

T.C.
BOLU ABANT İZZET BAYSAL ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI



KAPALI DIŞBÜKEY EĞRİNİN UZUNLUĞU
VE ALANI ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ESRA MARAŞ

TEZ DANIŞMANI
Prof. Dr. Esra Betül KOÇ ÖZTÜRK

BOLU, TEMMUZ - 2023

KABUL VE ONAY SAYFASI

Esra MARAŞ tarafından hazırlanan “**KAPALI DIŞBÜKEY EĞRİNİN UZUNLUĞU VE ALANI ÜZERİNE**” adlı tez çalışması jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalı’nda Yüksek Lisans Tezi olarak oy birliği/oy çokluğuyla kabul edilmiştir.28 Temmuz 2023

Jüri Üyeleri

İmza

Danışman
Prof. Dr. Esra Betül KOÇ ÖZTÜRK
Bolu Abant İzzet Baysal Üniversitesi

.....

Üye
Dr. Öğr. Üyesi Kahraman Esen ÖZEN
Çankırı Karatekin Üniversitesi

.....

Üye
Doç. Dr. Ufuk ÖZTÜRK
Bolu Abant İzzet Baysal Üniversitesi

.....

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Onayı

Prof. Dr. İbrahim KÜRTÜL
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Bolu Abant İzzet Baysal Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu bildirir,

aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Teze ilişkin Turnitin adlı programında enstitü müdürlüğünce belirlenen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan benzerlik raporuna göre, tezin benzerlik oranı %30'u geçmemektedir.

.....
ESRA MARAŞ

ÖZET

**KAPALI DIŞ BÜKEY EĞRİNİN UZUNLUĞU
VE ALANI ÜZERİNE
YÜKSEK LİSANS TEZİ
ESRA MARAŞ
BOLU ABANT İZZET BAYSAL ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
GEOMETRİ BİLİM DALI
(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. ESRA BETÜL KOÇ ÖZTÜRK)
BOLU, TEMMUZ - 2023
VIII + 26**

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde, izoperimetrik problemin tarihçesinden ve çözümünde kullanılan bazı metodlardan bahsedilmiştir. İkinci bölümde, uzay eğrisi ve düzlem eğrisi ile ilgili bazı temel kavramlara yer verilmiştir. Üçüncü bölümde, düzlemde kapalı eğrilere yer verilmiştir. Son bölümde kapalı dışbükey eğrinin uzunluğu ve alanına yer verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELELER: Düzlem eğrisi, Kapalı eğri, Öklid düzlemi, Kapalı konveks eğrinin uzunluğu ve alanı

ABSTRACT

**ON THE LENGTH AND AREA OF THE CLOSED
CONVEX CURVE
MASTER'S THESIS
ESRA MARAŞ
BOLU ABANT İZZET BAYSAL UNIVERSITY
INSTITUTE OF GRADUATE STUDIES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
(SUPERVISOR: PROF. DR. ESRA BETÜL KOÇ ÖZTÜRK)
BOLU, JULY - 2023
VIII + 26**

This thesis consists of four parts. The first chapter mentions the history of the isoperimetric problem and some methods used in its solution. The second chapter gives some basic concepts about space curves and plane curves. The third chapter gives closed curves in the plane. The last section gives the length and area of the closed convex curve.

KEYWORDS: Plane curve, Closed curve, Euclidean plane, Length and area of a closed convex curve

İÇİNDEKİLER

Sayfa

KABUL VE ONAY SAYFASI	iii
ETİK BEYAN.....	iv
ÖZET.....	v
ABSTRACT	vi
İÇİNDEKİLER	vii
TEŞEKKÜR	viii
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	3
2.1 $\mathbb{R}^2$ de Düzlemsel Eğriler	12
3. $\mathbb{R}^2$ DE KAPALI EĞRİLER.....	15
3.1 Jordan Eğri Teoremi	15
3.2 Sarım Sayısı ve Dönüş İndeksi	16
3.3 Eğri Zarfları	17
4. KAPALI DIŞBÜKEY EĞRİNİN UZUNLUĞU VE ALANI.....	20
4.1 Paralel Eğriler	22
5. KAYNAKLAR.....	26

TEŞEKKÜR

Araştırma sürecince desteklerini ve yardımlarını esirgemeyen tez danışmanım Prof. Dr. Esra Betül KOÇ ÖZTÜRK'e ve yol gösterici rolü üstlenen değerli hocam Doç. Dr. Ufuk ÖZTÜRK'e emeklerinden dolayı teşekkür ederim.

Bu Araştırma TÜBİTAK BİDEB 2210 Yurt içi yüksek lisans burs programları kapsamında desteklenmekte olup yardımlarından dolayı Bilim İnsanı Destekleme Programı Başkanlığı'na ayrıca teşekkür ederim.

Beni tüm tez sürecim boyunca destekleyen sevgili annem Güler DEMİREL'e, motivasyon ve güç kaynağım olan kardeşim Tefik DEMİREL'e, beni yüreklendiren ve her koşulda yanımda olan canım eşim Recep MARAŞ'a sonsuz teşekkürler.

Son olarak bu çalışmanın başından sonuna kadar yanımda olan ve çalışma disiplinimi sağlayan sevgili arkadaşım Zeynep Büşra ALKAN'a teşekkürlerimi iletirim.

1. GİRİŞ

Eğrilik kavramı, diferansiyel geometrinin temel kavramlarından biridir ve fizikte de önemli bir rol oynar. Bu kavram, cisimlerin hareketini ve uzaydaki geometrik nesnelerin özelliklerini anlamak için kullanılır. Newton yasalarına göre, bir cismi sabit hızda hareket ettirmek için gereken kuvvetin büyüklüğü, cismi hareket ettiği yolun eğriliğine bağlı olarak değişir. Yani, bir eğri boyunca hareket eden bir cismin hızı, yörüngenin eğriliği ile ilişkilidir. Albert Einstein'a göre ise yerçekimi alanındaki bir cismin hareketi, uzay-zamanın eğriliği ile belirlenir. Einstein'ın genel görelilik kuramına göre, kütle çekim etkisi, bir cismin uzay zamanda yarattığı eğrilik nedeniyle ortaya çıkar. Bu eğrilik, cismin hareketini etkileyen bir kuvvet olarak algılanır. Bu nedenle, cisimlerin yörüngeleri ve hareketleri, uzay-zamanın eğriliği ile belirlenir. Eğrilik kavramı, sadece fizikte değil, günlük yaşamda da gözlemlenen birçok şekil ve nesnenin belirlenmesinde önemli bir rol oynar. Örneğin, sabun köpükleri gibi kırılğan yapılar veya kırmızı kan hücreleri gibi biyolojik formlar, çeşitli eğriliklerin etkisiyle şekillenir. Bu şekiller, eğrilik kavramının evrensel bir prensibi olarak kabul edilir.

