



**T.C.**  
**HATAY MUSTAFA KEMAL ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KESİRLİ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN  
FONKSİYONEL DEĞİŞKEN YÖNTEMİ ile TAM ÇÖZÜMLERİ**

**Mustafa BATMAZ**

**ENFORMATİK ANABİLİM DALI**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**HATAY**  
**ARALIK-2021**



T.C.  
HATAY MUSTAFA KEMAL ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**KESİRLİ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN  
FONKSİYONEL DEĞİŞKEN YÖNTEMİ ile TAM ÇÖZÜMLERİ**

**Mustafa BATMAZ**  
**ORCID:0000-0003-2721-1716**

**ENFORMATİK ANABİLİM DALI**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Danışman**  
**Doç. Dr. Orkun TAŞBOZAN**  
**ORCID: 0000-0001-5003-6341**

**HATAY**  
**ARALIK-2021**

28.12.2021

## TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını ve tez üzerinde Yükseköğretim Kurulu tarafından hiçbir değişiklik yapılamayacağı için tezin bilgisayar ekranında görüntülendiğinde asıl nüsha ile aynı olması sorumluluğunun tarafıma ait olduğunu beyan ederim.

**Mustafa BATMAZ**

## ÖZET

### **KESİRLİ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN FONKSİYONEL DEĞİŞKEN YÖNTEMİ ile TAM ÇÖZÜMLERİ**

Beş bölümden oluşan tezin, giriş bölümünde kesirli türev ile ilgili literatür bilgisi verildi.

İkinci bölümde, conformable kesirli türev ve fonksiyonel değişken yöntemi ile daha önceden yapılan çalışmalara yer verildi.

Üçüncü bölümde, bazı kesirli türev yaklaşımları ve fonksiyonel değişken yöntemine yer verildi.

Tezin orjinal kısmı olan dördüncü bölümde ise kesirli mertebeden genişletilmiş BKP-Boussinesq, genelleştirilmiş Calogero–Bogoyavlenskii–Schiff ve genelleştirilmiş (2+1) boyutlu Hirota-Satsuma-Ito denklemlerinin fonksiyonel değişken yöntemi kullanılarak analitik çözümleri elde edildi. Elde edilen analitik çözümlerin iki ve üç boyutlu grafikleri verildi.

Son bölüm olan beşinci bölümde ise sonuç ve önerilere yer verildi.

2021, 47 Sayfa

**Anahtar Kelimeler:** Kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemler, Fonksiyonel değişken yöntemi, Analitik çözüm.

## ABSTRACT

### EXACT SOLUTIONS OF FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH FUNCTIONAL VARIABLE METHOD

In the introduction part of the thesis, which consists of five chapters, information about the fractional derivative is given.

In the second part, previous studies with conformable fractional derivative and functional variable method are given.

In the third chapter, some fractional derivative approaches and functional variable method are given.

In the fourth chapter, which is the original part of the thesis, analytical solutions of the fractional order BKP-Boussinesq, generalized Calogero–Bogoyavlenskii–Schiff and generalized (2+1) dimensional Hirota-Satsuma-Ito equations were obtained using the functional variable method. Besides, Two and three dimensional graphics of the obtained analytical solutions are given.

In the fifth chapter, which is the last chapter, conclusions and recommendations are given.

2021, 47 Page

**Keywords:** Partial differential equations of fractional order, Functional variable method, Analytical solution.

## TEŐEKKÖR

Yüksek lisans tezım süresince bilgi ve deneyimlerini benden esirgemeyen danıőmanım Doç. Dr. Orkun Taşbozan'a ve maddi manevi desteklerinden dolayı aileme teőekkürlerimi borç bilirim.



## İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	I
ABSTRACT.....	II
TEŞEKKÜR.....	III
İÇİNDEKİLER.....	IV
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	V
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ.....	VI
1. GİRİŞ.....	1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR.....	3
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	4
3.1. Conformable Kesirli Türev Yaklaşımı.....	4
3.2. Fonksiyonel Değişken Yöntemi.....	8
4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA.....	18
4.1. Conformable Kesirli Mertebeden Genişletilmiş BKP-Boussinesq Denklemi.....	18
4.2. Conformable Kesirli Mertebeden Genelleştirilmiş Calogero–Bogoyavlenskii–Schiff Denklemi.....	26
4.3. Conformable Kesirli Mertebeden Genelleştirilmiş (2+1) Boyutlu Hirota-Satsuma-Ito Denklemi.....	34
5. SONUÇ ve ÖNERİLER.....	42
KAYNAKLAR.....	43
ÖZGEÇMİŞ.....	47

## ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 4. 1. Farklı $x$ ve $y$ değerleri için $u_1(x, y, z, t)$ analitik çözüm yüzeyi .....	21
Şekil 4. 2. Farklı $y$ ve $t$ değerleri için $u_1(x, y, z, t)$ analitik çözüm yüzeyi.....	22
Şekil 4. 3. Farklı $z$ ve $t$ değerleri için $u_1(x, y, z, t)$ analitik çözüm yüzeyi .....	23
Şekil 4. 4. Farklı $x$ değerleri için $u_1(x, y, z, t)$ analitik çözüm eğrisi .....	23
Şekil 4. 5. Farklı $y$ değerleri için $u_1(x, y, z, t)$ analitik çözüm eğrisi .....	23
Şekil 4. 6. Farklı $z$ değerleri için $u_1(x, y, z, t)$ analitik çözüm eğrisi .....	24
Şekil 4. 7. Farklı $x$ ve $t$ değerleri için $u_3(x, y, z, t)$ analitik çözüm yüzeyi.....	24
Şekil 4. 8. Farklı $y$ ve $t$ değerleri için $u_3(x, y, z, t)$ analitik çözüm yüzeyi .....	25
Şekil 4. 9. Farklı $z$ ve $t$ değerleri için $u_3(x, y, z, t)$ analitik çözüm yüzeyi.....	25
Şekil 4. 10. Farklı $x$ değerleri için $u_3(x, y, z, t)$ analitik çözüm eğrisi.....	25
Şekil 4. 11. Farklı $y$ değerleri için $u_3(x, y, z, t)$ analitik çözüm eğrisi.....	26
Şekil 4. 12. Farklı $z$ değerleri için $u_3(x, y, z, t)$ analitik çözüm eğrisi .....	26
Şekil 4. 13. Farklı $x$ ve $t$ değerleri için $u_1(x, y, t)$ analitik çözüm yüzeyi .....	30
Şekil 4. 14. Farklı $y$ ve $t$ değerleri için $u_1(x, y, t)$ analitik çözüm yüzeyi .....	30
Şekil 4. 15. Farklı $x$ ve $y$ değerleri için $u_1(x, y, t)$ analitik çözüm yüzeyi.....	30
Şekil 4. 16. Farklı $x$ değerleri için $u_1(x, y, t)$ analitik çözüm eğrisi .....	31
Şekil 4. 17. Farklı $y$ değerleri için $u_1(x, y, t)$ analitik çözüm eğrisi .....	32
Şekil 4. 18. Farklı $x$ ve $t$ değerleri için $u_3(x, y, t)$ analitik çözüm yüzeyi .....	32
Şekil 4. 19. Farklı $y$ ve $t$ değerleri için $u_3(x, y, t)$ analitik çözüm yüzeyi .....	32
Şekil 4. 20. Farklı $x$ ve $y$ değerleri için $u_3(x, y, t)$ analitik çözüm yüzeyi .....	33
Şekil 4. 21. Farklı $x$ değerleri için $u_3(x, y, t)$ analitik çözüm eğrisi .....	33
Şekil 4. 22. Farklı $y$ değerleri için $u_3(x, y, t)$ analitik çözüm eğrisi .....	33
Şekil 4. 23. Farklı $x$ ve $t$ değerleri için $u_1(x, y, t)$ analitik çözüm yüzeyi .....	37
Şekil 4. 24. Farklı $y$ ve $t$ değerleri için $u_1(x, y, t)$ analitik çözüm yüzeyi .....	37
Şekil 4. 25. Farklı $x$ ve $y$ değerleri için $u_1(x, y, t)$ analitik çözüm yüzeyi.....	38
Şekil 4. 26. Farklı $x$ değerleri için $u_1(x, y, t)$ analitik çözüm eğrisi .....	38
Şekil 4. 27. Farklı $y$ değerleri için $u_1(x, y, t)$ analitik çözüm eğrisi .....	38
Şekil 4. 28. Farklı $x$ ve $t$ değerleri için $u_3(x, y, t)$ analitik çözüm yüzeyi .....	39
Şekil 4. 29. Farklı $y$ ve $t$ değerleri için $u_3(x, y, t)$ analitik çözüm yüzeyi .....	40
Şekil 4. 30. Farklı $x$ ve $y$ değerleri için $u_3(x, y, t)$ analitik çözüm yüzeyi .....	40
Şekil 4. 31. Farklı $x$ değerleri için $u_3(x, y, t)$ analitik çözüm eğrisi .....	40
Şekil 4. 32. Farklı $y$ değerleri için $u_3(x, y, t)$ analitik çözüm eğrisi .....	41

## SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

$\Gamma(x)$	: Gama fonksiyonu
$\beta(x, y)$	: Beta fonksiyonu
${}^tD_t^p f(t)$	: $f(t)$ fonksiyonunun $[a, t]$ kapalı aralığında $p$ –inci mertebeden Grünwald-Letnikov kesirli türevi
${}^aD_t^p f(t)$	: $f(t)$ fonksiyonunun $[a, t]$ kapalı aralığında $p$ –inci mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevi
${}^cD_t^\alpha f(t)$	: $f(t)$ fonksiyonunun $[a, t]$ kapalı aralığında $\alpha$ –inci mertebeden Caputo kesirli türevi
$T_\alpha(f(t))$	: $f(t)$ fonksiyonunun $\alpha$ –inci mertebeden conformable kesirli türevi
$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$	: $f(t)$ fonksiyonunun $n$ –inci mertebeden türevi
$f^{(k)}(t)$	: $f(t)$ fonksiyonunun $k$ –ıncı mertebeden türevi

## 1. GİRİŞ

1695 yılında, G.W. Leibnitz' in L' Hospital'a sorduğu soru ile ortaya çıkan kesirli türev kavramı, bu tarihten itibaren birçok bilim adamının çalışma alanında popüler bir konu haline geldi (Oldham ve Spanier, 1974; Hilfer, 2000).

Kesirli türev kavramı için tanımlanan birçok yaklaşım mevcuttur. Tanımlanan bu kesirli türev yaklaşımlarından bazıları ise Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville, Caputo ve Conformable kesirli türev yaklaşımlarıdır. Bu yaklaşımlardan Riemann-Liouville kesirli türev yaklaşımı, ünlü matematikçiler olan Riemann ve Liouville tarafından tanımlanan kesirli mertebeden türev yaklaşımıdır (Kilbas ve ark., 2006). Diğer bir yaklaşım ise sonlu farklar yardımıyla tanımlanan Grünwald-Letnikov kesirli mertebeden türev yaklaşımıdır. Bu kesirli türev yaklaşımlarının denk oldukları, verilen fonksiyonun belli şartları sağlaması durumunda, görüldü (Debnath ve Bhatta, 2007). Bazı şartlar altında denk olan bu kesirli türev yaklaşımlarının bazı dezavantajları vardır. Örneğin, bu kesirli türev yaklaşımları için, sabit bir fonksiyonun türevi sıfır değildir. Bu dezavantajı ortadan kaldıran ve diğer yaklaşımlara göre bazı avantajları olan Caputo kesirli türev yaklaşımı ise, 1967 yılında Caputo tarafından tanımlandı. Literatürde sıklıkla kullanılan, burada bahsedilen kesirli türev yaklaşımlara göre daha basit bir tanımı olan ve normal mertebeden türev ile ifade edilebilen Conformable kesirli türev yaklaşımı ise 2014 yılında Khalil ve arkadaşları tarafından tanımlandı (Khalil ve ark., 2014). Ayrıca, Conformable kesirli türev yaklaşımı, Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville, Caputo yaklaşımlarının sağlamadığı birçok özelliği de sağlamaktadır (Rezazadeh ve ark., 2017).

Diferansiyel denklemler, doğadaki birçok fiziksel olayın modellenmesi ile ortaya çıkmaktadır. Son zamanlarda ise, bu diferansiyel denklemler kesirli mertebeden türev içeren denklemler olarak karşımıza çıkmaktadır. Kesirli mertebeden türev içeren diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerinin elde edilmesi de oldukça önemlidir. (Aminikkah, 2016).

Bu tezde, Conformable kesirli mertebeden türev içeren lineer olmayan kesirli mertebeden kısmı diferansiyel denklem olan kesirli mertebenden genişletilmiş BKP-Boussinesq, genelleştirilmiş Calogero–Bogoyavlenskii–Schiff ve genelleştirilmiş (2+1) boyutlu Hirota-Satsuma-Ito denklemlerinin analitik çözümleri fonksiyonel değişken yöntemi ile elde edildi. Ayrıca, fonksiyonel değişken yöntemi ile elde edilen bu kesirli

mertebeden türevli kısmi diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerinin yüzeyleri ve eğrileri çizildi.



## 2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Bu tezde, ele alınan kesirli mertebeden lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerinin bulunmasında kullanılan, fonksiyonel değişken yöntemi ilk olarak, 2010 yılında A. Zerarka ve arkadaşları tarafından literatüre kazandırıldı (Zerarka, 2010). 2010 yılında yayımlanan bu makalede, fonksiyonel değişken yöntemi kullanılarak, Boussinesq ve PHI-four denklemlerinin analitik çözümlerini elde edildi. 2010 yılından sonrada etkili bir yöntem olan fonksiyonel değişim yöntemi birçok lineer olmayan kısmi türevli denklemlere uygulandı. Örneğin; 2013 yılında, W. Liu ve K. Chen kesirli mertebeden Klein–Gordon denkleminin ve kesirli mertebeden Hirota–Satsuma ikili KdV sisteminin analitik çözümlerini elde ettiler (Liu ve Chen, 2013). A. Nazarzadeh ve arkadaşları, genelleştirilmiş Klein–Gordon, Camassa–Holm Kadomtsev–Petviashvili ve yüksek mertebeden lineer olmayan Schrödinger denklemlerinin analitik çözümlerini buldular (Nazarzadeh ve ark., 2013). 2014 yılında A. Biswas ve arkadaşları, bu yöntemi kullanarak lineer olmayan Schrödinger denkleminin tam çözümlerini elde ettiler (Biswas, 2014). 2014 yılında Schrödinger denkleminin analitik çözümleri de fonksiyonel değişim yöntemi yardımıyla bulundu (Mirzazadeh ve Biswas, 2014). 2016 yılında ise, Bogoyavlenskii denkleminin analitik çözümleri H. Aminikhah ve arkadaşları tarafından verildi (Aminikhah ve ark., 2016). Zakharov–Kuznetsov, Benjamin–Bona–Mahony ve Korteweg–de Vries denklemlerinin analitik çözümleri de, fonksiyonel değişken yöntemi ile elde edildi (Rezazadeh ve ark., 2020).

### 3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde, tezde ele alınacak olan kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerde bulunan conformable kesirli türev yaklaşımının tanımı verildikten sonra, kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin analitik çözümünün bulunmasında kullanılacak olan fonksiyonel değişken yöntemi verilecektir.

