T.C.
KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

KUVVETSEL BÜZÜLMELERİN EN İYİ YAKINLIK NOKTALARI ÜZERİNE

Ayşenur TAŞDEMİR

HAZİRAN - 2021

Matematik Anabilim Dalında Ayşenur TAŞDEMİR tarafından hazırlanan KUVVETSEL BÜZÜLMELERİN EN İYİ YAKINLIK NOKTALARI ÜZERİNE Adlı Yüksek Lisans Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Ali OLGUN
Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve tezin Yüksek Lisans Tezi olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiğini onaylarım.

Prof. Dr. İshak ALTUN
Danışman

Jüri Üyeleri

Başkan	:	Prof. Dr. Hakan ŞİMŞEK	_______________
Üye(Danışman)	:	Prof. Dr. İshak ALTUN	_______________
Üye	:	Doç. Dr. Murat OLGUN	_______________

14.06.2021

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onaylamıştır.

Prof. Dr. Recep ÇALIN
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

KUVVETSEL BÜZÜLMELERİN EN İYİ YAKINLIK NOKTALARI ÜZERİNE

TAŞDEMİR, Ayşenur
Kırıkkale Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Prof. Dr. İshak ALTUN
Haziran 2021, 17 sayfa

Bu tez çalışmasında Kannan ve Reich-Rus-Ciric tip olarak adlandırılan kuvvetsel büzülmerin bazı çeşitlerini tanımlanmıştır. Bahsi geçen bu dönüşümleri dikkate alınarak, birkaç en iyi yakınlık noktası sonuçları elde edilmiştir. Daha sonra ispatlanan bu en iyi yakınlık noktası teoremlerinden kuvvetsel büzülmeler için bazı sabit nokta sonuçları özel olarak elde edilmiştir. Son olarak teorik sonuçlar bazı örneklerle desteklenmiştir.

Anahtar Kelimeler: En iyi yakınlık noktası, kuvvetsel büzülmeler, sabit nokta, tam metrik uzay

ABSTRACT

ON BEST PROXIMITY POINTS OF INTERPOLATIVE PROXIMAL CONTRACTIONS

TAŞDEMİR, Ayşenur

Kırıkkale University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics, M. Sc. Thesis

Supervisor: Prof. Dr. İshak ALTUN

June 2021, 17 pages

In this thesis, some kinds of interpolative proximal contractions named as Reich-Rus-Ćirić and Kannan type have been introduced. Then taking into account of aforementioned mappings, a few best proximity point results have been obtained. As special cases some fixed point results for interpolative contractions have been presented. To support the theory, some examples are provided.

Key Words: Best proximity point, interpolative proximal contractions, fixed point, complete metric space.

İTHAF

Kara gecelerde uykusuz kalıp göz nuru döktükleri ak kağıtları yakarak medeniyet ateşini daima canlı tutan ve tutacak olan belli sayıda bilim insanına,
Ve özgürlüğü için mücadele eden tüm kadınlara...
En zor zamanlarda ayakta kalmam için destek olan, umudumu kaybettiğimde umut ışığı olan ve asla yorulmadan hayatıma anlam katan,
Canım Kendime.
İyi dayandın..

TEŞEKKÜR

Tez çalışmamın her aşamasında değerli katkı ve eleştirileriyle yol gösteren, sonsuz sabırla beni her zaman çalışmaya teşvik eden ve güven veren danışmanım Sayın Prof. Dr. İSHAK ALTUN'na, yoğun çalışmalarım sırasında sabır gösterdikleri, sürekli çalışmama izin verdikleri ve bana katlandıkları için maddi desteklerinden dolayı AİLEM'e, bana her anlamda manevi destek veren yol gösteren canımdan öte dostum MELAHAT AÇIK'a, çalışmalarım sırasında ümit veren ve motivasyon desteği için BERK YILDIRIM'a, tez yazımındaki ve makale okurken yardımlarından ötürü değerli hocam MÜCAHİT MERAL ve arkadaşım Araş. Gör. BESTE AKDOĞAN'a ve son olarak çalışmam sırasında küçük veya büyük yardımını esirgemeyen herkese içtenlikle teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^+$	Negatif olmayan reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar Kümesi
(X,d)	Metrik uzay
$d(x,A)$	x noktasının A kümesine olan uzaklığı
$d(A,B)$	A ve B kümeleri arasındaki uzaklık