Geometrik eşitsizlikler, uzaydaki geometrik nesnelerin özelliklerini ve aralarındaki ilişkileri tanımlamak için kullanılır. İzoperimetrik eşitsizlik, en eski ve en güzel geometrik eşitsizliklerden biridir. Bu eşitsizlik, $\mathbb{R}^2$ Öklid düzlemi üzerinde kapalı bir γ eğrisi için geçerlidir. γ eğrisin uzunluğu L ve γ ile çevrelenen alan A olmak üzere izoperimetrik eşitsizlik,

$$L^2 - 4\pi A \geq 0 \quad (1.1)$$

şeklinde ifade edilir (Zhang, 2019). Bu eşitsizlik, eğrinin uzunluğu ve çevrelenen alanı arasında bir ilişki kurar. Eşitlik, γ eğrisinin bir daire olduğu durumlarda gerçekleşir. Yani, bir dairenin çevresi ve alanı, diğer kapalı eğrilerden daha optimize edilmiş bir izoperimetrik ilişkiye sahiptir. Bu sonuç, belirli bir uzunluğa sahip en büyük alanı kapsayan eğrinin bir daire olduğunu gösterir. Ancak, izoperimetrik eşitsizliklere yönelik daha güçlü ilişkiler de bulunabilir ve farklı geometrik yapılar arasındaki ilişkileri daha detaylı şekilde analiz edebilir.

Eğrilik hakkında Ros Teoremi, Fenchel Teoremi ve Willmore Teoremi gibi çok iyi bilinen eşitsizlikler veya eşitlikler vardır. Ros Teoremi, diferansiyel

geometride eğriliğin bir ölçüsü olan Gauss eğrilik integralinin özelliklerini ve bir düzlem eğri üzerindeki ilişkisini tanımlar (Oprea, 2010). Fenchel Teoremi, eğriliğin uzunluk ile olan ilişkisini ele alır (do Carmo, 2016). Willmore Teoremi, yüzeylerin eğrilik enerjisiyle ilgilidir ve yüzeylerin eğriliğine dair bir ölçüm olan Willmore enerjisi ile ilgili önemli bir eşitliği ifade eder (Li, 2008).

Bir düzlem eğri için eğrilik integrallerini içeren birçok ilginç sonuç da mevcuttur. Pan ve Zhang, eğrilik üzerine bazı varsayımlar altında düzlem eğrileri için bir ters izoperimetrik eşitsizlik oluşturdu (Pan & Zhang, 2007). Eğer γ , uzunluğu L olan ve bir A alanını çevreleyen Öklid düzlemi $\mathbb{R}^2$ 'de kapalı, kesinlikle dışbükey bir eğri ise, o zaman

$$L^2 - 4\pi A \leq 4\pi |\tilde{A}_1| \quad (1.2)$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $\tilde{A}_1$, γ eğrisinin eğrilik merkezlerinin odağı tarafından çevrelenen alanın yönlendirilmiş alanını gösterir ve eşitlik ancak ve ancak γ bir daire ise geçerlidir. Pan ve Xu,

$$L^2 - 4\pi A \leq 4\pi |\tilde{A}_1| \quad (1.3)$$

olacak şekilde en iyi C sabiti var mı, ancak ve ancak γ bir daire ise eşitlik var mı? sorusunu sormuştur (Pan & Xu, 2009).

Bu tezde, Öklid düzleminde kapalı dışbükey eğrinin uzunluğu ve alanı incelenmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Eğrilik kavramı, geometri ve diferansiyel geometri alanında temel bir kavramdır ve fizikte de önemli bir rol oynar. Eğrilerin matematiksel olarak tanımlanması ve analiz edilmesi, eğrilik kavramının incelenmesiyle gerçekleştirilir (Oprea, 2010; do Carmo, 2016; Li, 2008).

$\mathbb{R}$ nin bir açık aralığı I üzerinde $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ şeklinde tanımlanan sürekli bir fonksiyonu düşünelim. Burada α , $\mathbb{R}^3$ uzayındaki bir eğriyi temsil etmektedir. Eğrinin tanımı üzerine, $\mathbb{R}^3$ uzayında dik koordinat fonksiyonları x_1, x_2, x_3 olmak üzere $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi verilir. α 'nın değer kümesi $\mathbb{R}^3$ olduğundan, α 'nın üç bileşeni $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ bulunmaktadır. Daha açık bir ifadeyle, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ şeklinde ifade edilir. Burada, her bir $1 \leq j \leq 3$ için $x_j \circ \alpha = \alpha_j$ eşitliği geçerlidir. Her α_j fonksiyonu, I aralığından $\mathbb{R}$ ye giden bir fonksiyondur. $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ dönüşümünün diferensiyellenebilir olması, α_j fonksiyonlarının diferensiyellenebilir olması anlamına gelir.

Eğrinin hız vektörü veya tanjant vektörü, $\alpha(t)$ noktasındaki hız vektörü olarak tanımlanır. Bu vektör, $\alpha(t)$ ve $\alpha'(t)$ noktalarını içeren $T_{\mathbb{R}^3}(t)$ vektör uzayına aittir. Burada

$$\alpha'(t) = \frac{d\alpha}{dt}(t) = \left(\frac{d\alpha_1}{dt}(t), \frac{d\alpha_2}{dt}(t), \frac{d\alpha_3}{dt}(t) \right),$$

olarak ifade edilir.

Eğrinin parametre dönüşümü ise α eğrisinin h ile yeniden parametrelendirilmesi olarak adlandırılır. $\alpha \circ h$ ifadesiyle gösterilen bu eğri, α eğrisinin h ile yeniden parametrelendirilmiş halidir.

Eğrinin düzenli (regüler) olması, $\alpha'(t) \neq 0$ olduğunda gerçekleşir. Yani, her $t \in I$ için $\alpha'(t)$ sıfırdan farklıdır. Bu sayede eğrinin düzgün bir şekilde çizildiği ve herhangi bir kesinti veya düğüm noktası olmadığını söyleyebiliriz.

Eğrinin yay uzunluğu, eğri üzerindeki noktalar arasındaki uzaklığı ölçen bir fonksiyon olarak tanımlanır. $\alpha(t_0)$ noktasından başlayarak yay uzunluğunu ölçmeye başladığımızda, $t < t_0$ ise $\alpha(t_0)$ ve $\alpha(t)$ noktaları arasındaki kalan eğri parçasının uzunluğunun negatifine $f(t)$ denir. $t > t_0$ için $f(t_0) = 0$ olarak kabul

edilir. $t > t_0$ ise $\alpha(t_0)$ ve $\alpha(t)$ noktaları arasındaki kalan eğri parçasının uzunluğuna $f(t)$ denir. Böylece I aralığından $\mathbb{R}$ içine tanımlı $f: t \rightarrow f(t)$ fonksiyonu, α eğrisinin yay uzunluğu fonksiyonunu temsil eder. Yay uzunluğu fonksiyonunun türevi de α' vektörünün normuna eşittir ($f' = \|\alpha'\|$). Yani, regüler bir α eğrisinin yay uzunluğu fonksiyonunun türevi, α' vektörünün normuna eşittir ve

$$f(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du,$$

dir. Buna ek olarak, α eğrisinin yay uzunluğu fonksiyonu f olduğunda, $t \in I$ parametresine de yay parametresi denir ($f'(t) = 1$). Yani, α eğrisi birim hızlı eğri olarak adlandırılır ve $t \in I$ parametresi yay parametresi olarak kabul edilir ve yay parametresi s ile gösterilir.

