

**T.C.  
ERCIYES ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**ÇARPIM UZAYLARDA DİZİSEL SÜREKLİLİK,  
KOMPAKTLIK VE İRTİBATLILIK**

**Hazırlayan  
Mina Betül TEKE**

**Danışman  
Prof. Dr. Osman MUCUK**

**Yüksek Lisans Tezi**

**Ağustos 2023  
KAYSERİ**

**T.C.  
ERCIYES ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**ÇARPIM UZAYLARDA DİZİSEL SÜREKLİLİK,  
KOMPAKTLIK VE İRTİBATLILIK**

**(Yüksek Lisans Tezi)**

**Hazırlayan  
Mina Betül TEKE**

**Danışman  
Prof. Dr. Osman MUCUK**

**Ağustos 2023  
KAYSERİ**

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir şekilde elde edildiğini beyan ederim. Aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi belirtirim.

Mina Betül TEKE



**“Çarpım Uzaylarda Dizisel Süreklilik, Kompaktlık ve İrtibatlılık”** adlı Yüksek Lisans tezi, Erciyes Üniversitesi Lisansüstü Tez Önerisi ve Tez Yazma Yönergesi'ne uygun olarak hazırlanmıştır.

Tezi Hazırlayan  
Mina Betül TEKE

Danışman  
Prof. Dr. Osman MUCUK



Matematik ABD Başkanı  
Prof. Dr. Hikmet ÖZARSLAN

## TEŞEKKÜR

Topoloji alanında yapmış olduğum çalışmamı bitirmiş bulunmaktayım. Lisans ve yüksek lisans dönemimde verdikleri emeklerle benim bu noktaya gelmemi sağlayan tüm değerli hocalarıma, çalışmamın her aşamasında bana sabırla yardımcı olup yol gösteren ve bana destek olan kıymetli danışman hocam Prof. Dr. Osman Mucuk'a, bu zor sürecin her anında yanımda olan eşim Emrah'a, kızım Reyyan Sibel'e, beni bugünlere getiren anneme ve babama sonsuz teşekkür ederim.

Mina Betül TEKE



# ÇARPIM UZAYLARDA DİZİSEL SÜREKLİLİK, KOMPAKTLIK VE İRTİBATLILIK

Mina Betül TEKE  
Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü  
Yüksek Lisans Tezi, Temmuz 2023  
Tez Danışman : Prof. Dr. Osman MUCUK

## ÖZET

Yakınsak diziler topolojide ve Matematiğin diğer bazı alanlarında kullanışlı ve çeşitli uygulamalara sahiptir. Yakınsak diziler bazı topolojik kavramların tanımlanmasına imkan sağlar. Bu nedenle topolojik kavramların diziler yardımıyla daha kolay bir şekilde tanımlanması ve çalışılması mümkün hale gelir. Birinci sayılabilir uzaylarda bazı topolojik kavramlar yakınsak diziler tarafınca tanımlanır. Örneğin bu uzaylarda süreklilik ve dizisel süreklilik eşdeğerdir. Bu nedenle sürekli fonksiyonlar yerine dizisel sürekli fonksiyonlar ele alınır. Bir fonksiyonun sürekli olduğunu göstermek yerine buna denk olan dizisel sürekli olduğu gösterilir. Bunlardan başka birinci sayılabilir uzaylarda açık ve kapalı kümelerde yakınsak dizilerle tanımlanır. Bağlantılılık yada irtibatlılık, kompaktlık gibi tanımlar açık ve kapalı kümelere bağlı olarak yapıldığından bu uzaylarda diziler cinsinden tanımlanır. Bu kavramlar gerek matematiğin gerekse diğer bazı bilim alanlarında çeşitli uygulamalara sahiptir.

Hausdorff uzayda yakınsak dizinin limiti tektir. Bu ise yakınsak dizilerin kümesinden Hausdorff uzayın kendisine bir fonksiyon tanımlar. Buradan hareketle son zamanlarda bazı matematikçiler, farklı yakınsaklık kavramları kullanarak çeşitli topolojik tanımları geliştirmişler ve kavramları bu yakınsaklık metodlarına bağlı olarak tanımlama gayreti içinde olmuşlardır. Yakın zamanda Hausdorff uzaylarda limit fonksiyonu bir  $G$  yakınsaklık metoduna dönüştürülmüştür.

Bu tezde yakınsak diziler kullanarak çarpım uzaylarda açık ve kapalı kümeler, dizisel süreklilik, dizisel kompaktlık ve dizisel irtibatlılık kavramları ele alınmış ve karakterize edilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Çarpım Uzaylar, Dizisel Kompaktlık ve Dizisel irtibatlılık

# SEQUENTIALLY CONTINUITY, COMPACTNESS AND CONNECTEDNESS IN PRODUCT SPACES

Mina Betül TEKE

Erciyes University, Graduate School of Natural and Applied Sciences

M. Sc. Thesis, December 2022

Thesis Supervisor: Prof.Dr. Osman MUCUK

## ABSTRACT

The convergent sequences in topology and some other branches of the mathematics are useful and have many applications. The convergent sequences enable to define some topological definitions. Hence the definitions and studies of topological concepts in easier ways become possible. In the first countable spaces some topological concepts are defined by means of the sequences. For example in these spaces continuity and sequentially continuity are equivalent. Therefore the sequentially continuous functions are considered for instead continuous functions. For to prove that a function is continuous it is equivalently proved that the function is sequentially continuous.

In Hausdorff spaces any convergent sequence has a unique limit. That gives us a function defined on the set of convergent sequences to the Hausdorff space itself. Motivated by this, recently many mathematicians have defined some topological definitions associated with different convergences. In quite recently the limit function in Hausdorff spaces has been converted to a  $G$ -convergence method.

In this thesis using the convergent sequences in product spaces we consider sequential open and closed subsets and some related concepts such as sequentially connected and compactness in product spaces.

**Keywords:** Product spaces, Sequential Continuity, Sequential Compactness and Sequential Connectedness.

## İÇİNDEKİLER

### ÇARPIM UZAYLARDA DİZİSEL SÜREKLİLİK, KOMPAKTLIK VE İRTİBATLILIK

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK SAYFASI .....	i
YÖNERGEYE UYGUNLUK SAYFASI .....	ii
KABUL VE ONAY .....	iii
TEŞEKKÜR .....	iv
ÖZET .....	v
ABSTRACT .....	vi
İÇİNDEKİLER .....	vii
GİRİŞ .....	1

#### 1. BÖLÜM

##### ÇARPIM UZAYLARDA DİZİLER

1.1. Çarpım Uzaylarda Diziler .....	5
-------------------------------------	---

#### 2. BÖLÜM

##### ÇARPIM UZAYLARDA DİZİSEL AÇIK VE DİZİSEL KAPALI KÜMELER

2.1. Dizisel Kapalı ve Dizisel Açık Çarpım Kümeler .....	10
2.2. Birinci Sayılabilir Uzaylar .....	21

#### 3. BÖLÜM

##### ÇARPIM UZAYLARDA DİZİSEL SÜREKLİLİK

3.1. Çarpım Dizisel Süreklilik .....	23
--------------------------------------	----

#### 4. BÖLÜM

##### ÇARPIM UZAYLARDA DİZİSEL KOMPAKTLIK VE DİZİSEL İRTİBATLILIK

4.1. Dizisel Kompakt Çarpım Uzaylar .....	30
4.2. Çarpım Uzaylarda Dizisel İrtibatlılık .....	33
KAYNAKLAR .....	37

ÖZGEÇMİŞ ..... 40



## GİRİŞ

Sürekli fonksiyonlar, kompakt uzaylar, bağlantılı ya da irtibatlı uzaylar önemli uygulamalara sahip topolojik kavramlardır. Bu kavramlara dayalı bazı sonuçlar topoloji, analiz ve matematiğin diğer bazı dallarında oldukça kullanışlıdır. Bu ve buna benzer diğer bazı topolojik kavramlar birinci sayılabilir uzaylarda yakınsak diziler kullanarak tanımlanabilir. Bununla birlikte birinci sayılabilir olmayan uzaylarda bu kavramların dizisel versiyonları farklıdır. Bu farklılıklar ayrıntılı bir şekilde örneklerle göz önüne alınır.

Bu tezde bu kavramlar çarpım uzaylarda dikkate alınmıştır, ve çeşitli karakterizasyonlar ve örnekler üzerinde durulmuştur.

$X \times Y$  çarpım uzayında  $A \times B \subseteq X$  alt kümesi verilsin. Eğer terimleri  $A \times B$ 'de olan yakınsak dizilerin limitleri  $A \times B$ 'nin noktaları ise bu küme **dizisel kapalıdır** denir. Kapalı kümelerin dizisel kapalı olduğunu göstermek kolaydır. Fakat çeşitli örneklerden görüleceği üzere bu ifadenin tersi genelde doğru değildir. Diğer bir ifadeyle dizisel kapalı bir kümenin kapalı olması gerekli değildir.  $A \times B$  alt kümesinin herhangi bir noktasına yakınsayan bir dizi kısmen  $A \times B$ 'nin içinde ise bu kümenin **dizisel açık** olduğunu söyleriz. Eğer  $(A \times B)^c$  tümleyeni dizisel kapalı ise  $A \times B$  alt kümesi dizisel açıktır. Kapalılık durumuna paralel olarak  $X \times Y$  çarpım uzayında açık küme dizisel açık olduğu halde dizisel açık kümenin açık olması zorunlu değildir. Eğer bir çarpım uzayında her dizisel açık küme açık ise bu uzaya **dizisel uzay** denir. Örnek olarak birinci sayılabilir uzaylar dizisel uzaylardır.

$(X, \tau)$  topolojik uzay olsun. Dizisel açık kümelerden oluşan sınıf bir topolojidir. Bu topoloji  $\tau$ 'dan daha ince ve dizisel bir uzaydır.

Çarpım uzaylarda tanımlı  $f: X \times Y \rightarrow U \times V$  fonksiyonunun **dizisel sürekli** olması için gerek ve yeter şart  $(a_n) \rightarrow a$  ve  $(b_n) \rightarrow b$  yakınsak olan diziler için  $f(a_n, b_n) \rightarrow f(a, b)$  yakınsaktır.  $f: X \times Y \rightarrow U \times V$  fonksiyonu sürekli olsun. Bu taktirde  $f$

dizisel süreklidir. Fakat tersine olarak dizisel sürekli fonksiyonun sürekli olaması bazı durumlarda doğru değildir. Dizisel açık ve dizisel kapalı kümeler tanımlandığında bunlara dayalı diğer tanımlarda yapılır. Örneğin  $X \times Y$  çarpım uzayı **dizisel kompakttır** ancak ve ancak bu uzaydan alınan herhangi bir  $(a_n, b_n)$  dizisinin yakınsak bir  $(a_{n_k}, b_{n_k})$  alt dizisi vardır. Eşdeğer bir değişle  $(a_n)$  ve  $(b_n)$  dizilerinin sırasıyla  $(a_{n_k})$  ve  $(b_{n_k})$  alt dizileri vardır. Başka bir örnek olarak  $X \times Y$  çarpım uzayının **dizisel irtibatlı** olması için gerek ve yeter koşul  $X \times Y$  nin dizisel açık ve dizisel kapalı olan öz alt (boş ve kendilerinden başka) alt kümeleri bulunmasıdır. Bu ise “ $X$  ve  $Y$  nin dizisel açık ve dizisel kapalı olan öz alt kümeleri yoktur” ifadesi ile benzer anlam ifade eder [21], [7], [18]. Bu tanımlar birlikte değerlendirildiğinde dizisel irtibatlı olan uzayın irtibatlı olduğu irtibatlı olduğu sonucu elde edilir. Örneklerden izleneceği gibi bunun tersi bazen doğru değildir. Yani irtibatlı olan uzayın dizisel irtibatlı olması gerekmez.

Hausdorff bir uzayda yakınsak dizinin limitinin tek olduğu iyi bilinen bir sonuçtur. Buradan hareketle  $X$  ve  $Y$  Hausdorff uzayları için  $X \times Y$  çarpım uzayı da Hausdorff olduğundan bir  $\lim: c(X \times Y) \rightarrow X \times Y$  fonksiyonu vardır. Burada  $c(X \times Y)$ ,  $X \times Y$ 'deki yakınsak dizilerin kümesi ve  $\lim$  ise  $X \times Y$ 'deki her yakınsak diziyi limitine eşleyen fonksiyondur.

Son zamanlarda bu şekilde elde edilen  $\lim$  fonksiyonu bir  $G$  fonksiyonu (metodu) ile yer değiştirildiğinde  $G$ -dizisel kapalı,  $G$ -dizisel açık kümeler ve ardından bu kümelere dayalı olarak çeşitli kavramlar tanımlanmıştır [6]. Tanımlanan  $G$ -metodu ile bazı dizisellik tanımlar  $G$ -süreklilik ([13], [15], [28]),  $G$ -kompaktlık [11] ve  $G$ -irtibatlılık ([16], [17]) tanımları dönüştürülmüştür.

Limit tanımından daha genel olan bir  $G$  metodundan elde edilen kavramlar ve yapılan farklı çalışmalara referans olarak şunları verebiliriz: [9], [10], [12], [14], [19], [22].

Bu  $G$  metodu ile ilgili bu kavramların çarpım uzaylarına dönüştürülmesi mümkündür.

$X$  ve  $Y$  üzerinde sırasıyla  $G$  ve  $H$  metodları verilsin. Burada  $X$  ve  $Y$  topolojik uzaylar veya sadece kümeler olabilir.

$X$  üzerinde tanımlanmış  $G$ -metodu  $G: c_G(X) \rightarrow X$  ile  $Y$  deki dizilerin bir  $c_H(Y)$  uzayı üzerinde tanımlı  $H: c_H(Y) \rightarrow Y$  metodu verildiğinde  $G \times H: c_{G \times H}(X \times Y) \rightarrow X \times Y$  şeklinde bir  $G \times H$ -metodu tanımlanabilir. Bu metoda  $X \times Y$  üzerinde  $G \times H$  **çarpım metodu** denir.  $X$ 'deki tüm yakınsak  $\mathbf{x} = (x_n)$  dizileri için  $G(\mathbf{x}) = \lim \mathbf{x}$  oluyorsa  $G$  **regüler**'dir denir. Buradan kolayca anlaşılacağı üzere regüler metodların çarpımı da regüler dir.  $A \times B \subseteq X \times Y$  ve  $(u, v) \in X \times Y$  olmak üzere  $(G \times H)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (u, v)$  olacak şekilde  $A \times B$  de bir  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_n, y_n)$  dizisi varsa  $(u, v)$  noktası  $A \times B$  nin bir  **$G$ -dizisel kapanış noktası** dır. Tüm bu noktaların kümesi  $\overline{A \times B}^{G \times H}$  olarak yazılır. Burada  $\overline{A \times B}^{G \times H} = \overline{A}^G \times \overline{B}^H$  olduğu gösterilebilir. Eğer  $\overline{A \times B}^G \subseteq A \times B$  ise  $A \times B$  alt kümesi  $X \times Y$  çarpımında  $G \times H$ - **dizisel kapalıdır**. O halde  $X$  deki  $G$ -dizisel kapalı bir  $A$  alt kümesi ile  $Y$  deki  $H$ -dizisel kapalı bir  $B$  alt kümesinin çarpımı olan  $A \times B$  alt kümesi  $X \times Y$  de  $(G \times H)$  kapalıdır. Regüler metodların çarpımı da regüler olduğundan  $A \times B \subseteq \overline{A \times B}^G$  dır. Bundan dolayı  $G$  ve  $H$  regüler metodları için  $A \times B \subseteq X \times Y$  alt kümesi  $G \times H$ -dizisel kapalıdır ancak  $A \times B = \overline{A \times B}^G$  ise, yani  $A = \overline{A}^G$  ve  $B = \overline{B}^G$  dir.  $G$  ve  $H$  regüler  $A \times B \subseteq X \times Y$  alt kümesi için  $A \times B \subseteq \overline{A \times B} \subseteq \overline{A \times B}^{G \times H}$  dır.  $G$ -dizisel açık  $A \subset X$  alt kümesi ile  $H$ -dizisel açık  $B \subset Y$  alt kümesinin çarpımı  $A \times B$  de  $X \times Y$  de  $G \times H$  dizisel açık bir kümedir.