1 . GİRİŞ

(X,d) bir metrik uzay, $P \subset X$ ve $T : P \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer $P \cap T(P)$ boş ise o zaman T dönüşümü sabit noktaya sahip olmaz. Bu durumda P içinde x ve Tx en kısa uzaklığa sahip yani $d(x,Tx)$ minimum olacak biçimde bir x noktasının varlığını araştırmak önemlidir. Bu manada literatürde en iyi yakınlık noktası teorisi (best proximity point theory) ve en iyi yaklaşıklık teorisi (best approximation theory) olarak bilinen iki önemli yaklaşım vardır. İlk en iyi yaklaşıklık teoremi Ky Fan tarafından elde edilmiştir. Ky Fan, P kümesi bir Hausdorff yerel kompakt konveks topolojik vektör uzayı X in boş olmayan kompakt konveks bir alt kümesi ve $T : P \to X$ bir sürekli tek değerli dönüşüm ise o zaman P içinde

$$d(x,Tx) = d(Tx,P)$$

olacak şekilde bir x noktasının var olduğunu ispatlamıştır. Literatürde Kay Fan'ın bu sonucunun pek çok genelleştirmesi mevcuttur. Ancak en iyi yaklaşıklık teoremleri $d(x,Tx)$ ifadesinin minimum olmasını garanti etmez.

Diğer önemli yaklaşım ise en iyi yakınlık nokta teorisidir. (X,d) bir metrik uzay, P ve Q bunun boş olmayan iki alt kümesi ve $T : P \to Q$ bir dönüşüm olsun. Eğer

$$d(x,Tx) = d(P,Q)$$

eşitliğini sağlayan $x \in P$ noktası varsa bu noktaya T dönüşümünün en iyi yakınlık noktası adı verilmektedir. Böylece bir T dönüşümünün en iyi yakınlık noktası sadece $Tx = x$ denkleminin yaklaşık çözümü değil aynı zamanda

$$\min\{d(x,Tx) : x \in P\}$$

minimizasyon probleminin optimal çözümüdür. Eğer en iyi yakınlık nokta teoremlerinde $P = Q = X$ alınırsa $d(P,Q) = 0$ olacağından bir sabit nokta sonucu elde edilir. Basha, $T : P \to Q$ dönüşümü için yakınlık büzülme (proximal contraction) kavramını tanımlayarak bu tür dönüşümler için bir en iyi yakınlık nokta teoremi sunmuştur.

1.1. Kaynak Özetleri

Yaklaşım teorisi ve en iyi yakınlık noktası ile ilgili temel kavramlar, bu teorilerin sabit nokta teori ile ilişkileri, tarihsel gelişimleri ve son zamanlarda en iyi yakınlık noktası sonuçları ile ilgili literatür taraması sonucunda [2, 3, 4, 5, 6, 7, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18] numaralı kaynaklardan yararlanılmıştır. Diğer taraftan kuvvetsel büzülmenin tanımı ve çeşitli kuvvetsel büzülme eşitsizlikleri ile elde edilen sabit nokta teoremlerinin irdelenmesi için [8, 9, 10, 11] numaralı kaynaklardan yararlanılmıştır. Son olarak kuvvetsel büzülme düşüncesi ile elde edilen bazı en iyi yakınlık noktası teoremlerini içeren ve tez çalışması neticesinde oluşturulan [1] numaralı kaynak eklenmiştir.

1.2. Çalışmanın Amacı

Bu tez çalışmasında son zamanlarda ortaya çıkan kuvvetsel büzülme kavramını dikkate alarak Kannan ve Reich-Rus-Ciric tip kuvvetsel büzülmeler için bazı en iyi yakınlık noktası teoremlerinin elde edilmesi amaçlanmıştır.

2 . MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümünde, tez boyunca kullanılan notasyonlar, bazı temel kavramlar ve literatürde mevcut olan bazı ilgili teoremler sunulmaktadır.

2.1. Yakınlık Büzülme

(X,d) bir metrik uzay olmak üzere P ve Q bunun boş olmayan iki alt kümesi olsun. Çalışmamız boyunca P ve Q nun aşağıda belirtilen alt kümelerini göz önüne alacağız:

$$P_0 = \{x \in P : d(x,y) = d(P,Q), \exists y \in Q\},$$

$$Q_0 = \{y \in Q : d(x,y) = d(P,Q), \exists x \in P\}.$$

Tanım 2.1.1. (X,d) bir metrik uzay, P ve Q bunun boş olmayan iki alt kümesi ve $T : P \to Q$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $u_1, u_2, x_1, x_2 \in P$ için

$$\left.\begin{array}{l} d(u_1, Tx_1) = d(P,Q) \\ d(u_2, Tx_2) = d(P,Q) \end{array}\right\} \Rightarrow d(u_1,u_2) \leq kd(x_1,x_2)$$

önermesini sağlayan bir $k \in (0,1)$ sabiti varsa T dönüşümüne bir yakınlık büzülme (proximal contraction) denir.

