

T.C.
BİLECİK ŞEYH EDEBALI ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
ANADOLU ÜNİVERSİTESİ ORTAK PROGRAMI

**YARIM TAMSAYI AĞIRLIKLİ MODÜLER FORMLAR ÜZERİNDE SATO-TATE
BENZERİ PROBLEMLER ÜZERİNE**

DOKTORA TEZİ

ZEYNEP DEMİRKOL ÖZKAYA

TEZ DANIŞMANI
DOÇ. DR. İLKER İNAM

BİLECİK, 2022

10451654

T.C.
BİLECİK ŞEYH EDEBALI ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
ANADOLU ÜNİVERSİTESİ ORTAK PROGRAMI

**YARIM TAMSAYI AĞIRLIKLİ MODÜLER FORMLAR ÜZERİNDE SATO-TATE
BENZERİ PROBLEMLER ÜZERİNE**

DOKTORA TEZİ

ZEYNEP DEMİRKOL ÖZKAYA

TEZ DANIŞMANI
DOÇ. DR. İLKER İNAM

BİLECİK, 2022

10451654

BEYAN

“Yarım Tamsayı Ağırlıklı Modüler Formlar Üzerinde Sato-Tate Benzeri Problemler Üzerine” adlı doktora tezimin hazırlık ve yazımı sırasında bilimsel araştırma ve etik kurallarına uyduğumu, başkalarının eserlerinden yararlandığım bölümlerde bilimsel kurallara uygun olarak atıfta bulunduğumu, kullandığım verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı, tezin herhangi bir kısmının Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını, aksinin tespit edileceği muhtemel durumlarda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Bu çalışmanın, Bilimsel Araştırma Projeleri (BAP), TÜBİTAK veya benzeri kuruluşlarca desteklenmesi durumunda; projenin ve destekleyen kurumun adı proje numarası ile birlikte, ETİK KURUL onayı alınması durumunda ise ETİK KURUL tarih karar ve sayı bilgilerinin beyan edilmesi gerekmektedir.			
DESTEK ALINMIŞTIR	x	DESTEK ALINMAMIŞTIR	
Destek alındı ise;			
Destekleyen kurum;			
Destegın Türü		Proje Numarası	
1- BAP (Bilimsel Araştırma Projesi)		118F148	
2- TÜBİTAK x			
Diğer;.....			
ETİK KURUL onayı var ise;			
ETİK KURUL karar tarih/sayı:		/.....	

Zeynep DEMİRKOL ÖZKAYA

04.03.2022

ÖNSÖZ

Öncelikle çalışmamda bana yön gösteren ve desteğini benden esirgemeyen, beni her konuda yüreklendiren hem yüksek lisans hem de doktora danışmanım sayın hocam Doç. Dr. İlker İNAM'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarımıza oldukça önemli katkılar sağlayan ve bilgilerini sabırla bize aktarmaya çalışan Bordeaux Üniversitesi'nin çok kıymetli hocası Prof. Dr. Henri COHEN' e en içten teşekkürlerimi sunarım.

Birlikte çalışmalar yaptığımız ve projemize de dahil olan, sorularımıza tüm samimiyetiyle cevap verirken aynı zamanda kendisini de yanımızda hissettiren Luxembourg Üniversitesi'nin çok değerli hocası Prof. Dr. Gabor WIESE'ye ayrıca teşekkür ediyorum.

Tezimin yazım aşamasında Tez İzleme Komitesi'nde yer alan ve değerli görüşlerini benimle paylaşarak yoluma ışık tutan çok kıymetli Prof. Dr. Yasemin ÇENGELLENMİŞ ve Prof. Dr. Emrah AKYAR hocalarıma çok teşekkür ederim.

Doktora eğitimim boyunca birlikte geçirdiğimiz süre için ve bana verdikleri sonsuz destekleri için ekip arkadaşlarım saygıdeğer Öğr. Gör. Banu İREZ AYDIN ve sevgili Elif TERCAN'a çok teşekkür ederim.

Yüksek lisans ve doktora çalışmalarım boyunca desteğini aldığım öğrencisi olduğum Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi'ne şükranlarımı sunarım.

Akademik kariyerime ilk adımı atmamı sağlayan Van şehrinin güzel üniversitesi Yüzüncü Yıl Üniversitesi'ne, başta aynı ofisi paylaştığım Öğr. Gör. S. Tuğçe YELER ile eşi Dr. Öğr. Üyesi Okan YELER'e ve Muradiye Meslek Yüksekokulu'ndaki tüm çalışma arkadaşlarıma desteklerinden ötürü teşekkür ederim.

Ayrıca bana akademik hayatımda da destek olan başta annem ve babama, ablalarım Esra ve Esmâ'ya, kardeşim Büşra'ya, eşim Murat'a ve iki güzel kızım Zeynep Asya ile Mina Ada'ya çok teşekkür ediyorum. Doktora tezimi ayrıca küçük kızım Mina Ada'ya armağan ediyorum.

Doktora tez çalışmam 118F148 no'lu TÜBİTAK 1001 Projesi tarafından desteklenmiştir ve bu önemli desteğinden ötürü TÜRKİYE BİLİMSEL VE TEKNİK ARAŞTIRMA KURUMU'na teşekkür ederim.

Zeynep DEMİRKOL ÖZKAYA

04.03.2022

ÖZET

YARIM TAMSAYI AĞIRLIKLİ MODÜLER FORMLAR ÜZERİNDE SATO-TATE BENZERİ PROBLEMLER ÜZERİNE

Modüler formlar matematiğin özellikle de sayılar teorisinin önemli bir konusu olup yoğun bir şekilde çalışılmaktadır. Birçok anabilim dalını bir araya getirmesi nedeniyle de birçok matematikçi için ‘modüler formlar her yerde’ bulunur. Altı bölümden oluşan bu çalışmanın 1. Bölüm'ünde modüler formlar tanımlanıp temel özellikleri incelenecek ve böylece tezde ihtiyaç duyulan alt yapı oluşturulacaktır. Tezin özgün kısımlarından ilkinin oluşturan 2. Bölüm'de yarım tamsayı ağırlıklı Hecke eigenformların sistematik seçimi probleminin çözümü verilecektir. 3. Bölüm'de ise 21. yüzyılın matematikteki en önemli başarılarından birisi olan Sato-Tate Konjektürü tanıtılacak ve Bruinier-Kohnen Konjektürü üzerine bir uygulaması verilecektir. Özgün kısmın ikinci parçası olan 4. Bölüm'de ise Ramanujan-Petersson Konjektürü tarafından normalleştirilen yarım tamsayı ağırlıklı modüler formların Fourier katsayılarının dağılımı konusu üzerinde durulacak, bir açık soru ortaya konulup mümkün olan tüm verilerle iddia desteklenecektir. Özgün kısmın son parçası olan 5. Bölüm'de Bruinier-Kohnen Konjektürü güçlendirilerek ifade edilecektir. Altıncı ve son bölüm ise tartışma, sonuç ve gözlemlerden oluşmaktadır.

Anahtar Kelimeler: Modüler formlar, Yarım Tamsayı Ağırlıklı Modüler Formlar, Ramanujan-Petersson Konjektürü, Bruinier-Kohnen Konjektürü, Sato-Tate Konjektürü

ABSTRACT

**ON SATO-TATE LIKE PROBLEMS ON HALF INTEGRAL WEIGHT OF
MODULAR FORMS**

Modular forms are an important subject of mathematics, especially number theory, and they are studied intensively. Because it brings together many branches of science, 'modular forms are everywhere' for many mathematicians. In the first part of this six-part study, modular forms will be defined and their basic properties will be examined, thus creating the background needed in the thesis. In Chapter 2, which is the first of the original parts of the thesis, the solution of the systematic selection problem of half-integral weight Hecke eigenforms will be given. In Chapter 3, Sato-Tate Conjecture, one of the most important achievements in mathematics of the 21st century, will be introduced and an application on the Bruinier-Kohnen Conjecture will be given. In the second part of the original part, Chapter 4, the distribution of Fourier coefficients of half-integral weight modular forms normalized by the Ramanujan-Petersson Conjecture will be discussed, an open question will be raised and the claim will be supported with all possible data. The last part of the original part, In Chapter 5, the Bruinier-Kohnen Conjecture will be strengthened and expressed. The sixth and last part consists of discussion, conclusion and observations.

Keywords: Modular forms, half integral weight modular forms, Ramanujan-Petersson Conjecture, Bruinier-Kohnen Conjecture, Sato-Tate Conjecture

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ.....	i
ÖZET.....	ii
ABSTRACT.....	iii
İÇİNDEKİLER.....	iv
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	vi
TABLolar LİSTESİ.....	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ.....	viii
1. MODÜLER FORMLAR VE ÖZELLİKLERİ.....	1
1.1. Giriş ve Önbilgiler	1
1.2. Hecke Eigenformlar	6
1.3. Yarım Tamsayı Ağırlıklı Modüler Formlar.....	8
1.4. Eliptik Eğriler ve Modülerite Teoremi.....	10
2. YARIM TAMSAYI AĞIRLIKLı HECKE EIGENFORMLARIN SİSTEMATİK SEÇİMİ	13
3. SATO-TATE KONJEKTÜRÜ.....	17
3.1. Giriş	17
3.2. Sato-Tate Uygulaması: Bruinier-Kohnen İşaret Eşdağılım Konjektürü	18
4. YARIM TAMSAYI AĞIRLIKLı MODÜLER FORMLARIN KATSAYILARININ DAĞILIMI VE RAMANUJAN-PETERSSON KONJEKTÜRÜ	25
4.1. Katsayıların Normalleştirilmesi ve Ramanujan-Petersson Konjektürü	25
4.2. Bilinen Sonuçlar ve Yarım Tamsayı Ağırlıklı Modüler Formlar İçin Dağılımlara Yönelik Konjektürler.....	26
4.3. $\Gamma_0(4)$ İçin Yarım Tamsayı Ağırlıklı Hecke Eigenform Örnekleri.....	27
4.5. Normalleştirilmiş Katsayıların Dağılım Histogramları	29
4.6. Aday Dağılım Fonksiyonları ve Regresyon	30
4.7. Parametrelerin Bağımlılığı ve Bağımsızlığı.....	35
5. BRUINIER-KOHNEN KONJEKTÜRÜNÜN GÜÇLENDİRİLMESİ	40
6. SONUÇ VE TARTIŞMA	42

KAYNAKÇA	42
EKLER.....	47



ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa No

Şekil 1.1. Eliptik eğri üzerinde nokta toplamı	11
Şekil 3.1. $n = 10^6$ için Δ 'nın normalleştirilmiş katsayılarının histogramı	17
Şekil 4.1. $13/2$ ağırlıklı Hecke eigenformun normalleştirilmiş Fourier katsayılarının 10^8 tanesinin histogramları sırasıyla kutu boyutları 0.001, 0.0001, 0.00001.....	29
Şekil 4.2. $13/2$ ağırlıklı Hecke eigenformun 10^8 katsayısının histogram ve dağılımı.....	32
Şekil 4.3. $25/2$ ağırlıklı Hecke eigenformun 10^8 katsayısının histogram ve dağılımı.....	32
Şekil 4.4. $43/2$ ağırlıklı Hecke eigenformun 10^7 katsayısının histogram ve dağılımı.....	32
Şekil 4.5. $13/2$ ağırlıklı Hecke eigenformun sadece asal indisli Fourier katsayılarının dağılımı ve histogramı.....	39

TABLÖLAR LİSTESİ

	Sayfa No
Tablo 4.1. GG- dağılımının a değerleri	30
Tablo 4.2. GGG- dağılımının en iyi parametre değerleri	33
Tablo 4.3. GG- dağılımının en iyi parametre değerleri	33
Tablo 4.4. Laplace dağılımının en iyi parametre değerleri.....	34
Tablo 4.5. Cauchy dağılımının en iyi parametre değerleri.....	34
Tablo 4.6. Dört dağılımdaki en iyi parametreler için RMS değerleri.....	35
Tablo 4.7. $13/2$ ağırlık için 2.10^8 katsayının alt grupları için her bir dağılımdaki en iyi parametre değerleri	36
Tablo 4.8. RMS değerleri	36
Tablo 4.9. İçinde tamkare bulunmayan (sqf) ve asal durumlar için bulunan en iyi parametre değerleri	38

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

Simgeler

$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar
$\mathbb{Z}$	: Tamsayılar
$\mathbb{C}$	: Kompleks Sayılar
$\mathbb{H}$	: Üst Yarı Düzlem
$\mathbb{P}$	: Asal Sayıların Kümesi
$GL(2, \mathbb{R})$	: Genel Lineer Grup
$SL(2, \mathbb{R})$	: Özel Lineer Grup
$PGL(2, \mathbb{R})$	: Projektif Genel Lineer Grup
Γ	: Modüler Grup
$\Delta(z)$	: Ramanujan-Tau Fonksiyonu
$G_k(z)$	: k Ağırlıklı Eisenstein Serisi
$\Gamma_0(N)$	: Modüler Grubun N Seviyeli Temel Denklik Alt Grubu
$M_k(\Gamma)$	: Γ için k Ağırlıklı Modüler Formlar Uzayı
$S_k(\Gamma)$	: Γ için k Ağırlıklı Cusp Formların Uzayı
$M_k(\Gamma_0(N))$	: $\Gamma_0(N)$ için k Ağırlıklı N seviyeli Modüler Formlar Uzayı
$S_k(\Gamma_0(N))$	: $\Gamma_0(N)$ için k Ağırlıklı N seviyeli Cusp Formlar Uzayı
$Re(z)$	: z 'nin Reel Kısmı

1. MODÜLER FORMLAR VE ÖZELLİKLERİ

1.1. Giriş ve Ön bilgiler

Bu bölümde çalışmanın temel konusunu oluşturan modüler formlar kavramı tanıtılacaktır.

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ve $ad - bc \neq 0$ olmak üzere karmaşık analizde $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ biçimindeki kesirli lineer dönüşümler (Möbius dönüşümü) önemli bir rol oynar. Bu dönüşümlerin fonksiyonların bileşke işlemine göre bir grup olduğu kolayca gösterilebilir. Bu grup projektif genel lineer grup olarak adlandırılır ve $PGL(2, \mathbb{R})$ ile gösterilir. İşlem kolaylığı açısından bu grubun elemanları matrislerle de ifade edilebilir:

$$\frac{az+b}{cz+d} \leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Böylece matris çarpımına göre bir grup olan genel lineer grup elde edilir:

$$GL(2, \mathbb{R}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc \neq 0 \right\}$$

Determinantı 1 olan matrislerin oluşturduğu alt grup özel lineer grup olarak adlandırılır ve bu grup $SL(2, \mathbb{R})$ ile gösterilir: Özel olarak yukarıdaki matrisin girdilerini reel sayılar yerine tamsayılar alınarak çok daha ilgi çekici özelliklere sahip olan aşağıda tanımlı modüler grup elde edilir. Konu ile ilgili detaylar Schoeneberg (1974)'den incelenebilir.

Tanım 1.1.1. (Schoeneberg, 1974: 16)

$$\Gamma = SL(2, \mathbb{Z}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1 \right\}$$

kümesinin matrislerdeki çarpma işlemine göre oluşturduğu gruba modüler grup denir ve Γ veya $SL(2, \mathbb{Z})$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.2. (Schoeneberg, 1974: 78)

$$\Gamma_0(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma : c \equiv 0 \pmod{N} \right\}$$

şeklinde tanımlanan alt gruba Γ 'nin temel denklik alt grubu denir ve $\Gamma_0(N)$ ile gösterilir. Burada N sayısına alt grubun seviyesi adı verilir.

Bu hazırlıkların ardından modüler form tanımı verilebilir. Bu tanım sadece modüler grup veya onun alt grubu üzerinde değil aynı zamanda daha genel gruplar olan “birinci tip

Fuchsian gruplar” için de geçerlidir. Burada çalışmanın kapsamı gereği 1 seviyeli k ağırlıklı modüler form tanımı ile N seviyeli k ağırlıklı modüler form tanımı verilecektir.

Tanım 1.1.3. (Cohen ve Strömberg, 2017: 132) f , $\mathbb{H}$ üst yarı düzlemi üzerinde tanımlı ve aşağıdaki özellikleri sağlayan karmaşık değerli yani $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ şeklinde bir fonksiyon ve k pozitif bir tamsayı olsun.

$$(i) \quad \text{Eğer her } z \in \mathbb{H} \text{ ve } \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \text{ için,}$$

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k f(z)$$

fonksiyonel eşitliği sağlanıyor ise bu durumda f 'ye zayıf modüler denir. Eğer buna ilave olarak

$$(ii) \quad f \text{ fonksiyonu } \mathbb{H} \text{ üzerinde analitik,}$$

$$(iii) \quad f \text{ fonksiyonu } i\infty \text{ 'da analitik}$$

oluyor ise f 'ye Γ için k ağırlıklı modüler form adı verilir.

Tanım 1.1.4. (Cohen ve Strömberg, 2017: 175) f , $\mathbb{H}$ üst yarı düzlemi üzerinde tanımlı ve aşağıdaki özellikleri sağlayan karmaşık değerli yani $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ şeklinde bir fonksiyon ve k pozitif bir tamsayı olsun.

$$(i) \quad \text{Eğer her } z \in \mathbb{H} \text{ ve } \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N) \text{ için,}$$

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k f(z)$$

fonksiyonel eşitliği sağlanıyor ise bu durumda f 'ye zayıf modüler denir. Eğer buna ilave olarak

$$(ii) \quad f \text{ fonksiyonu } \mathbb{H} \text{ üzerinde analitik,}$$

$$(iii) \quad f \text{ fonksiyonu } \mathbb{Q} \cup \{i\infty\} \text{ kümesinin her noktasında analitik}$$

oluyor ise f 'ye $\Gamma_0(N)$ için k ağırlıklı N seviyeli modüler form adı verilir.

Uyarı 1.1.5. Γ için tanımlı k ağırlıklı modüler formlar 1 seviyeli modüler form olur. (ii) ve (iii) sağlanmadığı takdirde ise aynı ağırlıklı ve seviyeli modüler fonksiyon adını alır. Modüler fonksiyonlar da oldukça ilgi çekici özelliklere sahip olup çalışmanın kapsamı dışındadır. Modüler formlar otomorfik formların özel halleri olup daha genel otomorfik formlara örnek olarak Maass form, Bianchi modüler form, Jacobi form, Siegel modüler form ve Hilbert modüler form verilebilir. Bu konu ile ilgili olarak (Cohen ve Strömberg, 2017)'in 15. bölümü incelenebilir.

f eğer ∞ 'da sıfır oluyorsa cusp form adını alır. k ağırlıklı 1 seviyeli cusp formlar uzayı $S_k(\Gamma)$ ile gösterilir. $\Gamma_0(N)$ denklik alt grubu için modüler form tanımlandığında modüler formlar uzayı $M_k(\Gamma_0(N))$, cusp formlar uzayı ise $S_k(\Gamma_0(N))$ ile gösterilir.

Teorem 1.1.6. (Koblitz, 1984: 109) $M_k(\Gamma)$, $\mathbb{C}$ cismi üzerinde sonlu boyutlu bir vektör uzayıdır.

İspat. $f, g \in M_k(\Gamma)$ ve $\alpha \in \mathbb{C}$ olsun. $f + \alpha g$ 'nin de $M_k(\Gamma)$ da olduğunun gösterilmesi gerekir. Üst yarı düzlemde ve ∞ 'da $f + \alpha g$ 'nin analitikliği ile dönüşüm özelliklerini sağladığı açıktır.

$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned} (f + \alpha g)(\gamma(z)) &= f(\gamma(z)) + \alpha g(\gamma(z)) \\ &= (cz + d)^k f(z) + \alpha (cz + d)^k g(z) \\ &= (cz + d)^k (f(z) + \alpha g(z)) \\ &= (cz + d)^k (f + \alpha g)(z) \end{aligned}$$

Böylece $f + \alpha g \in M_k(\Gamma)$ olur. Bu da ispatı bitirir.

Uyarı 1.1.7. Modüler formların bir vektör uzayı oluşturması konunun popüler olmasının en önemli sebeplerinden birisidir. Öncelikle lineer cebirdeki hemen hemen tüm kavramlar ve teoriler modüler formlar teorisi için aynen geçerlidir. Öte yandan sonlu boyutlu olması taban vektörlerinin “kolaylıkla” elde edilebilmesini sağladığı için özellikle hesaplamalı modüler form problemlerinde pratiklik sağlar.

Modüler grubun üreteçleri Γ 'nın özel iki elemanı olan $T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ve $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dönüşümleridir ve bu dönüşümler modüler form tanımındaki fonksiyonel eşitlikte yerine yazıldığında aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 1.1.8. (Koblitz, 1984: 108) $f(z) \in M_k(\Gamma)$ keyfi bir modüler form olsun. Bu takdirde

- i. $f\left(-\frac{1}{z}\right) = z^k f(z)$
- ii. $f(z + 1) = f(z)$

olur.

İspat.

$$f\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) = (cz + d)^k f(z)$$

fonksiyonel eşitliğini sağladığı gösterilsin.

Burada $f\left(-\frac{1}{z}\right)$ ifadesinde $a = 0, b = -1, c = 1, d = 0$ olduğundan fonksiyonel eşitlikte yerine konursa $f\left(-\frac{1}{z}\right) = z^k f(z)$ olduğu açıktır.

Aynı şekilde $f(z+1)$ de $a = 1, b = 1, c = 0, d = 1$ olduğundan fonksiyonel eşitliğin $f(z+1) = 1^k f(z) = f(z)$ olduğu görülür. Bu durumda ispat biter.

Uyarı 1.1.9. Fourier Analizi teorisinin önemli bir teoremi yani (Gradshteyn ve Ryzhik, 2007: 26). Teorem 1.1.8. (ii) gereği periyodik her bir karmaşık fonksiyonun $\sin z$ ve $\cos z$ cinsinden ifade edilebileceğini ve böylece bu karmaşık fonksiyonun bir Fourier serisi ile temsil edilebileceğini söyler.

Teorem 1.1.10. (Koblitz, 1984: 108) Modüler formlar periyodik fonksiyonlar olduğu için her bir f fonksiyonunun $q = e^{2\pi iz}$ olmak üzere

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a(n) q^n$$

şeklinde bir Fourier açılımı vardır. Buradaki $a(n)$ sayıları Fourier katsayıları olarak adlandırılır.

Örnek 1.1.11. Ramanujan-Tau fonksiyonu, modüler formların en temel örneklerinden biridir. Bu fonksiyon $\Delta(z)$ ile gösterilir ve

$$\begin{aligned} \Delta(z) &:= \sum_{n \geq 1} \tau(n) q^n = q \prod_{n \geq 1} (1 - q^n)^{24} \\ &= q - 24q^2 + 252q^3 - 1472q^4 + 4830q^5 - \dots \end{aligned}$$

olarak tanımlanır. Kolayca gösterilebilir ki $\Delta(z)$, Γ için 12-ağırlıklı 1 seviyeli bir cusp formdur (Zagier, 1994).

Örnek 1.1.12. Modüler formlar için bir başka ilginç örnek de Eisenstein Serileridir. k ağırlıklı Eisenstein serisi, $G_k(z)$ ile gösterilir; $z \in \mathbb{H}$, $k > 2$ tamsayı ve m, n aynı anda sıfır olmayan iki tamsayı olmak üzere

$$G_k(z) := \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(m+nz)^k}$$

olarak tanımlanır. Riemann ζ fonksiyonu ile kıyaslama yapılarak Eisenstein serilerinin iyi tanımlı olduğu gösterilebilir.

Buradan aşağıdaki teorem ile Eisenstein serilerinin bir modüler form olduğu ifade edilebilir.

Teorem 1.1.13. (Cohen ve Strömberg, 2017: 146) $k \geq 2$ için $G_{2k}(z) \in M_{2k}(\Gamma)$ dir.

Tanım 1.1.14. (Cohen ve Strömberg, 2017: 147) $k > 2$ bir çift tamsayı olmak üzere

$$E_k(z) = 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n$$

şeklindeki seriye k ağırlıklı normalleştirilmiş Eisenstein serisi adı verilir. Burada B_k , k -ıncı Bernoulli sayısını gösterir ve σ bölen fonksiyonu $\sigma_{k-1}(n) := \sum_{d|n} d^{k-1}$ olarak tanımlanır.

Örnek 1.1.15. Yukarıdaki tanım kullanılarak

$$E_4(z) = 1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) q^n$$

$$E_6(z) = 1 - 504 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_5(n) q^n$$

$$E_{14}(z) = 1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{13}(n) q^n$$

olduğu açıkça görülebilir. Eisenstein serilerinin sağladığı çeşitli özdeşlikler vardır. Örneğin

$$E_{10} = E_4 E_6$$

$$3617 \cdot E_{16} = 1617 \cdot E_4^4 + 2000 \cdot E_4 \cdot E_6^2$$

olur. Yukarıdaki teorem gereği E_{10} ve E_{16} 'nın sırasıyla 10 ve 16 ağırlıklı modüler form oldukları hatırlanırsa bu ve benzeri özdeşliklerden E_4 ve E_6 Eisenstein serileri ile modüler formlar arasındaki aşağıdaki teorem ile verilen ilişki sezgisel olarak gözlemlenebilir.

Teorem 1.1.16. (Koblitz, 1984: 118) Herhangi bir $f \in M_k(\Gamma)$ fonksiyonu

$$f(z) = \sum_{4i+6j=k} c_{i,j} E_4(z)^i E_6(z)^j$$

şeklinde yazılabilir.

Gerçekten de tüm modüler formların $E_4(z)$ ve $E_6(z)$ ile temsil edilebilmesi (Cohen ve Strömberg, 2017) ve Eisenstein serilerinin Fourier katsayılarının σ bölen fonksiyonu yardımı ile oldukça hızlı ve pratik bir şekilde hesaplanabilmesi bu ilginç durumu açıklamaktadır.

Dikkat edilirse modüler formların tanımındaki fonksiyonel eşitlik tıpkı Barry Mazur'ın BBC yapımı "Fermat'ın Son Teoremi" belgesinde söylediği gibi "varlıkları kazara gibi

gözükten ancak var olan” modüler formların çok fazla sayıda simetriye sahip olmasını sağlar. Bu sayede “modüler formlar ile aritmetik yapılabilir mi?” sorusu akla gelir. Bu sorunun cevabının aşağıda verilen Sturm sınırı ile olumlu olduğu görülür.

Teorem 1.1.17. (Cohen ve Strömberg, 2017: 185) $f = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)q^n$, $g = \sum_{n=0}^{\infty} b(n)q^n \in M_k(\Gamma_0(N))$ olsun. d_N sayısı $\Gamma_0(N)$ ’in, $PSL(2, \mathbb{Z})$ ’deki görüntüsünün indeksi olmak üzere

$$M := \frac{kd_N}{12}$$

sayısı tanımlansın. Eğer $0 \leq i \leq M$ için $a_i = b_i$ ise bu takdirde $f = g$ olur.

M sayısına Sturm sınırı adı verilir.

Tanım 1.1.18. (Cohen, 2019: 180) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)q^n$ normalleştirilmiş bir eigenform olsun.

$$L(f, s) = \prod_{p \in P} \frac{1}{1 - a(p)p^{-s} + p^{k-1-2s}}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona $\sum_{n \geq 1} a(n) q^n$ Euler çarpımına sahip L - fonksiyonu adı verilir.

1.2. Hecke Eigenformlar

Modüler formlar karmaşık cisim üzerinde sonlu boyutlu vektör uzayı olduğu için lineer cebirdeki tüm kavramların modüler formlarda karşılıkları vardır. Lineer operatörlerin özdeğerleri ile oluşan özvektörün modüler formlardaki karşılığı Hecke eigenform olup bu formlar birçok özelliği ile ön plana çıkarlar. Örneğin Hecke eigenformların Fourier katsayıları çarpımsal aritmetik fonksiyonlardır; diğer yandan Hecke eigenformlar "newformların" doğal bir tabanını oluştururlar. Hecke eigenformların L-fonksiyonları Euler çarpımları ile birlikte analitik/meromorfik devama sahiptir. Eliptik eğrilerle modüler formlar arasındaki ilişki Hecke eigenformların L-fonksiyonları üzerinden kurulur. Öte yandan Hecke eigenformlarla Galois temsilleri eşleşir ve bu çalışmanın tabanını oluşturan Sato-Tate Konjektörü yalnızca Hecke eigenformlar için geçerlidir. Tüm bu detaylar için (Cohen ve Strömberg, 2017) ve (Silverman, 1986)’a bakılabilir. Bu bölümde Hecke eigenformlar tanıtılacaktır.

