1|(\tau_2|(\tau_1|\tau_1)))|(\tau_1|(\tau_2|(\tau_1|\tau_1))))|(\tau_3|\tau_3))|$
 $(((\tau_1|(\tau_2|(\tau_1|\tau_1)))|(\tau_1|(\tau_2|(\tau_1|\tau_1))))|(\tau_3|\tau_3)))\}$,

koşullarını sağlayan A'nın μ fuzzy altkümesine anti fuzzy implicative ideal denir.

Örnek 4.8. *Örnek 4.4'de verilen D Sheffer stroke BCK cebirini göz önüne alalım. $t_0 \leq t_1$ olacak şekilde $t_0, t_1 \in [0, 1]$ alalım. $\mu : D \rightarrow [0, 1]$ kümesini $\mu(0) = t_0$, $\mu(\tau_1) = \mu(\tau_2) = \mu(1) = t_1$ ile tanımlayalım. O halde μ , D'nin anti fuzzy implicative idealidir.*

Tanım 4.14. *A bir Sheffer stroke BCK-cebiri olsun. Her $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \in A$ için*

- (i) $\mu(0) \leq \mu(\tau_1)$,
- (ii) $\mu((\tau_2|(\tau_2|(\tau_1|\tau_1)))|(\tau_2|(\tau_2|(\tau_1|\tau_1)))) \leq \max\{\mu((((\tau_1|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2)))|$
 $(\tau_1|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2))))|(\tau_3|\tau_3))|((\tau_1|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2)))|(\tau_1|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2))))|(\tau_3|\tau_3))), \mu(\tau_3)\}$,

koşullarını sağlayan A'nın μ fuzzy altkümesine anti fuzzy sub-implicative ideal denir.

Örnek 4.9. *Örnek 4.4'de verilen D Sheffer stroke BCK cebirini göz önüne alalım. $t_0 \leq t_1$ olacak şekilde $t_0, t_1 \in [0, 1]$ alalım. $\mu : D \rightarrow [0, 1]$ kümesini $\mu(0) = t_0$, $\mu(\tau_1) = \mu(\tau_2) = \mu(1) = t_1$ ile tanımlayalım. O halde μ , D'nin anti fuzzy sub-implicative idealidir.*

Önerme 4.7. *A bir Sheffer stroke BCK-cebiri olsun.*

- (i) *A'nın her anti fuzzy sub-implicative ideali sıra koruyandır.*
- (ii) *A'nın her anti fuzzy sub-implicative ideali bir anti fuzzy idealdir.*
- (iii) *μ , A'nın anti fuzzy ideali olsun. Eğer her $\tau_1, \tau_2 \in A$ için*

$$\mu((\tau_2|(\tau_2|(\tau_1|\tau_1)))|(\tau_2|(\tau_2|(\tau_1|\tau_1)))) \leq \mu((\tau_1|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2)))|(\tau_1|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2))))), \quad (4.2)$$

koşulu sağlanıyorsa μ , A'nın anti fuzzy sub-implicative idealidir.

Kanıt. (i) μ , A'nın anti fuzzy sub-implicative ideali ve $\tau_1 \leq \tau_3$ olacak şekilde

$\tau_1, \tau_2, \tau_3 \in A$ olsun. Tanım 4.14 (ii)'den

$$\begin{aligned}
\mu(\tau_1) &\leq \max\{\mu((((\tau_1|(\tau_1|(\tau_1|\tau_1)))|(\tau_1|(\tau_1|(\tau_1|\tau_1))))|(\tau_3|\tau_3))| \\
&\quad (((\tau_1|(\tau_1|(\tau_1|\tau_1)))|(\tau_1|(\tau_1|(\tau_1|\tau_1))))|(\tau_3|\tau_3))), \mu(\tau_3)\} \\
&= \max\{\mu(\tau_1|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_1|(\tau_3|\tau_3)), \mu(\tau_3)\} \\
&= \max\{\mu(0), \mu(\tau_3)\} \\
&= \mu(\tau_3)
\end{aligned}$$

elde edilir.

(ii) μ , A 'nın anti fuzzy sub-implicative ideali olsun. Tanım 4.14 (i)'den $\mu(0) \leq \mu(\tau_1)$ dir. Tanım 4.14 (ii) de τ_2 yerine τ_1 yazılarak ve (S2), Lemma 4.2 (2), (6) ve Tanım 4.10 kullanılarak

$$\begin{aligned}
\mu(\tau_1) &\leq \max\{\mu((((\tau_1|(\tau_1|(\tau_1|\tau_1)))|(\tau_1|(\tau_1|(\tau_1|\tau_1))))|(\tau_3|\tau_3))| \\
&\quad (((\tau_1|(\tau_1|(\tau_1|\tau_1)))|(\tau_1|(\tau_1|(\tau_1|\tau_1))))|(\tau_3|\tau_3))), \mu(\tau_3)\} \\
&= \max\{\mu((\tau_1|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_1|(\tau_3|\tau_3))), \mu(\tau_3)\}.
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu yüzden μ , A 'nın anti fuzzy idealidir.

(iii) μ , A 'nın (4.2) eşitsizliğini sağlayan anti fuzzy ideali olsun. Tanım 4.10 (ii) kullanılarak

$$\begin{aligned}
\mu((\tau_2|(\tau_2|(\tau_1|\tau_1)))|(\tau_2|(\tau_2|(\tau_1|\tau_1)))) &\leq \mu((\tau_1|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2)))|(\tau_1|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2)))) \\
&\leq \max\{\mu(((\tau_1|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2)))| \\
&\quad (\tau_1|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2))))|(\tau_3|\tau_3))| \\
&\quad (((\tau_1|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2)))|(\tau_1|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2)))) \\
&\quad |(\tau_3|\tau_3))), \mu(\tau_3)\}
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde μ , A 'nın anti fuzzy sub-implicative idealidir. $\square$

Teorem 4.11. *A bir Sheffer stroke BCK-cebiri olsun. A'nın her anti fuzzy sub-implicative ideali A'nın bir anti fuzzy altcebiridir.*

Kanıt. μ , A 'nın anti fuzzy sub-implicative ideali olsun. Tanım 4.14 (ii) de τ_2 yerine τ_1 yazılarak

$$\begin{aligned}
& \mu((\tau_1|(\tau_1|(\tau_1|\tau_1)))|(\tau_1|(\tau_1|(\tau_1|\tau_1)))) \\
&= \mu(\tau_1) \\
&\leq \max\{\mu((((\tau_1|(\tau_1|(\tau_1|\tau_1)))|(\tau_1|(\tau_1|(\tau_1|\tau_1))))|(\tau_3|\tau_3))|((\tau_1|(\tau_1|(\tau_1|\tau_1)))| \\
&(\tau_1|(\tau_1|(\tau_1|\tau_1))))|(\tau_3|\tau_3))), \mu(\tau_3)\} \\
&= \max\{\mu(\tau_1|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_1|(\tau_3|\tau_3)), \mu(\tau_3)\} \\
&\text{yani} \\
&\mu(\tau_1|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_1|(\tau_3|\tau_3)) \\
&\leq \max\{\mu(((\tau_1|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_1|(\tau_3|\tau_3)))|(\tau_3|\tau_3))|((\tau_1|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_1|(\tau_3|\tau_3)))| \\
&(\tau_3|\tau_3)), \mu(\tau_3)\}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Fakat Önerme 4.1 (iv)'den

$$\begin{aligned}
& (((\tau_1|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_1|(\tau_3|\tau_3)))|(\tau_3|\tau_3))|((\tau_1|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_1|(\tau_3|\tau_3)))|(\tau_3|\tau_3)) \\
&\leq (\tau_1|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_1|(\tau_3|\tau_3)) \\
&\leq \tau_1
\end{aligned}$$

dir ve Önerme 4.7 (i)'den

$$\mu(((\tau_1|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_1|(\tau_3|\tau_3)))|(\tau_3|\tau_3))|((\tau_1|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_1|(\tau_3|\tau_3)))|(\tau_3|\tau_3)) \leq \mu(\tau_1)$$

elde edilir. Bu yüzden $\mu(\tau_1|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_1|(\tau_3|\tau_3)) \leq \max\{\mu(\tau_1), \mu(\tau_3)\}$ dir.

Böylece μ , A 'nın anti fuzzy altcebiridir. $\square$

Gözlem 4.2. *A bir Sheffer stroke BCK-cebiri olsun. A'nın her anti fuzzy altcebirinin anti fuzzy sub-implicative ideal olmak zorunda olmadığı aşağıdaki örnekte gösterilmiştir:*

Örnek 4.10. *Örnek 4.1'de verilen D Sheffer stroke BCK cebirini göz önüne alalım. $t_0 \leq t_1 \leq t_2$ olacak şekilde $t_0, t_1, t_2 \in [0, 1]$ alalım. $\mu : D \rightarrow [0, 1]$ kümesini $\mu(0) = t_0$, $\mu(\tau_1) = \mu(\tau_2) = t_1$, $\mu(1) = t_2$ ile tanımlayalım. μ , A 'nın anti fuzzy altcebiridir fakat anti fuzzy sub-implicative ideali değildir. Çünkü $\mu(1|(1|(1|1)))|(1|(1|(1|1))) = \mu(1) = t_2 > t_1 = \max\{\mu(((1|(1|(1|1)))|(1|(1|(1|1))))|(\tau_1|\tau_1))|((1|(1|(1|1)))|(1|(1|(1|1))))|(\tau_1|\tau_1)), \mu(\tau_1)\}$ dir.*

Tanım 4.15. *Her $\tau_1, \tau_2 \in A$ için*

$$\tau_1|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2)) = \tau_2|(\tau_2|(\tau_1|\tau_1)), \quad (4.3)$$

koşulunu sağlayan Sheffer stroke BCK cebirine değişmeli denir.

Teorem 4.12. *A bir değişmeli Sheffer stroke BCK cebiri olsun. O zaman A'nın her anti fuzzy ideali anti fuzzy sub-implicative idealdir.*

Kanıt. μ , A'nın anti fuzzy ideali olsun. O halde

$$(i) \mu(0) \leq \mu(\tau_1),$$

(ii)

$$\begin{aligned} & \mu((\tau_2|(\tau_2|(\tau_1|\tau_1)))|(\tau_2|(\tau_2|(\tau_1|\tau_1)))) \\ & \leq \max\{\mu((((\tau_2|(\tau_2|(\tau_1|\tau_1)))|(\tau_2|(\tau_2|(\tau_1|\tau_1))))|(\tau_3|\tau_3))|(((\tau_2|(\tau_2|(\tau_1|\tau_1)))| \\ & (\tau_2|(\tau_2|(\tau_1|\tau_1))))|(\tau_3|\tau_3))), \mu(\tau_3)\} \\ & = \max\{\mu((((\tau_1|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2)))|(\tau_1|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2))))|(\tau_3|\tau_3))|(((\tau_1|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2)))| \\ & (\tau_1|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2))))|(\tau_3|\tau_3))), \mu(\tau_3)\} \end{aligned}$$

dir. O halde μ , A'nın anti fuzzy sub-implicative idealidir. $\square$

Önerme 4.7 (ii) ve Teorem 4.12'den aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.13. *A bir değişmeli Sheffer stroke BCK cebiri olsun. A'nın bir μ fuzzy kümesi A'nın bir anti fuzzy idealidir eğer ve yalnız eğer μ , A'nın anti fuzzy sub-implicative idealidir.*

Teorem 4.14. *A Sheffer stroke BCK cebirinin herhangi anti fuzzy sub-implicative ideali μ için*

$$A_\mu = \{\tau_1 \in A | \mu(\tau_1) = \mu(0)\}$$

kümesi A'nın sub-implicative idealidir.