En az bir $x \in P$ için $d(x,y_n) \to d(x,Q)$ şartını sağlayan Q kümesi içindeki her $\{y_n\}$ dizisinin Q de yakınsak bir alt dizisi varsa Q kümesine P ye göre yaklaşımsal kompakt (approximately compact) adı verilir. X in kompakt her alt kümesinin her bir kümeye göre yaklaşımsal kompakt olduğu açıktır. Aynı zamanda X in her alt kümesi kendine göre yaklaşımsal kompakttır.

Aşağıdaki teorem en iyi yakınlık nokta teorisinin temel teoremlerinden biridir.

Teorem 2.1.1. *(X,d) bir tam metrik uzay, $P,Q \subset X$ boş olmayan kapalı iki alt küme ve Q, P ye göre yaklaşımsal kompakt olsun. Ayrıca P_0 ve Q_0 kümeleri boştan farklı ve $T : P \to Q$ dönüşümü $T(P_0) \subseteq Q_0$ özelliğine sahip bir yakınlıklı büzülme dönüşümü olsun. O zaman T dönüşümü P kümesinde bir tek en iyi yakınlık noktasına sahiptir.*

Bunun yanı sıra literatürde bazı büzülme çeşitleri dikkate alınarak pek çok en iyi yakınlık noktası teoremleri elde edilmiştir. Örneğin, Basha, Kannan büzülmeden esinlenerek aşağıdaki yakınlıklı büzülmeyi tanıtmış ve ilgili en iyi yakınlık noktası teoremini elde etmiştir: (X,d) bir metrik uzay, P ve Q bunun boş olmayan iki alt kümesi ve $T : P \to Q$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $u_1, u_2, x_1, x_2 \in P$ için

$$\left.\begin{array}{l} d(u_1, Tx_1) = d(P,Q) \\ d(u_2, Tx_2) = d(P,Q) \end{array}\right\} \Rightarrow d(u_1,u_2) \leq \alpha\,[d(x_1,u_1) + d(x_2,u_2)]$$

önermesini sağlayan bir $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ sabiti varsa T dönüşümüne bir K-yakınlıklı büzülme (K-proximal contraction) denir.

2.2. Kuvvetsel Büzülme

Son zamanlarda Karapınar kuvvet düşüncesiyle ilginç bir büzülme çeşidini ortaya atmıştır. (X,d) bir metrik uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x,y \in \{z \in X : d(z,Tz) > 0\}$ için

$$d(Tx,Ty) \leq \lambda\,[d(x,Tx)]^{\alpha}\,[d(y,Ty)]^{1-\alpha}$$

eşitsizliğini sağlayan $\lambda \in [0,1)$ ve $\alpha \in (0,1)$ sabitleri varsa T dönüşümüne kuvvetsel Kannan tip büzülme dönüşümü denir. Aslında bu büzülme Kannan büzülme eşitsizliğindeki $d(x,Tx)$ ve $d(y,Ty)$ terimleri dikkate alınarak elde edimiştir. Dikkat edilirse orijinal Kannan büzülme eşitsizliğinde λ sabiti $\frac{1}{2}$ den küçük olmasına rağmen burada 1 den küçük olması yeterlidir. Bu nedenle Karapınar'ın ana teoremi olan aşağıdaki teorem ilginç ve kayda değerdir.

Teorem 2.2.1. *(X,d) bir tam metrik uzay ve T bu uzayda bir kuvvetsel Kannan tip büzülme dönüşümü olsun. O zaman T dönüşümü X de bir sabit noktaya sahiptir.*

Daha sonra Karapınar'ın bu ilginç düşüncesinden esinlenilerek, metrik uzayda Reich-Rus-Ciric tip ve Hardy-Rogers tip büzülmeler de bu kuvvetsel düşünceye transfer edilmiş ve ilgili sabit nokta teoremleri elde edilmiştir.

3 . ARAŞTIRMA BULGULARI

3.1. Kuvvetsel Büzülmer için en iyi Yakınlık Teoremleri

Bu bölümde tezin orijinal kısmını oluşturan çalışmalara yer vereceğiz. İlk olarak, kuvvetsel Kannan tip ve kuvvetsel Reich-Rus-Ciric tip yakınlıklı büzülme kavramlarına giriş yapacağız. Daha sonra bu tip dönüşümler için en iyi yakınlık noktası teoremleri sunacağız. Ayrıca, elde edilen sonuçların bir anlamlılığı için bazı örnekler verilecektir.

Tanım 3.1.1. (X,d) bir metrik uzay, P,Q bunun boş olmayan iki alt kümesi ve $T:P\to Q$ bir dönüşüm olsun.

(i) Eğer $d(u_1,Tx_1)=d(P,Q)$ ve $d(u_2,Tx_2)=d(P,Q)$ koşullarını sağlayan $u_i\neq x_i$ $(i\in\{1,2\})$ olacak biçimdeki her $u_1,u_2,x_1,x_2\in P$ için

$$d(u_1,u_2)\leq\lambda\,[d(x_1,x_2)]^{\alpha}\,[d(x_1,u_1)]^{\beta}\,[d(x_2,u_2)]^{1-\alpha-\beta} \tag{3.1.1}$$

olacak biçimde $\lambda\in[0,1)$ ve $\alpha,\beta\in(0,1)$ sabitleri varsa T dönüşümüne birinci tip kuvvetsel Reich-Rus-Ciric yakınlıklı büzülme dönüşümü denir.