Tanım 1.2.1. (Cohen ve Strömberg, 2017: 343) Herhangi bir sabit k tamsayısı, n pozitif tamsayısı, her $f \in M_k(\Gamma)$ için $T_n: M_k(\Gamma) \rightarrow M_k(\Gamma)$ olmak üzere

$$T_n f(z) = n^{k-1} \sum_{d|n} d^{-k} \sum_{b=0}^{d-1} f\left(\frac{nz + bd}{d^2}\right)$$

şeklinde tanımlanan operatörlere n -inci Hecke operatörü adı verilir ve T_n ile gösterilir.

Tanım 1.2.2. (Cohen ve Strömberg, 2017: 343)

$m = 1, 2, \dots$ olmak üzere tüm T_m Hecke operatörleri için özvektör olan modüler forma Hecke eigenform (özform) adı verilir. Baş katsayısı 1 olan eigenformlar tam olarak Hecke operatörlerinin özvektörü olduğu açıktır.

Teorem 1.2.3. (Koblitz, 1984: 156)

(i) p asalı için p -inci Hecke operatörü

$$T_p f(z) = p^{k-1} f(pz) + \frac{1}{p} \sum_{b=0}^{p-1} f\left(\frac{z+b}{p}\right)$$

şeklindedir.

(ii) Eğer $f \in M_k(\Gamma)$,

$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c(m) e^{2\pi i m z}$ şeklinde bir Fourier açılıma sahip ise o zaman n -inci Hecke operatörü T_n de bir Fourier açılıma sahiptir ve $\gamma_n(m) = \sum_{d|(n,m)} d^{k-1} c\left(\frac{mn}{d^2}\right)$ olmak üzere

$$T_n f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_n(m) e^{2\pi i m z}$$

şeklindedir.

(iii) $(m, n) = 1$ ise $T_m \cdot T_n = T_{m \cdot n}$ dir.

(iv) Hecke operatörleri cusp formları cusp formlara resmeder, yani cusp form uzayını korur.

Teorem 1.2.4. (Cohen ve Strömberg, 2017: 343) $k > 0$ ve $f \in M_k(\Gamma)$ sıfırdan farklı modüler form olsun. $f = \sum_{n \geq 0} a(n) q^n$, f 'nin Fourier açılımı olsun. Eğer f , tüm T_n Hecke operatörleri için bir eigen fonksiyon ise yani tüm $n \geq 1$ için $T_n f = \lambda(n) f$ ise o zaman $a(1) \neq 0$ 'dir. Eğer f normalleştirilerek $a(1) = 1$ ise o zaman tüm $n \geq 1$ için $a(n) = \lambda(n)$ 'dir.

Tanım 1.2.5. (Cohen ve Strömberg, 2017: 343) $f = \sum_{n \geq 0} a(n) q^n \in M_k(\Gamma)$ sıfırdan farklı bir modüler form olsun. $a(1) = 1$ özelliğindeki Hecke eigenformlara normalleştirilmiş Hecke eigenform denir.

1.3. Yarım Tamsayı Ağırlıklı Modüler Formlar

k bir tamsayı olsun. Bu durumda $k + 1/2$ yarım tamsayı olarak adlandırılır. Bu bölümde çalışmanın esas bölümünü oluşturacak modüler formlardan yarım tamsayı ağırlıklı modüler formlar tanımlanacaktır. Bunun için bazı ön hazırlık gereklidir. İlk olarak teta serisi tanımlanarak başlanacaktır.

Tanım 1.3.1. Her bir $z \in \mathbb{H}$ için

$$\theta(z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2i\pi n^2 z}$$

şeklinde tanımlanan seriye teta serisi adı verilir.

Ağırlığın yarım tamsayı alınması halinde teta serisi tamsayı ağırlıklı modüler formlar tanımındaki fonksiyonel eşitliği hemen hemen sağladığı görülebilir. Bu nedenle (Shimura, 1973)'te yarım tamsayı ağırlıklı modüler formları tanımlamıştır. Bu modüler formlara iyi bir örnek, teta serileridir hatta bu çalışmada kullanılmayan ancak oldukça önemli bir modüler form olan Dedekind-eta fonksiyonu da benzer fonksiyonel eşitliği sağladığı bilinmektedir (Cohen ve Strömberg, 2017: 33).

Gerçekten de her $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(4)$ için teta fonksiyonu

$$\left(\frac{\theta(\gamma(z))}{\theta(z)} \right)^2 = \left(-\frac{1}{d} \right) (cz + d)$$

fonksiyonel eşitliğini sağlar. Burada $\left(\frac{-}{d} \right)$ ifadesi Jacobi sembolünü göstermektedir. $\theta(z)^2$ 'nin 1 ağırlıklı 4 seviyeli bir modüler form olduğu kolayca görülebilir. Böylece yarım tamsayı ağırlıklı modüler formların tanımlanması için gerekli motivasyon sağlanmış olur.

Tanım 1.3.2. (Koblitz, 1984: 178) $\gamma \in \Gamma_0(4)$ için otomorfi çarpanı $J(\gamma, z) = \frac{\theta(\gamma(z))}{\theta(z)}$ olarak tanımlansın. k bir pozitif tamsayı ve $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ olmak üzere

- i. $f(\gamma(z)) = J(\gamma, z)^{2k+1} f(z)$
- ii. $f(z)$, $\mathbb{Q} \cup \{i\infty\}$ noktalarında analitiktir.

koşullarını sağlayan f fonksiyonuna, $k + \frac{1}{2}$ ağırlıklı 4 seviyeli modüler form adı verilir.

Tamsayı ağırlıklı modüler formlar için verilen notasyon burada da geçerlidir örneğin $k + \frac{1}{2}$ ağırlıklı 4 seviyeli sonlu boyutlu yarım tamsayı ağırlıklı modüler formların vektör uzayı $M_{k+\frac{1}{2}}(\Gamma_0(4))$ ile gösterilir.

Tanım 1.3.3. (Koblitz, 1984: 184) $F(z)$, $k+1/2$ ağırlıklı bir modüler form olsun. Bu durumda $q = e^{2\pi iz}$ olmak üzere, $F(z)$ 'nin

$$F(z) = \sum_{n \geq 0} A(n)q^n$$

şeklinde bir Fourier açılımı vardır. Buradaki $A(n)$ sayıları yine Fourier katsayıları olarak adlandırılır.

Önerme 1.3.4. (Koblitz, 1984: 206) T_{p^2} , yarım tamsayı ağırlıklı modüler formlar üzerinde p^2 -inci Hecke operatörü ve p asal olmak üzere $p \nmid N$ ve $k = 2\lambda + 1$ pozitif tek tamsayı olsun. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z} \in M_{\frac{k}{2}}(\tilde{\Gamma}_0(N))$ olduğunda

$$b(n) = a(p^2 n) + \left(\frac{(-1)^\lambda n}{p} \right) p^{\lambda-1} a(n) + p^{k-2} a\left(\frac{n}{p^2}\right)$$

olmak üzere

$$T_{p^2} f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b(n) e^{2\pi i n z}$$

dir.

Tanım 1.3.5. p asal olmak üzere tüm T_{p^2} ler için özvektör olan modüler forma, yarım tamsayı ağırlıklı modüler formlar için Hecke eigenform denir.

Teorem 1.3.6. (Shimura, 1973), (Niwa, 1974)

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a(n)q^n$$

$2k$ ağırlıklı bir modüler form ve

$$F(z) = \sum_{n \geq 0} A(n)q^n$$

$k+1/2$ ağırlıklı modüler form olmak üzere F^* 'yi f ile eşleştiren bir yükseltme dönüşümü vardır. Bu dönüşüme Shimura Karşılık Gelmesi adı verilir. Bu karşılık gelme Fourier katsayıları yardımıyla net olarak bellidir. Daha kesin olarak:

İki modüler formun Fourier katsayıları arasında t tamkare olmayan bir sabit tamsayı, $a(t) \neq 0$ ve

$$\chi_{t,N}(d) := \chi(d) \left(\frac{(-1)^k N^2 t}{d} \right)$$

olmak üzere

$$a(n) = \sum_{d|n} \chi_{t,N}(d) d^{k-1} A\left(\frac{tn^2}{d^2}\right)$$

şeklinde bir ilişki vardır. Dikkat edilirse buradaki bağıntı yarım tamsayı ağırlıklı modüler formların tamkare indisli terimleri yardımıyla verilmektedir.

Cusp formlar uzayı içerisinde önemli özelliklere sahip bir alt uzayı barındırır. Aşağıda tanımı verilen Kohnen Plus Space'in elemanları olan cusp formlar aritmetik olarak önemli bilgiler içerir.

Tanım 1.3.7. (Kohnen, 1980: 249)

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} c(n)q^n \in S_{k+\frac{1}{2}}(\Gamma(4N))$$

bir cusp form olsun. $(-1)^k n \not\equiv 0,1 \pmod{4}$ özelliğindeki tüm $c(n)$ katsayıları sıfır olan cusp formların oluşturduğu alt uzay Kohnen Plus Space olarak adlandırılır ve $S_{k+\frac{1}{2}}^+(\Gamma(4N))$ ile gösterilir.

1.4. Eliptik Eğriler ve Modülerite Teoremi

Taniyama-Shimura konjektörü 1955-1957'de ortaya atılan her bir eliptik eğriye karşılık bir modüler form ve her bir modüler forma da bir eliptik eğri karşılık geldiğini ortaya koyan matematik tarihine damgasını vurmuş bir ifadedir. Epsilon konjektürünün 1986'da Ken Ribet tarafından ispatlanması ile beraber Taniyama-Shimura konjektürünün Fermat'ın son teoremini gerektirdiği ortaya çıkmıştır. Bu ise modüler formlarla bağlantılı olarak eliptik eğriler konusunun çift yönlü ele alınmasını sağlamıştır. Örneğin çalışmanın özünü oluşturan Sato-Tate konjektörü aslında eliptikler eğriler için verilmiş olan bir sonuç olup "Modülerite Teoremi"

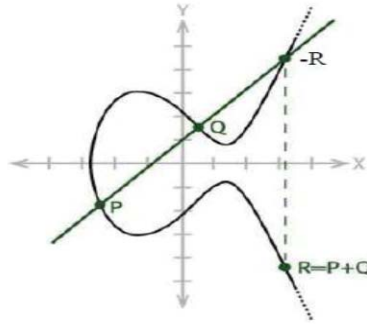
sayesinde modüler formlar için de geçerli olur. Bu bölümde gerekli referanslar verilerek çok fazla detaya girmeden çalışmanın tamlığını sağlayacak bilgiler derlenecektir.

Tanım 1.4.1. (Silverman, 1986: 48) K , karakteristiği 2 ve 3 ten farklı bir cisim ve A ile B belli iki tamsayı olsun. $\Delta := -16(4A^3 + 27B^2) \neq 0$ olmak üzere

$$E/K := \{(x, y) \in K : y^2 = x^3 + Ax + B\} \cup \{\infty\}$$

şeklinde tanımlı eğriye K üzerinde tanımlı bir eliptik eğri adı verilir.

Teorem 1.4.2. (Silverman, 1986: 55) P ve Q , E/K üzerinde iki nokta olsun bu iki noktanın toplamı bu iki noktadan geçen doğrunun eliptik eğriyi kestiği noktanın x -eksenine göre simetriği olarak Şekil 1.1.'deki gibi tanımlanır. Bu toplama işlemi yardımıyla E/K bir Abelyan grup olur.



Şekil 1.1. Eliptik eğri üzerinde nokta toplamı

Tanım 1.4.3. (Silverman, 1986: 361) $E/\mathbb{Q}$ eliptik eğrisi için L fonksiyonu $L(E, s)$ ile gösterilir ve

$$a(p) := p + 1 - |E(\mathbb{F}_p)|$$

olmak üzere

$$L(E, s) := \prod_{p|\Delta} \frac{1}{1 - a(p)p^{-s}} \cdot \prod_{p \nmid \Delta} \frac{1}{1 - a(p)p^{-s} + p^{1-2s}}$$

olarak tanımlanır.

Teorem 1.4.4. (Wiles, 1995) E , $\mathbb{Q}$ üzerinde bir eliptik eğri olsun. N eliptik eğrinin kondüktörü ve $\Gamma_0(N)$ için 2 ağırlıklı belli normalleştirilmiş eigenformlar için $L(E, s) = L(s, f)$ 'dir. Bu teorem “Modülerite teoremi” olarak ifade edilir ve eliptik eğriler ile modüler formlar arasında bir köprü görevi yapar. Modülerite teoremi aynı zamanda Taniyama-Shimura-Weil konjektürü olarak da bilinir.

Tanım 1.4.5. (Niven vd 1991: 163) Tamsayı katsayılı bir kuadratik form

$$Q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$$

olsun. $D := b^2 - 4ac$ 'ye $Q(x, y)$ 'nin temel diskriminantı denir.

Teorem 1.4.6. (Niven vd 1991: 163) D bir temel diskriminant olması için gerek ve yeter koşul D 'nin aşağıdaki koşullardan birini sağlamasıdır.

- i. $D \equiv 1 \pmod{4}$ ve D içinde tamkare bulundurmayan bir tamsayı
- ii. $m \equiv 2, 3 \pmod{4}$ ise ve m içinde tamkare bulundurmayan bir tamsayı ise $D = 4m$



2. YARIM TAMSAYI AĞIRLIKLIL HECKE EIGENFORMLARIN SİSTEMATİK SEÇİMİ

Bu bölümde çalışmadaki amaca ulaşabilmek adına gerekli olan yeterli sayıdaki (en az 10^7) Fourier katsayısı kolaylıkla hesaplanabilecek yarım tamsayı ağırlıklı Hecke eigenformların sistematik seçimi konusu ele alınacaktır.

Teorem 2.1.1. (Miyake, 2006: 114) $\Gamma_0(4)$ üzerinde tanımlı $k + 1/2$ ağırlıklı Hecke eigenformlar yine aynı ağırlıklı modüler formların sonlu boyutlu vektör uzayının bir alt uzayıdır.

$k + 1/2$ ağırlıklı modüler form uzaylarının tabanları MAGMA (Bosma vd., 1997) Cebir Programı'nda veya Pari/GP'de (The Pari Group, 2019) kolaylıkla hesaplanabilmektedir.

Çalışmanın amaçları doğrultusunda yukarıda bahsedilen özellikteki Hecke eigenformların sistematik seçiminde Rankin-Cohen parantezi etkin olarak kullanılmıştır. İlk olarak bu diferansiyel operatörlerin tanımı verilsin.

Tanım 2.1.2. (Cohen ve Strömberg, 2017: 161) f ve g sırasıyla k ve h ağırlıklı modüler formlar olsun. $z \in \mathbb{H}$ ve $\frac{df}{dz} = \frac{1}{2\pi i} f'(z)$ olmak üzere,

$$[f, g]_n := \sum_{r+s=n} (-1)^r \binom{k+n-1}{r} \binom{h+n-1}{s} \frac{d^r f}{dz^r} \frac{d^s g}{dz^s}$$

şeklinde tanımlanan operatöre f ve g 'nin n -inci Rankin-Cohen parantezi adı verilir ve $[f, g]_n$ biçiminde gösterilir

Teorem 2.1.3. (Zagier, 1994) $f \in M_k(\Gamma)$ ve $g \in M_h(\Gamma)$ olsun. Bu takdirde $[f, g]_n \in M_{k+h+2n}(\Gamma)$ 'dir.

Dikkat edilirse bu parantez yardımıyla k_1 ve k_2 ağırlıklı modüler formlara Rankin-Cohen parantezi bir kez uygulandığında k_1+k_2+2 ağırlıklı yeni bir modüler form elde edilir. Detaylı örnekler için (Kohnen ve Zagier, 1981) incelenebilir.

İlk olarak Rankin tarafından tanımlanan bu operatör Cohen tarafından detaylı bir şekilde çalışılmış ve Zagier tarafından Rankin-Cohen parantezi olarak isimlendirilmiştir. Ardından (Zagier, 1994)'te Rankin-Cohen parantezi için soyut bir yaklaşım ile Rankin-Cohen cebirini tanımlamıştır. Aynı çalışmada elde edilen yeni modüler formların arasında bazı Hecke eigenformları da mevcuttur. (Kohnen ve Zagier, 1981: 177)'deki $\delta(z)$ örneği aritmetik fonksiyonlar cinsinden ifade edilmiş $13/2$ ağırlıklı Hecke eigenform örneğidir ve MAGMA cebir programı ile en az $2 \cdot 10^8$ Fourier katsayısı kolaylıkla hesaplanabilir. Diğer yandan literatürde çalışmalarımızdan önce farklı k tamsayıları için Fourier katsayıları kolaylıkla

hesaplanabilecek Hecke eigenformların sistematik seçimi bir açık problem idi. Bu problem (Kohnen ve Zagier, 1981: 177) çalışmasından ilham alınarak bu çalışmada çözüme kavuşturulmuştur.

Burada büyük ağırlıktaki örneklerin sistematik seçimi ile Kohnen Plus Space (Detaylar için (Kohnen, 1980)'e bakılabilir.) $k = 6, 8, 9, 10, 11, 13$ durumlarına karşılık Kohnen Plus Space'in boyutu 1 olacağından $\Gamma_0(4)$ için $k + \frac{1}{2}$ ağırlıklı cusp formların tekliği (Shimura karşılık gelmesi altında Γ için $2k$ ağırlıklı normalleştirilmiş cusp formların tekliği ile ilişkilendirilerek) elde edilebilir. Yani başka bir deyişle bu durumda bu uzaydaki her bir form bir Hecke eigenform olacaktır. Burada Rankin-Cohen parantezi etkili bir metottur. Öncelikle daha genel durumu göz önüne alınsın. Rankin-Cohen parantezinin Eisenstein serileri ve teta serileri ile bunların türevlerine ardışık olarak uygulanması ile Kohnen Plus Space'in boyutunun 1'den büyük olduğu örneğin $k = 7$ durumu için de basit bir formül elde edilebilir. Bunu yapmak için ağırlığa bağlı olarak Eisenstein serileri ve teta serileri ile bunların türevleri için sonlu sayıda ihtimal mevcuttur. Pari/GP'de yer alan ve Sturm sınırı kullanılarak Prof. Dr. Henri Cohen tarafından bu çalışma için yazılan kod yardımıyla Hecke eigenform olabilecek aday formüllerin kısa bir listesi oluşur. Hecke eigenform tanımı gereği ortaya çıkan lineer sistem çözülerek istenilen sonuca ulaşılır. Daha sonra MAGMA'da Fourier katsayıları hesaplanır.

$k = 1$ durumunda Rankin-Cohen parantezi kullanılamadığından bu durumda Hecke eigenform elde edilebilmesi için farklı bir metot kullanılabilir. Detaylar için (İnam, 2012) kaynağında Hecke eigenformlara karşılık kuadratik formların teta serileri yardımıyla elde edilen $3/2$ ağırlıklı Hecke eigenformlara ait çeşitli örnekler yer almaktadır.

Rankin-Cohen parantezi tekniğinin daha iyi anlaşılabilmesi için ilk olarak tıpkı yukarıda bahsedilen δ fonksiyonu gibi açık şekilde formülü verilen iki Hecke eigenform örneği verilecektir.

Teorem 2.1.4. (İnam vd., 2020: 776)

$$f_1 = -\frac{84}{2\pi i} (3G_6(4z)\theta'(z) - G_6'(4z)\theta(z)) \in S_{\frac{17}{2}}^+(\Gamma_0(4))$$

bir Hecke eigenformdur.

İspat. $[G_6(4z), \theta]_1$ Rankin-Cohen parantezini hesaplayalım. Tanım 2.1.2. gereği

$$g_1 := 6G_6(4z)\theta'(z) - \frac{1}{2}G_6'(4z)\theta(z) = -\frac{1}{42}q - \frac{44}{21}q^4 + 8q^5 - 88q^8 + \dots \quad (2.1)$$

dir.

q -lu terimin katsayısı 1 olacak şekilde normalleştirme yapılırsa $f_1 = -42g_1$ elde edilir. Öte yandan $\dim(S_{21/2}(\Gamma_0(4))) = 3$ olup

$$\begin{aligned} u_1 &:= q + 88q^4 - 336q^5 + 3696q^8 - 5535q^9 + O(q^{12}) \\ u_2 &:= q^2 + 4q^4 - 56q^5 + 126q^6 - 224q^7 + 488q^8 - 576q^9 + O(q^{12}) \\ u_3 &:= q^3 - 6q^4 + 20q^5 - 56q^6 + 124q^7 - 220q^8 + 352q^9 + O(q^{12}) \end{aligned}$$

olmak üzere $\{u_1, u_2, u_3\}$ $S_{17/2}(\Gamma_0(4))$ 'nin bir tabanıdır. Bu uzay için Sturm sınırı 4 olup (2.1) eşitliğine dikkat edilirse f_1 'in $n \equiv 2, 3 \pmod{4}$ özelliğindeki Fourier katsayılarının sıfır olması nedeniyle $f_1 \in S_{17/2}^+$ olur. Son olarak $S_{17/2}^+(\Gamma_0(4))$ 'te bir tek Hecke eigenform mevcut olup bu formun u_1 yani f_1 formu olduğu kolayca görülebilir, bu da ispatı bitirir.

Teorem 2.1.5. (İnam vd., 2020: 777)

$$f_2 := \frac{30}{2\pi i} \left(8G_8(4z)\theta'(z) - \frac{1}{2}G_8'(4z)\theta(z) \right) \in S_{21/2}^+(\Gamma_0(4))$$

bir Hecke eigenformdur.

İspat.

$[G_8(4z), \theta(z)]_1$ Rankin-Cohen parantezini uygulayalım. Tanım 2.1.2. gereği

$$\begin{aligned} g_2 &:= [G_8(4z), \theta(z)]_1 = 8G_8(4z)\theta'(z) - \frac{1}{2}G_8'(4z)\theta(z) \\ &= \frac{1}{30}q - \frac{56}{30}q^4 + 12q^5 - 456q^8 + \left(\frac{18}{60} + 1032\right)q^9 + \dots \end{aligned} \quad (2.2)$$

dir. q -lu terimin katsayısı 1 olacak şekilde normalleştirme yapılırsa $f_2 = 30g_2$ elde edilir. Öte yandan $\dim(S_{21/2}(\Gamma_0(4))) = 4$ olup

$$\begin{aligned} u_1 &:= q + 24q^5 + 1344q^6 - 4480q^7 - 1920q^8 + 4089q^9 + O(q^{12}) \\ u_2 &:= q^2 + 112q^5 - 426q^6 + 672q^7 + 2176q^8 + 6144q^9 + O(q^{12}) \\ u_3 &:= q^3 + 8q^5 - 56q^6 + 148q^7 - 448q^8 + 1024q^9 + O(q^{12}) \\ u_4 &:= q^4 - 6q^5 + 24q^6 - 80q^7 + 210q^8 - 480q^9 + O(q^{12}) \end{aligned}$$

olmak üzere $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ $S_{21/2}^+$ 'nin bir tabanıdır.

Bu uzay için Sturm sınırı 5 olup (2.2) eşitliğine dikkat edilirse $f_2 = u_1 - 56u_4$ olup $f_2 \in S_{21/2}^+(\Gamma_0(4))$ olduğu açıktır. Kohnen Plus Space tanımı gereği f_2 'nin $n \equiv 2, 3 \pmod{4}$ özelliğindeki Fourier katsayılarının sıfır olması nedeniyle $f_2 \in S_{21/2}^+$ olur.

Son olarak $S_{21/2}^+(\Gamma_0(4))$ 'te bir tek Hecke eigenform mevcut olup bu formun $f_2 = u_1 - 56u_4$ formu olduğu kolayca görülebilir, bu da ispatı bitirir.



3. SATO-TATE KONJEKTÜRÜ

3.1. Giriş

Sato ve Tate birbirlerinden bağımsız olarak 1960'ta aşağıdaki savı ortaya atmışlardır:

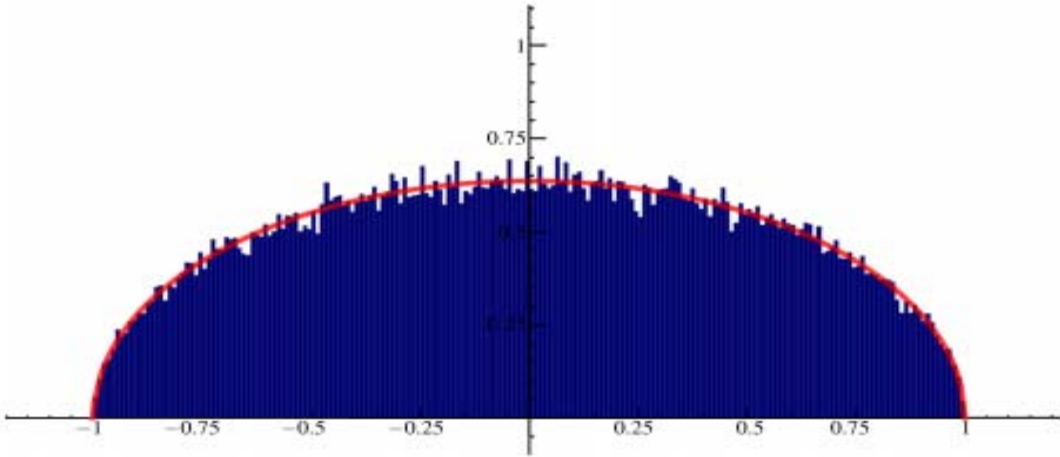
$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a(n)q^n$$

fonksiyonu “kompleks çarpıma sahip olmayan” k ağırlıklı cuspidal Hecke eigenform olsun.

$$a(p) = 2p^{\frac{k-1}{2}} \cos(\phi_p)$$

sağlayacak şekilde 0 ile π arasında öyle bir ϕ_p Frobenius açısı vardır. Sato-Tate Konjektürü'ne göre bu açıların olasılık dağılım fonksiyonu $\frac{2}{\pi} \sin^2(\phi)$ ile verilir. Aslında Sato-Tate konjektürü bu açıların $\frac{2}{\pi} \sin^2(\phi)$ fonksiyonuna göre dağılım gösterdiğini ve böylelikle eş dağılımlı olduğunu söyler. Böylece $[-1,1]$ aralığı üzerinde Sato-Tate ölçümü adı verilen ve $\frac{2}{\pi} \sqrt{1-t^2}$ yoğunluk fonksiyonuyla ifade edilen ölçüm bulunur. “Kompleks çarpıma sahip” modüler formlar için sonuç (Hecke, 1920)'de ispatlanmıştır, teoremin tam versiyonu ve ispatı için (Arias-de-Reyna vd., 2015: 15), Teorem 3.2.3'e bakılabilir.

Sato-Tate Konjektürü 2011 yılında (Barnet-Lamb vd., 2011) ispatlanmıştır. Bu konjektür, son yıllarda matematikte çözölen en önemli problemlerden birisi olup, sonuçları yaygın olarak çalışılmaya devam edilmektedir.



Şekil 3.1. $n = 10^6$ için Δ 'nın normalize edilmiş katsayılarının histogramı

Kaynak: (Mazur, 2018:193)

Shimura Karşılık Gelmesi sadece tamkare indisli katsayıları içerdiğinden ileride tanıtılacak olan Bruinier-Kohnen İşaret Eşdağılım Konjektürü'nün tamamen çözülmesi için kullanılabilecek literatürde herhangi bir sonuç bulunmamaktadır. Bu problemin çözümü ancak ve ancak yarım tamsayı ağırlıklı modüler formlar için verilecek Sato-Tate Teoremi benzeri bir sonuçla mümkündür. Bu tarz bir sonuç ise bu çalışmanın temel amacıdır.