α eğrisinin birim teğet vektörü, $\alpha'(s)$ noktasında tanımlı $T(s)$ vektörü olarak adlandırılır ve

$$T(s) = \alpha'(s), \quad (2.1)$$

şeklinde ifade edilir. Bu vektör, α eğrisinin s parametresindeki birim teğet vektörünü temsil eder. Ayrıca, T fonksiyonu α eğrisi üzerinde bir vektör alanıdır ve α eğrisinin birim teğet vektör alanı olarak adlandırılır.

α eğrisinin eğrilik fonksiyonu, α eğrisinin s parametresindeki eğrilik fonksiyonu

$$\kappa(s) = \|T'(s)\|, \quad (2.2)$$

olarak ifade edilir. Eğrilik fonksiyonu $\kappa: I \rightarrow \mathbb{R}$, α eğrisinin s parametresindeki eğrilik miktarını gösterir.

α eğrisinin birinci dik vektörü veya asli normali,

$$N(s) = \frac{1}{\kappa(s)} T'(s), \quad (2.3)$$

olarak tanımlanır. Bu vektör, α eğrisinin s parametresindeki birinci dik vektörünü temsil eder. Aynı zamanda, N vektör alanı α eğrisinin birinci dik vektör alanı olarak adlandırılır.

α eğrisinin ikinci dik vektörü veya binormali,

$$B(s) = T(s) \wedge N(s) \quad (2.4)$$

şeklinde ifade edilir. $B(s)$ vektörü, α eğrisinin s parametresindeki ikinci dik vektörünü temsil eder. B vektör alanı ise α eğrisinin ikinci dik vektör alanı olarak adlandırılır.

Uyarı 2.1 *Not edilmesi gereken bir nokta, birim hızlı α eğrisinde $\kappa(s) = 0$ olduğunda $N(s)$ vektörünün tanımsız olduğudur. Bu durumda, $B(s)$ vektörü de tanımsız olacaktır.*

Frenet vektörleri, birim hızlı α eğrisinin Frenet Çatısı olarak adlandırılan

$$\{T(s), N(s), B(s)\}$$

kümesine verilen isimdir. Bu küme α eğrisinin s parametresindeki Frenet vektörlerini içerir. $T(s)$, $N(s)$ ve $B(s)$ vektörleri α eğrisinin s parametresindeki birim teğet, birinci dik ve ikinci dik vektörlerini temsil eder. T , N ve B vektör alanları ise α eğrisinin Frenet vektör alanları denir.

α eğrisinin ikinci eğrilik veya burulma fonksiyonu $\tau(s)$, eğrinin her bir noktasındaki dönüş miktarını gösterir ve B vektörünün N vektörüyle iç çarpımının negatifine

$$\tau(s) = -\langle B'(s), N(s) \rangle \quad (2.5)$$

eşittir. Torsiyon fonksiyonu $\tau: I \rightarrow \mathbb{R}$, α eğrisinin s parametresindeki torsiyon (yani; burulma veya dönüş) miktarını ifade eder. Burada pozitif bir burulma, eğrinin saat yönünün tersine dönmesini, negatif bir burulma ise saat yönünde dönmesini ifade eder. Ayrıca, ikinci eğrilik veya torsiyon, $\kappa(s) \neq 0$ olduğunda tanımlıdır.

Son olarak, birim hızlı α eğrisinin Frenet vektör alanları T , N ve B ise

$$\begin{aligned} T' &= \kappa N, \\ N' &= -\kappa T + \tau B, \\ B' &= -\tau N, \end{aligned} \quad (2.6)$$

ilişkilerine, α eğrisinin Frenet-Serret formülleri denir. Bu eşitlikleri nasıl elde ettiğimize bakalım.

İlk olarak (2.3) eşitliğinden $T' = \kappa N$ ifadesini elde ederiz. $\{T(s), N(s), B(s)\}$, $\mathbb{R}^3$ uzayının bir bazı olduğundan

$$N' = n_1 T + n_2 N + n_3 B, \quad (2.7)$$

olarak yazabiliriz.

(2.7) eşitliğin her iki tarafı T ile iç çarparsak $\langle N', T \rangle = n_1$ elde ederiz. $\langle N, T \rangle = 0$ olduğundan

$$\langle N', T \rangle + \langle N, T' \rangle = 0,$$

olur. Bu durumda

$$\langle N', T \rangle = -\langle N, T' \rangle = -\langle N, \kappa N \rangle = -\kappa$$

olarak bulunur. Sonuç olarak $n_1 = -\kappa$ olur.

(2.7) eşitliğinin her iki yanı N ile iç çarparsak ve $\langle N', N \rangle = n_2$ bulunur. $\langle N, N \rangle = 1$ olduğundan

$$\langle N', N \rangle + \langle N, N' \rangle = 0$$

olur. Bu durumda, $2\langle N', N \rangle = 0$ olduğundan $\langle N', N \rangle = 0$ bulunur. Sonuç olarak $n_2 = 0$ olur.

(2.7) eşitliğinin her iki yanı B ile iç çarparsak ve $\langle N', B \rangle = n_3$ bulunur. $\langle N, B \rangle = 0$ olduğundan

$$\langle N', B \rangle + \langle N, B' \rangle = 0$$

olur. Bu durumda,

$$\langle N', B \rangle = -\langle N, B' \rangle = \tau,$$

olarak bulunur. Sonuç olarak, $n_3 = \tau$ bulunur. Öyleyse

$$N' = -\kappa T + \tau B$$

olarak elde edilir.

Son olarak, $\{T(s), N(s), B(s)\}$, $\mathbb{R}^3$ uzayının bir bazı olduğundan

$$B' = b_1 T + b_2 N + b_3 B, \quad (2.8)$$

olarak yazabiliriz.

(2.8) eşitliğinin her iki tarafını T ile iç çarparsınız ve $\langle B', T \rangle = b_1$ bulunur. $\langle B, T \rangle = 0$ olduğundan,

$$\langle B', T \rangle + \langle B, T' \rangle = 0$$

olur. Öyleyse, $\langle B', T \rangle = -\langle B, T' \rangle = \langle B, -\kappa N \rangle = 0$ olarak bulunur. Sonuç olarak, $b_1 = 0$ olur.

(2.8) eşitliğinin her iki tarafını N ile iç çarparsınız ve $\langle B', N \rangle = b_2$ bulunur.

$$\langle B', N \rangle = -\tau$$

olduğundan, $b_2 = -\tau$ olur.

(2.8) eşitliğinin her iki tarafını B ile iç çarparsınız ve $\langle B', B \rangle = b_3$ bulunur.

$$\langle B, B \rangle = 1$$

olduğundan,

$$\langle B', B \rangle + \langle B, B' \rangle = 0,$$

olur. O zaman, $\langle B', B \rangle = 0$ olarak bulunur. Sonuç olarak, $b_3 = 0$ olur. Öyleyse, $B' = -\tau N$ olarak elde edilir.

Sonuç olarak, α eğrisinin Frenet-Serret formülleri, (2.6) eşitlikleriyle veya matris olarak

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

verilebilir. Burada, $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisinin Frenet vektörleri $\{T, N, B\}$, $\mathbb{R}^3$ de bir ortonormal çatı olduğundan

$$T = N \wedge B,$$

$$N = B \wedge T,$$

$$B = T \wedge N,$$

olarak yazılabilir.