(ii) Eğer $d(u_1,Tx_1)=d(P,Q)$ ve $d(u_2,Tx_2)=d(P,Q)$ koşullarını sağlayan $u_i\neq x_i$ $(i\in\{1,2\})$ olacak biçimdeki her $u_1,u_2,x_1,x_2\in P$ için

$$d(u_1,u_2)\leq\lambda\,[d(x_1,u_1)]^{\alpha}\,[d(x_2,u_2)]^{1-\alpha} \tag{3.1.2}$$

olacak biçimde $\lambda\in[0,1)$ ve $\alpha\in(0,1)$ sabitleri varsa T dönüşümüne birinci tip kuvvetsel Kannan yakınlıklı büzülme dönüşümü denir.

(iii) Eğer $d(u_1,Tx_1)=d(P,Q)$ ve $d(u_2,Tx_2)=d(P,Q)$ koşullarını sağlayan $Tu_i\neq Tx_i$

($i \in \{1,2\}$) olacak biçimdeki her $u_1, u_2, x_1, x_2 \in P$ için

$$d(Tu_1,Tu_2) \leq \lambda \, [d(Tx_1,Tx_2)]^{\alpha} \, [d(Tx_1,Tu_1)]^{\beta} \, [d(Tx_2,Tu_2)]^{1-\alpha-\beta} \tag{3.1.3}$$

olacak biçimde $\lambda \in [0,1)$ ve $\alpha, \beta \in (0,1)$ sabitleri varsa T dönüşümüne ikinci tip kuvvetsel Reich-Rus-Ciric yakınlıklı büzülme dönüşümü denir.

(iv) Eğer $d(u_1,Tx_1) = d(P,Q)$ ve $d(u_2,Tx_2) = d(P,Q)$ koşullarını sağlayan $Tu_i \neq Tx_i$ ($i \in \{1,2\}$) olacak biçimdeki her $u_1, u_2, x_1, x_2 \in P$ için

$$d(Tu_1,Tu_2) \leq \lambda \, [d(Tx_1,Tu_1)]^{\alpha} \, [d(Tx_2,Tu_2)]^{1-\alpha} \tag{3.1.4}$$

olacak biçimde $\lambda \in [0,1)$ ve $\alpha \in (0,1)$ sabitleri varsa T dönüşümüne ikinci tip kuvvetsel Kannan yakınlıklı büzülme dönüşümü denir.

Dikkat edilecek olursa, eğer $P = Q = X$ alındığında (3.1.1) ve (3.1.2) eşitsizlikleri sırası ile her $x_1, x_2 \in \{x \in X : d(x,Tx) > 0\}$ için

$$d(Tx_1,Tx_2) \leq \lambda \, [d(x_1,x_2)]^{\alpha} \, [d(x_1,Tx_1)]^{\beta} \, [d(x_2,Tx_2)]^{1-\alpha-\beta} \tag{3.1.5}$$

ve

$$d(Tx_1,Tx_2) \leq \lambda \, [d(x_1,Tx_1)]^{\alpha} \, [d(x_2,Tx_2)]^{1-\alpha} \tag{3.1.6}$$

biçimini alır. Burada (3.1.5) ve (3.1.6) eşitsizliklerini sağlayan T dönüşümüne literatürde sırası ile X de kuvvetsel Reich-Rus-Ciric ve kuvvetsel Kannan tip büzülme dönüşümleri denir.

Benzer şekilde, eğer $P = Q = X$ alındığında (3.1.3) ve (3.1.4) eşitsizlikleri sırası ile her $x_1, x_2 \in \{x \in X : d(Tx,T^2x) > 0\}$ için

$$d(T^2x_1,T^2x_2) \leq \lambda \, [d(Tx_1,Tx_2)]^{\alpha} \left[d(Tx_1,T^2x_1)\right]^{\beta} \left[d(Tx_2,T^2x_2)\right]^{1-\alpha-\beta} \tag{3.1.7}$$

ve

$$d(T^2x_1,T^2x_2) \leq \lambda \left[d(Tx_1,T^2x_1)\right]^{\alpha} \left[d(Tx_2,T^2x_2)\right]^{1-\alpha} \tag{3.1.8}$$

biçimini alır.