Teorem 3.1.1. (Waldspurger, 1981) f , $2k$ ağırlıklı içinde tamkare bulunmayan tek sayı N seviyeli cuspidal Hecke eigenform olsun. Bu takdirde Shimura yükseltmesi f olacak şekilde öyle bir $k + 1/2$ ağırlıklı $g = \sum c(n)q^n$ yarım tamsayı ağırlıklı modüler form vardır ki tüm temel diskriminantlar için

$$c_{|d|}^2 = \chi_g |D|^{k-\frac{1}{2}} L(f, D, k)$$

olacak şekilde bir χ sabiti vardır.

(Conrey vd., 2006: 72)'de rastgele matrisler teorisi kullanılarak $3/2$ yarım tamsayı ağırlıklı modüler formlar (eliptik eğriler ile ilgili) için bazı sonuçlar ve konjektürler (özellikle Conjecture 4.2) verilmiştir. Buradaki sonuçlar Waldspurger'in yukarıda açıklanan L -fonksiyonlarının özel değerleriyle Fourier katsayılarının ilişkisine dayanır. Bu konjektürler yarım tamsayı ağırlıklı modüler formların Fourier katsayılarının karelerinin belli bir normalizasyon ile normal dağılacığını önerir. Ancak katsayıların işaret değişimleri ile ilgili bir sonuç verilmemiştir. Diğer bir yandan Bruinier-Kohnen işaret eşdağılım konjektürü sıfırdan farklı katsayıların yarısının negatif yarısının pozitif olacağını iddia ederek kısmen de olsa konjektürel olarak bu boşluğu doldurur.

(Thorner, 2014)'te Sato-Tate Teoremi'ndeki istatistiksel ifade için f 'nin L -fonksiyonlarının simetrik kuvvetlerinin otomorfik olduğu kabul edilerek oldukça etkili ve kolay hesaplanabilir bir hata terimi verilmiştir.

(Thorner, 2020)'de Sato-Tate konjektürünün efektif versiyonu tamsayı ağırlıklı modüler formlar için verilmiştir. Burada bu konjektür için literatürde bulunan ve (Thorner, 2014)'ü de kapsayan tüm hata terimlerini geliştirerek yeni bir hata terimi elde edilmiştir. Ancak Shimura yükseltmesi yardımı ile bu hata teriminin yarım tamsayı ağırlıklı modüler formlar için elde edilmesi açık bir problemidir.

3.2. Sato-Tate Uygulaması: Bruinier-Kohnen İşaret Eşdağılım Konjektürü

Bu bölümde Sato-Tate Konjektürü etkili olarak kullanılarak modüler formlardaki bir problemin nasıl çözülebileceği görülecektir. Öncelikle problem verilsin.

Konjektür 3.2.1. (Bruinier ve Kohnen, 2008: 63), (Kohnen vd., 2013: 30)

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) q^n \in S_k(\Gamma_0(N))$$

reel Fourier katsayılarına sahip $k = l + \frac{1}{2}$ ağırlıklı cuspidal Hecke eigenform olsun.

$l = 1$ durumunda f 'nin unary teta serisine ortogonal olduğu kabul edilsin. Bu takdirde

$\{n \in \mathbb{N} : a(n) > 0\}$ ve $\{n \in \mathbb{N} : a(n) < 0\}$ kümeleri aynı doğal yoğunluğa sahiptir, tam olarak

$$\{n \in \mathbb{N} : a(n) \neq 0\}$$

kümesinin doğal yoğunluğunun yarısına eşittir.

$k \geq 2$ ve $4|N$ tamsayılar olmak üzere sıfırdan farklı $k + \frac{1}{2}$ ağırlıklı reel Fourier katsayılarına sahip

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) q^n \in S_{k+\frac{1}{2}}(\Gamma_0(N))$$

$p \nmid N$ asalları için T_{p^2} operatörleri için bir cuspidal Hecke eigenform olsun. Kompleks çarpıma sahip olmayan

$$F_t = \sum_{n=1}^{\infty} A_t(n) q^n \in S_k\left(\Gamma_0\left(\frac{N}{2}\right)\right)$$

$2k$ ağırlıklı $p \nmid N$ asalları için T_p operatörleri için Hecke eigenformu Shimura yükseltme dönüşümü ile f 'ye karşılık gelir öyle ki sabit ve tamkare olmayan t 'ler için $a(t) \neq 0$ olur.

Tanım 3.2.2. $\mathbb{P}$, tüm asalların kümesi olmak üzere $S \subseteq \mathbb{P}$ olsun. Eğer

$$\pi(x) = \#\{p \leq x | p \in \mathbb{P}\}$$

asalların sayısı ve

$$\pi_S(x) := \#\{p \leq x | p \in S\}$$

olmak üzere $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi_S(x)}{\pi(x)}$ limiti var ve $d(S)$ 'ye eşit ise $d(S)$ 'ye doğal yoğunluk adı verilir.

Eğer $\lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{\sum_{p \in S} \frac{1}{p^z}}{\log\left(\frac{1}{z-1}\right)}$ limiti var ve $\delta(S)$ 'ye eşit ise S kümesi $\delta(S)$ Dirichlet yoğunluğuna sahiptir denir.

Eğer S kümesi bir doğal yoğunluğa sahip ise o zaman S bir Dirichlet yoğunluğa da sahiptir ve bu yoğunluklar çakışıktır. Eğer $Re(z) \geq 1$ üzerinde $\sum_{p \in S} \frac{1}{p^z} = \delta(S) \log\left(\frac{1}{z-1}\right) + g(z)$ için bir $g(z)$ holomorf fonksiyonu var ise S 'ye regülerdir denir. Dirichlet yoğunluğu 1 olan $\mathbb{P}$ kümesi regülerdir.

Lemma 3.2.3. (İnam ve Wiese, 2013: 333)

- i. $S, \sum_{p \in S} \frac{1}{p}$ sonlu bir değere yakınsayacak şekilde asalların herhangi bir kümesi olsun. O zaman S kümesinin Dirichlet yoğunluğu 0'a eşittir.
- ii. S asalların bir regüler kümesi olsun. O zaman S kümesinin Dirichlet yoğunluğu 0 olması için gerek ve yeter koşul $\sum_{p \in S} \frac{1}{p}$ serisinin sonlu bir değere yakınsamasıdır.
- iii. S_1, S_2 asalların iki regüler kümesi ve $\delta(S_1) = \delta(S_2)$ olsun. O zaman $\sum_{p \in S_1} \frac{1}{p^z} - \sum_{p \in S_2} \frac{1}{p^z}$ fonksiyonu $Re(z) \geq 1$ üzerinde analitiktir.

Teorem 3.2.4. (İnam ve Wiese, 2013: 333) $S \subseteq \mathbb{P}$ alt kümesi $d(S)$ doğal yoğunluğa sahip olsun.

$$E(x) := \frac{\pi_S(x)}{\pi(x)} - d(S)$$

bir hata fonksiyonu olsun. Yeterince büyük tüm x 'ler ve $\alpha > 0, C > 0$ için

$$|E(x)| \leq Cx^{-\alpha}$$

dır. Yani S asalların bir regüler kümesidir.

İspat. $D_S(z) := \sum_{p \in S} \frac{1}{p^z}$ ve $D(z) := \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p^z}$ notasyonlarını kullanalım. $d := d(S)$ ile kısaltılsın ve $g(x) := E(x)\pi(x)$ ve $f(z) := \sum_{n=2}^{\infty} g(n) \left(\frac{1}{n^z} - \frac{1}{(n+1)^z} \right)$ yi yerine konursa, $g(x)$ sadece tamsayılara zıplayan bir basamak fonksiyonu ve

$$f(z) = z \cdot \sum_{n=2}^{\infty} g(n) \int_n^{n+1} \frac{1}{x^{z+1}} dx = z \cdot \int_2^{\infty} \frac{g(x)}{x^{z+1}} dx$$

olur. (Rosser, 1941)'den iyi bilinmektedir ki $x > 55$ için $\pi(x) < \frac{x}{\log(x)-4}$ dir. O halde

$|g(x)| \leq C \cdot \pi(x) \cdot x^{-\alpha} \leq C \cdot \frac{x^{1-\alpha}}{\log(x)-4}$ elde edilir. Böylece $Re(z) > 1 - \frac{\alpha}{2}$ için

$$\left| \int_{55}^{\infty} \frac{g(x)}{x^{z+1}} dx \right| \leq \int_{55}^{\infty} \frac{|g(x)|}{x^{Re(z)+1}} dx \leq C \cdot \int_{55}^{\infty} \frac{1}{x^{1+\frac{\alpha}{2}}} dx$$

olur. Son integral yakınsak olduğundan $f(z)$, $Re(z) \geq 1$ üzerinde bir analitik fonksiyon olduğu sonucuna ulaşılır. $Re(z) > 1$ için

$$D_s(z) = \sum_{n=2}^{\infty} (d\pi(n) + g(n)) \left(\frac{1}{n^z} - \frac{1}{(n+1)^z} \right) = dD(z) + f(z)$$

olduğundan $\mathbb{P}$ yoğunluğu 1'dir ve bu nedenle regülerdir. Son olarak kümeler üzerinde bir yoğunluk notasyonu Dirichlet notasyonu olarak isimlendirilmişti. $A \subset \mathbb{N}$ alt kümesi eğer

$$\lim_{z \rightarrow 1^+} (z-1) \cdot \sum_{\substack{n=1 \\ n \in A}}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

limiti var ve $\delta(A)$ 'ya eşit ise $\delta(A)$ Dedekind-Dirichlet yoğunluğa sahiptir olarak isimlendirilir. Eğer $A \subseteq \mathbb{N}$ bir doğal yoğunluğa sahip ise o zaman Dedekind-Dirichlet yoğunluğa da sahiptir ve ikisi de aynıdır.

Hatırlanacağı üzere f 'nin Fourier katsayıları ve bu katsayıların F_t Shimura yükseltmesi arasında bir ilişki vardır ve bu ilişki

$$A_t(n) := \sum_{d|n} \chi_{t,N}(d) d^{k-1} a\left(\frac{tn^2}{d^2}\right) \quad (3.1)$$

ile ifade edilir. Burada $\chi_{t,N}$ karakteri gösterir ve $\chi_{t,N}(d) := \chi(d) \left(\frac{(-1)^{kN^2t}}{d} \right)$ dir. Tüm $p \nmid N$ asalları için T_{p^2} Hecke operatörü için f bir Hecke eigenform ve T_p Hecke operatörü için de F_t bir eigenform olarak kabul edilir. Aslında bu durumda F , t 'den bağımsız normalleştirilmiş Hecke eigenformu için $F_t = a(t)F$ dir. Dahası yarım tamsayı ağırlıklı modüler formların Fourier katsayıları için Euler çarpımından $(m, n) = 1$ için

$$a(tm^2)a(n^2) = a(t)a(tm^2n^2)$$

çarpımsal ilişkisi vardır. Dikkat edilirse eğer F_t reel Fourier katsayılarına sahip ise f de reel Fourier katsayılarına sahiptir. Hatta F_t 'nin katsayıları $\left| \frac{A_t(p)}{a(t)} \right| \leq 2p^{k-\frac{1}{2}}$ olarak ifade edilebilen Ramanujan-Petersson (Ramanujan, 1916), (Petersson, 1930) ve (Deligne, 1974) bağıntısını sağlar. Böylece bu katsayılar

$$B_t(p) := \frac{A_t(p)}{2a(t)p^{k-\frac{1}{2}}} \in [-1, 1]$$

ifadesi ile normalleştirilebilir. $[-1,1]$ aralığı üzerinde olasılık ölçüm fonksiyonu olan μ Sato-Tate ölçümü $\frac{2}{\pi}\sqrt{1-t^2}dt$ ile verilir. (Barnet-Lamb vd., 2011: 30)'de Teorem B'nin 3. Durum: Özellikle $F = \frac{F_t}{a(t)}$ 'yi sağlayan $\zeta = 1$ ile $\Gamma_0(N)$ için önemli Sato-Tate teoremi verilir.

Teorem 3.2.5. (Barnet-Lamb vd., 2011: 30) $k \geq 1$ ve $F = \sum_{n \geq 1} A(n)q^n$, $\Gamma_0(N)$ için $2k$ -ağırlıklı kompleks çarpıma sahip olmayan normalleştirilmiş cuspidal Hecke eigenform olsun. O zaman $[-1,1]$ aralığında $p \nmid N$ asalları için

$$B(p) = \frac{A(p)}{2p^{k-\frac{1}{2}}}$$

sayıları μ dağılımındadır.

Sonuç 3.2.6. (İnam ve Wiese, 2013: 335) $[a, b] \subseteq [-1,1]$ alt aralığı ve

$$S_{[a,b]} := p\{ asal \mid p \nmid N, B_t(p) \in [a, b] \} \quad (3.2)$$

olsun. O zaman $S_{[a,b]}$,

$$\frac{2}{\pi} \int_a^b \sqrt{1-t^2} dt$$

integraline eşit olan doğal yoğunluğa sahiptir.

Teorem 3.2.7. (İnam ve Wiese, 2013: 335) F_t kompleks çarpıma sahip olmasın. $\mathbb{P}_{>0} := \{p \in \mathbb{P} \mid a(tp^2) > 0\}$ ve benzer şekilde $\mathbb{P}_{<0}$, $\mathbb{P}_{\geq 0}$, $\mathbb{P}_{\leq 0}$ ve $\mathbb{P}_{=0}$ asalların kümesi tanımlanabilir. $\mathbb{P}_{>0}$, $\mathbb{P}_{<0}$, $\mathbb{P}_{\geq 0}$, $\mathbb{P}_{\leq 0}$ kümeleri $\frac{1}{2}$ doğal yoğunluğa sahiptir ve $\mathbb{P}_{=0}$ kümesi 0 doğal yoğunluğuna sahiptir.

İspat. $\pi_{>0} := \#\{p \leq x \mid p \in \mathbb{P}_{>0}\}$ şeklinde tanımlansın ve benzer şekilde $\pi_{<0}(x)$, $\pi_{\geq 0}(x)$, $\pi_{\leq 0}(x)$ ve $\pi_{=0}(x)$ kümeleri de benzer şekilde tanımlanabilir. f 'nin $a(t)$ ile bölünmesi teoremin ifadesini değiştirmeyeceği için $a(t) = 1$ olarak kabul edilebilir. Bu durumda F_t normalleştirilmiş eigenform olur. (3.1) denklemi p asal olmak üzere $n = p$ alınarak özelleştirilirse

$$a(tp^2) = A_t(p) - \chi_{t,N}(p)p^{k-1}$$

olur ve aşağıdaki önerme elde edilir:

$$a(tp^2) > 0 \Leftrightarrow B_t(p) > \frac{\chi_{t,N}(p)}{2\sqrt{p}}$$

Burada çoğu asal için $|A_t(p)|$ ifadesi $\chi_{t,N}(p)p^{k-1}$ 'den daha büyük olduğunu göstermek için Sato-Tate kullanılmıştır. $\varepsilon > 0$ olsun. Tüm $p > \frac{1}{4\varepsilon^2}$ asalları için $\left| \frac{\chi_{t,N}(p)}{2\sqrt{p}} \right| = \frac{1}{2\sqrt{p}} < \varepsilon$ olduğundan

$$\pi_{>0}(x) + \pi\left(\frac{1}{4\varepsilon^2}\right) \geq \#\{p \leq x \text{ asal} | B_t(p) > \varepsilon\}$$

elde edilir. Sonuç 3.2.6.'dan $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\#\{p \leq x \text{ asal} | B_t(p) > \varepsilon\}}{\pi(x)} = \mu([\varepsilon, 1])$ elde edilir. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi_{>0}(x)}{\pi(x)} \geq \mu([\varepsilon, 1])$$

olduğundan

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi_{>0}(x)}{\pi(x)} \geq \mu([0, 1]) = \frac{1}{2}$$

sonucuna ulaşılır. Benzer şekilde $\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi_{\leq 0}(x)}{\pi(x)} \geq \mu([0, 1]) = \frac{1}{2}$ bulunur. $\pi_{\leq 0}(x) = \pi(x) - \pi_{>0}(x)$ olduğu kullanılarak $\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi_{>0}(x)}{\pi(x)} \geq \mu([0, 1]) = \frac{1}{2}$ görülür. Böylece $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi_{>0}(x)}{\pi(x)}$ limiti vardır ve $\frac{1}{2}$ 'ye eşittir. $\mathbb{P}_{<0}(x), \mathbb{P}_{\geq 0}(x), \mathbb{P}_{\leq 0}(x)$ argümanları da tamamen aynıdır ve $\mathbb{P}_{=0}$ için aşağıdaki sonuca ulaşılır.

Teorem 3.2.8. (İnam ve Wiese, 2013: 336) $C > 0$ ve $\alpha > 0$ vardır öyle ki tüm $[a, b] \subseteq [-1, 1]$

$$\text{alt aralıklar ve yeterince büyük tüm } x\text{'ler için } \left| \frac{\#\left\{p \leq x \text{ asal} \left| \frac{A_t(p)}{a(t)2p^{k-\frac{1}{2}}} \right| \right\}}{\pi(x)} - \mu([a, b]) \right| \leq \frac{C}{x^\alpha}$$

olduğu kabul edilsin. O zaman $\mathbb{P}_{>0}, \mathbb{P}_{<0}, \mathbb{P}_{\geq 0}, \mathbb{P}_{\leq 0}$ ve $\mathbb{P}_{=0}$ asalların regüler kümesidir.

Uyarı 3.2.9. $[a, b] \subseteq [-1, 1]$ bir alt aralık olsun. $\left\{p \left| \frac{a(tp^2)}{2a(t)p^{k-\frac{1}{2}}} \in [a, b] \right.\right\}$ kümesinin yoğunluğu $\mu([a, b])$ 'ye eşittir.

Teorem 3.2.10. (İnam ve Wiese, 2013: 337) Teorem 3.2.8.'deki varsayımları aynen alınsın ve $a(t) > 0$ olsun. Bir çarpımsal fonksiyon aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$s(n) = \begin{cases} 1, & a(tn^2) > 0 \text{ ise} \\ -1, & a(tn^2) < 0 \text{ ise} \\ 0, & a(tn^2) = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

$S(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s(n)}{n^z}$, $s(n)$ 'in Dirichlet serisi olsun. O zaman $\text{Re}(z) \geq 1$ için $S(z)$ holomorftir.

Sonuç 3.2.11. (İnam ve Wiese, 2013: 337) $\{n \in \mathbb{N} \mid a(tn^2) > 0\}$ ve $\{n \in \mathbb{N} : a(tn^2) < 0\}$ kümeleri eşit ve pozitif Dedekind-Dirichlet yoğunluklarına sahiptir, yani

$$\{n \in \mathbb{N} : a(tn^2) \neq 0\}$$

kümesinin Dedekind-Dirichlet yoğunluğunun yarısına karşılık gelir.

Böylece Fourier katsayılarının özel katsayı aileleri üzerinde Bruinier-Kohnen işaret eşdağılım konjektürü ispatlanmış olur. (İnam ve Wiese, 2013)’den alınarak elde edilen bu teknik ile yazılmış problemin çeşitli varyantları için literatürde birçok makale bulunmaktadır. Burada Sato-Tate Konjektürü’nün etkili olarak nasıl kullanılabileceği verilmesi amaçlandığından literatürde bulunan diğer sonuçlardan bahsedilmemiştir.



4. YARIM TAMSAYI AĞIRLIKLIL MODÜLER FORMLARIN KATSAYILARININ DAĞILIMI VE RAMANUJAN-PETERSSON KONJEKTÜRÜ

Bu bölümde çalışmanın temel amacını oluşturan yarım tamsayı ağırlıklı cuspidal Hecke eigenformların Fourier katsayılarının sistematik dağılımının Sato-Tate benzeri bir dağılım olup olmadığı araştırma sorusu üzerinde durulacaktır. Bunu yapabilmek için önceki bölümlerde verilen yöntemle elde edilen ve üzerinde istatistiksel çalışma yapmaya müsait çok fazla sayıda Fourier katsayıları hesaplanarak yarım tamsayı ağırlıklı Hecke eigenformlar elde edilmiştir. Ardından Ramanujan-Petersson Konjektürü yardımıyla normalleştirilmiş Fourier katsayılarının dağılımı incelenmiştir. Elde edilen veriler yardımıyla da Bruinier-Kohnen İşaret Eşdağılım Konjektürü literatürde olabilecek en geniş hesaplama yapılarak bu konjektür doğrulanmıştır. Diğer yandan Bruinier-Kohnen Konjektürü işaret ve mutlak değerden bağımsız olarak ifade edilerek geliştirilmiştir. Bu bölümde detaylı olarak bu başlıklar ele alınacaktır.

4.1. Katsayıların Normalleştirilmesi ve Ramanujan-Petersson Konjektürü

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)q^n$$

k ağırlıklı bir cuspidal Hecke eigenform olsun. Bu durumda (Kohnen, 1994: 333) gereği Ramanujan-Petersson Konjektürü herhangi bir $\varepsilon > 0$ için

$$a(n) = O\left(n^{\frac{k-1}{2}+\varepsilon}\right)$$

olduğunu iddia eder. Deligne tarafından 1974'te yapılan Weil Konjektürleri'nin meşhur ispatı gereği tamsayı ağırlıklı modüler formlar için $\varepsilon = 0$ için Ramanujan-Petersson Konjektürü ispat edilmiştir. Bu konjektürden ilham alınarak bu çalışmada normalleştirilmiş katsayılar

$$b(n) := \frac{a(n)}{n^{k-\frac{1}{2}}}$$

olarak tanımlanmıştır. Çalışma tarihi itibarıyla literatürde yarım tamsayı ağırlıklar için Ramanujan-Petersson Konjektürü için bir özel durum bile ispatlanmamış gözükmektedir. Bununla beraber, (Gun ve Kohnen, 2019) çalışmasında yarım tamsayı ağırlıklı modüler formlar için $\varepsilon = 0$ olmasında konjektürün doğru olmayacağını yani ε 'un 0 alınamayacağını ispatlamışlardır. Bu sonucu elde etmek için Shimura yükseltmesinden gelen içinde tamkare çarpan bulunan indislerin bir dizisini kullanarak bir ters örnek oluşturmuşlardır. Gun,

Kohnen ve Soundararajan'ın 2020'deki güncel makalelerinde (Farmer vd., 2007: 224)'den elde edilen ve Ramanujan-Petersson Konjektürü'nden daha güçlü olan

$$|b(|n|)| \leq \exp(C\sqrt{\log|n|\log\log|n|})$$

sınırının yarım tamsayı ağırlıklı modüler formlar için "çok büyük olasılıkla" doğru olduğunu önermişlerdir.

4.2. Bilinen Sonuçlar ve Yarım Tamsayı Ağırlıklı Modüler Formlar İçin Dağılımlara Yönelik Konjektürler

$k = l + \frac{1}{2}$ yarım tamsayı ağırlık için (Waldspurger, 1981: 378) Teorem 1'de ve (Kohnen ve Zagier, 1981: 177) Teorem 1'de verilen sonuçlara göre Fourier katsayılarının *kareleri* ile L -fonksiyonlarının merkezi değerleri arasında çok önemli bir ilişki vardır. Daha kesin olarak, (Shimura, 1973) ve (Niwa, 1974)'e göre Shimura yükseltmesi ile t , içinde tamkare çarpan bulunmayan doğal sayı ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere tn^2 ile indekslenen Fourier katsayıları ile $2l$ ağırlıklı g modüler formunun n -inci Fourier katsayısını ilişkilendirir. Bu takdirde $b(|n|)^2$ normalleştirilmiş Fourier katsayısı ile g 'nin n 'ye karşılık gelen ilkel ikinci derece χ_n karakteri yardımıyla twist edilmiş Hecke L -fonksiyonu olmak üzere $|n| = (-1)^n$ özelliğindeki temel diskriminantlar için $L(g, \chi_n, s)$ değeri orantılıdır.

Bu ilişki $b(|n|)$ mutlak değeri üzerindeki birçok sonuca taban oluşturmuştur. Diğer yandan bu ilişki aynı zamanda n temel diskriminantları için $b(|n|)^2$ katsayılarının dağılımı için konjektürel bir tanımlamaya yol açmıştır. Bu bağlamda, 21. yüzyılın matematikteki çığır açan gelişmelerden birisi olduğu kabul edilen (Barnet-Lamb vd., 2011)'de ispatı verilen meşhur Sato-Tate Konjektürü tamsayı ağırlıklı normalleştirilmiş Fourier katsayılarının dağılımını anlatan bir sonuçtur.

(Conrey vd., 2006: 72)'da eliptik eğriler ile eşleşen $3/2$ ağırlıklı modüler formların katsayıların dağılımı üzerine bir konjektür ortaya atmışlardır. Bu çalışmadaki Konjektür 4.2 şunu söyler: bir E eliptik eğrisi ile eşleşen $3/2$ ağırlıklı bir modüler form için

$$\alpha \leq \kappa^\mp \sqrt{\log|n|} (b(|n|))^{\frac{1}{2\sqrt{\log\log|n|}}} \leq \beta$$

özelliğindeki n temel diskriminantlarının doğal yoğunluğu

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{t} \exp\left(-\frac{1}{2}(\log t)^2\right) dt$$

olup, burada $0 \leq \alpha \leq \beta$ ve $\kappa^\mp$ bir pozitif sabittir. Benzer konjektürlerin daha yüksek ağırlıklar için de yapıldığını Stanford Üniversitesi öğretim üyesi Prof. Dr. Kannan Soundararajan yazışmada tarafımıza bildirilmiştir. Üstelik, dikkat edilirse (Conrey vd., 2006: 72)'nin Konjektür 4.2'si normalleştirilmiş $b(|n|)$ katsayılarının sıfıra yaklaştığını ve $|b(|n|)| < \varepsilon$ özelliğindeki $d \in S^\mp$ sayılarının kümesinin doğal yoğunluğunun 1 olmasını da gerektirir. Bu tahmin, (Gun vd., 2020)'de referans verildiği gibi (Radziwill ve Soundararajan, 2015: 1030)'da yer alan bir teoremden 4 seviyeli modüler formlar için ispatlanmıştır:

“Her bir $\varepsilon > 0$ için,

$$|b(|n|)| \leq C \cdot \log(|n|)^{-\frac{1}{4}+\varepsilon} \quad (4.1)$$

eşitsizliğini sağlayan $o(x)$ tane $x \leq (-1)^l n \leq 2x$ özelliğinde n temel diskriminantın en az bir $C = C(\varepsilon, f)$ vardır.”

Böylece bu teorem gereği $b(n)$ normalleştirilmiş katsayıları 1 olasılıkla (kesin olarak) 0'a yakınsar. O halde bu normalleştirilmiş katsayılar 0'da bir Dirac ölçümüne sahip olur. Diğer yönde ise (Gun vd., 2020: 2) gereği, 4 seviyeli modüler formlar için, büyük değerlere sahip Fourier katsayılarının varlığı ispatlanmıştır:

"Yeterince büyük x 'ler ve her $\varepsilon > 0$ için

$$|b(|n|)| \geq \exp\left(\frac{1}{82} \frac{\sqrt{\log|n|}}{\sqrt{\log\log|n|}}\right) \quad (4.2)$$

eşitsizliğini sağlayan en az $x^{1-\varepsilon}$ tane $x < (-1)^l n < 2x$ özelliğinde n temel diskriminantları vardır.”

Dikkat edilirse L -fonksiyonlarının merkez değerleriyle olan ilişki katsayıların *kareleri* ile ilgili bilgi verir; yani işaretleriyle ilgili herhangi bir bilgi vermez. Burası tam olarak da Bruinier-Kohnen İşaret Eşdağılım Konjektürü'nün devreye girdiği yerdir. Bu konjektür (Konjektür 3.1.2.) sıfırdan farklı katsayıların yarısının pozitif yarısının da negatif olduğunu iddia eder.