Ayrıca, $\{T, N, B\}$ Frenet vektörleri her s anında, bir eksen etrafında, ani bir helis hareketi yaptığı kabul edilir. Bu eksene eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki Darboux (ani dönme) eksenini denir. Bu eksenin yön ve doğrultusunu veren vektör,

$$D(s) = \tau(s)T(s) + \kappa(s)B(s)$$

olup, eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki Darboux vektörü adını alır. Bu vektör

$$T' = D \wedge T$$

$$N' = D \wedge N$$

$$B' = D \wedge B$$

eşitliklerini sağlar (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.1 $\mathbb{R}^3$ uzayında bir birim hızlı $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisinin $\alpha(s_0)$ noktasındaki α ile sonsuz yakın üç ortak noktası olan kürelerinin merkezlerinin geometrik yeri olan

$$\bar{\alpha} = \alpha(s_0) + \frac{1}{\kappa(s_0)}N(s_0) + \lambda B(s_0),$$

doğrusuna α eğrisinin $\alpha(s_0)$ noktasındaki eğrilik eksenini denir. Eğrilik eksenini üzerindeki

$$C(s_0) = \alpha(s_0) + \frac{1}{\kappa(s_0)}N(s_0),$$

noktasına α eğrisinin $\alpha(s_0)$ noktasındaki eğrilik merkezi denir.

Şimdi, $\mathbb{R}^3$ uzayında bir birim hızlı olmayan eğri $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ olsun. O halde,

$$\alpha \circ h: J \rightarrow \mathbb{R}^3$$

birim hızlı olacak biçimde bir $h: J \rightarrow I$ fonksiyonu vardır öyle ki

$$f(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du$$

eşitliğiyle tanımlı $f: I \rightarrow J$ yay uzunluğu fonksiyonunun tersidir. Eğer $\beta = \alpha \circ h$ ise $\beta: J \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı bir eğridir. Burada, her bir $s \in J$ için $h(s) = t$ olsun. Bu durumda, $h = f^{-1}$ olduğundan $s = f(t)$ demektir. Buna göre

$$\beta(s) = \alpha(h(s)) = \alpha(t)$$

olur. Burada, $f(t_0) = 0$ olduğu açıktır.

$\mathbb{R}^3$ uzayında $\beta = \alpha \circ h$ ile elde edilen birim hızlı β eğrisinin Frenet vektör alanlarını $T_\beta, N_\beta, B_\beta$ ile gösterilsin. O zaman, α eğrisinin Frenet vektör alanları T, N ve B için

$$T(t) = T_\beta(f(t))$$

$$N(t) = N_\beta(f(t))$$

$$B(t) = B_\beta(f(t))$$

eşitlikleri ile elde edilir. Ayrıca, β eğrisinin eğrilik ve burulması, sırasıyla, κ_β ve τ_β ile gösterilsin. O halde, α eğrisinin eğrilik κ ve burulması τ fonksiyonları, sırasıyla

$$\kappa(t) = \kappa_\beta(f(t))$$

$$\tau(t) = \tau_\beta(f(t))$$

eşitlikleri ile elde edilir. Kısaca

$$T = T_\beta \circ f$$

$$N = N_\beta \circ f$$

$$B = B_\beta \circ f$$

ve

$$\kappa = \kappa_\beta \circ f$$

$$\tau = \tau_\beta \circ f$$

dir.

$\|\alpha'\|$, I aralığından $\mathbb{R}$ içine tanımlı bir fonksiyondur. Bu fonksiyon kısaca v ile gösterirsek

$$\|\alpha'\| = v$$

eşitliği ile tanımlanır. Burada, $f' = \|\alpha'\|$ olduğundan $f' = v$ olur.

Teorem 2.1 $\mathbb{R}^3$ uzayında Frenet elemanları $\{T, N, B, \kappa, \tau\}$ olan birim hızlı olmayan $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisinin hızı v olsun. O halde, Frenet formülleri

$$T' = v\kappa N$$

$$N' = -v\kappa T + v\tau B$$

$$B' = -v\tau N$$

dir.

Teorem 2.2 $\mathbb{R}^3$ uzayında Frenet elemanları $\{T, N, B, \kappa, \tau\}$ olan birim hızlı olmayan eğrisi $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ olmak üzere

$$T = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|}$$

$$B = \frac{\alpha' \wedge \alpha''}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|}$$

$$N = B \wedge T$$

ve

$$\kappa = \frac{\|\alpha' \wedge \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}$$

$$\tau = \frac{\langle \alpha' \wedge \alpha'', \alpha''' \rangle}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|^2}$$

dir.

Tanım 2.2 $\mathbb{R}^3$ de Frenet vektör alanları T, N ve B olan bir eğri $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ olmak üzere

- (i) $B^\perp = Sp\{T, N\}$ düzlemine, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki dokunum düzlemi veya oskülatör düzlem;
- (ii) $N^\perp = Sp\{T, B\}$ düzlemine, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki doğrultma düzlemi veya rektifyan düzlem;
- (iii) $T^\perp = Sp\{N, B\}$ düzlemine, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki dik düzlem veya normal düzlem denir.

Teorem 2.3 $\mathbb{R}^3$ de Frenet vektör alanları T, N ve B olan birim hızlı olmayan bir eğri $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ olsun. O halde,

$$\alpha \text{ eğrisi düzlemsel} \Leftrightarrow \tau = 0,$$

dır. Diğer bir ifadeyle, eğrinin her bir noktasındaki dokunum (oskülatör) düzlemi, eğrinin içinde bulunduğu P düzlemidir.

İspat. ($\Rightarrow$;) Kabul edelim ki; $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi düzlemsel olsun. Buna göre, her bir $t \in I$ için α eğrisinin $\alpha(t)$ noktalarının tümü, belirli bir P düzleminde bulunur. Bu düzlemin birim normal vektörü η olsun. Eğer q düzlem üzerinde bir nokta ise her bir $t \in I$ için

$$\langle \alpha(t) - q, \eta \rangle = 0,$$

olur. Buradan

$$\langle \alpha'(t), \eta \rangle = 0,$$

$$\langle \alpha''(t), \eta \rangle = 0$$

bulunur. Ayrıca, $\|\alpha'\| = v$ olmak üzere Teorem 2.1 kullanılarak

$$\alpha' = vT,$$

$$\alpha'' = v'T + v^2\kappa N$$

olacağından

$$\langle vT, \eta \rangle = 0,$$

$$\langle v'T + v^2\kappa N, \eta \rangle = 0,$$

elde edilir. Bu eşitlikler, T ve N vektör alanlarının birim normal vektörü η ya dik olduğunu gösterir. O zaman, her bir $t \in I$ için $T(t)$ ve $N(t)$ vektörleri, $\alpha(I)$

kümesini kapsayan P düzlemi içindedirler. $B(t)$ vektörü, $T(t)$ ve $N(t)$ vektörlerinin her ikisine de dik olduğundan her bir $t \in I$ için $B(t) // \eta$ dir. Öyleyse

$$B = \eta \text{ veya } B = -\eta,$$

dır. Buradan, η sabit vektör olduğundan $B' = 0$ elde edilir. Dahası $B' = -v\tau N$ olduğundan $\tau = 0$ olmak zorundadır. O halde, eğrinin herbir noktasına dokunan düzlem, eğrinin içinde bulunduğu P düzlemidir.