Teorem 3.1.1. *(X,d) bir tam metrik uzay, $P,Q \subseteq X$ boş olmayan kapalı kümeler ve Q kümesi P ye göre yaklaşımsal kompakt olsun. $T : P \to Q$ birinci tip kuvvetsel Reich-Rus-Ciric yakınlıklı büzülme dönüşümü olmak üzere $P_0 \neq \emptyset$ ve $T(P_0) \subseteq Q_0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda T en iyi yakınlık noktasına sahiptir.*

İspat. $x_0 \in P_0$ keyfi bir nokta olsun. Bu durumda $Tx_0 \in T(P_0) \subseteq Q_0$ olduğundan

$$d(x_1, Tx_0) = d(P,Q)$$

eşitliğini sağlayan bir $x_1 \in P_0$ vardır. Benzer şekilde $Tx_1 \in T(P_0) \subseteq Q_0$ olduğundan

$$d(x_2, Tx_1) = d(P,Q)$$

eşitliğini sağlayan bir $x_2 \in P_0$ vardır. Bu şekilde devam ederek her $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(x_{n+1}, Tx_n) = d(P,Q) \tag{3.1.9}$$

eşitliğini sağlayan bir $x_n \in P_0$ noktasını dikkate alarak $\{x_n\}$ dizisini oluşturalım. Eğer en az bir $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = x_{n+1}$ oluyorsa o zaman (3.1.9) den x_n noktası T dönüşümünün en iyi yakınlık noktası olur. Şimsi her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \neq x_{n+1}$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda her $n \geq 1$ için

$$d(x_n, Tx_{n-1}) = d(P,Q)$$

ve

$$d(x_{n+1}, Tx_n) = d(P,Q)$$

olduğundan (3.1.1) eşitsizliğini kullanabiliriz. O zaman her $n \geq 1$ için

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \lambda \left[d(x_{n-1}, x_n)\right]^{\alpha} \left[d(x_{n-1}, x_n)\right]^{\beta} \left[d(x_n, x_{n+1})\right]^{1-\alpha-\beta}$$

veya denk olarak

$$\left[d(x_n, x_{n+1})\right]^{\alpha+\beta} \leq \lambda \left[d(x_{n-1}, x_n)\right]^{\alpha+\beta} \tag{3.1.10}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu durumda $\{d(x_n, x_{n+1})\}$ dizisi pozitif reel sayıların azalan bir dizisidir. Bu yüzden

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = \gamma$$

olacak biçimde bir $\gamma \geq 0$ vardır. Şimdi (3.1.10) den, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &\leq \lambda^{\frac{1}{\alpha+\beta}} d(x_{n-1}, x_n) \\ &\leq \lambda^{\frac{2}{\alpha+\beta}} d(x_{n-2}, x_{n-1}) \\ &\vdots \\ &\leq \lambda^{\frac{n}{\alpha+\beta}} d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz. Son eşitsizlikte $n \to \infty$ için limit alırsak $\gamma = 0$ bulunur. Şimdi $m > n$ olmak üzere $m, n \in \mathbb{N}$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &\leq \lambda^{\frac{n}{\alpha+\beta}} d(x_0, x_1) + \lambda^{\frac{n+1}{\alpha+\beta}} d(x_0, x_1) + \cdots + \lambda^{\frac{m-1}{\alpha+\beta}} d(x_0, x_1) \\ &= \left\{1 + \lambda^{\frac{1}{\alpha+\beta}} + \cdots + \lambda^{\frac{m-n-1}{\alpha+\beta}}\right\} \lambda^{\frac{n}{\alpha+\beta}} d(x_0, x_1) \\ &\leq \frac{\lambda^{\frac{n}{\alpha+\beta}}}{1 - \lambda^{\frac{1}{\alpha+\beta}}} d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

elde edilir ki bu $\{x_n\}$ dizisinin P de bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. (X, d) tam bir metrik uzay ve P, X in kapalı bir alt kümesi olduğundan $x_n \to x^*$ olacak biçimde bir $x^* \in P$ vardır. Ek olarak, (3.1.9) dikkate alındığında

$$\begin{aligned} d(x^*, Q) &\leq d(x^*, Tx_n) \\ &\leq d(x^*, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, Tx_n) \\ &= d(x^*, x_{n+1}) + d(P, Q) \\ &\leq d(x^*, x_{n+1}) + d(x^*, Q) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilebilir ki burada $n \to \infty$ için limit alınırsa $d(x^*, Tx_n) \to d(x^*, Q)$ bulunur. Q kümesi P ye göre yaklaşımsal kompakt olduğundan $k \to \infty$ için $Tx_{n_k} \to y^* \in Q$ olacak şekilde $\{Tx_n\}$ dizisinin bir $\{Tx_{n_k}\}$ altdizisi vardır. Bu durumda

$$d(x_{n_k+1}, Tx_{n_k}) = d(P, Q)$$

ifadesinde $k \to \infty$ için limit alarak $d(x^*, y^*) = d(P, Q)$ elde ederiz ki bu bize $x^* \in P_0$ olduğunu gösterir. Ayrıca $Tx^* \in T(P_0) \subseteq Q_0$ olduğundan