4.3. $\Gamma_0(4)$ İçin Yarım Tamsayı Ağırlıklı Hecke Eigenform Örnekleri

Bir dağılım elde edilebilmesi için modüler formların çok fazla sayıda Fourier katsayısına ihtiyaç vardır. Bu çalışmada yüksek ağırlıklar için çalışılacağından dolayı mümkün olan en düşük seviye olan $\Gamma_0(4)$ seçilmiştir. (İnam ve Wiese, 2021) makalesinde tanımlandığı gibi yarım tamsayı ağırlıklı Kohnen Plus Space yüksek hassasiyetle çabucak hesaplanabilen

tabanlardır. Rankin-Cohen parantezi yardımıyla bu tabanlar ile çalışılmıştır. Herhangi bir veri kaybı olmaması açısından sonunda sadece normalleştirilmiş katsayılara dönüşen rasyoneller üzerinde çalışılmıştır. Bu seçimin dezavantajı q 'nın yüksek kuvvetlerine kadar hesaplanan q -açılımlarının çok büyük miktarda bellek harcamasıdır. Daha fazla detay verilirse Rankin-Cohen tabanı ile ilgili Hecke eigenformları ifade etmek için oldukça iyi olan Pari/GP programı kullanılmıştır. Pari/GP Programındaki “mf paketi” gerekli araçları sağlamaktadır. Daha sonra ise Hecke eigenformları bir kuvvet serisi olarak inşa eden MAGMA Programı ile de taban katsayıları elde edilmiştir. Kuvvet serilerinin çarpımını çok hızlı bir algoritma ile yaptığı için MAGMA programı kullanılmıştır. Son adım olarak ise normalleştirilmiş katsayılar reeller üzerinde hesaplanmıştır. Ön hesaplamalar tamamen bittiği için reel 10 basamak almak yeterli olmuştur.

Kohnen Plus Space’de sadece içinde tamkare bulunmayan indisli katsayıları kaydedilmiştir. ($k - \frac{1}{2}$ çift için $n \equiv 2,3 \pmod{4}$ olduğunda $a(n) = 0$ ’dır.) Bu yol ile tüm modüler formlar da normalleştirilmiştir. Kohnen Plus Space tanımına bakılırsa bu doğal bir normalleştirme yoludur ancak kanonik yol değildir.

$\Gamma_0(4)$ için $\frac{13}{2}, \frac{17}{2}, \frac{19}{2}, \dots, \frac{61}{2}$ ağırlıklı tüm Hecke eigenformların 10^7 katsayısını hesaplanmıştır. Bu sayede içinde tamkare bulundurmayan $n < 10^7$ indeksli $b(n)$ normalleştirilmiş katsayıları elde edilir. Bazı ağırlıklı Fourier katsayıları için 10^8 katsayıya ve $\frac{13}{2}$ ağırlık için ise $2 \cdot 10^8$ katsayıya ulaşılmıştır. Bu normalleştirilmiş katsayıları içeren dosyalara (Wiese, 2021) kaynağında yer alan URL adresinden ulaşılabilir. Bu dataların tamamı 4 GB kadar bir alan tutmaktadır. Aşağıdaki tüm tablolarda $25/2(2)$ ile $\Gamma_0(4)$ için $25/2$ ağırlıklı Hecke eigenformun ikinci cusp formunu temsil edecek şekilde ifade edilmiştir.

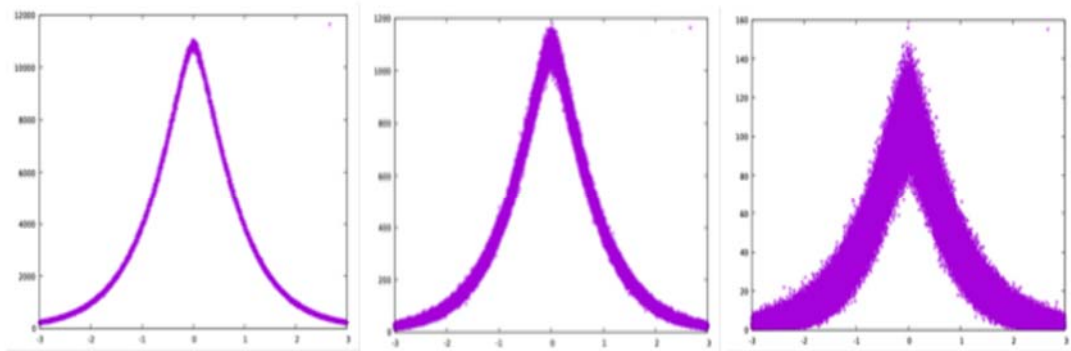
Dikkat edilecek olursa Shimura yükseltmesi altında herhangi bir yarım tamsayı ağırlıklı (k ağırlıklı) Hecke eigenform $2k - 1 \in \mathbb{Z}$ ağırlıklı 1 seviyeli tamsayı ağırlıklı Hecke eigenforma karşılık gelir. (Kohnen, 1985: 241)’den Shimura yükseltmesi tamsayı ağırlıklı uzay ile Kohnen Plus Space arasında Hecke eşdeğişkenli izomorfizmdir. Bu da yarım tamsayı ağırlıklı eigenformlar ile tamsayı ağırlıklılar arasında birebir bir eşleme vardır. Maeda konjektürüne (Hida ve Maeda, 1997: 196) göre $2k - 1$ ağırlıklı eigenformlar sadece tek bir Hecke eigenform yörüngesindedir. Maeda konjektürünü kabul ederek Kohnen Plus Space’de yarım tamsayı ağırlıklı Hecke eigenformların sayısı tamsayı ağırlıklı katsayılarla ortaya çıkan sayı cisminin derecesine eşittir.

4.5. Normalleştirilmiş Katsayıların Dağılım Histogramları

Çalışmada hatırlandığı gibi yarım tamsayı ağırlıklı Hecke eigenformların normalleştirilmiş katsayılarının dağılımının anlaşılması amaçlanmaktadır. (Radziwiłł ve Soundararajan, 2015)'in sonuçlarından yola çıkılarak $b(n)$ normalleştirilmiş katsayıların tam olarak neredeyse 0'a doğru yakınsadığı ifade edilebilir. Ancak bu dağılım için tez kapsamında yapılan ve çok da ilginç görülen yoğunluk fonksiyonu ile yaklaşımın daha güzel olabileceği bir üst sınır olduğu düşünülmektedir. Dahası bu katsayıların sıfır civarında (sıfırın sağında ve solunda) simetrik oldukları görülmektedir.

Dağılımın ifade edilebilmesi için tüm modüler formların normalleştirilmiş katsayılarının dağılım histogramları oluşturulmuştur. Dikkat edilirse Shimura yükseltmesi yardımıyla $k+1/2$ ağırlıklı modüler formlar $2k-1$ ağırlıklı modüler formlara taşınabildiğinden ve burada tamkare indisli Fourier katsayıları elde edildiğinden elde edilmesi hedeflenen dağılımla Sato-Tate dağılımı birbiriyle karışmaması için sadece içinde tamkare bulunmayan sayılar tarafından indislenen Fourier katsayıları dikkate alınmıştır. Aksi takdirde elde edilecek grafiklerden bir analiz yapmak imkansız hale gelebilmektedir.

Normalleştirilmiş katsayıların histogramları Gnuplot programı (Williams, 2004) kullanılarak oluşturulmuştur. İlgili katsayılar oldukça küçük reel sayılar olduklarından bu grafikler oluşturulurken bu katsayıların “paketlenerek” işlenmesi gerekir aksi takdirde bu grafikler oluşturulamaz. Öte yandan istenilen dağılımları etkileyip etkilemeyeceğini anlamak adına program kullanılırken grafiklerin çiziminde farklı kutu ölçüleri dikkate alınmıştır. Örneğin $\frac{13}{2}$ ağırlıklı Hecke eigenformun içinde tamkare bulundurmeyen tamsayılarla indislenen normalleştirilmiş katsayıları için kutu ölçüleri sırasıyla 0.001, 0.0001, 0.00001 alındığında elde edilen histogramların grafikleri aşağıdaki şekillerde gösterilmiştir.



Şekil 4.1. $13/2$ ağırlıklı Hecke eigenformun normalleştirilmiş Fourier katsayılarının 10^8 tanesinin histogramları sırasıyla kutu boyutları 0.001, 0.0001, 0.00001.

Bazı kutu ölçülerinde örneğe de bağlı olarak göze daha hoş gelen grafikler elde edilmektedir. Bu çalışmada 0.001 kutu ölçüsü baz alınmıştır. *Ancak hangi ölçü alınırsa alınsın dağılımı açıklayan fonksiyon ile data arasındaki en iyi uyumu veren parametreler etkilenmemektedir.*

Aşağıdaki tabloda daha sonra açıklanacak olan 5 farklı ağırlıktaki form ve 3 farklı kutu ölçüsündeki GG-dağılımındaki (dağılımın en önemli parametresi olan) a değerleri verilmiştir.

Tablo 4.1. GG- dağılımının a değerleri

	0.001	0.0001	0.00001
13/2	0.634	0.634	0.633
17/2	0.553	0.553	0.553
21/2	0.558	0.558	0.558
25/2 (1)	0.504	0.504	0.504
29/2(1)	0.507	0.507	0.506

Bu nedenle gözlemlerde ve tartışmalarda Gnuplot programında seçilen kutu ölçüsü önemsenmemektedir.

4.6. Aday Dağılım Fonksiyonları ve Regresyon

Bu bölümdeki temel amaç elde edilen histogramların ‘genel şekli’ nin katsayılarından ve sınırdan bağımsız olduğunu göstermektir. Daha doğrusu bu çalışma kapsamında yapılan geniş hesaplamalar belirlenen sınıra kadar herhangi bir yarım tamsayı ağırlıklı Hecke eigenformların normalleştirilmiş Fourier katsayılarının tek tip bir yoğunluk fonksiyonu yardımıyla ifade edilebileceğini güçlü bir şekilde iddia etmektedir. Doğal olarak bu parametreler hesaplanan Fourier katsayısı kadar seçilen modüler forma da bağlıdır.

Dikkatlice gözlemlenecek olursa her bir modüler form için histogramların şekilleri esas olarak aynıdır. Bu ise elde edilen datanın (hem de “basit” bir) dağılım fonksiyonu tarafından açıklanabileceğinin tahmin edilmesine neden olur. *Böylece yarım tamsayı ağırlıklı Hecke eigenformların Ramanujan-Petersson konjektürü tarafından normalleştirilmiş Fourier katsayıları üzerinde tam olarak çalışmanın amacına uygun aşağıda verilen parametre ve grafiklerle desteklenen Sato-Tate benzeri dağılımın varlığı ortaya konur.*

Histogramlara bakılırsa 0 civarında bir simetriklik olduğu hemen dikkat çeker ki bu da

Bruinier-Kohnen İşaret Eşdağılım Konjektürü'nü doğrular. İlk bakışta histogramlar çan eğrisi şekline benzemesine rağmen bu bir yanılgıdır. Gerçekten de bu dağılım standart bir Gauss dağılımını vermez. Bunu görebilmek için SPSS istatistik programında Anderson-Darling testi uygulanabilir. Doğru dağılımı bulabilmek adına aşağıda tanımlanan Genel Genelleştirilmiş Gauss (GGG) dağılımı, Genelleştirilmiş Gauss (GG) Dağılımı, Laplace ve Cauchy dağılımları aşağıda tanımlanmıştır:

$$GGG(x) = be^{\left(-\frac{(d+x^2)^a}{c}\right)}$$

$$GG(x) = be^{\left(-\frac{(x^2)^a}{c}\right)}$$

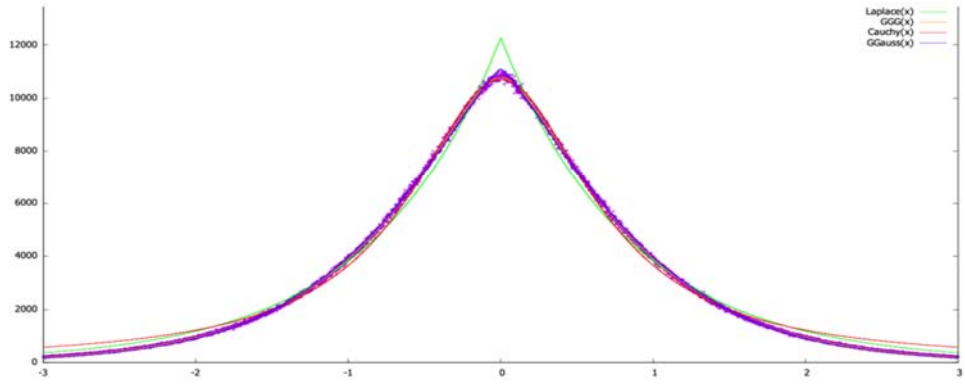
$$Laplace(x) = be^{\left(-\frac{|x|}{c}\right)}$$

$$Cauchy(x) = \frac{a}{b+(cx)^2}$$

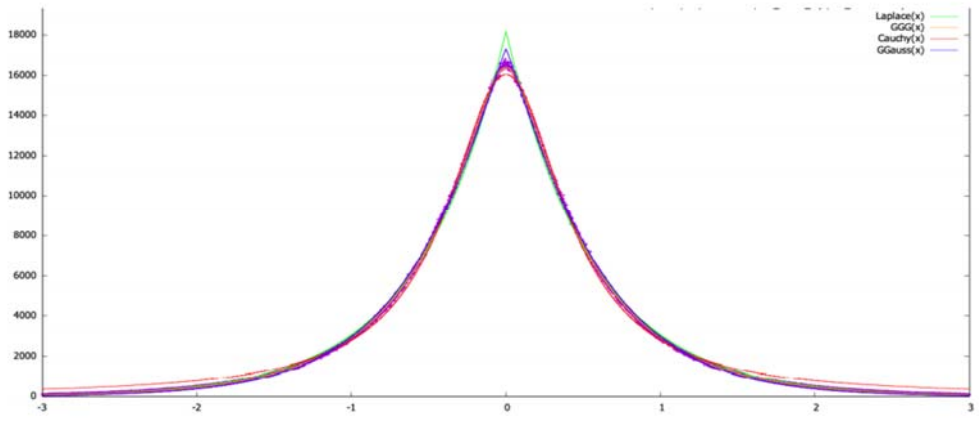
Kolayca görülebilir ki, GG dağılımı GGG dağılımının özel hali ($d=0$) olduğu gibi Laplace dağılımı da GGG dağılımının özel bir halidir ($a=0.5$). İleride tablo ile verilecek a değerlerinden de görülebilecektir ki bu değerler 0.5 değerine oldukça yakın değerlerdir. Çalışmanın kapsamında yer almadığı için histogram grafiklerinin altında kalan alanlar 1 yapıp elde edilecek dağılım fonksiyonları olasılık dağılım fonksiyonlarına dönüştürülmemiştir. Bu ise literatüre bir açık problem olarak bırakılmıştır.

Grafikte dört dağılım da güzel gözükse bile bunların açıkça en iyisi GGG dağılımıdır. Cauchy dağılımı kuyruklarda sistematik olarak çok yüksek değerler alıyor ve bu sebepten ötürü içlerinde en uyumsuz görünen dağılım olmuştur. Son kısımda en iyi dağılım ile uyumu gösterilen dağılım fonksiyonlarının grafikleri incelenebilir.

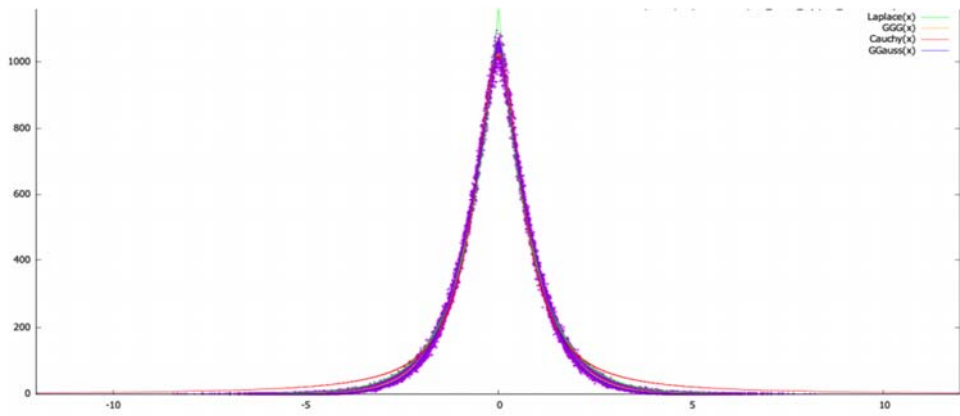
Histogramlarımız homojen bir şekilde normalleştirildiğinden genel olarak aynı şekli sunarlar ancak bazıları daha geniş bazıları daha dik şekillerdir. Farklı histogramlar arasındaki en iyi regresyonun düzgünlüklerini kıyaslamak oldukça zordur. Bu düzgünlük ölçümü Gnuplot programında RMS (Root Mean Square) değerleri ile ölçülmüştür. GGG dağılımı en iyi dağılım olarak ifade edilmişti bu yüzden elbette bu dağılımdaki değerlerin GG ve diğer dağılımlar Laplace'dan daha iyi olduğu gözlenebilmektedir. 10^8 katsayıya ulaşılmış olup örneklerin hepsinde Gnuplot programı kullanılarak bulunan en iyi regresyon değerleri tablolar halinde verilmiştir. Ayrıca 10^7 katsayıya ulaşılan tüm değerler de tablolar halinde "Ekler" kısmında sunulmuştur.



Şekil 4.2. 13/2 ağırlıklı Hecke eigenformun 10^8 katsayısının histogram ve dağılımı



Şekil 4.3. 25/2 ağırlıklı Hecke eigenformun 10^8 katsayısının histogram ve dağılımı



Şekil 4.4. 43/2 ağırlıklı Hecke eigenformun 10^7 katsayısının histogram ve dağılımı

Tablo 4.2. GGG- dağılımının en iyi parametre değerleri

	a	b	c	d
13/2	0.581	12538	0.872	0.030
17/2	0.453	20421	0.550	0.030
19/2	0.385	44105	0.317	0.012
21/2	0.460	23411	0.485	0.022
23/2	0.494	14866	0.725	0.034
25/2(1)	0.391	19462	0.577	0.035
25/2(2)	0.237	88927	0.284	0.033
27/2	0.513	22681	0.471	0.014
29/2(1)	0.364	11886	0.812	0.092
29/2(2)	0.423	30278	0.402	0.016

Tablo 4.3. GG- dağılımının en iyi parametre değerleri

	a	b	c
13/2	0.634	11105	0.969
17/2	0.553	14999	0.663
19/2	0.515	26822	0.363
21/2	0.558	17300	0.566
23/2	0.573	11997	0.857
25/2(1)	0.504	13107	0.752
25/2(2)	0.453	20676	0.485
27/2	0.584	18721	0.514
29/2(1)	0.506	7555	1.256
29/2(2)	0.532	20884	0.466

Tablo 4.4. Laplace dağılımının en iyi parametre değerleri

	b	c
13/2	12264	0.860
17/2	15711	0.650
19/2	27201	0.367
21/2	18184	0.560
23/2	12746	0.805
25/2(1)	13161	0.750
25/2(2)	19699	0.484
27/2	20071	0.514
29/2(1)	7597	1.244
29/2(2)	21515	0.470

Tablo 4.5. Cauchy dağılımının en iyi parametre değerleri

	a	b	c
13/2	183	0.017	0.181
17/2	194	0.014	0.222
19/2	2455	0.010	0.340
21/2	194	0.012	0.240
23/2	208	0.019	0.204
25/2(1)	194	0.017	0.212
25/2(2)	1376	0.080	0.725
27/2	233	0.013	0.272
29/2(1)	813	0.122	0.340
29/2(2)	342	0.018	-0.350

Tablo 4.6. Dört dağılımdaki en iyi parametreler için RMS değerleri

	GG	GGG	Laplace	Cauchy
13/2	76	59	286	252
17/2	126	64	187	219
19/2	208	75	215	295
21/2	133	66	209	265
23/2	97	60	190	189
25/2(1)	134	62	135	178
25/2(2)	283	79	320	238
27/2	111	63	266	347
29/2(1)	95	56	95	157
29/2(2)	161	65	191	273

4.7. Parametrelerin Bağımlılığı ve Bağımsızlığı

GGG dağılımı oldukça iyi gözükse bile önceki bölümde görüldüğü gibi Radziwiłł ve Soundararajan'ın sonuçları herhangi bir Hecke eigenform için parametrelerin aynı zamanda sınıra bağlı olmak zorunda olduğunu göstermektedir. Bu bölümde bu bağımlılık yani bir diğer ifade ile parametrelerin katsayılara göre nasıl davrandığı araştırılmıştır. Bu çalışmada normleştirilmiş katsayıların en büyüğü olarak $\frac{13}{2}$ ağırlık için $2 \cdot 10^8$ katsayı hesaplanabilmektedir. Bu katsayılar da 20 alt gruba bölünerek her bir grup için yine ayrıca fit değerleri hesaplanmış ve aşağıdaki tablo oluşturulmuştur. Böylece yapılan işin tutarlı olduğu görülebilir.

Tablo 4.7. 13/2 ağırlık için 2.10^8 katsayının alt grupları için her bir dağılımdaki en iyi parametre değerleri

	GGG				GG			Laplace		Cauchy		
	a	b	c	d	a	b	c	b	c	a	b	c
1	0.622	1177	0.967	0.045	0.677	1038	1.08	1172	0.908	142.8	0.140	0.488
2	0.601	1206	0.917	0.031	0.650	1082	1.009	1205	0.876	142.0	0.135	0.498
3	0.591	1221	0.896	0.027	0.638	1101	0.981	1219	0.864	143.4	0.135	0.506
4	0.587	1230	0.886	0.025	0.633	1110	0.969	1226	0.858	144.1	0.135	0.510
5	0.569	1299	0.846	0.037	0.631	1117	0.960	1232	0.852	144.3	0.134	0.513
6	0.580	1252	0.867	0.025	0.627	1123	0.952	1236	0.848	144.8	0.134	0.515
7	0.561	1326	0.828	0.039	0.628	1126	0.948	1239	0.846	144.8	0.134	0.516
8	0.566	1292	0.841	0.030	0.622	1133	0.940	1243	0.843	145.6	0.134	0.520
9	0.572	1273	0.850	0.026	0.621	1136	0.936	1246	0.840	145.6	0.134	0.520
10	0.559	1317	0.825	0.032	0.619	1141	0.930	1249	0.837	146.0	0.134	0.522
11	0.567	1289	0.839	0.027	0.619	1141	0.930	1250	0.837	146.0	0.134	0.522
12	0.559	1317	0.824	0.031	0.618	1144	0.926	1252	0.835	146.2	0.133	0.523
13	0.557	1326	0.819	0.032	0.617	1146	0.924	1254	0.833	146.4	0.133	0.524
14	0.566	1275	0.840	0.020	0.610	1154	0.915	1257	0.830	147.3	0.134	0.524
15	0.551	1349	0.807	0.034	0.616	1150	0.919	1257	0.830	146.6	0.133	0.526
16	0.555	1332	0.814	0.031	0.616	1151	0.918	1258	0.828	146.5	0.133	0.526
17	0.555	1327	0.814	0.029	0.613	1156	0.913	1261	0.828	146.9	0.133	0.528
18	0.560	1309	0.822	0.025	0.612	1158	0.911	1262	0.826	147.0	0.133	0.529
19	0.553	1333	0.811	0.029	0.612	1157	0.911	1262	0.827	147.1	0.133	0.529
20	0.555	1323	0.814	0.026	0.610	1161	0.907	1264	0.825	147.3	0.133	0.530

Aşağıda bu değerler için hesaplanan RMS değerleri bir tablo ile gösterilmektedir.

Tablo 4.8. RMS değerleri

	GGG	GG	Laplace	Cauchy
1	18.4	18.9	39.0	33.6
2	18.1	18.6	35.4	31.6
3	18.7	19.2	34.1	31.2
4	18.2	18.8	33.3	30.7
5	18.0	18.8	33.2	30.0
6	18.5	19.0	32.7	30.4
7	18.4	19.3	33.0	29.9
8	18.2	19.0	31.9	29.7
9	18.3	18.8	31.7	29.9
10	18.3	19.1	31.6	29.5

	GGG	GG	Laplace	Cauchy
11	18.4	19.0	31.6	29.8
12	18.3	19.2	31.5	29.5
13	18.3	19.2	31.5	29.5
14	18.2	18.7	30.1	29.4
15	17.7	18.7	31.0	28.9
16	18.3	19.2	31.3	29.4
17	18.0	18.8	30.6	29.1
18	18.3	19.0	30.7	29.4
19	18.4	19.2	30.8	29.2
20	18.4	19.2	30.5	29.2

Parametrelere bağımlılık kolayca görülebilir. Örneğin Cauchy ile GG dağılımının değerleri de bir parametreye bağımlılığı söyler. Laplace dağılımı için b değerleri yavaşça ancak kesin olarak artar. Öte yandan bir istisna hariç c değerleri yavaşça ancak kesin olarak azalmaktadır. GGG dağılımı için kümelerin ilk birkaç çiftindeki değerlerde net bir bağımlılık söz konusudur. Bununla beraber son kümeler için tüm bu değerlerin sabitleşmeye başladığı gözlemlenmektedir. Mevcut bilgisayar teknolojisi ile ulaşılabilen Fourier katsayılarının üst sınırı limit dağılımın Dirac delta fonksiyon olduğunu göstermeye yetmemektedir.

Çalışma kapsamında hesaplanan Fourier katsayılarının içinden, içinde tamkare bulunmayan ve sıfırdan farklı n indisli Fourier katsayıları seçilmiştir. Tamsayı ağırlıklı durumlarda kompleks çarpıma sahip olmayan Hecke eigenformlar için sadece asal indisli olan Fourier katsayıları Sato-Tate dağılımı yarım daire oluşturur ve yarım tamsayı ağırlıklı durumlarla aralarında bu şekilde büyük bir farklılık vardır. Dahası, tamsayı ağırlıklı Hecke eigenformların katsayıları çarpımsal fonksiyonlardır böylece asal indislerde katsayıların dağılımı kalanları tanımlar. Yarım tamsayı ağırlıklı durumlar için ise benzer bir durum olduğunu bilinmemektedir. Aslında dağılımlardaki grafiğin şekli asal indisler ile sınırlandırılabilir önemli ölçüde değişmeyecektir. Burada bahsedilen asal indis ya da içinde tamkare bulundurmeyen durumlar için de dağılımlardaki değerlerin önemli ölçüde değişmediği de aşağıdaki tablo ile gösterilmiştir.

Tablo 4.9. İçinde tamkare bulunmayan (sqf) ve asal durumlar için bulunan en iyi parametre değerleri

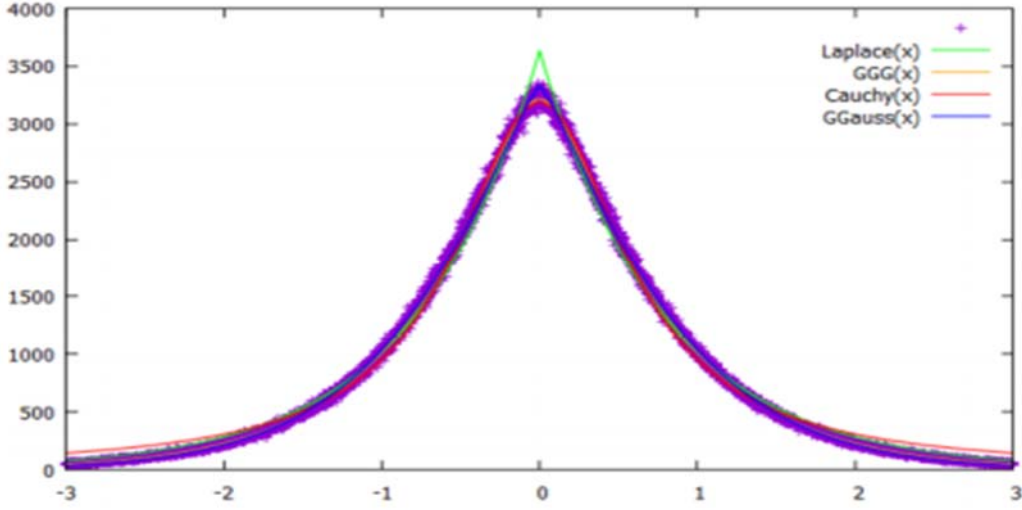
	GG	GG	GG	GG
	a	b	c	d
sqf	0.570	25666	0.850	0.30
asal	0.550	3892	0.759	0.030

	GGG	GGG	GGG
	a	b	c
sqf	0.623	22621	0.942
asal	0.614	3329	0.856

	Laplace	Laplace
	b	c
sqf	24837	0.843
asal	3635	0.784

	Cauchy	Cauchy	Cauchy
	a	b	c
sqf	140	0.006	0.113
asal	196	0.062	0.380

İçinde tamkare bulunmayan indislerin sayısı asal indislilerin sayısından oldukça fazla olduğundan b değerleri tamamen farklı değerler almaktadır. Yine aynı sebepten ötürü RMS değerleri de farklı değerler almıştır. Ancak en önemli parametre olan a parametresi GG ve GGG dağılımında da neredeyse aynı değerleri almıştır. Bu nedenle elde edilebilen sayıda Fourier katsayıları için yapılan hesaplamalarda sadece içinde tamkare bulunmayan indisleri dikkate almak yeterlidir.



