



SABİT NOKTA TEKNİKLERİYLE GÖRÜNTÜ İYİLEŞTİRME

Mustafa Anıl DEMİRBAŞ

Danışman: Prof. Dr. Murat ÖZDEMİR

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Ana Bilim Dalı

2022

(Her hakkı saklıdır.)

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

SABİT NOKTA TEKNİKLERİYLE GÖRÜNTÜ İYİLEŞTİRME

(Image Restoration with Fixed Point Techniques)

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mustafa Anıl DEMİRBAŞ

Danışman: Prof. Dr. Murat ÖZDEMİR

Erzurum

Haziran, 2022

KABUL VE ONAY TUTANAĐI

Mustafa Anıl DEMİRBAŞ tarafından hazırlanan “Sabit Nokta Teknikleriyle Görüntü İyileştirme” başlıklı çalışması 27 / 06 / 2022 tarihinde yapılan tez savunma sınavı sonucunda başarılı bulunarak jürimiz tarafından Matematik Ana Bilim Dalı, Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalında yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Başkanı:	Prof. Dr. İsa YILDIRIM <i>Atatürk Üniversitesi</i>	Aslı Islak İmzalıdır
Danışman:	Prof. Dr. Murat ÖZDEMİR <i>Atatürk Üniversitesi</i>	Aslı Islak İmzalıdır
Jüri Üyesi:	Doç. Dr. İbrahim KARAHAN <i>Erzurum Teknik Üniversitesi</i>	Aslı Islak İmzalıdır

Bu tezin Atatürk Üniversitesi Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliđi'nin ilgili maddelerinde belirtilen şartları yerine getirdiğini onaylarım.

Prof. Dr. Saltuk Buđrahan CEYHUN
Enstitü Müdürü

Aslı Islak İmzalıdır

ETİK BİLDİRİM VE İNTİHAL BEYAN FORMU

Yüksek Lisans Tezi olarak Prof. Dr. Murat ÖZDEMİR danışmanlığında sunulan “Sabit Nokta Teknikleriyle Görüntü İyileştirme” başlıklı çalışmanın tarafımızdan bilimsel etik ilkelere uyularak yazıldığını, yararlanılan eserlerin kaynakçada gösterildiğini, Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından belirlenmiş olan Turnitin Programı benzerlik oranlarının aşılmadığını ve aşağıdaki oranlarda olduğunu beyan ederiz.

Tez Bölümleri	Tezin Benzerlik Oranı (%)	Maksimum Oran (%)
Giriş	10	30
Kuramsal Temeller	25	30
Materyal ve Yöntem	15	35
Araştırma Bulguları	6	20
Tartışma ve Sonuç	0	20
Tezin Geneli	19	25

Not: Yedi kelimeye kadar benzerlikler ile Başlık, Kaynakça, İçindekiler, Teşekkür, Dizin ve Ekler kısımları tarama dışı bırakılabilir. Yukarıdaki azami benzerlik oranları yanında tek bir kaynaktan olan benzerlik oranlarının %5'ten büyük olmaması gerekir.

Beyan edilen bilgilerin doğru olduğunu, aksi halde doğacak hukuki sorumlulukları kabul ve beyan ederiz.

Tez Yazarı (Öğrenci)	Tez Danışmanı
Mustafa Anıl DEMİRBAŞ	Prof. Dr. Murat ÖZDEMİR
7.6.2022	7.6.2022
İmza: Aslı Islak İmzalıdır	İmza: Aslı Islak İmzalıdır

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunmuş olduğum bu çalışma, Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde hazırlanmıştır. Yapmış olduğum bu çalışmada bana her türlü desteği veren, bilgi ve tecrübeleriyle beni aydınlatan çok saygıdeğer danışman hocam sayın Prof. Dr. Murat ÖZDEMİR'e, Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde görev yapan öğretim üyelerine, Erzurum Teknik Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde görev yapan sayın Doç. Dr. İbrahim KARAHAN'a ve sayın Arş. Gör. Ebru ALTIPARMAK'a en samimi dileklerle teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Yüksek lisans sürecinde bana her türlü kolaylığı sağlayan Aşkale Borsa İstanbul Anadolu Lisesinin idari kadrosuna ve öğretim arkadaşlarıma teşekkürü borç bilirim.

Ayrıca tüm hayatım boyunca benim yanımda olan, aldığım kararları her zaman destekleyen, sadece bu çalışma sürecinde değil tüm hayatım boyunca bana cesaret ve moral veren annem Yeter DEMİRBAŞ'a, babam Hüseyin DEMİRBAŞ'a, kardeşim Pınar DEMİRBAŞ'a ve çok değerli akrabalarım ile dostlarıma teşekkürlerimi sunarım.

Son olarak düşünceleriyle hayatıma yön veren ve sevgisini hiçbir zaman esirgemeyen değerli eşim Sare DEMİRBAŞ 'a teşekkür ederim.

Mustafa Anıl DEMİRBAŞ

ÖZET
YÜKSEK LİSANS TEZİ
SABİT NOKTA TEKNİKLERİYLE GÖRÜNTÜ İYİLEŞTİRME

Mustafa Anıl DEMİRBAŞ

Danışman: Prof. Dr. Murat ÖZDEMİR

Amaç: Bu tezin amacı, gerek ülkemizde gerekse dünyada ilgi gören ve üzerinde yoğun olarak çalışılan görüntü iyileştirme kavramını incelemektir. Özellikle iki boyutlu bozulmuş görüntüler üzerinde sabit nokta iterasyon yöntemlerinin etkilerini araştırmaktır.

Yöntem: Bu tezde sabit nokta teknikleriyle görüntü iyileştirme alanında son yıllarda yapılan ve öne çıkan çalışmalar derlenmiştir.

Bulgular: Bu tezde İlk olarak konveks minimizasyon problemlerinin çözümünden hareketle verilen iki birikimli operatörün sıfırları için oluşturulan iterasyon yöntemi tanıtılmış ve bu yöntemin görüntü iyileştirme performansı incelenmiştir. Daha sonra genelleştirilmiş Halpern tipi iterasyon yöntemi verilerek bu yöntemin performansı incelenmiştir. Bu iterasyon yöntemlerinin yanı sıra hızlandırılmış viskozite iterasyon yöntemi ve yeni ön koşullu iterasyon yöntemi verilerek bu yöntemlerinin seçilmiş görüntüler üzerindeki etkileri sunulmuştur. Son olarak yukarıda bahsedilen iterasyon yöntemleri ile sıkça çalışılan diğer iterasyon yöntemleri karşılaştırılmıştır.

Sonuç: İncelenen makalelerdeki yazarların teşkil ettiği iterasyon yöntemlerinin diğer iterasyon yöntemlerine göre daha etkin olduğu ve daha iyi sonuçlar verdiği görülmüştür.

Anahtar Kelimeler: Görüntü iyileştirme, sabit nokta, sabit nokta iterasyon yöntemleri, konveks minimizasyon problemi, monoton operatör, genişlemeyen dönüşüm.

Haziran 2022, 51 sayfa

ABSTRACT
MASTER'S THESIS
IMAGE RESTORATION WITH FIXED POINT TECHNIQUES

Mustafa Anıl DEMİRBAŞ

Supervisor: Prof. Dr. Murat ÖZDEMİR

Purpose: The aim of this thesis is to examine the concept of image restoration which has attracted attention and studied extensively both in our country and in the world. Especially, it is to investigate the effects of fixed point iteration methods on two dimensional distorted images.

Method: In this thesis, recent and prominent studies in the field of image restoration with fixed point techniques have been compiled.

Findings: In this thesis, firstly based on the solution of convex minimization problems, the iteration method for the zeros of the two accretive operators is introduced and the performance of this method in image restoration has been investigated. After, the performance of this method was investigated by giving the generalized Halpern type iteration method. In addition to these iteration methods, the accelerated viscosity iteration method and the new preconditional iteration method are given and the effects of these methods on the selected images are presented. Finally, the above-mentioned iteration methods were compared with other frequently studied iteration methods.

Results: It has been seen that the iteration methods created by the authors in the reviewed articles are more effective and give better results than other iteration methods.

Keywords: Image restoration, fixed point, fixed point iteration methods, convex minimization problem, monotone operator, nonexpansive mapping.

June 2022, 51 pages

İÇİNDEKİLER

ETİK BİLDİRİM ve İNTİHAL BEYAN FORMU.....	ii
TEŞEKKÜR	iii
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
SİMGELER DİZİNİ.....	vii
KISALTMALAR DİZİNİ.....	viii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	xi
TABLolar DİZİNİ.....	x
1.GİRİŞ.....	1
2. KURAMSAL TEMELLER.....	7
2.1. Sabit Nokta Kavramı ve Bazı Dönüşüm Sınıfları.....	7
2.2. Küme Değerli Dönüşümler ve Hausdorff Metriği.....	14
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	17
3.1. İterasyon Yöntemleri.....	17
3.2. İki Birikimli Operatör İçin İterasyon Yöntemleri.....	18
3.3. Genelleştirilmiş Halpern Tipi İterasyon Yöntemi.....	29
3.4. Hızlandırılmış Viskozite İterasyon Yöntemi.....	30
3.5. İki Monoton Operatörün Toplamı için Yeni Ön Koşullu İterasyon Yöntemi.....	31
4. ARAŞTIRMA BULGULARI.....	34
4.1. Kitkuan vd. nin İterasyon Yöntemi ile Douglas-Rachford ve İleri Geri Yöntemlerinin Karşılaştırılması.....	34
4.2. Genelleştirilmiş Halpern Tipi İterasyon Yöntemi ile İleri Geri Yönteminin Karşılaştırılması.....	38
4.3. Hızlandırılmış Viskozite İterasyon Yöntemi ile Büzülme Eşiği Yönteminin Karşılaştırılması.....	39
4.4. Yeni Ön Koşullu İterasyon Yöntemi ile Diğer İterasyon Yöntemlerinin Karşılaştırılması.....	44
5. TARTIŞMA ve SONUÇ.....	47
KAYNAKLAR.....	50

SİMGELER DİZİNİ

$CB(K)$	K kümesinin kapalı ve sınırlı alt kümelerinin ailesi
$D(T)$	T dönüşümünün tanım kümesi
$\overline{D(A)}$	$D(A)$ kümesinin kapanışı
E^*	E kümesinin duali
$F(T)$	T dönüşümünün sabit noktalarının kümesi
$G(T)$	T dönüşümünün grafiği
H	Hilbert uzayı
$H(A, B)$	Hausdorff metriği
$J(x)$	Normalleşmiş dualite dönüşümü
$J_{\lambda} \partial f$	∂f operatörünün resolventi
$J_{\lambda_n}^B$	B operatörünün resolventi
P_C	C nin projeksiyon operatörü
$prox_{\lambda f}$	f dönüşümünün proximal operatörü
$R(T)$	T dönüşümünün görüntü kümesi
$T^n x$	x in T altındaki n . iterasyonu
T^{-1}	T dönüşümünün tersi
$zer(A)$	A kümesinin sıfır noktalarının kümesi
2^X	X kümesinin bütün boştan farklı alt kümelerinin ailesi
∇f	f dönüşümünün gradiyent vektörü
∂f	f dönüşümünün alt diferansiyel operatörü
Ω	İki operatörün terslerinin sıfır yerlerinin ara kesiti
$\Gamma_0(\mathbb{R}^n)$	\mathbb{R}^n kümesinde has, alttan yarı sürekli konveks fonksiyonların kümesi

KISALTMALAR DİZİNİ

AVFBA	Hızlandırılmış viskozite ileri geri yöntemi
FISTA	Hızlı yinelemeli büzülme eşiği yöntemi
ISNR	İyileştirilmiş sinyal-gürültü oranı
MSE	Ortalama kare hatası
P	Parametre
PSNR	Tepe sinyal gürültü oranı
SNR	Sinyal-gürültü oranı
TV	Total Varyasyon
VIFBA	Viskoziteye dayalı ileri geri yöntemi

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1. Görüntü işleme sistem yapısı.....	1
Şekil 2. H harfinin sayısal görüntüsü.....	2
Şekil 3. Orijinal bir görüntü.....	2
Şekil 4. Orijinal bir görüntünün gürültülü hali.....	3
Şekil 5. Dağınık piksel dağılımlı ve histogram eşitlemeli görüntüler.....	3
Şekil 6. Bazı temel renklerin RGB değerleri.....	4
Şekil 7. Gri seviyeli görüntü.....	5
Şekil 8. Renkli görüntü.....	5
Şekil 9. (a), (d) orijinal görüntü; (b), (e) bozulmuş görüntü ve (c), (f) ise (4.1) deki yöntem ile düzeltilmiş görüntü.	36
Şekil 10. Bazı yöntemlerle iyileştirilmiş görüntüler.....	37
Şekil 11. İleri-Geri yöntemi ve (3.20) yöntemi ile iyileştirilmiş görüntüler.....	38
Şekil 12. (4.2) yöntemi ve FISTA yöntemi ile iyileştirilmiş görüntüler.....	41
Şekil 13. (4.2) deki yöntemin 4 farklı durum için <i>PSNR</i> değerlerin grafiği.....	43
Şekil 14. (a) Dağ görüntüsü, (b) bozulmuş görüntü, (c) (3.22) ile iyileştirilmiş görüntü, (d) (3.23) ile iyileştirilmiş görüntü, (e) (3.26) ile iyileştirilmiş görüntü.....	46
Şekil 15. İleri-geri, Douglas-Rachford ve (4.1) yöntemleriyle elde edilen kadın görüntülerinin <i>SNR</i> grafiği.....	47
Şekil 16. Araba görüntüsünün ileri-geri yöntemi ve (3.20) yöntemine göre <i>SNR</i> grafiği.....	47
Şekil 17. Kelebek görüntüsünün ileri-geri yöntemi ve (3.20) yöntemine göre <i>SNR</i> grafiği...48	
Şekil 18. Schonbrunn Sarayının AVFBA ve FISTA yöntemlerine göre <i>PSNR</i> değerlerinin grafiği.....	48
Şekil 19. (3.26), (3.22) ve (3.23) e göre elde edilen dağ görüntülerinin <i>SNR</i> değerlerinin grafiği.....	49
Şekil 20. (3.26), (3.22) ve (3.23) e göre elde edilen dağ görüntülerinin <i>PSNR</i> değerlerinin grafiği.....	49

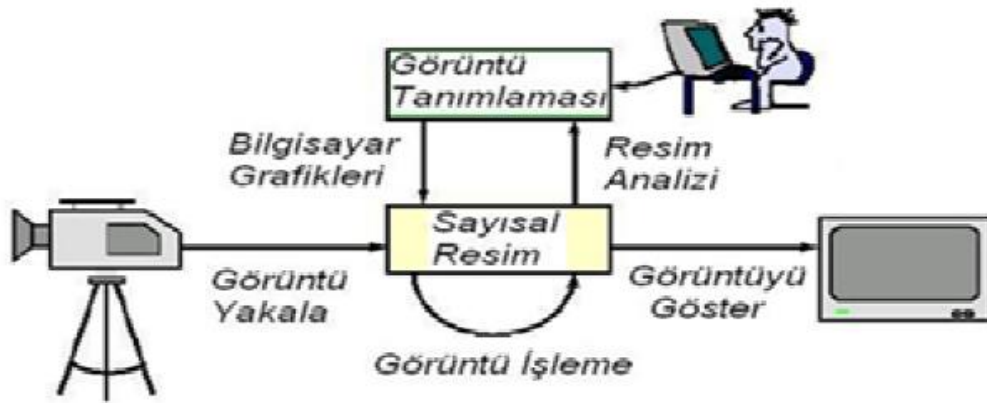
TABLolar DİZİNİ

Tablo 1. Douglas-Rashford, İleri-Geri ve (4.1) ile verilen yöntemlerin SNR ve ISNR değerleri	37
Tablo 2. Araba ve kelebek görüntülerine uygulanan ileri-geri yöntemi ile (3.20) ile verilen yöntemin SNR değerleri.....	39
Tablo 3. (4.2) de verilen yöntemdeki parametrelerin 6 farklı durumu.....	41
Tablo 4. (4.2) deki yöntemin 6 durum için PSNR değerleri.....	42
Tablo 5. $f(x) = k \cdot x$ dönüşümü için 4 farklı durum.....	42
Tablo 6. (4.2) ile verilen yöntemin $x_1, x_5, x_{10}, x_{25}, x_{50}, x_{100}, x_{250}, x_{500}$ e göre 4 farklı durum için <i>PSNR</i> değerleri.....	43
Tablo 7. Schonbrunn Sarayının <i>PSNR</i> değerleri.....	44
Tablo 8. Dağ görüntüsünün <i>SNR</i> değerleri.....	45
Tablo 9. Dağ görüntüsünün <i>PSNR</i> değerleri.....	45

GİRİŞ

Görüntü, gerçek yaşamdaki üç boyutlu cisimlerin iki boyutlu düzlemlerdeki yansımalarıdır. Görüntü işleme ise insanların hayatları boyunca önemini koruyan ve gelişerek büyüyen bir çalışma alanı olmuştur. Özellikle matematik, fizik, kimya, biyoloji, astronomi ve sanat dallarının yanı sıra askeri endüstrisinde, robotik kodlamalarda, radar sisteminde, denizaltı ses dalga sistemlerinde, su altı görüntüleme sistemlerinde, tıbbi görüntüleme sistemlerinde, petrol kaynaklarının bulunmasında kullanılan aletlerde, hava durumunu tahmin etmede, bir gazeteyi tasarlamada, fotoğraf endüstrisi gibi pek çok alanda kullanılır. Ayrıca NASA'nın uydularından elde ettiği görsellerde görüntü işleme kullanılır. Günlük hayatta bir ürünü pazarlamak amacıyla bir broşür hazırlarken, bir mağazanın reklamını yapmak için reklam panolarına asılacak resimleri oluştururken yine görüntü işleme kullanılır.

Görüntü işleme, sayısal bir resim haline getirilmiş olan gerçek yaşamdaki görüntülerin bir giriş resmi olarak işlenerek o resmin özelliklerinin ve görüntüsünün değiştirilmesi sonucunda yeni bir resim oluşturulmasıdır (Karakoç, 2011). Görüntü işlemede ilk adım işlenecek görüntünün fotoğraf makinesi, kamera gibi görüntüleme cihazlarıyla yakalanmasıdır. Yakalanan bu görüntüler ölçme ve değerlendirme işlemine tabi tutularak başka bir cihazda görüntülenmek üzere sayısal resimlere dönüştürülür. Dönüştürülen sayısal resimler bilgisayar grafikleri ve resim analizleri tarafından tanımlanır ve işlenir. Bu işlemden sonra görüntü farklı bir cihazda gösterilir. Şekil 1. de görüntü işleminin sistem yapısı verilmiştir.