$$d(z, Tx^*) = d(P, Q) \tag{3.1.11}$$

olacak biçimde bir $z \in P_0$ vardır. Şimdi genelliği kaybetmeden her $n \in \mathbb{N}$ için $x^* \neq x_n$ varsayabiliriz. Aksi halde $\{x_n\}$ dizisinin her $k \in \mathbb{N}$ için $x^* \neq x_{m_k}$ olacak biçimde bir $\{x_{m_k}\}$ altdizisi vardır ve bu durumda bu alt diziyi aşağıdaki adımlarda ele alabiliriz. O zaman (3.1.9), (3.1.11) ve (3.1.1) eşitsizliklerinden her $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(x_{n+1}, z) \leq \lambda\, [d(x_n, x^*)]^{\alpha}\, [d(x_n, x_{n+1})]^{\beta}\, [d(x^*, z)]^{1-\alpha-\beta}$$

yazılabilir. Böylece $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$d(x^*, z) = 0$$

veya diğer bir ifadeyle $x^* = z$ elde edilir. Sonuç olarak (3.1.11) den x^* noktasının T nin en iyi yakınlık noktası olduğu görülür. $\square$

Teorem 3.1.1 in ispatındaki benzer tekniğini kullanarak aşağıdaki teoremi ispatlayabiliriz.

Teorem 3.1.2. *(X, d) bir tam metrik uzay, $P,Q \subseteq X$ boş olmayan kapalı kümeler ve Q kümesi P ye göre yaklaşımsal kompakt olsun. $T : P \to Q$ birinci tip kuvvetsel Kannan yakınlıklı büzülme dönüşümü olmak üzere $P_0 \neq \emptyset$ ve $T(P_0) \subseteq Q_0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda T en iyi yakınlık noktasına sahiptir.*

Teorem 3.1.1 ve Teorem 3.1.2 de $P = Q = X$ alırsak aşağıdaki sabit nokta sonuçlarını elde ederiz:

Sonuç 3.1.1. *(X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \to X$ kuvvetsel Reich-Rus-Ciric tip büzülme olsun. O zaman T dönüşümü X de bir sabit noktaya sahiptir.*

Sonuç 3.1.2. *(X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \to X$ kuvvetsel Kannan tip büzülme olsun. O zaman T dönüşümü X de bir sabit noktaya sahiptir.*

Aşağıdaki ikinci ana sonucumuzdur

Teorem 3.1.3. *(X,d) bir tam metrik uzay, $P,Q \subseteq X$ boş olmayan kapalı kümeler ve Q kümesi P ye göre yaklaşımsal kompakt olsun. $T : P \to Q$ sürekli ikinci tip kuvvetsel Reich-Rus-Ciric yakınlıklı büzülme dönüşümü olmak üzere $P_0 \neq \emptyset$ ve $T(P_0) \subseteq Q_0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda T en iyi yakınlık noktasına sahiptir.*

İspat. Teorem 3.1.1 de de olduğu gibi, P_0 da

$$d(x_{n+1}, Tx_n) = d(P,Q) \tag{3.1.12}$$

özelliğine uygun bir $\{x_n\}$ dizisi oluşturmak mümkündür. Şimdi $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \neq x_{n+1}$ varsayalım. Aksi halde ispat biter. T ikinci tip kuvvetsel Reich-Rus-Ciric yakınlıklı büzülme dönüşümü olduğundan her $n \geq 1$ için

$$d(Tx_n, Tx_{n+1}) \leq \lambda\,[d(Tx_{n-1}, Tx_n)]^{\alpha}\,[d(Tx_{n-1}, Tx_n)]^{\beta}\,[d(Tx_n, Tx_{n+1})]^{1-\alpha-\beta}$$

ve böylece

$$[d(Tx_n, Tx_{n+1})]^{\alpha+\beta} \leq \lambda\,[d(Tx_{n-1}, Tx_n)]^{\alpha+\beta}$$

eşitsizliği elde edilir. Sonuç olarak $\{Tx_n\}$ dizisi Q da bir Cauchy dizisidir. (X,d) tam bir metrik uzay olduğundan ve Q , X in kapalı bir alt kümesi olduğundan $Tx_n \to y^*$ olacak şekilde $y^* \in Q$ vardır. Ek olarak, (3.1.12) eşitliği dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
d(y^*, P) &\leq d(y^*, x_{n+1}) \\
&\leq d(y^*, Tx_n) + d(Tx_n, x_{n+1}) \\
&= d(y^*, Tx_n) + d(P,Q) \\
&\leq d(y^*, Tx_n) + d(y^*, P).
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan, $n \to \infty$ için limit alınırsa $d(y^*, x_n) \to d(y^*, P)$ bulunur. P kümesi Q ya göre yaklaşımsal kompakt olduğundan $k \to \infty$ için $x_{n_k} \to x^* \in P$ olacak şekilde $\{x_n\}$ nin bir $\{x_{n_k}\}$ alt dizisi vardır. Bu durumda T nin sürekliliğini hesaba katarak (3.1.12) den