Kanıt. $0 \in A_\mu$ olduğu açıktır. $(((\tau_1|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2)))|(\tau_1|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2))))|(\tau_3|\tau_3))|(((\tau_1|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2)))|(\tau_1|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2))))|(\tau_3|\tau_3)) \in A_\mu$ ve $\tau_3 \in A_\mu$ olacak şekilde $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \in A$ olsun. Tanım 4.14 (i) ve (ii)'den

$$\begin{aligned} & \mu((\tau_2|(\tau_2|(\tau_1|\tau_1)))|(\tau_2|(\tau_2|(\tau_1|\tau_1)))) \\ & \leq \max\{\mu((((\tau_1|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2)))|(\tau_1|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2))))|(\tau_3|\tau_3))| \\ & (((\tau_1|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2)))|(\tau_1|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2))))|(\tau_3|\tau_3))), \mu(\tau_3)\} \\ & = \mu(0), \end{aligned}$$

yani, $\mu((\tau_2|(\tau_2|(\tau_1|\tau_1)))|(\tau_2|(\tau_2|(\tau_1|\tau_1)))) = \mu(0)$ elde edilir. O halde

$((\tau_2|(\tau_2|(\tau_1|\tau_1)))|(\tau_2|(\tau_2|(\tau_1|\tau_1)))) \in A_\mu$ sonucuna varılır. O halde A_μ , A 'nın bir sub-implicative idealidir. $\square$

Önerme 4.8. *A bir Sheffer stroke BCK-cebiri olsun. A 'nın bir μ fuzzy altkümesi fuzzy sub-implicative idealdir eğer ve yalnız eğer μ 'nın tümleyeni μ^c , A 'nın anti fuzzy sub-implicative idealidir.*

Kanıt. μ , A 'nın bir fuzzy sub-implicative ideali ve $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \in A$ olsun. O zaman $\mu^c(0) = 1 - \mu(0) \leq 1 - \mu(\tau_1) = \mu^c(\tau_1)$ ve

$$\begin{aligned} & \mu^c((\tau_2|(\tau_2|(\tau_1|\tau_1)))|(\tau_2|(\tau_2|(\tau_1|\tau_1)))) \\ &= 1 - \mu((\tau_2|(\tau_2|(\tau_1|\tau_1)))|(\tau_2|(\tau_2|(\tau_1|\tau_1)))) \\ &\leq 1 - \min\{\mu(((\tau_1|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2)))|(\tau_1|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2))))|(\tau_3|\tau_3))|(((\tau_1|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2)))|(\tau_1|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2))))|(\tau_3|\tau_3))), \mu(\tau_3)\} \\ &= 1 - \min\{1 - \mu^c(((\tau_1|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2)))|(\tau_1|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2))))|(\tau_3|\tau_3))|(((\tau_1|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2)))|(\tau_1|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2))))|(\tau_3|\tau_3))), 1 - \mu^c(\tau_3)\} \\ &= \max\{\mu^c(((\tau_1|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2)))|(\tau_1|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2))))|(\tau_3|\tau_3))|(((\tau_1|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2)))|(\tau_1|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2))))|(\tau_3|\tau_3))), \mu^c(\tau_3)\} \end{aligned}$$

elde edilir. O halde μ^c , A 'nın anti fuzzy sub-implicative idealidir. Terside benzer şekilde gösterilebilir. $\square$

4.2 Homomorfizmalar

Bu bölümde, Sheffer stroke BCK cebirleri üzerinde homomorfizmalar tanımlanarak çeşitli özellikleri ve (anti) fuzzy idealleri ile aralarındaki bağlantılar araştırılacaktır.

Tanım 4.16. $\langle A, |_A \rangle$ ve $\langle B, |_B \rangle$ iki Sheffer stroke BCK cebiri olsun. Eğer her $\tau_1, \tau_2 \in A$ için

$$f(\tau_1|_A\tau_2) = f(\tau_1)|_Bf(\tau_2)$$

ise o zaman A 'dan B 'ye tanımlanan bir $f : A \longrightarrow B$ dönüşümüne bir homomorfizma denir. Ayrıca, $f(1_A) = 1_B$ olduğunu belirtelim.

Teorem 4.15. *A ve B iki Sheffer stroke BCK cebiri olmak üzere f , A 'dan B 'ye bir homomorfizma olsun.*

- (i) Eğer 0 , A 'da birim eleman ise o zaman $f(0)$, B 'de birim elemandır.
- (ii) Eğer X , A 'nın bir sub-implicative ideali ise o zaman $f(X)$, B 'nin bir sub-implicative idealidir.
- (iii) Eğer Y , B 'nin bir sub-implicative ideali ise o zaman $f^{-1}(Y)$, A 'nın bir sub-implicative idealidir .
- (iv) Eğer A bir değişmeli Sheffer stroke BCK cebiri ise o zaman $\text{Ker } f$, A 'nın bir sub-implicative idealidir.

Kanıt. (i) Tanım 4.1 ve Tanım 4.16'dan

$$\begin{aligned}
 f(0) &= f((0|_A(0|_A 0))|_A(0|_A(0|_A 0))) \\
 &= ((f(0)|_B(f(0)|_B f(0)))|_B \\
 &\quad (f(0)|_B(f(0)|_B f(0)))) \\
 &= 0_B
 \end{aligned}$$

elde edilir.

(ii) X , A 'nın bir sub-implicative ideali olsun. $0_B \in f(X)$ dir.

$$\begin{aligned}
 &((((f(\tau_1)|_B(f(\tau_1)|_B(f(\tau_2)|_B(f(\tau_2))))))|_B(f(\tau_1)|_B(f(\tau_1)|_B(f(\tau_2)|_B \\
 &\quad (f(\tau_2))))))|_B(f(\tau_3)|_B f(\tau_3)))|_B(((f(\tau_1)|_B(f(\tau_1)|_B(f(\tau_2)|_B(f(\tau_2))))))|_B \\
 &\quad (f(\tau_1)|_B(f(\tau_1)|_B(f(\tau_2)|_B(f(\tau_2))))))|_B(f(\tau_3)|_B f(\tau_3)))) \in f(X)
 \end{aligned}$$

ve $f(\tau_3) \in f(X)$ olsun. f homomorfizma olduğundan

$$\begin{aligned}
 &((((\tau_1|_A(\tau_1|_A(\tau_2|_A \tau_2))))|_A(\tau_1|_A(\tau_1|_A(\tau_2|_A \tau_2))))|_A(\tau_3|_A \tau_3))|_A \\
 &\quad (((\tau_1|_A(\tau_1|_A(\tau_2|_A \tau_2))))|_A(\tau_1|_A(\tau_1|_A(\tau_2|_A \tau_2))))|_A(\tau_3|_A \tau_3)) \in X
 \end{aligned}$$

elde edilir. X sub-implicative ideal olduğundan

$$((\tau_2|_A(\tau_2|_A(\tau_1|_A \tau_1)))|_A(\tau_2|_A(\tau_2|_A(\tau_1|_A \tau_1)))) \in X$$

sonucuna varılır. Böylece

$$\begin{aligned}
 &f((((\tau_2|_A(\tau_2|_A(\tau_1|_A \tau_1)))|_A(\tau_2|_A(\tau_2|_A(\tau_1|_A \tau_1)))))) \\
 &= (((f(\tau_2)|_B(f(\tau_2)|_B(f(\tau_1)|_B(f(\tau_1))))))|_B(f(\tau_2)|_B \\
 &\quad (f(\tau_2)|_B(f(\tau_1)|_B(f(\tau_1)))))) \\
 &\in f(X)
 \end{aligned}$$

elde edilir. O halde $f(X)$, B 'nin bir sub-implicative idealidir.

(iii) Y , B 'nin bir sub-implicative ideali olsun. $f(0) = 0_B$ olduğundan

$0 \in f^{-1}(Y)$ dir. Her $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \in A$ için

$$((((\tau_1|_A(\tau_1|_A(\tau_2|_A\tau_2))))|_A(\tau_1|_A(\tau_1|_A(\tau_2|_A\tau_2))))|_A(\tau_3|_A\tau_3))|_A$$

$$((((\tau_1|_A(\tau_1|_A(\tau_2|_A\tau_2))))|_A(\tau_1|_A(\tau_1|_A(\tau_2|_A\tau_2))))|_A(\tau_3|_A\tau_3)) \in f^{-1}(Y) \text{ ve } \tau_3 \in$$

$f^{-1}(Y)$ olsun. O halde

$$f((((\tau_1|_A(\tau_1|_A(\tau_2|_A\tau_2))))|_A(\tau_1|_A(\tau_1|_A(\tau_2|_A\tau_2))))|_A(\tau_3|_A\tau_3))|_A$$

$$((((\tau_1|_A(\tau_1|_A(\tau_2|_A\tau_2))))|_A(\tau_1|_A(\tau_1|_A(\tau_2|_A\tau_2))))|_A(\tau_3|_A\tau_3)) \in Y \text{ ve } f(\tau_3) \in Y$$

dir. f homomorfizma olduğundan

$$((((f(\tau_1)|_B(f(\tau_1)|_B(f(\tau_2)|_B(f(\tau_2))))))|_B(f(\tau_1)|_B(f(\tau_1)|_B(f(\tau_2)|_B$$

$$(f(\tau_2))))))|_B(f(\tau_3)|_B f(\tau_3)))|_B((((f(\tau_1)|_B(f(\tau_1)|_B(f(\tau_2)|_B(f(\tau_2))))))|_B$$

$$(f(\tau_1)|_B(f(\tau_1)|_B(f(\tau_2)|_B(f(\tau_2))))))|_B(f(\tau_3)|_B f(\tau_3)))) \in Y$$

ve $f(\tau_3) \in Y$ elde edilir. Y bir sub-implicative ideal olduğundan

$$(((f(\tau_2)|_B(f(\tau_2)|_B(f(\tau_1)|_B(f(\tau_1))))))|_B(f(\tau_2)|_B(f(\tau_2)|_B(f(\tau_1)|_B(f(\tau_1)))))))$$

$$= f((((\tau_2|_A(\tau_2|_A(\tau_1|_A\tau_1))))|_A(\tau_2|_A(\tau_2|_A(\tau_1|_A\tau_1))))$$

$$\in Y$$

sonucuna ulaşılır. $((\tau_2|_A(\tau_2|_A(\tau_1|_A\tau_1)))|_A(\tau_2|_A(\tau_2|_A(\tau_1|_A\tau_1)))) \in f^{-1}(Y)$ dir.

O halde $f^{-1}(Y)$, A 'nın bir sub-implicative idealidir.

$$(iv) (((((\tau_1|_A(\tau_1|_A(\tau_2|_A\tau_2))))|_A(\tau_1|_A(\tau_1|_A(\tau_2|_A\tau_2))))|_A(\tau_3|_A\tau_3))|_A$$

$$((((\tau_1|_A(\tau_1|_A(\tau_2|_A\tau_2))))|_A(\tau_1|_A(\tau_1|_A(\tau_2|_A\tau_2))))|_A(\tau_3|_A\tau_3)) \in Ker f \text{ ve } \tau_3 \in$$

$Ker f$ olacak şekilde $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \in A$ olsun. f homomorfizma olduğundan

$$((((f(\tau_1)|_B(f(\tau_1)|_B(f(\tau_2)|_B(f(\tau_2))))))|_B(f(\tau_1)|_B(f(\tau_1)|_B(f(\tau_2)|_B(f(\tau_2))))))|_B$$

$$(f(\tau_3)|_B f(\tau_3)))|_B((((f(\tau_1)|_B(f(\tau_1)|_B(f(\tau_2)|_B(f(\tau_2))))))|_B(f(\tau_1)|_B(f(\tau_1)|_B$$

$$(f(\tau_2)|_B(f(\tau_2))))))|_B(f(\tau_3)|_B f(\tau_3)))) = 0_B \text{ dir.}$$

O halde

$$((((f(\tau_1)|_B(f(\tau_1)|_B(f(\tau_2)|_B(f(\tau_2))))))|_B(f(\tau_1)|_B(f(\tau_1)|_B(f(\tau_2)|_B$$

$$(f(\tau_2))))))|_B(0_B|_B 0_B))|_B((((f(\tau_1)|_B(f(\tau_1)|_B(f(\tau_2)|_B(f(\tau_2))))))|_B$$

$$(f(\tau_1)|_B(f(\tau_1)|_B(f(\tau_2)|_B(f(\tau_2))))))|_B(0_B|_B 0_B)))$$

$$= (((f(\tau_1)|_B(f(\tau_1)|_B(f(\tau_2)|_B(f(\tau_2))))))|_B(f(\tau_1)|_B(f(\tau_1)|_B(f(\tau_2)|_B(f(\tau_2)))))))$$

$$= f((((\tau_1|_A(\tau_1|_A(\tau_2|_A\tau_2))))|_A(\tau_1|_A(\tau_1|_A(\tau_2|_A\tau_2))))$$

$$= 0_B$$

elde edilir. Fakat A değişmeli olduğundan

$$f(((\tau_2|_A(\tau_2|_A(\tau_1|_A\tau_1)))|_A(\tau_2|_A(\tau_2|_A(\tau_1|_A\tau_1)))) = 0_B$$

yani $((\tau_2|_A(\tau_1|_A(\tau_1|_A\tau_1)))|_A(\tau_2|_A(\tau_2|_A(\tau_1|_A\tau_1)))) \in \text{Ker}f$ elde edilir. O halde $\text{Ker}f$, A 'nın bir sub-implicative idealidir. $\square$

Tanım 4.17. $f : A \rightarrow B$, A Sheffer stroke BCK cebirinin bir dönüşümü ve μ , B 'nin bir fuzzy altkütmesi olsun. Eğer her $\tau_1 \in A$ için $\mu^f(\tau_1) = \mu(f(\tau_1))$ ise o zaman $\mu^f(\tau_1)$, μ 'nin f altındaki ters görüntüsüdür.