Şekil 4.5. 13/2 ağırlıklı Hecke eigenformun sadece asal indisli Fourier katsayılarının dağılımı ve histogramı

GGG dağılımı ile normalleştirilmiş Fourier katsayıların üst sınırına en iyi yaklaşım gözlemlenmiştir ve tüm sınırlar için bu sınırın sabit olup olmadığı sorusuna ulaşılmıştır.

Açık Soru: (İnam vd., 2021: 2434) $k = l + \frac{1}{2}$ olmak üzere f Kohnen Plus Space’de k ağırlıklı Hecke eigenformun cusp formu ve $b(n)$ ’ler daha önce verilmiş olan normalleştirilmiş katsayılar ve $x \in \mathbb{R}_{>0}$ olsun.

n , $n \leq x$ ve $n \equiv (-1)^l \pmod{4}$ özelliğinde içinde tamkare bulundurmeyen bir doğal sayı olsun. Bu özellikteki n sayıları için $b(n)$ normalleştirilmiş katsayıların dağılımı parametreleri sadece f ve x ’e bağlı olacak şekilde GGG dağılımı ile ifade edilebilir mi?

Daha kesin olarak $I \in [\alpha, \beta] \subseteq \mathbb{R}$ özelliğindeki tüm aralıklar için

$$b = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(d+t^2)^a}{c}\right) dt$$

ve “sqf” ile içinde tamkare olmayan tamsayıyı göstermek üzere

$$\frac{\#\{n \in N \text{ sqf} \mid n \leq x, n \equiv (-1)^l \pmod{4}, b(n) \in I\}}{\#\{n \in N \text{ sqf} \mid n \leq x, n \equiv (-1)^l \pmod{4}\}}$$

sayısı,

$$\frac{1}{b} \int_{\alpha}^{\beta} \exp\left(-\frac{(d+t^2)^a}{c}\right) dt$$

integral değerine eşit midir?

5. BRUINIER-KOHNEN KONJEKTÜRÜNÜN GÜÇLENDİRİLMESİ

Yarım tamsayı ağırlıklı Hecke eigenformların sıfırdan farklı Fourier katsayılarının işaretlerinin eş dağıldığı (Bruinier ve Kohnen, 2008: 63)'de iddia edilmiştir. Daha kesin olarak $k = l + \frac{1}{2}$ ağırlıklı ve Fourier katsayıları reel olan bir cusp form $f = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)q^n \in S_k(\Gamma_0(N))$ olsun. Ayrıca $l = 1$ iken f unary teta serilerine ortogonal olsun. Bruinier ve Kohnen

$$\{n \in \mathbb{N} : a(n) > 0\}$$

ve

$$\{n \in \mathbb{N} : a(n) < 0\}$$

kümelerinin aynı doğal yoğunlukta ve kesin olarak

$$\{n \in \mathbb{N} : a(n) \neq 0\}$$

kümesinin doğal yoğunluğunun yarısına eşit olduğunu sürmüştür. Bu problem zor bir problem olup literatürde halen bu problemin tam çözümünü sağlayacak bir metot bulunmamaktadır. Ancak katsayı ailelerinin bazı özel alt kümeleri üzerinde problem farklı otomorfik formlar da dahil olmak üzere yoğun bir şekilde çalışılıp bu yönde çok sayıda sonuç ispatlanmıştır. Bu sonuçların öncülü ise Shimura yükseltmesi ile yarım tamsayı ağırlıklı Hecke eigenformlar için meşhur Sato-Tate Konjektürünün birleşmesiyle tamkare indeksli katsayılar için işaretlerin dağılımının ispatıdır (İnam ve Wiese, 2013), (Arias-de-Reyna vd., 2015), (İnam ve Wiese, 2016)'daki gibi). İşaret dağılım problemi hala ilgi çekici olarak çalışılmaktadır (örneğin (Amri, 2019)) ayrıca (İnam ve Wiese, 2013)'den bir teknikle (Kaushik vd., 2018)'de Hilbert modüler formlar gibi daha genel otomorfik formlara genişletilmektedir.

Bu çalışmada tezin yazım tarihine kadar Bruinier-Kohnen konjektürünü destekleyen en geniş ve en sistematik hesaplamalar yapılmıştır. Gerçekten de çok sayıda Hecke eigenform için hesaplanan 10^7 ve 10^8 Fourier katsayısı için çizilen histogramlara dikkat edilirse bu histogramlar y-eksenine göre simetrik olup Bruinier-Kohnen konjektürünü gerçekler.

Gerçekten de 0'ın civarında simetri olması işaretlerin düzgün dağılımını ve normalleştirilmiş katsayıların mutlak değerlerinin dağılımı ile işaretlerin dağılımının birbirinden bağımsız olduğunu gösterir. Bunu daha kesin yapabilmek için (4.2) eşitsizliği hatırlanırsa yeterince büyük $|b(n)|$ normalleştirilmiş katsayıların sonsuz çoklukta olduğu bilinmektedir. Bu ise n içinde tamkare bulundurmeyen tamsayı olmak üzere boştan farklı herhangi bir $I \subseteq \mathbb{R}_{>0}$ aralığında sonsuz çoklukta $|b(n)|$ normalleştirilmiş katsayıları

bulunduğunu söyler. Dikkat edilirse Shimura yükseltmesinden gelen tamkare indisli katsayıların resmi bozmaması adına ayrıştırıp bu çalışmada sadece içinde tamkare bulundurmeyen indislerle çalışıldığı hatırlanmalıdır. Fourier katsayılarının hesaplanabildiği sınıra kadar olan normalleştirilmiş Fourier katsayıların dağılımı ve 0'ın civarında simetrisi Bruinier-Kohnen konjektürünün genişletilmesi olarak kabul edilen aşağıdaki konjektüre ulaşmayı sağlar.

Konjektür 5.1.1. (İnam vd., 2021:2438) (Mutlak Değer ve İşaretin Bağımsızlığı)

f yukarıda verilen özelliklerde ve $I \subseteq \mathbb{R}_{>0}$ herhangi bir aralık olsun. O zaman aşağıdaki limit vardır ve

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\#\{n \leq x \text{ sqf} \mid |b(n)| \in I, b(n) > 0\}}{\#\{n \leq x \text{ sqf} \mid |b(n)| \in I\}} = \frac{1}{2}$$

dir.

6. SONUÇ VE TARTIŞMA

Bu çalışmada yarım tamsayı ağırlıklı modüler formlar üzerinde Sato-Tate benzeri bir sonuç verilip verilemeyeceği problemi ele alınmıştır. Bunu yapabilmek adına ilk olarak literatürdeki açık problemlerden birisi olan yarım tamsayı ağırlıklı Hecke eigenformların sistematik seçimine Rankin-Cohen parantezi metodu adı verilen metotla çözüm üretilmiş olup literatüre bu yönde önemli bir katkı sağlanmıştır.

Elde edilen çok sayıda örnek üzerinde geniş çaplı bir istatistik yapıp Ramanujan-Petersson Konjektürü yardımıyla normalleştirilen Fourier katsayılarının GGG-dağılımıyla açıklanabileceği ortaya konmuş ve sayısal verilerle bu iddia desteklenmiştir. Böylece doktora tezindeki en önemli hedeflerden birisi gerçekleştirilmiştir. Ortaya konulan açık sorunun ispatı için yeni bir metot geliştirilmesi gerekmekte olup, tezin ürünü olarak ortaya çıkan makaleyle çalışmanın yayılımı gerçekleştirilmiştir. Son olarak üzerine çok fazla sayıda makale yazılan Bruinier-Kohnen İşaret Eşdağılım Konjektürü'nün bugüne kadar yapılmış en geniş kapsamlı nümerik doğrulama ile literatüre bir katkıda daha bulunulmuştur. İşaret ve mutlak değer bağımsızlığı ile ilgili açık problem daha da geliştirilmiştir.

Şu gözlemlerde bulunulmuştur:

- (1) normalleştirilmiş katsayıların mutlak değerlerinin (4.1) eşitsizliği gereği 1 olasılıkla 0'a yakınsadığı bilinse de katsayıların (hesaplamalı olarak erişilebilir) sınırlara kadar çok düzgün, önemsiz olmayan bir dağılımını gözlemliyoruz. Dağılım, genelleştirilmiş bir Gauss dağılımını takip ediyor gibi görünüyor.
- (2) Farklı sınırlara ve değişken yarım tamsayı ağırlıklara göre Hecke eigenformların normalize edilmiş Fourier katsayılarının dağılımlarının histogramları, tek tip yoğunluk fonksiyonu ile iyi bir şekilde yaklaşılabilmeleri, tüm grafiklerin aynı şekilde görünmesi ve parametrelerin sadece modüler forma ve sınıra bağlı oluşu gözlemlenmiştir.
- (3) Sınırlara kadar katsayıların gözlemlenen dağılımlarının 0 civarında simetrisi, Bruinier-Kohnen İşaret Eşdağılım Konjektürü'ne yönelik çok güçlü kanıt olarak yorumlanabilir. Aslında, varsayımın mutlak değer ve işaretlerin bağımsız olarak dağıtıldığı noktaya kadar güçlendirilmesini önermektedir (bkz. Konjektür 5.1.1). Bildiğimiz kadarıyla bu makaledeki hesaplamalar, Bruinier-Kohnen İşaret Eşdağılım Konjektürü için bugüne kadar yapılmış en sistematik ve en büyük hesaplama desteği olarak görülebilir. Ayrıca, Açık Soru'nun olumlu bir cevabı varsa, Bruinier-Kohnen İşaret Eşdağılım Konjektürü doğrudur ve bu başlıktaki iki konuyu birbirine bağlar.

KAYNAKÇA

- Amri, M. A.** (2019). Oscillatory behavior and equidistribution of signs of Fourier coefficients of cusp forms. *Ramanujan J.*, 50(3), 505–526.
- Arias de Reyna, S., İnam, İ., & Wiese G.** (2015). On the Conjectures of Sato-Tate and Bruinier-Kohnen. *The Ramanujan Journal*, 36(3), 455-481.
- Barnet-Lamb, T. vd.** (2011). A Family of Calabi-Yau varieties and Potential Automorphy II. *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences*, 47(1), 29-98.
- Bosma, W., Cannon, J., & Playoust, C.** (1997). The Magma Algebra System I: The user language. *J. Symbolic Comput.* 24, 235–265.
- Bruinier, J. H., & Kohnen, W.** (2008). Sign changes of coefficients of half integral weight modular forms, In Modular forms on Schiermonnikoog. *Cambridge Univ. Press*, Cambridge. 57–66.
- Cohen, H.** (2019). An Introduction to Modular Forms. İlker İnam, Engin Büyükaşık (Ed.), *Notes from the International Autumn School on Computational Number Theory*, Switzerland AG: Springer Nature.
- Cohen, H., & Strömberg F.** (2017). *Modular Forms: A Classical Approach*, The United States of America: American Mathematical Society.
- Conrey, J. B. vd.** (2006). Random Matrix Theory and the Fourier Coefficients of Half-Integral-Weight Forms, *Experimental Mathematics*, 15 (1), 67-82.
- Deligne, P.** (1974). La conjecture de Weil. I., *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, 43, 273–307.
- Farmer, D. W., Gonek, S. M., & Hughes, C. P.** (2007). The maximum size of L-functions, *J. Reine Angew. Math.*, 609, 215–236.
- Gradshteyn, I. S., & Ryzhik, I. M.** (2007). *Table of Integrals, Series and Products*. Jeffrey A., Zwillinger D. (Ed.), USA: Elsevier, Inc.
- Gun, S., & Kohnen, W.** (2019). On the Ramanujan-Petersson conjecture for modular forms of half-integral weight. *Forum Math.*, 31(3), 703–711.
- Gun, S., Kohnen, W., & Soundararajan, K.** (2020). Large Fourier coefficients of half-integer weight modular forms, arXiv:2004.14450.
- Hecke, E.** (1920). Eine neue Art von Zetafunktionen und ihre Beziehungen zur Verteilung der Primzahlen, *Math. Z.* 6 (1-2), 11–51.

- Hida, H., & Maeda, Y.** (1997). Non-abelian base change for totally real fields, *Pacific Journal of Mathematics*, 181(3), 189–217.
- İnam, İ.** (2012). Selmer groups in twist families of elliptic curves, *Quaest. Math.*, 35(4), 471-487.
- İnam, İ., & Wiese, G.** (2013). Equidistribution of signs for modular eigenforms of half integral weight, *Arch. Math.* (Basel), 101(4), 331–339.
- İnam, İ., & Wiese, G.** (2016). A short note on the Bruinier-Kohnen sign equidistribution conjecture and Halász’ theorem, *Int. J. Number Theory*, 12(2), 357–360.
- İnam, İ. vd.** (2020). Rankin-Cohen Parantezi Yardımıyla Elde Edilen Hecke Eigenform Örnekleri, *Erzincan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 13(2), 772-778.
- İnam, İ., & Wiese, G.** (2021). Fast computation of half-integral weight modular forms, arXiv:2010.11239.
- İnam, İ. vd.** (2021). On the distribution of coefficients of half-integral weight modular forms and the Bruinier-Kohnen Conjecture, *Turkish Journal of Mathematics*, 45(6), 2427-2440.
- Kaushik, S., Kumar, N., & Tanabe, N.** (2018). Equidistribution of signs for Hilbert modular forms of half-integral weight, *Res. Number Theory*, 4(13), 10.
- Koblitz, N.** (1984). *Introduction to Elliptic Curves and Modular Forms* (1.Basım). New York: Springer –Verlag.
- Kohnen, W.** (1980). Modular forms of half-integral weight on $\Gamma_0(4)$, *Math. Ann.* 248(3), 249-266.
- Kohnen, W., & Zagier, D.** (1981). Values of L-series of modular forms at the center of the critical strip, *Invent. Math.*, 64(2), 175–198.
- Kohnen, W.** (1985). Fourier coefficients of modular forms of half-integral weight, *Math. Ann.*, 271(2), 237–268.
- Kohnen, W.** (1994). On the Ramanujan-Petersson Conjecture for Modular Forms of Half-Integral Weight, *Proceedings of the Indian Academy of Sciences*, 104(2), 333-337.
- Kohnen, W., Lau, Y.-K., & Wu, J.** (2013). Fourier coefficients of cusp forms of half-integral weight, *Math. Z.*, 273(1-2), 29–41.
- Mazur, Barry.** (2008) Finding Meaning in Error Terms. *Bulletin (New Series) of The American Mathematical Society*. 45(2), 185–228.
- Miyake, T.** (2006). *Modular forms* (2. Basım). New York: Springer-Verlag.

- Niven, I., Zuckerman, H. S., & Montgomery, H. L.** (1991). *An introduction to the theory of numbers*. (5. Basım) John Wiley & Sons. USA.
- Niwa, S.** (1974). Modular Forms of Half Integral Weight and the Integral of Certain Theta-Functions. *Nagoya Math. J.*, 56, 147-161.
- Petersson, H.** (1930). Theorie der automorphen Formen beliebiger reeller Dimension und ihre Darstellung durch eine neue Art Poincaréscher Reihen. *Mathematische Annalen* 103(1), 369–436.
- Radziwiłł, M., & Soundararajan, K.** (2015). Moments and distribution of central L-values of quadratic twists of elliptic curves. *Invent. Math.*, 202(3), 1029–1068.
- Ramanujan, S.** (1916). On certain arithmetical functions. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society XXII*, 159–184.
- Rosser, B.** (1941) Explicit Bounds for Some Functions of Prime Numbers, *Amer. Journal of Mathematics*, 63(1), 211-232.
- Schoeneberg B.** (1974). *Elliptic Modular Functions: An Introduction*. New York: Springer-Verlag.
- Shimura, G.** (1973). On Modular Forms of Half-Integral Weight. *Annals of Math.*, 97, 440-481.
- Silverman, J. H.** (1986). (1. Basım). *The Arithmetic of Elliptic Curves*. Springer. New York.
- Stein, W.** (2007). *Modular forms a Computational Approach* (79). The United States of America: *Amer. Math. Society*.
- The PARI Group.** (2019) Pari/GP 2019 version 2.11.2. [Erişim: 08.02.2022, <http://pari.math.u-bordeaux.fr/>]
- Thorner, J.** (2014). The Error Term in the Sato-Tate Conjecture. *Archiv der Mathematik*, 103(2), 147-156.
- Thorner, J.** (2020). Effective Forms of The Sato-Tate Conjecture. arXiv:2002.10450.
- Waldspurger, J. L.** (1981). Sur les coefficients de Fourier des formes modulaires de poids demi-entier. *J. Math. Pures et Appl.*, 60, 375–484.
- Wiese G.** (2021). [Erişim: 08.02.2022, <http://math.uni.lu/wiese/FourierData.html>]
- Wiles, A.** (1995). Modular elliptic curves and Fermat’s last theorem. *Ann. Of Math.*, 141(2), 443-551.
- Williams, T. vd.** (2004) Gnuplot 5.2: an interactive plotting program. [Erişim: 08.02.2022, <http://gnuplot.sourceforge.net/>]

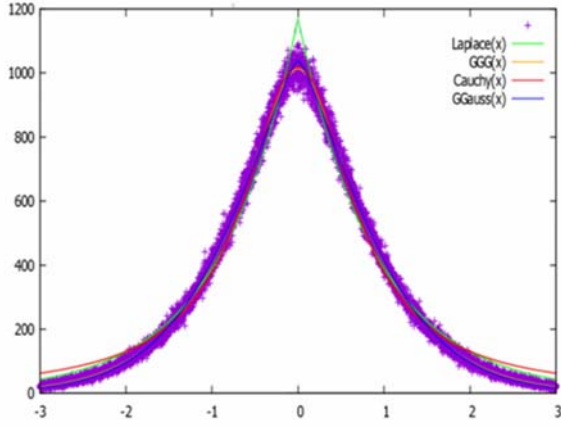
Zagier, D. (1994). Modular forms and differential operators. *Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.)*, 104(1), 57–75.





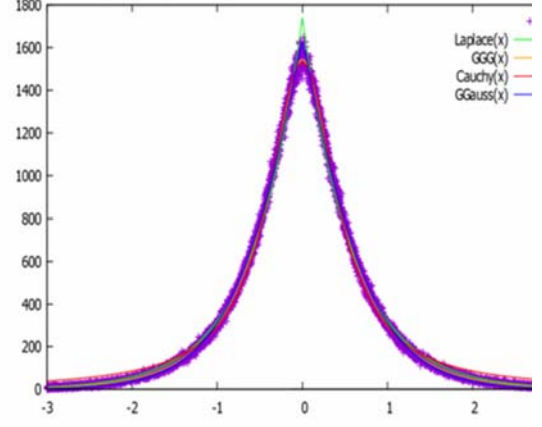
EKLER

EK 1) GRAFİK VE TABLOLAR



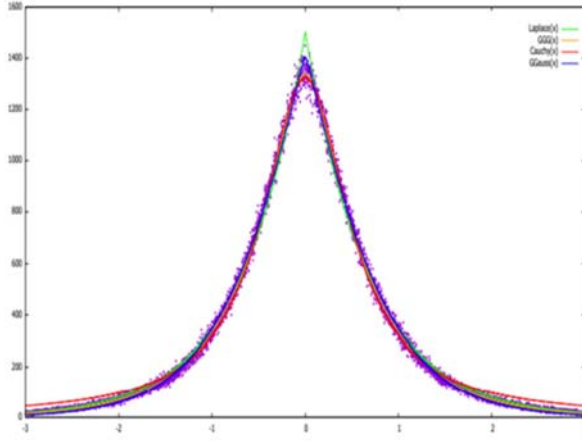
Şekil E.1

13/2 ağırlıklı ve 10^7 normleştirilmiş Fourier katsayılı Hecke eigenformun histogramı ve dağılımlar



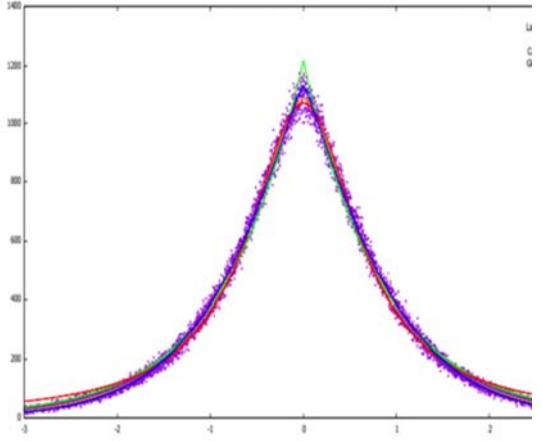
Şekil E.4

21/2 ağırlıklı ve 10^7 normleştirilmiş Fourier katsayılı Hecke eigenformun histogramı ve dağılımlar



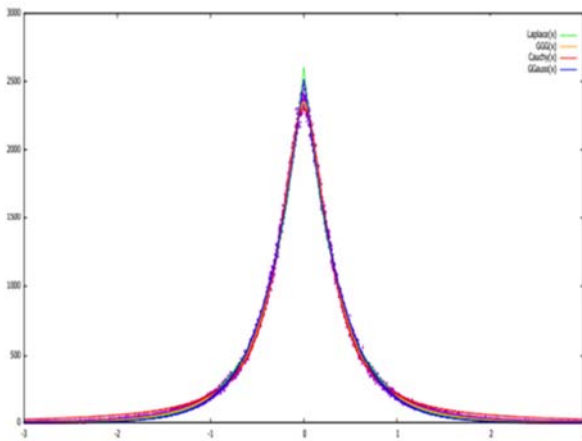
Şekil E.2

17/2 ağırlıklı ve 10^7 normleştirilmiş Fourier katsayılı Hecke eigenformun histogramı ve dağılımlar



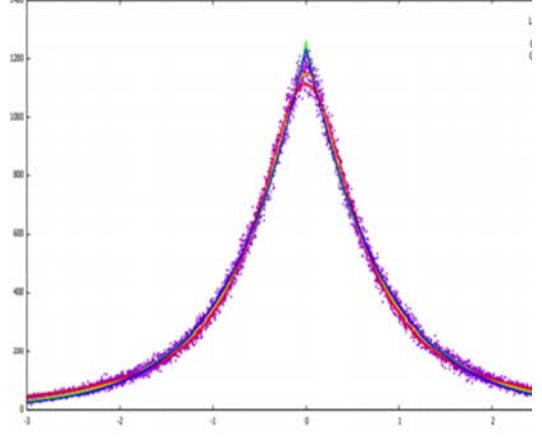
Şekil E.5

23/2 ağırlıklı ve 10^7 normleştirilmiş Fourier katsayılı Hecke eigenformun histogramı ve dağılımlar



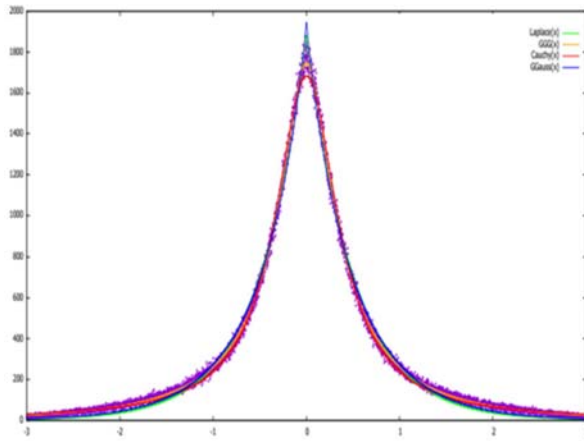
Şekil E.3

19/2 ağırlıklı ve 10^7 normleştirilmiş Fourier katsayılı Hecke eigenformun histogramı ve dağılımlar



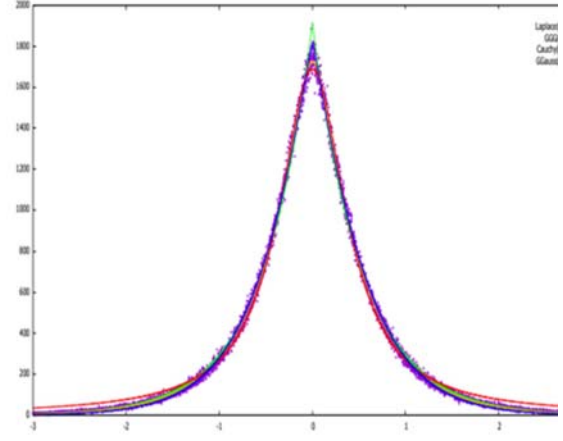
Şekil E.6

25/2 ağırlıklı ve 10^7 normleştirilmiş Fourier katsayılı 1. Hecke eigenformun histogramı ve dağılımlar



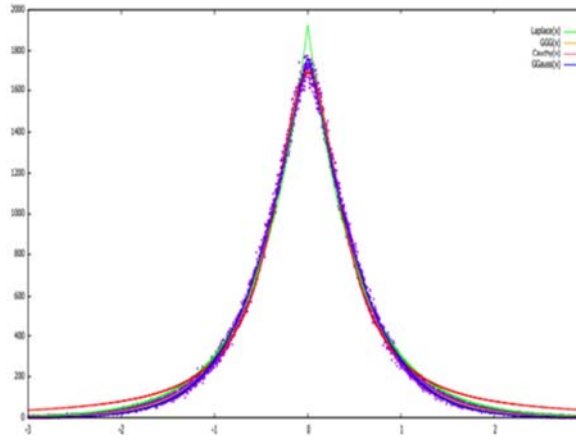
Şekil E.7

25/2 ağırlıklı ve 10^7 normalleştirilmiş Fourier katsayılı
Hecke eigenformun histogramı ve dağılımlar



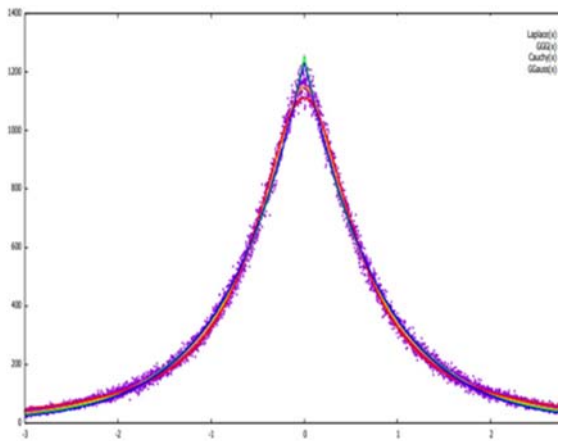
Şekil E.10

31/2 ağırlıklı ve 10^7 normalleştirilmiş Fourier katsayılı 1.
Hecke eigenformun histogramı ve dağılımlar



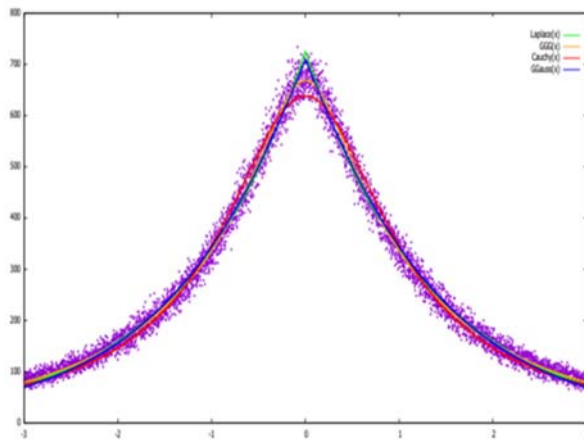
Şekil E.8

27/2 ağırlıklı ve 10^7 normalleştirilmiş Fourier katsayılı
Hecke eigenformun histogramı ve dağılımlar