($\Leftarrow$;) Kabul edelim ki; α eğrisi için $\tau = 0$ olsun. Bu takdirde $B' = -v\tau N$ ve $B' = 0$ olur. Öyleyse, her bir $t \in I$ için B vektör alanı α üstünde sabittir. $t_0 \in I$ alalım ve $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunu

$$F(t) = \langle \alpha(t) - \alpha(t_0), B \rangle,$$

eşitliğiyle tanımlayalım. Burada, $F(t_0) = 0$ olduğu hemen görülebilir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} F'(t) &= \langle \alpha'(t), B \rangle \\ &= \langle vT(t), B \rangle \\ &= v\langle T(t), B \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

olduğundan F fonksiyonu sabittir ve $F(t_0) = 0$ olduğundan her bir $t \in I$ için $F(t) = 0$ dır. Böylece her $t \in I$ için $\langle \alpha(t) - \alpha(t_0), B \rangle = 0$ dır. Bu eşitlik, $\alpha(I)$ kümesinin $\alpha(t_0)$ noktasından geçen ve B birim vektörüne dik olan düzlem içinde bulunduğunu gösterir. Dolayısıyla, α eğrisi düzlemseldir.

2.1 $\mathbb{R}^2$ de Düzlemsel Eğriler

$\mathbb{R}^2$ uzayındaki eğriler, iki boyutlu bir düzlemde yer alan eğrilerdir ve düzlemsel eğriler olarak da adlandırılırlar. Düzlemsel eğrilerin matematiksel analizi ve geometrik özelliklerinin anlaşılması, farklı uygulama alanlarında büyük öneme sahiptir. Örneğin, mimaride ve tasarımda eğrilerin estetik kullanımı, mühendislik projelerinde yol, hat ve yüzey tasarımları, bilgisayar grafikleri ve oyun geliştirme gibi alanlarda gerçekçi ve doğal görüntülerin oluşturulması için düzlemsel eğrilerin incelenmesi önemlidir.

Düzlemsel eğrilerin temel özelliklerine değinmeden önce, parametrik bir denklemle ifade edilen düzlemsel eğrilerin temel tanımını inceleyelim.

$\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$ şeklinde verilen parametrik denklem, $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ ile tanımlı düzlemsel eğriyi temsil eder. Bu denklemde $\alpha_1(t)$ ve $\alpha_2(t)$ fonksiyonları, eğrinin x ve y koordinatlarını belirler. Bu parametrik denkleme göre, eğrinin her bir noktasının konumu t parametresine bağlı olarak değişir.

Düzlemsel eğrilerin temel özelliklerini anlamak için Frenet çatısı ve birinci eğriliği ele alalım. Düzlemsel regüler bir eğri $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ olsun, yani $\alpha'(t) \neq 0$ olsun. Bu durumda, $\alpha(t)$ eğrisinin Frenet çatısı $\{t, n\}$ ve eğriliği k şu şekilde tanımlanır:

$$\begin{aligned} t(t) &= \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \frac{(\alpha'_1(t), \alpha'_2(t))}{\sqrt{(\alpha'_1(t))^2 + (\alpha'_2(t))^2}}, \\ n(t) &= \frac{(-\alpha'_2(t), \alpha'_1(t))}{\sqrt{(\alpha'_1(t))^2 + (\alpha'_2(t))^2}}, \\ k(t) &= \frac{\alpha_1 \alpha_2'' - \alpha_1'' \alpha_2'}{\left((\alpha_1(t))^2 + (\alpha_2(t))^2\right)^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned}$$

ve Frenet formülleri

$$\begin{aligned} t' &= kn, \\ n' &= -kt, \end{aligned}$$

dir. Burada $t(t)$, $\alpha'(t)$ vektörünün normalizasyonu ile elde edilen birim tangent vektörüdür. $n(t)$ ise $\alpha'(t)$ vektörünün saat yönünün tersine döndürülmesiyle elde edilen normalleştirilmiş birim normal vektördür. $k(t)$ ise α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki eğriliğidir. Düzlemsel eğrilerde eğriliği ifade etmek için genellikle eğrinin eğrilik yarıçapı kullanılır. Eğrilik yarıçapı, eğrinin bir noktasındaki eğriliğin tersi olarak hesaplanır. Yani, eğrilik yarıçapı

$$R(t) = \frac{1}{k(t)}$$

dir. Eğrilik yarıçapı, bir eğrinin belirli bir noktasındaki eğrilik durumunu ifade eder. Düzlemsel bir eğrinin eğrilik yarıçapı, pozitif bir değerdir ve eğrinin dönme derecesini belirler. Eğrilik yarıçapı, eğrinin her noktasında farklı olabilir. Bu

nedenle, eğrilik yarıçapının her noktadaki değerlerinin hesaplanması, eğrinin şeklini ve dönüşlerini tam olarak anlamak için önemlidir. Eğrilik yarıçapı ne kadar küçükse, eğri o noktada daha keskin bir dönüş yapar. Eğrilik yarıçapı ne kadar büyükse, eğri o noktada daha düz bir şekilde ilerler.

$\mathbb{R}^2$ de Frenet çatısı $\{t, n\}$ olan birim hızlı bir eğri $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ olsun. O halde, α nın hız vektörü t ile x -ekseni arasındaki açı ϕ olmak üzere

$$\langle n, e_1 \rangle = \|n\| \|e_1\| \cos(\phi + \frac{\pi}{2})$$

olur. Burada, n ve e_1 birim vektör olduklarından

$$\langle n, e_1 \rangle = -\sin\phi \quad (2.9)$$

elde edilir. $\langle t, e_1 \rangle = \cos\phi$ olduğundan

$$\langle t', e_1 \rangle = -\phi' \sin\phi$$

olup $t' = kn$ olduğundan

$$k \langle n, e_1 \rangle = -\phi' \sin\phi \quad (2.10)$$

elde edilir. (2.9) ve (2.10) eşitliklerinden

$$k = \phi'$$

dir.

Sonuç 2.1 $\mathbb{R}^2$ de birim hızlı olmayan bir eğri $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ olsun. O halde, α nın hız vektörü ile x -ekseni arasındaki açı ϕ olmak üzere

$$\|\alpha'\| \kappa_p = \phi'$$

dir.

3. $\mathbb{R}^2$ DE KAPALI EĞRİLER

$\mathbb{R}^2$ düzleminde başlangıç noktası ve bitiş noktası aynı olan eğrilere kapalı eğriler denir. Diğer bir ifadeyle; $\mathbb{R}^2$ düzleminde $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlanan

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t))$$

parametrik bir fonksiyon ile belirlenen bir eğri C olmak üzere eğrinin başlangıç noktası ve bitiş noktası için

$$x(a) = x(b)$$

ise C eğrisine kapalı eğri denir ve

- Kapalı eğrilerin uzunluğu, parametre aralığına ve eğrinin parametrik tanımına bağlı olarak değişir.
- Kapalı eğrilerin iç ve dış bölgeleri kesin bir şekilde ayrılır. Eğrinin iç bölgesi, eğrinin kendisi tarafından çevrelenen bölgedir. Dış bölge ise iç bölgenin dışında kalan alandır.