Teorem 4.16. A bir Sheffer stroke BCK cebiri olmak üzere f , A üzerinde tanımlı bir homomorfizma olsun. Eğer μ , B 'nin bir anti fuzzy ideali ise o zaman μ^f , A 'nın anti fuzzy idealidir.

Kanıt. μ , B 'nin bir anti fuzzy ideali olduğundan her $\tau_1 \in A$ için $\mu(0') \leq \mu(f(\tau_1))$ dir. Böylece, $\mu^f(0) = \mu(f(0)) = \mu(0') \leq \mu(f(\tau_1)) = \mu^f(\tau_1)$ dir.

$$\begin{aligned} \mu^f(\tau_1) &= \mu(f(\tau_1)) \\ &\leq \max\{\mu((f(\tau_1)|(f(\tau_2)|f(\tau_2)))|(f(\tau_1)|(f(\tau_2)|f(\tau_2)))), \mu(f(\tau_2))\} \\ &= \max\{\mu(f((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2)))) , \mu(f(\tau_2))\} \\ &= \max\{\mu^f(((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2)))) , \mu^f(\tau_2)\} \end{aligned}$$

elde edilir. O halde μ^f , A 'nın bir anti fuzzy idealidir. $\square$

Teorem 4.17. A bir Sheffer stroke BCK cebiri olmak üzere f , A üzerinde tanımlı bir endomorfizma olsun. Eğer μ^f , A 'nın anti fuzzy ideali ise o zaman μ , B 'nin bir anti fuzzy idealidir.

Kanıt. $\tau_2 \in B$ olduğunu kabul edelim. O zaman $f(\tau_1) = \tau_2$ olacak şekilde $\tau_1 \in A$ vardır. $\mu(\tau_2) = \mu(f(\tau_1)) = \mu^f(\tau_1) \geq \mu^f(0) = \mu(0')$. $\tau_1', \tau_2', \tau_3' \in B$ olsun. O zaman $f(\tau_1) = \tau_1'$, $f(\tau_2) = \tau_2'$, $f(\tau_3) = \tau_3'$ olacak şekilde $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \in A$ vardır.

Böylece

$$\begin{aligned}
\mu(\tau_1') &= \mu(f(\tau_1)) \\
&= \mu^f(\tau_1) \\
&\leq \max\{\mu^f((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2))), \mu^f(\tau_2)\} \\
&= \max\{\mu(f((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2)))), \mu(f(\tau_2))\} \\
&= \max\{\mu((f(\tau_1)|(f(\tau_2)|f(\tau_2)))|(f(\tau_1)|(f(\tau_2)|f(\tau_2)))), \mu(f(\tau_2))\} \\
&= \max\{\mu((\tau_1'|(\tau_2'|\tau_2'))|(\tau_1'|(\tau_2'|\tau_2'))), \mu(\tau_2')\}
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde μ , B 'nin anti fuzzy idealidir. $\square$

Tanım 4.18. A bir Sheffer stroke BCK-cebiri olsun. Eğer bir $\theta : A \times A \longrightarrow [0, 1]$ fuzzy dönüşümü

$$(C1) \text{ Her } \tau_1 \in A \text{ için } \theta(0, 0) = \theta(\tau_1, \tau_1),$$

$$(C2) \text{ Her } \tau_1, \tau_2 \in A \text{ için } \theta(\tau_1, \tau_2) = \theta(\tau_2, \tau_1),$$

$$(C3) \text{ Her } \tau_1, \tau_2, \tau_3 \in A \text{ için } \theta(\tau_1, \tau_3) \geq \theta(\tau_1, \tau_2) \wedge \theta(\tau_2, \tau_3),$$

$$(C4) \theta(((\tau_1|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_1|(\tau_3|\tau_3))), ((\tau_2|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_2|(\tau_3|\tau_3)))) \geq \theta(\tau_1, \tau_2) \text{ ve}$$

$$\theta(((\tau_3|(\tau_1|\tau_1))|(\tau_3|(\tau_1|\tau_1))), ((\tau_3|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_3|(\tau_2|\tau_2)))) \geq \theta(\tau_1, \tau_2)$$

koşullarını sağlıyorsa fuzzy kongrüans olarak adlandırılır.

Örnek 4.11. Örnek 4.1'de verilen D Sheffer stroke BCK cebirini göz önüne alalım. $t_0 \leq t_1 \leq t_2$ olacak şekilde $t_0, t_1, t_2 \in [0, 1]$ alalım. $\theta : D \times D \longrightarrow [0, 1]$ fuzzy bağıntısını

$$\theta(0, 0) = \theta(\tau_1, \tau_1) = \theta(\tau_2, \tau_2) = \theta(1, 1) = t_2,$$

$$\theta(\tau_1, 1) = \theta(\tau_2, 0) = \theta(1, \tau_1) = \theta(0, \tau_2) = t_1,$$

ve

$$\theta(0, 1) = \theta(1, 0) = \theta(\tau_1, \tau_2) = \theta(\tau_2, \tau_1) = \theta(\tau_1, 0) = \theta(\tau_2, 1) = \theta(0, \tau_1) =$$

$$\theta(1, \tau_2) = t_0$$

ile tanımlayalım. O halde θ , D 'nin fuzzy kongrüansıdır.

Tanım 4.19. A bir Sheffer stroke BCK-cebiri; θ , A 'nın bir fuzzy kongrüansı ve $\tau_1 \in A$ olsun. Her $\tau_2 \in A$ için θ^{τ_1} fuzzy kümesini $\theta^{\tau_1}(\tau_2) = \theta(\tau_1, \tau_2)$ ile tanımlayalım. θ^{τ_1} fuzzy kümesi A 'da τ_1 'nin bir fuzzy kongrüans sınıfı olarak

adlandırılır. $A/\theta = \{\theta^{\tau_1} | \tau_1 \in A\}$ kümesi bir fuzzy bölüm kümesi olarak adlandırılır.

Örnek 4.12. Örnek 4.11’de verilen Sheffer stroke BCK cebiri ve θ fuzzy kongrüans bağıntısını göz önüne alalım. Fuzzy bölüm kümesi $A/\theta = \{\theta^0, \theta^{\tau_1}, \theta^{\tau_2}, \theta^1\}$ dir.

Tanım 4.20. A bir Sheffer stroke BCK-cebiri olsun. Her $\tau_1, \tau_2 \in A$ için

$$(F1) \mu(0) \geq \mu(\tau_1),$$

$$(F2) \mu(\tau_1) \geq \mu(\tau_2) \wedge \mu((\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) | (\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2))),$$

koşullarını sağlayan A ’nın bir μ fuzzy kümesine fuzzy ideal denir.

Örnek 4.13. Örnek 4.1’de verilen Sheffer stroke BCK cebirini göz önüne alalım. $t_0 \leq t_1$ olacak şekilde $t_0, t_1 \in [0, 1]$ alalım. $\mu : D \rightarrow [0, 1]$ dönüşümü $\mu(0) = t_1, \mu(\tau_1) = \mu(\tau_2) = \mu(1) = t_0$ ile tanımlansın. O halde μ, D ’nin fuzzy idealidir.

Lemma 4.5. A bir Sheffer stroke BCK-cebiri ve θ, A ’da fuzzy kongrüans olsun. O zaman θ^0, A ’da fuzzy idealdir.

Kanıt. (i) θ, A ’da fuzzy kongrüans olduğundan

$\theta(0, 0) = \theta(\tau_1, \tau_1)$ ve $\theta(\tau_1, \tau_1) \geq \theta(\tau_1, \tau_2) \wedge \theta(\tau_2, \tau_1)$ dir. O zaman Tanımm 4.18 (C2)’den $\theta(0, 0) \geq \theta(\tau_1, \tau_2)$ elde edilir. O halde her $\tau_1 \in A$ için $\theta^0(0) = \theta(0, 0) \geq \theta(0, \tau_1) = \theta^0(\tau_1)$ sonucuna ulaşılır.

(ii) θ, A ’da fuzzy kongrüans olduğundan

$$\theta(0, \tau_2) \geq \theta(0, (\tau_2 | (\tau_1 | \tau_1)) | (\tau_2 | (\tau_1 | \tau_1))) \wedge \theta((\tau_2 | (\tau_1 | \tau_1)) | (\tau_2 | (\tau_1 | \tau_1)), \tau_2)$$

ve Tanım 4.18 (C4)’den

$$\theta(((\tau_2 | (\tau_1 | \tau_1)) | (\tau_2 | (\tau_1 | \tau_1))), \tau_2) = \theta(((\tau_2 | (\tau_1 | \tau_1)) | (\tau_2 | (\tau_1 | \tau_1))), ((\tau_2 | (0 | 0)) | (\tau_2 | (0 | 0)))) \geq \theta(\tau_1, 0)$$

elde edilir. $\theta(0, \tau_2) \geq \theta(0, ((\tau_2 | (\tau_1 | \tau_1)) | (\tau_2 | (\tau_1 | \tau_1)))) \wedge \theta(0, \tau_1)$ sonucuna varılır. Böylece her $\tau_1, \tau_2 \in A$ için

$$\theta^0(\tau_2) \geq \theta^0((\tau_2 | (\tau_1 | \tau_1)) | (\tau_2 | (\tau_1 | \tau_1))) \wedge \theta^0(\tau_1)$$

dir. O halde Tanım 4.20’den θ^0, A ’nın fuzzy idealidir. $\square$

Önerme 4.9. *A bir Sheffer stroke BCK-cebiri ve μ , A 'da fuzzy ideal olsun. O zaman*

- (i) *Eğer $\tau_1 \leq \tau_2$ ise o zaman $\mu(\tau_1) \geq \mu(\tau_2)$ dir,*
(ii) *$\mu((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2))) \geq \mu((\tau_1|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_1|(\tau_3|\tau_3))) \wedge \mu((\tau_3|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_3|(\tau_2|\tau_2)))$ dir.*

Kanıt. (i) μ , A 'nın fuzzy ideali ve $\tau_1 \leq \tau_2$ olacak şekilde $\tau_1, \tau_2 \in A$ olsun.

Tanım 4.20 (F1)'den

$$\begin{aligned}\mu(\tau_1) &\geq \min\{\mu((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2))), \mu(\tau_2)\} \\ &= \mu(\tau_2)\end{aligned}$$

dir.

- (ii) (F2), (S2) ve (SBCK-1)'den elde edilir. □

Lemma 4.6. *A bir Sheffer stroke BCK-cebiri ve μ , A 'da fuzzy ideal olsun. O zaman $\theta_\mu(\tau_1, \tau_2) = \mu((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2))) \wedge \mu((\tau_2|(\tau_1|\tau_1))|(\tau_2|(\tau_1|\tau_1)))$ A 'da fuzzy kongrüanstır.*

Kanıt. (C1) ve (C2) aksiyomları açıktır.