$$d(x^*, Tx^*) = \lim_{k\to\infty} d(x_{n_k+1}, Tx_{n_k}) = d(P,Q).$$

elde edilir. Yani x^* noktası T nin en iyi yakınlık noktasıdır. □

Teorem 3.1.3 in ispatındaki benzer tekniğini kullanarak aşağıdaki teoremi ispatlayabiliriz.

Teorem 3.1.4. *(X,d) bir tam metrik uzay, $P,Q \subseteq X$ boş olmayan kapalı kümeler ve Q kümesi P ye göre yaklaşımsal kompakt olsun. $T : P \to Q$ sürekli ikinci tip kuvvetsel Kannan yakınlıklı büzülme dönüşümü olmak üzere $P_0 \neq \emptyset$ ve $T(P_0) \subseteq Q_0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda T en iyi yakınlık noktasına sahiptir.*

Örnek 1. $X = \mathbb{R}^2$ üzerinde d Öklid metriğini göz önüne alalım. $P = \mathbb{R} \times \{0\}$ ve $Q = \mathbb{R} \times \{1\}$ olsun. Bu durumda $d(P,Q) = 1$ dir. $T : P \to Q$ dönüşümünü,

$$Tx = T(t,0) = \begin{cases} (0,1) & , \quad t < 0 \\ \\ (t,1) & , \quad t \geq 0 \end{cases}$$

biçiminde tanımlayalım. T nin birinci tip kuvvetsel Kannan yakınlıklı büzülme dönüşümü olduğunu göstereceğiz. Öncelikle, $t \geq 0$ olmak üzere $x = (t,0) \in P$ ve $u = (s,0) \in P$ ise, o zaman aşağıdaki gerektirme sağlanır:

$$d(u,Tx) = d(P,Q) \Rightarrow x = u.$$

Bu durumda, (3.1.2) eşitsizliği göstermek için $t_1 < 0$ ve $t_2 < 0$ olacak üzere $x_1 = (t_1,0)$, $x_2 = (t_2,0) \in P$ noktalarını dikkate almalıyız. Böylece

$$d(u_1,Tx_1) = d(P,Q)$$

ve

$$d(u_2,Tx_2) = d(P,Q)$$

eşitlikleri $u_1 = u_2 = (0,0)$ olduğunu ifade eder. Bu durumda, $d(u_1,u_2) = 0$ olacağından T birinci tip kuvvetsel Kannan yakınlıklı büzülme dönüşümüdür. Ayrıca Teorem 3.1.2 nin diğer koşullarının geçerli olduğunu kolayca görebiliriz. O halde T dönüşümü en iyi yakınlık noktasına sahiptir. Diğer yandan T dönüşümü birinci türden K-yakınlıklı büzülme değidir. Bunu görmek için $x_1 = u_1 = (0,0)$ ve $x_2 = u_2 = (1,0)$ noktalarını dikkate almak yeterlidir.

Örnek 2. $X=\mathbb{R}^2$ üzerinde d Öklid metriğini göz önüne alalım.

$$P=\left\{(s,t):t=\sqrt{4-s^2}\right\}$$

ve

$$Q=\left\{(s,t):t=\sqrt{1-s^2}\right\}$$

olsun. O halde $d(P,Q)=1$ dir. $T:P\to Q$ dönüşümü

$$Tx=T(s,t)=\begin{cases}(\frac{s}{2},\frac{t}{2}) & , \quad s\geq 0\\ \\ (-1,0) & , \quad s<0\end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. T nin birinci tip kuvvetsel Reich-Rus-Ciric yakınlıklı büzülme dönüşümü olduğunu göstereceğiz. İlk olarak $s>0$ olmak üzere $x=(s,t)\in P$ ve $u=(s',t')\in P$ ise, o zaman aşağıdaki gerektirme sağlanır:

$$d(u,Tx)=d((s',t'),(\frac{s}{2},\frac{t}{2}))=1\Rightarrow T(s',t')=(\frac{s}{2},\frac{t}{2})$$

ve dolayısıyla $(s',t')=(s,t)$, yani $u=x$. Bu yüzden, (3.1.2) eşitsizliğini göstermek için, $x_1=(s_1,t_1),x_2=(s_2,t_2)\in P$ noktalarını $s_1<0$ ve $s_2<0$ olacak şekilde düşünmeliyiz. Bu durumda