#### 3.1. Conformable Kesirli Türev Yaklaşımı

Conformable kesirli türev yaklaşımının tanımını vermeden önce, literatürde sıklıkla kullanılan kesirli türev yaklaşımları olan Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville ve Caputo kesirli mertebeden türev yaklaşımlarının temel tanımları verilsin.

$f(t)$  ve  $k = 0, 1, 2, 3, \dots, m + 1$  olmak üzere  $f^{(k)}(t)$  fonksiyonlarının her biri  $[a, t]$  kapalı aralığında sürekli olsunlar. Burada  $m$  sayısı  $m \leq p < m + 1$  şartını sağlayan bir tamsayıdır. Bu şartlar altında  $f(t)$  fonksiyonunun  $p$ -inci mertebeden Grünwald-Letnikov kesirli türev yaklaşımı,

$$\binom{p}{r} = \frac{p(p-1)(p-2) \dots (p-r+1)}{r!}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} {}^t D_t^p f(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} h^{-p} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{p}{r} f(t - rh) \\ &= \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{-p+m} f^{(m+1)}(\tau) d\tau \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır (Podlubny, 1999). Burada  $\Gamma$  fonksiyonu faktöriyel fonksiyonu olarak da bilinen Gama fonksiyonudur. Gama fonksiyonu

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0$$

şeklinde geliştirilmiş integrali ile tanımlıdır (Podlubny, 1999).

$0 < \alpha \leq 1$  için  $k - \alpha > 0$  olmak üzere  $f(t)$  fonksiyonunun  $(k - \alpha)$ -mertebeden Riemann-Liouville kesirli türev yaklaşımı

$${}^t D_t^{k-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{d^k}{dt^k} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau$$

olarak tanımlıdır (Podlubny, 1999).

$f(t)$  fonksiyonu,  $[a, b]$  kapalı aralığında sürekli ve  $m + 1$  defa sürekli diferansiyellenebilir olduğu varsayılırsa,  $0 \leq m < p < m + 1$  şartını sağlayan her  $p$  değeri için  ${}^t_a D_t^p f(t)$  Riemann-Liouville kesirli türevi mevcuttur ve Grünwald-Letnikov kesirli türevine eşittir. Gerçekten, Riemann-Liouville kesirli türev yaklaşımına  $m + 1$  defa kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned} {}^t_a D_t^p f(t) &= \frac{1}{\Gamma(-p + m + 1)} \frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}} \int_{\alpha}^t (t - \tau)^{m-p} f(\tau) d\tau \\ &= \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)(t - \alpha)^{-p+k}}{\Gamma(-p + k + 1)} + \frac{1}{\Gamma(-p + m + 1)} \int_{\alpha}^t (t - \tau)^{-p+m} f^{(m+1)}(\tau) d\tau \\ &= {}^t_a D_t^p f(t) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir (Podlubny, 1999).

$f(t)$  fonksiyonu  $n$  kez sürekli diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun.  $n - 1 < \alpha < n$  şartını sağlayan  $\alpha$  değeri için  $f(t)$  fonksiyonunun  $\alpha$ -inci mertebeden Caputo anlamındaki kesirli türev yaklaşımı

$${}^c_a D_t^\alpha f(t) = D^{\alpha-n} D^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_{\alpha}^t \frac{f^n(\tau) d\tau}{(t - \tau)^{\alpha+1-n}}$$

eşitliği ile tanımlıdır (Podlubny, 1999).

Literatürde sıklıkla kullanılan kesirli türev yaklaşımları Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville ve Caputo kesirli mertebeden türev yaklaşımları olup, bu kesirli türev yaklaşımlarının bazı dezavantajları vardır. Bu dezavantajları aşağıdaki gibi sıralanabilir (Khalil ve ark., 2014).

- Sabit fonksiyonun Riemann-Liouville kesirli türevi sıfır değildir.
- Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville ve Caputo kesirli türev yaklaşımları,  $f_1(x)$  ve  $f_2(x)$  fonksiyonları  $\gamma$ -mertebeden diferansiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere, iki fonksiyonun çarpımının türevi olan

$$D_x^\gamma (f_1(x)f_2(x)) = f_1(x)D_x^\gamma (f_2(x)) + f_2(x)D_x^\gamma (f_1(x))$$

eşitliğini sağlamazlar.

- Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville ve Caputo kesirli türev yaklaşımları,  $f_1(x)$  ve  $f_2(x)$  fonksiyonları  $\gamma$ -mertebeden diferansiyellenebilir fonksiyonlar ve  $f_2 \neq 0$  olmak üzere iki fonksiyonun bölümünün türevi olan

$$D_x^\gamma \left( \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right) = \frac{f_2(x)D_x^\gamma(f_1(x)) - f_1(x)D_x^\gamma(f_2(x))}{[f_2(x)]^2}$$

eşitliğini sağlamazlar.

- Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville ve Caputo kesirli türev yaklaşımları

$$D_x^\gamma (f_1(x) \circ f_2(x)) = f_1^{(\gamma)}(f_2(x)) f_2^{(\gamma)}(x)$$

olarak verilen zincir kuralı eşitliğini sağlamazlar.

- Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville ve Caputo kesirli türev yaklaşımları

$$D^\gamma D^\mu f(t) = D^{\gamma+\mu} f_1(x)$$

eşitliğini sağlamazlar.

**Tanım 3.1.1.**  $f_1: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  bir fonksiyon olmak üzere  $x > 0$  ve  $0 < \gamma < 1$  için  $f_1(x)$  fonksiyonunun  $\gamma$  –inci mertebeden conformable kesirli türev yaklaşımı

$$T_\gamma(f_1(x)) = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{f_1(x + \xi x^{1-\gamma}) - f_1(x)}{\xi}$$

denklemleri ile tanımlıdır. Eğer  $f_1(x)$  fonksiyonu  $k > 0$  olmak üzere  $(0, k)$  açık aralığında  $\gamma$  –inci mertebeden diferansiyellenebilir ve

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_1^{(\gamma)}(x)$$

limiti varsa

$$f_1^{(\gamma)}(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f_1^{(\gamma)}(x)$$

eşitliği sağlanmaktadır (Khalil ve ark., 2014).

**Teorem 3.1.1.**  $f_1: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $x_0 > 0$  noktasında  $0 < \gamma \leq 1$  olmak üzere  $\gamma$  –inci mertebeden türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere,  $f_1(x)$  fonksiyonu  $x_0$  noktasında sürekli bir fonksiyon olur (Khalil ve ark., 2014).

**Teorem 3.1.2.**  $0 < \gamma \leq 1$  ve  $x > 0$  için  $f_1(x)$  ve  $f_2(x)$  fonksiyonları  $\gamma$  –inci mertebeden türevlenebilir fonksiyonlar olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanmaktadır (Khalil ve ark., 2014):

- Conformable kesirli türev yaklaşımı lineerlik özelliğini sağlamaktadır. Yani, her  $k, l \in \mathbb{R}$  için

$$T_\gamma(kf_1(x) + lf_2(x)) = kT_\gamma(f_1(x)) + lT_\gamma(f_2(x))$$

eşitliği sağlanmaktadır.

- Her  $m \in \mathbb{R}$  için,  $f_1(x) = x^m$  ile verilen fonksiyonun  $\gamma$  –inci mertebeden conformable kesirli türevi

$$T_\gamma(f_1(x)) = T_\gamma(x^m) = mx^{m-\gamma}$$

şeklindedir.

- $f_1(x) = d$  sabit fonksiyonunun  $\gamma$  –inci mertebeden conformable kesirli türevi sıfırdır, yani

$$T_\gamma(f_1(x)) = T_\gamma(d) = 0$$

eşitliği sağlanmaktadır.