(C3): $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \in A$ olsun. Önerme 4.9 (ii)'den

$$\begin{aligned}\theta_\mu(\tau_1, \tau_3) &= \mu((\tau_1|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_1|(\tau_3|\tau_3))) \wedge \mu((\tau_3|(\tau_1|\tau_1))|(\tau_3|(\tau_1|\tau_1))) \\ &\geq (\mu((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2))) \wedge \mu((\tau_2|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_2|(\tau_3|\tau_3)))) \wedge \\ &\quad (\mu((\tau_3|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_3|(\tau_2|\tau_2))) \wedge \mu((\tau_2|(\tau_1|\tau_1))|(\tau_2|(\tau_1|\tau_1)))) \\ &= (\mu((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2))) \wedge \mu((\tau_2|(\tau_1|\tau_1))|(\tau_2|(\tau_1|\tau_1)))) \wedge \\ &\quad (\mu((\tau_2|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_2|(\tau_3|\tau_3))) \wedge \mu((\tau_3|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_3|(\tau_2|\tau_2)))) \\ &= \theta_\mu(\tau_1, \tau_2) \wedge \theta_\mu(\tau_2, \tau_3)\end{aligned}$$

elde edilir.

(C4) $\tau_1, \tau_2 \in A$ olsun. (SBCK-1) ve (S2)'den

$$\begin{aligned}&(((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2)))|(\tau_1|(\tau_3|\tau_3)))|(((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2)))|(\tau_1|(\tau_3|\tau_3)))) \\ &\leq ((\tau_3|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_3|(\tau_2|\tau_2)))\end{aligned}$$

dir. Önerme 4.1 (iii)'den

$$\begin{aligned}
& (((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2)))|(\tau_3|(\tau_2|\tau_2)))|(((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))| \\
& (\tau_1|(\tau_2|\tau_2)))|(\tau_3|(\tau_2|\tau_2)))) \\
& \leq ((\tau_1|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_1|(\tau_3|\tau_3)))
\end{aligned}$$

elde edilir. τ_1 yerine τ_2 , τ_2 yerine τ_3 ve τ_3 yerine τ_1 yazılarak

$$\begin{aligned}
& ((((\tau_2|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_2|(\tau_3|\tau_3)))|(\tau_1|(\tau_3|\tau_3)))|(((\tau_2|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_2|(\tau_3|\tau_3)))| \\
& (\tau_1|(\tau_3|\tau_3)))) \leq (\tau_2|(\tau_1|\tau_1))|(\tau_2|(\tau_1|\tau_1))
\end{aligned} \tag{4.4}$$

elde edilir. Önerme 4.9 (i) ve (S2)'den

$$\begin{aligned}
& \theta_\mu(((\tau_1|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_1|(\tau_3|\tau_3))), ((\tau_2|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_2|(\tau_3|\tau_3)))) \\
& = \mu((((\tau_1|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_1|(\tau_3|\tau_3)))|(\tau_2|(\tau_3|\tau_3)))|(((\tau_1|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_1|(\tau_3|\tau_3)))| \\
& (\tau_2|(\tau_3|\tau_3)))) \wedge \mu((((\tau_2|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_2|(\tau_3|\tau_3)))|(\tau_1|(\tau_3|\tau_3)))|(((\tau_2|(\tau_3|\tau_3))| \\
& (\tau_2|(\tau_3|\tau_3))))|(\tau_1|(\tau_3|\tau_3)))) \\
& \geq \mu((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2))) \wedge \mu((\tau_2|(\tau_1|\tau_1))|(\tau_2|(\tau_1|\tau_1))) \\
& = \theta_\mu(\tau_1, \tau_2)
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\theta_\mu(((\tau_3|(\tau_1|\tau_1))|(\tau_3|(\tau_1|\tau_1))), ((\tau_3|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_3|(\tau_2|\tau_2)))) \geq \theta_\mu(\tau_1, \tau_2)$$

dir. O zaman $\theta_\mu(\tau_1, \tau_2) = \mu((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2))) \wedge \mu((\tau_2|(\tau_1|\tau_1))|(\tau_2|(\tau_1|\tau_1)))$ A 'da fuzzy kongrüanstır. $\square$

Örnek 4.14. Örnek 4.13'de verilen $D = \{0, \tau_1, \tau_2, 1\}$ Sheffer stroke BCK cebiri ve μ fuzzy idealini göz önüne alalım. τ_1 yerine τ_1 , τ_2 yerine τ_2 ve τ_3 yerine 1 yazılarak

(C1):

$$\begin{aligned}
\theta_\mu(0, 0) &= \mu((0|(\tau_1|\tau_1))|(\tau_1|(\tau_1|\tau_1))) \wedge \mu((0|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_2|(\tau_2|\tau_2))) \\
&= \mu(0) \wedge \mu(0) \\
&= t_1 \\
&= \mu((\tau_1|(\tau_1|\tau_1))|(\tau_1|(\tau_1|\tau_1))) \wedge \mu((\tau_2|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_2|(\tau_2|\tau_2))) \\
&= \theta_\mu(\tau_1, \tau_2).
\end{aligned}$$

(C2):

$$\begin{aligned}
\theta_\mu(\tau_1, \tau_2) &= \mu((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2))) \wedge \mu((\tau_2|(\tau_1|\tau_1))|(\tau_2|(\tau_1|\tau_1))) \\
&= \mu(\tau_1) \wedge \mu(\tau_2) \\
&= t_0 \\
&= \mu(\tau_2) \wedge \mu(\tau_1) \\
&= \mu((\tau_2|(\tau_1|\tau_1))|(\tau_2|(\tau_1|\tau_1))) \wedge \mu((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2))) \\
&= \theta_\mu(\tau_2, \tau_1).
\end{aligned}$$

(C3):

$$\begin{aligned}
\theta_\mu(\tau_1, 1) &= \mu((\tau_1|(1|1))|(\tau_1|(1|1))) \wedge \mu((1|(\tau_1|\tau_1))|(1|(\tau_1|\tau_1))) \\
&= \mu(0) \wedge \mu(\tau_2) \\
&= t_0 \\
&\geq t_0 \wedge t_0 \\
&= (\mu(\tau_1) \wedge \mu(\tau_2)) \wedge (\mu(0) \wedge \mu(\tau_1)) \\
&= (\mu((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2))) \wedge \mu((\tau_2|(\tau_1|\tau_1))|(\tau_2|(\tau_1|\tau_1)))) \wedge \\
&\quad (\mu((\tau_2|(1|1))|(\tau_2|(1|1))) \wedge \mu((1|(\tau_2|\tau_2))|(1|(\tau_2|\tau_2)))) \\
&= \theta_\mu(\tau_1, \tau_2) \wedge \theta_\mu(\tau_2, 1).
\end{aligned}$$

(C4):

$$\begin{aligned}
&\theta_\mu(((\tau_1|(1|1))|(\tau_1|(1|1))), ((\tau_2|(1|1))|(\tau_2|(1|1)))) \\
&= \theta_\mu(0, 0) \\
&= \mu((0|(0|0))|(0|(0|0))) \wedge \mu((0|(0|0))|(0|(0|0))) \\
&= \mu(0) \\
&= t_1 \\
&\geq t_1 \wedge t_1 \\
&= \mu(\tau_1) \wedge \mu(\tau_2) \\
&= \mu((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2))) \wedge \mu((\tau_2|(\tau_1|\tau_1))|(\tau_2|(\tau_1|\tau_1))) \\
&= \theta_\mu(\tau_1, \tau_2)
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\theta_\mu(((1|(\tau_1|\tau_1))|(1|(\tau_1|\tau_1))), ((1|(\tau_2|\tau_2))|(1|(\tau_2|\tau_2)))) \geq \theta_\mu(\tau_1, \tau_2) \text{ dir.}$$

Teorem 4.18. *A bir Sheffer stroke BCK-cebiri olsun. A'da fuzzy ideallerin kümesi ile fuzzy kongrüansların kümesi arasında birebir ve örten fonksiyon vardır.*

Kanıt. Lemma 4.5 ve Lemma 4.6'dan A'da herhangi fuzzy kongrüans θ ve fuzzy ideali μ için $\mu = (\theta_\mu)^0$ ve $\theta = \theta_{\theta^0}$ olduğu görülür. Bu yüzden A'da fuzzy ideallerin kümesi ile fuzzy kongrüansların kümesi arasında birebir ve örten fonksiyon vardır. $\square$

μ , A'da bir fuzzy ideal olsun. μ^{τ_1} her $\tau_1 \in A$ için A'da τ_1 'in fuzzy kongrüans sınıfını ve A/μ fuzzy bölüm grubunu gösterebilir. Fuzzy ideal tarafından üretilen kongrüans bağıntısını tanımlayalım.

Önerme 4.10. *A bir Sheffer stroke BCK-cebiri ve μ , A'da fuzzy ideal olsun. Her $\tau_1, \tau_2 \in A$ için $\mu^{\tau_1} = \mu^{\tau_2}$ dir eğer ve yalnız eğer $\mu((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2))) = ((\tau_2|(\tau_1|\tau_1))|(\tau_2|(\tau_1|\tau_1))) = \mu(0)$ 'dır.*

Kanıt. Her $\tau_1, \tau_2 \in A$ için $\mu^{\tau_1} = \mu^{\tau_2}$ olsun. $u, v \in A$ için

$$\begin{aligned} \mu^u(v) &= \theta_\mu^u(v) \\ &= \theta_\mu(u, v) \\ &= \mu((u|(v|v))|(u|(v|v))) \wedge \mu((v|(u|u))|(v|(u|u))) \end{aligned}$$

elde edilir. $\mu^{\tau_1} = \mu^{\tau_2}$ olduğundan her $\tau_1 \in A$ için $\mu^{\tau_1}(\tau_1) = \mu^{\tau_2}(\tau_1)$ sonucuna varılır.

$$\begin{aligned} &\mu((\tau_1|(\tau_1|\tau_1))|(\tau_1|(\tau_1|\tau_1))) \wedge \mu((\tau_1|(\tau_1|\tau_1))|(\tau_1|(\tau_1|\tau_1))) \\ &= \mu((\tau_2|(\tau_1|\tau_1))|(\tau_2|(\tau_1|\tau_1))) \wedge \mu((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2))) \end{aligned}$$

ve Tanım 4.20 (F1)'den

$$\mu((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2))) = \mu((\tau_2|(\tau_1|\tau_1))|(\tau_2|(\tau_1|\tau_1))) = \mu(0)$$

elde edilir.

Şimdi, $\mu((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2))) = \mu((\tau_2|(\tau_1|\tau_1))|(\tau_2|(\tau_1|\tau_1))) = \mu(0)$ olsun. Önerme 4.9 (ii)'den her $\tau_3 \in A$ için

$$\begin{aligned} &\mu((\tau_1|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_1|(\tau_3|\tau_3))) \geq \mu((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2))) \wedge \mu((\tau_2|(\tau_3|\tau_3))| \\ &(\tau_2|(\tau_3|\tau_3))) \text{ ve} \end{aligned}$$

$\mu((\tau_2|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_2|(\tau_3|\tau_3))) \geq \mu((\tau_2|(\tau_1|\tau_1))|(\tau_2|(\tau_1|\tau_1))) \wedge \mu((\tau_1|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_1|(\tau_3|\tau_3)))$ elde edilir. Hipotezden

$$\mu((\tau_1|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_1|(\tau_3|\tau_3))) \geq \mu((\tau_2|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_2|(\tau_3|\tau_3)))$$

ve

$$\mu((\tau_2|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_2|(\tau_3|\tau_3))) \geq \mu((\tau_1|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_1|(\tau_3|\tau_3)))$$

ve böylece

$$\mu((\tau_1|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_1|(\tau_3|\tau_3))) = \mu((\tau_2|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_2|(\tau_3|\tau_3)))$$

dir. Benzer şekilde $\mu((\tau_3|(\tau_1|\tau_1))|(\tau_3|(\tau_1|\tau_1))) = \mu((\tau_3|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_3|(\tau_2|\tau_2)))$ dir.