Eğer  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in c_{G \times H}(X \times Y)$  ve  $(G \times H)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (u, v)$  ise  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_n, y_n)$  dizisi  $(u, v)$  ya  $G \times H$ -**yakınsak tır** denir.  $X \times Y$  çarpım uzayındaki her  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_n, y_n)$  dizisine karşılık  $(G \times H)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (u, v)$  olduğunda  $(G \times H)(f(\mathbf{x}), g(\mathbf{y})) = (f(u), g(u))$  ise  $f \times g: X \times Y \rightarrow X \times Y$  fonksiyonu  $(u, v)$  noktasında  $G \times H$ -**dizisel süreklidir**.  $X \times Y$  çarpım topolojik uzayı  $G \times H$ -**dizisel kompakttır** ancak ve ancak terimleri  $A \times B$  da olan her  $(x_n, y_n)$  dizisinin  $G \times H$ -dizisel yakınsak bir alt dizisi vardır. O halde  $A \times B \subseteq X \times Y$  çarpım alt kümesi  $G \times H$ -dizisel kompakttır eğer  $A \subset X$  ve  $B \subset Y$  dizisel kompakt dır. Bir  $X \times Y$  çarpım topolojik uzayı  $G \times H$ -**dizisel irtibatlı dır** ancak ve ancak  $G \times H$ -dizisel açık ve  $G \times H$ -dizisel kapalı olan öz alt kümesi yoktur.

Burada eğer  $G$  ve  $H$  metodları özel olarak olarak lim olarak alınırsa  $X \times Y$  çarpım uzayının dizisel irtibatlı olması elde edilir.

Bu tezde, çarpım uzaylarında dizisel çarpım açık kümeler, dizisel çarpım kapalı kümeler, bazı özellikler ile birlikte dizisel süreklilik, dizisel kompaktlık ve dizisel

irtibatlılık kavramları incelenmiştir. Topolojik uzaylarda dizisel süreklilik, dizisel irtibatlılık ve dizisel kompaktlık konuları [24] ve [29] dan incelenmiştir.



## 1. BÖLÜM

### ÇARPIM UZAYLARDA DİZİLER

#### 1.1. Çarpım Uzaylarda Diziler

Bu tezde çarpım uzaylarında dizilerin yakınsaklığı incelenmiştir. Bu bölümde ileride çarpım uzaylarda gerekli dizi kavramları ve bazı temel sonuçlar verilmiştir.

$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  çarpımındaki dizilerin yakınsaklığına benzer olarak aşağıdaki gibi tanımlanır. Önce tekrardan kaçınma amaçlı şu tanımı yapalım.

**Tanım 1.1.1.**  $X \times Y$  çarpımında  $(a_n, b_n)$  dizisi verilsin. Belli bir  $n_0 \in \mathbb{N}$ 'den büyük tüm  $n$ 'ler için  $(a_n, b_n) \in U \times V$  ise dizi **kısmen**  $U \times V$ 'dedir denir.

O halde  $(a_n)$  ve  $(b_n)$  dizileri sırasıyla kısmen  $U$  ve  $V$  de dir ancak ve ancak  $(a_n, b_n)$  dizisi kısmen  $U \times V$  dedir.

**Tanım 1.1.2.**  $X \times Y$  çarpım uzayında,  $(a_n, b_n)$  dizisi ile  $(a, b) \in X \times Y$  verildiğini kabul edelim.  $(a_n, b_n)$  dizisi  $(a, b) \in X \times Y$ 'nin tüm açık  $U \times V$  komşulukları içinde kaldığı takdirde  $(a_n, b_n)$  dizisine  $(a, b) \in X \times Y$  noktasına **yakınsaktır** denir  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n, b_n) = (a, b)$  veya  $(a_n, b_n) \rightarrow (a, b)$  yazılır.  $\square$

**Önerme 1.1.3.**  $X \times Y$  çarpım uzayında  $(a_n, b_n)$  dizisi  $(a, b) \in X \times Y$  noktasına yakınsar ancak ve ancak  $(a_n)$  ve  $(b_n)$  dizileri sırayla  $X$  ve  $Y$  de  $a$  ve  $b$  noktalarına yakınsaktır.

**İspat:** Bunun ispatı için önce  $(a_n) \rightarrow a$  ne  $(b_n) \rightarrow b$  olduğunu varsayalım.  $(a_n, b_n)$  dizisinin  $(a, b)$  noktasına yakınsadığını gösterelim.  $(a, b)$  noktasının bir  $U \times V$  açık komşuluğu verilsin. Burada  $U$  ve  $V$  kümeleri sırasıyla  $a$  ve  $b$  noktalarının açık komşuluğudur. Varsayımdan  $(a_n) \rightarrow a$  ne  $(b_n) \rightarrow b$  olduğundan  $U$  ve  $V$  sırasıyla kısmen  $(a_n)$  ve  $(b_n)$  dizilerinin terimlerini kısmen içerir. O halde  $(a_n, b_n)$  dizisinin

terimleri kısmen  $U \times V$ 'dedir. Buradan  $(a_n, b_n)$  dizisinin  $(a, b)$  noktasına yakınsadığı elde edilir.

Tersine olarak  $(a_n, b_n)$  dizisi  $(a, b)$  noktasına yakınsasın.  $(a_n) \rightarrow a$  ne  $(b_n) \rightarrow b$  olduğunu gösterelim.  $a$  ve  $b$  noktalarının sırasıyla  $U$  ve  $V$  açık komşulukları verilsin. Burada  $U \times V$  çarpım kümesi  $(a, b)$  noktasının açık komşuluğudur. Varsayımdan  $(a_n, b_n) \rightarrow (a, b)$  olduğundan  $(a_n, b_n)$  dizisinin terimleri kısmen  $U \times V$  dedir. Buradan  $(a_n)$  ve  $(b_n)$  dizilerinin terimleri sırasıyla kısmen  $U$  ve  $V$  de kalır. Bundan dolayı  $(a_n)$  ve  $(b_n)$  dizileri sırasıyla  $a$  ve  $b$  noktalarına yakınsar.  $\square$

**Örnek 1.1.4.**  $X$  ve  $Y$  aşıkâr (indiskre) topolojileri iken  $X \times Y$  çarpımını da aikiâr topoloji olduğundan  $(a_n, b_n)$  dizisi tüm  $(a, b) \in X \times Y$  noktalarına yakınsar. Burada  $(a, b) \in X$  elemanını ihtiva eden tek açık küme  $X \times Y$ 'dir.  $\square$

**Önerme 1.1.5.** Boştan olmayan  $X$  ve  $Y$  kümelerinin topolojileri ayrık (diskre) topolojiler olduklarında  $X \times Y$  çarpım uzayında  $(a_n, b_n)$  dizisi  $(a, b) \in X \times Y$  noktasına yakınsar ancak ve ancak dizinin terimleri kısmen  $(a, b)$  dır.

**İspat:**  $(a_n, b_n) \rightarrow (a, b)$  olduğunu varsayalım.  $X \times Y$  çarpım topolojik uzayı ayrık olduğundan sadece  $(a, b)$  noktasından ibaret olan  $\{(a, b)\}$  kümesi  $(a, b) \in X \times Y$ 'nin bir açık komşuluğudur. Buradan  $(a_n)$  dizisinin terimleri kısmen  $(a, b)$ 'dir.

Tersine olarak eğer  $(a_n, b_n)$  dizisinin terimleri kısmen  $(a, b)$  ise çarpım uzaylarda yakınsak dizi tanımından açık olarak  $(a_n, b_n)$  dizisi  $(a, b)$  noktasına yakınsar.  $\square$

**Tanım 1.1.6.**  $X \times Y$  çarpım uzayında bir  $(a_n, b_n)$  dizisi için  $n_k \leq n_{k+1}$  koşulunda  $(a_{n_k}, b_{n_k})$  dizisi  $(a_n, b_n)$  **dizisinin alt dizisidir** denir.  $\square$

Kolayca görüleceği üzere  $X \times Y$  çarpım topolojik uzayında yakınsak dizinin alt dizisi de aynı noktaya yakınsaktır.

$X \times Y$  çarpım uzayında  $(a_n, b_n)$  birden çok elemanlara yakınsaması mümkündür. Hausdorff uzayda yakınsak dizinin limitinin tek olduğu iyi bilinir. İspat çarpım uzaylar için aşağıdaki şekilde yapılabilir.

**Teorem 1.1.7.**  $X$  ve  $Y$  hausdorff uzay olduğunda  $X \times Y$  çarpım uzayında yakınsak dizilerin limiti tektir.

**İspat:** Hausdorff uzaylarda yakınsak dizilerin limitleri tek olduğundan eğer  $X$  ve  $Y$  uzayları Hausdorff ise  $X \times Y$  çarpım uzayı da Hausdorff olduğunu ispat etmek yeterlidir.  $(a, b)$  ve  $x, y$  farklı noktalar ise  $a \neq x$  ya da  $b \neq y$  dir.  $a \neq x$  olduğunu varsayalım.  $X$  uzayı Hausdorff olduğundan farklı  $a, x \in X$  noktalarını içeren  $U$  ve  $V$  ayrık açık kümeler vardır. Buradan hareketle  $U \times Y$  ve  $V \times Y$  sırasıyla  $(a, b)$  ve  $(x, y)$ 'nin ayrık açık komşulukları olur. Burada  $(U \times Y) \cap (V \times Y) = (U \cap V) \times Y = \emptyset$  olduğuna dikkat edelim.  $b \neq y$  olması durumunda da ispat benzerdir.

□

$X$  kümesi üzerinde tanımlanan tümleyeni sayılabilen topolojisine göre  $\tau = \{A \subseteq X \mid A^c \text{ sayılabilir}\} \cup \{\emptyset\}$ ,  $(a_n)$  dizisi  $a \in X$  elemanına yakınsar ancak ve ancak  $(a_n)$  dizisinin terimleri kısmen  $a$  olmalıdır, yani  $(a_n) = (a_1, a_2, \dots, a_{n_0}, a, a, \dots)$  şeklindedir. Bunun ispatı topoloji derslerinden iyi bilindiği için ihmal eder, ispatı çarpım uzaylara aşağıdaki şekilde adapte ederiz. .

**Teorem 1.1.8.**  $X$  ve  $Y$  üzerindeki tümleyeni sayılabilir topolojisi ile dikkate alındığında  $X \times Y$  uzayında olan  $(a_n, b_n)$  dizisi  $(a, b)$  noktasına yakınsar gerek ve yeter şart dizinin terimleri kısmen  $(a, b)$  elemanından ibarettir.

**İspat:**  $X \times Y$  çarpım uzayında  $(a_n, b_n)$  dizisi  $(a, b)$  noktasına yakınsar ise  $(a_n)$  dizisi  $X$  de  $a$  ve  $(b_n)$  dizisi de  $Y$  de  $b$  noktasına yakınsar.  $X$  ve  $Y$  uzayların topolojileri tümleyeni sayılabilir olduğundan  $(a_n)$ 'nin terimleri kısmen  $a$  ve  $(b_n)$ 'nin terimleri kısmen  $b$ 'dir. Bundan dolayı  $(a_n, b_n)$  dizisinin terimleri kısmen  $(a, b)$  dir.

Tersine olarak eğer  $(a_n, b_n)$  dizisinin terimleri kısmen  $(a, b)$  ise açık olarak bu dizi  $(a, b)$  noktasına yakınsar. □

**Not 1.1.9.** Tümleyeni sayılabilir topolojilerin çarpımı genelde tümleyeni sayılabilir topoloji değildir. Aşağıdaki örneği verebiliriz.

**Örnek 1.1.10.** Tümleyeni sayılabilir topolojilerin çarpımının genelde tümleyeni sayılabilir topoloji olmadığı da gösterilebilir.  $\mathbb{R}$  üzerinde tümleyeni sayılabilir topolojisi verilsin. Örneğin  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$  alt kümesi  $\mathbb{R}$  nin tümleyeni sonlu topolojisinde açık olduğundan  $A = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}) \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{N})$  çarpım alt kümesi  $\mathbb{R}^2$  nin çarpım topolojisine göre açıktır ancak tümleyeni sonlu topolojisine göre açık değildir, çünkü  $A$  alt kümesi

$\mathbb{R}^2$  deki açık birim dilimlerden oluşan alt küme olup tümleyeni sayılabilir değildir. Bundan dolayı  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  üzerindeki çarpım topolojisi tümleyeni sayılabilir topoloji değildir.

**Not 1.1.11.** Tümleyeni sonlu olan topolojilerin çarpımının tümleyeni sonlu topoloji olmadığına da dikkat edelim. Bununla ilgili aşağıdaki örneği verebiliriz.

**Örnek 1.1.12.** Boştan farklı  $X$  ve  $Y$  kümeleri üzerinde tümleyeni sonlu topolojileri verilsin.  $X \times Y$  üzerindeki çarpım topolojisinin genelde tümleyeni sonlu topoloji olmadığına bir örnek verelim. Örneğin  $\mathbb{R}$ , üzerindeki tümleyeni sonlu topolojisi ile göz önüne alınsın.  $\mathbb{R}^2$  üzerindeki çarpım topoloji ile tümleyeni sonlu topolojinin farklı olduğunu gösterelim.  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  alt kümesi tümleyeni sonlu topolojide açık olduğundan  $A = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$  çarpım kümesi  $\mathbb{R}^2$  nin çarpım topolojisine göre açıktır ancak tümleyeni sonlu topolojisine göre açık değildir, çünkü  $A = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$  alt kümesi  $\mathbb{R}^2$  den eksenlerin çıkarılmasıyla elde edilen küme olduğundan  $A^c$  sadece eksenlerden oluşan küme olup sonlu değildir.

Çarpım topolojik uzaylarında aşağıdaki bazı yakınsak dizi örneklerini verebiliriz.

**Örnek 1.1.13.** Bir  $\mathbb{R}^2$  de  $(a, b)$  verilsin.  $\tau = \{G \subseteq \mathbb{R}^2 \mid (a, b) \in G^c \text{ veya } G^c \text{ sonlu}\}$  sınıfı  $\mathbb{R}^2$  üzerinde bir topolojidir. Bu topolojiye göre aşağıdaki dizilerin limitlerini araştıralım.

(a)  $(a_n, b_n) = ((1, 1), (0, 0), (1, 1), (0, 0), \dots)$  dizisi  $\mathbb{R}^2$ 'de hiç bir noktaya yakınsamaz, yani limiti yoktur. Çünkü  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  için  $\{(0, 0), (1, 1)\} \setminus \{(x, y)\} = G$  alırsak  $G^c$  kümesi  $(x, y)$ 'nin bir açık komşuluğudur fakat dizinin terimlerini kısmen içermez. Bu nedenle  $(a_n, b_n)$  dizisi  $(x, y)$  elemanına yakınsamaz. Benzer nedenle bu dizi hiç bir noktaya yakınsak değildir.

(b) (a)'dakine benzer yolla  $(a_n, b_n) = ((1, 1), (0, 0), (a, a), (1, 1), (0, 0), (a, a), \dots)$  dizisinin de yakınsak olmadığıdır.

(c)  $(a_n, b_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$  dizisi  $(a, b)$  noktasına yakınsar. Hakikaten  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  noktasının  $G \in \tau$  açık komşuluğu verilmesi halinde  $G^c$  sonlu olacağından  $(a_n, b_n)$  dizisi kısmen  $G$  içinde kalır. Fakat  $(a_n, b_n)$  dizisi  $(a, b)$  den farklı bir  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  noktasına yakınsak olamaz. Bunun için  $(a, b)$  elemanından farklı bir  $(x, y) \in \mathbb{R}$  noktası alındığında

$H = \{(x, y)\}$  tek nokta kümesi  $(x, y)$ 'nin bir açık komşuluğu ancak  $(a_n, b_n)$  dizisinin terimlerini kısmen içermez.