Şekil 1. Görüntü İşleme Sistem Yapısı

Bir resmin bilgisayar ortamında değerlendirilmeye alınması için o resimle ilgili verinin bilgisayar için uygun hale dönüştürülmesi gerekir. Yapılan bu dönüştürme işlemine sayısallaştırma adı verilmektedir. Bir resmi sayısallaştırmanın birden çok yöntemi vardır. Bazı

resimleri tarayıcılar yardımıyla sayısallaştırılırken bazı resimleri de programlar yardımıyla sayısallaştırılabilir. Sayısal görüntüde 1 ve 0 sayıları kullanılır. 1 sayısı aydınlık bölgeleri, 0 sayısı ise karanlık bölgeleri temsil eder. Şekil 2. de H harfinin sayısal görüntüsü verilmiştir.

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	0	1
1	1	0	1	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	1	1
1	1	0	1	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Şekil 2. H harfinin sayısal görüntüsü

Resimleri sayısallaştırma sürecinin sonucunda yeni bir görüntü oluşur ve bu görüntüde gürültü mevcuttur. Görüntü işlemenin bir alt dalı olan görüntü iyileştirme de bu bölümle devreye girer ve sayısallaşmış resimde oluşan gürültülerini en aza indirmede kullanılır. Şekil 3. de bir resmin orijinal hali ve Şekil 4. de orijinal bir görüntünün gürültülü hali verilmiştir.



Şekil 3. Orijinal bir görüntü



Şekil 4. Orijinal bir görüntünün gürültülü hali






Bir görüntünün içerdiği piksel değerlerinin ağırlığı histogram kavramı ile gösterilir. Histogramla birlikte resimler gürültüden ayıklanabilir ve daha belirgin hale getirilebilir. Görüntünün netliğinin yüksek olması için histogramın daha ayırık ve düzgün bir yapıya gelmesi gerekir. Buna histogram eşitlemesi (Histogram Equalisation) denir (Karakoç, 2011). Şekil 5. de dağınık piksel dağılımlı ve histogram eşitlemeli görüntüler verilmiştir.



Şekil 5. Dağınık piksel dağılımlı ve histogram eşitlemeli görüntüler

Gürültüsü giderilen görüntü için bazı yöntemler kullanılarak görüntü üzerinde değişiklikler yapmak mümkündür. Görüntüye boyutlandırma, büyütme, küçültme ve döndürme gibi geometrik dönüştürme işlemleri uygulanarak görüntü değiştirilebildiği gibi parlaklaştırma, koyulaştırma, bulanıklaştırma, keskinleştirme gibi renk düzenleme işlemleriyle de görüntünün rengi değiştirilebilir. Ayrıca steganografi ile görüntü üzerinde bazı bilgileri gizleyebilirken optik karıştırma ile birden fazla görüntü birleştirilebilir.

Görüntüler; ikili görüntü (binary), gri seviyeli görüntü ve renkli görüntüler olmak üzere üçe ayrılırlar. İkili görüntüde her piksel 0 veya 1 değerini alır. 0 değeri siyah rengi, 1 değeri beyaz rengi gösterir. Şekil 2. de verilen görüntü bir ikili görüntüdür. Gri seviyeli görüntüler gri renginin tonlarından oluşur ve bu görüntülerin her bir bileşeninin piksel değeri 0 ile 255 arasındadır. Yani gri seviyeli görüntüler 256 farklı piksel değerini alabilir. Ayrıca gri seviyeli görüntülerin dosya boyutu 1,2,4 veya 8 bit olabilir. Şekil 7. de verilen görüntü gri seviyeli görüntüdür. Renkli görüntüler ise üç ana renk olan mavi, yeşil ve kırmızının oluşturduğu görüntülerdir ve RGB olarak isimlendirilir. Renkli görüntüler gri seviyeli görüntüler gibi 256 farklı piksel değerlerini alırlar ve RGB=(0,0,0),..., (255,255,255) biçiminde gösterilir. Renkli görüntülerin gri görüntülerden farklı ise dosya boyutudur. Renkli görüntülerde 3 renk kullanıldığı ve her bir rengin boyutu 8 bit olduğu için renkli görüntülerin boyutu 24 bittir. Bu durumda $2^8 \cdot 2^8 \cdot 2^8 = 2^{24} = 16777216$ olup RGB görüntüleri yaklaşık 17 milyon farklı renk değerine sahip olabilir. Bunun yanı sıra renkli görüntüde tek bir renk kullanıldığı takdirde dosya boyutu 8 bit de olabilir. Şekil 6. da bazı temel renklerin RGB değerleri verilmiş olup Şekil 8. de ise renkli bir görüntü verilmiştir.

Renk	R	G	B	Görünüm
Kırmızı	255	0	0	
Yeşil	0	255	0	
Mavi	0	0	255	
Beyaz	255	255	255	
Siyah	0	0	0	
Açık Gri	200	200	200	
Koyu Gri	100	100	100	
Sarı	255	255	0	
Turkuaz	0	255	255	
Eflatun	255	0	255	

Şekil 6. Bazı temel renklerin RGB değerleri



Şekil 7. Gri seviyeli görüntü



Şekil 8. Renkli görüntü

Bir görüntü elde edilirken telefon veya fotoğraf makinasının çekim anında elin titremesi ile görüntü bulanık çıkabilir. Bunun yanı sıra fotoğrafı çekilen kişi veya nesnenin hareket etmesi, fotoğraf çekilen ortamdaki ışık gibi sebeplerle de görüntü bulanık çıkabilir. Ayrıca görüntü bir kaynaktan başka bir kaynağa aktarılırken görüntüde gürültüler oluşabilir. Bu gibi durumlarda görüntü iyileştirme problemiyle bulanık olan veya gürültülü görüntüler mümkün olduğunca orijinal görüntüsüne yaklaştırılmaya çalışılır. Görüntü iyileştirme problemi matematiksel olarak $b = Ax + y$ ifadesinin ters çevrilmesi ile gösterilmiştir. Bu formülde $b \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ gözlemlenen görüntü olmak üzere $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ orijinal görüntü, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ bulanıklaştırma fonksiyonu ve $y \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ ortaya çıkan gürültüdür. Burada ortaya çıkan y gürültüsünü en aza indirgeyerek gözlemlenen b görüntüsünü orijinal x görüntüsüne yaklaştırmaktır.

Bu tez 5 bölümlen oluşmaktadır. Tezin ilk bölümü olan giriş kısmında görüntü işleminin tanımı, kullanım alanları ve görüntü iyileştirme problemine yer verilmiştir. İkinci bölüm olan kuramsal temeller kısmında görüntü iyileştirmeye alt yapı oluşturan sabit nokta teoremlerine ve bazı dönüşüm sınıflarına yer verilmiştir. Ayrıca küme değerli dönüşümlere ve Hausdorff metriğine değinilmiştir. Çalışmanın üçüncü bölümü olan materyal ve yöntemde ise görüntü iyileştirmede kullanılan iterasyon yöntemlerine yer verilmiştir. Dördüncü bölüm olan araştırma bulguları bölümünde ise dört ayrı başlık altında son yıllarda yapılan önemli çalışmalar derlenmiş ve görüntü iyileştirme sonuçları verilmiştir. Beşinci bölümde olan tartışma ve sonuç kısmında ise araştırma bulguları bölümünde kullanılan iterasyon yöntemlerinin etkinlikleri karşılaştırılmıştır.



KURAMSAL TEMELLER

2.1. Sabit Nokta Kavramı ve Bazı Dönüşüm Sınıfları

2.1.1. Tanım (Sabit Nokta): $X \neq \emptyset$ ve $T: X \rightarrow X$ herhangi bir dönüşüm olsun. Eğer $Tx = x$ olacak şekilde bir $x \in X$ noktası varsa, bu x noktasına T dönüşümünün sabit noktası denir.

$Tx = x$ denkleminin çözümleri T dönüşümünün sabit noktalarıdır. T dönüşümünün sabit noktalarının kümesi $F(T)$ veya $Fix(T)$ ile gösterilir. Yani

$$F(T) = \{x \in X: Tx = x\}$$

dir.

2.1.2. Örnek: $X \neq \emptyset$ olmak üzere $T: X \rightarrow X$, $Tx = x$ dönüşümü için X kümesinin her noktası sabit noktadır. Dolayısıyla $F(T) = X$ dir.

2.1.3. Örnek: $X = \mathbb{R}$ olmak üzere $T: X \rightarrow X$, $Tx = \frac{2}{5}x$ dönüşümünün sabit noktalarının kümesi $F(T) = \{0\}$ dir.

2.1.4. Örnek: $X = \mathbb{R}$ olmak üzere $T: X \rightarrow X$, $Tx = x^2$ dönüşümünün sabit noktalarının kümesi $F(T) = \{0,1\}$ dir.

2.1.5. Örnek: $X = \mathbb{R}$ olmak üzere $T: X \rightarrow X$, $Tx = x + k$ ($k \neq 0$) dönüşümünün sabit noktası yoktur. Dolayısıyla $F(T) = \emptyset$ dir.

2.1.6. Örnek: $X = \mathbb{R}$ olmak üzere $T: X \rightarrow X$, $Tx = x^2 + x + 1$ dönüşümünün sabit noktası yoktur. Dolayısıyla $F(T) = \emptyset$ dir.

Bu örneklerden hareketle bir dönüşümün sabit noktaları hakkında aşağıdaki ifadeleri yazabiliriz:

1. Verilen küme üzerinde tanımlı bir dönüşümün sabit noktası olmayabilir.
2. Verilen küme üzerinde tanımlı bir dönüşümün tek bir sabit noktası olabilir.
3. Verilen küme üzerinde tanımlı bir dönüşümün birden fazla sabit noktası olabilir.
4. Verilen küme üzerinde tanımlı bir dönüşümün sabit noktası o kümenin bütün elemanları olabilir.

$X \neq \emptyset$ olmak üzere $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Herhangi bir $x \in X$ için x in T altındaki n .iterasyonu $T^n x$ ile gösterilir ve $T^{n+1}x = T(T^n x)$ olarak tanımlanır.

$T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeleri yazabiliriz:

1. Keyfi bir $n \in \mathbb{N}$ için $F(T) \subset F(T^n)$ dir.
2. Keyfi bir $n \in \mathbb{N}$ için $F(T^n) = \{x\}$ ise $F(T) = \{x\}$ dir. Ancak bunun tersi her zaman doğru değildir.

2.1.7. Örnek: $X = \{x, y, z\}$ olmak üzere $T: X \rightarrow X$ dönüşümü $Tx = z$, $Ty = y$, $Tz = x$ olarak tanımlanırsa $T^2x = x$, $T^2y = y$, $T^2z = z$ olup $F(T^2) = \{x, y, z\}$ dir. Fakat $F(T) = \{y\}$ dir. Dolayısıyla tersi her zaman doğru değildir.

2.1.8. Tanım (Ortak Sabit Nokta): $X \neq \emptyset$ olmak üzere $T_1, T_2: X \rightarrow X$ iki dönüşüm olsun. Eğer $T_1x = T_2x = x$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa bu x noktasına T_1 ve T_2 dönüşümlerinin ortak sabit noktası denir. Bu dönüşümlerin ortak sabit noktalarının kümesi $F(T) = F(T_1) \cap F(T_2)$ ile gösterilir (Karahan 2015).

2.1.9. Örnek: $T_1, T_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere $T_1 = x^3$ ve $T_2 = x^2 + x$ iki dönüşüm olsun. Buna göre $F(T_1) = \{-1, 0, 1\}$ ve $F(T_2) = \{0\}$ dir. Dolayısıyla bu iki dönüşümün ortak sabit noktalarının kümesi $F(T) = F(T_1) \cap F(T_2) = \{0\}$ dir.

2.1.10. Örnek: $T_1, T_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere $T_1 = x^2 - 2$ ve $T_2 = x^2$ iki dönüşüm olsun. Buna göre $F(T_1) = \{-1, 2\}$ ve $F(T_2) = \{0, 1\}$ dir. Dolayısıyla bu iki dönüşümün ortak sabit noktası yoktur. O halde $F(T) = F(T_1) \cap F(T_2) = \emptyset$ dir.

2.1.11. Tanım: (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq ad(x, y) \quad (2.1)$$

olacak şekilde bir $a > 0$ sabit sayısı varsa bu T dönüşümüne Lipschitzian dönüşümü denir. (2.1) eşitsizliğine de Lipschitz şartı ve bu şartı sağlayan en küçük a sabit sayısına da Lipschitz sabiti denir. (2.1) eşitsizliğine göre aşağıdaki ifadeleri yazabiliriz:

1. $a = 1$ ise T dönüşümüne genişlemeyen dönüşüm (nonexpansive) denir.
2. $a \in (0, 1)$ ise T dönüşümüne daraltan dönüşüm veya büzülme dönüşümü (contraction) denir.
3. $x \neq y$ için $d(Tx, Ty) < d(x, y)$ ise T dönüşümüne kesin daraltan dönüşüm (contractive) denir (Ansari 2010).

2.1.12. Örnek: $X = [1, \infty)$ metrik uzay olmak üzere $T: X \rightarrow X$, $Tx = \frac{10}{11}(x + \frac{1}{x})$ dönüşümü için

$$\begin{aligned}
 d(Tx, Ty) &= \left| \frac{10}{11} \left(x + \frac{1}{x} \right) - \frac{10}{11} \left(y + \frac{1}{y} \right) \right| \\
 &= \frac{10}{11} \left| \frac{x^2 + 1}{x} - \frac{y^2 + 1}{y} \right| \\
 &= \frac{10}{11} \left| \frac{xy(x - y) - (x - y)}{xy} \right| \\
 &= \frac{10}{11} \left| \frac{(x - y)(xy - 1)}{xy} \right| \\
 &= \frac{10}{11} |x - y| \left| \frac{xy - 1}{xy} \right| \\
 &< \frac{10}{11} |x - y| \\
 &= \frac{10}{11} d(x, y)
 \end{aligned}$$

olup $d(Tx, Ty) < \frac{10}{11} d(x, y)$ dir. T dönüşümü daraltan bir dönüşümdür ve Lipschitz sabiti $a = \frac{10}{11}$ dir (Ansari 2010).

2.1.13. Örnek: $X = [0, 1]$ metrik uzay olmak üzere $T: X \rightarrow X$, $Tx = \frac{1}{7}(x^3 + x^2 + 1)$ dönüşümü için

$$\begin{aligned}
 d(Tx, Ty) &= \left| \frac{1}{7}(x^3 + x^2 + 1) - \frac{1}{7}(y^3 + y^2 + 1) \right| \\
 &= \frac{1}{7} |x^3 - y^3 + x^2 - y^2| \\
 &= \frac{1}{7} |x - y| |x^2 + xy + y^2 + x + y| \\
 &< \frac{5}{7} |x - y| \\
 &= \frac{5}{7} d(x, y)
 \end{aligned}$$

olup $d(Tx, Ty) < \frac{5}{7} d(x, y)$ dir. T dönüşümü daraltan bir dönüşümdür ve Lipschitz sabiti $a = \frac{5}{7}$ dir (Ansari 2010).

2.1.14. Örnek: $X = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 1\}$ metrik uzay olmak üzere $T: X \rightarrow X$, $Tx = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$ dönüşümü için

$$\begin{aligned}
d(Tx, Ty) &= \left| \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{x} \right) - \left(\frac{y}{2} + \frac{1}{y} \right) \right| \\
&= \left| \left(\frac{x-y}{2} \right) - \left(\frac{x-y}{xy} \right) \right| \\
&= \left| (x-y) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{xy} \right) \right| \\
&= |x-y| \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{xy} \right| \\
&< |x-y| \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2} d(x, y)
\end{aligned}$$

olup $d(Tx, Ty) < \frac{1}{2} d(x, y)$ dir. T dönüşümü daraltan bir dönüşümdür ve Lipschitz sabiti $a = \frac{1}{2}$ dir (Ansari 2010).

2.1.15. Örnek: $X = \mathbb{R}$ metrik uzay olmak üzere $T: X \rightarrow X$, $Tx = \cos x$ dönüşümü için

$$d(Tx, Ty) = |\cos x - \cos y| = \left| 2 \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \right| \leq \left| 2 \sin \frac{x-y}{2} \right|$$

dir. Ayrıca $\frac{x-y}{2} = w \neq 0$ için $|\sin w| < |w|$ dir. Buna göre

$$d(Tx, Ty) \leq \left| 2 \sin \frac{x-y}{2} \right| < \left| 2 \frac{x-y}{2} \right| = |x-y| = d(x, y)$$

dir. $w \neq 0$ olduğu için $x \neq y$ olur. Dolayısıyla $x \neq y$ için $d(Tx, Ty) < d(x, y)$ olduğundan T dönüşümü kesin daraltan bir dönüşümdür (Ansari 2010).

2.1.16. Örnek: $X = \mathbb{R}$ metrik uzay olmak üzere $T: X \rightarrow X$, $Tx = \sin x$ dönüşümü için

$$d(Tx, Ty) = |\sin x - \sin y| = \left| 2 \left(\cos \frac{x+y}{2} \right) \left(\sin \frac{x-y}{2} \right) \right| \leq \left| 2 \sin \frac{x-y}{2} \right|$$

dir. Ayrıca $\frac{x-y}{2} = w \neq 0$ için $|\sin w| < |w|$ dir. Buna göre

$$d(Tx, Ty) \leq \left| 2 \sin \frac{x-y}{2} \right| < \left| 2 \frac{x-y}{2} \right| = |x-y| = d(x, y)$$

dir. $w \neq 0$ olduğu için $x \neq y$ olur. Dolayısıyla $x \neq y$ için $d(Tx, Ty) < d(x, y)$ olduğundan T dönüşümü kesin daraltan bir dönüşümdür (Ansari 2010).

Her Lipschitzian dönüşümünün sürekli olduğu tanımdan açıktır. Ayrıca her daraltan dönüşüm aynı zamanda kesin daraltan dönüşümdür fakat bunun tersi her zaman doğru değildir.