Her $\tau_3 \in A$ için

$$\begin{aligned} \mu^{\tau_1}(\tau_3) &= \mu((\tau_1|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_1|(\tau_3|\tau_3))) \wedge \mu((\tau_3|(\tau_1|\tau_1))|(\tau_3|(\tau_1|\tau_1))) \\ &= \mu((\tau_2|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_2|(\tau_3|\tau_3))) \wedge \mu((\tau_3|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_3|(\tau_2|\tau_2))) \\ &= \mu^{\tau_2}(\tau_3) \end{aligned}$$

sonucuna varılır. Böylece $\mu^{\tau_1} = \mu^{\tau_2}$ elde edilir. $\square$

Önerme 4.10'dan μ , A 'da fuzzy ideal olmak üzere A üzerinde $\sim_\mu$ ikili bağıntısını $\tau_1 \sim_\mu \tau_2 \Leftrightarrow \mu((\tau_2|(\tau_1|\tau_1))|(\tau_2|(\tau_1|\tau_1))) = \mu((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2))) = \mu(0)$ ile tanımlayalım.

Lemma 4.7. *A bir Sheffer stroke BCK-cebiri ve μ , A 'da bir fuzzy ideal olsun. $\sim_\mu$, A üzerinde denklik bağıntısıdır.*

Kanıt. $\sim_\mu$ 'nın yansıyan ve simetrik olduğu açıktır. Her $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \in A$ için $\tau_1 \sim_\mu \tau_2$ ve $\tau_2 \sim_\mu \tau_3$ olsun. O zaman $\mu((\tau_2|(\tau_1|\tau_1))|(\tau_2|(\tau_1|\tau_1))) = \mu((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2))) = \mu((\tau_3|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_3|(\tau_2|\tau_2))) = \mu((\tau_2|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_2|(\tau_3|\tau_3))) = \mu(0)$ elde edilir. (4.4) denkleminde

$$\begin{aligned} &(((\tau_1|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_1|(\tau_3|\tau_3)))|(\tau_2|(\tau_3|\tau_3)))|(((\tau_1|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_1|(\tau_3|\tau_3)))|(\tau_2|(\tau_3|\tau_3)))) \\ &\leq ((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2))) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
& (((\tau_3|(\tau_1|\tau_1))|(\tau_3|(\tau_1|\tau_1)))|(\tau_2|(\tau_1|\tau_1)))|(((\tau_3|(\tau_1|\tau_1))|(\tau_3|(\tau_1|\tau_1)))| \\
& (\tau_2|(\tau_1|\tau_1))) \\
& \leq ((\tau_3|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_3|(\tau_2|\tau_2)))
\end{aligned}$$

sonucuna varılır. Tanım 4.20, (S2), Önerme 4.9 (i) kullanılarak

$$\begin{aligned}
\mu((\tau_3|(\tau_1|\tau_1))|(\tau_3|(\tau_1|\tau_1))) & \geq \mu((\tau_2|(\tau_1|\tau_1))|(\tau_2|(\tau_1|\tau_1))) \wedge \mu((((\tau_3|(\tau_1|\tau_1))| \\
& (\tau_3|(\tau_1|\tau_1)))|(\tau_2|(\tau_1|\tau_1)))|(((\tau_3|(\tau_1|\tau_1))| \\
& (\tau_3|(\tau_1|\tau_1)))|(\tau_2|(\tau_1|\tau_1)))) \\
& \geq \mu((\tau_2|(\tau_1|\tau_1))|(\tau_2|(\tau_1|\tau_1))) \wedge \mu((\tau_3|(\tau_2|\tau_2))| \\
& (\tau_3|(\tau_2|\tau_2))) \\
& = \mu(0)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\mu((\tau_1|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_1|(\tau_3|\tau_3))) & \geq \mu((\tau_2|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_2|(\tau_3|\tau_3))) \wedge \mu((((\tau_1|(\tau_3|\tau_3))| \\
& (\tau_1|(\tau_3|\tau_3)))|(\tau_2|(\tau_3|\tau_3)))|(((\tau_1|(\tau_3|\tau_3))| \\
& (\tau_1|(\tau_3|\tau_3)))|(\tau_2|(\tau_3|\tau_3)))) \\
& \geq \mu((\tau_2|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_2|(\tau_3|\tau_3))) \wedge \mu((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))| \\
& (\tau_1|(\tau_2|\tau_2))) \\
& = \mu(0)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\mu((\tau_3|(\tau_1|\tau_1))|(\tau_3|(\tau_1|\tau_1))) = \mu((\tau_1|(\tau_3|\tau_3))|(\tau_1|(\tau_3|\tau_3))) = \mu(0)$ sonucuna ulaşılır. Yani, $\tau_1 \sim_\mu \tau_3$ olur ve $\sim_\mu$, A üzerinde bir denklik bağıntısıdır. $\square$

Örnek 4.15. Örnek 4.1’de verilen Sheffer stroke BCK cebirini göz önüne alalım. $t_0 \leq t_1$ olacak şekilde $t_0, t_1 \in [0, 1]$ için $\mu(0) = \mu(\tau_1) = t_1$, $\mu(\tau_2) = \mu(1) = t_0$ ile tanımlı D ’nin bir fuzzy idealini düşünelim. O halde

$$\sim_\mu = \{(0, 0), (\tau_1, \tau_1), (\tau_2, \tau_2), (1, 1), (0, \tau_1), (\tau_1, 0), (\tau_2, 1), (1, \tau_2)\}$$

D üzerinde denklik bağıntısıdır.

Lemma 4.8. A bir Sheffer stroke BCK-cebiri ve μ , A ’da bir fuzzy ideal olsun.

$\sim_\mu$, A üzerinde kongrüans bağıntısıdır.

Kanıt. Lemma 4.7'den her $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \in A$ için eğer $\tau_1 \sim_\mu \tau_2$ ise o zaman $((\tau_3|(\tau_1|\tau_1))|(\tau_3|(\tau_1|\tau_1))) \sim_\mu ((\tau_3|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_3|(\tau_2|\tau_2)))$ olduğunu göstermemiz yeterlidir. $\tau_1 \sim_\mu \tau_2$ olsun. O zaman

$$\mu((\tau_2|(\tau_1|\tau_1))|(\tau_2|(\tau_1|\tau_1))) = \mu((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2))) = \mu(0)$$

elde edilir. (SBCK-1)'den

$$\begin{aligned} & ((((\tau_3|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_3|(\tau_2|\tau_2)))|(\tau_3|(\tau_1|\tau_1)))|(((\tau_3|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_3|(\tau_2|\tau_2)))| \\ & (\tau_3|(\tau_1|\tau_1)))) \\ & \leq ((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2))) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} & ((((\tau_3|(\tau_1|\tau_1))|(\tau_3|(\tau_1|\tau_1)))|(\tau_3|(\tau_2|\tau_2)))|(((\tau_3|(\tau_1|\tau_1))|(\tau_3|(\tau_1|\tau_1)))| \\ & (\tau_3|(\tau_2|\tau_2)))) \\ & \leq ((\tau_2|(\tau_1|\tau_1))|(\tau_2|(\tau_1|\tau_1))) \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Önerme 4.9 (i)'den

$$\begin{aligned} \mu(0) &= \mu((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2))) \\ &\leq \mu((((\tau_3|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_3|(\tau_2|\tau_2)))|(\tau_3|(\tau_1|\tau_1)))|(((\tau_3|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_3|(\tau_2|\tau_2)))| \\ & (\tau_3|(\tau_1|\tau_1)))) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \mu(0) &= \mu((\tau_2|(\tau_1|\tau_1))|(\tau_2|(\tau_1|\tau_1))) \\ &\leq \mu((((\tau_3|(\tau_1|\tau_1))|(\tau_3|(\tau_1|\tau_1)))|(\tau_3|(\tau_2|\tau_2)))|(((\tau_3|(\tau_1|\tau_1))|(\tau_3|(\tau_1|\tau_1)))| \\ & (\tau_3|(\tau_2|\tau_2)))) \end{aligned}$$

dir. Böylece

$$\begin{aligned} & \mu((((\tau_3|(\tau_1|\tau_1))|(\tau_3|(\tau_1|\tau_1)))|(\tau_3|(\tau_2|\tau_2)))|(((\tau_3|(\tau_1|\tau_1))|(\tau_3|(\tau_1|\tau_1)))| \\ & (\tau_3|(\tau_2|\tau_2)))) \\ &= \mu((((\tau_3|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_3|(\tau_2|\tau_2)))|(\tau_3|(\tau_1|\tau_1)))|(((\tau_3|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_3|(\tau_2|\tau_2)))| \\ & (\tau_3|(\tau_1|\tau_1)))) \\ &= \mu(0) \end{aligned}$$

elde edilir. O halde $((\tau_3|(\tau_1|\tau_1))|(\tau_3|(\tau_1|\tau_1))) \sim_\mu ((\tau_3|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_3|(\tau_2|\tau_2)))$ dir.

□

Örnek 4.16. Örnek 4.15 de verilen $\sim_\mu$ denklik bağıntısını göz önüne alalım. O halde $\sim_\mu$, D üzerinde kongrüans bağıntısıdır.

Teorem 4.19. A bir Sheffer stroke BCK-cebiri, μ , A 'da bir fuzzy ideal ve $\sim$, A üzerinde μ ile tanımlanmış kongrüans bağıntısı olsun. O zaman her $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \in A$ için $A/\sim = \{[\tau_1]_\sim : \tau_1 \in A\}$ bölüm grubu ve $[\tau_1]_\sim |_\sim [\tau_2]_\sim = [\tau_1 | \tau_2]_\sim$ olacak şekilde $A/\mu = (A/\sim, |_\sim)$ bir Sheffer stroke BCK cebiridir.

Kanıt. Her $\mu^{\tau_1}, \mu^{\tau_2} \in A/\mu$ için

$$(\mu^{\tau_1} | (\mu^{\tau_2} | \mu^{\tau_2})) | (\mu^{\tau_1} | (\mu^{\tau_2} | \mu^{\tau_2})) = \mu^{(\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) | (\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2))}$$

ile tanımlayalım. $\mu^{\tau_1} = \mu^x$, $\mu^{\tau_2} = \mu^y$ olsun. O zaman $\tau_1 \sim_\mu x$ ve $\tau_2 \sim_\mu y$ olur.

Lemma 4.8'den

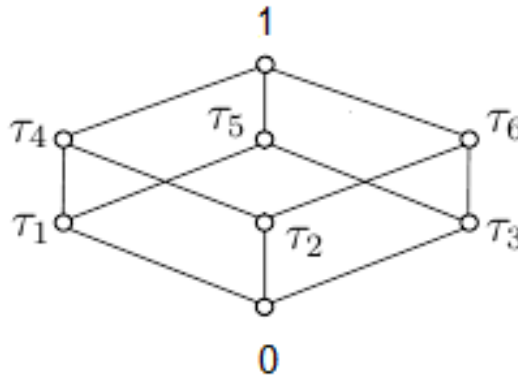
$$(\tau_1 | (x | x)) | (\tau_1 | (x | x)) \sim_\mu (\tau_2 | (y | y)) | (\tau_2 | (y | y))$$

ve böylece

$$\mu^{(\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2)) | (\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2))} = \mu^{(x | (y | y)) | (x | (y | y))}$$

elde ederiz. $A/\mu = (A/\mu, |_\sim, \mu^0)$ 'nin Sheffer stroke BCK cebiri olduğu görülür. $\square$

Örnek 4.17. $A = \{0, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5, \tau_6, 1\}$, Şekil 4.3'de bulunan Hasse diyagramına sahip bir küme ve A üzerindeki $|$ işlemi Tablo 4.4'deki işlem tablosuna sahip bir ikili işlem olsun.