(d)  $(a_n, b_n) = ((1, 1), (2, 2), (3, 3), \dots)$  dizisi dikkate alındığında  $(c)$ 'dekine benzer olarak sadece  $(a, b) \in \mathbb{R}$  noktasına yakınsadığı sonucu elde edilir.

(e)  $(a_n, b_n) = ((1, 1), (2, 2), (a, a), (3, 3), (4, 4), (a, a), \dots)$  dizisi de  $(c)$ 'dekine şekilde sadece  $(a, b) \in \mathbb{R}$  noktasına yakınsar.

Topolojik uzaylarda bilinen bazı hususları çarpım uzaylara aiaudaki iekilde adapte edebiliriz.

**Önerme 1.1.14.** *Sonsuz  $X \times Y$  çarpım kümesi tümleyeni sonlu topoloji ile göz önüne alınsın. Terimleri farklı olan bir  $(a_n, b_n)$  dizisi  $X \times Y$  nin tüm noktalarına yakınsar.*

**İspat:** Bir  $(x, y) \in X \times Y$  elemanı ile  $(x, y)$  nin herhangi bir  $U \times V$  açık komşuluğu verilsin.  $X \times Y$  nin tümleyeni sonlu topolojisine göre  $U \times V$  açık olduğundan ya  $U \times V = X \times Y$  ya da tümleyeni  $(U \times V)^c$  sonludur. Birinci durumda dizinin tüm terimleri  $U \times V$  de dir. ikinci durumda  $(U \times V)^c$  de  $(a_n)$  nin en fazla sonlu sayıda terimleri bulunacağından dizinin terimleri kısmen  $U \times V$  de kalır. Bundan dolayı  $(a_n, b_n)$  dizisi  $(x, y) \in X \times Y$  noktasına dolayısıyla  $X \times Y$  nin her noktasına yakınsar.  $\square$

## 2. BÖLÜM

### ÇARPIM UZAYLARDA DİZİSEL AÇIK VE DİZİSEL KAPALI KÜMELER

#### 2.1. Dizisel Kapalı ve Dizisel Açık Çarpım Kümeler

Çarpım uzaylarda çarpım kümelerinin dizisel kapanışları ve dizisel içleri tanımlanmıştır. Bu tanımlar çarpım kümelerinin dizisel açık, dizisel kapalı olmalarını tanımlamamıza katkı sağlar. Tüm bunlardan dizisel çarpım uzaylar elde edilmiştir.

**Tanım 2.1.1.**  $X \times Y$  çarpım uzay,  $A \times B \subseteq X \times Y$  alt küme ve  $(x, y) \in X \times Y$  verilsin.  $A \times B$ 'nin elemanlarından oluşan ve limiti  $(x, y)$  olan  $(a_n, b_n)$  dizisi bulunduğunda  $(x, y)$  elemanı  $A \times B$ 'nin **dizisel kapanışında**, tüm bu elemanların kümesine  $A \times B$ 'nin **dizisel kapanışı** deriz ve  $\overline{A \times B}^D$  yazarız.  $\overline{A \times B}^D = A \times B$  olduğunda  $A \times B$  kümesini **dizisel kapalı** olarak adlandırırız.  $\square$

**Önerme 2.1.2.**  $X \times Y$  çarpım uzay,  $A \times B \subseteq X \times Y$  alt kümesi olduğunda şunlar vardır:

(a)  $A \times B \subseteq \overline{A \times B}^D \subseteq \overline{A \times B}$

(b)  $A \times B$  dizisel kapalıdır gerek ve yeter koşul  $\overline{A \times B}^D \subseteq A \times B$

(c)  $A \times B$  dizisel kapalıdır gerek ve yeter şart  $\overline{A \times B}^D = A \times B$

(d)  $A \times B$  kapalı ise dizisel kapalıdır

(e)  $A \times B$ 'nin dizisel kapalı olması için gerek ve yeter koşul  $A \times B$ 'nin terimlerinden seçilen herhangi yakınsak dizilerin limitleri de  $A \times B$ 'nin elemanı olmasıdır.

**İspat:** (a)  $(a, b) \in A \times B$  elemanına karşılık  $(a_n, b_n) = ((a, b), (a, b), \dots)$  sabit dizisinin limiti  $(a, b)$  olduğundan  $(a, b) \in \overline{A \times B}^D$  dir. Bu ise  $A \times B \subseteq \overline{A \times B}^D$  verir. Buna ilaveten  $(x, y) \in \overline{A \times B}^D$  olduğunda limiti  $(x, y)$  olan ve  $A \times B$ 'nin elemanlarından oluşan  $(a_n, b_n)$  dizisi bulunur.  $(a_n, b_n)$  dizisi  $(x, y)$  noktasına yakınsadığından dolayı

terimleri kısmen  $(x, y)$  nin her açık komşuluğundadır. Bundan dolayı  $(x, y)$  nin her açık komşuluğu ile  $A \times B$  arakesiti boştan farklıdır. Bu nedenle  $(x, y) \in \overline{A \times B}$  olup  $\overline{A \times B}^D \subseteq \overline{A \times B}$  dir. Bu ise  $(a)$ 'nın ispatını tamamlar.

(b) Eğer  $A \times B$  dizisel kapalı ise tanımdan dolayı  $\overline{A \times B}^D = A \times B$  ve de haliyle  $\overline{A \times B}^D \subseteq A \times B$  dir. Diğer yandan her zaman  $A \times B \subseteq \overline{A \times B}^D$  olduğundan tersine olarak eğer  $\overline{A \times B}^D \subseteq A \times B$  ise  $\overline{A \times B}^D = A \times B$ , yani  $A \times B$  dizisel kapalıdır.

(c) ifadesi (a) ile (b) nin veya tanımın direkt bir sonucu olarak elde edilir.

(d)  $A \times B$  kapalı iken  $\overline{A \times B} = A \times B$  ve (a) dan  $A \times B = \overline{A \times B}^D$  olduğundan  $A \times B$  dizisel kapalıdır.

(e) Tanım 2.1.1'nin sonucundan elde edilir. □

**Önerme 2.1.3.**  $X \times Y$  çarpım uzayında verilen  $A \times B \subseteq U \times V \subseteq X \times Y$  alt kümeleri olması şartıyla  $A \times B$  alt kümesinin  $X \times Y$  çarpımındaki dizisel kapanışı  $\overline{A \times B}^D$  ve  $U \times V$  deki dizisel kapanışı  $\overline{A \times B}_{U \times V}^D$  olduğunda  $\overline{A \times B}_{U \times V}^D = \overline{A \times B}^D \cap (U \times V)$  dir.

**İspat:** İspat tanımdan elde edilir. □

**Önerme 2.1.4.**  $X \times Y$  çarpım uzay,  $U \times V \subseteq X \times Y$  dizisel kapalı ve  $A \times B \subseteq U \times V$  olsun.  $A \times B \subseteq U \times V$  dizisel kapalıdır gerek ve yeter koşul  $A \times B \subseteq X \times Y$  dizisel kapalıdır.

**İspat:**  $U \times V \subseteq X \times Y$  alt kümesini dizisel kapalı olması şartı ile  $A \times B \subseteq U \times V$  alt kümesini dizisel kapalı olarak alalım.  $A \times B \subseteq X \times Y$  alt kümesi dizisel kapalıdır ispat edelim. Elemanları  $A \times B$  kümesinde bulunan ve limiti  $(x, y) \in X \times Y$  olan bir  $(a_n, b_n)$  dizisi seçelim.  $(a_n, b_n)$  dizisi  $U \times V$  çarpımında bulunduğu ve  $U \times V$  çarpım kümesi dizisel kapalı ve  $(x, y) \in U \times V$  dir.  $A \times B \subseteq U \times V$  alt kümesi dizisel kapalı olduğundan  $(x, y) \in A \times B$  dir. Bu gerekçelerden dolayı  $A \times B$  alt kümesi  $X \times Y$  de dizisel kapalıdır.

Karşıt olarak  $A \times B \subseteq X \times Y$ 'nin dizisel kapalı olduğunu varsayalım.  $A \times B \subseteq U \times V$  nin dizisel kapalı olduğunu ispat edelim.  $A \times B$  nin  $X \times Y$  deki dizisel kapanışı  $\overline{A \times B}^D$  ve  $U \times V$  deki dizisel kapanışı  $\overline{A \times B}_{U \times V}^D$  olmak üzere  $\overline{A \times B}_{U \times V}^D = \overline{A \times B}^D \cap (U \times V)$  olduğundan eğer  $(x, y) \in \overline{A \times B}_{U \times V}^D$  ise  $(x, y) \in \overline{A \times B}^D$  ve  $(x, y) \in U \times V$  dir.  $A \times B \subseteq$

$X \times Y$  dizisel kapalı olduğundan  $(x, y) \in A \times B$  dir. O halde  $A \times B \subseteq U \times V$  dizisel kapalıdır.  $\square$

**Örnek 2.1.5.**  $X \times Y$ 'nin topolojisi tümleyeni sonlu topoloji olsun. Bu takdirde  $A \times B \subseteq X \times Y$  için

$$\overline{(A \times B)}^D = \begin{cases} A \times B, & A \times B \text{ sonlu} \\ X, & A \times B \text{ sonsuz} \end{cases}$$

dir.

Eğer  $A \times B \subseteq X \times Y$  alt kümesi sonlu ise kapalıdır. Kapalı küme dizisel kapalı olduğundan  $\overline{(A \times B)}^D = A \times B$  dir.  $A \times B$  nin sonsuz olması durumunda terimleri farklı ve  $A \times B$  de olan bir  $(a_n, b_n)$  dizisi seçilir. Önerme 1.1.14 den bu dizi  $X \times Y$  nin her noktasına yakınsak olduğundan  $\overline{A \times B} = X \times Y$  dir.

**Örnek 2.1.6.** Boştan farklı  $X$  ve  $Y$  kümeleri için  $X \times Y$ 'nin topolojisi tümleyeni sayılabilir topoloji olduğunda,  $X \times Y$  nin tüm alt kümeleri dizisel kapalıdır. Gerçekten  $A \times B \subseteq X \times Y$  alt kümesi ve  $(x, y) \in \overline{A \times B}^D$  ise limiti  $(x, y)$  olan ve elemanları  $A \times B$  de bulunan  $(a_n, b_n)$  dizisi mevcuttur.  $(a_n, b_n)$  dizisinin elemanları kısmen  $(x, y)$  olduğundan  $(x, y) \in A \times B$  ve bu nedenle  $A \times B$  dizisel kapalıdır.

**Not 2.1.7.** Önerme 2.1.2 (a)'da bulunan  $\overline{A \times B}^D \subseteq \overline{A \times B}$  gerçeğinin karşıtı genelde doğru değildir. Örnek vermek gerekirse sayılamaz  $X \times Y$  çarpım kümesi tümleyeni sayılabilir topolojisi ile dikkate alındığında Örnek 2.1.6 den  $X \times Y$  nin sayılamaz bir  $A \times B \subseteq X \times Y$  alt kümesi için  $\overline{A \times B}^D = A \times B$  ancak  $\overline{A \times B} = X \times Y$  dir. O halde bu örnekten de görüldüğü üzere kapalı bir küme dizisel kapalı olduğu halde dizisel kapalı kümenin kapalı olması gerekmez. Bundan dolayı çarpım topolojik uzaylarında kapalı küme ve dizisel kapalı küme kavramları farklıdır.

**Önerme 2.1.8.**  $X \times Y$  çarpım topolojik uzayındaki kümelerin bir sınıfı  $\{A_i \times B_i \mid i \in I\}$  olsun. Aşağıdakiler sağlanır.

(a)  $\bigcup_{i \in I} \overline{A_i \times B_i}^D \subseteq \overline{\bigcup_{i \in I} A_i \times B_i}^D$  dir

(b)  $\overline{\bigcap_{i \in I} A_i \times B_i}^D \subseteq \bigcap_{i \in I} \overline{A_i \times B_i}^D$  dir

**İspat:** (a)  $(x, y) \in \bigcup_{i \in I} \overline{A_i \times B_i}^D$  ise bir  $i_0 \in I$  için  $(x, y) \in \overline{A_{i_0} \times B_{i_0}}^D$  dir. O halde terimleri  $A_{i_0} \times B_{i_0}$  çarpım kümesinde bulunan ve limiti  $(x, y)$  olan bir  $(a_n, b_n)$

dizisi mevcuttur.  $(a_n, b_n)$  dizisinin elemanları  $\bigcup_{i \in I} A_i \times B_i$  de olduğundan  $(x, y) \in \overline{\bigcup_{i \in I} A_i \times B_i}^D$  dir.

(b) Eğer  $(x, y) \in \overline{\bigcap_{i \in I} A_i \times B_i}^D$  ise elemanları  $\bigcap_{i \in I} A_i \times B_i$  de ve limiti  $(x, y)$  olan bir  $(a_n, b_n)$  dizisi vardır.  $(a_n, b_n)$  dizisinin tüm elemanları her bir  $A_i \times B_i$ 'de olması gerçeğinden  $(x, y) \in \overline{A_i \times B_i}^D$  dir. Bundan dolayı  $(x, y) \in \bigcap_{i \in I} \overline{A_i \times B_i}^D$  dir.  $\square$

O halde bu önermenin bir neticesi olarak aşağıdaki sonucu verebiliriz.

**Sonuç 2.1.9.** Çarpım uzaylarında dizisel kapalı kümelerin keyfi arakesitleri dizisel kapalıdır, çünkü  $A_i \times B_i$  çarpım alt kümeleri dizisel kapalı ise  $\overline{A_i \times B_i}^D \subseteq A_i \times B_i$  olup Önerme 2.1.8 (b) den  $\overline{\bigcap_{i \in I} A_i \times B_i}^D \subseteq \bigcap_{i \in I} \overline{A_i \times B_i}^D \subseteq \bigcap_{i \in I} A_i \times B_i$  elde edilir.

Çarpım topolojik uzaylarında bir kümenin dizisel içi aşağıdaki şekilde tanımlanır.

**Tanım 2.1.10.**  $X \times Y$  çarpım uzayının  $A \times B \subseteq X \times Y$  alt kümesi ve  $(a, b)$  elemanı verilsin. Eğer limiti  $(a, b)$  olan tüm diziler kısmen  $A \times B$ 'de ise  $A \times B$  kümesi  $(a, b)$ 'nin **dizisel komşuluğudur**.  $A \times B$  tüm noktalarının komşuluğu olduğunda  $A \times B$  **dizisel açıktır**.  $A \times B$ 'nin dizisel komşuluğu olduğu tüm noktaların kümesine  $A \times B$ 'nin **dizisel içidir** ve  $(A \times B)^{0D}$  ile gösterilir.  $\square$

O halde  $A \times B \subseteq X \times Y$  çarpım alt kümesi dizisel açık gerek ve yeter koşul bir  $(a, b) \in A \times B$  noktasına yakınsayan tüm  $(a_n, b_n)$  dizisinin elemanları kısmen  $A \times B$  içindedir.

Eğer  $A \times B$  kümesi  $(a, b)$ 'nin dizisel komşuluğu iken  $(a, b) \in A \times B$ 'dir. Bunu terimleri sabit olan  $(a_n, b_n) = ((a, b), (a, b), \dots)$  dizisinin limitinin  $(a, b)$  olmasından görürüz. Bundan dolayı  $(a_n, b_n)$  dizisinin terimleri kısmen  $A \times B$  da olduğundan  $(a, b) \in A \times B$  dir.

**Önerme 2.1.11.**  $X \times Y$  çarpım uzayında  $A \times B \subseteq X \times Y$  alt kümesi verilsin. Aşağıdakiler doğrudur.

(a)  $(A \times B)^0 \subseteq (A \times B)^{0D} \subseteq A \times B$  dir

(b)  $A \times B$ 'nin dizisel açık olması için gerek ve yeter koşul  $A \times B \subseteq (A \times B)^{0D}$ 'dir.