2.1.17. Örnek: $X = [0, \infty]$ olmak üzere (X, d) metrik uzay, $T: X \rightarrow X$ ve $Tx = \frac{1}{1+x^2}$ dönüşümü kesin daraltan dönüşüm olmasına rağmen daraltan dönüşüm değildir. Gerçekten her $x, y \in X$ ve $x \neq y$ için

$$\begin{aligned}
d(Tx, Ty) &= \left| \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+y^2} \right| \\
&= \left| \frac{1+y^2}{(1+x^2)(1+y^2)} - \frac{1+x^2}{(1+y^2)(1+x^2)} \right| \\
&= \left| \frac{y-x}{(1+x^2)(1+y^2)} \right| |y-x| \\
&= \left| \frac{x}{(1+x^2)(1+y^2)} + \frac{y}{(1+x^2)(1+y^2)} \right| |y-x| \\
&< \left| \frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{1+x^2} \right| |y-x| \\
&< |y-x| \\
&= d(x, y)
\end{aligned}$$

olup $d(Tx, Ty) < d(x, y)$ dir. Dolayısıyla T dönüşümü kesin daraltan dönüşümdür ancak $d(Tx, Ty) < ad(x, y)$ eşitsizliğini sağlayan $a \in (0,1)$ sabit sayısı olmadığı için T dönüşümü daraltan dönüşüm değildir (Ansari 2010).

2.1.18. Tanım: X bir lineer uzay ve $f: X \rightarrow (-\infty, \infty)$ bir dönüşüm olsun. Buna göre

1. Her $x, y \in X$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f dönüşümüne konveks dönüşüm denir.

2. Her $x, y \in X$, $x \neq y$ ve $\lambda \in (0,1)$ için

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f dönüşümüne kesin konveks dönüşüm denir.

3. Her $x, y \in X$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - 1/2 a\lambda(1-\lambda) \|x-y\|^2$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde bir $a > 0$ sayısı varsa, f dönüşümüne kuvvetli konveks dönüşüm denir (Cegielski 2012).

2.1.19. Tanım: H bir Hilbert uzayı T bu uzayda $D(T)$ tanım ve $R(T)$ görüntü kümelerine sahip lineer olmayan bir dönüşüm olsun. Buna göre

1. Her $x, y \in D(T)$ için

$$\langle Tx - Ty, x - y \rangle \geq 0$$

eşitsizliği sağlanıyorsa T dönüşümüne monoton dönüşüm denir.

2. Her $x, y \in D(T)$ ve $x \neq y$ için

$$\langle Tx - Ty, x - y \rangle > 0$$

eşitsizliği sağlanıyorsa T dönüşümüne kesin monoton dönüşüm denir.

3. Her $x, y \in D(T)$ ve $x \neq y$ için

$$\langle Tx - Ty, x - y \rangle \geq \eta \|x - y\|^2$$

olacak şekilde $\eta > 0$ sabiti varsa T dönüşümüne η -kuvvetli monoton dönüşüm denir.

4. Her $x, y \in D(T)$ için

$$\langle Tx - Ty, x - y \rangle \geq \nu \|Tx - Ty\|^2$$

olacak şekilde $\nu > 0$ sabiti varsa T dönüşümüne ν -ters kuvvetli monoton dönüşüm denir.

Bir T monoton dönüşümünün $G(T)$ grafiği başka bir monoton dönüşümün grafiği tarafından içerilmiyorsa, T dönüşümüne maksimal monoton dönüşüm denir (Zeidler 1986).

2.1.20. Örnek: $H = \mathbb{R}$ ve $C = [0,1]$ olmak üzere $T: C \rightarrow C$ dönüşümü için

1. $Tx = \frac{x}{4}$ olarak tanımlanırsa,

$$\langle Tx - Ty, x - y \rangle = (Tx - Ty)(x - y) = \left(\frac{x}{4} - \frac{y}{4}\right)(x - y) = \frac{1}{4}(x - y)^2 \geq 0$$

olup T dönüşümü monotonudur.

2. $Tx = 2x$ olarak tanımlanırsa,

$$\langle Tx - Ty, x - y \rangle = (Tx - Ty)(x - y) = (2x - 2y)(x - y) \geq 2 \|x - y\|^2$$

olup T dönüşümü 2-kuvvetli monotonudur.

3. $Tx = 4x$ olarak tanımlanırsa

$$\begin{aligned} \langle Tx - Ty, x - y \rangle &= (Tx - Ty)(x - y) \\ &= (4x - 4y)(x - y) \\ &= 4(x - y)^2 \\ &\geq 16\nu(x - y)^2 \\ &= \nu(4x - 4y)^2 \end{aligned}$$

$$= v \|Tx - Ty\|^2$$

olup $(Tx - Ty)(x - y) = 4(x - y)^2 \geq 16v(x - y)^2$ eşitsizliği $v = \frac{1}{4}$ için sağlanır.

Dolayısıyla T dönüşümü $\frac{1}{4}$ -ters kuvvetli monotondur.

Şimdi ilerleyen bölümlerde kullanacağımız bazı tanımları verelim:

2.1.20. Tanım (Kesin Konveks, Düzgün Konveks Banach Uzayları ve Normalleştirilmiş Dualite Dönüşüm): $(E, \|\cdot\|)$ bir reel Banach uzayı ve E^* , E nin duali olsun. $f \in E^*$ nin $x \in E$ deki değeri $\langle x, f \rangle$ ile gösterilir. $\|x\| = \|y\| = 1$ şartını sağlayan her $x, y \in E$ için $\frac{\|x-y\|}{2} < 1$ ise E Banach uzayına kesin konvektir denir. E de $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|x_n + y_n\|}{2} = 1$ şartlarını sağlayan herhangi iki $\{x_n\}, \{y_n\}$ dizileri için $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\| = 0$ ise bu durumda E Banach uzayına düzgün konvektir denir. J , E Banach uzayından E^* daki boş olmayan zayıf yıldızlı kompakt alt kümelerin ailesine

$$J(x) = \{f \in E^* : \langle x, f \rangle = \|x\|^2 = \|f\|^2\}$$

şeklinde tanımlı dönüşüme normalleştirilmiş dualite dönüşüm denir (Kitkuan vd. 2019).

2.1.21. Tanım (Gateaux Türevlenebilme): $U = \{x \in E : \|x\| = 1\}$, $(E, \|\cdot\|)$ Banach uzayında birim küre olmak üzere $x, y \in U$ için

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t}$$

limiti varsa, E normu Gateaux türevlenebilir denir.

2.1.22. Tanım (Genişlemeyen Sunny Çekme): E bir Banach uzayı ve $C \subset E$ olsun. Eğer $Q: E \rightarrow C$, $Qx = x$ sürekli dönüşümü varsa, C ye E nin çekmesi ve Q ya da çekme denir. Her $x \in E$ ve $t \geq 0$ için $Q(Qx + t(x - Qx)) = Qx$ ise Q ya sunny çekme denir. Q , aynı zamanda genişlemeyen bir dönüşüm ise bu durumda Q ya genişlemeyen sunny çekme denir (Goebel ve Reich 1984).

Bir H Hilbert uzayından onun kapalı konveks bir C altkümesine tanımlı genişlemeyen sunny çekmesinin, metrik projeksiyon olduğunu biliyoruz. Böyle bir metrik projeksiyonunu P_C ile göstereceğiz.

2.2. Küme Değerli Dönüşümler ve Hausdorff Metriği

2.2.1. Tanım (Küme Değerli Dönüşüm): X ve Y boştan farklı iki küme, 2^Y de Y ' nin bütün boştan farklı alt kümelerinin ailesi olsun. $T: X \rightarrow 2^Y$ fonksiyonuna küme değerli (veya çok değerli) dönüşüm denir. Bazen bu fonksiyon $T: X \rightarrow Y$ veya $T: X \rightsquigarrow Y$ şeklinde de gösterilir (Solmaz 2019).

$T: X \rightarrow 2^Y$ küme değerli dönüşümü, X kümesinden alınan her bir x elemanına Y nin bir $T(x)$ alt kümesini karşılık getirir. Eğer her bir $x \in X$ e karşılık gelen $T(x)$ tek noktadan oluşuyorsa T tek değerli dönüşüm olur. Verilen bir $f: X \rightarrow Y$ tek değerli dönüşüm yardımıyla her $x \in X$ için $T(x) = \{f(x)\}$ şeklinde küme değerli bir dönüşüm tanımlanabilir. $T(x) \neq \emptyset$ olacak şekilde en az bir $x \in X$ varsa T ye has (proper) denir. Bu durumda T nin tanım ve değer kümesi sırasıyla

$$D(T) = \{x \in X: T(x) \neq \emptyset\}, \quad \mathcal{R}(A) = \cup \{Tz: z \in D(T)\}$$

ile ve grafiği de

$$G(T) = \{(x, y) \in X \times Y: x \in D(T), y \in T(x)\}$$

şeklinde tanımlanır. T nin tersi T^{-1} ile gösterilir ve $x \in T^{-1}y \Leftrightarrow y \in Tx$ şeklinde tanımlanır. (Solmaz 2019).

2.2.2. Örnek: $T: [0,1] \rightarrow 2^{[0,1]}$, $T(x) = \begin{cases} \{1\}, & x < 1/2 \\ \{0,1\}, & x = 1/2 \\ \{0\}, & x > 1/2 \end{cases}$ dönüşümü küme değerli bir

dönüşümdür (Solmaz 2019).

2.2.3. Örnek: $T: [0, \infty) \rightarrow 2^{[0, \infty)}$, $T(x) = [0, x]$ dönüşümü küme değerli bir dönüşümdür (Solmaz 2019).

2.2.4. Tanım (Küme Değerli Dönüşümlerin Sabit Noktası): $T: X \rightarrow 2^X$ küme değerli bir dönüşüm olsun. Eğer $x \in X$ için $x \in T(x)$ oluyorsa x elemanına, T küme değerli dönüşümünün sabit noktası denir (Nadler 1976).

2.2.5. Örnek: 2.2.2. Örnekte geçen küme değerli T dönüşümünün hiçbir sabit noktası yoktur (Solmaz 2019).

2.2.6. Örnek: 2.2.3. Örnekte geçen küme değerli T dönüşümü için her $x \in [0, \infty)$ noktası sabit noktadır (Solmaz 2019).

2.2.7. Örnek: $K = [0, \infty)$ ve K nın kapalı ve sınırlı alt kümelerinin ailesi $CB(K)$ olsun. $T: K \rightarrow CB(K)$ küme değerli dönüşümü

$$T(x) = \begin{cases} \{0\}, & x \leq 1 \\ [x - 34, x - 13], & x > 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $x = 0$, bu dönüşümün tek sabit noktasıdır.

2.2.8. Tanım (Hausdorff Metriği): (X, d) bir metrik uzay, $A \subseteq X$ ve $x \in X$ olsun. x noktasının A kümesine olan uzaklığı

$$D(x, A) = \inf\{d(x, y) : y \in A\}$$

ve $A, B \in 2^X$ kümeleri arasındaki uzaklık

$$\delta(A, B) = \sup\{D(x, B) : x \in A\}$$

şeklinde tanımlanır. Eğer

$$H(A; B) = \max\{\delta(A, B), \delta(B, A)\}$$

olarak tanımlanırsa bu durumda $H, CB(X)$ üzerinde bir metrik olur. Bu metriğe Hausdorff metriği denir.

2.2.9. Tanım (Genişlemeyen Küme Değerli Dönüşüm): (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \rightarrow CB(X)$ küme değerli bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için

$$H(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$$

şartını sağlayan bir $k > 0$ sabiti varsa T dönüşümüne Lipschitz dönüşümü ve k sayısına da T nin Lipschitz sabiti denir. Eğer $0 < k < 1$ ise T küme değerli dönüşümüne daraltan ve $k = 1$ ise T ye genişlemeyen küme değerli dönüşüm denir (Agarwal vd. 2007).

2.2.10. Teorem (Nadler Sabit Nokta Teoremi): (X, d) bir metrik uzay $T: X \rightarrow CB(X)$ küme değerli bir dönüşüm olsun. Bu durumda T dönüşümünün X de bir sabit noktası vardır (Nadler 1969).

MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. İterasyon Yöntemleri

Bir dönüşümün sabit noktasını veya noktalarını bulurken çeşitli iterasyon yöntemleri kullanır. Bunlardan bazıları aşağıda verilmiştir.

3.1.1. Picard İterasyonu: (X, d) metrik uzay, $C \subseteq X$ kapalı bir alt küme ve $T: C \rightarrow C$ bir dönüşüm olsun. $x_0 \in C$ olmak üzere Picard iterasyonu

$$x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0, \quad n = 1, 2, \dots$$

şeklinde tanımlanır (Picard 1890). Picard iterasyonu literatürde ardışık yaklaşıklar dizisi olarak da bilinir.

3.1.2. Mann İterasyonu: Banach daralma ilkesini sağlamayan dönüşümlerin sabit noktalarını elde etme için Mann (1953) tarafından oluşturulmuştur. X normlu uzay, $C \subseteq X$ boş olmayan konveks bir alt küme, $T: C \rightarrow C$ bir dönüşüm ve $x_0 \in C$ keyfi bir nokta olmak üzere Mann iterasyonu

$$x_{n+1} = (1 - a_n)x_n + a_n T x_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{a_n\}$, $(0,1)$ aralığında $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ şartlarını sağlayan bir dizidir (Mann 1953).

3.1.3. Ishikawa İterasyonu: 1974 yılında Ishikawa tarafından kurulmuş ve ilk olarak bir Hilbert uzayının konveks ve kompakt alt kümesi üzerinde tanımlı Lipschitzian ve pseudocontractive bir dönüşümün sabit noktaya güçlü yakınsadığını göstermek amacıyla kullanılmıştır.

X bir normlu uzay $C \subseteq X$ boş olmayan konveks alt küme, $T: C \rightarrow C$ bir dönüşüm ve $x_0 \in C$ keyfi bir nokta olmak üzere Ishikawa iterasyonu

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - a_n)x_n + a_n T y_n \\ y_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n T x_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. İterasyonda geçen $\{a_n\}$ ve $\{\beta_n\}$, $(0,1)$ aralığında $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ şartlarını sağlayan dizilerdir (Ishikawa 1974).

3.1.4. S İterasyonu: X bir lineer uzay $C \subseteq X$ boş olmayan konveks bir alt küme, $T: C \rightarrow C$ bir dönüşüm ve $x_1 \in C$ keyfi bir nokta olmak üzere S-iterasyonu

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - a_n)Tx_n + a_n Ty_n, \\ y_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n Tx_n, \quad n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{a_n\}, \{\beta_n\} \in (0, 1)$ dir (Agarwal vd. 2007).

Agarwal, O'Regan ve Sahu, daraltan dönüşümler için S iterasyonunun yakınsama hızının Picard iterasyonunun yakınsama hızına denk ve diğer sabit nokta iterasyonlarının yakınsama hızlarından daha iyi olduklarını göstermişlerdir (Agarwal vd. 2007).

İlerleyen yıllarda yukarıdaki iterasyonların çeşitli versiyonları gerek tek değerli gerekse küme değerli dönüşümler için yoğun olarak çalışılmıştır.

3.2. İki Birikimli Operatör İçin İterasyon Yöntemleri

Genel görüntü iyileştirme problemi, $b = Ax + y$ modelinin tersi olarak formüle edilir. Bu formülde $x \in \mathbb{R}^n$, y ve b sırasıyla bilinmeyen orijinal görüntü, bilinmeyen rastgele gürültü ve bilinen bozulmuş gözlemdir. A , lineer bir operatör olup bulanıklaştırma fonksiyonunu temsil eder. Burada amaç ortaya çıkan y gürültüsünü en aza indirgeyerek gözlemlenen b görüntüsünü orijinal x görüntüsüne yaklaştırmaktır. Görüntü işleme problemi,

$$\text{minimize}_{x \in \mathbb{R}^n} (f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_m(x)) \quad (3.1)$$

formundaki konveks optimizasyon problemi olarak formüle edilebilir. Burada $f_1, f_2, \dots, f_m: \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, \infty]$ konveks fonksiyonlardır. (3.1) probleminde $m = 1$ alınır

$$\text{minimize}_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

elde edilir. f , düzgün, reel değerli ve ∇f Lipshitz gradiyentine göre her yerde türevlenebilir ise f proximal (yakınlık) operatördür. x^* in f in bir çözümü olduğunu kabul edelim. Skalerli λf fonksiyonun proximal operatörü ile sık sık karşılaşacağız. Bu durumda $\lambda > 0$ için

$$\text{prox}_{\lambda f}(v) = \text{argmin}_x (f(x) + \frac{1}{2\lambda} \|x - v\|^2)$$

ifadesi yazılabilir. f proximal operatörünün sabit noktaları tam olarak f nin minimizerleridir. Diğer yandan $\text{prox}_{\lambda f}(x^*) = x^*$ olması için gerek ve yeter şart x^* in f nin minimizeri olmasıdır. Ayrıca f fonksiyonu proper, konveks ve alttan yarı sürekli olmak üzere, $\text{prox}_{\lambda f}$ proximal operatörü ve ∂f alt diferansiyel operatörü arasında

$$\text{prox}_{\lambda f} = (I + \lambda \partial f)^{-1}$$

şeklinde bir bağlantı vardır. $\lambda > 0$ olmak üzere $J_{\lambda\partial f} = (I + \lambda\partial f)^{-1}$ dönüşümü, ∂f operatörünün resolvent operatörü olarak adlandırılır. Bu nedenle proximal operatör, alt diferansiyel operatörünün resolventidir. O halde

$$J_{\lambda\partial f}(v) = \operatorname{argmin}_x (f(x) + \frac{1}{2\lambda} \|x - v\|^2)$$

dir. Ayrıca x^* in f nin minimizeri olması için gerek ve yeter şart $J_{\lambda A}(x^*) = x^*$ olmasıdır. Burada $A = \partial f$, sırasıyla Banach ve Hilbert uzayında m -birikimli (accretive) ve maksimal monoton operatördür. A operatörünün birikimli olması demek her $x_i \in D(A)$ ve $y_i \in Ax_i$ $i = 1, 2$ için $\langle y_1 - y_2, j \rangle \geq 0$ olacak şekilde bir $j \in J(x_1 - x_2)$ mevcut olması demektir. $\lambda > 0$ olmak üzere $\overline{D(A)} \subset \mathcal{R}(I + \lambda A)$ ise $A^{-1}0 = F(J_{\lambda A})$ dir. Gerçekten de her $\lambda > 0$ için

$$\begin{aligned} z \in A^{-1}0 &\Leftrightarrow 0 \in \lambda Az \\ &\Leftrightarrow z \in z + \lambda Az \\ &\Leftrightarrow z \in (I + \lambda A)z \\ &\Leftrightarrow z = J_{\lambda A}z \\ &\Leftrightarrow z \in F(J_{\lambda A}) \end{aligned}$$

dir. A kümesinin sıfır noktalarının kümesi $zerA$ ile gösterilir ve $zerA := \{z: 0 \in Az\}$ olarak tanımlanır. Ayrıca $zerA, J_{\lambda A}$ nin sabit noktalarının kümesine eşittir. (3.1) probleminde $m = 2$ alınırsa

$$\operatorname{minimize}_{x \in \mathbb{R}^n} (f_1(x) + f_2(x)) \quad (3.2)$$

olup, bu problemin minimizeri, $J_{\lambda(A+B)}$ nin sabit nokta kümesidir. Yani $F(J_{\lambda(A+B)}) = zer(A + B) = \{z: 0 \in Az + Bz\}$ dir. Burada A, f_1 in alt diferansiyeli ve B, f_2 nin gradiyentidir. $A + B$ maksimal monoton olduğunda $J_{\lambda(A+B)}$ ifadesini çözmek kolaydır fakat A ve B ayrı adımlarda kullanılıyorsa alternatif bir bölme yöntemi kullanılır (Kitkuan vd. 2019)

Aşağıdaki teoremden verilen ve Douglas-Rachford yöntemi olarak adlandırılan iterasyon yöntemi, (3.2) problemin çözümünde önemli sonuçları olan bir yöntemdir.