Şekil 4.3: A kümesinin Hasse diyagramı

$ $	0	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4	τ_5	τ_6	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
τ_1	1	τ_6	1	1	τ_6	τ_6	1	τ_6
τ_2	1	1	τ_5	1	τ_5	1	τ_5	τ_5
τ_3	1	1	1	τ_4	1	τ_4	τ_4	τ_4
τ_4	1	τ_6	τ_5	1	τ_3	τ_6	τ_5	τ_3
τ_5	1	τ_6	1	τ_4	τ_6	τ_2	τ_4	τ_2
τ_6	1	1	τ_5	τ_4	τ_5	τ_4	τ_1	τ_1
1	1	τ_6	τ_5	τ_4	τ_3	τ_2	τ_1	0

Tablo 4.4: A üzerindeki $|$ Sheffer stroke işleminin tablosu

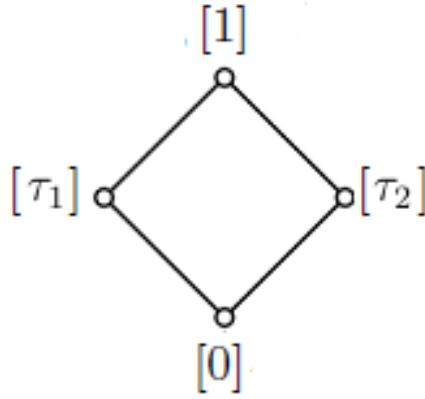
O halde $(A, |, 0)$ yapısı Sheffer stroke BCK cebiridir. $t_0, t_1 \in [0, 1]$ olmak üzere $t_0 \leq t_1$ olacak şekilde μ fuzzy idealini $\mu(0) = \mu(\tau_3) = t_1$ ve

$$\mu(\tau_1) = \mu(\tau_2) = \mu(\tau_4) = \mu(\tau_5) = \mu(\tau_6) = \mu(1) = t_0$$

ile tanımlayalım.

$$\begin{aligned} \sim_\mu = \{ & (0, 0), (\tau_1, \tau_1), (\tau_2, \tau_2), (\tau_3, \tau_3), (\tau_4, \tau_4), (\tau_5, \tau_5), (\tau_6, \tau_6), (1, 1), (0, \tau_3), \\ & (\tau_4, 1), (\tau_3, 0), (1, \tau_4), (\tau_6, \tau_2), (\tau_2, \tau_6), (\tau_1, \tau_5), (\tau_5, \tau_1) \} \end{aligned}$$

A üzerinde μ ile tanımlanmış bir kongrüans bağıntısı olsun. A/μ üzerindeki $|\sim$ işlemi Tablo 4.5'deki işlem tablosuna sahip bir ikili işlem olsun. O halde $A/\mu = (A/\sim, |\sim)$, $A/\sim = \{[0]_\sim, [\tau_1]_\sim, [\tau_2]_\sim, [1]_\sim\}$ bölüm grubu ve aşağıdaki Hasse diyagramına sahip bir Sheffer stroke BCK cebiridir.

Şekil 4.4: A kümesinin Hasse diyagramı

$ \sim$	$[0]\sim$	$[\tau_1]\sim$	$[\tau_2]\sim$	$[1]\sim$
$[0]\sim$	$[1]\sim$	$[1]\sim$	$[1]\sim$	$[1]\sim$
$[\tau_1]\sim$	$[1]\sim$	$[\tau_2]\sim$	$[1]\sim$	$[\tau_2]\sim$
$[\tau_2]\sim$	$[1]\sim$	$[1]\sim$	$[\tau_1]\sim$	$[\tau_1]\sim$
$[1]\sim$	$[1]\sim$	$[\tau_2]\sim$	$[\tau_1]\sim$	$[0]\sim$

Tablo 4.5: A üzerindeki | Sheffer stroke işleminin tablosu

4.3 Anti Fuzzy İdeallerin Kartezyen Çarpımları

Bu bölümde Sheffer stroke BCK cebirlerinin kartezyen çarpımları ve anti fuzzy bağıntıları tanımlanarak anti fuzzy idealleri ile aralarındaki ilişkiler incelenmiştir.

Tanım 4.21. A bir Sheffer stroke BCK-cebiri ve λ ve μ , A kümesinin fuzzy altkümeleri olsun. Her $\tau_1, \tau_2 \in A$ için kartezyen çarpım $\lambda \times \mu : A \times A \rightarrow [0, 1]$, $(\lambda \times \mu)(\tau_1, \tau_2) = \max\{\lambda(\tau_1), \mu(\tau_2)\}$ ile tanımlıdır.

Tanım 4.22. A bir Sheffer stroke BCK-cebiri, μ ; A kümesi üzerinde fuzzy bağıntısı ve β ; A 'nın fuzzy altkümesi olsun. Her $\tau_1, \tau_2 \in A$ için eğer $\mu(\tau_1, \tau_2) \geq \max\{\beta(\tau_1), \beta(\tau_2)\}$ ise μ 'ye β üzerinde bir anti fuzzy bağıntısı denir.

Tanım 4.23. A bir Sheffer stroke BCK-cebiri ve β , A kümesi üzerinde bir fuzzy küme olsun. β üzerinde anti fuzzy bağıntısı olan A üzerinde en kuvvetli anti fuzzy bağıntısı μ_β , $\mu_\beta(\tau_1, \tau_2) = \max\{\beta(\tau_1), \beta(\tau_2)\}$ ile tanımlanır.

Örnek 4.18. Örnek 4.1'de verilen Sheffer stroke BCK cebirini göz önüne alalım. $t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3$ olacak şekilde $t_0, t_1, t_2, t_3 \in [0, 1]$ için

$$\beta(0) = t_3, \beta(\tau_1) = t_2, \beta(\tau_2) = t_1, \beta(1) = t_0$$

ile tanımlı D 'nin bir fuzzy alt kümesini düşünelim. O halde

$$\mu_\beta(\tau_1, \tau_2) = \begin{cases} t_3, & \tau_1 = 0 \text{ ya da } \tau_2 = 0 \text{ ise} \\ \beta(\tau_1), & \tau_1 = \tau_2 \text{ ise} \\ \beta(\tau_1), & \tau_1 = 1 \text{ ya da } \tau_2 = 1 \text{ ise} \\ t_2, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

D üzerinde en kuvvetli anti fuzzy bağıntısıdır.

Önerme 4.11. *A bir Sheffer stroke BCK-cebiri, β bir fuzzy küme ve μ_β , A üzerinde en kuvvetli anti fuzzy bağıntısı olsun. Eğer μ_β , $A \times A$ 'nın anti fuzzy sub-implicative ideali ise o zaman her $\tau_1 \in A$ için $\beta(\tau_1) \geq \beta(0)$ dir.*

Kanıt. $\max\{\beta(\tau_1), \beta(\tau_1)\} = \mu_\beta(\tau_1, \tau_1) \geq \mu_\beta(0, 0) = \max\{\beta(0), \beta(0)\}$, $(0, 0) \in A \times A$. Her $\tau_1 \in A$ için $\beta(\tau_1) \geq \beta(0)$ dir. $\square$

Teorem 4.20. *A bir Sheffer stroke BCK-cebiri, β bir fuzzy küme ve μ_β , A üzerinde en kuvvetli anti fuzzy bağıntısı olsun. O halde β , A 'nın anti fuzzy idealidir eğer ve yalnız eğer μ_β , $A \times A$ 'nın anti fuzzy idealidir.*

Kanıt. $A \times A$, Sheffer stroke BCK-cebiridir. β , A 'nın anti fuzzy ideali olsun. O zaman $\tau_1, \tau_2 \in A$ için $\mu_\beta(0, 0) = \max\{\beta(0), \beta(0)\} \leq \max\{\beta(\tau_1), \beta(\tau_2)\} = \mu_\beta(\tau_1, \tau_2)$ dir. Her $\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{21}, \tau_{22} \in A$

$$\begin{aligned}
& \max\{\mu_\beta(((\tau_{11}, \tau_{12})|_{A \times A}((\tau_{21}, \tau_{22})|_{A \times A}(\tau_{21}, \tau_{22})))|_{A \times A}((\tau_{11}, \tau_{12})|_{A \times A} \\
& ((\tau_{21}, \tau_{22})|_{A \times A}(\tau_{21}, \tau_{22}))))), \mu_\beta(\tau_{21}, \tau_{22})\} \\
& = \max\{\mu_\beta(((\tau_{11}|(\tau_{21}|\tau_{21}))|(\tau_{11}|(\tau_{21}|\tau_{21}))), ((\tau_{12}|(\tau_{22}|\tau_{22}))|(\tau_{12}|(\tau_{22}|\tau_{22})))), \\
& \mu_\beta(\tau_{21}, \tau_{22})\} \\
& = \max\{\max\{\beta((\tau_{11}|(\tau_{21}|\tau_{21}))|(\tau_{11}|(\tau_{21}|\tau_{21}))), \beta((\tau_{12}|(\tau_{22}|\tau_{22}))|(\tau_{12}|(\tau_{22}|\tau_{22})))\}, \\
& \max\{\beta(\tau_{21}), \beta(\tau_{22})\}\} \\
& = \max\{\max\{\beta((\tau_{11}|(\tau_{21}|\tau_{21}))|(\tau_{11}|(\tau_{21}|\tau_{21}))), \beta(\tau_{21})\}, \max\{((\tau_{12}|(\tau_{22}|\tau_{22}))| \\
& (\tau_{12}|(\tau_{22}|\tau_{22}))), \beta(\tau_{22})\}\} \\
& \geq \max\{\beta(\tau_{11}), \beta(\tau_{12})\} \\
& = \mu_\beta(\tau_{11}, \tau_{12})
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde μ_β , $A \times A$ 'nın anti fuzzy idealidir.

Şimdi, μ_β , $A \times A$ 'nın anti fuzzy ideali olsun. O zaman

$$\max\{\beta(0), \beta(0)\} = \mu_\beta(0, 0) \leq \mu_\beta(\tau_1, \tau_2) = \max\{\beta(\tau_1), \beta(\tau_2)\}$$

elde edilir. O halde $\beta(0) \leq \beta(\tau_1)$ dir.

Her $\tau_1, \tau_2 \in A$ için

$$\begin{aligned}
& \max\{\beta(\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2)), \beta(\tau_2)\} \\
& = \max\{\max\{\beta((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2))), \beta((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2)))\}, \\
& \max\{\beta(\tau_2), \beta(\tau_2)\}\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \max\{\mu_\beta((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2))), ((\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2))), \mu_\beta(\tau_2, \tau_2)\} \\
&= \max\{\mu_\beta(((\tau_1, \tau_1)|_{A \times A}((\tau_2, \tau_2)|_{A \times A}(\tau_2, \tau_2)))|_{A \times A}((\tau_1, \tau_1)|_{A \times A}((\tau_2, \tau_2)|_{A \times A}(\tau_2, \tau_2)))), \mu_\beta(\tau_2, \tau_2)\} \\
&\geq \mu_\beta(\tau_1, \tau_1) \\
&= \max\{\beta(\tau_1), \beta(\tau_1)\} \\
&= \beta(\tau_1)
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde β , A 'nın anti fuzzy idealidir. $\square$

Teorem 4.21. *A bir Sheffer stroke BCK-cebiri olsun. Eğer λ ve μ , A 'nın anti fuzzy idealleri ise o zaman $\lambda \times \mu$, $A \times A$ 'nın anti fuzzy idealidir.*

Kanıt. $\tau_1, \tau_1' \in A$ olsun.

$$(\lambda \times \mu)(0, 0) = \max\{\lambda(0), \mu(0)\} \leq \max\{\lambda(\tau_1), \mu(\tau_1)\} = (\lambda \times \mu)(\tau_1, \tau_1')$$

dir. Her $(\tau_1, \tau_1'), (\tau_2, \tau_2') \in A \times A$ için

$$\begin{aligned}
(\lambda \times \mu)(\tau_1, \tau_1') &= \max\{\lambda(\tau_1), \mu(\tau_1')\} \\
&\leq \max\{\max\{\lambda(\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2)), \lambda(\tau_2)\}, \\
&\quad \max\{\mu(\tau_1'|(\tau_2'|\tau_2'))|(\tau_1'|(\tau_2'|\tau_2')), \mu(\tau_2')\}\} \\
&= \max\{\max\{\lambda(\tau_1|(\tau_2|\tau_2))|(\tau_1|(\tau_2|\tau_2)), \mu(\tau_1'|(\tau_2'|\tau_2')) \\
&\quad |(\tau_1'|(\tau_2'|\tau_2'))\}, \max\{\lambda(\tau_2), \mu(\tau_2')\}\} \\
&= \max\{(\lambda \times \mu)((\tau_1, \tau_1')|((\tau_2, \tau_2')|(\tau_2, \tau_2')))|((\tau_1, \tau_1')| \\
&\quad ((\tau_2, \tau_2')|(\tau_2, \tau_2'))), (\lambda \times \mu)(\tau_2, \tau_2')\}
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde $\lambda \times \mu$, $A \times A$ 'nın anti fuzzy idealidir. $\square$