(c)  $A \times B$  dizisel açıktır gerek ve yeter koşul  $A \times B = (A \times B)^{0D}$  dir.

(d)  $A \times B$  açık olduğunda dizisel açıktır.

**İspat:** (a)  $(A \times B)^0$  açık kümedir. O halde eğer  $(a, b) \in (A \times B)^0$  ise  $(a, b)$  noktasına yakınsayan diziler kısmen  $(A \times B)^{0D}$ 'dedir. Varsayımdan  $A \times B$ 'dedir. Bu nedenle  $(a, b) \in (A \times B)^{0D}$  dir. Buna ilaveten  $(a, b) \in (A \times B)^{0D}$  ise  $(a, b)$  noktasına yakınsayan diziler  $(a_n, b_n)$  kısmen  $A \times B$ 'dedir. Terimleri sabit olan  $(a_n, b_n) = ((a, b), (a, b), \dots)$  dizisi de  $(a, b)$  noktasına yakınsar ve  $A \times B$ 'dedir.

(b)  $A \times B$  dizisel açık ve  $(a, b) \in A \times B$  iken  $(a, b)$  noktasına yakınsayan diziler kısmen  $A \times B$ 'de ve de  $(a, b) \in (A \times B)^{0D}$ 'dir. Diğer yandan eğer  $A \times B \subseteq (A \times B)^{0D}$  ise  $(a, b) \in A \times B$  iken  $(a, b) \in (A \times B)^{0D}$  olduğundan  $(a, b)$ 'ye yakınsayan diziler kısmen  $A \times B$ 'dedir. Bu nedenle  $A \times B$  dizisel açıktır.

(c)'nin ispatı (a) ve (b)'den elde edilir.

(d) Eğer  $A \times B$  açık ise (a)'dan  $A \times B = (A \times B)^{0D}$  ve de dizisel açıktır.  $\square$

**Örnek 2.1.12.** Tümleyeni sayılabilir topolojisine göre  $X \times Y$ 'nin tüm alt kümeleri dizisel açıktır. Bu topolojiye göre  $A \times B$ 'nin  $(a, b)$  noktasına yakınsayan dizilerin terimleri kısmen  $(a, b)$ 'dir ve de  $A \times B$ 'nin elemanıdır.

**Not 2.1.13.** Çarpım uzaylarda dizisel açık bir kümenin açık olmadığına dair bir örnek verelim.  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ , tümleyeni sayılabilir topoloji ile donatıldığı taktirde tüm alt kümeler dizisel açıktır ancak açık değildir. Örneğin  $\mathbb{Q}$  rasyonel sayılar kümesi olmak üzere  $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$  çarpım kümesi dizisel açıktır ancak tümleyeni sayılabilir olmadığından  $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$  açık değildir.

**Örnek 2.1.14.** Sonsuz  $X \times Y$  çarpım kümesi üzerinde tümleyeni sonlu topolojisi verilsin. Bu taktirde  $A \times B \subseteq X \times Y$  alt kümesi için

$$(A \times B)^{0D} = \begin{cases} A \times B, & (A \times B)^c \text{ sonlu} \\ \emptyset, & (A \times B)^c \text{ sonsuz} \end{cases}$$

dir. Eğer  $(A \times B)^c$  sonlu ise  $A \times B$  açık olduğundan Önerme 2.1.11 (d) den dizisel açık ve bundan dolayı  $(A \times B)^{0D} = A \times B$  dir.

$(A \times B)^c$  sonsuz ise  $(A \times B)^{0D} = \emptyset$  dir. Bunu göstermek için aksine olarak  $(a, b) \in (A \times B)^{0D}$  olduğunu varsayalım. Bu takdirde  $(a, b)$  noktasına yakınsayan dizilerin terimleri kısmen  $A \times B$  de kalır. Halbuki  $(A \times B)^c$  sonsuz iken terimleri farklı ve  $(A \times B)^c$  de olan bir  $(a_n, b_n)$  dizisi  $X \times Y$  nin her noktasına ve de  $(a, b)$  ye yakınsar ancak  $(a_n, b_n)$  dizisinin terimleri  $A \times B$  de kalmaz. Bu bir çelişkidir. Bundan dolayı  $(A \times B)^{0D} = \emptyset$  dir.

**Örnek 2.1.15.**  $X \times Y$  çarpım kümesi sonsuz ve  $(a, b) \in X \times B$  olsun.  $X \times Y$  çarpımı Örnek 2.1.5 de verilen  $\tau$  topolojisi ile dikkate alınsın. Buna göre bir  $A \times B \subseteq X \times Y$  için

$$(A \times B)^{0D} = \begin{cases} A \times B, & (A \times B)^c \text{ sonlu} \\ (A \times B) \setminus \{(a, b)\}, & (A \times B)^c \text{ sonsuz} \end{cases}$$

dir.

Eğer  $(A \times B)^c$  sonlu ise  $A \times B$  açık ve Önerme 2.1.11 (d) den dizisel açık olduğundan  $(A \times B)^{0D} = A \times B$  dir.

$(A \times B)^c$  sonsuz olsun.  $(a, b) \in (A \times B)^c$  ise  $A \times B$  açık olup dizisel açıktır. Bundan dolayı  $(A \times B)^{0D} = A \times B = (A \times B) \setminus \{(a, b)\}$  dir.  $(a, b) \in A$  olsun. Bu takdirde terimleri farklı olan  $(A \times B)^c$  deki bir  $(a_n, b_n)$  dizisi Önerme ?? den  $(a, b)$  noktasına yakınsar ancak kısmen  $A \times B$  de kalmaz. Bundan dolayı  $(a, b) \notin (A \times B)^{0D}$  dir. Diğer ayrıntılar Önerme ?? den takip edilebilir.

**Önerme 2.1.16.**  $X \times Y$  çarpım topolojik uzayında  $X \times Y$  nin alt kümelerinin bir  $\{A_i \times B_i \mid i \in I\}$  sınıfı verilsin. için

$$(a) \left( \bigcap_{i \in I} A_i \times B_i \right)^{0D} \subseteq \bigcap_{i \in I} (A_i \times B_i)^{0D} \text{ dir.}$$

$$(b) \bigcup_{i \in I} (A_i \times B_i)^{0D} \subseteq \left( \bigcup_{i \in I} A_i \times B_i \right)^{0D}$$

dir.

**İspat:** (a)  $(a, b) \in \left( \bigcap_{i \in I} A_i \times B_i \right)^{0D}$  ve  $(a_n, b_n) \rightarrow (a, b)$  ise  $(a_n, b_n)$  dizisinin terimleri kısmen  $\bigcap_{i \in I} A_i \times B_i$  de dir. Bundan dolayı  $(a_n, b_n)$  dizisinin terimleri kısmen her bir  $A_i \times B_i$  çarpım kümesinde olup  $(A_i \times B_i)^{0D}$  dir. Buradan  $(a, b) \in \bigcap_{i \in I} (A_i \times B_i)^{0D}$  olduğu elde edilir.

$$(b) (a, b) \in \bigcup_{i \in I} (A_i \times B_i)^{0D} \text{ ve } (a_n, b_n) \rightarrow (a, b) \text{ ise } (a_n, b_n) \text{ dizisi kısmen en az bir } A_{i_0} \times B_{i_0}$$

dedir. Bundan dolayı  $(a_n, b_n)$  kısmen  $\bigcup_{i \in I} A_i \times B_i$  de olup  $(a, b) \in (\bigcup_{i \in I} A_i \times B_i)^{0D}$  dir.

□

O halde bu önermeden aşağıdaki sonucu verebiliriz.

**Sonuç 2.1.17.** Çarpım uzaylarda dizisel açık kümelerin keyfi birleşimi dizisel açıktır.

**İspat:** Eğer her bir  $A_i \times B_i$  çarpım kümesi dizisel açık ise  $A_i \times B_i \subseteq (A_i \times B_i)^{0D}$  olduğundan Önerme 2.1.16 (b) den

$$\bigcup_{i \in I} (A_i \times B_i) \subseteq \bigcup_{i \in I} (A_i \times B_i)^{0D} \subseteq (\bigcup_{i \in I} A_i \times B_i)^{0D}$$

dir. Burandan  $\bigcup_{i \in I} (A_i \times B_i) \subseteq (\bigcup_{i \in I} A_i \times B_i)^{0D}$  dolayısıyla  $\bigcup_{i \in I} (A_i \times B_i)$  nin dizisel açık olduğu elde edilir. □

**Önerme 2.1.18.**  $X \times Y$  çarpım uzayında  $A \times B \subseteq X \times Y$  alt kümesinin dizisel açık olması için gerek ve gerek ve yeter koşul  $X \times Y \setminus A \times B$ 'nin dizisel kapalı olmasıdır.

**İspat:**  $A \times B \subseteq X \times Y$  çarpım alt kümesinin dizisel açık olduğunu varsayalım.  $X \times Y \setminus A \times B$  fark kümesinin dizisel kapalı olduğunu göstermek için Önerme 2.1.2 (b) den  $\overline{X \times Y \setminus A \times B}^D \subseteq X \times Y \setminus A \times B$  olduğunu gösterelim.  $(x, y) \in \overline{X \times Y \setminus A \times B}^D$  ise terimleri  $X \times Y \setminus A \times B$ 'de ve limiti  $(x, y)$  olan  $(x_n, y_n)$  dizisi vardır. Buradan  $(x, y) \in X \times Y \setminus A \times B$  dir. Çünkü  $A \times B$  dizisel açıktır. Eğer  $(x, y) \in A \times B$  olsaydı  $(x_n, y_n)$  çarpım dizisinin terimleri kısmen  $A \times B$ 'de olurdu. Halbuki  $(x_n, y_n)$  dizisinin terimleri  $X \times Y \setminus A \times B$  de olduğundan bu mümkün değildir. Bundan dolayı  $X \times Y \setminus A \times B$  dizisel kapalı olur.

İspatın yeterlilik kısmı için  $X \times Y \setminus A \times B$  nin dizisel kapalı ancak  $A \times B$  nin dizisel açık olmadığını varsayalım. Bu taktirde bir  $(a, b) \in A \times B$  noktasına yakınsayan ancak kısmen  $A \times B$  de olmayan bir  $(a_n, b_n)$  dizisi mevcuttur. O halde  $(a_n, b_n)$  dizisinin  $X \times Y \setminus A \times B$  tümleyen kümesinin içinde sonsuz adette terimi vardır.  $(a_n, b_n)$  dizisinin  $X \times Y \setminus A \times B$  deki terimlerinden mevcut  $(a_{n_k}, b_{n_k})$  alt dizisi de  $(a, b)$  noktasına yakınsar.  $X \times Y \setminus A \times B$  tümleyen kümesi dizisel kapalıdır.  $(a, b) \in X \times Y \setminus A \times B$  dir. Oysaki  $(a, b) \in A \times B$ 'dir. Bu bir çelişkidir. Bundan dolayı  $A \times B$ 'nin dizisel açık olduğu sonucu elde edilir. □

Çarpım uzaylarda dizisel uzayı tanımlamadan önce çarpım uzaylarında aşağıdaki önermeyi verelim.

**Önerme 2.1.19.**  $X \times Y$  çarpım uzayı ve tüm dizisel açık kümelerin sınıfı  $\tau^D$  olsun. Bu sınıf  $X \times Y$  üzerinde bir topolojidir. Bu  $\tau^D$  topolojisi çarpım topolojisinden daha incedir.

**İspat:** Önce  $\tau^D$  nin bir topoloji olduğunu göstermek için aşağıdaki topoloji şartlarının sağlandığını gösterelim.

[T1]  $X \times Y$  çarpım kümesi, her noktasının bir dizisel komşuluğudur, çünkü bir  $(a, b) \in X \times Y$  noktasına yakınsayan herhangi bir  $(a_n, b_n)$  dizisi kısmen  $X \times Y$ 'de dir. Bundan dolayı  $X \times Y \in \tau^D$  dir. İlaveten  $\emptyset \in \tau^D$ 'dir. Ters yönden eğer  $\emptyset$  kümesi  $\tau^D$ 'nin elemanı olmasaydı bazı noktalarının komşuluğu olmazdı. Bu ise çelişki teşkil eder.

[T2]  $A \times B \subseteq X \times Y$  ve  $U \times V \subseteq X \times Y$  çarpım alt kümeleri dizisel açık olsun.  $(A \times B) \cap (U \times V)$  arakesit kümesinin dizisel açık olduğunu ispat edelim. Buna denk olarak  $(A \times B) \cap (U \times V) \subseteq ((A \times B) \cap (U \times V))^{0D}$  olduğunu gösterelim. Bunun için bir  $(x, y) \in (A \times B) \cap (U \times V)$  noktası ile  $(x, y)$  noktasına yakınsayan bir  $(a_n, b_n)$  dizisi verilsin. Burada  $(x, y) \in A \times B = (A \times B)^{0D}$  ve  $(x, y) \in U \times V = (U \times V)^{0D}$  olduğundan  $(a_n, b_n)$  dizisi kısmen  $A \times B$  da ve benzer olarak  $(x, y) \in U \times V = (U \times V)^{0D}$  olduğundan  $(a_n, b_n)$  dizisi kısmen  $U \times V$  de dir. Buradan  $(a_n, b_n)$  dizisi kısmen  $A \times B \cap U \times V$  de olup  $(x, y) \in (A \times B \cap U \times V)^{0D}$ , yani  $(A \times B) \cap (U \times V) \subseteq ((A \times B) \cap (U \times V))^{0D}$  dir. Bu ise  $(A \times B) \cap (U \times V)$  nin dizisel açık olduğunu ispat eder.

[T3] Sonuç 2.1.17'den dizisel açık kümelerin çarpım uzaylarında keyfi birleşimi dizisel açıktır.

Tüm bunlardan  $\tau^D$  sınıfının  $X \times Y$  çarpım kümesi üzerinde bir topoloji olduğu sonucu elde edilir.

Bunlara ilaveten Önerme 2.1.11 (d) den  $A \times B$  açık kümesi dizisel açık olduğundan  $\tau^D$  topolojisinin  $\tau$  dan daha ince olduğu elde edilir.  $\square$

$X \times Y$  çarpım uzayı üzerinde Önerme 2.1.19 deki gibi tanımlanan  $\tau^D$  topolojisine göre bir  $A \times B \subseteq X \times Y$  alt kümesinin içi  $(A \times B)^{0s}$  olarak gösterilsin.

Buradan hareketle a)daki önermeyi verebiliriz.

**Önerme 2.1.20.**  $X \times Y$  çarpım uzayında  $A \times B \subseteq X \times Y$  için şunlar doğrudur.

(a)  $(A \times B)^{0s} \subseteq (A \times B)^{0D} \subseteq A \times B$  dır.

(b)  $A \times B$ 'nin dizisel açık olması için gerek ve yeter koşul  $A \times B = (A \times B)^{0s}$  olmasıdır.

(c)  $A \times B$ 'nin dizisel açık olması için gerek ve yeter şart  $A \times B \subseteq (A \times B)^{0s}$  dır.

(d)  $(A \times B)^{0s}$  dizisel açıktır.

(e)  $A \times B$  dizisel açık olduğunda  $(A \times B)^{0D} = (A \times B)^{0s}$  dır.

**İspat:** (a) Burada  $(A \times B)^{0s} = \bigcup \{U \times V \subseteq A \times B \mid U \times V \text{ dizisel açık}\}$  olarak tanımlandığını hatırlatalım. Eğer  $(a, b) \in (A \times B)^{0s}$  ise  $(a, b) \in U \times V \subseteq A$  olacak şekilde bir dizisel açık  $U \times V \subseteq X \times Y$  alt kümesi vardır. Buradan  $(a, b)$  noktasına yakınsayan her dizi kısmen  $U \times V$  ve de  $A \times B$  dır. Bundan dolayı  $(a, b) \in (A \times B)^{0D}$  dir.