$$d(u_1,Tx_1)=d((s_1',t_1'),(-1,0))=1=d(P,Q)$$

ve

$$d(u_2,Tx_2)=d((s_2',t_2'),(-1,0))=1=d(P,Q)$$

eşitlikleri $u_1=u_2=(-2,0)$ olduğunu ifade eder. Bu yüzden, $d(u_1,u_2)=0$ olacağından T birinci tip kuvvetsel Reich-Rus-Ciric yakınlıklı büzülme dönüşümüdür. Ayrıca, 3.1.2 teoreminin diğer koşullarının geçerli olduğunu kolayca görebiliriz. O halde T dönüşümü en iyi yakınlık noktasına sahiptir. Diğer yandan T dönüşümü birinci türden K-yakınlıklı büzülme değidir. Bunu görmek için $x_1=u_1=(2,0)$ ve $x_2=u_2=(0,2)$ almak yeterlidir.

4 . TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında yakınlık büzülme ve kuvvetsel büzülme kavramları birlikte düşünülerek birinci ve ikinci tip Kannan ve Reich-Rus-Ciric yakınlıklı kuvvetsel büzülme kavramları tanıtılmıştır. Böylece bu dört tip dönüşüm için elde edilen en iyi yakınlık noktası teoremleri tez çalışmasının orijinal kısmını oluşturmuştur.

KAYNAKLAR

[1] Altun, I., Taşdemir, A., On best proximity points of interpolative proximal contractions, Quaestiones Mathematicae, DOI:10.2989/16073606.2020.1785576.

[2] Altun, I., Aslantas, M., Sahin, H., Best proximity point results for p-proximal contractions, Acta Math. Hungar., 162 (2) (2020), 393–402.

[3] Aslantas, M., Sahin, H., Altun, I., Best proximity point theorems for cyclic p-contractions with some consequences and applications, Nonlinear Analysis Modelling and Control, 26 (1) (2021), 113–129.

[4] Basha, S.S., Extensions of Banach's contraction principle, Numer. Funct. Anal. Optim., 31 (5) (2010), 569-576.

[5] Basha, S.S., Best proximity points: optimal solutions, J. Optim Theory Appl., 151 (2011), 210-216.

[6] Basha, S.S., Best proximity point theorems for some classes of contractions, Acta Math. Hungar., 156 (2) (2018), 336-360.

[7] Fan, Ky., Extensions of two fixed point theorems of F. E. Browder, Math. Z., 112 (1969), 234-240.

[8] Karapınar, E., Revisiting the Kannan type contractions via interpolation, Advances in the Theory of Nonlinear Analysis and its Applications, 2 (2) (2018), 85-87.

[9] Karapınar, E., Agarwal, R.P., Aydi, H., Interpolative Reich-Rus-Ćirić type contractions on partial metric spaces, Mathematics, 2018, 6 (11), 256; https://doi.org/10.3390/math6110256.

[10] Karapınar, E., Alqahtani, O., Aydi, H., On interpolative Hardy-Rogers type contractions, Symmetry, 2019, 11(1), 8; https://doi.org/10.3390/sym11010008.

[11] Karapınar, E., Revisiting simulation functions via interpolative contractions, Applicable Analysis and Discrete Mathematics, 13 (2019), 859-870.

[12] Prolla, J.B., Fixed point theorems for set valued mappings and existence of best approximations, Numer. Funct. Anal. Optim., 5 (2007), 449-455.

[13] Raj, V.S., Best proximity point theorems for non-self mappings, Fixed Point Theory, 14 (2) (2013), 447-454.

[14] Reich, S., Approximate selections, best approximations, fixed points and invariant sets. J. Math. Anal. Appl., 62 (1978), 104-113.

[15] Sahin, H., Aslantas, M., Altun, I., Feng-Liu type approach to best proximity point results for multivalued mappings, Journal of Fixed Point Theory and Applications, 22 (1) (2020), 11, Doi:10.1007/s11784-019-0740-9.

[16] Sehgal, V.M., Singh, S.P., A generalization to multifunctions of Fan's best approximation theorem, Proc. Am. Math. Soc., 102 (1988), 534-537.

[17] Sehgal, V.M., Singh, S.P., A theorem on best approximations, Numer. Funct. Anal. Optim., 10 (1989), 181-184.

[18] Sultana, A., Vetrivel, V., On the existence of best proximity points for generalized contractions, Appl. Gen. Topol., 15 (1) (2014), 55-63.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Ayşenur Taşdemir
Yabancı Dil : İngilizce

Eğitim Durumu
Lise **:** Gürlek Nakipoğlu Lisesi
Lisans **:** Kırıkkale Üniversitesi Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

Yayınları :

1) I. Altun, A. Taşdemir, On best proximity points of interpolative proximal contractions, Quaestiones Mathematicae, DOI:10.2989/16073606.2020.1785576.