Teorem 4.22. *A bir Sheffer stroke BCK-cebiri olsun. Eğer λ ve μ , A 'nın anti fuzzy sub-implicative idealleri ise o zaman $\lambda \times \mu$, $A \times A$ 'nın anti fuzzy sub-implicative idealidir.*

Kanıt. $\tau_1, \tau_2 \in A$ olsun.

$$(\lambda \times \mu)(0, 0) = \max\{\lambda(0), \mu(0)\} \leq \max\{\lambda(\tau_1), \mu(\tau_2)\} = (\lambda \times \mu)(\tau_1, \tau_2)$$

dir. Her $(\tau_{11}, \tau_{12}), (\tau_{21}, \tau_{22}), (\tau_{31}, \tau_{32}) \in A \times A$ için

$$\begin{aligned}
&(\lambda \times \mu)((\tau_{21}, \tau_{22})|((\tau_{21}, \tau_{22})|((\tau_{11}, \tau_{12})|(\tau_{11}, \tau_{12}))))|((\tau_{21}, \tau_{22})|((\tau_{21}, \tau_{22})| \\
&((\tau_{11}, \tau_{12})|(\tau_{11}, \tau_{12}))))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\lambda \times \mu)((\tau_{21}|(\tau_{21}|(\tau_{11}|\tau_{11})))|(\tau_{21}|(\tau_{21}|(\tau_{11}|\tau_{11})))), ((\tau_{22}|(\tau_{22}|(\tau_{12}|\tau_{12})))| \\
&(\tau_{22}|(\tau_{22}|(\tau_{12}|\tau_{12})))) \\
&= \max\{\lambda((\tau_{21}|(\tau_{21}|(\tau_{11}|\tau_{11})))|(\tau_{21}|(\tau_{21}|(\tau_{11}|\tau_{11})))), \mu(\tau_{22}|(\tau_{22}|(\tau_{12}|\tau_{12})))|(\tau_{22}| \\
&(\tau_{22}|(\tau_{12}|\tau_{12}))))\} \\
&\leq \max\{\max\{\lambda(((\tau_{11}|(\tau_{11}|(\tau_{21}|\tau_{21})))|(\tau_{11}|(\tau_{11}|(\tau_{21}|\tau_{21}))))|(\tau_{31}|\tau_{31})))| \\
&(((\tau_{11}|(\tau_{11}|(\tau_{21}|\tau_{21})))|(\tau_{11}|(\tau_{11}|(\tau_{21}|\tau_{21}))))|(\tau_{31}|\tau_{31}))), \mu(((\tau_{12}|(\tau_{12}|(\tau_{22}|\tau_{22})))|(\tau_{12}|(\tau_{12}|(\tau_{22}|\tau_{22}))))|(\tau_{32}|\tau_{32})))| \\
&(((\tau_{12}|(\tau_{12}|(\tau_{22}|\tau_{22})))|(\tau_{12}|(\tau_{12}|(\tau_{22}|\tau_{22}))))|(\tau_{32}|\tau_{32}))), \max\{\lambda(\tau_{31}), \mu(\tau_{32})\}\} \\
&= \max\{(\lambda \times \mu)(((\tau_{11}|(\tau_{11}|(\tau_{21}|\tau_{21})))|(\tau_{11}|(\tau_{11}|(\tau_{21}|\tau_{21}))))|(\tau_{31}|\tau_{31})))|(((\tau_{11}| \\
&(\tau_{11}|(\tau_{21}|\tau_{21})))|(\tau_{11}|(\tau_{11}|(\tau_{21}|\tau_{21}))))|(\tau_{31}|\tau_{31}))), (((\tau_{12}|(\tau_{12}|(\tau_{22}|\tau_{22})))| \\
&(\tau_{12}|(\tau_{12}|(\tau_{22}|\tau_{22}))))|(\tau_{32}|\tau_{32})))|(((\tau_{12}|(\tau_{12}|(\tau_{22}|\tau_{22})))|(\tau_{12}|(\tau_{12}|(\tau_{22}|\tau_{22}))))| \\
&(\tau_{32}|\tau_{32}))), (\lambda \times \mu)(\tau_{31}, \tau_{32})\} \\
&= \max\{(\lambda \times \mu)(((\tau_{11}, \tau_{12})|((\tau_{11}, \tau_{12})|(\tau_{21}, \tau_{22})|(\tau_{21}, \tau_{22})))|((\tau_{11}, \tau_{12})| \\
&((\tau_{11}, \tau_{12})|(\tau_{21}, \tau_{22})|(\tau_{21}, \tau_{22}))))|(\tau_{31}, \tau_{32}))| (((\tau_{11}, \tau_{12})|((\tau_{11}, \tau_{12})|(\tau_{21}, \tau_{22})| \\
&(\tau_{21}, \tau_{22})))|((\tau_{11}, \tau_{12})|((\tau_{11}, \tau_{12})|(\tau_{21}, \tau_{22})|(\tau_{21}, \tau_{22}))))|(\tau_{31}, \tau_{32}))), \\
&(\lambda \times \mu)(\tau_{31}, \tau_{32})\}
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde $\lambda \times \mu$, $A \times A$ 'nın anti fuzzy sub-implicative idealidir. $\square$

Teorem 4.23. *A bir Sheffer stroke BCK-cebiri olsun. λ ve μ ; $\lambda \times \mu$, $A \times A$ 'nın bir anti fuzzy ideali olacak şekilde A 'nın fuzzy altkümeleri olsun. O zaman*

- (i) *Her $\tau_1 \in A$ için, ya $\lambda(\tau_1) \geq \lambda(0)$ ya da $\mu(\tau_1) \geq \mu(0)$ dir,*
- (ii) *Her $\tau_1 \in A$ için, eğer $\lambda(\tau_1) \geq \lambda(0)$ ise o zaman ya $\lambda(\tau_1) \geq \mu(0)$ ya da $\mu(\tau_1) \geq \mu(0)$ dir,*
- (iii) *Her $\tau_1 \in A$ için, $\mu(\tau_1) \geq \mu(0)$ ise o zaman ya $\lambda(\tau_1) \geq \lambda(0)$ ya da $\mu(\tau_1) \geq \lambda(0)$ dir.*

Kanıt. (i) Bazı $\tau_1, \tau_2 \in A$ için $\lambda(\tau_1) \leq \lambda(0)$ ve $\mu(\tau_2) \leq \mu(0)$ olsun.

$$(\lambda \times \mu)(\tau_1, \tau_2) = \max\{\lambda(\tau_1), \mu(\tau_2)\} \leq \max\{\lambda(0), \mu(0)\} = (\lambda \times \mu)(0, 0)$$

dir. Bu bir çelişkidir. O halde her $\tau_1 \in A$ için ya $\lambda(\tau_1) \geq \lambda(0)$ ya da $\mu(\tau_1) \geq \mu(0)$ dir.

(ii) $\lambda(\tau_1) \leq \mu(0)$ ve $\mu(\tau_2) \leq \mu(0)$ olacak şekilde $\tau_1, \tau_2 \in A$ var olsun. O zaman $(\lambda \times \mu)(0, 0) = \max\{\lambda(0), \mu(0)\} = \mu(0)$ elde edilir.

$$(\lambda \times \mu)(\tau_1, \tau_2) = \max\{\lambda(\tau_1), \mu(\tau_2)\} \leq \mu(0) = (\lambda \times \mu)(0, 0)$$

olur ve bu bir gelişkidir.

(iii) (ii)'ye benzer şekilde ispatlanabilir. $\square$

Teorem 4.24. *A bir Sheffer stroke BCK-cebiri olsun. λ ve μ ; $\lambda \times \mu$, $A \times A$ 'nın bir anti fuzzy ideali olacak şekilde A 'nın fuzzy altkümeleri olsun. O zaman ya λ ya da μ , A 'nın anti fuzzy idealidir.*

Kanıt. Teorem 4.23 (i)'den her $\tau_1 \in A$ için $\mu(\tau_1) \geq \mu(0)$ kabul edelim. (iii)'den ya $\lambda(\tau_1) \geq \lambda(0)$ ya da $\mu(\tau_1) \geq \lambda(0)$ dir. Eğer her $\tau_1 \in A$ için $\mu(\tau_1) \geq \lambda(0)$ ise o zaman $(\lambda \times \mu)(0, \tau_1) = \max\{\lambda(0), \mu(\tau_1)\} = \mu(\tau_1)$ dir. $(\tau_1, \tau_1'), (\tau_2, \tau_2') \in A \times A$ olduğunu kabul edelim. $\lambda \times \mu$, $A \times A$ 'nın bir anti fuzzy ideali olduğundan

$$\begin{aligned} (\lambda \times \mu)(\tau_1, \tau_1') &\leq \max\{(\lambda \times \mu)((\tau_1, \tau_1') | ((\tau_2, \tau_2') | (\tau_2, \tau_2')) | ((\tau_1, \tau_1') | \\ &\quad ((\tau_2, \tau_2') | (\tau_2, \tau_2')))), (\lambda \times \mu)(\tau_2, \tau_2')\} \\ &= \max\{(\lambda \times \mu)((\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2')) | (\tau_1 | (\tau_2 | \tau_2'))), (\tau_1' | (\tau_2' | \tau_2')) | \\ &\quad (\tau_1' | (\tau_2' | \tau_2'))), (\lambda \times \mu)(\tau_2, \tau_2')\}. \end{aligned}$$

elde edilir. τ_1 ve τ_2 yerine 0 yazılırsa,

$$\begin{aligned} \mu(\tau_1') &= (\lambda \times \mu)(0, \tau_1') \\ &\leq \max\{(\lambda \times \mu)(0, (\tau_1' | (\tau_2' | \tau_2')) | (\tau_1' | (\tau_2' | \tau_2'))), (\lambda \times \mu)(0, \tau_2')\} \\ &= \max\{\max\{\lambda(0), \mu((\tau_1' | (\tau_2' | \tau_2')) | (\tau_1' | (\tau_2' | \tau_2')))\}, \max\{\lambda(0), \\ &\quad \mu(\tau_2')\}\} \\ &= \max\{\mu((\tau_1' | (\tau_2' | \tau_2')) | (\tau_1' | (\tau_2' | \tau_2'))), \mu(\tau_2')\} \end{aligned}$$

sonucuna varılır. O halde μ , A 'nın bir anti fuzzy idealidir. İkinci kısım da benzer şekilde gösterilebilir. $\square$

Örnek 4.19. *Örnek 4.1'de verilen Sheffer stroke BCK cebirini göz önüne alalım. λ ve μ fuzzy altkümeleri, $t_1 \leq t_2 \leq t_3$ olacak şekilde $t_1, t_2, t_3 \in [0, 1]$ ve her $\tau_1 \in D$ için $\lambda(\tau_1) = t_3$ ve*

$$\mu(\tau_1) = \begin{cases} t_2, & \tau_1 = 0 \text{ ise} \\ t_1, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. O zaman $\tau_1, \tau_2 \in D$ için $(\lambda \times \mu)(\tau_1, \tau_2) = \max\{\lambda(\tau_1), \mu(\tau_2)\} = t_3 = \lambda(\tau_1)$ dir. $\lambda \times \mu$, D 'nin bir anti fuzzy idealidir. Fakat, her $\tau_1 \in D - \{0\}$ için $\mu(0) = t_2 \geq \mu(\tau_1)$ olduğundan μ , D 'nin bir anti fuzzy ideali değildir.



5 SONUÇ

Bu tez çalışmasında, ilk olarak, Sheffer stroke işlemi ile yeni cebirsel yapılar inşa edilerek bu yapıların aksiyom sistemlerinin bağımsızlığı gösterilmiştir. Bu cebirsel yapılar örneklendirilerek çeşitli özellikleri sunulmuştur. Bu yapıların (yarı) kafes olduklarını gösterebilmek için üzerlerinde kısmi sıralama bağıntıları tanımlanmıştır. Sheffer stroke işlemi ile inşa edilen yapılar ile diğer yapılar arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Ayrıca, Sheffer stroke cebir yapılarının kartezyen çarpımları, süzgeçleri, kongrüans bağıntısı, homomorfizması, çekirdeği tanımlanarak aralarındaki bağlantılar ortaya konmaya çalışılmıştır.