(b)-(e) ifadelerin ispatları ise ilgili tanımlar kullanılarak kolayca elde edilir.  $\square$

**Tanım 2.1.21.**  $X \times Y$  çarpım topolojik uzayında bir  $A \times B \subseteq X \times Y$  alt kümesi için  $\bigcap \{K \times F : A \times B \subseteq K \times F \text{ ve } K \times F \text{ dizisel kapalı}\}$  kümesine  $A \times B$  **çarpım kümesinin s-kapanışı** denir ve  $\overline{A \times B}^s$  olarak yazılır.

Sonuç 2.1.9 den hareketle  $\overline{A \times B}^s$  s-kapanış kümesinin  $A \times B$  yi kapsayan en küçük dizisel kapalı çarpım kümesi olduğunu vurgulamak gerekir.

Çarpım uzaylarında çarpım kümelerinin s-kapanışları ile ilgili olarak şunları verebiliriz.

**Önerme 2.1.22.**  $X \times Y$  çarpım topolojik uzayında bir  $A \times B \subseteq X \times Y$  alt kümesi için şunları ifade ve ispat edebiliriz.

(a)  $A \times B \subseteq \overline{A \times B}^s \subseteq \overline{A \times B}$  dir.

(b)  $\overline{A \times B}^s$  dizisel kapalıdır.

(c)  $\overline{A \times B}^D \subseteq \overline{A \times B}^s$  dır.

(d)  $A \times B$  dizisel kapalıdır ancak ve ancak  $\overline{A \times B}^s \subseteq A \times B$  dir.

(e)  $A \times B$  dizisel kapalıdır ancak ve ancak  $\overline{A \times B}^s = A \times B$  dir.

**İspat:** (a) Tanım 2.1.21 den  $A \times B \subseteq \overline{A \times B}^s$  dir. Diğer yandan Önerme 2.1.2 (d) den kapalı kümeler dizisel kapalı olduğundan  $\overline{A \times B}$ ,  $A \times B$  yı kapsayan dizisel kapalı bir küme olduğundan  $\overline{A \times B}^s \subseteq \overline{A \times B}$  dir.

(b) Sonuç 2.1.9 den çarpım uzaylarda kümelerin dizisel kapalı olan çarpım kümelerin arakesitleri dizisel kapalı olduğundan  $\overline{A \times B}^s$  dizisel kapalıdır.

(c)  $(x, y) \in \overline{A \times B}^D$  ise terimleri  $A \times B$  de ve  $(x, y)$  noktasına yakınsayan bir  $(a_n, b_n)$  çarpım dizisi vardır. Buradan  $A \times B \subseteq K \times F$  ve  $K \times F$  dizisel kapalı ise  $(x, y) \in K \times F$  olduğundan  $(x, y) \in \overline{A \times B}^s$  dir.

(d)  $A \times B$  dizisel kapalı ise Tanım 2.1.21 den  $\overline{A \times B}^s \subseteq A \times B$  dir. Diğer yandan  $\overline{A \times B}^s \subseteq A \times B$  ise (a) ve (b) den  $A \times B$  dizisel kapalıdır.

(e) ifadesi (a) ile (d) nin bir sonucudur. □

**Tanım 2.1.23.**  $X \times Y$  çarpım topolojik uzayı verilmiş olsun. Eğer dizisel açık olan her  $A \times B$  çarpım alt kümesi açık ise bu uzay **çarpım dizisel uzay** olarak isimlendirilir denir.

**Not 2.1.24.** Önerme 2.1.11 (d) den  $X \times Y$  çarpımında  $A \times B$  açık alt kümelerin dizisel açık olduğu bilinir. Bu nedenle şu ifadeler denktir.

(a)  $X \times Y$  çarpım uzayı diziseldir.

(b)  $A \times B$  çarpım alt kümesinin açık olması için gerek ve yeter şart dizisel açık olmasıdır.

**Örnek 2.1.25.**  $X \times Y$  sayılamaz bir küme olsun.  $X \times Y$  çarpımı, üzerindeki tümleyeni sayılabilir topolojisine göre dizisel çarpım uzay değildir. Çünkü  $(a, b) \in A \times B \subseteq X \times Y$  ve  $(a_n, b_n) \rightarrow (a, b)$  ise  $(a_n, b_n)$  dizisinin terimleri kısmen  $(a, b)$  dir. Bundan dolayı  $(a_n, b_n)$  dizisi kısmen  $A$  da dır, yani  $A \times B$  çarpım kümesi dizisel açıktır. Ancak  $A \times B$  nin açık olması zorunlu değildir.

**Örnek 2.1.26.** tanımlanan topolojiye göre  $X \times Y$  çarpım topolojik uzayı bir dizisel uzaydır. Çünkü Örnek 2.1.15 den  $(A \times B)^0 = (A \times B)^{0D}$  olduğu görülür. Bu nedenle  $A \times B$  çarpımının açık olması için gerek ve yeter koşul açık olmasıdır.

**Örnek 2.1.27.**  $X \times Y$ , çarpımı tümleyeni sonlu topolojisi ile verilsin. Örnek 2.1.14'den  $(A \times B)^0 = (A \times B)^{0D}$  olduğunu biliriz. Bu nedenle uzay diziseldir. Buradan  $A \times B$  açıktır ancak ve ancak dizisel açıktır sonucu elde edilir.

**Örnek 2.1.28.**  $X \times Y$  çarpım uzayı birinci sayılabilir ise dizisel uzaydır. Özel olarak  $\mathbb{R}^2$  çarpım uzayı birinci sayılabilir bir uzay olduğundan dizisel çarpım uzayıdır.

**Örnek 2.1.29.**  $X \times Y$  çarpım uzayı Önerme 2.1.19'de tanımlı  $\tau^D$  topolojisi ile donatıldığında dizisel uzay olur.

**Önerme 2.1.30.**  $X \times Y$  çarpım topolojik uzayı diziseldir yeter ve yeter koşul dizisel kapalı olan çarpım kümeleri kapalıdır.

**İspat:** Önerme 2.1.18'den  $A \times B \subseteq X \times Y$  çarpım alt kümesi dizisel kapalıdır gerek ve yeter iart  $X \times Y \setminus A \times B$  tümleyeni dizisel açıktır olduğunu biliyoruz. Buradan hareketle ispat hemen elde edilir.  $\square$

**Tanım 2.1.31.**  $X \times Y$  çarpım uzayında  $A \times B \subseteq X \times Y$  alt kümesi ile  $(x, y) \in X \times Y$  elemanı verilsin. Elemanları  $A \times B \setminus \{(x, y)\}$ 'de ve limiti  $(x, y)$  olan bir  $(a_n, b_n)$  dizisi varsa  $(x, y)$  noktası  $A \times B$  çarpım kümesinin bir **dizisel yığılma noktasıdır**:  $A \times B$ 'nin dizisel yığılma noktalarının kümesi için  $(A \times B)^{D}$  yazılır.

**Örnek 2.1.32.**  $X \times Y$  sonsuz çarpım kümesi ve  $(a, b) \in X \times Y$  olsun.  $X \times Y$  çarpım kümesi Örnek I de verilen topoloji ile göz önüne alınsın. Bu taktirde  $A \times B \subseteq X \times Y$  için

$$(A \times B)^{D} = \begin{cases} \emptyset, & A \times B \text{ sonlu} \\ \{(a, b)\}, & A \times B \text{ sonsuz} \end{cases}$$

dır.

**Çözüm:**  $A \times B$  sonlu iken Önerme ?? den dolayı bir  $(x, y) \in X \times Y$  için terimleri  $A \times B \setminus \{(x, y)\}$ 'de ve limiti  $(x, y)$  olan bir dizi yoktur. Bu düşünceden hareketle  $(A \times B)^{D} = \emptyset$  dir.

$A \times B$  sonsuz olması halinde Oneratumsondiyak'den elemanları  $A \times B \setminus \{(a, b)\}$ 'de ve limiti  $(a, b)$  olan bir  $(a_n, b_n)$  çarpım dizisi bulunur. Bu gerekçeden dolayı  $(a, b) \in (A \times B)^{D}$  dir. Buna ilave olarak  $A \times B$ 'nin  $(a, b)$ 'dan başka yığılma noktası yoktur.

**Örnek 2.1.33.**  $X \times Y$  çarpım kümesi tümleyeni sayılabilir topolojisi ile donatılsın. Bu taktirde  $A \times B \subseteq X \times Y$  alt kümesinde  $(A \times B)^{D} = \emptyset$  dir. Bunun gerekçesi elemanları  $A \times B \setminus \{(x, y)\}$ 'de limiti  $(x, y)$  olan hiç bir dizi olmamasıdır. Bu topolojiye göre limiti  $(x, y)$  olan dizilerin terimleri kısmen  $(x, y)$ 'dir.

## 2.2. Birinci Sayılabilir Uzaylar

Bu kesimde birinci sayılabilir çarpım uzaylar üzerinde durulacak ve bazı sonuçlar verilecektir.

**Tanım 2.2.1.**  $X \times Y$  çarpım uzayının her  $(x, y) \in X \times Y$  elemanında sayılabilir yerel baz varsa çarpım uzayına **birinci sayılabilir çarpım uzayı** denir.

O halde bir  $X \times Y$  çarpım uzayı birinci sayılabilir dir ancak ve ancak  $X$  ve  $Y$  uzayları birer birinci sayılabilir uzaylar dır.

**Örnek 2.2.2.**  $x \in \mathbb{R}$  olsun.  $\{(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$  açık komşuluklarının sınıfı sayılabilir ve  $x \in \mathbb{R}$ 'de yerel bazdır. Bundan dolayı  $\mathbb{R}$ , alışılmış uzayı birinci sayılabilirdir.

Benzer olarak  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  merkezli ve  $r = \frac{1}{n}$  yarıçaplı açık disk  $\{D(x, \frac{1}{n})\}$  olmak üzere  $\{D(x, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$  sınıfı  $(x, y)$  noktasında sayılabilir ve yerel bazdır. Bu nedenle  $\mathbb{R}^2$  çarpım uzayı birinci sayılabilir.

Daha genel bir terimlerle vermek gerekirse  $(X, d)$  metrik uzayında  $x \in X$  için tüm açık disklerin sınıfı  $\{D(x, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$   $x$  noktasında yerel bazdır ve sayılabilirdir. Bundan ötürü herhangi  $(X, d)$  metrik uzayı birinci sayılabilirdir.

**Örnek 2.2.3.**  $X \times Y$  çarpım uzayı sonlu ise birinci sayılabilirdir.

**Örnek 2.2.4.** Ayrık (diskre) topolojiye göre  $X \times Y$  çarpım uzayı birinci sayılabilirdir.  $(x, y) \in X \times Y$  için tek bir  $\{(x, y)\}$  kümesinden ibaret  $\mathcal{B}_x$  sınıfı  $(x, y)$  noktasında yerel bazdır.

Topoloji ders notlarından bildiğimiz kadarıyla ‘sayılamaz  $X$  kümesi, üzerindeki tümleyeni sonlu topoloji ile donatılırsa birinci sayılabilir uzay değildir’. Buradan hareketle tümleyeni sonlu  $\mathbb{R}^2$  uzayı, birinci sayılabilir uzay olamaz.

Birinci sayılabilir uzayın alt uzayının da sayılabilir olmasından hareketle çarpım uzaylar için de benzer ifade doğru olur.

Topoloji notlarından hatırlanacağı üzere birinci sayılabilir  $X$  uzayında  $a \in X$  ve  $A \subseteq X$  olmak üzere ‘ $a \in \bar{A}$ ’dır ancak ve ancak  $(a_n) \rightarrow a$  olacak şekilde  $A$  da bir  $(a_n)$  dizisi vardır’.

Bu sonuç çarpım uzaylar için aşağıdaki şekilde ifade edilir.

**Teorem 2.2.5.** Birinci sayılabilir  $X \times Y$  çarpım uzayında  $A \times B \subseteq X \times Y$  alt kümesi ve  $(a, b) \in X \times Y$  noktası için aşağıdaki ifadeler denktir.

$$(a) (a, b) \in \overline{A \times B} = \bar{A} \times \bar{B}$$

(b)  $(a_n, b_n) \rightarrow (a, b)$  olacak şekilde  $A \times B$  çarpım kümesinde bir  $(a_n, b_n)$  çarpım dizisi vardır.

Birinci sayılabilir uzayların sonlu çarpımının da birinci sayılabilir olması ile ilgili aşağıdaki önerme ifade edilebilir.

**Önerme 2.2.6.**  $X_1, X_2, \dots, X_n$  topolojik uzayların çarpım uzayı  $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$  olsun. Her bir  $X_i$  uzayının birinci sayılabilir olması için gerek ve yeter koşul  $X$  çarpım uzayının birinci sayılabilir olmasıdır.

**Örnek 2.2.7.**  $X \times Y$  çarpımını sonsuz bir küme ve  $(a, b) \in X \times Y$  ise Örnek I de verilen topolojiye göre  $X \times Y$  uzayı birinci sayılabilir olamaz.

$(a, b) \in X \times Y$  noktasının sayılabilir yerel bazı yoktur. bulunamaz. iddianın tersine olarak  $\mathcal{B} = \{A_i \times B_i : i \in I\}$  sınıfının  $(a, b)$  noktasının sayılabilir yerel bazı olduğunu varsayalım. Burada her bir  $(A_i \times B_i)^c$  sonlu ve de  $\bigcup_{i \in I} (A_i \times B_i)^c = (\bigcap_{i \in I} A_i \times B_i)^c$  sayılabilir dir. Bundan dolayı  $\bigcap_{i \in I} A_i \times B_i$  sayılamaz olup  $(a, b)$  dan farklı elemanlar vardır. Bir  $(x, y) \in \bigcap_{i \in I} A_i \times B_i$  için  $\{(x, y)\}^c$  kümesi  $(a, b)$  nin açık komşuluğudur, fakat  $(a, b) \in A \times B \subseteq \{(x, y)\}^c$  biçiminde bir  $A \times B \in \mathcal{B}$  yoktur.

### 3. BÖLÜM

#### ÇARPIM UZAYLARDA DİZİSEL SÜREKLİLİK

Bu bölümde, çarpım uzaylarda dizisel süreklilik kavramı araştırılacaktır..

##### 3.1. Çarpım Dizisel Süreklilik

**Tanım 3.1.1.**  $X$  ve  $Y$  topolojik uzaylar,  $f: X \rightarrow Y$  bir fonksiyon ve  $a \in X$  olsun. Eğer limiti olan tüm  $(a_n)$  dizileri için  $(f(a_n))$  görüntü dizisinin limiti  $f(a)$  ise  $f$ 'nin  $a$  noktasında **dizisel sürekli** olduğu söylenir.  $f$ ,  $X$ 'in tüm noktalarında dizisel sürekli ise  $f$ 'ye dizisel sürekli dir **dizisel sürekli dir** denir.

Bu tanımı çarpım uzaylar için şu şekilde ifade ederiz.

$X \times Y$  ve  $U \times V$  çarpım topolojik uzaylarında  $f: X \times Y \rightarrow U \times V$  fonksiyonunun  $(a, b)$  noktasında sürekli olması için gerek ve yeter koşul limiti  $(a, b)$  olan dizilerin  $(f(a_n, b_n))$  görüntü dizilerin limiti  $f(a, b)$  dır.

Süreklilik ve dizisel süreklilik tanımları aşağıdaki ilişkiye sahiptir.