- Conformable kesirli türev yaklaşımı, iki fonksiyonun çarpımının türevi olan

$$T_\gamma(f_1(x)f_2(x)) = f_1(x)T_\gamma(f_2(x)) + f_2(x)T_\gamma(f_1(x))$$

eşitliği sağlamaktadır.

- Conformable kesirli türev yaklaşımı, iki fonksiyonun bölümünün türevi olan

$$T_\gamma\left(\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right) = \frac{f_2(x)T_\gamma(f_1(x)) - f_1(x)T_\gamma(f_2(x))}{[f_2(x)]^2}$$

eşitliğini sağlamaktadır.

- Conformable kesirli mertebeden türevi, tamsayı mertebeden türev ile ifade edilmektedir. Conformable kesirli mertebeden türevi

$$T_\gamma(f_1(x)) = x^{1-\gamma} \frac{df_1(x)}{dx}$$

eşitliğini sağlamaktadır. Bu eşitliğin sağlanması, conformable kesirli mertebeden türev için çok büyük bir avantajdır.

Bazı temel fonksiyonların  $0 < \gamma \leq 1$  olmak üzere  $\gamma$  –inci mertebeden conformable kesirli türevleri

- $k \in \mathbb{R}$  olmak üzere  $T_\gamma(e^{kx}) = kt^{1-\gamma}e^{kx}$ ,
- $l \in \mathbb{R}$  olmak üzere  $T_\gamma(\sin(lx)) = lt^{1-\gamma}\cos(lx)$ ,
- $m \in \mathbb{R}$  olmak üzere  $T_\gamma(\cos(mx)) = -mt^{1-\gamma}\sin(mx)$ ,
- $T_\gamma\left(\frac{t^\gamma}{\gamma}\right) = 1$ ,
- $T_\gamma\left(\sin\left(\frac{t^\gamma}{\gamma}\right)\right) = \cos\left(\frac{t^\gamma}{\gamma}\right)$ ,
- $T_\gamma\left(\cos\left(\frac{t^\gamma}{\gamma}\right)\right) = -\sin\left(\frac{t^\gamma}{\gamma}\right)$ ,
- $T_\gamma\left(e^{\frac{t^\gamma}{\gamma}}\right) = e^{\frac{t^\gamma}{\gamma}}$ .

**Tanım 3.1.2.**  $0 < \gamma < 1$  olmak üzere  $f_1(x)$  fonksiyonunun  $\gamma$  –inci mertebeden conformable kesirli integrali

$$I_\gamma^k(f_1(x)) = I_1^k(t^{\gamma-1}f_1(x)) = \int_k^x \frac{f_1(y)}{y^{1-\gamma}} dy \quad (3.1)$$

şeklinde genelleştirilmiş Riemann integrali ile verilmektedir (Khalil ve ark., 2014).

(3.1) ile verilen genelleştirilmiş Riemann integrali yardımıyla

- $I_{\frac{1}{2}}^0(\sqrt{x}\cos(x)) = \sin(x)$ ,
- $I_{\frac{1}{2}}^0(\cos(2\sqrt{x})) = \sin(2\sqrt{x})$

eşitliklerinin sağlandığı kolayca görülmektedir.

**Teorem 3.1.3.**  $x \geq k$  olmak üzere  $f_1(x)$  sürekli fonksiyonu için

$$T_\gamma(I_\gamma^k(f_1(x))) = f_1(x)$$

eşitliği sağlanmaktadır (Khalil ve ark., 2014).

### 3.2. Fonksiyonel Değişken Yöntemi

Doğada ki meydana gelen birçok fiziksel olayın matematiksel modelleri genellikle lineer olmayan adi veya kısmi diferansiyel denklemler yardımıyla ifade edilebilir. Bu tür denklemlerin analitik çözümlerinin araştırılması uygulamalı matematikte büyük öneme sahiptir. Son yıllarda bilgisayar teknolojisinin de hızlı gelişimi ile birlikte ortaya çıkan yeni analitik yöntemler lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerinin analitik çözümlerinin bulunmasında oldukça sık kullanılmaya başlanmıştır. Bu yöntemlerden bazıları homojen denge (Wang, 1995; Wang ve ark., 1996), F-açılımı (Zhou ve ark., 2003; Zhou ve ark., 2004), hiperbolik tanjant açılımı (Malfeit, 1992; Parkes ve ark., 1996), sine-cosine (Yang, 1996; Wazwaz 2007), jakobi eliptik fonksiyon (Liu ve ark., 2001; Fu ve ark., 2001; Huiqun, 2007; Liu ve ark., 2004; Abdou ve ark., 2007; Parkes ve ark., 2002; Fan ve ark., 2002), varyasyonel iterasyon (He ve ark., 2006; Wazwaz, 2007),  $\left(\frac{G'}{G}\right)$  açılım (Wang ve ark., 2008; Kutluay ve ark., 2010), homotopi perturbasyon (He, 2005), üstel fonksiyon (He ve ark., 2006; Wu ve ark., 2007), fonksiyonel değişken (Zerarka ve ark., 2010; Aminikhah ve ark., 2016) vb. yöntemler olarak sıralanabilir.

Bu yöntemlerden biri olan fonksiyonel değişken yöntemi, ilk olarak A. Zerarka ve arkadaşları (Zerarka ve ark., 2010) tarafından lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerini elde etmek için önerildi.

Fonksiyonel değişkenken yönteminin genel bir lineer olmayan kısmi diferansiyel denkleme uygulanması için,

$$P(u, u_t, u_x, u_y, u_z, u_{tt}, u_{xx}, u_{yy}, u_{zz}, u_{xt}, u_{xy}, u_{ty}, u_{xz}, u_{tz}, u_{yz}, \dots) = 0 \quad (3.2)$$

şeklinde genel bir lineer kısmi diferansiyel denklem ele alınsın. Burada  $u$  bağımlı değişken,  $x, y, z, t$  bağımsız değişkenlerdir. (3.2) ile verilen lineer olmayan kısmi diferansiyel denkleme

$$u(x, y, z, t) = U(\xi)$$

ve  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$  reel sabitler olmak üzere

$$\xi = \alpha_0 t + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + \beta$$

şeklinde dalga dönüşümü uygulanırsa, (3.2) ile verilen lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem

$$G(U, U_\xi, U_{\xi\xi}, \dots) = 0 \quad (3.3)$$

şeklinde adi türevli diferansiyel denkleme indirgenir. Burada  $U$  bağımlı değişkeni ve  $\xi$  ise bağımsız değişkeni göstermektedir.  $\xi$  değişkenine bağlı olan  $U$  fonksiyonuna bir dönüşüm yapılması için,

$$U_\xi = F(U) \quad (3.4)$$

formunda bir fonksiyonel değişken ele alınsın. Böylece, (3.2) ile verilen eşitliğinin kullanılması ile  $U$  fonksiyonunun  $\xi$  bağımsız değişkenine göre türevleri

$$U_{\xi\xi} = \frac{1}{2} (F^2)',$$

$$U_{\xi\xi\xi} = \frac{1}{2} (F^2)'' \sqrt{F^2}, \quad (3.5)$$

$$U_{\xi\xi\xi\xi} = \frac{1}{2} [(F^2)''' F^2 + (F^2)'' (F^2)'],$$

⋮

olarak elde edilir. Burada “'” simgesi  $\frac{d}{dU}$  ifadesini göstermektedir. (3.5) ile verilen denklemlerin (3.3) ile verilen adi diferansiyel denklemde kullanılmasıyla,  $U, F$  ve  $F$  fonksiyonunun türevlerinden oluşan

$$R(U, F, F', F'', F''', \dots) = 0 \quad (3.6)$$

denklemini elde edilir. Gerekli integral işlemlerinden sonra, (3.6) ile verilen diferansiyel denklemden  $F$  fonksiyonu elde edilir. Elde edilen  $F$  fonksiyonunun değerinin (3.4) ile verilen denklemden yerine yazılmasıyla, (3.2) ile ele alınan lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemin analitik çözümü elde edilir (Zerarka ve ark., 2010).