3.2.1. Teorem (Douglas-Rachford İterasyon Yöntemi): A ve B, H Hilbert uzayından 2^H uzayına tanımlı, $zer(A + B) := \{x \in H : 0 \in Ax + Bx\} \neq \emptyset$ olacak şekilde maksimal monoton operatörler ve $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}, [0, 2]$ aralığında $\sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n(2 - \lambda_n) = \infty$ şartını sağlayan bir dizi olsun. $\gamma \in (0, \infty)$ ve $x_0 \in H$ olmak üzere

$$\begin{cases} u_n = J_{\gamma}^B x_n, \\ y_n = J_{\gamma}^A (2u_n - x_n), \\ x_{n+1} = x_n + \lambda_n (y_n - u_n) \end{cases} \quad (3.3)$$

olarak tanımlansın. Bu durumda aşağıdakiler sağlanacak şekilde $x \in F(\mathcal{R}_{\gamma A} \mathcal{R}_{\gamma B})$ vardır:

1. $J_{\gamma}^B x \in \text{zer}(A + B)$,
2. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\{u_n - y_n\}$ dizisi 0 a güçlü yakınsar.
3. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\{x_n\}$ dizisi x e zayıf yakınsar.
4. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\{u_n\}$ dizisi $J_{\gamma}^B x$ e zayıf yakınsar.
5. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\{y_n\}$ dizisi $J_{\gamma}^B x$ e zayıf yakınsar.
6. Aşağıdaki ifadelerden bir tanesi geçerli olsun.
 - (a) $A, D(A)$ nın her boş olmayan sınırlı alt kümesinde düzgün monotondur.
 - (b) $B, D(B)$ nin her boş olmayan sınırlı alt kümesinde düzgün monotondur.

Bu durumda $\{y_n\}$ ve $\{u_n\}$ dizileri, $\text{zer}(A + B)$ nin tek noktasına güçlü yakınsar (Bauschke ve Combettes 2011).

Aşağıdaki teoremden verilen yöntem, ileri-geri yöntemi olarak bilinir. Burada B operatörünün tek değerli olduğuna dikkat edelim.

3.2.2. Teorem (İleri-Geri İterasyon Yöntemi): H , bir Hilbert uzayı olmak üzere $A: H \rightarrow 2^H$ maksimal monoton operatör, $\beta \in (0, \infty)$ için $B: H \rightarrow H$ dönüşümü β -zorlayıcı (β -cocoercive), $\gamma \in (0, 2\beta)$ ve $\delta = \min\left\{1, \frac{\beta}{\gamma}\right\} + \frac{1}{2}$ olsun. Ayrıca $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $[0, \delta]$ aralığında $\sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n (\delta - \lambda_n) = \infty$ şartını sağlayan bir dizi ve $x_0 \in H$ olsun. $\text{zer}(A + B) := \{x \in H: 0 \in (Ax + Bx)\} \neq \emptyset$ olmak üzere

$$\begin{cases} y_n = x_n - \gamma Bx_n \\ x_{n+1} = x_n + \lambda_n (J_{\gamma}^A y_n - x_n) \end{cases} \quad (3.4)$$

olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır:

1. $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $\text{zer}(A + B)$ nin bir noktasına zayıf yakınsar.
2. $\inf_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n > 0$ ve $x \in \text{zer}(A + B)$ olmak üzere $\{Bx_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi Bx e güçlü yakınsar.
3. $\inf_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n > 0$ olmak üzere aşağıdaki ifadelerden biri geçerli olsun.
 - (a) $A, D(A)$ nın her boş olmayan sınırlı alt kümesinde tekdüze monotondur.
 - (b) B, H nin her boş olmayan sınırlı alt kümesinde tekdüze monotondur.

Bu durumda $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi, $\text{zer}(A + B)$ nin tek noktasına güçlü yakınsar (Bauschke ve Combettes 2011).

Kritik problem, H Hilbert uzayında A ve B monoton operatörlerinin toplamının sıfırını iteratif olarak bulmaktır. Yani $0 \in Ax + Bx$ i bulmaktır. Bir Banach uzayında lineer olmayan operatör denklemleri için bölme yöntemleri hakkında mevcut literatürde çok az çalışma vardır.

Bunlardan biri de $\Omega := A^{-1}0 \cap B^{-1}0$ olmak üzere $x \in \Omega$ yı bulmaktır. Burada karşılaşılan en temel sorun Hilbert uzayının iç çarpım yapısının Banach uzayında doğru olmamasından kaynaklanmaktadır.

Aşağıda verilen lemmalar, 2019 yılında Kitkuan vd. tarafından verilen 3.2.9. Teoreminin ispatında kullanılacaktır.

3.2.3. Lemma: Bir E Banach uzayının düzgün smooth olması için gerek ve yeter şart, J dualite dönüşümünün tek değerli ve E nin sınırlı alt kümelerinde normu koruyan, düzgün sürekli bir dönüşüm olmasıdır (Quin ve Su 2007).

3.2.4. Lemma: E , bir Banach uzayı olsun. Her $x, y \in E$ ve her $j(x + y) \in J(x + y)$ için $\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\langle y, j(x + y) \rangle$ dir (Petryshn 1970).

3.2.5. Lemma: E , bir Banach uzayı ve $A: D(A) \rightarrow 2^E$ birikimli bir operatör olsun. $\lambda > 0$, $\mu > 0$ ve $x \in E$ için $J_\lambda x = J_\mu \left(\frac{\mu}{\lambda} x + \left(1 - \frac{\mu}{\lambda}\right) J_\lambda x \right)$ dir. Burada $J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1}$ ve $J_\mu = (I + \mu A)^{-1}$ dir (Barbu 1976).

3.2.6. Lemma: E , bir Banach uzayı ve J normalleştirilmiş dualite dönüşümü olsun. Eğer E^* düzgün konveks ise bu durumda J, E nin her sınırlı kümesinde düzgün sürekli dir (Agarwal vd. 2009).

3.2.7. Lemma: E düzgün konveks bir Banach uzayı olsun. Her $x, y \in E$ için $\max\{\|x\|, \|y\|\} \leq \mathcal{R}$ her $j_x \in J(x)$, $j_y \in J(y)$ için

- $g(0) = 0$,
- Her $t > 0$ için $g(t) > 0$ ve
- $\langle x - y, j_x - j_y \rangle \geq g(\|x - y\|) \|x - y\|$

şartları sağlayacak şekilde bir $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ artan fonksiyonu vardır (Agarwal vd. 2009).

3.2.8. Lemma: $\{a_n\}$ ve $\{c_n\}$, negatif olmayan reel diziler, $\{t_n\} \subset (0,1)$ ve $\{b_n\}$ sayı dizisi olmak üzere $a_{n+1} \leq (1 - t_n)a_n + b_n + c_n$ olsun. Buna göre

- $\sum_{n=0}^{\infty} t_n = \infty$,
- $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{t_n} \leq 0$ ve
- $\sum_{n=0}^{\infty} c_n < \infty$

ise bu durumda $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ dır (Liu 1995).

3.2.9. Teorem: C , düzgün konveks ve düzgün smooth bir X Banach uzayının boş olmayan kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun. $A: D(A) \subseteq C \rightarrow 2^X$ ve $B: D(B) \subseteq C \rightarrow 2^X$, $\Omega = A^{-1}(0) \cap B^{-1}(0) \neq \emptyset$, $\overline{D(A)} \subset C \subset \bigcap_{r>0} \mathcal{R}(I + rA)$ ve $\overline{D(B)} \subset C \subset \bigcap_{r>0} \mathcal{R}(I + rB)$ olacak şekilde birikimli operatörler olsunlar. $f: C \rightarrow C$, $\alpha \in (0,1)$ daralma sabiti ile daraltan bir dönüşüm olsun. $x_0 \in C$ olmak üzere $\{x_n\}$ dizisi

$$\begin{cases} y_n = \beta_n x_n + (1 - \beta_n) J_{\lambda_n}^A x_n, \\ x_{n+1} = \alpha_n f(x_n) + (1 - \alpha_n) J_{\gamma_n}^B y_n \end{cases} \quad (3.5)$$

şeklinde teşkil edilsin. Ayrıca $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\lambda_n\}$ ve $\{\gamma_n\}$ dizileri aşağıdaki sağları sağlasın:

- i. $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ ve $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$ dir,
- ii. Bir $a \in (0,1)$ için $\beta_n \in [0, a]$ dir.
- iii. Bir $\epsilon > 0$ için $\lambda_n, \gamma_n \geq \epsilon$ olmak üzere $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty$, $\sum_{n=0}^{\infty} |\beta_{n+1} - \beta_n| < \infty$, $\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_{n+1} - \lambda_n| < \infty$ ve $\sum_{n=0}^{\infty} |\gamma_{n+1} - \gamma_n| < \infty$ dur.

Bu durumda $\{x_n\}$ dizisi $\omega \in Qf(\omega)$ noktasına güçlü yakınsar. Burada Q, X den Ω ya tanımlı genişlemeyen sunny çekmedir (Kitkuan vd. 2019).

İspat: 1. Adım: Bu adımda $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ dizilerinin sınırlı olduğu gösterilecektir. $\omega \in \Omega$ olsun. Bu halde

$$\begin{aligned} \|y_n - \omega\| &= \|\beta_n(x_n - \omega) + (1 - \beta_n)(J_{\lambda_n}^A x_n - \omega)\| \\ &\leq \beta_n \|x_n - \omega\| + (1 - \beta_n) \|J_{\lambda_n}^A x_n - J_{\lambda_n}^A \omega\| \\ &\leq \beta_n \|x_n - \omega\| + (1 - \beta_n) \|x_n - \omega\| \\ &= \|x_n - \omega\| \end{aligned}$$

ve böylece

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - \omega\| &= \|\alpha_n(f(x_n) - \omega) + (1 - \alpha_n)(J_{\gamma_n}^B y_n - \omega)\| \\ &\leq \alpha_n \|f(x_n) - \omega\| + (1 - \alpha_n) \|J_{\gamma_n}^B y_n - \omega\| \\ &\leq \alpha_n \|f(x_n) - f(\omega)\| + \alpha_n \|f(\omega) - \omega\| + (1 - \alpha_n) \|J_{\gamma_n}^B y_n - J_{\gamma_n}^B \omega\| \\ &\leq \alpha_n \alpha \|x_n - \omega\| + \alpha_n \|f(\omega) - \omega\| + (1 - \alpha_n) \|y_n - \omega\| \\ &\leq \alpha_n \alpha \|x_n - \omega\| + \alpha_n \|f(\omega) - \omega\| + (1 - \alpha_n) \|x_n - \omega\| \\ &\leq (1 - (1 - \alpha)\alpha_n) \|x_n - \omega\| + \alpha_n \|f(\omega) - \omega\| \\ &\leq \max \left\{ \|x_n - \omega\|, \frac{\|f(\omega) - \omega\|}{1 - \alpha} \right\} \\ &\vdots \\ &\leq \max \left\{ \|x_0 - \omega\|, \frac{\|f(\omega) - \omega\|}{1 - \alpha} \right\} \end{aligned}$$

$< \infty$

olur. Dolayısıyla $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ dizileri sınırlıdır.

2.Adım: Bu adımda $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - x_n\| = 0$ olduğu gösterilecektir. 3.2.9. Teoreme göre

$$\begin{cases} y_n = \beta_n x_n + (1 - \beta_n) J_{\lambda_n}^A x_n, \\ y_{n+1} = \beta_{n+1} x_{n+1} + (1 - \beta_{n+1}) J_{\lambda_{n+1}}^A x_{n+1} \end{cases}$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned} y_{n+1} - y_n &= (1 - \beta_{n+1})(J_{\lambda_{n+1}}^A x_{n+1} - J_{\lambda_n}^A x_n) + \beta_{n+1}(x_{n+1} - x_n) \\ &\quad + (\beta_{n+1} - \beta_n)(x_n - J_{\lambda_n}^A x_n) \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \|y_{n+1} - y_n\| &\leq (1 - \beta_{n+1}) \|J_{\lambda_{n+1}}^A x_{n+1} - J_{\lambda_n}^A x_n\| + \beta_{n+1} \|x_{n+1} - x_n\| \\ &\quad + (\beta_{n+1} - \beta_n) \|x_n - J_{\lambda_n}^A x_n\| \end{aligned} \quad (3.6)$$

olur. Eğer $\lambda_{n+1} \geq \lambda_n$ ise 3.2.5. Lemma kullanılarak

$$\begin{aligned} \|J_{\lambda_{n+1}}^A x_{n+1} - J_{\lambda_n}^A x_n\| &= \left\| J_{\lambda_n}^A \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} x_{n+1} + \left(1 - \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) J_{\lambda_{n+1}}^A x_{n+1} \right) - J_{\lambda_n}^A x_n \right\| \\ &\leq \left\| \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} x_{n+1} + \left(1 - \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) J_{\lambda_{n+1}}^A x_{n+1} - x_n \right\| \\ &\leq \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \|x_{n+1} - x_n\| + \frac{|\lambda_{n+1} - \lambda_n|}{\lambda_{n+1}} (\|J_{\lambda_{n+1}}^A x_{n+1}\| + \|x_{n+1}\|) \\ &\leq \|x_{n+1} - x_n\| + K |\lambda_{n+1} - \lambda_n| \end{aligned} \quad (3.7)$$

olur. Burada $K = \frac{\sup_n \{\|J_{\lambda_{n+1}}^A x_{n+1}\| + \|x_{n+1}\|\}}{\epsilon}$ dir. Eğer $\lambda_{n+1} \leq \lambda_n$ ise 3.2.5. Lemmaya göre

$$\begin{aligned} \|J_{\lambda_{n+1}}^A x_{n+1} - J_{\lambda_n}^A x_n\| &= \left\| J_{\lambda_{n+1}}^A x_{n+1} - J_{\lambda_{n+1}}^A \left(\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} x_n + \left(1 - \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}\right) J_{\lambda_n}^A x_n \right) \right\| \\ &\leq \left\| x_{n+1} - \left(\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} x_n + \left(1 - \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}\right) J_{\lambda_n}^A x_n \right) \right\| \\ &\leq \|x_{n+1} - x_n\| + \frac{|\lambda_{n+1} - \lambda_n|}{\lambda_n} (\|J_{\lambda_n}^A x_n\| + \|x_n\|) \\ &\leq \|x_{n+1} - x_n\| + K |\lambda_{n+1} - \lambda_n| \end{aligned} \quad (3.8)$$

olur. (3.6), (3.7) ve (3.8) den

$$\begin{aligned} \|y_{n+1} - y_n\| &\leq (1 - \beta_{n+1}) (\|x_{n+1} - x_n\| + K |\lambda_{n+1} - \lambda_n|) + \beta_{n+1} \|x_{n+1} - x_n\| \\ &\quad + |\beta_{n+1} - \beta_n| \|x_n - J_{\lambda_n}^A x_n\| \\ &\leq \|x_{n+1} - x_n\| + K |\lambda_{n+1} - \lambda_n| + M |\beta_{n+1} - \beta_n| \end{aligned} \quad (3.9)$$

elde edilir. Burada $M = \sup_n \{\|x_n - J_{\lambda_n}^A x_n\|\}$ dir. Diğer taraftan 3.2.9. Teoreminden

$$\begin{cases} x_{n+1} = \alpha_n f(x_n) + (1 - \alpha_n) J_{\gamma_n}^B y_n \\ x_{n+2} = \alpha_{n+1} f(x_{n+1}) + (1 - \alpha_{n+1}) J_{\gamma_{n+1}}^B y_{n+1} \end{cases}$$

olup

$$\begin{aligned} x_{n+2} - x_{n+1} &= (\alpha_{n+1} - \alpha_n) f(x_n) + \alpha_{n+1} (f(x_{n+1}) - f(x_n)) + (\alpha_n - \alpha_{n+1}) J_{\gamma_n}^B y_n \\ &\quad + (1 - \alpha_{n+1}) (J_{\gamma_{n+1}}^B y_{n+1} - J_{\gamma_n}^B y_n) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} \|x_{n+2} - x_{n+1}\| &\leq |\alpha_{n+1} - \alpha_n| \|f(x_n)\| + \alpha_{n+1} \|f(x_{n+1}) - f(x_n)\| \\ &\quad + |\alpha_n - \alpha_{n+1}| \|J_{\gamma_n}^B y_n\| + (1 - \alpha_{n+1}) \|J_{\gamma_{n+1}}^B y_{n+1} - J_{\gamma_n}^B y_n\| \\ &\leq |\alpha_{n+1} - \alpha_n| (\|f(x_n)\| + \|J_{\gamma_n}^B y_n\|) + (1 - \alpha_{n+1}) \|J_{\gamma_{n+1}}^B y_{n+1} - J_{\gamma_n}^B y_n\| \\ &\leq W |\alpha_{n+1} - \alpha_n| + \alpha_{n+1} \alpha \|x_{n+1} - x_n\| \\ &\quad + (1 - \alpha_{n+1}) \|J_{\gamma_{n+1}}^B y_{n+1} - J_{\gamma_n}^B y_n\| \end{aligned} \quad (3.10)$$