3.1 Jordan Eğri Teoremi

Riemann integralinin temelinde yatan önemli bir teorem olan Jordan Eğri Teoremi, kapalı eğrilerin iç ve dış bölgelerini tanımlar.

$\mathbb{R}^2$ düzleminde kapalı ve düzgün bir eğri $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$ olsun. Bu eğri, belirli bir t aralığında tanımlanır ve t 'ye bağlı olarak xOy – düzleminde bir noktaya karşılık gelir. Bu noktaları birleştiren eğri, Jordan eğrisini oluşturur.

Teorem 3.1 (Jordan Eğri Teoremi) *Kapalı bir eğrinin iç ve dış bölgeleri arasında herhangi bir nokta geçişi yoktur.*

Diğer bir ifadeyle, Jordan Eğri Teoremi, eğrinin iç ve dış bölgelerinin kesin bir şekilde ayrıldığını ve eğri üzerindeki noktaların yalnızca bir tarafı temsil ettiğini gösterir. Eğer bir nokta, eğri üzerindeyse ya içerde ya da dışarıda olabilir, ancak her iki tarafta birden olamaz. Eğer $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$ parametrik denklemiyle

verilen α eğrisi, $\mathbb{R}^2$ düzleminde kapalı ve düzgün bir eğri ise, α eğrisinin iç ve dış bölgeleri arasında herhangi bir nokta geçişi yoktur. Teoremdaki iki bölgelerden biri sınırlıdır, diğeri değildir. Sınırlı bileşene α eğrisinin içi, diğeri de α eğrisinin dışı denir. Basit bir kapalı α eğrisiyle sınırlanan alandan bahsettiğimizde, α eğrisinin iç alanını kastederiz. Şimdi, Jordan Eğri Teoremi'nin bir örneğini ele alalım.

Örnek 3.1.1 Çember, en basit kapalı eğridir. Merkezi orjin ve yarıyapı r olan çember, $[0, 2\pi]$ olmak üzere her $t \in I$ için

$$\alpha(t) = (r\cos(t), r\sin(t)),$$

olarak tanımlanan $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ fonksiyonu ile ifade edilebilir. Burada, α , I üzerinde C^∞ – sınıfından ve $[0, 2\pi)$ üzerinde bire-birdir. Aynı zamanda da $\alpha(I)$, $\mathbb{R}^2$ düzleminde $x^2 + y^2 = r^2$ bağıntısını sağlayan $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ noktalarının kümesi orjin merkezli ve r yarıyaplı çemberin geometrik yeridir. Bu çember, $\mathbb{R}^2$ içinde C^∞ –sınıfından bir Jordan eğrisidir.

3.2 Sarım Sayısı ve Dönüş İndeksi

Sarım sayısı ve dönüş indeksi, kapalı eğrilerin dönme özelliklerini açıklayan matematiksel kavramlardır. Bu kavramlar, eğrinin dönme ve dönüş özelliklerini analiz etmek için kullanılır.

Sarım sayısı, bir eğrinin üzerindeki bir noktanın kaç kez döndüğünü ifade eder. Başka bir ifade ile, bir eğrinin sarım sayısı, eğrinin üzerindeki noktanın eğriyi dolaşırken yaptığı tam tur sayısıdır. Kapalı bir eğri düşündüğümüzde, bu eğrinin üzerindeki bir noktanın dönüş sayısı bir pozitif veya negatif tam sayı veya sıfır olabilir. Pozitif sarım sayısı, eğrinin saat yönünün tersine döndüğünü gösterirken, negatif sarım sayısı, eğrinin saat yönünde döndüğünü ifade eder. Sıfır sarım sayısı ise, noktanın eğri boyunca dönmediği anlamına gelir.

Tanım 3.2.1 $\mathbb{R}^2$ de yönlendirilmiş bir kapalı eğri C , $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$, $t \in [a, b]$ ile tanımlansın ve P , düzlemde C eğrisinin üzerinde olmayan bir nokta olsun. O halde,

$$f(x(t)) = \frac{x(t) - P}{|x(t) - P'|}$$

olarak tanımlanan $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna, C eğrisinin P ye göre konum eşlemesi denir. Burada, $x(t)$ noktası C eğrisi etrafında bir tam tur attığında, görüntü noktası $f(x(t))$ etrafında birden fazla tur attığı açıktır. Bu tur sayısına, C eğrisinin P noktasına göre sarma sayısı denir.

Dönüş indeksi ise bir eğrinin üzerindeki dönüş sayısını belirtir. Diğer bir ifadeyle; bir eğrinin dönüş indeksi, eğrinin üzerindeki tam dönüş sayısını belirtir. Kapalı bir eğri düşündüğümüzde, eğrinin üzerindeki dönüş indeksi bir pozitif veya negatif tam sayı olabilir. Pozitif dönüş indeksi, eğrinin saat yönünün tersine döndüğünü gösterirken, negatif dönüş indeksi, eğrinin saat yönünde döndüğünü ifade eder.

Tanım 3.2.2 $\mathbb{R}^2$ de yönlendirilmiş bir kapalı eğri C , yay parametresi $s \in [0, L]$ ve uzunluğu L olan $x(s)$ yayı ile tanımlansın. O halde,

$$h(x(s)) = x'(s)$$

olarak tanımlanan $h: C \rightarrow T$ sürekli fonksiyonuna, C eğrisinin teğetsel eşlemesi denir. Burada, $x(s)$ noktası C eğrisi etrafında tam bir tur attığında, görüntü noktası $h(x(s))$ de T etrafında attığı tur sayısına, C eğrisinin dönüş indeksi denir.

Uyarı 3.2.1 Bir basit kapalı eğri, eğri boyunca artan bir parametre yönünde ilerliyorsa, bu eğri pozitif yönlüdür ve eğrinin içi sol tarafta kalır. Pozitif yönlü bir basit kapalı eğrinin teğet vektörleri de pozitif yönlüdür.

3.3 Eğri Zarfları

Eğrinin her noktasında teğet doğru çizildiğinde, bu doğruların oluşturduğu eğri sistemine eğri zarfları denir. Eğri zarfları, eğrinin şeklini, dönüşlerini ve kısırımalarını ifade eden bir eğri ailesidir. Eğri zarfları, eğrinin teğet düzlemine, hız vektörlerine ve eğriliğine bağlı olarak belirlendiğinden eğrinin maksimum veya minimum eğrilik noktalarını, düzlük bölgelerini ve dönüş noktalarını gösterir. Dolayısıyla, bu zarflar, eğrinin özelliklerini ve şeklini analiz etmek için kullanılır.

Tek parametrelili bir eğri ailesinin zarfı, aşağıdaki iki özelliği taşıyan bir eğridir:

1. Her noktasında, ailedeki en az bir eğriye teğet olan noktalardan oluşur.
2. Ailenin herhangi bir eğrisiyle en az bir noktada teğet olan bir eğridir

Bir eğrinin eğri zarflarını anlamak için basit bir örnek ele alalım:

Örneğin; bir eğrinin eğri zarflarını anlamak için $\mathbb{R}^2$ düzleminde düzgün bir $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$ eğrisini alalım.