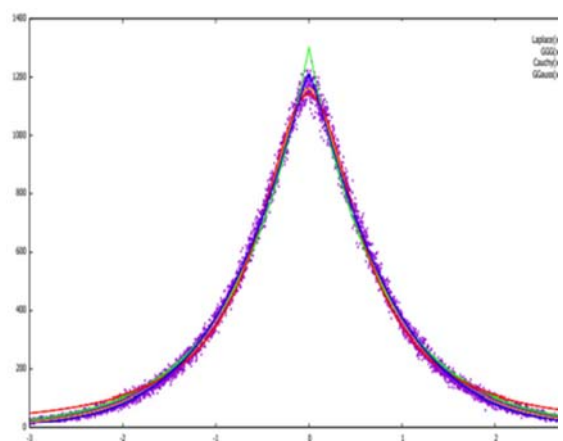
Şekil E.11

31/2 ağırlıklı ve 10^7 normalleştirilmiş Fourier katsayılı 2.
Hecke eigenformun histogramı ve dağılımlar



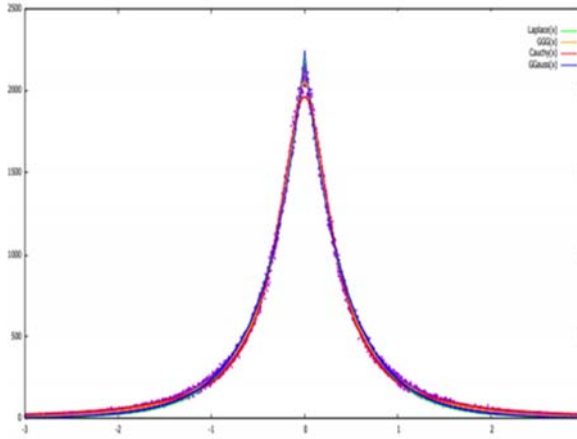
Şekil E.9

29/2 ağırlıklı ve 10^7 normalleştirilmiş Fourier katsayılı
Hecke eigenformun histogramı ve dağılımlar



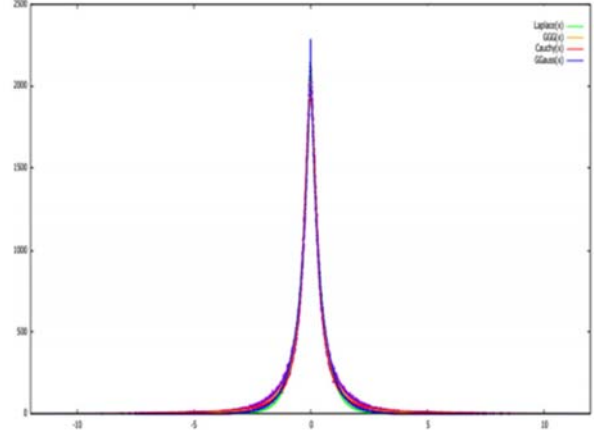
Şekil E.12

33/2 ağırlıklı ve 10^7 normalleştirilmiş Fourier katsayılı 1.
Hecke eigenformun histogramı ve dağılımlar



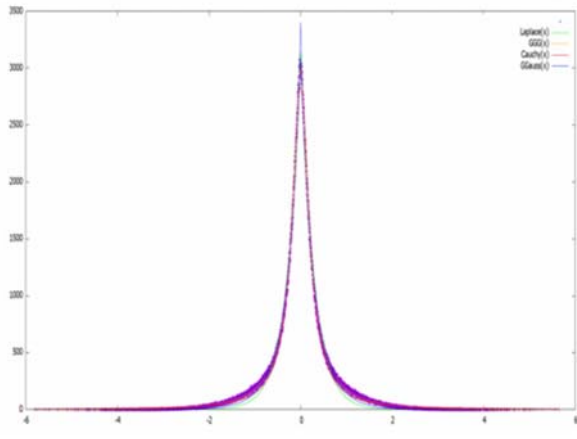
Şekil E.13

33/2 ağırlıklı ve 10^7 normalleştirilmiş Fourier katsayılı 2.
Hecke eigenformun histogramı ve dağılımlar



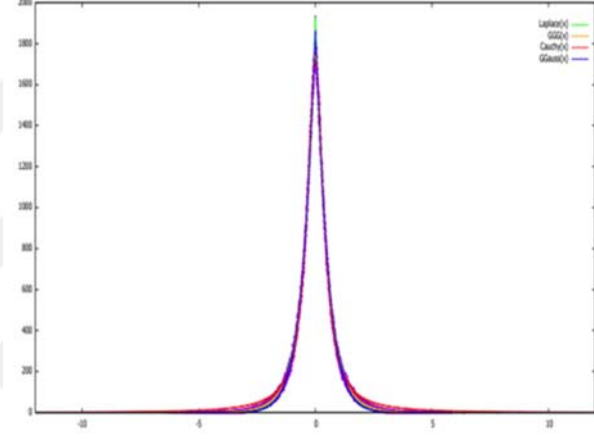
Şekil E.16

37/2 ağırlıklı ve 10^7 normalleştirilmiş Fourier katsayılı 1.
Hecke eigenformun histogramı ve dağılımlar



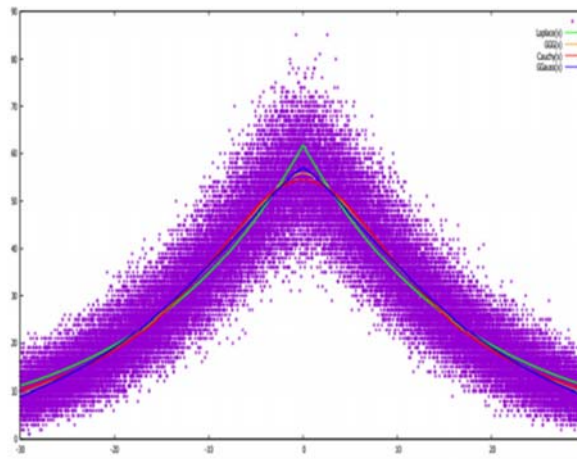
Şekil E.14

35/2 ağırlıklı ve 10^7 normalleştirilmiş Fourier katsayılı 1.
Hecke eigenformun histogramı ve dağılımlar



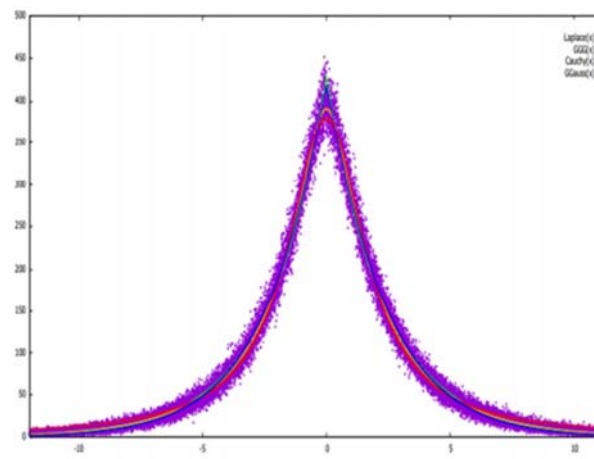
Şekil E.17

37/2 ağırlıklı ve 10^7 normalleştirilmiş Fourier katsayılı 2.
Hecke eigenformun histogramı ve dağılımlar



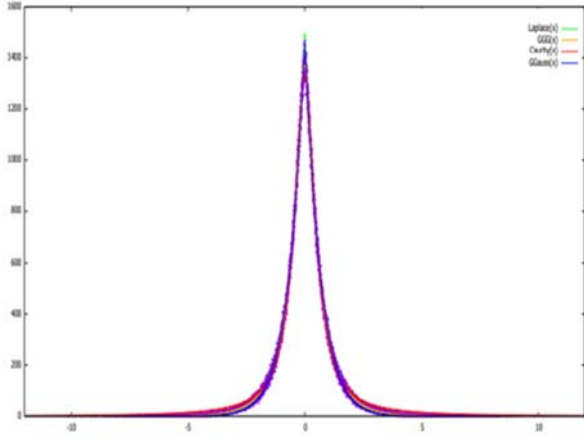
Şekil E.15

35/2 ağırlıklı ve 10^7 normalleştirilmiş Fourier katsayılı 2.
Hecke eigenformun histogramı ve dağılımlar



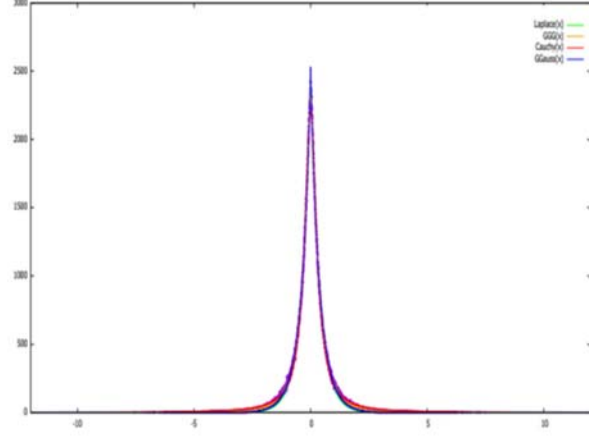
Şekil E.18

37/2 ağırlıklı ve 10^7 normalleştirilmiş Fourier katsayılı 3.
Hecke eigenformun histogramı ve dağılımlar



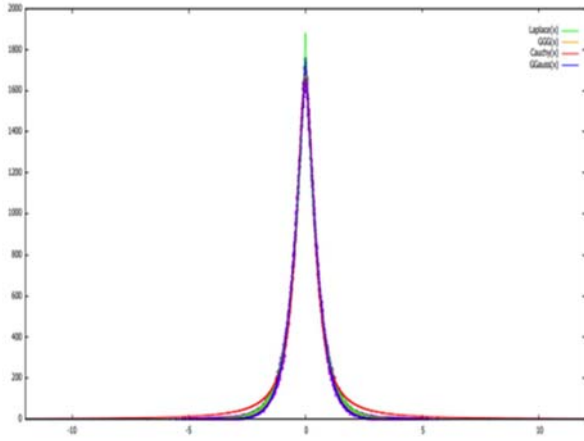
Şekil E.19

39/2 ağırlıklı ve 10^7 normalize edilmiş Fourier katsayılı 1.
Hecke eigenformun histogramı ve dağılımlar



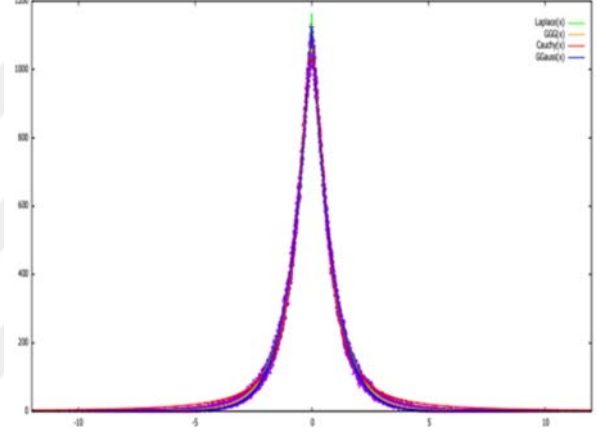
Şekil E.22

41/2 ağırlıklı ve 10^7 normalize edilmiş Fourier katsayılı 2.
Hecke eigenformun histogramı ve dağılımlar



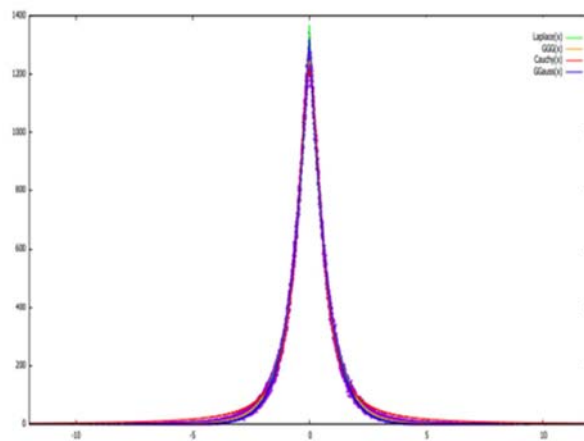
Şekil E.20

39/2 ağırlıklı ve 10^7 normalize edilmiş Fourier katsayılı 2.
Hecke eigenformun histogramı ve dağılımlar



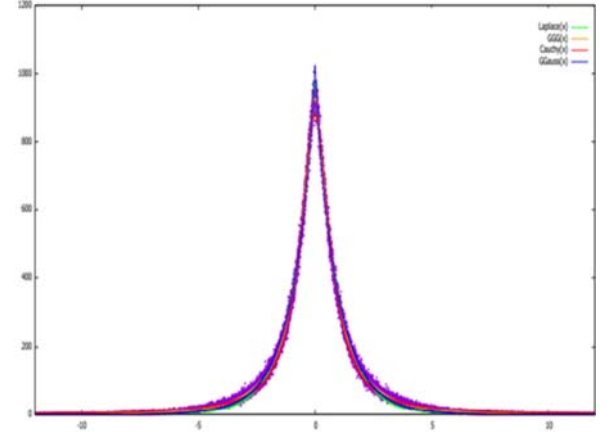
Şekil E.23

41/2 ağırlıklı ve 10^7 normalize edilmiş Fourier katsayılı 3.
Hecke eigenformun histogramı ve dağılımlar



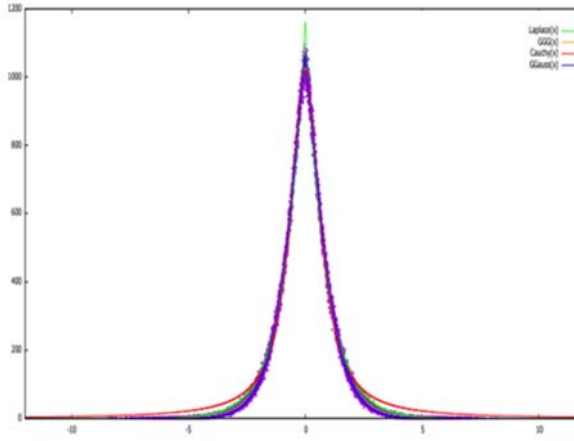
Şekil E.21

41/2 ağırlıklı ve 10^7 normalize edilmiş Fourier katsayılı 1.
Hecke eigenformun histogramı ve dağılımlar



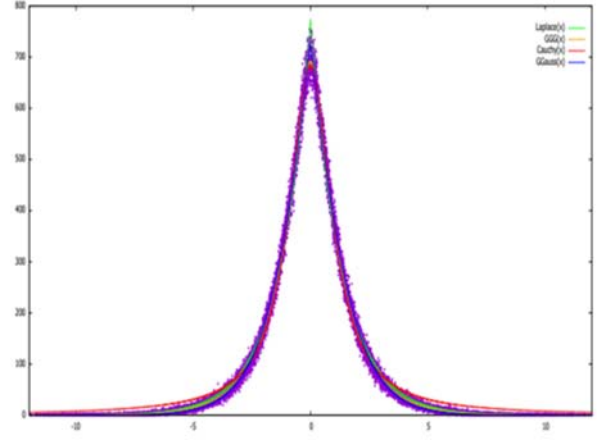
Şekil E.24

43/2 ağırlıklı ve 10^7 normalize edilmiş Fourier katsayılı 1.
Hecke eigenformun histogramı ve dağılımlar



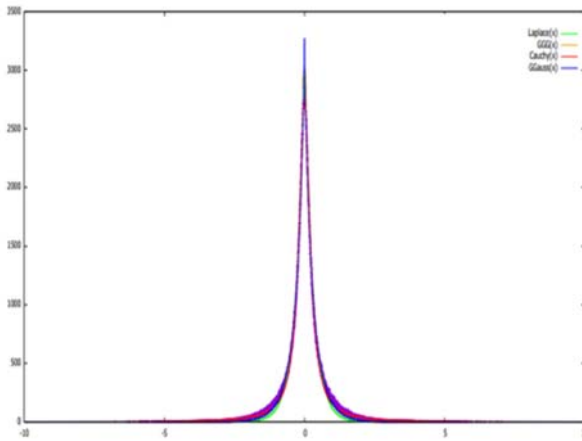
Şekil E.25

43/2 ağırlıklı ve 10^7 normalleştirilmiş Fourier katsayılı 2. Hecke eigenformun histogramı ve dağılımlar



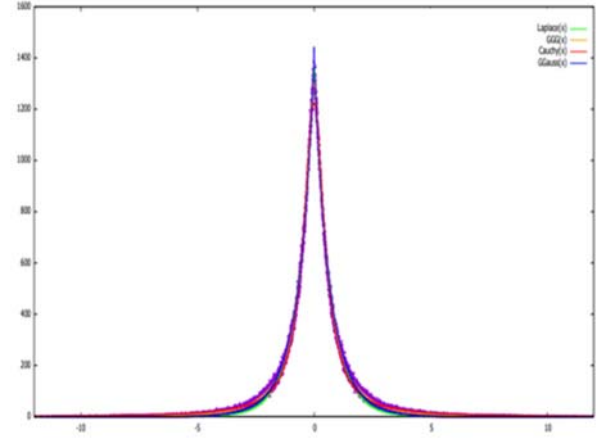
Şekil E.28

45/2 ağırlıklı ve 10^7 normalleştirilmiş Fourier katsayılı 2. Hecke eigenformun histogramı ve dağılımlar



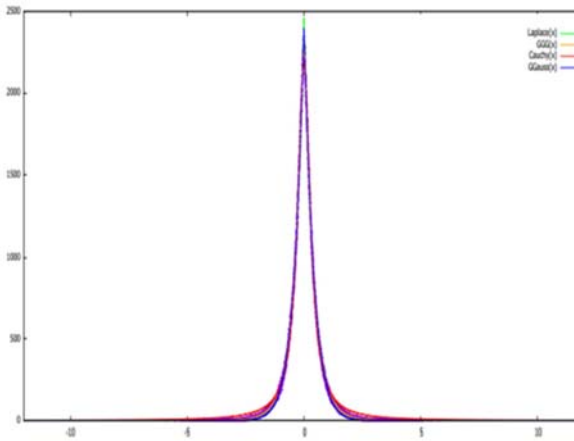
Şekil E.26

43/2 ağırlıklı ve 10^7 normalleştirilmiş Fourier katsayılı 3. Hecke eigenformun histogramı ve dağılımlar



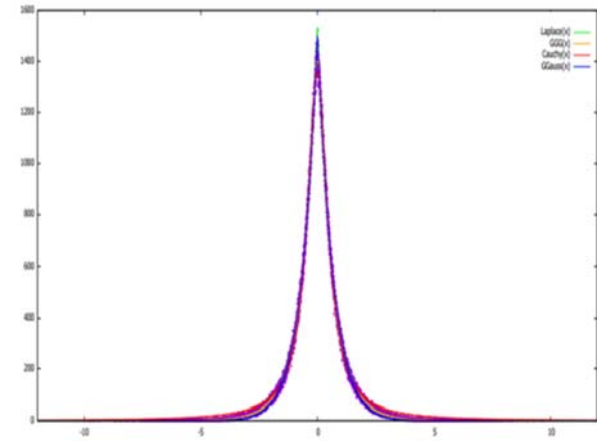
Şekil E.29

45/2 ağırlıklı ve 10^7 normalleştirilmiş Fourier katsayılı 3. Hecke eigenformun histogramı ve dağılımlar



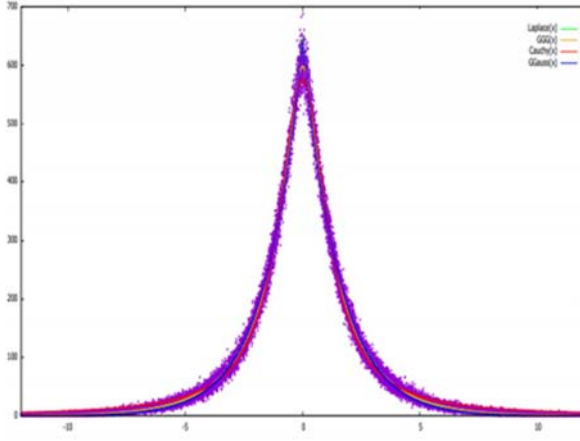
Şekil E.27

45/2 ağırlıklı ve 10^7 normalleştirilmiş Fourier katsayılı 1. Hecke eigenformun histogramı ve dağılımlar



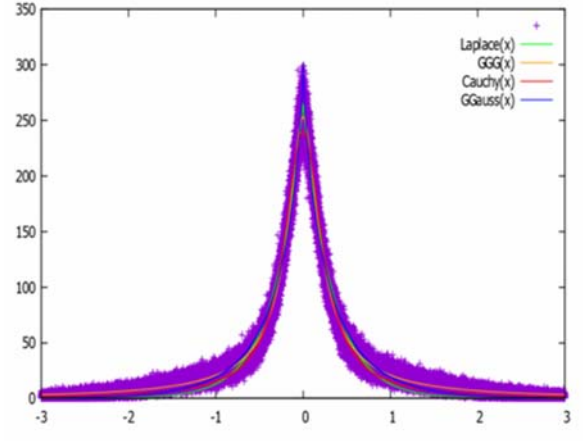
Şekil E.30

47/2 ağırlıklı ve 10^7 normalleştirilmiş Fourier katsayılı 1. Hecke eigenformun histogramı ve dağılımlar



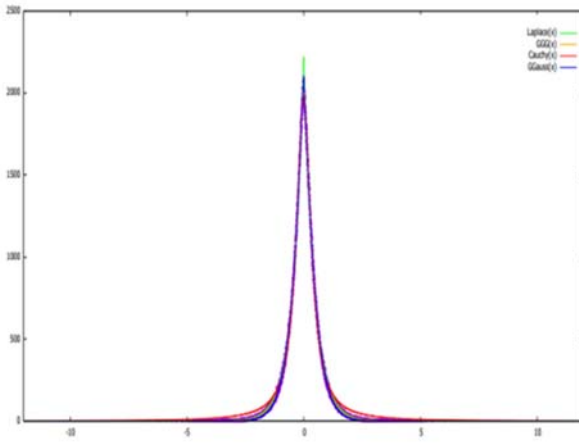
Şekil E.31

47/2 ağırlıklı ve 10^7 normalleştirilmiş Fourier katsayılı 2.
Hecke eigenformun histogramı ve dağılımlar



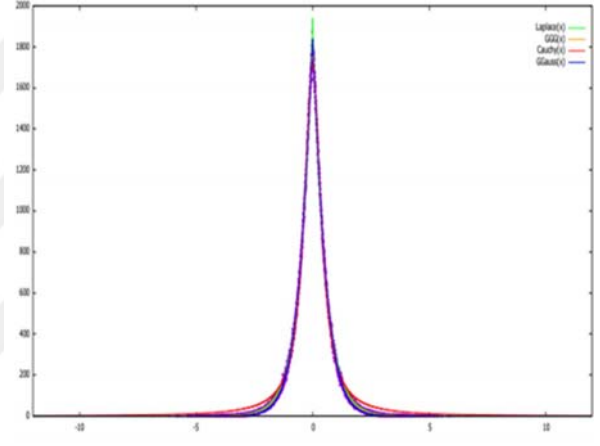
Şekil E.34

49/2 ağırlıklı ve 10^7 normalleştirilmiş Fourier katsayılı 2.
Hecke eigenformun histogramı ve dağılımlar



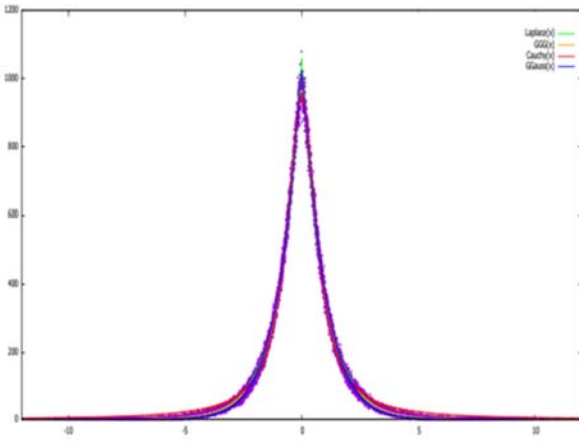
Şekil E.32

47/2 ağırlıklı ve 10^7 normalleştirilmiş Fourier katsayılı 3.
Hecke eigenformun histogramı ve dağılımlar



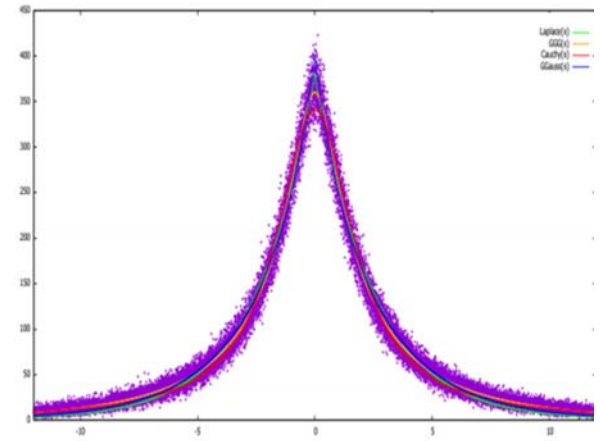
Şekil E.35

49/2 ağırlıklı ve 10^7 normalleştirilmiş Fourier katsayılı 3.
Hecke eigenformun histogramı ve dağılımlar



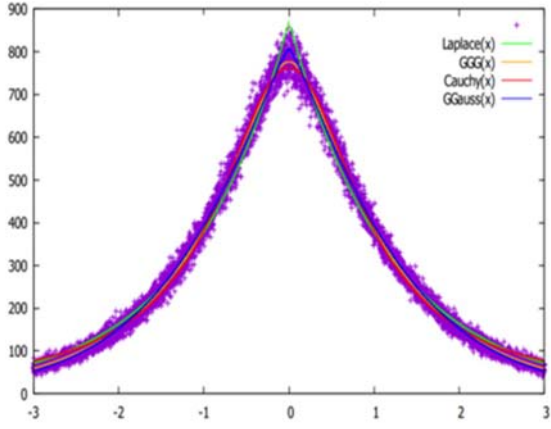
Şekil E.33

47/2 ağırlıklı ve 10^7 normalleştirilmiş Fourier katsayılı 1.
Hecke eigenformun histogramı ve dağılımlar



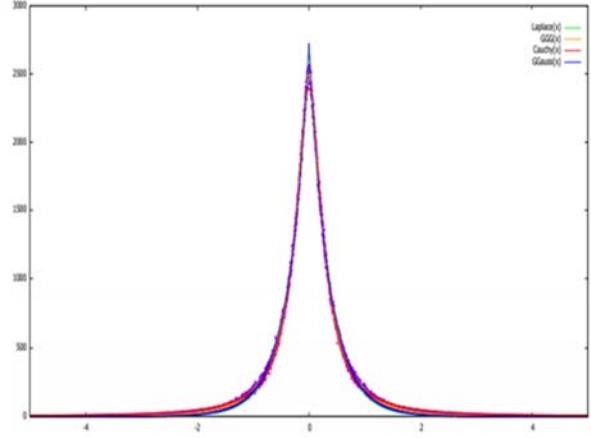
Şekil E.36

49/2 ağırlıklı ve 10^7 normalleştirilmiş Fourier katsayılı 4.
Hecke eigenformun histogramı ve dağılımlar



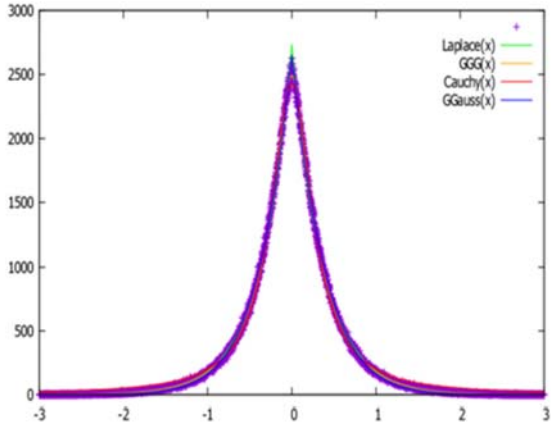
Şekil E.37

51/2 ağırlıklı ve 10^7 normalleştirilmiş Fourier katsayılı 1.
Hecke eigenformun histogramı ve dağılımlar