olur. Burada $W = \sup_n \{\|f(x_n)\| + \|J_{\gamma_n}^B y_n\|\}$ dir. Eğer $\gamma_{n+1} \geq \gamma_n$ ise 3.2.5. Lemmadan

$$\begin{aligned} \|J_{\gamma_{n+1}}^B y_{n+1} - J_{\gamma_n}^B y_n\| &= \left\| J_{\gamma_n}^B \left(\frac{\gamma_n}{\gamma_{n+1}} y_{n+1} + \left(1 - \frac{\gamma_n}{\gamma_{n+1}}\right) J_{\gamma_{n+1}}^B y_{n+1} \right) - J_{\gamma_n}^B y_n \right\| \\ &\leq \left\| \frac{\gamma_n}{\gamma_{n+1}} y_{n+1} + \left(1 - \frac{\gamma_n}{\gamma_{n+1}}\right) J_{\gamma_{n+1}}^B y_{n+1} - y_n \right\| \\ &\leq \|y_{n+1} - y_n\| + \frac{|\gamma_{n+1} - \gamma_n|}{\gamma_{n+1}} (\|J_{\gamma_{n+1}}^B y_{n+1}\| + \|y_{n+1}\|) \\ &\leq \|y_{n+1} - y_n\| + L |\gamma_{n+1} - \gamma_n| \end{aligned} \quad (3.11)$$

olup $L = \frac{\sup_n \{\|J_{\gamma_{n+1}}^B y_{n+1}\| + \|y_{n+1}\|\}}{\epsilon}$ dir. Eğer $\gamma_{n+1} \leq \gamma_n$ ise yine 3.2.5. Lemmadan

$$\begin{aligned} \|J_{\gamma_{n+1}}^B y_{n+1} - J_{\gamma_n}^B y_n\| &= \left\| J_{\gamma_{n+1}}^B y_{n+1} - J_{\gamma_{n+1}}^B \left(\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} y_n + \left(1 - \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n}\right) J_{\gamma_n}^B y_n \right) \right\| \\ &\leq \left\| y_{n+1} - \left(\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} y_n + \left(1 - \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n}\right) J_{\gamma_n}^B y_n \right) \right\| \\ &\leq \|y_{n+1} - y_n\| + \frac{|\gamma_{n+1} - \gamma_n|}{\gamma_n} (\|J_{\gamma_n}^B y_n\| + \|y_n\|) \\ &\leq \|y_{n+1} - y_n\| + L |\gamma_{n+1} - \gamma_n| \end{aligned} \quad (3.12)$$

yazılır. (3.9), (3.10), (3.11) ve (3.12) den

$$\begin{aligned} \|x_{n+2} - x_{n+1}\| &\leq W |\alpha_{n+1} - \alpha_n| + \alpha_{n+1} \alpha \|x_{n+1} - x_n\| + (1 - \alpha_{n+1}) (\|y_{n+1} - y_n\| \\ &\quad + L |\gamma_{n+1} - \gamma_n|) \\ &\leq (1 - \alpha_{n+1}) \|x_{n+1} - x_n\| + K |\lambda_{n+1} - \lambda_n| + M |\beta_{n+1} - \beta_n| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +L|\gamma_{n+1} - \gamma_n| + W|\alpha_{n+1} - \alpha_n| + \alpha_{n+1}\alpha\|x_{n+1} - x_n\| \\
& = (1 - (1 - \alpha)\alpha_{n+1})\|x_{n+1} - x_n\| + K|\lambda_{n+1} - \lambda_n| + M|\beta_{n+1} - \beta_n| \\
& \quad + L|\gamma_{n+1} - \gamma_n| + W|\alpha_{n+1} - \alpha_n|
\end{aligned}$$

elde edilir. 3.2.8. Lemmaya göre $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - x_n\| = 0$ dir.

3.Adım: Bu adımda $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - y_n\| = 0$ olduğu gösterilecektir. 3.2.9. Teoreminden $u_n = \frac{y_n - \beta_n x_n}{1 - \beta_n}$ olmak üzere $x_n \in \lambda_n A u_n + u_n$ yazılabilir. A , birikimli olduğundan

$$\langle x_n - u_n, j(u_n - q) \rangle \geq 0$$

elde edilir. Buradan

$$\langle x_{n+1} - u_n, j(u_n - q) \rangle \geq 0$$

ve

$$\langle y_n - x_{n+1} + \beta_n(x_{n+1} - x_n), j(y_n - q + \beta_n(q - x_n)) \rangle \leq 0$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}
\langle y_n - x_{n+1}, j(y_n - q) \rangle & \leq \langle y_n - x_{n+1}, j(y_n - q) - j(y_n - q + \beta_n(q - x_n)) \rangle + \beta_n K_1 \\
& \leq K_2 (\|j(y_n - q) - j(y_n - q + \beta_n(q - x_n))\|) + \beta_n K_1 \quad (3.13)
\end{aligned}$$

olur. (3.33) eşitsizliğinde $K_1 = \sup_n \{(\|x_{n+1}\| + \|x_n\|)(\|y_n - q + \beta_n(q - x_n)\|)\}$ ve $K_2 = \sup_n \{\|x_{n+1}\| + \|y_n\|\}$ dir. 3.2.9. Teoreminden $v_n = \frac{x_{n+1} - \alpha_n f(x_n)}{1 - \alpha_n}$ olmak üzere $y_n \in v_n + \gamma_n B v_n$ yazalım. B birikimli olduğundan

$$\langle y_n - v_n, j(v_n - q) \rangle \geq 0$$

olarak yazılabilir. Buradan

$$\langle y_n - x_{n+1} + \alpha_n(f(x_n) - y_n), j(q - x_{n+1} + \alpha_n(f(x_n) - q)) \rangle \leq 0$$

olup bu ise

$$\begin{aligned}
& \langle y_n - x_{n+1} + \alpha_n(f(x_n) - y_n), j(q - x_{n+1} + \alpha_n(f(x_n) - q)) \rangle \\
& \leq \langle y_n - x_{n+1}, j(q - x_{n+1}) \rangle \\
& \leq \langle y_n - x_{n+1}, j(q - x_{n+1}) - j(q - x_{n+1} + \alpha_n(f(x_n) - q)) \rangle + \alpha_n K_3 \\
& \leq K_2 \|j(q - x_{n+1}) - j(q - x_{n+1} + \alpha_n(f(x_n) - q))\| + \alpha_n K_3 \quad (3.14)
\end{aligned}$$

olmasını gerektirir. Burada $K_3 = \sup_n \{\|f(x_n) + \|y_n\|\|q - x_{n+1} + \alpha_n(f(x_n) - q)\|\}$ dir. (3.13) ve (3.14) den

$$\langle y_n - x_{n+1}, j(y_n - q) - j(x_{n+1} - q) \rangle \leq K_2 (\|j(y_n - q) - j(y_n - q + \beta_n(q - x_n))\|)$$

$$\begin{aligned}
& +\beta_n K_1 + K_2 \|j(q - x_{n+1} + \alpha_n(f(x_n) - q))\| \\
& +\alpha_n K_3
\end{aligned}$$

elde edilir. 3.2.3. Lemmadan j , E nin sınırlı alt kümeleri üzerinde normu koruyan düzgün sürekli bir dönüşüm olduğundan

$$\|(y_n - q) - (y_n - q + \beta_n(q - x_n))\| = \beta_n \|x_n - q\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

ve

$$\|(q - x_{n+1}) - (q - x_{n+1} + \alpha_n(f(x_n) - q))\| = \alpha_n \|f(x_n) - q\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

olur. Buradan

$$\|j(y_n - q) - j(y_n - q + \beta_n(q - x_n))\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \quad (3.15)$$

ve

$$\|j(q - x_{n+1}) - j(q - x_{n+1} + \alpha_n(f(x_n) - q))\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \quad (3.16)$$

sonuçlarına ulaşılır. (3.15) ve (3.16) dan

$$\langle y_n - x_{n+1}, j(y_n - q) - j(x_{n+1} - q) \rangle \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

olur. 3.2.7. Lemmadan

$$g(\|y_n - x_{n+1}\|) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

olur. g nin özelliklerinden $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - y_n\| = 0$ elde edilir.

4.Adım: Bu adımda $r \in (0, \epsilon)$ olmak üzere $T = \frac{1}{2}(J_r^A + J_r^B)$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Tx_n\| = 0$ olduğu gösterilecektir. $\|y_n - J_{\lambda_n}^A x_n\| = \beta_n \|x_n - J_{\lambda_n}^A x_n\|$ yazılır. Buradan

$$\begin{aligned}
\|x_n - J_{\lambda_n}^A x_n\| & \leq \|x_n - x_{n+1}\| + \|x_{n+1} - y_n\| + \|y_n - J_{\lambda_n}^A x_n\| \\
& \leq \|x_n - x_{n+1}\| + \|x_{n+1} - y_n\| + \beta_n \|x_n - J_{\lambda_n}^A x_n\|
\end{aligned}$$

dir. Yani

$$\|x_n - J_{\lambda_n}^A x_n\| \leq \frac{1}{1 - \beta_n} (\|x_n - x_{n+1}\| + \|x_{n+1} - y_n\|)$$

elde edilir. 2. adımda elde edilen $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - x_n\| = 0$ ve 3. adımda elde edilen $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - y_n\| = 0$ ifadelerine göre $n \rightarrow \infty$ iken $\|x_n - J_{\lambda_n}^A x_n\| \rightarrow 0$ olur. Böylece

$$\begin{aligned}
\|J_{\lambda_n}^A x_n - J_r^A x_n\| & = \left\| J_r^A \left(\frac{r}{\lambda_n} x_n + \left(1 - \frac{r}{\lambda_n}\right) J_{\lambda_n}^A x_n \right) - J_r^A x_n \right\| \\
& \leq \left(1 - \frac{r}{\lambda_n}\right) \|x_n - J_{\lambda_n}^A x_n\|
\end{aligned}$$

$$\leq \|x_n - J_{\lambda_n}^A x_n\|$$

dir. Ayrıca

$$\begin{aligned} \|x_n - J_r^A x_n\| &\leq \|x_n - J_{\lambda_n}^A x_n\| + \|J_{\lambda_n}^A x_n - J_r^A x_n\| \\ &\leq \|J_{\lambda_n}^A x_n - x_n\| + \|J_{\lambda_n}^A x_n - x_n\| \\ &= 2\|J_{\lambda_n}^A x_n - x_n\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (3.17)$$

dir. Buradan

$$\|x_{n+1} - J_{\gamma_n}^B y_n\| = \alpha_n \|f(x_n) - J_{\gamma_n}^B y_n\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

ve

$$\|J_{\gamma_n}^B x_{n+1} - J_{\gamma_n}^B y_n\| \leq \|x_{n+1} - y_n\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

yazılabilir. Yukarıda verilen iki ifade yardımıyla $n \rightarrow \infty$ iken

$$\|x_{n+1} - J_{\gamma_n}^B x_{n+1}\| \rightarrow 0$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} \|J_{\gamma_n}^B x_{n+1} - J_r^B x_{n+1}\| &= \left\| J_r^B \left(\frac{r}{\gamma_n} x_{n+1} + \left(1 - \frac{r}{\gamma_n}\right) J_{\gamma_n}^B x_{n+1} \right) - J_r^B x_{n+1} \right\| \\ &\leq \left(1 - \frac{r}{\gamma_n}\right) \|x_{n+1} - J_{\gamma_n}^B x_{n+1}\| \\ &\leq \|x_{n+1} - J_{\gamma_n}^B x_{n+1}\| \end{aligned}$$

dir. Buradan $n \rightarrow \infty$ iken

$$\|x_n - J_r^B x_n\| \rightarrow 0 \quad (3.18)$$

olur. (3.17) ve (3.18) den

$$\|x_n - Tx_n\| = \|x_n - (J_r^A x_n + J_r^B x_n)\| \leq \frac{1}{2} (\|x_n - J_r^A x_n\| + \|x_n - J_r^B x_n\|)$$

olup buradan $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Tx_n\| = 0$ elde edilir.

5.Adım: Bu adımda $\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle f(x_t) - Q_\Omega f(x_t), j(x_n - Q_\Omega f(x_t)) \rangle \leq 0$ olduğu gösterilecektir. $t \in (0,1)$ olmak üzere $\{x_t\}$ dizisi $x_t = tf(x_t) + (1-t)Tx_t$ şeklinde tanımlansın. Ayrıca $M = \sup\{\|x_t - x_n\| : t \in (0,1), n \geq 0\}$ olsun. Buna göre

$$\begin{aligned} \|x_t - x_n\|^2 &= t \langle f(x_t) - x_n, j(x_t - x_n) \rangle + \langle Tx_t - x_n, j(x_t - x_n) \rangle \\ &= t \langle f(x_t) - x_n, j(x_t - x_n) \rangle + t \|x_t - x_n\|^2 \\ &\quad + (1-t) \langle Tx_t - Tx_n, j(x_t - x_n) \rangle + (1-t) \langle Tx_t - x_n, j(x_t - x_n) \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq t\langle f(x_t) - x_n, j(x_t - x_n) \rangle + t\|x_t - x_n\|^2 + (1-t)\|x_t - x_n\|^2 \\ &\quad + M\|x_n - Tx_n\| + (1-t)\langle Tx_t - x_n, j(x_t - x_n) \rangle \end{aligned}$$

olup $\langle f(x_t) - x_t, j(x_t - x_n) \rangle \leq \frac{M}{t}\|x_n - Tx_n\|$ dir. $x_n - Tx_n \rightarrow 0$ olduğundan

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle f(x_t) - x_n, j(x_t - x_n) \rangle \leq 0 \quad (3.19)$$

olur. Şimdi ise $t \rightarrow 0^+$ iken $x_t \rightarrow Q_\Omega f(x_t)$ olduğundan

$$\begin{aligned} &|\langle f(x_t) - Q_\Omega f(x_t), j(x_n - Q_\Omega f(x_t)) \rangle - \langle f(x_t) - x_t, j(x_t - x_n) \rangle| \\ &= |\langle f(x_t) - Q_\Omega f(x_t), j(x_n - Q_\Omega f(x_t)) \rangle - \langle j(x_t - x_n) \rangle + \langle Q_\Omega f(x_t) - x_t, j(x_n - x_t) \rangle| \\ &\leq |\langle f(x_t) - Q_\Omega f(x_t), j(x_n - Q_\Omega f(x_t)) \rangle - \langle j(x_t - x_n) \rangle| + M\|x_t - Q_\Omega f(x_t)\| \\ &\rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0^+ \end{aligned}$$

elde edilir. $\epsilon > 0$ olsun. her $t \in (0, \delta)$ için

$$\langle f(x_t) - Q_\Omega f(x_t), j(x_n - Q_\Omega f(x_t)) \rangle < \langle f(x_t) - x_t, j(x_t - x_n) \rangle + \epsilon$$

olacak şekilde $\delta \in (0, 1)$ vardır. (3.19) dan

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle f(x_t) - Q_\Omega f(x_t), j(x_n - Q_\Omega f(x_t)) \rangle \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f(x_t) - x_t, j(x_t - x_n) \rangle + \epsilon \leq \epsilon$$

dir. ϵ keyfi olduğundan

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle f(x_t) - Q_\Omega f(x_t), j(x_n - Q_\Omega f(x_t)) \rangle \leq 0$$

elde edilir.

6. Adım: Bu adımda $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Q_\Omega f(x_n)\| = 0$ olduğu gösterilecektir. 3.2.4. Lemmaya göre

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - Q_\Omega f(x_n)\|^2 &= \|\alpha_n f(x_n) + (1 - \alpha_n) J_{\gamma_n}^B y_n - Q_\Omega f(x_n)\|^2 \\ &\leq (1 - \alpha_n)^2 \|J_{\gamma_n}^B y_n - Q_\Omega f(x_n)\|^2 \\ &\quad + 2\alpha_n (1 - \alpha_n) \langle f(x_n) - Q_\Omega f(x_n), j(x_{n+1} - Q_\Omega f(x_n)) \rangle \\ &\leq (1 - \alpha_n) \|y_n - Q_\Omega f(x_n)\|^2 \\ &\quad + 2\alpha_n \langle f(x_n) - Q_\Omega f(x_n), j(x_{n+1} - Q_\Omega f(x_n)) \rangle \\ &\leq (1 - \alpha_n) \|x_n - Q_\Omega f(x_n)\|^2 \\ &\quad + 2\alpha_n \langle f(x_n) - Q_\Omega f(x_n), j(x_{n+1} - Q_\Omega f(x_n)) \rangle \end{aligned}$$

olur. 3.2.8. Lemmadan $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Q_\Omega f(x_n)\| = 0$ elde edilir.

3.3. Genelleştirilmiş Halpern Tipi İterasyon Yöntemi

2020 yılında Kitkuan, Kumam ve Martinez-Moreno, ileri-geri yönteminden esinlenerek yeni bir iterasyon şeması teşkil etmiş ve aşağıdaki teoremi vermişlerdir.

3.3.1. Teorem: H bir Hilbert uzayı, $A: H \rightarrow H$ α -ters güçlü monoton dönüşüm ($\alpha > 0$) ve $B: H \rightarrow 2^H$ maksimal monoton bir operatör olsun. $\lambda_n > 0$ için $J_{\lambda_n}^B = (Id + \lambda_n B)^{-1}$, B operatörünün bir resolventi olsun. $\Omega := (A + B)^{-1}(0) \neq \emptyset$ olduğunu kabul edelim. $u \in H$, $x_1 = x \in H$ olmak üzere $\{x_n\} \subset H$ dizisi

$$\begin{cases} z_n = r_n x_n + (1 - r_n) J_{\lambda_n}^B (Id - \lambda_n A) x_n \\ y_n = s_n x_n + (1 - s_n) J_{\lambda_n}^B (Id - \lambda_n A) z_n \\ x_{n+1} = \alpha_n u + (1 - \alpha_n) y_n \end{cases} \quad (3.20)$$

şeklinde tanımlansın. Ayrıca $\{r_n\}, \{s_n\}, \{\alpha_n\} \subset (0, 1)$ dizileri aşağıdaki şartları sağlasın:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$,
2. $0 < \liminf_{n \rightarrow \infty} \lambda_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \lambda_n < 2L$,
3. $\liminf_{n \rightarrow \infty} (1 - r_n)(1 - s_n) > 0$.