**Teorem 3.1.1.**  $k_1$  ve  $k_2 \neq 0$  sabitler ve  $U$  bağımlı fonksiyonu (3.4) ile verilen bir fonksiyonel değişken olmak üzere

$$U_{\xi\xi} = k_1U - k_2U^2 \quad (3.7)$$

şeklinde ikinci mertebeden adi türevli diferansiyel denklemi ele alınsın. O halde

$$U_{\xi\xi} = \frac{1}{2}(F^2)'$$

eşitliğinin kullanılması ile (3.7) ile verilen adi diferansiyel denklemin analitik çözümleri aşağıdaki gibidir (Aminikhah ve ark., 2016):

**1. Durum:**  $k_1 > 0$  olmak üzere (3.2.6) ile verilen adi diferansiyel denklemin analitik çözümleri

$$U_1(\xi) = \frac{3k_1}{2k_2} \left( \operatorname{sech} \left( \frac{\sqrt{k_1}}{2} \xi \right) \right)^2$$

ve

$$U_2(\xi) = -\frac{3k_1}{2k_2} \left( \operatorname{csch} \left( \frac{\sqrt{k_1}}{2} \xi \right) \right)^2$$

şeklindedir.

**2. Durum:**  $k_1 < 0$  olmak üzere (3.7) ile verilen adi diferansiyel denklemin analitik çözümleri

$$U_3(\xi) = \frac{3k_1}{2k_2} \left( \sec \left( \frac{\sqrt{-k_1}}{2} \xi \right) \right)^2$$

ve

$$U_4(\xi) = \frac{3k_1}{2k_2} \left( \csc \left( \frac{\sqrt{-k_1}}{2} \xi \right) \right)^2$$

şeklindedir.

**İspat:** İlk olarak,

$$U_{\xi\xi} = \frac{1}{2}(F^2)'$$

eşitliği (3.7) ile verilen adi diferansiyel denklemden yerine yazılırsa

$$\frac{1}{2}(F^2(U))' = k_1U - k_2U^2 \quad (3.8)$$

eşitliği elde edilir. Burada “'” simgesi  $\xi$  değişkenine göre türevi göstermektedir. (3.8) ile verilen eşitliğin,  $U$  değişkenine göre integrali alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$F(U) = \pm U \sqrt{k_1 - \frac{2k_2}{3}U}$$

veya

$$F(U) = \pm \sqrt{k_1} U \sqrt{1 - \frac{2k_2}{3k_1}U} \quad (3.9)$$

eşitliği elde edilir. Burada

$$Z = \frac{2k_2}{3k_1} U$$

şeklinde değişken değiştirmesi kullanılırsa

$$\frac{3k_1}{2k_2} Z = U$$

eşitliği ve bu eşitliğin diferansiyellenmesiyle

$$\frac{3k_1}{2k_2} dZ = dU(\xi) \quad (3.10)$$

eşitliği elde edilir.

(3.4) , (3.9) ve (3.10) eşitliklerinin kullanılmasıyla

$$\frac{dZ}{Z\sqrt{1-Z}} = \pm \sqrt{k_1} d\xi$$

adi diferansiyel denklemi elde edilir. İntegral sabitinin sıfır olarak alınmasıyla, bu diferansiyel denklemin çözümü

$$\ln \left| \frac{1 - \sqrt{1-Z}}{1 + \sqrt{1-Z}} \right| = \pm \sqrt{k_1} \xi$$

veya

$$\left| \frac{1 - \sqrt{1-Z}}{1 + \sqrt{1-Z}} \right| = e^{\pm \sqrt{k_1} \xi}$$

olarak bulunur.

Eğer  $\theta = \pm \sqrt{k_1} \xi$  olarak seçilirse, iki durum söz konusu olmaktadır. Bu iki durum ayrı ayrı incelensin.

**1. Durum:** Varsayalım ki  $k_1 > 0$  olsun. Bu durumda

$$\frac{1 - \sqrt{1-Z}}{1 + \sqrt{1-Z}} = e^\theta$$

olarak bulunur. Bu ifadeden

$$Z = \frac{4}{e^{-\theta} + e^\theta + 2}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{\cosh \theta + 1} \\
&= \frac{1}{\left(\cosh\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^2 + 1} \\
&= \left(\operatorname{sech}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^2
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Böylece

$$Z = \left(\operatorname{sech}\left(\frac{\sqrt{k_1}}{2}\xi\right)\right)^2 \quad (3.11)$$

bulunur. Varsayalım ki  $k_1 < 0$  olsun. Bu durumda da

$$\frac{1 - \sqrt{1 - Z}}{1 + \sqrt{1 - Z}} = e^{i\theta}$$

eşitliği bulunur. Bu eşitlik yardımı ile de

$$\begin{aligned}
Z &= \frac{4}{e^{-i\theta} + e^{i\theta} + 2} \\
&= \frac{2}{\cos \theta + 1} \\
&= \frac{1}{\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^2 + 1} \\
&= \left(\sec\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^2
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Sonuç olarak da

$$Z = \left(\sec\left(\frac{\sqrt{-k_1}}{2}\xi\right)\right)^2 \quad (3.12)$$

eşitliği bulunur.

**2. Durum:** Varsayalım ki  $k_1 > 0$  olsun. O halde

$$\frac{1 - \sqrt{1 - Z}}{1 + \sqrt{1 - Z}} = -e^\theta$$

olup, bu eşitlikten

$$\begin{aligned}
Z &= -\frac{4}{e^{-\theta} + e^\theta + 2} \\
&= \frac{2}{\cosh \theta - 1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\left(\sinh\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^2 + 1} \\
&= -\left(\operatorname{csch}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^2
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$Z = -\left(\operatorname{csch}\left(\frac{\sqrt{k_1}}{2}\xi\right)\right)^2 \quad (3.13)$$

olur. Varsayalım ki  $k_1 < 0$  olsun. Bu durumda da

$$\frac{1 - \sqrt{1 - Z}}{1 + \sqrt{1 - Z}} = -e^{i\theta}$$

olur ki, bu eşitliğin kullanılmasıyla da

$$\begin{aligned}
Z &= -\frac{4}{e^{-i\theta} + e^{i\theta} - 2} \\
&= \frac{2}{1 - \cos\theta} \\
&= \frac{1}{\left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^2} \\
&= \left(\operatorname{csc}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^2
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir ki, böylece de

$$Z = \left(\operatorname{csc}\left(\frac{\sqrt{-k_1}}{2}\xi\right)\right)^2 \quad (3.14)$$

denklemini bulunur. (3.11), (3.12), (3.13) ve (3.14) denklemlerinin

$$\frac{3k_1}{2k_2}Z = U$$

eşitliğinde kullanılmasıyla (3.7) denkleminin analitik çözümleri elde edilir.

$k_1 > 0$  olduğunda, (3.7) denkleminin analitik çözümleri

$$U_1(\xi) = \frac{3k_1}{2k_2} \left(\operatorname{sech}\left(\frac{\sqrt{k_1}}{2}\xi\right)\right)^2$$

ve

$$U_2(\xi) = -\frac{3k_1}{2k_2} \left(\operatorname{csch}\left(\frac{\sqrt{k_1}}{2}\xi\right)\right)^2$$

şeklinde olup,  $k_1 < 0$  olduğunda ise (3.7) denkleminin analitik çözümleri

$$U_3(\xi) = \frac{3k_1}{2k_2} \left( \sec\left(\frac{\sqrt{-k_1}}{2}\xi\right) \right)^2$$

ve

$$U_4(\xi) = \frac{3k_1}{2k_2} \left( \csc\left(\frac{\sqrt{-k_1}}{2}\xi\right) \right)^2$$

şeklindedir.