Bununla birlikte, inşa edilen Sheffer stroke cebir yapılarının (anti) fuzzy idealleri, (anti) fuzzy alt kümesi, fuzzy kümesinin tümleyeni tanımlanmıştır ve aralarındaki ilişkiler incelenmiştir.

Sonuç olarak, bu çalışmaların daha basit, daha anlaşılır ve kolay denetlenebilir aksiyom sistemlerine sahip yeni Sheffer stroke cebir yapıları inşa etmeye katkıda bulunacağı öngörülmektedir.

Kaynaklar

- Bărbăcioru, C. (1967). Positive implicative BCK-algebras, *Mathematica Japonica*, 36 , 11–59.
- Birkhoff, G. (1940). *Lattice theory*, (Vol. 25), American Mathematical Soc.
- Biswas, R. (1990). Fuzzy subgroups and anti fuzzy subgroups, *Fuzzy Sets and Systems*, 35 (1), 121–124.
- Chajda, I. (2005). Sheffer operation in ortholattices, *Acta Universitatis Palackianae Olomucensis Facultas Rerum Naturalium Mathematica*, 44(1), 19-23.
- Chajda, I. (2014). A Structure of BCI-Algebras, *International Journal of Theoretical Physics*, 53, 3391–3396.
- Chajda, I., Halaš, R., Länger, H. (2019). Operations and structures derived from non-associative MV-algebras, *Soft computing*, 23 (12), 3935–3944.
- Chajda, I., Länger, H. (2022). Sheffer operation in relational systems, *Soft Computing*, 26, 89-97.
- Grätzer, G. (2002). *General lattice theory*, Springer Science & Business Media.
- Hong, S. M., Jun, Y. B. (1998). Anti fuzzy ideals in BCK-algebras, *Kyungpook Math. J.*, 38 , 145-150.
- Hong, S. M., Jun, Y. B., Ozturk, M.A. (2003). Generalizations of BCK-Algebras, *Scientiae Mathematicae Japonicae Online*, 8, 549-557.
- Huang, Y. (2006). *BCI-algebras*. Science Press.
- Iséki, K., Tanaka, S. (1978). An Introduction to the theory of BCK-Algebras, *Mathematica Japonica*, 23(1), 1–26.
- Iséki, K. (1979). BCK-algebras with condition (S), *Mathematica Japonica*, 24(4), 107–119.

- Imai, Y., Iséki, K. (1966). On axiom systems of propositional calculi. XIV. Proc. Jpn. Acad., Ser. A, Math. Sci. 42, 19–22.
- Iséki, K. (1966). An Algebra Related with a Propositional Calculus, Proceedings of the Japan Academy, 42(1), 26–29.
- Meng, J., Jun, Y. B. (1994). BCK-Algebras, Kyung Moon Sa Co, Seoul, Korea.
- McCune, W., Veroff, R., Fitelson, B., Harris, K., Feist, A., and Wos, L. (2002). Short single axioms for Boolean algebra, Journal of Automated Reasoning. (Vol. 29(1)), (pp. 1-16).
- Oner, T., Kalkan T., Kircali Gurs0y, N. (2021a). Sheffer stroke BG-algebras, International Journal of Maps in Mathematics, 4 (1), 27–39.
- Oner, T., Kalkan T., Borumand Saeid, A. (2023a). (Anti) Fuzzy Ideals of Sheffer stroke BCK-algebras, Journal of Algebraic Systems, 11(1): 105–135.
- Oner, T., Kalkan T., Hamal A., Kibar M. (2022a). Sheffer Stroke BM-algebras and Related Algebras, J. Int. Math. Virtual Inst. 12(1), 87-102.
- Oner, T., Kalkan T., Cakar M. (2021b). Sheffer Stoke BCH-Algebras, Journal of the International Mathematical Virtual Institute, 11(1): 119–135.
- Oner, T., Kalkan T., Katican T., Rezaei A. (2021c). Fuzzy Implivative Ideals of Sheffer stroke BG-algebras, Facta Universitatis, Series: Mathematics and Informatics, 36(4): 913–926.
- Oner, T., Kalkan T., Borumand Saeid, A. (2022b). Class of Sheffer stroke BCK-algebras, Analele Stiintifice ale Universitatii Ovidius Constanta, Seria Matematica, 30(1): 247–269.
- Oner, T., Kalkan T. (2021d). Sheffer Stroke BG-Algebras by Filters and Homomorphisms, Bulletin of the International Mathematical Virtual Institute, 11(2): 375–386.
- Oner, T., Kalkan T., Ayar Ozbal, S. (2023b). Sheffer stroke INK-algebras, Journal of the International Mathematical Virtual Institute, 13(1): 1-16.

- Oner, T., Senturk, I. (2017). The Sheffer stroke operation reducts of basic algebras, *Open Mathematics*, 15(1), 926-935.
- Senturk, I., Oner, T., Borumand Saeid, A. (2020). Congruences of Sheffer Stroke Basic Algebras, *Analele Stiintifice ale Universitatii Ovidius Constanta, Seria Matematica*, 28(2), 209-228.
- Senturk, I., Oner, T. (2021). A Construction of Very True Operator on Sheffer Stroke MTL-Algebras, *International Journal of Maps in Mathematics*, 4(2), 93-106.
- Tanaka, S. (1975). A new class of algebras, *Mathematics Seminar Notes*, 3, 37-43.
- Van Dalen, D. (2004). *Logic and structure*. Springer.
- Sheffer, H. M. (1913). A set of five independent postulates for Boolean algebras, with application to logical constants. *Transactions of the American mathematical society*, 14(4), 481-488.
- Xi, O. G. (1991). Fuzzy BCK-algebras, *Math. Japon*, 36, 935-942.
- Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, 8(3), 338-353.

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanma sürecinde

- kıymetli bilgi, birikim ve tecrübeleri ile bana yol gösterici olan, inancımı ve desteğini her daim hissettiğim, yaptığı bilgilendirmelerle ve eleştirilerle akademik hayatıma yön veren ve kendimi geliştirmemi sağlayan değerli danışmanın Prof. Dr. Tahsin ÖNER'e,

-tez aşaması boyunca değerli vakitlerini ayıran Prof. Dr. Burak ORDİN ve Doç. Dr. Refet POLAT'a,

- lisansüstü eğitimimin en başından itibaren değerli görüş ve tavsiyeleriyle çalışmama katkı sağlayan değerli hocam Doç. Dr. İbrahim ŞENTÜRK'e,

-ihtiyaç duyduğum her noktada yardım etmekten kaçınmayan ve çalışmama destek olan arkadaşım Öğr. Gör. Dr. Tuğçe KATICAN'a,

-aldığım her kararın arkasında duran, bana koşulsuzca güvenen ve desteklerini her zaman hissettiğim sevgili babam Muharrem KALKAN, annem Müzeyyen KALKAN ve kardeşim Eylem KALKAN'a,

-her koşulda bana duyduğu güvenle desteğini hiçbir zaman esirgemeyen, her kararımda koşulsuzca arkamda duran, fedakarlığıyla bu tezde büyük ölçüde katkısı olan değerli hayat arkadaşım Dr. Oğuzcan ULUDAĞ'a

yürekten teşekkür ederim.

Ayrıca, BİDEB 2211/A Genel Yurt İçi Doktora Burs Programı kapsamında sunduğu destekten dolayı TÜBİTAK'a teşekkürü bir borç bilirim.

15/05/2023

Tuğçe KALKAN

ÖZGEÇMİŞ

Özlük Bilgileri

- Ad-Soyad: Tuğçe KALKAN

Öğrenim Durumu

- 2017-2023: Ege Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Ana Bilim Dalı, Matematik Doktora Programı
- 2015-2017: Ege Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Ana Bilim Dalı, Matematiğin Temelleri ve Matematik Lojik Yüksek Lisans Programı
- 2010-2015: Ege Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü
- 2010-2015: Anadolu Üniversitesi, İşletme Fakültesi, İşletme
- 2006-2010: Antalya Muratpaşa Lisesi
- 1998-2006: Antalya Fatmagül Özpınar İlköğretim Okulu

Yayınlar

- Oner Tahsin, Kalkan Tugce, Kircali Gürsoy Necla, “Sheffer stroke BG-algebras” *International Journal of Maps in Mathematics*, 4(1): 27–39, 2021.
- Oner Tahsin, Kalkan Tugce, Katican Tugce, “Yang-Baxter equation in KU-algebras” *Bulletin of the International Mathematical Virtual Institute*, 10(2): 339–347, 2020.
- Oner Tahsin, Kalkan Tugce, Borumand Saeid Arsham, “(Anti) Fuzzy Ideals of Sheffer stroke BCK-algebras” *Journal of Algebraic Systems*, 11(1): 105–135, 2023.

- Oner Tahsin, Kalkan Tugce, Hamal Ahmet, Kibar Melike “Sheffer Stroke BM-algebras and Related Algebras” *Journal of International Mathematical Virtual Institute*, 12(1): 87-102, 2022.
- Kalkan Tugce, Nichita Florin Felix, Oner Tahsin, Senturk Ibrahim, Terziler Mehmet, “Mathematics and Poetry. Yang-Baxter Equations, Boolean Algebras and BCK-Algebras” 4(2), 1-15, 2022.
- Oner Tahsin, Kalkan Tugce, Cakar Melisa, “Sheffer Stoke BCH-Algebras” *Journal of the International Mathematical Virtual Institute*, 11(1): 119–135, 2021.
- Oner Tahsin, Kalkan Tugce, Katican Tugce, Rezaei Akbar, “Fuzzy Implivative Ideals of Sheffer Stroke BG-algebras” *Facta Universitatis, Series: Mathematics and Informatics*, 36(4): 913–926, 2021.
- Oner Tahsin, Kalkan Tugce, Borumand Saeid Arsham “Class of Sheffer stroke BCK-algebras” *Analele Stiintifice ale Universitatii Ovidius Constanta, Seria Matematica*, 30(1): 247–269, 2022.
- Nichita Florin Felix, Oner Tahsin, Kalkan Tugce, Senturk Ibrahim, Terziler Mehmet, “Perspectives on the Yang-Baxter Equation in BCK-Algebras”, (2021).
- Oner Tahsin, Kalkan Tugce, “Sheffer Stroke BG-Algebras by Filters and Homomorphisms” *Bulletin of International Mathematical Virtual Institute*, 11(2): 375–386, 2021.
- Oner Tahsin, Kalkan Tugce, Ayar Ozbal Sule, “Sheffer stroke INK-algebras” *Journal of the International Mathematical Virtual Institute*, 13(1): 1-16, 2023.

- Oner Tahsin, Kalkan Tugce, Ulker Alper, “Yang–Baxter Equation in Lattice Effcet Algebras” *Konuralp Journal of Mathematics*, 8(1): 106-113, 2020.
- Oner Tahsin, Kalkan Tugce, “Yang-Baxter Equations in MTL-Algebras” *Bulletin of the International Mathematical Virtual Institute*, 9: 599-607, 2019.
- Oner Tahsin, Senturk İbrahim, Kalkan Tugce, “Some Fundamental Set-Theoretical Solutions of Yang-Baxter Equation via Basic algebras” *Advances and Applications in Mathematical Sciences* 18(4): 395-411, 2019.

İnceleme Aşamasında Olan Makaleler

- Oner Tahsin, Kalkan Tugce, Katican Tugce, “A New View of BCI-Algebras”.
- Oner Tahsin, Kalkan Tugce, Borumand Saeid Arsham, “On BH-Algebras With Sheffer Operation”.

Uluslararası Bilimsel Toplantılarda Sunulan Bildiriler

- Oner Tahsin, Kalkan Tugce, Katıcan Tugce, “Fuzzy Implicative Ideals of Sheffer stroke BG-algebras”, *3rd International Conference on Mathematical and Related Sciences: Current Trends and Developments (ICMRS)*, Online meeting, November 20-22, 2020.

Aldığı Burslar

- Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK) 2211/A Yurt İçi Genel Doktora Burs Programı, 2018.

Aldığı Sertifika, Kurs ve Eğitimler

- Eğitim Yönetimi ve Planlama, Pedagojik Formasyon Eğitim Sertifikası, Ege Üniversitesi Eğitim Fakültesi, 2015.