Bu durumda $\{x_n\}$ dizisi $(A + B)^{-1}(0)$ in bir z noktasına güçlü yakınsıyor. Burada $z = P_{\Omega} u$ dur. (Kitkuan vd. 2020).

Bu teoremin ispatı, genel olarak Kitkuan, vd. tarafından verilen 3.2.9. Teoremin ispatı ile benzerdir (Kitkuan, Kumam ve Martinez-Moreno 1563-1568 sayfa).

3.4. Hızlandırılmış Viskozite İterasyon Yöntemi

2009 yılında Beck ve Teboulle tarafından adına hızlı yinelemeli büzülme eşiği yöntemi (FISTA) dedikleri aşağıdaki iterasyonu teşkil etmiştir.

$$\begin{cases} y_n = T x_n, \\ t_{n+1} = \frac{1 + \sqrt{1 + 4t_n^2}}{2}, \\ \theta_n = \frac{t_n - 1}{t_{n+1}}, \\ x_{n+1} = y_n + \theta_n (y_n - y_{n-1}), \quad \forall n \geq 1. \end{cases}$$

Burada $\lambda > 0$ için $T = \text{prox}_{\lambda g}(I - \lambda \nabla h)$, $x_1 = y_0 \in \mathbb{R}^n$ ve $t_1 = 1$ dir (Beck ve Teboulle, 2009)

H bir Hilbert uzayı, $T_n: H \rightarrow H$ genişlemeyen dönüşümlerin sonsuz bir ailesi ve $x_0, x_1 \in H$ olsun. 2018 de Verma, Sahu ve Shukla, viskoziteye dayalı ileri geri yöntemi (VIFBA) olarak adlandırdıkları aşağıdaki iterasyon ile çalışmışlardır.

$$\begin{cases} y_n = x_n + \theta_n(x_n - x_{n-1}) \\ z_n = (1 - \beta_n)y_n + \beta_n f(y_n) \\ x_{n+1} = T_n z_n, \quad n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Burada f, H kümesi üzerinde daraltan bir dönüşüm ve $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\theta_n\} \in [0, 1]$ dir (Verma vd. 2018).

2020 yılında Jenwit Puangpee ve Suthep Suantai, yukarıdaki iterasyonlardan esinlenerek aşağıdaki bir sabit nokta iterasyonu vermişlerdir. Bazı uygun kontrol şartları altında, önerilen yöntemin yakınsaması sonucunda uygulama olarak görüntü iyileştirme problemini ele almışlardır. Yazarlar yöntemlerinin mevcut çalışmalara göre daha verimli olduğu sonucuna varmışlardır. H bir Hilbert uzayı, $\{T_n\}$, H dan kendisine tanımlı genişlemeyen bir dönüşümlerin bir ailesi ve f, k -daraltan dönüşüm olsun, Ayrıca $\{\mu_n\} \subset (0, \infty)$ ve $\{\sigma_n\}, \{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\} \subset (0, 1)$ olsun. $x_0, x_1 \in H$, $\theta \geq 0$ ve $n \geq 1$ için

$$\theta_n = \begin{cases} \min \left\{ \theta, \frac{\mu_n \alpha_n}{\|x_n - x_{n-1}\|} \right\}, & x_n \neq x_{n-1} \text{ ise} \\ \theta, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olmak üzere

$$\begin{cases} y_n = x_n + \theta_n(x_n - x_{n-1}), \\ z_n = (1 - \sigma_n)y_n + \sigma_n T_n y_n, \\ x_{n+1} = \alpha_n f(x_n) + \beta_n T_n y_n + \gamma_n T_n z_n \end{cases} \quad (3.21)$$

dir (Puangpee ve Suantai 2020). Yazarların teoremi aşağıda verilmiştir.

3.4.1. Teorem: $\{T_n\}$ genişlemeyen dönüşümlerin bir ailesi ve $T: H \rightarrow H$, $\emptyset \neq F(T) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n)$ şartıyla genişlemeyen dönüşümü olsun. Ayrıca $\{T_n\}$ dizisi NST şartını sağlasın. $\{x_n\}$, (3.21) iterasyonu ile oluşturulan bir dizi olmak üzere aşağıdakilerin sağlandığını kabul edelim: $k, t, m, k', t', m' \in \mathbb{R}$ için

1. $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = 1$,
2. $0 < k \leq \sigma_n \leq k' < 1$,
3. $0 < t \leq \beta_n \leq t' < 1$,
4. $0 < m \leq \gamma_n \leq m' < 1$,
5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n = 0$,

6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$ dur.

Bu durumda $\{x_n\}$ dizisi, $u \in F(T)$ ye güçlü yakınsar. Burada $u = P_{F(T)}f(u)$ dir. NST Şartı: $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - T_n(x_n)\| = 0$ şartını sağlayan her sınırlı $\{x_n\}$ dizisi için $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - T(x_n)\| = 0$ dır (Puangpee ve Suantai 2020).

Bu teoremin ispatı genel olarak 3.2.9. Teoremin ispatı ile benzerdir (Puangpee ve Suantai 8-13 sayfa).

3.5. İki Monoton Operatörün Toplamı İçin Yeni Ön Koşullu İterasyon Yöntemi

2015 yılında Lorenz ve Pock, aşağıdaki ön koşullandırma yöntemini teşkil etmişlerdir:

$$\begin{cases} y_n = x_n + \theta_n(x_n - x_{n-1}) \\ x_{n+1} = (I + \lambda_n M^{-1}A)^{-1}(I - \lambda_n M^{-1}B)(y_n). \end{cases} \quad (3.22)$$

Burada M , ön koşul terimi olup sınırlı lineer bir operatördür. Ayrıca θ_n , $[0,1)$ üzerinde hızlandırılma terimi ve λ_n de adım boyu terimidir. Lorenz ve Pock (3.22) ile verilen yöntemin zayıf yakınsamasını ispatlamışlardır. $\theta_n = 0$ ve $M = I$ alınır (3.22) ile verilen yöntem, ileri geri bölme yöntemine indirgenmektedir.

2021 yılında Dixit vd. adına hızlandırılmış ön koşullu ileri geri normal S-iterasyonu (APFBNSM) dedikleri aşağıdaki iterasyonu teşkil etmişlerdir:

$$\begin{cases} y_n = x_n + \theta_n(x_n - x_{n-1}) \\ x_{n+1} = (I + \lambda_n M^{-1}A)^{-1}(I - \lambda_n M^{-1}B)(1 - \alpha_n)y_n \\ \quad + \alpha_n(I + \lambda M^{-1}A)^{-1}(I - \lambda M^{-1}B)(y_n). \end{cases} \quad (3.23)$$

Burada $\alpha_n \in (0,1)$, $\lambda \in [0,1)$ ve $\theta_n \in [0,1)$ dir. Ayrıca Dixit v.d. reel Hilbert uzayında bazı varsayımlar altında önerilen yöntemin zayıf yakınsamasını ispatlamışlardır.

2022 yılında Altıparmak ve Karahan yeni bir ön koşullandırma ileri geri bölme iterasyonu teşkil edip, bu iterasyonun reel bir Hilbert uzayında güçlü yakınsaklığını çalışmışlardır. Bu çalışmanın ana teoremi aşağıdadır.

3.5.1. Teorem: $M: H \rightarrow H$ sınırlı lineer, kendi üzerine ve pozitif tanımlı bir operatör, $A: H \rightarrow 2^H$ maksimal monoton bir operatör ve $B: H \rightarrow H$ ise $\Omega = (A + B)^{-1}(0) \neq \emptyset$ olacak şekilde M -zorlayıcı operatör olsun. f, H üzerinde M -normuna göre k -daraltan bir dönüşüm ve $\lambda \in (0,1]$ olsun. $x_0, x_1 \in H$ olmak üzere $\{x_n\}$ dizisi

$$\begin{cases} y_n = x_n + \theta_n(x_n - x_{n-1}) \\ z_n = (I + \lambda M^{-1}A)^{-1}(I - \lambda M^{-1}B) \left(\alpha_n(I + \lambda M^{-1}A)^{-1}(I - \lambda M^{-1}B)(y_n) + (1 - \alpha_n)y_n \right) \\ x_{n+1} = \beta_n f(z_n) + (1 - \beta_n)(I + \lambda M^{-1}A)^{-1}(I - \lambda M^{-1}B)(z_n) \end{cases} \quad (3.24)$$

şeklinde teşkil edilsin. Ayrıca $\theta \in [0,1)$ olmak üzere $\{\theta_n\} \subset [0, \theta]$ ve $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \in (0,1)$ dizileri aşağıdaki şartları sağlasın:

- i. $a, b \in \mathbb{R}$ için $0 < a \leq \alpha_n \leq b < 1$ dir.
- ii. $c, d \in \mathbb{R}$ için $0 < c \leq \beta_n \leq d < 1$ dir.
- iii. $\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n \|x_n - x_{n-1}\|_M < \infty$ dur.
- iv. $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = \infty$ dur.

Bu durumda $\{x_n\}$ dizisi $p \in \Omega$ noktasına güçlü yakınsar. Ayrıca $p = P_{\Omega}f(p)$ dir (Altıparmak ve Karahan 2022).

Şimdi iki konveks fonksiyonun toplamı olarak

$$h(x^*) + g(x^*) = \min_{x \in H} \{h(x) + g(x)\} \quad (3.25)$$

şeklinde verilen konveks minimizasyon problemini tekrar ele alalım. Burada $h: H \rightarrow \mathbb{R}$, L_h -Lipschitz gradiyentine göre (ki bu ∇h in Lipschitz sabitidir) diferensiyellenebilir olsun. ∇h , L_h -Lipschitz sürekli ise Baillon-Haddad teoremine göre ∇h , L_h^{-1} için zorlayıcıdır. Ayrıca $g: H \rightarrow \mathbb{R}$ has konveks ve alttan yarı sürekli fonksiyon ise ∂g maksimal monotondur. Ayrıca x^* , (a) ile verilen minimizasyon probleminin bir çözümü olması için gerek ve yeter şart $0 \in \nabla h(x^*) + \partial g(x^*)$ olmasıdır. Dolayısıyla $\lambda > 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} 0 \in \lambda \nabla h(x^*) + \lambda \partial g(x^*) &\Leftrightarrow 0 \in \lambda L_h^{-1} \nabla h(x^*) + \lambda L_h^{-1} \partial g(x^*) \\ &\Leftrightarrow x^* - \lambda L_h^{-1} \nabla h(x^*) \in x^* + \lambda L_h^{-1} \partial g(x^*) \\ &\Leftrightarrow x^* = (I + \lambda L_h^{-1} \partial g)^{-1} (I + \lambda L_h^{-1} \nabla h)(x^*) \end{aligned}$$

yazılabilir. Burada (3.24) ifadesine göre $A = \partial g$, $B = \nabla h$ ve $M(x) = L_h x$ alınmıştır. Buradan hareketle aşağıdaki sonuç çıkarılabilir (Altıparmak ve Karahan 2022).

3.5.2. Sonuç: $h: H \rightarrow \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir ve L_h -Lipschitz gradiyentine göre konveks bir fonksiyon, $g: H \rightarrow \mathbb{R}$ has konveks ve alttan yarı sürekli bir fonksiyon olsun. (3.25) ile verilen konveks minimizasyon probleminin çözüm kümesinin boş küme olmadığını kabul edelim. Ayrıca $\{\theta_n\} \subset [0, \theta]$ ve $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \in (0,1)$ parametreleri 3.2.9. Teoremde verilen şartları sağlasın. $x_0, x_1 \in H$ olmak üzere $\{x_n\}$ dizisi

$$\begin{cases} y_n = x_n + \theta_n(x_n - x_{n-1}) \\ z_n = (I + \lambda L_h^{-1} \partial g)^{-1} (I - \lambda L_h^{-1} \nabla h) \left(\alpha_n (I + \lambda L_h^{-1} \partial g)^{-1} (I - \lambda L_h^{-1} \nabla h)(y_n) + (1 - \alpha_n) y_n \right) \\ x_{n+1} = \beta_n f(z_n) + (1 - \beta_n) (I + \lambda L_h^{-1} \partial g)^{-1} (I - \lambda L_h^{-1} \nabla h)(z_n) \end{cases} \quad (3.26)$$

şeklinde teşkil edilsin. Bu durumda $\{x_n\}$ dizisi konveks minimizasyon probleminin bir çözümü olan x^* noktasına güçlü yakınsar (Altıparmak ve Karahan 2022).



ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde Sabit Nokta Teorisinin önemli uygulama alanlarından biri olan iki boyutta görüntü iyileştirme ile ilgili son yılların önde gelen çalışmaları incelenerek karşılaştırılacaktır.

4.1. Kitkuan vd. nin İterasyon Yöntemi ile Douglas-Rachford ve İleri-Geri İterasyon Yöntemlerinin Karşılaştırılması

İlk olarak Duangkamon Kitkuan, Poom Kumam, Anantachai Padcharoen, Wiyada Kumam ve Phatiphat Thounthong' un teşkil ettiği yöntemin görüntü iyileştirme uygulamasını göreceğiz.

Genel görüntü iyileştirme problemi, $b = Ax + y$ modelinin tersi olarak formüle edilir. Bu formülde $x \in \mathbb{R}^n$, y ve b sırasıyla bilinmeyen orijinal görüntü, bilinmeyen rastgele gürültü ve bilinen bozulmuş gözlemdir. A , lineer bir operatör olup bulanıklaştırma fonksiyonunu temsil eder. Burada amaç ortaya çıkan y gürültüsünü en aza indirgeyerek gözlemlenen b görüntüsünü orijinal x görüntüsüne yaklaştırmaktır.

Konveks fizibilitenin çerçevesi görüntü kurtarma problemini, bir ön bilgi ve gözlemlenen verilerden elde edilen m kısıtlamalarını sağlayan bir H Hilbert uzayında bulma ve görüntü olarak formüle etmekten ibarettir. Kısıtlamalar, kapalı konveks $(C_i)_{1 \leq i \leq m}$ kümeleri ile temsil edilmek üzere problem $x \in S = \bigcap_{i=1}^m C_i$ yi bulmaktır. Buna göre her $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ için P_{C_i} , C_i üzerinde projeksiyon operatörü ve $x \in H$ olmak üzere $P_{C_i}x$, $\min_{p \in C_i} \frac{1}{2} \|x - p\|^2$ probleminin tek çözümüdür. Popüler düzgünleştirme (regularization) tekniklerinden biri de Tikhonov tarafından verilen

$$\operatorname{argmin}_x \left\{ \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2 + \lambda \|x\|_2^2 \right\}$$

problemin çözümüdür. Burada $\|\cdot\|_2$, 2-normunu ifade eder ve $\lambda > 0$ ise Tikhonov düzgünleştirme parametresidir. Bu ifade optimizasyon problemleri için mevcut olan birkaç farklı formülasyona eşdeğerdir. Literatürde bu tür problemleri çözmek için total varyasyon düzgünleştirmesinin kullanmasında bir artış olmuştur. Total varyasyon düzgünleştirmesi

görüntülerin iyileştirilmesi sürecinde kenarları geri yükler. $x \in \mathbb{R}^{m \times n}$ için $\|x\|_{TV}$, ayrık total varyasyon düzgünleştirme terimi

$$\|x\|_{TV} = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{n-1} \sqrt{(x_{i,j} - x_{i+1,j})^2 + (x_{i,j} - x_{i,j+1})^2} + \sum_{i=1}^{m-1} |x_{i,j} - x_{i+1,n}| + \sum_{j=1}^{n-1} |x_{m,j} - x_{m,j+1}|$$

şeklinde tanımlanmak üzere kısıtlamasız total varyasyon bulanıklaştırma probleminin bir versiyonu

$$\operatorname{argmin}_x \left\{ \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2 + \lambda \|x\|_{TV} \right\}$$

şeklinde verilebilir.

$\Gamma_0(\mathbb{R}^n)$, \mathbb{R}^n de has, alttan yarı sürekli konveks fonksiyonlarının kümesi ve $x \in \mathbb{R}^n$ olsun. $\lambda \in (0, \infty)$ için $g \in \Gamma_0(\mathbb{R}^n)$ nin yakınlık (proximity) operatörü

$$\operatorname{prox}_{\lambda g}(x) = \operatorname{argmin}_{y \in \mathbb{R}^n} \left\{ \lambda g(y) + \frac{1}{2} \|x - y\|^2 \right\}$$

şeklinde tanımlanır. Kitkuan v.d., $b = Ax + y$ şeklindeki görüntü iyileştirme problemini çözen aşağıdaki yöntemi teşkil etmişlerdir.

$$\begin{cases} z_n = \operatorname{argmin}_x \left\{ \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2 + \gamma \|x\|_2^2 \right\} \\ y_n = \operatorname{argmin}_x \left\{ \frac{1}{2} \|x - z_n\|_2^2 + \lambda \|x\|_{TV} \right\} \\ x_{n+1} = \alpha_n f(z_n) + (1 - \alpha_n) y_n. \end{cases} \quad (4.1)$$

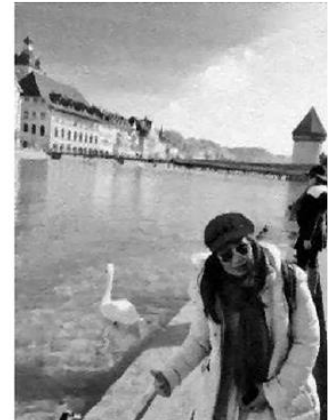
$\gamma_n = \gamma = 0,03$ ve $\lambda_n = \lambda = 0,03$ seçimleri altında (4.1) yöntemini kullanılarak aşağıdaki 9×9 boyutundaki resimlere rastgele bulanıklık ve gürültü eklenmiştir. Sonuçlar aşağıdadır: (Kitkuan vd. 2019).