**Teorem 3.1.2.**  $k_1 \neq 0$  ve  $k_2$  sabitler ve  $U$  bağımlı fonksiyonu (3.4) ile verilen bir fonksiyonel değişken olmak üzere

$$U_{\xi\xi} = k_1[k_2^2U + 3k_2U^2 + 2U^3] \quad (3.15)$$

şeklinde ikinci mertebeden adi türevli diferansiyel denklemi ele alınsın. O halde

$$U_{\xi\xi} = \frac{1}{2}(F^2)'$$

eşitliğinin kullanılması ile (3.15) ile verilen adi diferansiyel denklemin analitik çözümleri aşağıdaki gibidir (Aminikhah ve ark., 2016):

- 1. Durum:**  $k_1 > 0$  olmak üzere (3.15) ile verilen adi diferansiyel denklemin analitik çözümleri

$$U_1(\xi) = -\frac{k_2}{2} \left[ 1 + \coth\left(\frac{k_2\sqrt{k_1}}{2}\xi\right) \right]$$

ve

$$U_2(\xi) = -\frac{k_2}{2} \left[ 1 + \tanh\left(\frac{k_2\sqrt{k_1}}{2}\xi\right) \right]$$

şeklindedir.

- 2. Durum:**  $k_1 < 0$  olmak üzere (3.15) ile verilen adi diferansiyel denklemin analitik çözümleri

$$U_3(\xi) = -\frac{k_2}{2} \left[ 1 - i\cot\left(\frac{k_2\sqrt{-k_1}}{2}\xi\right) \right]$$

ve

$$U_4(\xi) = -\frac{k_2}{2} \left[ 1 + i\tan\left(\frac{k_2\sqrt{-k_1}}{2}\xi\right) \right]$$

şeklindedir.

**İspat:** İlk olarak,

$$U_{\xi\xi} = \frac{1}{2}(F^2)'$$

eşitliği (3.15) ile verilen adi diferansiyel denklemde yerine yazılırsa

$$\frac{1}{2}(F^2(U))' = k_1[k_2^2U + 3k_2U^2 + 2U^3] \quad (3.16)$$

eşitliği elde edilir. Burada “'” simgesi  $\xi$  değişkenine göre türevi göstermektedir. (3.16) ile verilen eşitliğin,  $U$  değişkenine göre integrali alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$F(U) = \pm\sqrt{k_1}U\sqrt{k_2^2 + 2k_2U + U^2},$$

veya

$$F(U) = \pm\sqrt{k_1}U(U + k_2) \quad (3.17)$$

eşitliği elde edilir. Burada (3.4) ve (3.17) denklemlerinin kullanılmasıyla

$$\frac{dU}{U(U + k_2)} = \pm\sqrt{k_1}d\xi$$

adi diferansiyel denklemi elde edilir. İntegral sabitinin sıfır olarak alınmasıyla, bu diferansiyel denklemin çözümü

$$\frac{1}{k_2}\ln\left|\frac{U}{U + k_2}\right| = \pm\sqrt{k_1}\xi$$

olarak bulunur. Bu denklemin düzenlenmesi ile de

$$\left|\frac{U}{U + k_2}\right| = e^{\pm k_2\sqrt{k_1}\xi}$$

eşitliği elde edilir.

Eğer  $\theta = \pm k_2\sqrt{k_1}\xi$  olarak seçilirse, iki durum söz konusu olmaktadır. Bu iki durum ayrı ayrı incelenir.

**1. Durum:** Varsayalım ki  $k_1 > 0$  olsun. Bu durumda

$$\frac{U}{U + k_2} = e^\theta$$

olarak bulunur. Bu ifadede

$$\begin{aligned} U &= -\frac{k_2e^\theta}{e^\theta - 1} \\ &= -\frac{k_2}{2}\left(\frac{2e^\theta}{e^\theta - 1}\right) \\ &= -\frac{k_2}{2}\left(1 + \frac{e^\theta + 1}{e^\theta - 1}\right) \end{aligned}$$

$$= -\frac{k_2}{2} \left[ 1 + \coth\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]$$

eşitliği elde edilir. Böylece

$$U = -\frac{k_2}{2} \left[ 1 + \coth\left(\frac{k_2\sqrt{k_1}}{2}\xi\right) \right] \quad (3.18)$$

bulunur. Varsayalım ki  $k_1 < 0$  olsun. Bu durumda da

$$\frac{U}{U + k_2} = e^{i\theta}$$

eşitliği bulunur. Bu eşitlik yardımı ile de

$$\begin{aligned} U &= -\frac{k_2 e^\theta}{e^\theta - 1} \\ &= -\frac{k_2}{2} \left( \frac{2e^{i\theta}}{e^{i\theta} - 1} \right) \\ &= -\frac{k_2}{2} \left( 1 + \frac{e^{i\theta} + 1}{e^{i\theta} - 1} \right) \\ &= -\frac{k_2}{2} \left[ 1 - i \coth\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Sonuç olarak da

$$U = -\frac{k_2}{2} \left[ 1 - i \cot\left(\frac{k_2\sqrt{-k_1}}{2}\xi\right) \right] \quad (3.19)$$

eşitliği bulunur.

**2. Durum:** Varsayalım ki  $k_1 > 0$  olsun. O halde

$$\frac{U}{U + k_2} = -e^\theta$$

olup, bu eşitlikten

$$\begin{aligned} U &= -\frac{k_2 e^\theta}{e^\theta + 1} \\ &= -\frac{k_2}{2} \left( \frac{2e^\theta}{e^\theta + 1} \right) \\ &= -\frac{k_2}{2} \left( 1 + \frac{e^\theta - 1}{e^\theta + 1} \right) \\ &= -\frac{k_2}{2} \left[ 1 + \tanh\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$U = -\frac{k_2}{2} \left[ 1 + \tanh\left(\frac{k_2\sqrt{k_1}}{2}\xi\right) \right] \quad (3.20)$$

olur. Varsayalım ki  $k_1 < 0$  olsun. Bu durumda da

$$\frac{U}{U + k_2} = -e^{i\theta}$$

olur ki, bu eşitliğin kullanılmasıyla da

$$\begin{aligned} U &= -\frac{k_2 e^\theta}{e^\theta - 1} \\ &= -\frac{k_2}{2} \left( \frac{2e^{i\theta}}{e^{i\theta} + 1} \right) \\ &= -\frac{k_2}{2} \left( 1 + \frac{e^{i\theta} - 1}{e^{i\theta} + 1} \right) \\ &= -\frac{k_2}{2} \left[ 1 - i \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir ki, böylece de

$$U = -\frac{k_2}{2} \left[ 1 + i \tan\left(\frac{k_2 \sqrt{-k_1}}{2} \xi\right) \right] \quad (3.21)$$

denklemi bulunur. (3.18), (3.19), (3.20) ve (3.21) denklemleri ile (3.15) denkleminin analitik çözümleri elde edilir.

$k_1 > 0$  olduğunda, (3.15) denkleminin analitik çözümleri

$$U_1(\xi) = -\frac{k_2}{2} \left[ 1 + \coth\left(\frac{k_2 \sqrt{k_1}}{2}\right) \xi \right]$$

ve

$$U_2(\xi) = -\frac{k_2}{2} \left[ 1 + \tanh\left(\frac{k_2 \sqrt{k_1}}{2}\right) \xi \right]$$

şeklinde olup,  $k_1 < 0$  olduğunda ise (3.15) denkleminin analitik çözümleri

$$U_3(\xi) = -\frac{k_2}{2} \left[ 1 - i \cot\left(\frac{k_2 \sqrt{-k_1}}{2}\right) \xi \right]$$

ve

$$U_4(\xi) = -\frac{k_2}{2} \left[ 1 + i \tan\left(\frac{k_2 \sqrt{-k_1}}{2}\right) \xi \right]$$

şeklindedir.