**Önerme 3.1.2.** Sürekli olan  $f: X \times Y \rightarrow U \times V$  fonksiyonu dizisel sürekli dir.

**İspat:**  $f: X \times Y \rightarrow U \times V$  fonksiyonu sürekli ve  $(a_n, b_n)$  dizisi  $(a, b)$  noktasına yakınsasın.  $(f(a_n, b_n))$  görüntü dizisinin  $f(a, b)$  noktasına yakınsadığını gösterelim. Bunun için  $f(a, b)$  noktasının bir  $A \times B$  açık komşulu verisin.  $f$  nin sürekli olmasından  $f^{-1}(A \times B)$  ters görüntüsü  $(a, b)$  noktasının açık bir komşuluğudur.  $(a_n, b_n)$  dizisi  $(a, b)$  noktasına yakınsadığından dizinin terimleri kısmen  $f^{-1}(A \times B)$  içindedir. Bundan dolayı  $f(a_n, b_n)$  dizisi de kısmen  $A \times B$  içindedir. O halde  $f(a_n, b_n)$  dizisi  $f(a, b)$  noktasına yakınsar. Burada  $(a, b)$  noktası keyfidir. Her nokta için bu durum geçerli olduğundan  $f$  fonksiyonu dizisel sürekli dir.  $\square$

Bu önermenin tersinin genelde doğru olmadığına çarpım uzaylardan bir örnek verelim.

**Örnek 3.1.3.**  $\mathbb{R}^2$ 'nin topolojisi tümleyeni sayılabilir  $\tau$  topolojisi ve  $\mathbb{R}$ 'nin topolojisi  $\mathcal{U}$  alışılmış topoloji ise  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x$  birinci izdüşüm fonksiyonu dizisel süreklidir. Çünkü  $\mathbb{R}^2$  nin tümleyeni sayılabilir topolojisine göre  $(a, b)$  noktasına yakınsayan bir  $(a_n, b_n)$  dizisinin terimleri kısmen  $(a, b)$  dir. Dolayısıyla  $f(a_n, b_n)$  görüntü dizisinin terimleri de kısmen  $f(a, b)$  dir. Bundan dolayı  $f(a_n, b_n)$  dizisi  $f(a, b)$  noktasına yakınsar. O halde  $f$  fonksiyonu  $(a, b)$  noktasında dizisel süreklidir. Bu nokta keyfi seçildiğinden bu durum  $\mathbb{R}^2$  nin tüm noktaları için doğrudur. Bundan dolayı  $f$  fonksiyonu dizisel süreklidir. Fakat  $f$  sürekli değildir. Çünkü örneğin  $U = (0, 1) \subseteq \mathbb{R}$  açık aralığı alışılmış topolojiye göre  $\mathbb{R}$  de açıktır ancak  $f^{-1}(U)$  ters görüntüsü tümleyeni sonlu topolojisine göre  $\mathbb{R}^2$  de açık değildir. Bunun gerekçesi ise ' $f^{-1}(U)$  nin tümleyeni sonlu değildir'. Bundan dolayı  $f$  fonksiyonu sürekli değildir.

**Önerme 3.1.4.**  $X \times Y$  herhangi bir çarpım topolojik uzay ve  $U \times V$  çarpım uzayı Hausdorff ise  $f: X \times Y \rightarrow U \times V$  verilsin. Şunlar denktir.

(a)  $f$  dizisel süreklidir;

(b)  $X \times Y$  çarpım uzayında  $(a_n, b_n)$  çarpım dizisi yakınsak iken  $(f(a_n, b_n))$  görüntü dizisi de  $U \times V$  çarpım uzayında yakınsaktır.

**İspat:** Tanım 3.1.1 den  $(a) \Rightarrow (b)$  gerektirmesi aşıkardır.

$(b) \Rightarrow (a)$  :  $X \times Y$  çarpım uzayında yakınsak olan  $(a_n, b_n)$  çarpım dizilerinin  $(f(a_n, b_n))$  görüntü dizileri  $U \times V$  çarpım uzayında yakınsak olsun.  $f$  fonksiyonunun dizisel sürekli olduğunu ispat edelim. Bunun için  $X \times Y$  çarpım topolojik uzayında  $(a_n, b_n)$  çarpım dizisinin  $(a, b)$  noktasına yakınsadığını varsayalım.  $f(a_n, b_n)$  görüntü dizisinin  $f(a, b)$  noktasına yakınsadığını gösterelim. Eğer  $(a_n, b_n)$  çarpım dizisinin limiti  $(a, b)$  ise  $(a'_n, b'_n) = ((a_1, b_1), (a, b), (a_2, b_2), (a, b), \dots, (a_n, b_n), (a, b), \dots)$  dizisinin de limiti  $(a, b)$ 'dir. (b) kabulünden

$$(f(a'_n, b'_n)) = (f(a_1, b_1), f(a, b), f(a_2, b_2), f(a, b), \dots, f(a_n, b_n), f(a, b), \dots)$$

görüntü dizisi yakınsaktır. Hausdorff uzayda dizinin limiti tektir. Bundan dolayı bu dizinin limiti  $f(a, b)$ 'dir. Aksi halde eğer bu dizi farklı bir  $(x, y)$  noktasına

yakınsak olsaydı  $(f(a, b), f(a, b), \dots)$  sabit alt dizisi de aynı  $(x, y)$  noktasına yakınsak olurdu. Halbuki bu sabit dizi  $f(a, b)$  noktasına yakınsadığından bu mümkün değildir. Buradan  $(f(a_n, b_n))$  de  $f(a, b)$  alt dizisinin limiti de  $(x, y)$ 'dir.  $\square$

**Teorem 3.1.5.**  $f: X \times Y \rightarrow U \times V$  fonksiyonunun dizisel sürekliliği için gerek ve yeter şart dizisel açık  $A \times B \subseteq U \times V$  alt kümelerinin  $f^{-1}(A \times B) \subseteq X \times Y$  ters görüntülerinin dizisel açık olmasıdır.

**İspat:**  $f$ 'nin dizisel sürekliliği ve  $A \times B \subseteq U \times V$  alt kümesinin dizisel açık olduğunu kabul edelim.  $f^{-1}(A \times B)$  ters görüntüsünün dizisel açık olduğunu ispat edelim. Bunun yerine herhangi bir  $(a, b) \in f^{-1}(A \times B)$  için limiti  $(a, b)$  olan tüm  $(a_n, b_n)$  dizilerinin kısmen  $f^{-1}(A \times B)$  de kaldığını gösterelim.  $f$ 'nin dizisel sürekliliğinden eğer  $(a_n, b_n)$  dizisinin limiti  $(a, b)$  ise  $(f(a_n, b_n))$ 'nin limiti de  $f(a, b)$  dir. Burada  $(a, b) \in f^{-1}(A \times B) \implies f(a, b) \in A \times B$  ve  $A \times B$  dizisel açık olduğundan  $(f(a_n, b_n))$  dizisi kısmen  $A \times B$  çarpım kümesi içindedir. Bundan dolayı  $(a_n, b_n)$  dizisi kısmen  $f^{-1}(A \times B)$  ters görüntüsünde ve de dolayısıyla  $f^{-1}(A \times B)$  dizisel açıktır.

Diğer taraftan  $U \times V$  çarpım uzayında dizisel açık olan  $A \times B \subseteq U \times V$  alt kümelerin  $f^{-1}(A \times B)$  ters görüntüsü  $X \times Y$  de dizisel açık olsun.  $f$  fonksiyonunun dizisel sürekliliğini gösterelim.  $X \times Y$  çarpım uzayında  $(a, b) \in X \times Y$  noktasına yakınsayan bir  $(a_n, b_n)$  dizisi verilsin.  $(f(a_n, b_n))$  görüntü dizisinin  $f(a, b)$  noktasına yakınsadığını gösterelim.  $U \times V$  çarpım uzayında  $f(a, b)$  noktasının bir  $A \times B$  açık komşuluğu verilsin. Açık bir küme dizisel açık olduğundan  $A \times B$  çarpım kümesi dizisel açıktır. O halde varsayımdan  $f^{-1}(A \times B)$  ters görüntüsü  $X \times Y$  de dizisel açıktır ve  $(a, b) \in f^{-1}(A \times B)$  dir. Burada  $(a_n, b_n) \rightarrow (a, b)$  olduğundan  $(a_n, b_n)$  dizisi kısmen  $f^{-1}(A \times B)$  dedir. Buradan  $(f(a_n, b_n))$  dizisi kısmen  $A \times B$  de olup  $(f(a_n, b_n)) \rightarrow f(a, b)$  dir.  $\square$

**Önerme 3.1.6.** Çarpım uzaylar arasında bir  $f: X \times Y \rightarrow U \times V$  fonksiyonu dizisel süreklidir ancak ve ancak her dizisel kapalı  $K \times F \subseteq U \times V$  alt kümesinin  $f^{-1}(K \times F) \subseteq X \times Y$  ters görüntüsü dizisel kapalıdır.

**İspat:**  $f$  fonksiyonunun dizisel sürekliliğini varsayalım. Dizisel kapalı olan  $K \times F \subseteq U \times V$  alt kümesinin  $f^{-1}(K \times F)$  ters görüntüsünün dizisel kapalı olduğunu gösterelim. Bunun yerine terimleri  $f^{-1}(K \times F) \subseteq X \times Y$  de ve limiti  $(a, b)$  olan bir

$(a_n, b_n)$  dizisi verilsin. Buradan hareketle  $(f(a_n, b_n))$  terimleri  $K \times F$  kümesinde olan bir dizidir.  $f$ 'nin dizisel sürekli olmasından  $(f(a_n, b_n))$ 'nin limiti  $f(a, b)$  dir. Burada  $K \times F$  dizisel kapalı olduğundan  $f(a, b) \in K \times F$  olup  $(a, b) \in f^{-1}(K \times F)$  dir. Bundan dolayı  $f^{-1}(K \times F)$  nin dizisel kapalı olduğu elde edilir.

Karşıt olarak kapalı  $K \times F \subseteq U \times V$  alt kümesinin  $f^{-1}(K \times F)$  ters görüntü kümesinin  $X \times Y$  çarpım uzayında dizisel kapalı olduğunu kabul edelim.  $f$  fonksiyonunun dizisel sürekli olduğunu gösterelim. Bunun için  $X \times Y$  çarpım topolojik uzayında  $(a, b) \in X \times Y$  noktasına yakınsayan bir  $(a_n, b_n)$  çarpım dizisi verilsin.  $(f(a_n, b_n))$  görüntü dizisinin  $f(a, b) \in U \times V$  noktasına yakınsadığını gösterelim.  $f(a, b)$  noktasının bir  $A \times B$  açık komşuluğu verilsin.  $A \times B$  çarpım kümesi  $U \times V$  çarpım topolojik uzayında açık dolayısıyla dizisel açık olduğundan  $U \times V \setminus A \times B$  tümleyeni dizisel kapalıdır. Buradan kabulümüzden dolayı  $f^{-1}(U \times V \setminus A \times B) = X \times Y \setminus f^{-1}(A \times B)$  dizisel kapalı olup  $f^{-1}(A \times B)$  dizisel açıktır. Burada  $(a_n, b_n) \rightarrow (a, b)$  ve  $(a, b) \in f^{-1}(A \times B)$  olduğundan  $(a_n, b_n)$  dizisinin terimleri kısmen  $f^{-1}(A \times B)$  de dir. Bundan dolayı  $(f(a_n, b_n))$  dizisi kısmen  $A \times B$  de olup  $(f(a_n, b_n)) \rightarrow f(a, b)$  dir.  $\square$

**Önerme 3.1.7.** Çarpım topolojik uzaylar arasında bir  $f: X \times Y \rightarrow U \times V$  fonksiyonu verilsin.  $f$ 'nin sürekli olması için gerek ve yeter koşul her  $A \times B \subseteq X \times Y$  alt kümesi için  $f(\overline{A \times B}^D) \subseteq \overline{f(A \times B)}^D$  dir.

**İspat:**  $f$  fonksiyonu dizisel sürekli,  $A \times B \subseteq X \times Y$  olsun.  $f(\overline{A \times B}^D) \subseteq \overline{f(A \times B)}^D$  olduğunu ispat edelim. Bir  $(u, v) \in \overline{f(A \times B)}^D$  noktası verilsin.  $f(x, y) = (u, v)$  olacak şekilde bir  $(x, y) \in \overline{A \times B}^D$  noktası alalım. O halde  $A \times B$  çarpım kümesinde  $(x, y)$  noktasına yakınsayan bir  $(a_n, b_n)$  çarpım dizisi vardır, yani  $(a_n, b_n) \rightarrow (x, y)$  dir.  $f$  fonksiyonu dizisel sürekli olduğundan  $(f(a_n, b_n))$  görüntü dizisi  $f(x, y) = (u, v)$  noktasına yakınsar. Burada  $(f(a_n, b_n))$  görüntü dizisi  $f(A \times B)$  da olduğundan Bundan dolayı  $(u, v) \in \overline{f(A \times B)}^D$  dir. Bu ise  $f(\overline{A \times B}^D) \subseteq \overline{f(A \times B)}^D$  olduğunu ispat eder.

Karşıt olarak her  $A \times B \subseteq X \times Y$  çarpım alt kümesi için  $f(\overline{A \times B}^D) \subseteq \overline{f(A \times B)}^D$  olduğunu kabul edelim.  $f$  fonksiyonunun dizisel sürekli olduğunu gösterelim. Bunun için Önerme 3.1.6 den  $U \times V$  çarpım uzayındaki dizisel kapalı kümelerin ters ters görüntüsünün  $X \times Y$  de dizisel kapalı olduğunu gösterelim.  $U \times V$  çarpım topolojik uzayında dizisel kapalı olan bir  $K \times F \subseteq U \times V$  alt kümesi verilsin.  $K \times F \subseteq$

$U \times V$  alt kümesi dizisel kapalı olduğundan  $\overline{K \times F}^D \subseteq K \times F$  dir. Buradan varsayımdan dolayı  $f(\overline{f^{-1}(K \times F)}^D) \subseteq \overline{f(f^{-1}(K \times F))}^D \subseteq \overline{K \times F}^D \subseteq K \times F$  ve de buradan hareketle  $\overline{f^{-1}(K \times F)}^D \subseteq f^{-1}(K \times F)$  olur. Buradan da istenilen şekilde  $f^{-1}(K)$  nin dizisel kapalı olduğu sonucu elde edilir.  $\square$

**Önerme 3.1.8.** Çarpım topolojik uzayların  $f: X \times Y \rightarrow U \times V$  fonksiyonunun dizisel sürekli olması için gerek ve yeter koşul  $A \times B \subseteq U \times V$  çarpım alt kümesi için  $f^{-1}((A \times B)^{0D}) \subseteq (f^{-1}(A \times B))^{0D}$  olmasıdır.

**İspat:**  $f$  fonksiyonu dizisel sürekli olsun. Bir  $A \times B \subseteq U \times V$  çarpım alt kümesi için  $f^{-1}((A \times B)^{0D}) \subseteq (f^{-1}(A \times B))^{0D}$  olduğunu ispat edelim. Bunun için de bir  $(x, y) \in f^{-1}((A \times B)^{0D})$  noktasını seçelim  $(x, y) \in (f^{-1}(A \times B))^{0D}$  olduğunu görelim.  $X \times Y$  çarpım uzayında  $(x, y)$  noktasına yakınsayan bir  $(a_n, b_n)$  dizisi seçelim bu dizinin terimlerinin kısmen  $f^{-1}(A \times B)$  kümesinde kaldığını gösterelim.  $f$  dizisel sürekli olduğundan  $(a_n, b_n) \rightarrow (x, y) \implies (f(a_n, b_n)) \rightarrow f(x, y)$  dir. Burada  $f(x, y) \in (A \times B)^{0D}$  olup  $(f(a_n, b_n))$  dizisi kısmen  $A \times B$  de olduğundan  $(a_n, b_n)$  dizisi kısmen  $f^{-1}(A \times B)$  de dir. Bundan dolayı  $(x, y) \in (f^{-1}(A \times B))^{0D}$  dir.

Tersine olarak  $A \times B \subseteq U \times V$  iken  $f^{-1}((A \times B)^{0D}) \subseteq (f^{-1}(A \times B))^{0D}$  olsun.  $f$  nin dizisel sürekli olduğunu göstermek için  $A \times B \subseteq U \times V$  çarpım alt kümesi dizisel açık iken  $f^{-1}(A \times B) \subseteq (f^{-1}(A \times B))^{0D}$  olduğunu göstermek yeterli olur. Eğer  $A \times B$  kümesi  $U \times V$  çarpım uzayında dizisel açık iken  $(A \times B)^{0D} = A \times B$  olduğundan varsayımdan  $f^{-1}(A \times B) \subseteq (f^{-1}(A \times B))^{0D}$  istenileni elde edilir.  $\square$

Şimdi çarpım uzaylarda dizisel sürekli olamayan bir fonksiyon örneği yazalım.