(a)



(b)



(c)



(d)



(e)



(f)

Şekil 9. (a), (d) orijinal görüntü; (b), (e) bozulmuş görüntü ve (c), (f) ise (4.1) deki yöntem ile düzeltilmiş görüntü

Aşağıda verilen konveks minimizasyon problemini göz önüne alalım:

$$x \in \operatorname{argmin}_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2 + \gamma_n \|x\|_{TV} \right\}.$$

Burada b bozulmuş görüntü, A ise maskeyi temsil eden bir operatördür. Kitkuan vd, yukarıdaki problemi çözmek için viskozite iterasyon yöntemi dedikleri (4.1) iterasyonunu kullanmışlardır. $f(x) = \frac{x}{16}$, $\beta_n = 10^{-64}$, $\alpha_n = 10^{-60}$ ve $\lambda_n = 0,4$ alınarak görüntü ilk olarak rastgele bir bulanıklıktan ve gürültüden geçmiştir. Buna göre aşağıdaki görüntüler elde edilmiştir (Kitkuan, Kumam, Padcharoen ve Thounthong 2019).



Orijinal Görüntü



Bozulmuş Görüntü



Douglas-Rachford Yöntemi İle İyileştirilmiş Görüntü



İleri-Geri Yöntemi İle İyileştirilmiş Görüntü



(4.1) de Verilen Yöntem İle İyileştirilmiş Görüntü

Şekil 10. Bazı yöntemlerle iyileştirilmiş görüntüler

Sinyal-gürültü oranı (SNR) ve sinyal-gürültü oranında iyileştirme (ISNR) iyileştirilen görüntülerin kalitesini ölçmek için kullanılmaktadır. Bu değerler

$$SNR=10 \log \frac{\|x\|_2^2}{\|x-x_n\|_2^2} \quad \text{ve} \quad ISNR= 10 \log \frac{\|x-b_n\|_2^2}{\|x-x_n\|_2^2}$$

formülleri ile hesaplanmaktadır. Burada x orijinal görüntü, b gözlemlenen görüntü ve x_n ise n . iterasyon adımıdaki görüntüdür. Şekil 10. da verilen görüntülerde uygulanmış Douglas-Rashford, İleri-Geri ve (4.1) ile verilen yöntemlerinin SNR ve ISNR değerleri Tablo 1. de verilmiştir (Kitkuan, Kumam, Padcharoen ve Thounthong 2019).

Tablo 1. Douglas-Rashford, İleri-Geri ve (4.1) ile verilen yöntemlerin SNR ve ISNR değerleri

Görüntüler	Yöntem	SNR	ISNR
Şekil 4.2. de verilen orijinal görüntü	Douglas-Rashford Yöntemi	24,6043	19,9291
	İleri-Geri Yöntemi	23,7859	19,1106
	(4.1) ile Verilen Yöntem	24,6062	19,9310

4.2. Genelleştirilmiş Halpern Tipi İterasyon Yöntemi ile İleri-Geri İterasyon Yönteminin Karşılaştırılması

Şimdi Kitkuan, Kumam ve Martinez-Moreno'nun 2020 yılında teşkil ettiği yöntem ile ileri geri yöntemini karşılaştıracamız. Burada

$$x \in \operatorname{argmin}_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2 + \gamma_n \|x\|_1 \right\}$$

ile verilen konveks minimizasyon probleminin çözümünü bulmak için 3.3.1. Teoremden verilen (3.20) yöntemi kullanılmıştır. Bu ifadeye b bozulmuş görüntü ve A ise maskeyi temsil eden bir operatördür. Aşağıdaki şekiller ve tabloda görüntüler verilmiştir.



Şekil 11. İleri-Geri yöntemi ve (3.20) yöntemi ile iyileştirilmiş görüntüler

Tablo 2. Araba ve kelebek görüntülerine uygulanan ileri-geri yöntemi ile (3.20) ile verilen yöntemin SNR değerleri

Sinyal-Gürültü Oranı (SNR)

n	İleri- Geri Yöntemi		(3.20) ile Verilen Yöntem	
	Araba Görüntüsü	Kelebek Görüntüsü	Araba Görüntüsü	Kelebek Görüntüsü
1	39,86436	16,83523	39,55234	16,50330
10	42,19495	20,18632	42,79734	21,13300
20	43,68652	22,39802	44,93117	24,05614
30	44,79580	23,85739	46,36425	25,82078
40	45,66785	24,93198	47,40526	27,12594
50	46,37740	25,79450	48,28946	28,18605
60	46,97198	26,52621	48,88423	29,08495
70	47,48276	27,16796	49,45157	29,86661
80	47,93072	27,47253	49,94540	30,55806
90	48,33023	28,26413	50,38221	31,17742
100	48,69134	28,74241	50,77312	31,73764

4.3. Hızlandırılmış Viskozite Yöntemi ile Büzülme Eşiği Yönteminin Karşılaştırılması

2020 yılında Puangpee ve Suantai, kendi (NAVA) iterasyonundan elde ettikleri ve Hızlandırılmış Viskozite İleri-Geri Yöntemi (AVFBA) adını verdikleri yöntemini aşağıdaki kabullerle teşkil etmişlerdir:

- H bir reel Hilbert uzayı,
- $h: H \rightarrow \mathbb{R}$ türevlenebilir konveks ve ∇h , L -Lipschitz sürekli gradyentine sahip bir fonksiyon,
- $g \in \Gamma_0(H)$,
- $\text{argmin}(h + g) \neq \emptyset$,
- f, H da k -daraltan dönüşüm,
- $\lambda \in (0, \frac{2}{L})$ ve $\{\lambda_n\} \subset (0, \frac{2}{L})$ için $\lambda_n \rightarrow \lambda$,
- $\{\eta_n\} \subset (0, \infty)$ ve $\{\sigma_n\}, \{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\} \subset (0, 1)$.

Bu halde $\theta > 0$ ve $x_0, x_1 \in H$ olmak üzere

$$\theta_n = \begin{cases} \min \left\{ \theta, \frac{\mu_n \alpha_n}{\|x_n - x_{n-1}\|} \right\}, & x_n \neq x_{n-1} \text{ ise} \\ \theta, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

için

$$\begin{cases} y_n = x_n + \theta_n(x_n - x_{n-1}), \\ z_n = (1 - \sigma_n)y_n + \sigma_n \text{prox}_{\lambda_n g}(I - \lambda_n \nabla h)y_n, \\ x_{n+1} = \alpha_n f(x_n) + \beta_n \text{prox}_{\lambda_n g}(I - \lambda_n \nabla h)y_n + \gamma_n \text{prox}_{\lambda_n g}(I - \lambda_n \nabla h)z_n \end{cases} \quad (4.2)$$

dır. Yazarlar, 3.3.3. Teoremde kullanan aynı parametre şartları altında (4.2) ile oluşturulan $\{x_n\}$ dizisinin $u \in \text{argmin}(g + h)$ noktasına güçlü yakınsadığını ispatlamışlardır. Ayrıca bu yöntemi kullanarak

$$\min_x \left\{ \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2 + \lambda \|x\|_1 \right\} \quad (4.3)$$

ile ilgili görüntü işleme örnekleri vermişlerdir. Regüleştirme parametresi $\lambda = 5e^{-5}$ alınsın. Buna göre Schonbrunn sarayının orijinal görüntüsü ile bulanıklaşmış görüntüsü aşağıda verilmiştir (Puangpee ve Suantai 2020).



Schonbrunn sarayının orijinal görüntüsü



Schonbrunn sarayının bulanıklaşmış görüntüsü



Schonbrunn sarayının (4.2) yöntemi ile iyileştirilmiş görüntüsü

Schonbrunn sarayının FISTA yöntemi ile iyileştirilmiş görüntüsü

Şekil 12. (4.2) yöntemi ve FISTA yöntemi ile iyileştirilmiş görüntüler

Şekil 12. den hareketle (4.2) ile verilen AVFBA yönteminin FISTA yönteminden daha iyi sonuç verdiği görülmüştür (Puangpee ve Suantai 2020).

2009 yılında Thung ve Raveendran, iyileştirilmiş görüntülerin kalitesini ölçmek için tepe sinyali-gürültü oranını (PSNR) adını verdikleri formülasyonu

$$PSNR(x_n) = 10 \log \left(\frac{255^2}{MSE} \right)$$

şeklinde teşkil etmişlerdir. Burada $MSE = \frac{1}{256^2} \|x_n - x\|^2$ olup x orijinal görüntüsü için ortalama kare hatasıdır. Ayrıca daha yüksek bir PSNR, görüntünün bulanıklığını gidermek için daha yüksek bir kalite gösterir.

Buna göre ilk olarak aşağıda verilen 6 farklı durumu göz önünde bulundurarak (4.2) ile verilen yöntemin yakınsama davranışları Tablo 3. de verilmiştir (Puangpee ve Suantai 2020).

Tablo 3. (4.2) de verilen yöntemdeki parametrelerin 6 farklı durumu

P	1. DURUM	2. DURUM	3. DURUM	4. DURUM	5. DURUM	6. DURUM
α_n	$\frac{1}{33n}$	$\frac{1}{33n}$	$\frac{1}{33n}$	$\frac{1}{33n}$	$\frac{1}{33n}$	$\frac{1}{33n}$
β_n	$\frac{n}{n+1}$	$\frac{n}{300n+1}$	$\frac{n}{300n+1}$	$\frac{n}{300n+1}$	$\frac{n}{300n+1}$	$\frac{n}{300n+1}$
γ_n	$1 - \alpha_n$ $-\beta_n$	$1 - \alpha_n$ $-\beta_n$	$1 - \alpha_n$ $-\beta_n$	$1 - \alpha_n$ $-\beta_n$	$1 - \alpha_n$ $-\beta_n$	$1 - \alpha_n$ $-\beta_n$
σ_n	$\frac{n}{10(n+1)}$	$\frac{n}{10(n+1)}$	$\frac{n}{10(n+1)}$	$\frac{n}{10(n+1)}$	$\frac{n}{10(n+1)}$	$\frac{n}{10(n+1)}$
η_n	$\frac{33 \cdot 10^{20}}{n}$	$\frac{33 \cdot 10^{20}}{n}$	$\frac{33 \cdot 10^{20}}{n}$	$\frac{33 \cdot 10^{20}}{n}$	$\frac{33 \cdot 10^{20}}{n}$	$\frac{33 \cdot 10^{20}}{n}$
λ_n	$\frac{n}{L(n+1)}$	$\frac{n}{L(n+1)}$	$\frac{n}{L(n+1)}$	$\frac{31n}{20L(n+1)}$	$\frac{31n}{20L(n+1)}$	$\frac{31n}{20L(n+1)}$
θ	0,5	0,5	0,5	0,5	0,09	0,09

Bu durumlarda verilen parametrelerinin (4.2) de verilen koşulları sağladığı açıktır. $f(x) = 0,25x$ alınırsa (4.2) ye göre $\{x_n\}$ dizisi orijinal görüntüye yakınsar ve Tablo 3. de verilen her durum için $\{x_n\}$ dizisinin yakınsama davranışı PSNR değerleri ile Tablo 4. de verilmiştir.

Tablo 4. (4.2) deki yöntemin 6 durum için PSNR değerleri

n	1. DURUM	2. DURUM	3. DURUM	4. DURUM	5. DURUM	6. DURUM
1	19,435266	19,440476	19,528889	19,686937	19,686937	19,686937
5	20,539773	20,568442	20,849492	21,151064	20,888207	21,598216
10	21,126851	21,174059	21,606305	22,068696	21,554700	23,435160
25	22,136789	22,228847	22,949968	23,587612	22,788089	25,383824
50	23,125241	23,246531	24,087158	24,748261	23,893124	27,283463
100	24,198479	24,331965	25,199378	25,852069	25,000206	29,440357
250	25,605450	25,741976	26,608033	27,265159	26,408127	31,342524
500	26,645135	26,784026	27,674898	28,365891	27,466181	32,443743

İkinci olarak $f(x) = k \cdot x$ daralma dönüşümü için $\{x_n\}$ dizisinin yakınsama davranışları için aşağıdaki 4 farklı durum ele alınsın.

Tablo 5. $f(x) = k \cdot x$ dönüşümü için 4 farklı durum

DURUM (A)	$f(x) = 0,1 \cdot x$
DURUM (B)	$f(x) = 0,5 \cdot x$
DURUM (C)	$f(x) = 0,75 \cdot x$
DURUM (D)	$f(x) = 0,95 \cdot x$

Tablo 5. için parametreleri $\alpha_n = \frac{1}{33n}$, $\beta_n = \frac{n}{300n+1}$, $\gamma_n = 1 - \alpha_n - \beta_n$, $\sigma_n = \frac{99n}{100(n+1)}$, $\eta_n = \frac{33 \cdot 10^{20}}{n}$, $\lambda_n = \frac{31n}{20L(n+1)}$ ve

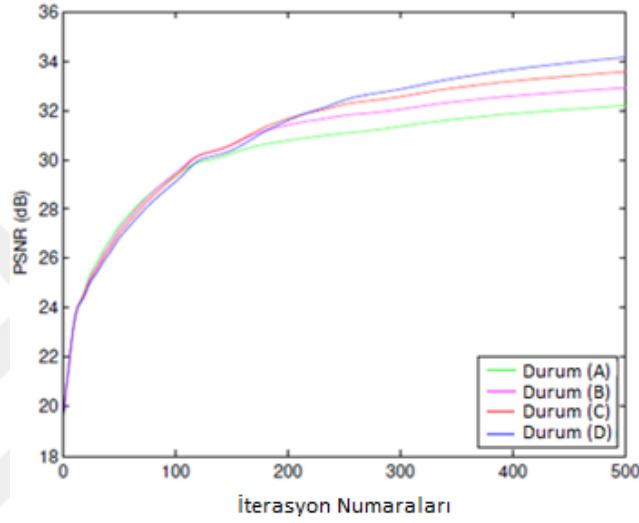
$$\theta_n = \begin{cases} \min \left\{ 0,99, \frac{10^{20}}{n^2 \|x_n - x_{n-1}\|} \right\}, & x_n \neq x_{n-1} \text{ ise} \\ 0,99, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

olarak seçilsin. Tablo 6. da sırasıyla 32,212326 , 32,929758 , 33,580650 ve 34,170032 değerlerine eşit olan bütün durumlarda x_{500} deki $PSNR$ değerleri elde edilir. Ayrıca Tablo 6. ve Şekil 13. de k , 1 e yakın olduğunda $PSNR$ değerinin en küçük bir k dan daha yüksek olduğu görülür (Puangpee ve Suantai 2020).

Tablo 6. (4.2) ile verilen yöntemin $x_1, x_5, x_{10}, x_{25}, x_{50}, x_{100}, x_{250}, x_{500}$ e göre 4 farklı durum için $PSNR$ değerleri

İTERASYON NUMARALARI	DURUM (A)	DURUM (B)	DURUM (C)	DURUM (D)
-------------------------	-----------	-----------	-----------	-----------

1	19,645629	19,742816	19,781947	19,800875
5	21,595741	21,600924	21,601822	21,601207
10	23,430366	23,441553	23,445829	23,447628
25	25,433348	25,289174	25,178923	25,079196
50	27,329109	27,167872	26,997762	26,819210
100	29,375156	29,468395	29,352150	29,121785
250	31,091760	31,811123	32,260577	32,431003
500	32,212326	32,929758	33,580650	34,170032



Şekil 13. (4.2) deki yöntemin 4 farklı durum için *PSNR* değerlerin grafiği

Üçüncü olarak (4.2) de verilen hızlandırılmış viskozite ileri-geri yöntemi (AVFBA) ile hızlı yinelemeli büzülme eşiği yönteminin (FISTA) görüntü iyileştirme sonucundaki kalitelerini karşılaştıralım. Bunun için (4.2) de verilen yöntemdeki bütün parametreler Tablo 5. için kullanılan parametreler ile aynı seçilmiş olup $f(x) = 0,95 \cdot x$ olarak seçilmiştir. Ayrıca hızlı yinelemeli büzülme eşiği yöntemi (FISTA) için $\lambda = \frac{1}{L}$ parametresi için $h(x) = \|Ax - b\|_2^2$, $g(x) = \lambda \|x\|_1$ ve $T = prox_{\lambda g}(I - \lambda \nabla h)$ olsun. Buna göre Schonbrunn sarayı görüntüsü için (4.2) yönteminin ve hızlı yinelemeli büzülme eşiği yönteminin (FISTA) *PSNR* değerleri Tablo 7. de verilmiştir (Puangpee ve Suantai 2020).

Tablo 7. Schonbrunn Sarayının *PSNR* değerleri

TEPE SİNYAL-GÜRÜLTÜ ORANI (PSNR)

n	AVFBA	FISTA
1	19,800875	19,785363

5	21,601207	20,774354
10	23,447628	21,530504
25	25,079196	23,502806
50	26,819210	25,401943
100	29,121785	27,342763
250	32,431003	30,290802
500	34,170032	32,356010

4.4. Yeni Ön Koşullu İterasyon Yöntemi ile Diğer İterasyon Yöntemlerinin Karşılaştırılması

Bu son başlıkta (3.26) ile verilen iterasyon yöntemi ile (3.22) ve (3.23) de verilen yöntemleri karşılaştıracamız. Yapılan karşılaştırmada hareket ve gauss bulanıklık fonksiyonlarını göz önünde bulundurarak dağ görüntüsüne rastgele gürültü eklenmiştir. Matlab ortamında hareket fonksiyon değeri 15,60 ve gauss fonksiyon değeri 9,4 alınarak rastgele gürültü eklenmiştir. Daha sonra gürültülü görüntüler (3.26), (3.22) ve (3.23) ile iyileştirilmiştir. Bu yöntemlerle iyileştirilen görüntülerin kalitesini ölçmek için sinyal-gürültü oranı (*SNR*) ve tepe sinyal-gürültü oranı (*PSNR*) aşağıdaki gibi seçilmiştir:

$$SNR = 20 \log \frac{\|x\|_2}{\|x-x_n\|_2}, \quad PSNR(x_n) = 10 \log \left(\frac{255^2}{MSE} \right).$$

Burada x orijinal görüntü ve x_n , n iterasyonuna göre iyileştirilmiş görüntüdür. Ayrıca $MSE = \frac{1}{M} \|x - x_n\|_2$ olup M görüntü örneği sayısıdır. $\alpha_n = \frac{1}{2}$, $\theta_n = \frac{1}{2}$, $\beta_n = \frac{1}{2n}$, $\lambda = 0,99$ ve $f(x) = 0,9999$. x seçimleri ile dağ görüntüsünün (3.26), (3.22) ve (3.23) ile elde edilen *SNR* değerleri Tablo 8. de, *PSNR* değerleri Tablo 9. da ve iyileştirilmiş görüntüleri de Şekil 14. de verilmiştir (Altıparmak ve Karahan 2022).