#### 4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

Bu bölümde; conformable kesirli türev yaklaşımı içeren, kesirli mertebeden genişletilmiş BKP-Boussinesq, genelleştirilmiş Calogero–Bogoyavlenskii–Schiff ve genelleştirilmiş (2+1) boyutlu Hirota-Satsuma-Ito denklemlerinin analitik çözümleri elde edildi. Fonksiyonel değişken yöntemi ile elde edilen bu kesirli mertebeden türevli kısmi diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerinin yüzeyleri ve eğrileri çizildi.

##### 4.1. Conformable Kesirli Mertebeden Genişletilmiş BKP-Boussinesq Denklemi

Genişletilmiş BKP-Boussinesq denklemi birçok araştırmacı tarafından analitik olarak çözüldü. 2017 yılında yapılan çalışmada, A. M. Wazwaz ve S. A. El-Tantawy, Hirota yöntemini kullanarak denklemin analitik çözümünü elde ettiler (Wazwaz ve El-Tantawy, 2017). 2018 yılında yapılan çalışmada ise, Yan ve arkadaşları genişletilmiş BKP-Boussinesq denkleminin analitik çözümlerini buldular (Yan ve ark., 2018). C. M. Khalique ve L. D. Moleleki tarafından, 2019 yılında (G'/G) açılım yöntemini kullanarak genişletilmiş BKP-Boussinesq denkleminin analitik çözümlerini elde edildi (Khalique ve Moleleki, 2019). 2019 yılında yapılan diğer bir çalışmada ise, kesik Painlevé açılımı ve Bell polinom yaklaşımı kullanılarak denklemin analitik çözümleri elde edildi (Verma ve Kaur, 2019). 2021 yılında, H.O. Roshid ve arkadaşları BKP-Boussinesq denklemini üstel fonksiyonların yardımı ile analitik olarak çözdüler (Roshid ve ark., 2021).

Conformable kesirli mertebeden genişletilmiş BKP-Boussinesq denklemi,

$0 < \gamma \leq 1$  olmak üzere,

$$\frac{\partial^\gamma}{\partial t^\gamma} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial^4 u}{\partial^3 x \partial y} - 3 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial^\gamma}{\partial t^\gamma} \left( \frac{\partial^\gamma u}{\partial t^\gamma} \right) + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 0 \quad (4.1)$$

şeklindedir. (4.1) ile verilen conformable kesirli mertebeden genişletilmiş BKP-Boussinesq denklemine,  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$  reel sabitler ve

$$u(x, y, z, t) = U(\xi)$$

olmak üzere,

$$\xi = \alpha_0 \frac{t^\gamma}{\gamma} + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + \beta$$

şeklinde dalga dönüşümü uygulanırsa

$$(\alpha_0^2 + 3\alpha_1\alpha_3 + \alpha_0\alpha_2)U_{\xi\xi} - \alpha_1^3\alpha_2U_{4\xi} - 6\alpha_1^2\alpha_2U_\xi U_{\xi\xi} = 0 \quad (4.2)$$

adi türevli diferansiyel denklemi elde edilir. İntegral sabiti sıfır alınarak, (4.2) adi türevli diferansiyel denkleminin  $\xi$  değişkenine göre bir kez integralinin alınmasıyla, (4.2) denklemi

$$(\alpha_0^2 + 3\alpha_1\alpha_3 + \alpha_0\alpha_2)U_\xi - \alpha_1^3\alpha_2 U_{\xi\xi\xi} - 3\alpha_1^2\alpha_2(U_\xi)^2 = 0 \quad (4.3)$$

formunda yazılır. (4.1.3) ile verilen adi diferansiyel denkleme

$$U_\xi = V$$

şeklinde dönüşüm yapılırsa, (4.1.3) ile verilen denklem

$$(\alpha_0^2 + 3\alpha_1\alpha_3 + \alpha_0\alpha_2)V - \alpha_1^3\alpha_2 V_{\xi\xi} - 3\alpha_1^2\alpha_2 V^2 = 0 \quad (4.4)$$

olarak yazılır. Elde edilen bu denklemin düzenlenmesi ile de

$$V_{\xi\xi} = \frac{\alpha_0^2 + 3\alpha_1\alpha_3 + \alpha_0\alpha_2}{\alpha_1^3\alpha_2} V - \frac{3}{\alpha_1} V^2 \quad (4.5)$$

eşitliği elde edilir. (4.1.5) ile verilen lineer olmayan diferansiyel denkleminde bulunan  $V_{\xi\xi}$  ifadesinin yerine, (3.2.4) denklemlerinde yer alan

$$V_{\xi\xi} = \frac{1}{2}(F^2)' \quad (4.6)$$

eşitliği kullanılırsa,  $F(V)$  fonksiyonu

$$F(V) = \pm V \sqrt{\frac{\alpha_0^2 + 3\alpha_1\alpha_3 + \alpha_0\alpha_2}{\alpha_1^3\alpha_2} - \frac{2}{\alpha_1} V} \quad (4.7)$$

olarak bulunur. (4.7) ile verilen denklemde (3.4) eşitliği kullanılırsa, Teorem 3.1 yardımı ile (4.5) adi diferansiyel denkleminin analitik çözümleri,

$$\frac{\alpha_0^2 + 3\alpha_1\alpha_3 + \alpha_0\alpha_2}{\alpha_1^3\alpha_2} > 0$$

olmak üzere,

$$V_1(\xi) = \frac{\alpha_0^2 + 3\alpha_1\alpha_3 + \alpha_0\alpha_2}{2\alpha_1^2\alpha_2} \left( \operatorname{sech} \left( \frac{\sqrt{\alpha_0^2 + 3\alpha_1\alpha_3 + \alpha_0\alpha_2}}{2\sqrt{\alpha_1^3\alpha_2}} \xi \right) \right)^2,$$

$$V_2(\xi) = -\frac{\alpha_0^2 + 3\alpha_1\alpha_3 + \alpha_0\alpha_2}{2\alpha_1^2\alpha_2} \left( \operatorname{csch} \left( \frac{\sqrt{\alpha_0^2 + 3\alpha_1\alpha_3 + \alpha_0\alpha_2}}{2\sqrt{\alpha_1^3\alpha_2}} \xi \right) \right)^2$$

şeklinde olup,

$$\frac{\alpha_0^2 + 3\alpha_1\alpha_3 + \alpha_0\alpha_2}{\alpha_1^3\alpha_2} < 0$$

olmak üzere ise,

$$V_3(\xi) = \frac{\alpha_0^2 + 3\alpha_1\alpha_3 + \alpha_0\alpha_2}{2\alpha_1^2\alpha_2} \left( \sec \left( \frac{\sqrt{-(\alpha_0^2 + 3\alpha_1\alpha_3 + \alpha_0\alpha_2)}}{2\sqrt{\alpha_1^3\alpha_2}} \xi \right) \right)^2,$$

$$V_4(\xi) = \frac{\alpha_0^2 + 3\alpha_1\alpha_3 + \alpha_0\alpha_2}{2\alpha_1^2\alpha_2} \left( \csc \left( \frac{\sqrt{-(\alpha_0^2 + 3\alpha_1\alpha_3 + \alpha_0\alpha_2)}}{2\sqrt{\alpha_1^3\alpha_2}} \xi \right) \right)^2$$