**Örnek 3.1.9.**  $\mathbb{R}^2$  üzerinde alışılmış topoloji  $\mathcal{U}$  ve  $\mathbb{R}$  üzerinde tümleyenli sayılabilir topoloji  $\tau$  olsun.  $\mathbb{R}^2$  üzerindeki alışılmış topolojinin aynı zamanda bir çarpım topoloji olduğunu biliyoruz. Aşağıda tanımlanan  $f: (\mathbb{R}^2, \mathcal{U}) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau)$  fonksiyonu dizisel sürekli değildir

$$f(x, y) = \begin{cases} x + 1, & x \geq 0 \\ x, & x < 0 \end{cases}$$

Her  $n \in \mathbb{N}$  için  $D(\theta, \frac{1}{n})$  açık diskten bir  $(a_n, b_n) \in D(\theta, \frac{1}{n})$  noktası seçerek bir  $(a_n, b_n)$

dizisini oluşturalım. Burada  $(a_n) = \frac{(-1)^n}{n}$  olarak alalım. Bu şekilde seçilen  $(a_n, b_n)$  dizisi  $\mathbb{R}^2$  de  $\theta = (0, 0)$  noktasına yakınsar ancak

$$f(a_n, b_n) = \begin{cases} \frac{1}{n} + 1, & n \text{ çift} \\ -\frac{1}{n}, & n \text{ tek} \end{cases}$$

olup  $(f(a_n, b_n))$  dizisi  $(\mathbb{R}, \tau)$  da yakınsak olamaz. Çünkü bu  $(f(a_n, b_n))$  görüntü dizisinin 1 ve 0 noktalarına yakınsayan iki alt dizisi vardır.

Aşağıdaki teoremden ifade edildiği gibi birinci sayılabilir uzaylara Süreklilik ve dizisel süreklilik eşdeğerdir. İspatı topoloji derslerinden bilindiği gibi yapılabilir. Bunda dolayı ispatını ihmal ederiz.

**Teorem 3.1.10.**  $(X, \tau)$  birinci sayılabilir topolojik uzay olsun. Herhangi bir  $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$  fonksiyonunun sürekli olması için gerek ve yeter koşul dizisel sürekli olmasıdır.

**Tanım 3.1.11.**  $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$  fonksiyonu verilsin. Eğer dizisel açık olan tüm  $A \subseteq X$  alt kümeleri için  $f(A)$  dizisel açık oluyorsa  $f$  fonksiyonuna **dizisel açıktır** denir.

Çarpım uzaylarda açık fonksiyonu aşağıdaki şekilde karakterize edebiliriz.

**Önerme 3.1.12.** Tüm  $A \times B \subseteq X \times Y$  çarpım alt kümelerine karşılık  $f((A \times B)^{0D}) \subseteq ((f(A \times B))^{0D})$  oluyorsa  $f: X \times Y \rightarrow U \times V$  fonksiyonu dizisel açıktır.

**İspat:**  $A \times B$  dizisel açık ise  $(A \times B)^{0D} = A \times B$  olduğundan varsayımdan dolayı  $f(A \times B) = f((A \times B)^{0D}) \subseteq ((f(A \times B))^{0D})$  olur. O halde  $f(A \times B)$  dizisel açıktır.  $\square$

**Tanım 3.1.13.**  $f: X \times Y \rightarrow U \times V$  fonksiyonu verilsin. Eğer her  $A \times B \subseteq X \times Y$  dizisel kapalı alt kümesi için  $f(A \times B)$  dizisel kapalı ise  $f$  ye **dizisel kapalı fonksiyon** denir.

**Önerme 3.1.14.** Her  $A \times B \subseteq X \times Y$  alt kümesi için  $\overline{f(A \times B)}^D \subseteq f(\overline{A \times B}^D)$  ise  $f: X \times Y \rightarrow U \times V$  fonksiyonu dizisel kapalıdır.

**İspat:**  $A \times B$  dizisel kapalı ise  $\overline{A \times B}^D = A \times B$  olduğundan varsayımdan  $\overline{f(A \times B)}^D \subseteq f(\overline{A \times B}^D) = f(A \times B)$  olur. O halde  $f(A \times B)$  dizisel kapalıdır.  $\square$

**Önerme 3.1.15.**  $f: X \times Y \rightarrow U \times V$  bire-bir ve örten fonksiyon olsun.  $f$  dizisel açıktır ancak ve ancak dizisel kapalıdır.

**İspat:**  $f$  bire-bir ve örten fonksiyon olsun.  $f(A \times B)^c = (f(A \times B))^c$ 'den ispat edilir.  $\square$



## 4. BÖLÜM

### ÇARPIM UZAYLARDA DİZİSEL KOMPAKTLIK VE DİZİSEL İRTİBATLILIK

#### 4.1. Dizisel Kompakt Çarpım Uzaylar

Dizisel kompakt bir kümenin veya uzayın genel tanımı şu şekildedir.

**Tanım 4.1.1.**  $(X, \tau)$  topolojik uzayında  $A \subseteq X$  alt kümesi verilsin. Terimleri  $A$ 'dan seçilen tüm  $(a_n)$  dizilerinin, limiti  $A$ 'da olan yakınsak alt dizileri varsa  $A$  alt kümesine **dizisel kompakt**, özel olarak  $X$  deki dizilerin yakınsak alt dizisi varsa  $(X, \tau)$  uzayına **dizisel kompakt uzay** denir.  $\square$

Benzer olarak  $X \times Y$  çarpım uzayında  $A \times B \subseteq X \times Y$  çarpım alt kümesinin dizisel kompakt olması için gerek ve yeter koşul limiti  $A \times B$ 'den seçilen tüm  $(a_n, b_n)$  dizilerinin limiti  $A \times B$  de olan yakınsak  $(a_{n_k}, b_{n_k})$  alt dizilerinin bulunmasıdır. Bunun özel durumu olarak  $X \times Y$  çarpım uzayının dizisel kompakt olması için gerek ve yeter koşul  $X \times Y$ 'deki tüm  $(a_n, b_n)$  dizilerinin yakınsak alt dizileri vardır.

Aşağıdaki önermenin ispatı dizisel kompakt uzay ve alt uzay tanımlarından izlenir. Bundan dolayı ayrıntılı ispatını ihmal ederiz.

**Önerme 4.1.2.**  $X \times Y$  çarpım uzayının bir  $A \times B \subseteq X \times Y$  alt kümesi verilsin. Aşağıdaki ifadeler denktir.

(a)  $A \times B$  çarpım alt kümesi  $X \times Y$ 'de dizisel kompaktır.

(b)  $A \times B$  alt çarpım uzayı dizisel kompaktır.

**Örnek 4.1.3.**  $X \times Y$  çarpım uzayında sonlu bir  $A \times B \subseteq X \times Y$  alt kümesi dizisel kompaktır. Bunun ispatını görmek için  $A \times B$  çarpım kümesi sonlu olmak üzere terimleri  $A \times B$ 'da olan herhangi bir  $(a_n, b_n)$  dizisi seçeriz.  $A \times B$  alt kümesi sonlu

olduğundan bu dizinin sonsuz tekrar eden en az bir  $(a_{n_0}, b_{n_0})$  terimi olacaktır. Buradan hareketle terimleri sabit olan  $(a_{n_k}, b_{n_k}) = ((a_{n_0}, b_{n_0}), (a_{n_0}, b_{n_0}), \dots)$  alt dizisi  $(a_{n_0}, b_{n_0}) \in A \times B$  sabit noktasına yakınsar.  $\square$

Bu ifadeden sonlu  $X \times Y$  çarpım uzayının dizisel kompakt olduğu neticesi elde edilmiş olur.

**Örnek 4.1.4.**  $\mathbb{R}^2$ , alışılmış topolojisine göre çarpım uzayıdır.  $A \times A = (0, 1) \times (0, 1)$  çarpım kümesi dizisel kompakt değildir. Örnek olarak terimleri  $A \times A$ 'dan alınan  $(a_n, b_n) = (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1})$  çarpım dizisinin, limiti  $A \times A$  da olan bir alt dizisi yoktur. Çünkü  $(a_n, b_n) = (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1})$  dizisi  $(0, 0)$  noktasına yakınsak olduğundan her alt dizisi de  $(0, 0)$  noktasına yakınsar ancak  $(0, 0)$  noktası  $A \times A$  çarpım kümesinin elemanı değildir.  $\square$

**Örnek 4.1.5.** Boş olmayan  $X \times Y$  çarpım kümesi üzerinde tümleyeni sonlu sayılabilir topolojisi ile  $A \times B \subseteq X \times Y$  çarpım alt kümesi verilsin.

$A \times B$  çarpım alt kümesi sonlu ise Örnek 4.1.3 den dizisel kompaktır.

$A \times B$  sonsuz ise dizisel kompakt değildir. Çünkü tümleyeni sonlu topolojisine göre  $X \times Y$  çarpım topolojik uzayında bir dizinin terimleri kısmen sabit olduğunda dizi yakınsaktır. Bundan dolayı  $A \times B$ 'nin sonsuz olması halinde terimleri farklı olacak şekilde  $A \times B$  de bir  $(a_n, b_n)$  dizisi seçildiğinde bu dizinin, limiti  $A \times B$  de olan yakınsak bir alt dizisi bulunamaz.  $\square$

**Önerme 4.1.6.**  $X \times Y$  çarpım uzayı dizisel kompakt olsun.  $A \times B$  çarpım alt kümesi dizisel kapalı ise dizisel kompaktır.

**İspat:**  $X \times Y$  çarpım topolojik uzayı dizisel kompakt ve  $A \times B \subseteq X \times Y$  çarpım alt kümesi dizisel kapalı olsun.  $A \times B$ 'nin dizisel kompakt olduğunu ispat edelim. Terimleri  $A \times B$ 'de bulunan bir  $(a_n, b_n)$  çarpım dizisi verilsin.  $X \times Y$  çarpım uzayının dizisel kompakt olmasından ötürü  $(a_n, b_n)$  çarpım dizisinin limiti  $X \times Y$ 'de olan bir  $(a_{n_k}, b_{n_k})$  alt dizisi vardır. Bu şekildeki  $(a_{n_k}, b_{n_k})$  alt dizisinin limiti  $(a, b)$  olsun. O halde  $(a, b) \in (A \times B)^D$  dir. Fakat  $k A \times B$  çarpım alt kümesi dizisel kapalı olduğundan  $(A \times B)^D \times A \times B$  dir. Bundan dolayı  $(a, b) \in A \times B$  dir. O halde  $A \times B$  dizisel kompaktır.  $\square$

**Önerme 4.1.7.** Çarpım uzayların bir fonksiyonu  $f: X \times Y \rightarrow U \times V$  dizisel sürekli olsun. Eğer  $A \times B \subseteq X \times Y$  çarpım alt kümesi dizisel kompakt ise  $f(A \times B)$  görüntü kümesi de dizisel kompaktır.

**İspat:**  $f: X \times Y \rightarrow U \times V$  çarpım uzayların fonksiyonu dizisel sürekli ve  $A \times B \subseteq X \times Y$  çarpım alt kümesi dizisel kompakt olsun.  $f(A \times B)$  nin dizisel kompakt olduğunu ispatlayalım. Bunun için  $f(A \times B)$  da bir  $(x_n, y_n)$  dizisi alalım. Her  $n \in \mathbb{N}$  için  $f(a_n, b_n) = (x_n, y_n)$  olacak şekilde  $A \times B$  da bir  $(a_n, b_n)$  dizisi seçelim.  $A \times B$  dizisel kompakt olduğundan  $(a_n, b_n)$  çarpım dizisinin, limiti  $A \times B$  de olan yakınsak bir  $(a_{n_k}, b_{n_k})$  alt dizisi vardır. Bu  $(a_{n_k}, b_{n_k})$  alt dizisinin limiti  $(a, b)$  olsun. Diğer taraftan  $f: X \times Y \rightarrow U \times V$  fonksiyonu dizisel sürekli olduğundan  $(f(a_{n_k}, b_{n_k})) = (x_{n_k}, y_{n_k})$  görüntü dizisi  $f(a, b) = (x, y) \in f(A \times B)$  noktasına yakınsar. Bundan dolayı  $(x_{n_k}, y_{n_k})$  dizisi  $(x_n, y_n)$  nin yakınsak bir alt dizisi olup  $f(A \times B)$  dizisel kompaktır.  $\square$

Bu önermenin bir neticesi olarak  $X \times Y$  çarpım topolojik uzayı dizisel kompakt  $f: X \times Y \rightarrow U \times V$  dizisel sürekli ve örten bir fonksiyon iken  $U \times V$  çarpım uzayı da dizisel kompaktır.

Sürekli bir fonksiyon dizisel sürekli olduğundan Önerme 4.1.6'nin bir neticesi olarak dizisel kompaktlık kavramının topolojik bir özellik olduğu sonucu elde edilir.

**Önerme 4.1.8.**  $X \times Y$  çarpım uzayı Dizisel kompakt ve  $A \times B \subseteq X \times Y$  sonsuz olsun.  $A \times B$ 'nin en az bir alt kümesi vardır.

**İspat:**  $X \times Y$  çarpım topolojik uzayı dizisel kompakt ve  $A \times B \subseteq X \times Y$  çarpım alt kümesi sonsuz olsun.  $A \times B$ 'nin bir yığılma noktası olduğunu ispat edelim. Terimleri farklı ve  $A \times B$  çarpım alt kümesinde bulunan bir  $(a_n, b_n) = ((a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n), \dots)$  çarpım dizisi seçelim.  $X \times Y$  çarpım uzayının dizisel kompakt olmasına binaen  $(a_n, b_n)$  çarpım dizisinin yakınsak bir  $(a_{n_k}, b_{n_k})$  alt dizisi vardır. Bu  $(a_{n_k}, b_{n_k})$  alt dizisinin limiti  $(a, b) \in X \times Y$  olsun. Bundan dolayı  $(a, b)$  noktasının her  $U \times V$  açık komşuluğu  $(a_{n_k}, b_{n_k})$  alt dizisinin terimlerini kısmen içerir, yani  $n_k \geq n_0$  olduğunda  $(a_{n_k}, b_{n_k}) \in U \times V$  olacak şekilde bir  $n_0 \in \mathbb{N}$  vardır. Fakat  $(a_{n_k}, b_{n_k})$  alt dizisinin terimleri farklı olduğundan  $U \times V$  açık komşuluğu  $(a_n, b_n)$  dizisinin sonsuz çoklukta terimini ihtiva eder. Bundan dolayı  $(a, b)$  noktası  $A \times B$

çarpım alt kümesinin bir yığılma noktasıdır. Bu ise istenilen ispatı tamamlamış olur.

□

Bu önermeden dolayı dizisel kompakt olan bir uzay sayılabilir kompaktır. Ancak bunun tersi her zaman doğru olmayabilir. Diğer bir deyişle sayılabilir uzayın dizisel kompakt olması gerekmez. Bununla ilgili olarak aşağıdaki örnekleri inceleyelim.

**Örnek 4.1.9.**  $X \times Y$  çarpım topolojik uzayı sonsuz ve  $(a, b) \in X \times Y$  olsun.  $\tau = \{G \subseteq X \times Y \mid (a, b) \in G^c \text{ veya } G^c \text{ sonlu}\}$  verilsin. Bu topolojiye göre  $X \times Y$  çarpım topolojik uzayı dizisel kompaktır.