1. $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$ eğrisi bir doğru ise α nın eğri zarfları, tüm noktalarda doğrunun kendisidir. Çünkü, doğrunun her noktasında teğet doğrular çizildiğinde, bu doğrular, doğrunun kendisini, yani α eğrisini ve eğri zarflarını oluşturur.

2. $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$ eğrisi bir çember ise α nın eğri zarfları, çemberin iç ve dış bölgelerinde farklıdır. Çünkü, çemberin dışında, eğri zarfları çemberi çevreleyen bir eğridir. Çemberin içinde ise, eğri zarfları çemberi oluşturan α eğrisinin kendisidir.

Teorem 3.3 $\mathbb{R}^2$ düzleminde

$$f(x_1, x_2, t) = 0, \quad (3.1)$$

t parametrelili bir eğri ailesinin denklemi ve bu ailenin bir zarfı

$$x_1 = \phi(t), \quad x_2 = \psi(t), \quad (3.2)$$

olsun. O zaman,

$$f_3(x_1, x_2, t) = 0, \quad (3.3)$$

dir. Burada f_3, f nin t ye göre kısmi türevidir.

İspat. Her t için f, ϕ ve ψ sürekli farklılaştığında (3.1) ile verilen eğri ailesi ile zarf, $(\phi(t), \psi(t))$ noktasında ortak bir teğete sahiptir. Dolayısıyla, $(\phi(t), \psi(t))$ noktası (3.1) ile verilen ifadesini sağlayacağından her t için

$$f(\phi(t), \psi(t), t) = 0, \quad (3.4)$$

dir. (3.4) ifadesinin t ye göre türev alırsak zincir kuralından

$$f_1(\phi(t), \psi(t), t)\phi'(t) + f_2(\phi(t), \psi(t), t)\psi'(t) + f_3(\phi(t), \psi(t), t) = 0 \quad (3.5)$$

elde edilir. Burada f_1 , f_2 ve f_3 , sırasıyla, f nin x , x_2 ve t ye göre kısmi türevleridir. Öte yandan, (3.1) ile verilen ailesinden bir eğrinin eğimi

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_1(x_1, x_2, t)}{f_2(x_1, x_2, t)} \quad (3.6)$$

ve (3.2) ile verilen eğri ailesinin zarfının eğimi ise

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\psi'(t)}{\phi'(t)} \quad (3.7)$$

dir. Her t için (3.1) ile verilen eğri ailesi ile zarf, $(\phi(t), \psi(t))$ noktasında ortak bir teğete sahip olduğundan

$$\frac{\psi'(t)}{\phi'(t)} = \frac{f_1(\phi(t), \psi(t), t)}{f_2(\phi(t), \psi(t), t)}$$

veya

$$f_1(\phi(t), \psi(t), t)\phi'(t) + f_2(\phi(t), \psi(t), t)\psi'(t) = 0 \quad (3.8)$$

elde edilir. (3.5) ve (3.8) eşitliklerinden $f_3(\phi(t), \psi(t), t) = 0$ dir.

4. KAPALI DIŞBÜKEY EĞRİNİN UZUNLUĞU VE ALANI

Şimdi $\mathbb{R}^2$ düzleminde $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlanan

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t))$$

parametrik ifadesiyle belirli pozitif yönlendirilmiş bir kapalı dışbükey C eğrisini ve C eğrisinin içindeki herhangi bir noktayı sabit çatinın orijini O olarak kabul edelim. Eğer p , O noktasının C eğrisinin $x = (x_1, x_2)$ noktasındaki pozitif yönlendirilmiş l teğetine olan dik uzaklığı ve θ , bu dikme ayağı ile x -ekseni arasındaki açı ise p yi θ açısına bağlı tek değişkenli ve periyodu 2π olan bir fonksiyon olarak düşünebiliriz. Bu durumda, l teğet doğrusunun denklemi

$$x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta = p(\theta) \quad (4.1)$$

şeklinde yazılabilir. Burada (4.1) ile verilen tün doğruların zarfı, C eğrisidir. (4.1) ile verilen teğetin, C eğrisine değme noktası olan $x = (x_1, x_2)$ yi belirlemek için (4.1) ifadesinin θ ya göre kısmi türevini alırsak

$$-x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta = p'(\theta) \quad (4.2)$$

elde edilir. Burada, p' , θ ya göre kısmi türevi göstermektedir.

(4.1) ile (4.2) eşitliklerinden c eğrisinin parametrik gösterimi

$$\begin{cases} x_1 = p(\theta) \cos \theta - p'(\theta) \sin \theta, \\ x_2 = p(\theta) \sin \theta + p'(\theta) \cos \theta, \end{cases} \quad (4.3)$$

olarak elde edilir. Burada, c , C eğrisinin parametresi olur. Böylece, θ ve $p(\theta)$ verildiğinde, kapalı dışbükey C eğrisi tek bir $x(x_1, x_2)$ noktası belirleyebiliriz. Bunun tersi de doğrudur. Bu nedenle, $(\theta, p(\theta))$ ikilisine C eğrisi üzerideki $x(x_1, x_2)$ noktasının kutupsal teğet koordinatları denir.

(4.3) ifadesinin θ ya göre türevi alınır

$$\begin{cases} x_1' = -[p(\theta) + p''(\theta)] \sin \theta, \\ x_2' = [p(\theta) + p''(\theta)] \cos \theta, \end{cases} \quad (4.4)$$

yazılabilir. C eğrisinin yay uzunluğu s olmak üzere

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x_1')^2 + (x_2')^2} d\theta$$

dir ve burada s, θ nın monoton artan bir fonksiyonu olup (4.4) ifadesinden

$$s = \int_0^{2\pi} (p(\theta) + p''(\theta)) d\theta$$

dir. Öyleyse, yukarıdaki eşitlikten $0 \leq \theta < 2\pi$ için C eğrisinin eğrilik yarıçapı

$$\rho = \frac{ds}{d\theta} = p(\theta) + p''(\theta) > 0, \quad (4.5)$$

olarak bulunur.

Şimdi, C eğrisinin uzunluğu L olmak üzere

$$L = \int_C ds = \int_0^{2\pi} \frac{ds}{d\theta} d\theta \quad (4.6)$$

olup (4.5) ifadesini kullanarak

$$L = \int_0^{2\pi} p(\theta) d\theta + [p'(\theta)]_0^{2\pi}, \quad (4.7)$$

elde edilir. Burada, p , periyodu 2π olan bir fonksiyon olduğundan $p'(\theta)$ da 2π periyodlu bir fonksiyon olacağından $p'(0) = p'(2\pi)$ dir. Bu yüzden yukarıdaki ifade

$$L = \int_0^{2\pi} p(\theta) d\theta, \quad (4.8)$$

olarak yazılabilir

A, C eğrisi tarafından sınırlanan bölgenin alanı olsun. O halde,

$$A = \frac{1}{2} \int_C p(\theta) ds \quad (4.9)$$

ve (4.5) eşitliğinden

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} p(\theta)[p(\theta) + p''(\theta)]d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^{2\pi} p^2(\theta)d\theta + \int_0^{2\pi} p(\theta)p''(\theta)d\theta \right) \end{aligned}$$

dir. Burada

$$\int_0^{2\pi} p(\theta)p''(\theta)d\theta = [p(\theta)p'(\theta)]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} p'^2(\theta)d\theta,$$

olup p ve p' , 2π periyodlu birer fonksiyon olduğundan

$$\int_0^{2\pi} p(\theta)p''(\theta)d\theta = - \int_0^{2\pi} p'^2(\theta)d\theta$$

dir. Dolayısıyla,

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [p^2(\theta) - p'^2(\theta)]d\theta \quad (4.10)$$

yazılabilir.