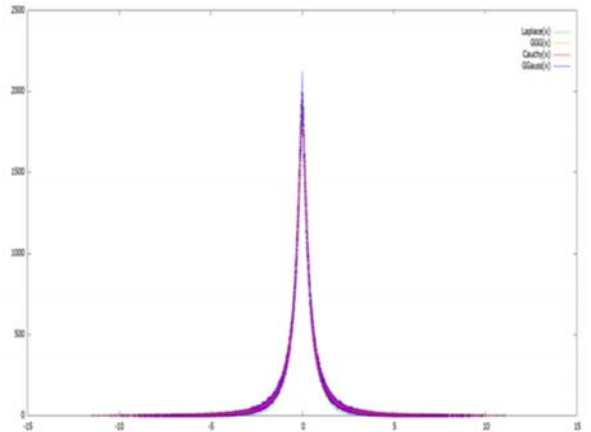
Şekil E.40

53/2 ağırlıklı ve 10^7 normalleştirilmiş Fourier katsayılı 1.
Hecke eigenformun histogramı ve dağılımlar



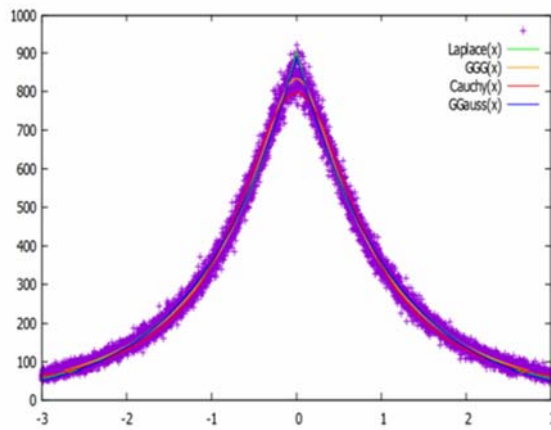
Şekil E.38

51/2 ağırlıklı ve 10^7 normalleştirilmiş Fourier katsayılı 2.
Hecke eigenformun histogramı ve dağılımlar



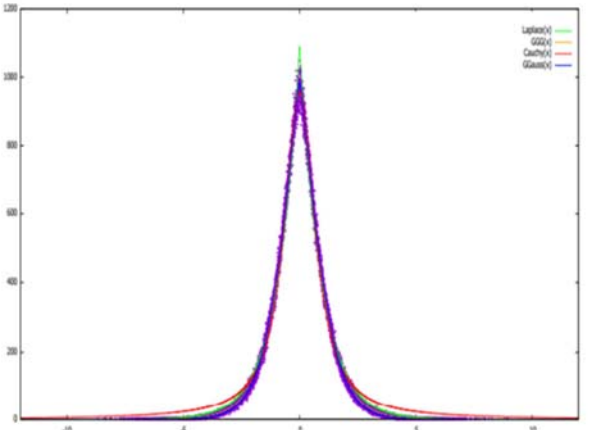
Şekil E.41

53/2 ağırlıklı ve 10^7 normalleştirilmiş Fourier katsayılı 2.
Hecke eigenformun histogramı ve dağılımlar



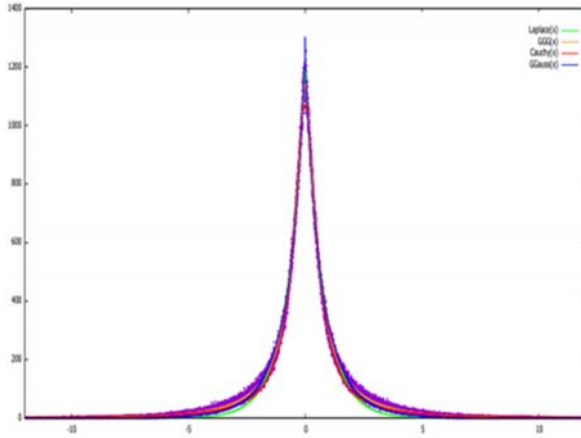
Şekil E.39

51/2 ağırlıklı ve 10^7 normalleştirilmiş Fourier katsayılı 3.
Hecke eigenformun histogramı ve dağılımlar



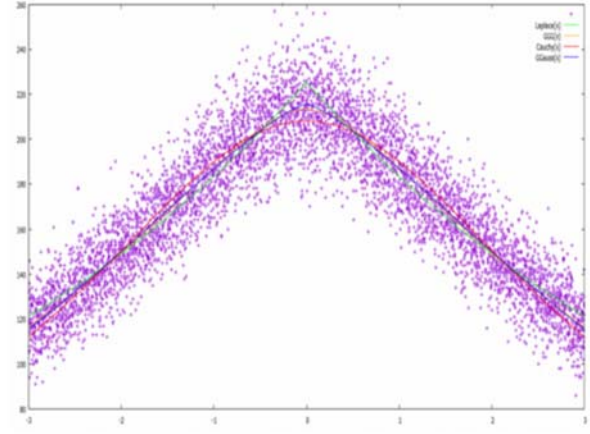
Şekil E.42

53/2 ağırlıklı ve 10^7 normalleştirilmiş Fourier katsayılı 3.
Hecke eigenformun histogramı ve dağılımlar



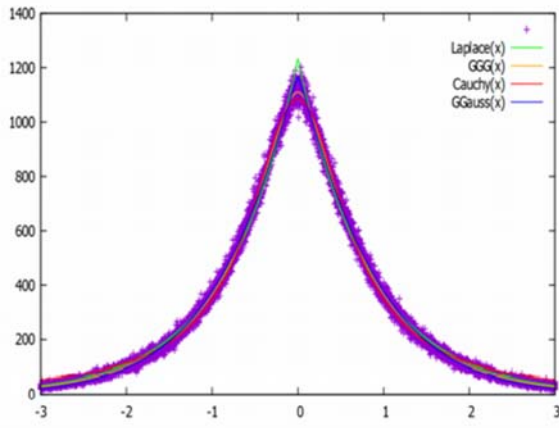
Şekil E.43

53/2 ağırlıklı ve 10^7 normalleştirilmiş Fourier katsayılı 4.
Hecke eigenformun histogramı ve dağılımlar



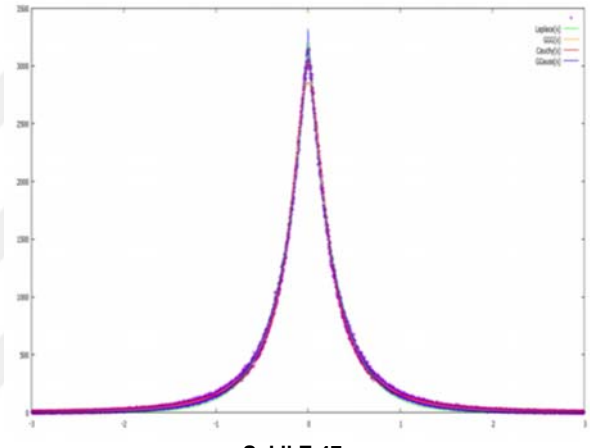
Şekil E.46

55/2 ağırlıklı ve 10^7 normalleştirilmiş Fourier katsayılı 3.
Hecke eigenformun histogramı ve dağılımlar



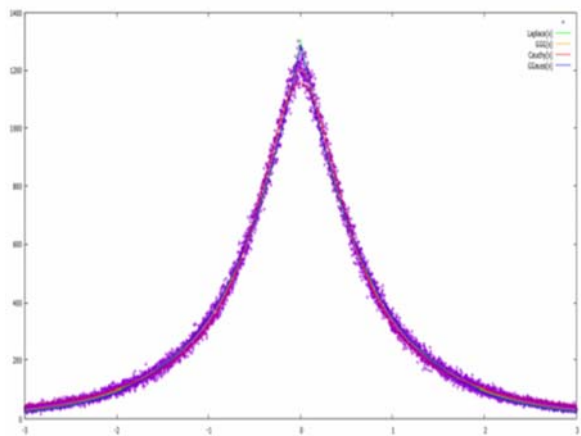
Şekil E.44

55/2 ağırlıklı ve 10^7 normalleştirilmiş Fourier katsayılı 1.
Hecke eigenformun histogramı ve dağılımlar



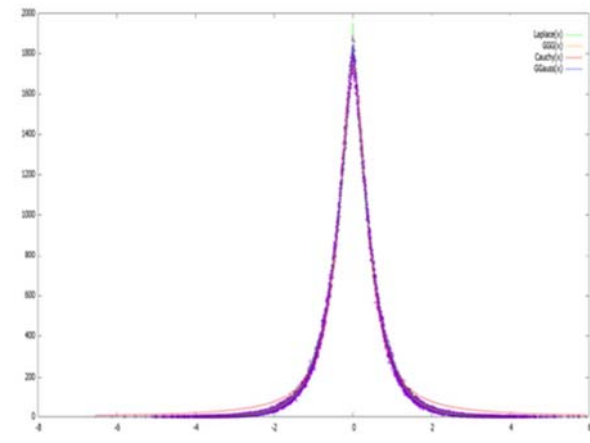
Şekil E.47

55/2 ağırlıklı ve 10^7 normalleştirilmiş Fourier katsayılı 4.
Hecke eigenformun histogramı ve dağılımlar



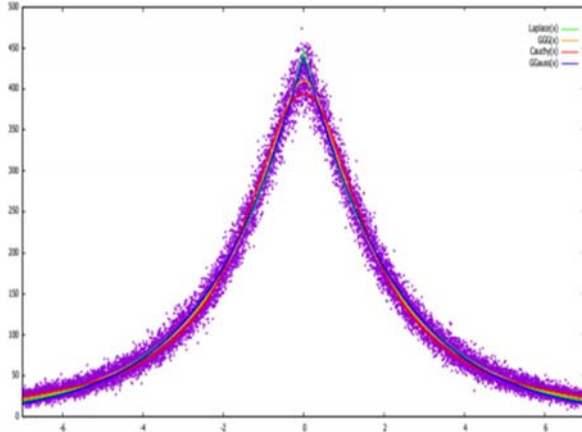
Şekil E.45

55/2 ağırlıklı ve 10^7 normalleştirilmiş Fourier katsayılı 2.
Hecke eigenformun histogramı ve dağılımlar



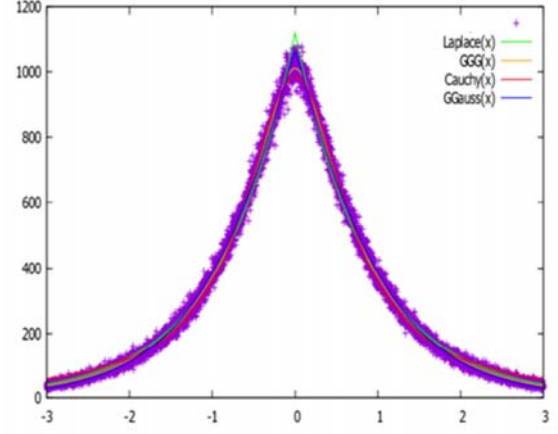
Şekil E.48

57/2 ağırlıklı ve 10^7 normalleştirilmiş Fourier katsayılı 1.
Hecke eigenformun histogramı ve dağılımlar



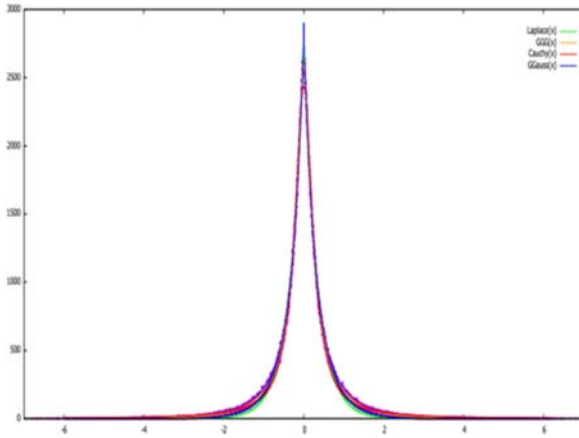
Şekil E.49

57/2 ağırlıklı ve 10^7 normalleştirilmiş Fourier katsayılı 2.
Hecke eigenformun histogramı ve dağılımlar



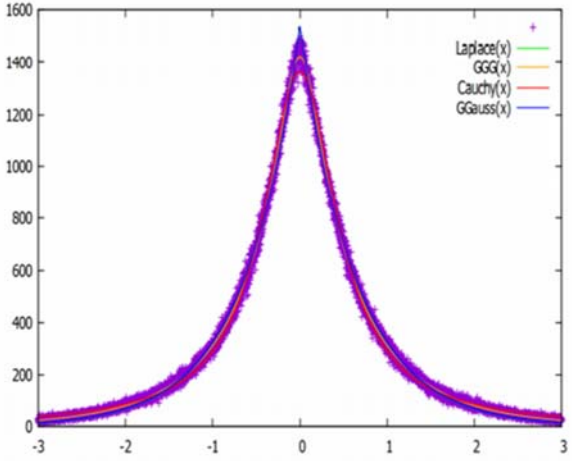
Şekil E.52

59/2 ağırlıklı ve 10^7 normalleştirilmiş Fourier katsayılı 1.
Hecke eigenformun histogramı ve dağılımlar



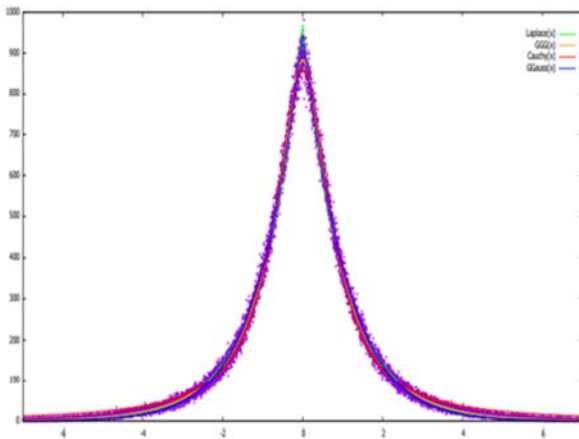
Şekil E.50

57/2 ağırlıklı ve 10^7 normalleştirilmiş Fourier katsayılı 3.
Hecke eigenformun histogramı ve dağılımlar



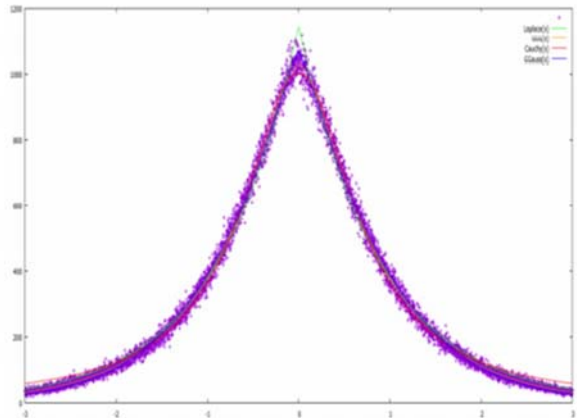
Şekil E.53

59/2 ağırlıklı ve 10^7 normalleştirilmiş Fourier katsayılı 2.
Hecke eigenformun histogramı ve dağılımlar



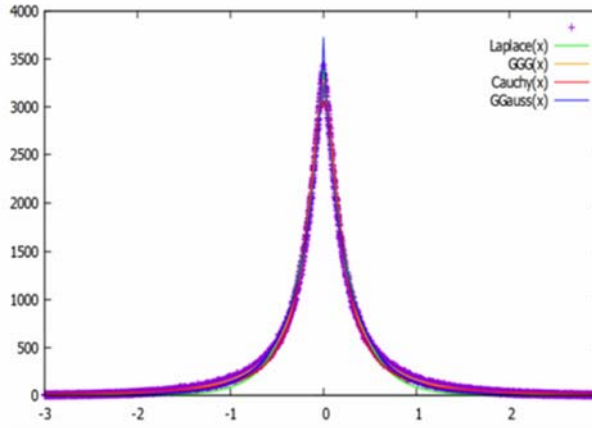
Şekil E.51

57/2 ağırlıklı ve 10^7 normalleştirilmiş Fourier katsayılı 4.
Hecke eigenformun histogramı ve dağılımlar



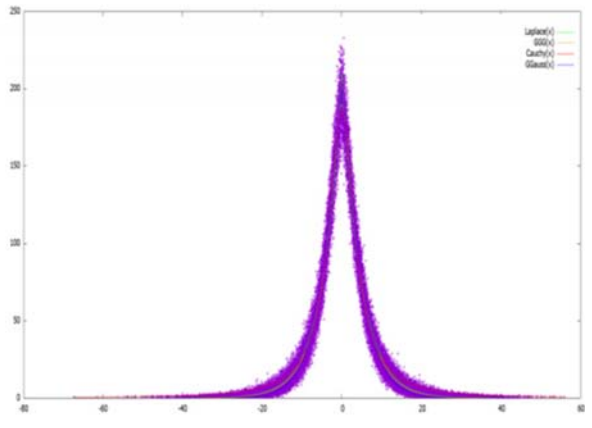
Şekil E.54

59/2 ağırlıklı ve 10^7 normalleştirilmiş Fourier katsayılı 3.
Hecke eigenformun histogramı ve dağılımlar



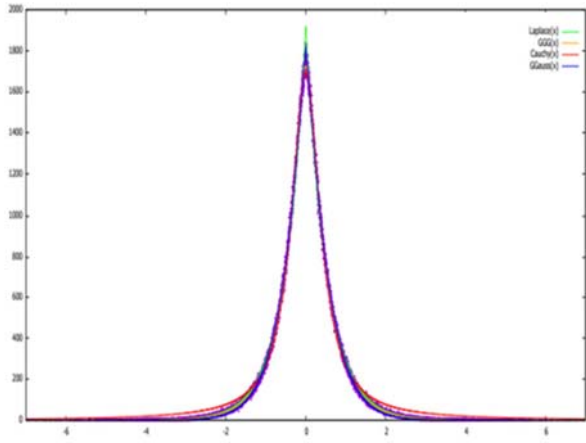
Şekil E.55

59/2 ağırlıklı ve 10^7 normalleştirilmiş Fourier katsayılı 4.
Hecke eigenformun histogramı ve dağılımlar



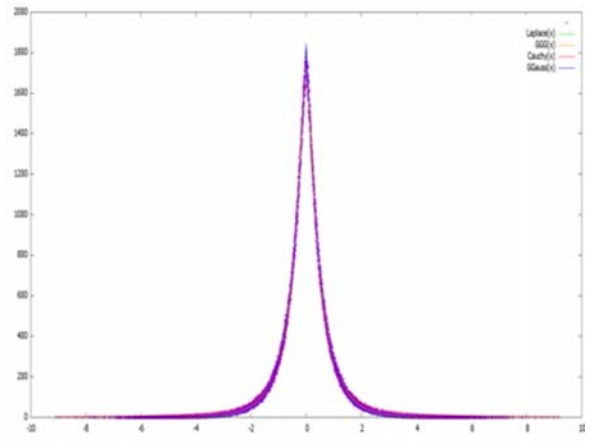
Şekil E.58

61/2 ağırlıklı ve 10^7 normalleştirilmiş Fourier katsayılı 3.
Hecke eigenformun histogramı ve dağılımlar



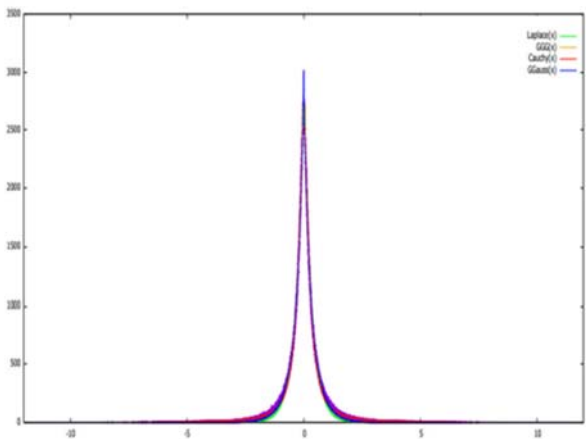
Şekil E.56

61/2 ağırlıklı ve 10^7 normalleştirilmiş Fourier katsayılı 1.
Hecke eigenformun histogramı ve dağılımlar



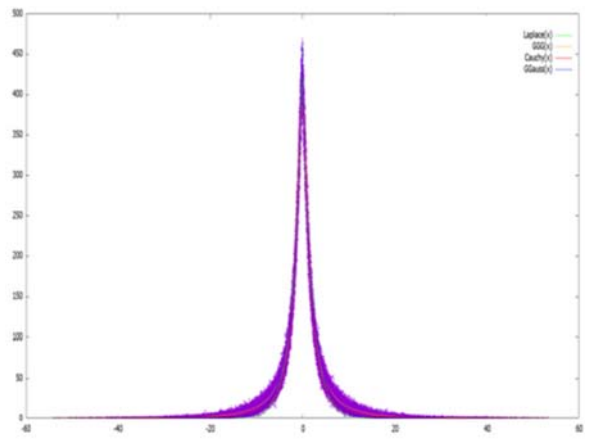
Şekil E.59

61/2 ağırlıklı ve 10^7 normalleştirilmiş Fourier katsayılı 4.
Hecke eigenformun histogramı ve dağılımlar



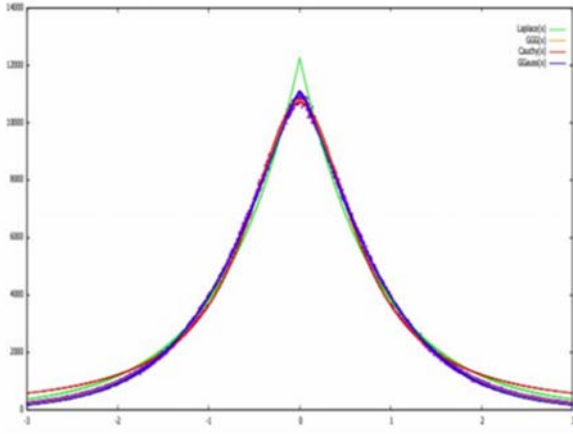
Şekil E.57

61/2 ağırlıklı ve 10^7 normalleştirilmiş Fourier katsayılı 2.
Hecke eigenformun histogramı ve dağılımlar



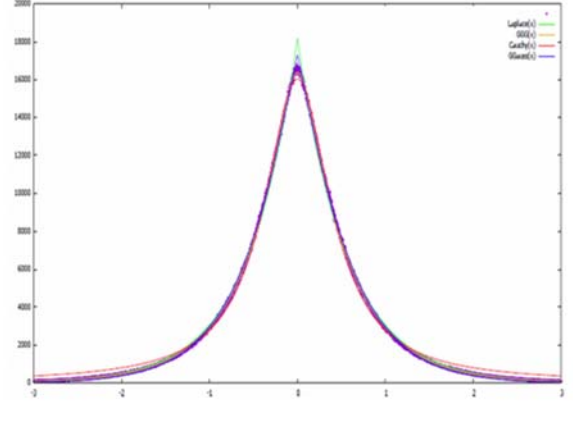
Şekil E.60

61/2 ağırlıklı ve 10^7 normalleştirilmiş Fourier katsayılı 5.
Hecke eigenformun histogramı ve dağılımlar



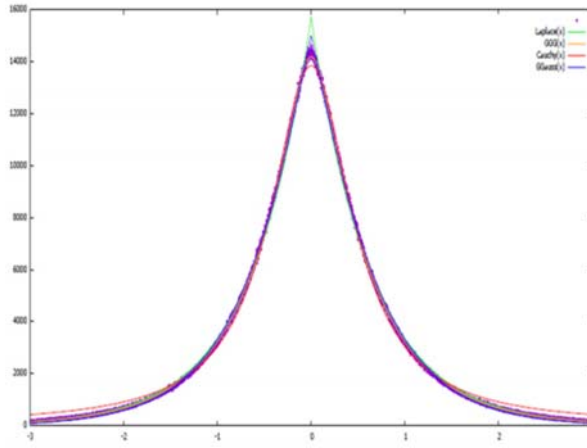
Şekil E.61

13/2 ağırlıklı ve 10^8 normalize edilmiş Fourier katsayılı Hecke eigenformun histogramı ve dağılımlar



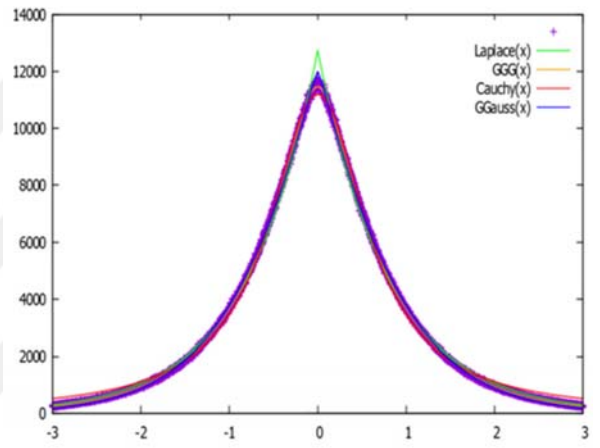
Şekil E.64

21/2 ağırlıklı ve 10^8 normalize edilmiş Fourier katsayılı Hecke eigenformun histogramı ve dağılımlar



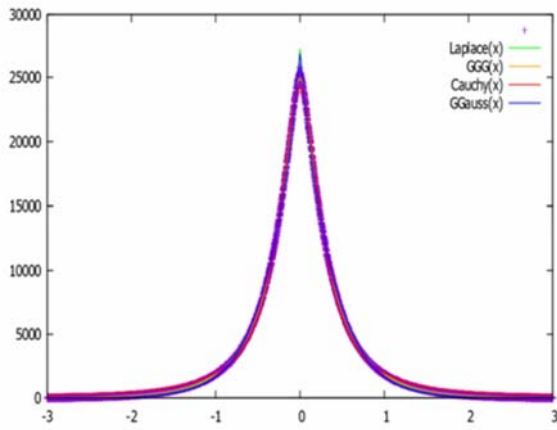
Şekil E.62

17/2 ağırlıklı ve 10^8 normalize edilmiş Fourier katsayılı Hecke eigenformun histogramı ve dağılımlar



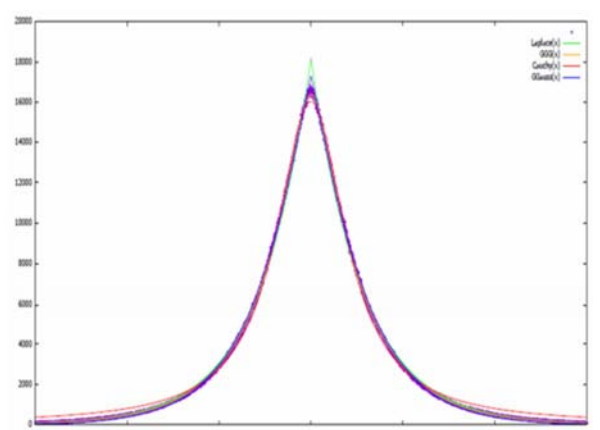
Şekil E.65

23/2 ağırlıklı ve 10^8 normalize edilmiş Fourier katsayılı Hecke eigenformun histogramı ve dağılımlar



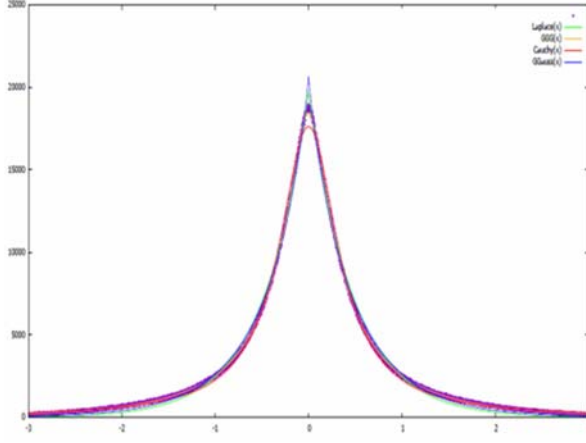
Şekil E.63

19/2 ağırlıklı ve 10^8 normalize edilmiş Fourier katsayılı Hecke eigenformun histogramı ve dağılımlar