Tablo 8. Dağ görüntüsünün *SNR* değerleri

İterasyon Numaraları	(3.26)	(3.22)	(3.23)
1	33,150494	32,970274	33,079983
5	33,975156	33,758195	33,862282
10	34,235762	33,975192	34,094985
25	34,593426	34,271498	34,411929
50	34,919419	34,524013	34,688625

100	35,350730	34,822088	35,031797
250	36,222684	35,362060	35,692589
500	37,213319	35,977868	36,460288
1000	38,502561	36,867338	37,530003

Tablo 9. Dağ görüntüsünün *PSNR* değerleri

İterasyon Numaraları	(3.26)	(3.22)	(3.23)
1	68,908473	68,818362	68,873217
5	69,320821	69,212336	69,264381
10	69,451135	69,320840	69,380740
25	69,629990	69,469005	69,539228
50	69,793020	69,595278	69,677597
100	70,008724	69,744343	69,849221
250	70,444861	70,014391	70,181534
500	70,940457	70,322399	70,563717
1000	71,585632	70,767362	71,098913



(a)



(b)



(c)



(d)

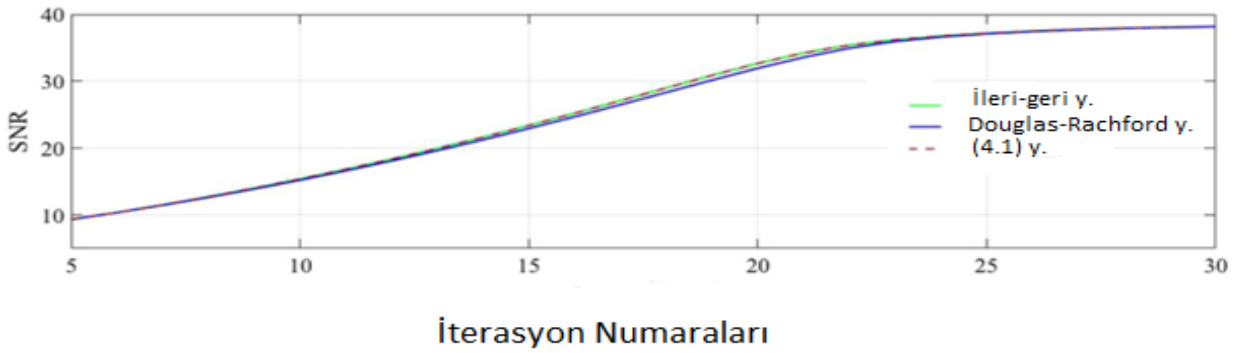


(e)

Şekil 14. (a) Dağ görüntüsü, (b) Bozulmuş görüntü, (c) (3.22) ile iyileştirilmiş görüntü, (d) (3.23) ile iyileştirilmiş görüntü, (e) (3.26) ile iyileştirilmiş görüntü

TARTIŞMA ve SONUÇ

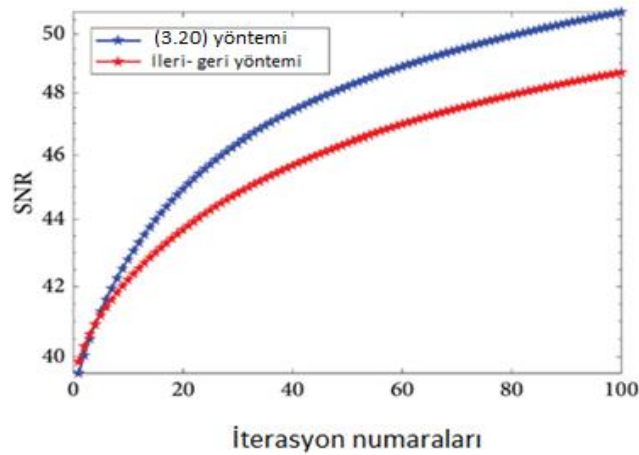
Kitkuan, Kumama, Padcharoen, Kumam ve Thounthong tarafından 2019 yılında görüntü restorasyonu için verdikleri viskozite iterasyon metodunun deneysel sonuçları diğer bazı yöntemlerden daha iyi performans gösterilmiştir. Buna göre Douglas-Rashford, İleri-Geri ve (4.1) yöntemlerinin sinyal-gürültü oranları açısından Şekil 10. üzerinden grafiksel karşılaştırılması aşağıda verilmiştir.



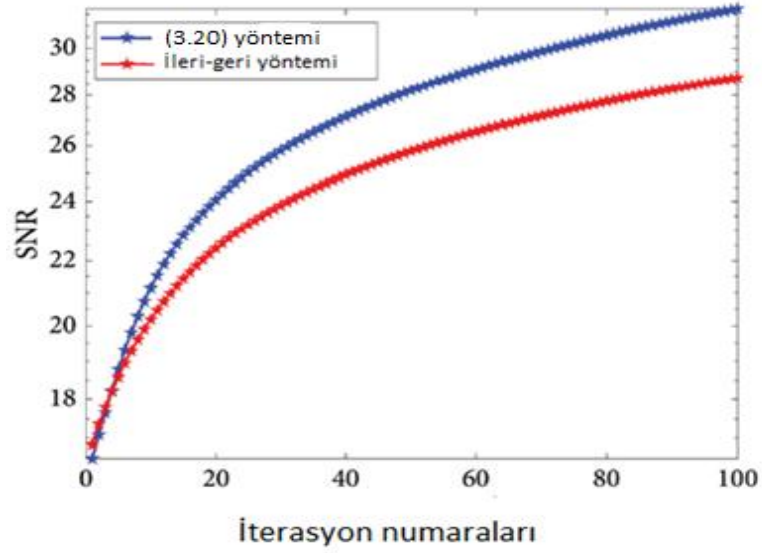
Şekil 15. İleri-geri, Douglas-Rachford ve (4.1) yöntemleriyle elde edilen kadın görüntülerinin SNR grafiği

Buna göre (4.1) iterasyon yönteminin, yakın olsa da Douglas-Rashford ve İleri-Geri algoritmasından daha etkili olduğu gözlenmektedir.

Diğer taraftan Kitkuan, Kumam ve Martinez-Moreno'nun 2020 yılında teşkil ettiği iterasyon yöntemi ile ileri geri iterasyon yönteminin SNR değerlerine göre araba ve kelebek görüntüleri üzerinden ileri-geri yöntemi ile grafiksel olarak karşılaştırması aşağıda verilmiştir.



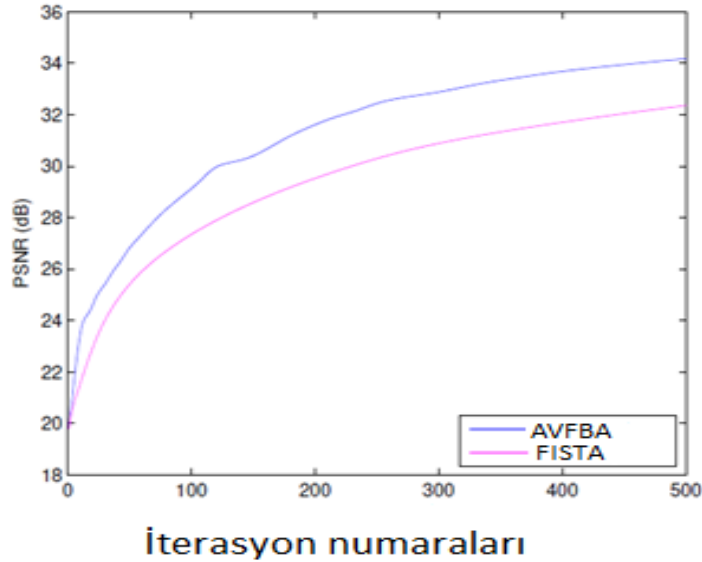
Şekil 16. Araba görüntüsünün ileri-geri yöntemi ve (3.20) yöntemine göre SNR grafiği



Şekil 17. Kelebek görüntüsünün ileri-geri yöntemi ve (3.20) yöntemine göre SNR grafiği

Buna göre Şekil 11. deki oluşturulan resimler üzerinden (3.20) iterasyon yönteminin ileri geri iterasyon yöntemine göre daha iyi sonuç verdiği görülmektedir.

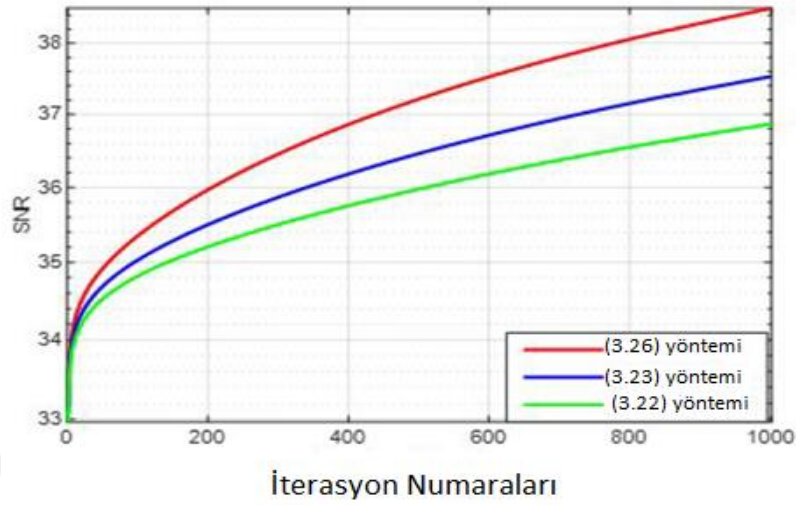
2020 yılında Puangpee ve Suantai, hızlandırılmış viskozite ileri-geri yöntemi (AVFBA) adını verdikleri yöntem ile hızlı yinelemeli büzülme eşiği yöntemini (FISTA) Schonbrunn sarayı görüntüleri üzerinden karşılaştırmış ve *PSNR* değerlerinin grafikleri aşağıda verilmiştir.



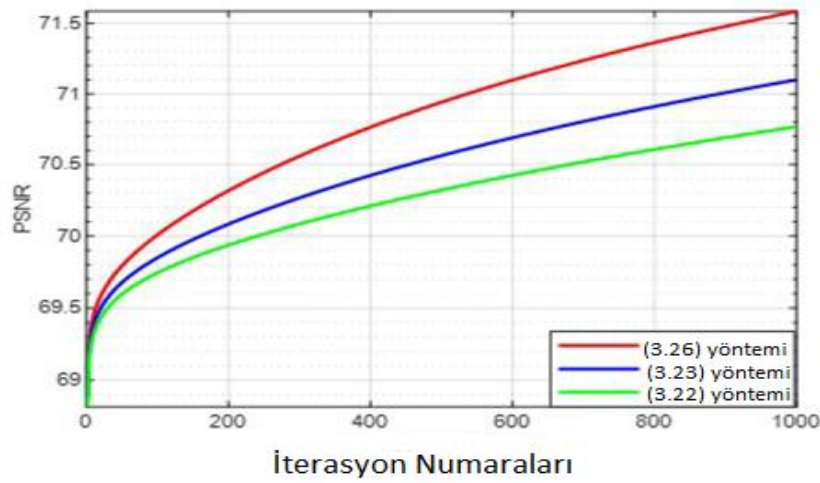
Şekil 18. Schonbrunn Sarayının AVFBA ve FISTA yöntemlerine göre *PSNR* değerlerinin grafiği

Şekil 18. den hareketle (4.2) ile verilen AVFBA yönteminin hızlı yinelemeli büzülme eşiği yönteminden (FISTA) daha iyi sonuç verdiği görülmektedir.

Son olarak 2022 yılında Altıparmak ve Karahan tarafından (3.26) ile verilen iterasyon yöntemi ile (3.22) ve (3.23) de verilen yöntemleri karşılaştırılmıştır. Bu üç iterasyon yönteminin deneysel sonuçlara göre SNR grafiği Şekil 19. da ve $PSNR$ grafiği Şekil 20. de verilmiştir.



Şekil 19. (3.26), (3.22) ve (3.23) e göre elde edilen dağ görüntülerinin SNR değerlerinin grafiği



Şekil 20. (3.26), (3.22) ve (3.23) e göre elde edilen dağ görüntülerinin $PSNR$ değerlerinin grafiği

Buna göre Altıparmak ve Karahan'ın (3.26) ile verdikleri iterasyon yöntemi ile (3.22) ve (3.23) yöntemlerinin görüntü iyileştirmede sürecindeki SNR ve $PSNR$ değerleri karşılaştırıldığında seçilen görseller üzerinden (3.26) ile verilen yöntemin görüntü iyileştirme performansının (3.22) ve (3.23) yöntemlerine göre çok daha iyi olduğu görülmektedir.

KAYNAKLAR

- Agarwal, R.P., O'Regan, D. ve Sagu, D.R., 2007. Iterative Construction of Fixed Points of Nearly Asymptotically Nonexpansive Mappings. *J.Nonlinear Convex Analysis*. 8(1), 61-79.
- Agarwal R.P., O'Regan D. ve Sahu D.R., 2009. *Fixed Point Theory for Lipschitzian-Type Mappings with Applications*, Springer.
- Altıparmak E. ve Karahan İ., 2022. A New Preconditioning Algorithm for Finding a Zero of the Sum of Two Monotone Operators and Its Application to Image Restoration Problem. *International Journal of Computer Mathematics*, DOI:10.1080/00207160.2022.2068146.
- Ansari, Q.H., 2010. *Metric Spaces Including Fixed Point Theory and Set-Valued Maps*. Alpha Science International Ltd., 208 p, Oxford, U.K.
- Barbu V., 1976. *Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces*, Noordhoff, Groningen.
- Beck, A. ve Teboulle, M., 2009. A Fast Iterative Shrinkage-Thresholding Algorithm for Linear Inverse Problems. *Siam J. Imaging Sciences*. 2(1), 183-202.
- Cegielski, A., 2012. *Iterative Methods for Fixed Point Problems in Hilbert Spaces*, Lecture Notes in Mathematics. Springer, 298 p, London, U.K.
- Dixit A., Sahu D.R., Gautam P., Som T. ve Yao J.C., 2021. An Accelerated Forward Backward Splitting Algorithm for Solving Inclusion Problems with Applications to Regression and Link Prediction Problems. *J. Nonlinear Var. Anal.* 5, 79-101.
- Goebel K. ve Reich S., 1984. *Uniform Convexity Hyperbolic Geometry and Nonexpansive Mappings*. Marcel Dekker, Inc., New York and Basel.
- Ishikawa, S., 1974. Fixed Points by a New Iteration Method. *Proceedings of the American Mathematical Society*. 44(1), 147-150.
- Karahan, İ., 2015. Genişlemeyen Dönüşümler için Sabit Nokta Yaklaşım Metotları ve Varyasyonel Eşitsizlik Problemleri. Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.
- Karakoç, M., 2011. Görüntü İşleme Teknikleri ve Yapay Zeka Yöntemleri Kullanılarak Görüntü İçinde Görüntü Arama. Y. Lisans Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Pamukkale Üniversitesi, Denizli.
- Kitgvan, D., Kumam, P. ve Marinez-Moreno J., 2020. Generalized Halpern -Type Forward-Backward Splitting Methods for Convex Minimization Problems with Application to Image Restoration Problems. *Optimization*. 69(7-8), 1557-1581.
- Kitgvan, D., Kumam, P., Padcharoen, A., Kumam, W. ve Thounthong P., 2019. Algorithms for Zeros of Two Accretive Operators for Solving Convex Minimization Problems and Its Application to Image Restoration Problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 359, 471-495.
- Liu L.S., 1995. Ishikawa ve Mann Iterative Process with Errors for Nonlinear Strongly Accretive Mappings in Banach Spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 194, 114-125.

- Lorendz D.A. ve Pock T., 2015. An Inertial Forward-Backward Algorithm for Monotone Inclusions. *J. Math. Imaging Vision* 51, 311-325.
- Mann, W.R., 1953. Mean Value Methods in Iteration. *Proceedings of the American Mathematical Society*. 4, 506-510.
- Nadler Jr S.B., 1969. Multivalued Contraction Mappings. *Pacific Journal of Advanced Mathematics*. 30(2), 475-488.
- Petryshn W.V., 1970. A characterization of Strictly Convexity of Banach Spaces and Other Uses of Duality Mappings. *Journal of Functional Analysis* 6, 282–291.
- Picard, C.E., 1980. Mémoire Sur la Théorie des Équations Aux Dérivées Partielles et la Méthode des Approximations Successives. *Journal de Math Ématiques Pures et Appliquées*. 6(4), 145-210.
- Puangpee, J. ve Suantai, S., 2020. A New Accelerated Viscosity Iterative Method for an Infinite Family of Nonexpansive Mappings with Applications to Image Restoration Problems. *Mathematics*. 8(615), 1-20.
- Qin X. ve Su Y., 2007. Approximation of a Zero Point of Accretive Operator in Banach Spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 329, 415-424.
- Solmaz F., 2019. Küme Değerli Dönüşümlerin Sabit Noktalarına İteratif Yaklaşımlar. Y.Lisans Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi, Erzincan.
- Verma, M., Sahu, D.R. ve Shukla, K.K., 2018. VAGA: A Novel Viscosity-Based Accelerated Gradient Algorithm-Convergence Analysis and Applications. *Applied Intelligence*. 48, 2613-2627.
- Zeidler, E., 1986. *Nonlinear Functional Analysis and Its Applications III: Variational Methods and Applications*. Springer, 688 p, New York, USA.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı:	Mustafa Anıl DEMİRBAŞ
Eğitim	
Lise:	İzmir Teğmen Ali Rıza Akıncı Anadolu Lisesi
Lisans:	Karadeniz Teknik Üniversitesi Fatih Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği
Lisans:	Karadeniz Teknik Üniversitesi Fatih Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği
Yabancı Dil Bilgisi	
İngilizce:	Orta