4.1 Paralel Eğriler

Tanım 4.1 $\mathbb{R}^2$ düzleminde iki eğrinin karşılıklı noktaları arasındaki uzaklık sabit ve karşılıklı noktalardaki eğrilerin teğetleri paralel ise, bu iki eğri paraleldir denir.

Örneğin, bir eğrinin iki involüs'ü paralel eğrilerdir.

Şimdi n herhangi bir pozitif sayısı olmak üzere, kapalı bir dışbükey C eğrisinin her bir normal boyunca eğrinin dışındaki uzunluğu n olsun. Bu uzunluğun bitim noktalarının belirttiği eğri C_n , C eğrisinin bir paralel eğrisidir.

Önerme 4.1 C_n , bir kapalı dışbükey eğridir.

İspat. $(\theta, p_n(\theta))$, C eğrisi üzerinde kutupsal teğet koordinatları $(\theta, p(\theta))$ olan bir noktaya karşılık gelen, C_n eğrisi üzerindeki noktanın kutupsal teğet koordinatları olsun. O zaman

$$p_n(\theta) = p(\theta) + n \quad (4.11)$$

olup (4.5) eşitliğini kullanarak C_n nin eğrilik yarıçapı

$$\rho_n = \rho + n \quad (4.12)$$

olarak elde edilir. Burada, (4.11), $p_n(\theta)$, θ nın 2π periyotlu bir fonksiyonudur. Ayrıca, hem ρ hem de n pozitif olduğundan (4.12) eşitliğinden $\rho_n > 0$ dir. Dolayısıyla, C_n , bir kapalı dışbükey eğridir.

L_n ve A_n , sırasıyla, C_n eğrisinin uzunluğu ve alanı olsun. O halde, (4.8), (4.10) ve (4.11) ifadelerini kullanarak

$$L_n = L + 2n\pi, \quad (4.13)$$

ve

$$A_n = A + nL + n^2\pi, \quad (4.14)$$

olarak kolayca elde edebiliriz.

Teorem 4.1 *Kapalı bir dışbükey eğrinin uzunluğu (veya alanı), en büyük ve en küçük eğrilik yarıçapına sahip eğrinin oskülatör çemberlerinin uzunlukları (veya alanları) arasındadır.*

İspat. ρ_1 ve ρ_2 , sırasıyla, uzunluğu L ve alanı A olan kapalı bir dışbükey C eğrisinin eğrilik yarıçapının en büyük ve en küçük değeri olsun. O zaman (4.5), (4.6) ve (4.9) eşitliklerinden

$$2\pi\rho_1 > L > 2\pi\rho_2, \quad (4.15)$$

Ve

$$\rho_1 \int_0^{2\pi} p(\theta)d\theta > 2A > \rho_2 \int_0^{2\pi} p(\theta)d\theta \quad (4.16)$$

elde ederiz. (4.6) eşitliğinde

$$\int_0^{2\pi} p(\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} \rho(\theta)d\theta$$

Olduğundan

$$2\pi\rho_1 > \int_0^{2\pi} \rho(\theta)d\theta > 2\pi\rho_2 \quad (4.17)$$

dir. Dolayısıyla, (4.16) ile (4.17) eşitsizliklerinden

$$\pi\rho_1^2 > A > \pi\rho_2^2, \quad (4.18)$$

elde edilir.

Teorem 4.2 *Belirli bir D çapına sahip tüm kapalı dışbükey eğriler arasında, sabit D genişliğine sahip olanlar en büyük uzunluğa sahiptir.*

İspat. C , kutup teğet koordinatları $(\theta, p(\theta))$ olan L uzunluğunda kapalı bir dışbükey eğri olsun. $p(\theta)$, 2π periyodlu periyodik bir fonksiyon olduğundan

$$p(\theta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta), \quad (4.19)$$

Fourier serisi ile ifade edilebilir. Burada

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} p(\theta)d\theta, \quad (4.20)$$

dir. (4.8) ifadesinden

$$L = \pi a_0 \quad (4.21)$$

olup (4.20) ifadesini

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [p(\theta) + p(\theta + \pi)] d\theta$$

olarak yazabiliriz. Herhangi bir doğrultudaki C eğrisinin genişliği D den büyük olmadığı için

$$p(\theta) + p(\theta + \pi) \leq D,$$

dir. Dolayısıyla, $a_0 \leq D$ ve (4.21) eşitliğinden

$$L \leq \pi D, \quad (4.22)$$

dir. (4.22) ifadesindeki eşitliğin ancak ve ancak C eğrisinin sabit genişliği D olduğu durumlarda geçerli olduğu açıktır.

Sonuç 4.1 Sabit D genişliğine sahip tüm kapalı dışbükey eğrilerin uzunluğu aynıdır ve πD dir.

Teorem 4.3 Belirli bir uzunluktaki tüm basit kapalı eğriler arasında, çember en geniş alanı sınırlar. Başka bir deyişle, eğer A, L uzunluğundaki bir basit kapalı eğri tarafından sınırlanmış alan ise,

$$L^2 - 4\pi A \geq 0, \quad (4.23)$$

dir. Burada eşitlik ancak ve ancak C eğrisi bir çember olduğunda geçerlidir.

Sonuç 4.2 Alanı A ve çapı D olan bir kapalı dışbükey C eğrisi için

$$A < \frac{1}{4} \pi D^2, \quad (4.24)$$

dir. Burada eşitlik ancak ve ancak C eğrisi bir çember olduğunda geçerlidir.

5. KAYNAKLAR

(Bu tez çalışmasında APA atıf sistemi kullanılmıştır.)

Blaschke, W. (1956). *Kreis und Kugel* 2. De Gruyter.

Oprea, J. (2007). *Differential geometry and its applications*. MAA.

Jost, J., & Jost, J. (2008). *Riemannian geometry and geometric analysis* (Vol. 42005). Berlin: Springer.

Do Carmo, M. P. (2016). *Differential geometry of curves and surfaces: revised and updated second edition*. Courier Dover Publications.

Pan, S., & Zhang, H. (2007). A reverse isoperimetric inequality for convex plane curves. *Beiträge zur Algebra und Geometrie*, 48(1), 303-308.

Pan, S., & Xu, H. (2009). Stability of a reverse isoperimetric inequality. *Journal of mathematical analysis and applications*, 350(1), 348-353

Hacısalihoglu, H. H. (2000). Diferensiyel Geometri Cilt I. *Ankara University Faculty of Science, Ankara*.

Zhang, Z. (2019). Inequalities for curvature integrals in Euclidean plane. *Journal of Inequalities and Applications*, 2019(1), 1-12.