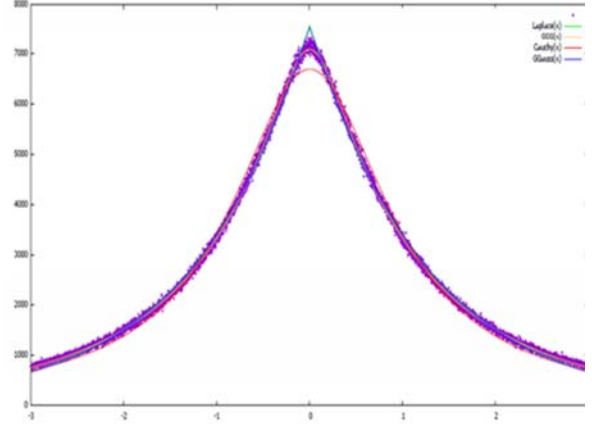
Şekil E.66

25/2 ağırlıklı ve 10^8 normalize edilmiş Fourier katsayılı 1. Hecke eigenformun histogramı ve dağılımlar



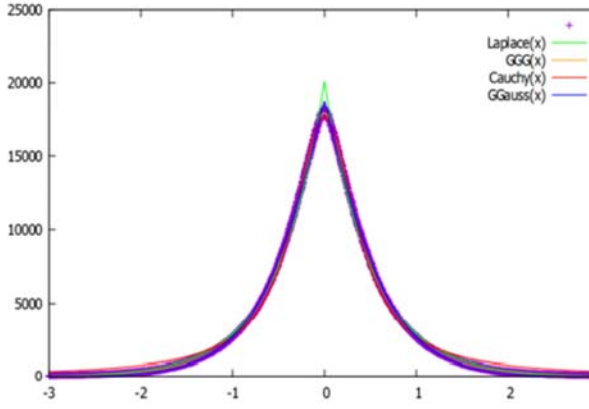
Şekil E.67

25/2 ağırlıklı ve 10^8 normleştirilmiş Fourier katsayılı 2. Hecke eigenformun histogramı ve dağılımlar



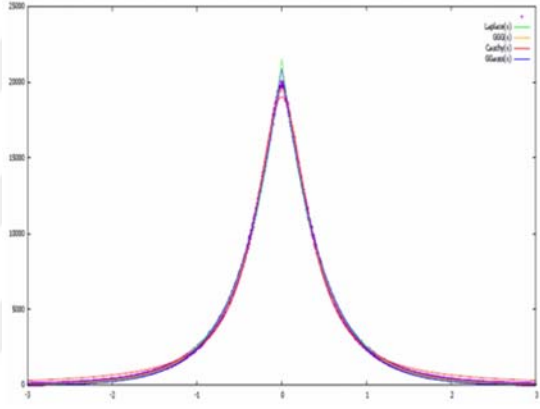
Şekil E.69

29/2 ağırlıklı ve 10^8 normleştirilmiş Fourier katsayılı 1. Hecke eigenformun histogramı ve dağılımlar



Şekil E.68

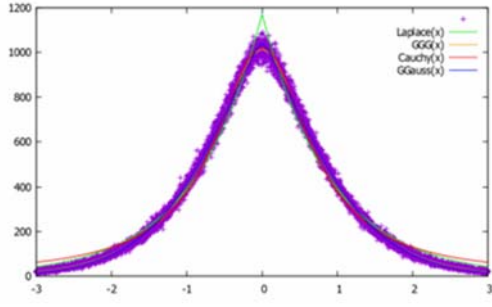
27/2 ağırlıklı ve 10^8 normleştirilmiş Fourier katsayılı Hecke eigenformun histogramı ve dağılımlar



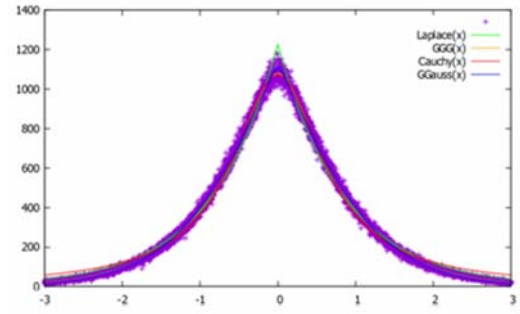
Şekil E.70

29/2 ağırlıklı ve 10^8 normleştirilmiş Fourier katsayılı 2. Hecke eigenformun histogramı ve dağılımlar

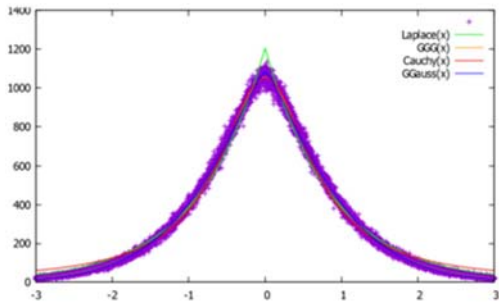
EK 2) 13/2 AĞIRLIKLI VE $2 \cdot 10^8$ KATSAYILI HİSTOGRAMLARIN 20 ALT KÜME OLARAK GRAFİKLERİ



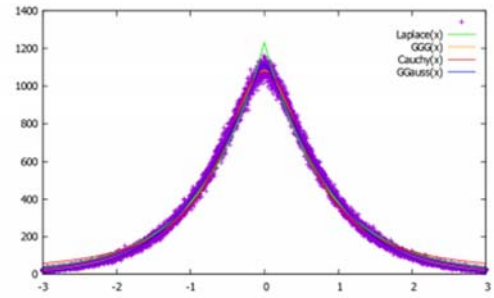
Şekil E.71. 1. Kısım



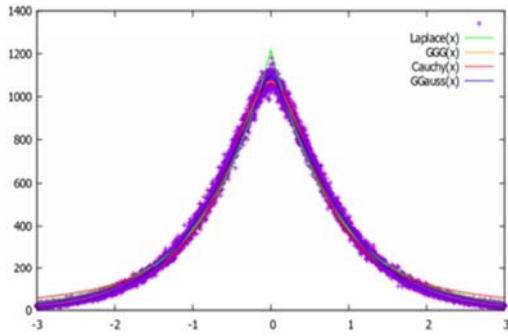
Şekil E.75. 5. Kısım



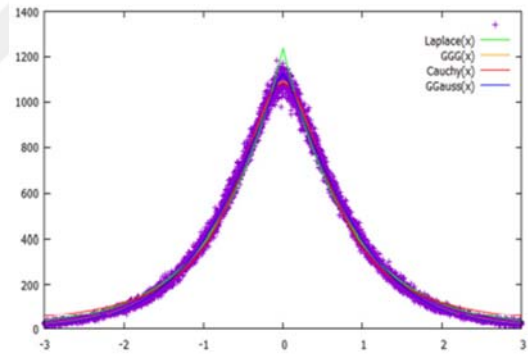
Şekil E.72. 2. Kısım



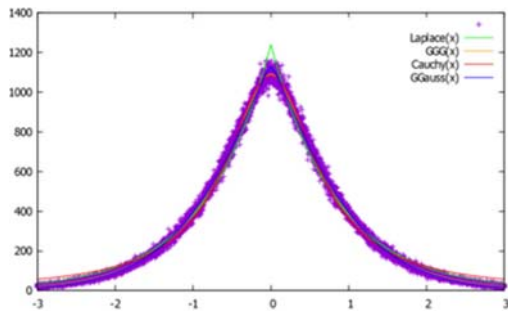
Şekil E.76. 6. Kısım



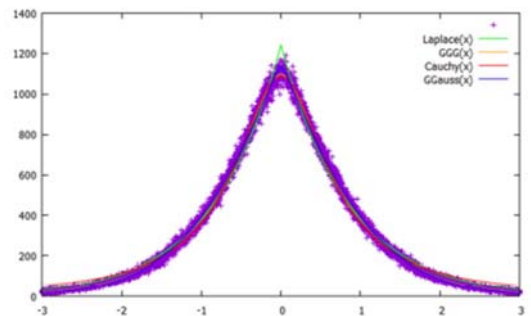
Şekil E.73. 3. Kısım



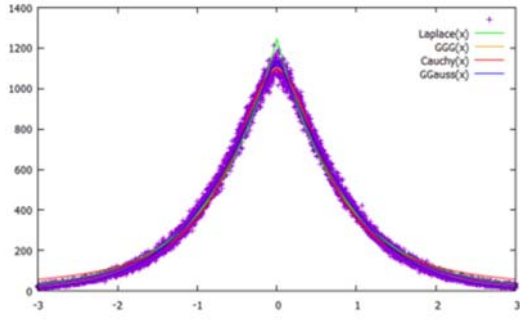
Şekil E.77. 7. Kısım



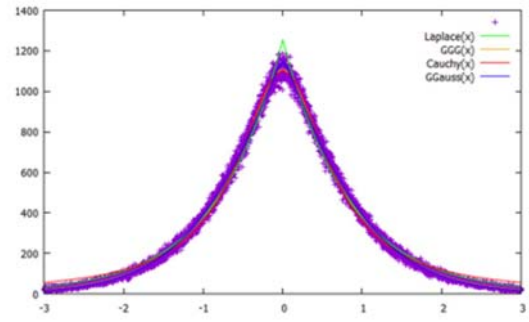
Şekil E.74. 4. Kısım



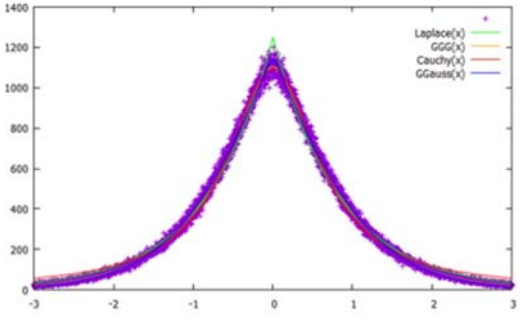
Şekil E.78. 8. Kısım



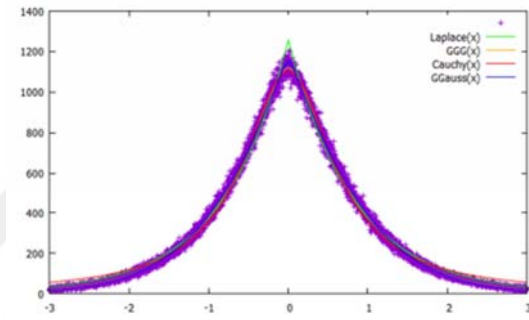
Şekil E.79. 9. Kısım



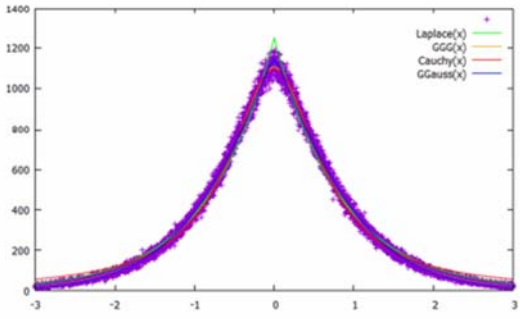
Şekil E.83. 13. Kısım



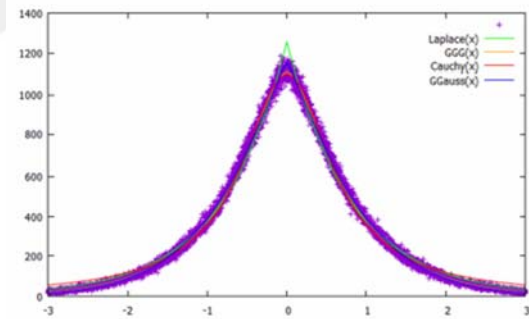
Şekil E.80. 10. Kısım



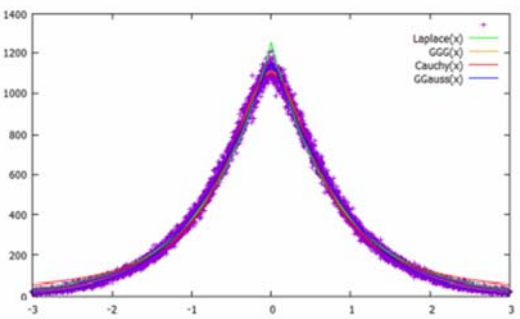
Şekil E.84. 14. Kısım



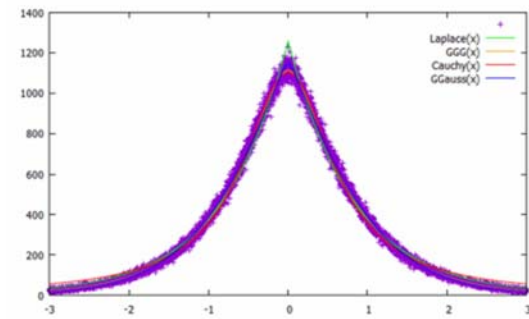
Şekil E.81. 11. Kısım



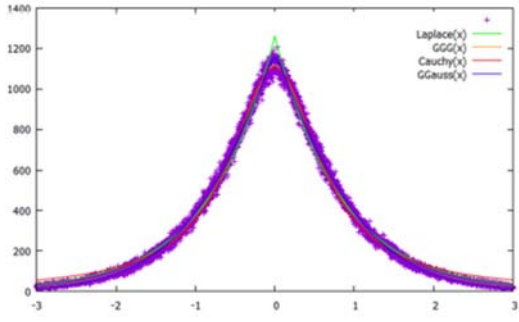
Şekil E.85. 15. Kısım



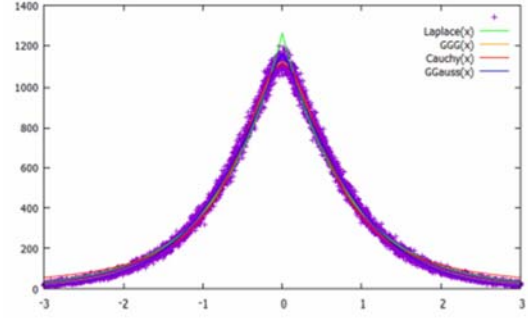
Şekil E.82. 12. Kısım



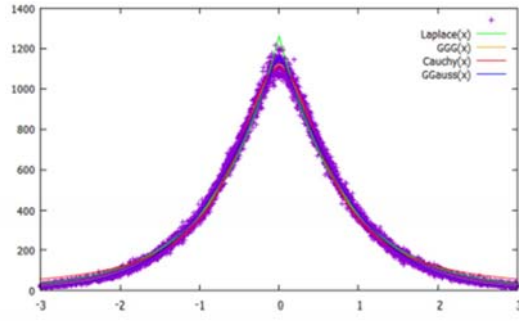
Şekil E.86. 16. Kısım



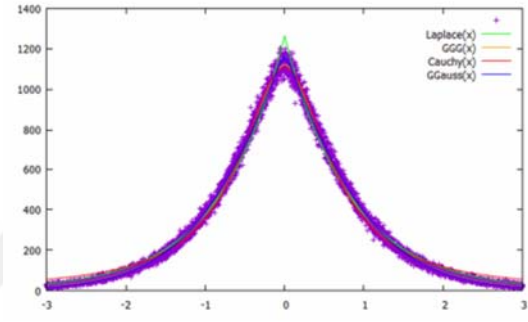
Şekil E.87. 17. Kısım



Şekil E.89. 19. Kısım



Şekil E.88. 18. Kısım



Şekil E.90. 20. Kısım

EK 3) EN UYGUN PARAMETRELERİN TABLOLARI

Tablo E. 1. 10^7 Katsayılı GGG dağılımı için en iyi uyum parametreleri

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
13/2	0.622	1177.4	0.967	0.045
17/2	0.470	1986.6	0.575	0.043
19/2	0.386	4595.4	0.318	0.018
21/2	0.477	2268.8	0.506	0.032
23/2	0.527	1358.6	0.800	0.039
25/2(1)	0.384	2065.3	0.570	0.057
25/2(2)	0.219	12428.5	0.262	0.048
27/2	0.542	2129.2	0.498	0.018
29/2	0.354	1272.2	0.789	0.147
31/2(1)	0.468	2404.4	0.469	0.019
31/2(2)	0.375	2162.2	0.555	0.061
33/2(1)	0.508	1510.6	0.721	0.038
33/2(2)	0.338	4206.6	0.3526	0.017
35/2(1)	0.185	30546.8	0.195	0.014
35/2(2)	0.595	61.6	30.3975	6.408
37/2(1)	0.248	7668.0	0.292	0.022
37/2(2)	0.384	3432.2	0.397	0.035
37/2(3)	0.414	620.5	1.507	0.415
39/2(1)	0.397	2286.9	0.519	0.035
39/2(2)	0.508	2217.3	0.493	0.021
41/2(1)	0.439	1830.7	0.609	0.037
41/2(2)	0.334	4608.3	0.329	0.012
41/2(3)	0.441	1534.6	0.708	0.048
43/2(1)	0.307	2131.8	0.552	0.080
43/2(2)	0.548	1252.9	0.879	0.043
43/2(3)	0.232	12488.3	0.238	0.011
45/2(1)	0.419	3505.8	0.357	0.012
45/2(2)	0.492	928.6	1.172	0.116
45/2(3)	0.299	3046.2	0.443	0.038
47/2(1)	0.408	2253.6	0.521	0.033

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
47/2(2)	0.403	929.1	1.049	0.147
47/2(3)	0.475	2714.2	0.412	0.013
49/2(1)	0.439	1428.2	0.760	0.064
49/2(2)	0.094	798896	0.121	0.022
49/2(3)	0.480	2317.8	0.474	0.015
49/2(4)	0.269	1124.0	0.782	0.648
51/2(1)	0.509	1026.3	1.075	0.094
51/2(2)	0.442	3572.5	0.335	0.008
51/2(3)	0.369	1488.4	0.713	0.091
53/2(1)	0.339	5188.6	0.306	0.012
53/2(2)	0.274	4932.5	0.341	0.017
53/2(3)	0.570	1143.5	0.979	0.0478
53/2(4)	0.220	5509.5	0.350	0.067
55/2(1)	0.475	1518.7	0.718	0.043
55/2(2)	0.392	1998.2	0.574	0.043
55/2(3)	0.567	235.1	5.046	0.286
55/2(4)	0.338	5684.9	0.280	0.006
57/2(1)	0.488	2320.4	0.473	0.016
57/2(2)	0.378	735.0	1.237	0.422
57/2(3)	0.276	7174.6	0.281	0.011
57/2(4)	0.415	1401.3	0.771	0.083
59/2(1)	0.479	1351.5	0.796	0.047
59/2(2)	0.365	2562.3	0.481	0.031
59/2(3)	0.515	1281.0	0.841	0.038
59/2(4)	0.249	10585.4	0.241	0.006
61/2(1)	0.465	2445.7	0.465	0.020
61/2(2)	0.283	6542.5	0.286	0.008
61/2(3)	0.450	285.4	3.280	1.910
61/2(4)	0.395	2718.4	0.445	0.018
61/2(5)	0.167	4656.1	0.375	0.580

Tablo E. 2. 10^7 Katsayılı GG dağılımı için en iyi uyum parametreleri

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
13/2	0.677	1038	1.08
17/2	0.581	1406	0.71
19/2	0.538	2513	0.37
21/2	0.585	1622	0.60
23/2	0.599	1128	0.93
25/2(1)	0.525	1232	0.80
25/2(2)	0.467	1946	0.51
27/2	0.615	1756	0.54
29/2	0.529	708	1.37
31/2(1)	0.560	1817	0.53
31/2(2)	0.523	1232	0.80
33/2(1)	0.590	1211	0.85
33/2(2)	0.481	2243	0.44
35/2(1)	0.428	3402	0.32
35/2(2)	0.646	57	43.86
37/2(1)	0.437	2291	0.45
37/2(2)	0.540	1862	0.52
37/2(3)	0.529	418	2.55
39/2(1)	0.518	1470	0.68
39/2(2)	0.593	1744	0.56
41/2(1)	0.540	1319	0.76
41/2(2)	0.471	2532	0.40
41/2(3)	0.539	1123	0.91
43/2(1)	0.458	1025	0.93
43/2(2)	0.614	1061	1.02
43/2(3)	0.426	3277	0.33
45/2(1)	0.528	2396	0.40
45/2(2)	0.579	724	1.55
45/2(3)	0.448	1444	0.67
47/2(1)	0.524	1499	0.66

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
47/2(2)	0.509	642	1.57
47/2(3)	0.562	2105	0.45
49/2(1)	0.542	1023	1.01
49/2(2)	0.390	3004	0.36
49/2(3)	0.561	1841	0.53
49/2(4)	0.453	400	2.14
51/2(1)	0.606	807	1.39
51/2(2)	0.537	2644	0.36
51/2(3)	0.519	889	1.10
53/2(1)	0.486	2725	0.37
53/2(2)	0.426	2126	0.48
53/2(3)	0.630	986	1.13
53/2(4)	0.417	1304	0.72
55/2(1)	0.568	1165	0.88
55/2(2)	0.516	1287	0.77
55/2(3)	0.670	216	7.00
55/2(4)	0.463	3322	0.31
57/2(1)	0.568	1844	0.53
57/2(2)	0.529	438	2.36
57/2(3)	0.438	2903	0.36
57/2(4)	0.530	943	1.08
59/2(1)	0.568	1060	0.98
59/2(2)	0.496	1539	0.64
59/2(3)	0.586	1068	0.99
59/2(4)	0.416	3728	0.30
61/2(1)	0.562	1818	0.54
61/2(2)	0.430	3023	0.35
61/2(3)	0.579	199	6.74
61/2(4)	0.502	1848	0.54
61/2(5)	0.406	472	1.61

Tablo E. 3. 10^7 Katsayılı Laplace dağılımı için en iyi uyum parametreleri

	b	c
13/2	1172	0.908
17/2	1503	0.683
19/2	2600	0.388
21/2	1740	0.592
23/2	1220	0.850
25/2(1)	1260	0.791
25/2(2)	1884	0.511
27/2	1923	0.542
29/2	725	1.317
31/2(1)	1914	0.533
31/2(2)	1258	0.789
33/2(1)	1302	0.793
33/2(2)	2202	0.444
35/2(1)	3147	0.295
35/2(2)	62	17.400
37/2(1)	2140	0.440
37/2(2)	1930	0.522
37/2(3)	429	2.341
39/2(1)	1495	0.669
39/2(2)	1881	0.550

	b	c
41/2(1)	1367	0.740
41/2(2)	2458	0.395
41/2(3)	1163	0.897
43/2(1)	981	0.980
43/2(2)	1160	0.899
43/2(3)	3021	0.309
45/2(1)	2461	0.409
45/2(2)	774	1.331
45/2(3)	1366	0.699
47/2(1)	1532	0.655
47/2(2)	647	1.539
47/2(3)	2219	0.460
49/2(1)	1063	0.953
49/2(2)	2650	0.333
49/2(3)	1940	0.527
49/2(4)	381	2.493
51/2(1)	871	1.196
51/2(2)	2734	0.370
51/2(3)	903	1.077
53/2(1)	2687	0.364

	b	c
53/2(2)	1958	0.479
53/2(3)	1090	0.962
53/2(4)	1188	0.778
55/2(1)	1233	0.830
55/2(2)	1306	0.760
55/2(3)	225	4.846
55/2(4)	3197	0.303
57/2(1)	1954	0.525
57/2(2)	448	2.206
57/2(3)	2716	0.349
57/2(4)	969	1.039
59/2(1)	1121	0.912
59/2(2)	1533	0.642
59/2(3)	1144	0.902
59/2(4)	3389	0.274
61/2(1)	1918	0.532
61/2(2)	2796	0.336
61/2(3)	211	4.830
61/2(4)	1852	0.536
61/2(5)	423	2.131

Tablo E. 4. 10^7 Katsayılı Cauchy dağılımı için en iyi uyum parametreleri

	a	b	c
13/2	143	0.14	0.49
17/2	154	0.12	0.61
19/2	152	0.07	0.82
21/2	150	0.10	0.64
23/2	156	0.15	0.54
25/2(1)	163	0.15	0.59
25/2(2)	169	0.10	0.78
27/2	148	0.09	0.66
29/2	162	0.25	0.46
31/2(1)	156	0.09	0.68
31/2(2)	163	0.15	0.59
33/2(1)	156	0.14	0.56
33/2(2)	163	0.08	0.81
35/2(1)	212	0.07	1.17
35/2(2)	422	7.75	0.19
37/2(1)	200	0.10	0.93
37/2(2)	156	0.09	0.71
37/2(3)	5310	13.99	1.96
39/2(1)	175	0.13	0.67
39/2(2)	145	0.09	0.66
41/2(1)	161	0.13	0.61
41/2(2)	196	0.09	0.95
41/2(3)	147	0.14	0.53
43/2(1)	192	0.22	0.60
43/2(2)	145	0.14	0.51
43/2(3)	243	0.09	1.23
45/2(1)	287	0.13	1.10
45/2(2)	153	0.24	0.44
45/2(3)	206	0.17	0.74
47/2(1)	164	0.12	0.66

	a	b	c
47/2(2)	165	0.29	0.43
47/2(3)	151	0.08	0.74
49/2(1)	163	0.17	0.54
49/2(2)	211	0.09	1.14
49/2(3)	152	0.09	0.70
49/2(4)	1070	3.14	-0.90
51/2(1)	13	0.02	0.13
51/2(2)	12	0.00	0.23
51/2(3)	952	1.20	1.23
53/2(1)	169	0.07	0.91
53/2(2)	219	0.12	0.94
53/2(3)	144	0.15	0.49
53/2(4)	216	0.20	0.73
55/2(1)	580	0.54	1.06
55/2(2)	1857	1.61	2.04
55/2(3)	1459	7.01	0.82
55/2(4)	3681	1.29	4.70
57/2(1)	149	0.59	0.69
57/2(2)	65049	164.83	7.08
57/2(3)	208	0.09	1.05
57/2(4)	163	0.19	0.52
59/2(1)	1383	1.41	1.57
59/2(2)	2525	1.86	2.62
59/2(3)	385	28.90	24.97
59/2(4)	88133	0.30	2.55
61/2(1)	151	0.09	0.69
61/2(2)	242	0.10	1.17
61/2(3)	3403	18.40	-1.07
61/2(4)	169	0.10	0.74
61/2(5)	1346	3.52	-1.12

Tablo E. 5. 10^7 Katsayılı tüm örnekler için RMS değerleri

	GG	GGG	Laplace	Cauchy
13/2	19	18	39	33
17/2	21	18	29	28
19/2	27	19	30	34
21/2	21	18	31	33
23/2	19	18	28	26
25/2(1)	21	18	22	22
25/2(2)	33	19	35	25
27/2	19	17	37	41
29/2	18	16	18	20
31/2(1)	22	19	28	33
31/2(2)	21	17	22	21
33/2(1)	19	18	28	27
33/2(2)	27	18	28	30
35/2(1)	48	20	57	40
35/2(2)	5	5	5	5
37/2(1)	26	14	30	25
37/2(2)	20	15	22	25
37/2(3)	9	9	9	10
39/2(1)	16	12	16	20
39/2(2)	17	15	28	34
41/2(1)	14	12	16	20
41/2(2)	22	14	24	27
41/2(3)	13	11	14	18
43/2(1)	13	9	13	14
43/2(2)	14	13	22	25
43/2(3)	41	19	50	41
45/2(1)	21	16	23	31
45/2(2)	11	10	13	16
45/2(3)	15	11	17	17
47/2(1)	16	13	16	21

	GG	GGG	Laplace	Cauchy
47/2(2)	10	9	10	12
47/2(3)	19	16	25	34
49/2(1)	13	11	14	17
49/2(2)	59	24	72	49
49/2(3)	17	15	23	31
49/2(4)	10	10	10	10
51/2(1)	18	17	24	20
51/2(2)	23	18	27	38
51/2(3)	20	17	20	21
53/2(1)	25	16	25	28
53/2(2)	20	12	26	25
53/2(3)	13	13	23	26
53/2(4)	17	10	20	17
55/2(1)	19	17	24	23
55/2(2)	21	18	22	23
55/2(3)	12	12	13	13
55/2(4)	30	18	34	39
57/2(1)	18	16	24	32
57/2(2)	12	12	12	12
57/2(3)	27	15	33	31
57/2(4)	13	11	14	16
59/2(1)	19	18	24	22
59/2(2)	23	17	23	25
59/2(3)	19	18	26	24
59/2(4)	40	19	54	48
61/2(1)	17	15	23	29
61/2(2)	34	18	43	42
61/2(3)	9	9	9	9
61/2(4)	17	13	17	23
61/2(5)	11	9	13	12