**Çözüm:** Bunun için  $X \times Y$  çarpım topolojik uzayında bir  $(a_n, b_n)$  çarpım dizisinin yakınsak bir alt dizisi dizisi bulunduğunu ispat edelim. Seçilen  $(a_n, b_n)$  dizisinin terimlerinin kümesi  $A \times B$  olsun.  $A \times B$  sonlu ise Örnek 4.1.3 deki benzer şekilde dizinin tekrar eden bir  $(a_{n_0}, b_{n_0})$  terimi vardır. Buradan  $(a_n, b_n)$ 'nin yakınsak bir alt dizisi  $(a_{n_k}, b_{n_k}) = ((a_{n_0}, b_{n_0}), (a_{n_0}, b_{n_0}), \dots)$  olarak seçilebilir.  $A \times B$ 'nin sonsuz olması halinde ise  $(a_n, b_n)$  dizisinin terimleri farklı olan bir  $(a_{n_k}, b_{n_k})$  alt dizisi  $(a, b) \in X \times Y$  noktasına yakınsar.

## 4.2. Çarpım Uzaylarda Dizisel İrtibatlılık

Çarpım topolojik uzaylarda çarpım dizisel açık ve dizisel kapalı kümeler tanımlandıktan sonra çarpım uzaylarda dizisel irtibatlı küme tanımlanabilir.

O halde çarpım topolojik uzaylarda dizisel irtibatlılık şu şekilde tanımlanır.

**Tanım 4.2.1.**  $X \times Y$  çarpım topolojik uzayının hem dizisel açık hem de dizisel kapalı olan boş ve  $X \times Y$  den başka hiç bir alt kümesi yoksa  $X \times Y$  çarpım topolojik uzayına **dizisel irtibatlı** aksi halde **dizisel irtibatsız** denir.

Buna göre  $X \times Y$  çarpım topolojik uzayı dizisel irtibatlıdır ancak ve ancak ayrık ve dizisel açık iki öz alt kümenin birleşimi olarak yazılamaz.

Benzer olarak  $A \times B \subseteq X$  alt kümesi dizisel irtibatlıdır eğer boştan farklı, ayrık ve dizisel açık iki öz alt kümenin birleşimi olarak yazılamaz.

**Önerme 4.2.2.**  $X \times Y$  çarpım topolojik uzayı irtibatsız ise dizisel irtibatsızdır.

**İspat:**  $X \times Y$  çarpım topolojik uzayı irtibatsız ise  $X \times Y$ 'nin hem açık hem kapalı olan boş ve  $X \times Y$  den başka bir  $A \times B$  (öz) alt kümesi vardır. Önerme 2.1.11 (d) den dolayı açık kümeler dizisel açık ve Önerme 2.1.2 (c) den kapalı kümeler dizisel kapalı olduğundan  $A \times B$  çarpım öz alt kümesi hem dizisel açık hem dizisel kapalıdır. Bundan dolayı  $X \times Y$  çarpım topolojik uzayı dizisel irtibatsızdır.  $\square$

Bunun sonucu olarak şunu ifade edebiliriz.

**Sonuç 4.2.3.**  $X \times Y$  çarpım alt uzayı dizisel irtibatlı ise irtibatlıdır.

Bu sonucun tersi genelde doğru değildir, yani irtibatlı bir uzayın dizisel irtibatlı olması gerekmez. Şimdi irtibatlı bir uzayın dizisel irtibatlı olmadığına dair bir örnek verelim.

**Örnek 4.2.4.**  $\mathbb{R}^2$  çarpım kümesi sayılamaz bir kümedir, tümleyeni sayılabilir topolojisine göre irtibatlıdır, fakat dizisel irtibatlı değildir.

$\mathbb{R}^2$  çarpım kümesi sayılamaz olduğundan irtibatlıdır. Aksi halde irtibatsız olsa hem açık hem kapalı bir öz alt kümesi bulunur ki bu mümkün olamaz. Buna ilaveten Örnek 2.1.6'den tümleyeni sayılabilir topolojisine göre  $\mathbb{R}^2$  in tüm alt kümeleri hem dizisel açık hem dizisel kapalı olduğundan dolayı bu topolojiye göre  $\mathbb{R}^2$  dizisel irtibatsızdır.

**Not 4.2.5.** Dizisel uzaylarda alt kümelerin açık olması için gerek ve yeter koşul dizisel açık olmasıdır. Aynı şekilde bu uzaylarda kümeler kapalıdır gerek ve yeter şart dizisel açıktır. Bu nedenle dizisel uzaylarda irtibatlık ve dizisel irtibatlık kavramları eşdeğerdir. Diğer bir ifade ile dizisel uzaylarda alt kümelerin irtibatlı olması için gerek ve yeter koşul dizisel irtibatlı olmasıdır.

İrtibatlılık ile ilgili bilinen bir sonuç çarpım topolojik uzaylarda dizisel irtibatlılığa aşağıdaki şekilde uyarlanabilir.

**Önerme 4.2.6.**  $X \times Y$  çarpım uzayı hakkında şu ifadeler denktir.

(a)  $X \times Y$  çarpım uzayının dizisel açık ve dizisel kapalı  $A \times B$  öz alt kümesi vardır.

(b) Sabit olmayan dizisel sürekli  $f: X \times Y \rightarrow \{a, b\}$  fonksiyonu vardır. Burada  $\{a, b\}$  kümesi üzerindeki topolojinin ayrık (diskre) topoloji olduğunu belirtelim.

**İspat:**  $(a) \Rightarrow (b)$ :  $X \times Y$  çarpım uzayında dizisel açık ve dizisel kapalı olan  $A \times B$  öz alt kümesi olduğunu kabul edelim. Buradan

$$f(x) = \begin{cases} a, & x \in A \times B \\ b, & x \in (A \times B)^c \end{cases}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Bu şekilde tanımlanan  $f: X \rightarrow \{a, b\}$  fonksiyonunun dizisel sürekli olduğunu gösterelim.  $\{a, b\}$  kümesi üzerindeki topoloji ayrık olduğundan her alt kümesi açık dolayısıyla dizisel açıktır. Bu şekilde tanımlanan  $f$  fonksiyonuna göre  $f^{-1}(\{a\}) = A \times B$ ,  $f^{-1}(\{b\}) = (A \times B)^c$ ,  $f^{-1}(\{a, b\}) = X \times Y$  ve  $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$  olduğundan tüm dizisel açık kümelerin ters görüntüsü  $X \times Y$  de dizisel açıktır. Burada varsayımdan  $A \times B$ 'nin hem dizisel açık hem dizisel kapalı olduğuna dikkat edelim. Bundan dolayı Teorem 3.1.5'den fonksiyon  $f: X \rightarrow \{a, b\}$  dizisel sürekli dir.

$(b) \Rightarrow (a)$  gerektirmesinin ispatı için sabit olmayan ancak dizisel sürekli olan bir  $f: X \times Y \rightarrow \{a, b\}$  fonksiyonunun mevcut olduğunu varsayalım.  $\{a, b\}$ 'nin topolojisi ayrık olduğundan  $\{a\}$  tek nokta kümesi  $\{a, b\}$ 'de açık ve kapalıdır. Bu nedenle  $\{a\}$  dizisel açık ve dizisel kapalıdır. Diğer yandan fonksiyon  $f: X \times Y \rightarrow \{a, b\}$  dizisel sürekli dir. Teorem 3.1.5 ve Önerme 3.1.6'dan  $f^{-1}(\{a\})$  ters görüntüsü  $X \times Y$ 'de dizisel açık ve dizisel kapalıdır. Bu sebepten  $X \times Y$  dizisel irtibatlıdır.  $\square$

Önerme 2.1.18'den dizisel açık kümenin tümleyeni dizisel kapalıdır. Bundan hareketle aşağıdakiler Tanım 4.2.1 in direkt bir sonucudur.

**Önerme 4.2.7.**  $X \times Y$  çarpım topolojik uzayında aşağıdakiler eşdeğerdir.

- (a)  $X \times Y$  dizisel irtibatsızdır;
- (b) Birleşimleri  $X \times Y$  ve kesişimleri  $\emptyset$  olan dizisel açık  $A \times B$  ve  $U \times V$  öz alt kümeleri vardır.
- (c) Birleşimleri  $X \times Y$  ve kesişimleri  $\emptyset$  olan dizisel kapalı  $A \times B$  ve  $U \times V$  alt kümeleri vardır;
- (d) Sabit olmayan ancak dizisel sürekli olan  $f: X \times Y \rightarrow \{a, b\}$  fonksiyonu mevcuttur. Burada  $\{a, b\}$  iki elemanlı küme üzerindeki topoloji ayrık (diskre) topolojidir.

Bu önermeye eşdeğer olan aşağıdaki Önermeyi verebiliriz.

**Önerme 4.2.8.**  $X \times Y$  çarpım uzayında aşağıdakiler eşdeğerdir.

- (a)  $X \times Y$  dizisel irtibatlıdır;
- (b) Birleşimleri  $X \times Y$  ve kesişimleri  $\emptyset$  olan dizisel açık  $A \times B$  ve  $U \times V$  öz alt kümeleri yoktur;
- (c) Birleşimleri  $X \times Y$  ve kesişimleri  $\emptyset$  olan dizisel kapalı  $A \times B$  ve  $U \times V$  alt kümeleri yoktur;
- (d) Sabit olmayan dizisel sürekli fonksiyon  $f: X \times Y \rightarrow \{a, b\}$  yoktur.  $\{a, b\}$ 'nin topolojisi ayrık (diskre) topolojidir.
- (e)  $f: X \times Y \rightarrow \{a, b\}$  fonksiyonu dizisel sürekli ise sabittir.

Aşağıdaki teorem ispat edildiği gibi çarpım uzaylarda dizisel irtibatlı kümelerin dizisel sürekli fonksiyon altındaki görüntüleri dizisel irtibatlıdır. Diğer bir söyleyişle dizisel irtibatlılık dizisel sürekli fonksiyonlar altında korunur.

**Teorem 4.2.9.**  $X \times Y$  ve  $U \times V$  çarpım uzaylar arasında  $f: X \times Y \rightarrow U \times V$  fonksiyonu dizisel sürekli olsun. Dizisel irtibatlı olan  $A \times B \subseteq X \times Y$  alt kümesinin  $f(A \times B)$  görüntüsü dizisel irtibatlıdır.

**İspat:**  $A \times B \subseteq X \times Y$  çarpım alt kümesi dizisel irtibatlı olsun.  $f(A \times B)$ 'nin dizisel irtibatlı olduğunu ispat edelim. Bunun yerine  $g: f(A \times B) \rightarrow \{a, b\}$  dizisel sürekli ise sabit olduğunu gösterelim.  $g: f(A \times B) \rightarrow \{a, b\}$  fonksiyonu için  $gf: A \times B \rightarrow \{a, b\}$  bileşke fonksiyonu da dizisel sürekli dir. Burada  $A \times B$  dizisel irtibatlı olduğundan  $gf: A \times B \rightarrow \{a, b\}$  fonksiyonu sabittir. Bu nedenle  $g: f(A \times B) \rightarrow \{a, b\}$  fonksiyonu sabittir. Önerme 4.2.8'den  $f(A \times B)$  da dizisel irtibatlıdır.  $\square$

**KAYNAKLAR**

1. A. Açıkgöz, H. Çakallı, F. Esenbel and LDR Kocinac, 2021. A quest of G-continuity in neutrosophic spaces, **Mathematical Methods in the Applied Sciences**, 44 (9) 7834-7844.
2. Bourbaki, N., 1966. Elements of Mathematics, General Topology, 1, Addison-Wesley, London, 301 pages.
3. Brown, R., 2006. Topology and groupoids, Booksurge PLC., 703 pages.
4. Brown, R. and Mucuk, O., 1994. Covering groups of non-connected topological groups revisited, **Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society**, 115, 97-110.
5. Chevalley, C., 1946. Theory of Lie Groups, Princeton University Press, 217 pages.
6. Connor, J. and Grosse-Erdmann, K.-G., 2003. Sequential definitions of continuity for real functions, **The Rocky Mountain Journal of Mathematics**, 33, 1, 93-121, MR 2004e:26004.
7. Császár, Á., 2003.  $\gamma$ -connected sets, **Acta Mathematica Hungarica.**, 101, 1-2, 273-278.
8. Çakallı, H. and Mucuk, O., 2013. On connectedness via a sequential method, **Revista de la Unión Matemática Argentina** (in press)
9. Çakallı, H., 1995. Lacunary statistical convergence in topological groups, **Indian Journal of Pure and Applied Mathematics**, 26, 2, 113-119.
10. Çakallı, H., 1996. On statistical convergence in topological groups, **Pure and Applied Mathematical Science**, 43, 1-2, 27-31.
11. Çakallı, H., 2008. Sequential definitions of compactness, **Applied Mathematics Letters.**, 21, 6, 594-598.
12. Çakallı, H., 2009. A study on statistical convergence, **Functional Analysis, Approximation and Computation**, 1, 2, 19-24.

13. Çakallı, H., 2011. On  $G$ -continuity, **Computers and Mathematics with Applications**, **61**, 2, 313-318.
14. Çakallı, H., 2011. Forward continuity, **International Journal of Computational and Numerical Analysis and Applications**, **13**, 2, 225-230.
15. Çakallı, H., 2011. New kinds of continuities, **Computers and Mathematics with Applications**, **61**, 4, 960-965.
16. Çakallı, H., 2012. Sequential definitions of connectedness, **Applied Mathematics Letters**, **25**, 461-465.
17. H. Çakallı, O. Mucuk, On connectedness via a sequential method, Rev. Un. Mat. Argentina, Revista de la Unión Matemática Argentina, 54-2 (2013) 101-109.
18. Fedeli, A. and Le Donne, A., 2002. On good connected preimages, **Topology and its Applications**, **125**, 489-496.
19. Fridy, J.A., 1985. On statistical convergence, **Analysis**, **5**, 301-313,
20. Fridy, J.A. and Orhan, C., 1993. Lacunary statistical convergence, **Pacific Journal of Mathematics**, **160**, 1, 43-51.
21. Huang, Q. and Lin, S., 2006. Notes on sequentially connected spaces, **Acta Mathematica Hungarica**, **110**, 1-2, , 158-164.
22. Iwinski, T.B., 1972. Some remarks on Toeplitz methods and continuity, **Comment.Math. Prace Mat.** **17**, 37-43.
23. G. Di Maio, L.D.R. Kočinac, 2008. Statistical convergence in topology, **Topology Appl.** 156 28-45.
24. Gençoğlu, Fitnat., Dizisel Anlamda Süreklilik, Kompaktlık ve İrtibatlılık, Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Haziran 2013.
25. Massey W., S., 1990. Algebraic Topology: An Introduction, Springer-Verlag New York Inc., 553 pages.
26. O. Mucuk and H. Çakallı, On  $G$ -compactness of topological groups with operations, **Filomat** 36:20 (2022), 7113-7121.

27. O. Mucuk, H. Cakalli,  $G$ -connectedness for topological groups with operations, *Filomat* 32:3 (2018), 1079-1089.
28. Mucuk,O. and Şahan,T., 2011. On  $G$ -sequential Continuity, *Filomat* 28-6 (2014)1181-1189.
29. Mucuk,O., 2011. *Topoloji ve Kategori*, Nobel Yayınları, Ankara, 472 sayfa.
30. Pontrjagin, L., 1946. *Topological Groups*, Princeton University Press, 554 pages.
31. Rotman, J. J., 1988. *An Introduction to Algebraic Topology*, Springer-Verlag, New York Inc., 460 pages.
32. Taylor, R., L., 1954. Coverings of non- onnected Topological Groups, **Proceedings of the American Mathematical Society**, 5, 753-768.

## ÖZGEÇMİŞ

### KİŞİSEL BİLGİLER

**Adı Soyadı:** Mina Betül Teke

**Uyruğu:** T.C.

**Doğum Tarihi ve Yeri:**

**e-Mail:**

### EĞİTİM

Derece	Kurum	Mezuniyet Tarihi
Yüksek Lisans	ERÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik ABD.	2023
Lisans	Atatürk Üniversitesi, Fen Fakültesi	2011
Lise	Kazım Ayan Anadolu Lisesi	2006

### İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görev
2012-2014	Final Dersaneleri	Öğretmen

### YABANCI DİL

İngilizce