şeklinde elde edilir.  $U_\xi = V$  olduğu dikkate alınırsa,

$$\frac{\alpha_0^2 + 3\alpha_1\alpha_3 + \alpha_0\alpha_2}{\alpha_1^3\alpha_2} > 0$$

olmak üzere,

$$U_1(\xi) = \frac{\sqrt{\alpha_0^2 + 3\alpha_1\alpha_3 + \alpha_0\alpha_2}}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}} \tanh \left( \frac{\sqrt{\alpha_0^2 + 3\alpha_1\alpha_3 + \alpha_0\alpha_2}}{2\sqrt{\alpha_1^3\alpha_2}} \xi \right),$$

$$U_2(\xi) = \frac{\sqrt{\alpha_0^2 + 3\alpha_1\alpha_3 + \alpha_0\alpha_2}}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}} \coth \left( \frac{\sqrt{\alpha_0^2 + 3\alpha_1\alpha_3 + \alpha_0\alpha_2}}{2\sqrt{\alpha_1^3\alpha_2}} \xi \right)$$

şeklinde olup,

$$\frac{\alpha_0^2 + 3\alpha_1\alpha_3 + \alpha_0\alpha_2}{\alpha_1^3\alpha_2} < 0$$

olmak üzere ise,

$$U_3(\xi) = \frac{\sqrt{-(\alpha_0^2 + 3\alpha_1\alpha_3 + \alpha_0\alpha_2)}}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}} \tan \left( \frac{\sqrt{-(\alpha_0^2 + 3\alpha_1\alpha_3 + \alpha_0\alpha_2)}}{2\sqrt{\alpha_1^3\alpha_2}} \xi \right),$$

$$U_4(\xi) = -\frac{\sqrt{-(\alpha_0^2 + 3\alpha_1\alpha_3 + \alpha_0\alpha_2)}}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}} \cot \left( \frac{\sqrt{-(\alpha_0^2 + 3\alpha_1\alpha_3 + \alpha_0\alpha_2)}}{2\sqrt{\alpha_1^3\alpha_2}} \xi \right)$$

yazılır. Yukarıda verilen  $U_1(\xi), U_2(\xi), U_3(\xi), U_4(\xi)$  eşitliklerinde

$$u(x, y, z, t) = U(\xi)$$

değeri kullanılırsa, (4.1) ile verilen conformable kesirli mertebeden genişletilmiş BKP-

Boussinesq denkleminin analitik çözümleri

$$\frac{\alpha_0^2 + 3\alpha_1\alpha_3 + \alpha_0\alpha_2}{\alpha_1^3\alpha_2} > 0$$

olmak üzere,

$$u_1(x, y, z, t) = \frac{\sqrt{\alpha_0^2 + 3\alpha_1\alpha_3 + \alpha_0\alpha_2}}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}} \tanh \left( \frac{\sqrt{\alpha_0^2 + 3\alpha_1\alpha_3 + \alpha_0\alpha_2}}{2\sqrt{\alpha_1^3\alpha_2}} \xi \right),$$

$$u_2(x, y, z, t) = \frac{\sqrt{\alpha_0^2 + 3\alpha_1\alpha_3 + \alpha_0\alpha_2}}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}} \coth \left( \frac{\sqrt{\alpha_0^2 + 3\alpha_1\alpha_3 + \alpha_0\alpha_2}}{2\sqrt{\alpha_1^3\alpha_2}} \xi \right)$$

ve

$$\frac{\alpha_0^2 + 3\alpha_1\alpha_3 + \alpha_0\alpha_2}{\alpha_1^3\alpha_2} < 0$$

olmak üzere,

$$u_3(x, y, z, t) = \frac{\sqrt{-(\alpha_0^2 + 3\alpha_1\alpha_3 + \alpha_0\alpha_2)}}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}} \tan\left(\frac{\sqrt{-(\alpha_0^2 + 3\alpha_1\alpha_3 + \alpha_0\alpha_2)}}{2\sqrt{\alpha_1^3\alpha_2}} \xi\right),$$
$$u_4(x, y, z, t) = -\frac{\sqrt{-(\alpha_0^2 + 3\alpha_1\alpha_3 + \alpha_0\alpha_2)}}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}} \cot\left(\frac{\sqrt{-(\alpha_0^2 + 3\alpha_1\alpha_3 + \alpha_0\alpha_2)}}{2\sqrt{\alpha_1^3\alpha_2}} \xi\right)$$

olarak bulunur. Burada

$$\xi = \alpha_0 \frac{t^\gamma}{\gamma} + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + \beta$$

şeklindedir.

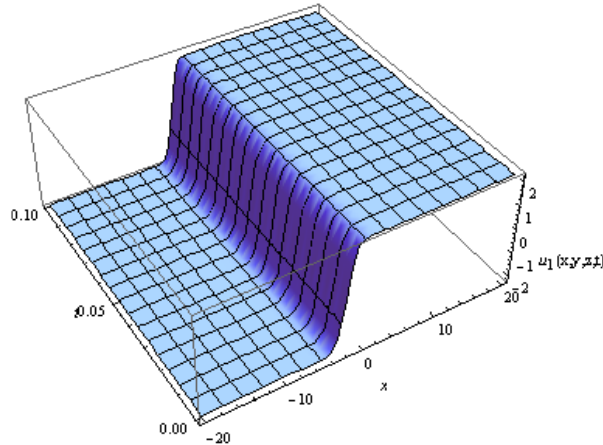
Şekil 4.1. ile verilen yüzey, (4.1) ile verilen conformable kesirli mertebeden genişletilmiş BKP-Boussinesq denklemin  $u_1(x, y, z, t)$  analitik çözümünün

$$\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 1, y = 1, z = 1, \gamma = 0.9, \beta = 0$$

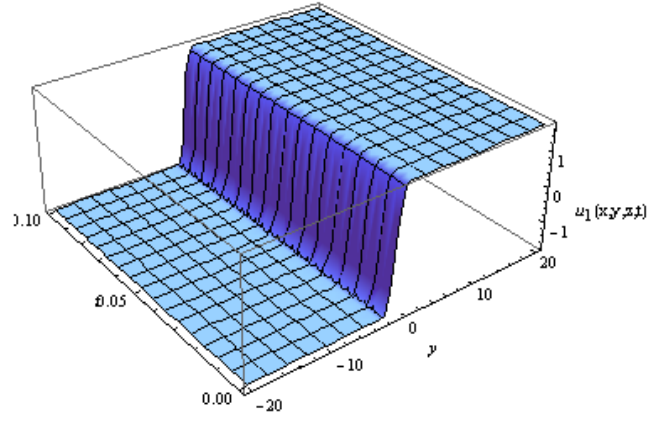
değerleri için verildi. Şekil 4.2. ile verilen yüzey ise conformable kesirli mertebeden genişletilmiş BKP-Boussinesq denklemin  $u_1(x, y, z, t)$  analitik çözümünün

$$\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2, \alpha_3 = 1, x = 1, z = 1, \gamma = 0.9, \beta = 0$$

değerleri için verildi.



Şekil 4.1. Farklı  $x$  ve  $y$  değerleri için  $u_1(x, y, z, t)$  analitik çözüm yüzeyi



Şekil 4.2. Farklı  $y$  ve  $t$  değerleri için  $u_1(x, y, z, t)$  analitik çözüm yüzeyi

Conformable kesirli mertebeden genişletilmiş BKP-Boussinesq denklemin

$$\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2, \alpha_3 = 3, z = 1, y = 1, \gamma = 0.9, \beta = 0$$

değerleri için  $u_1(x, y, z, t)$  analitik çözümünün yüzeyi Şekil 4.3. ile verildi. Ele alınan denklemin,  $u_1(x, y, z, t)$  analitik çözümünün

$$\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 1, z = 1, y = 1, \gamma = 0.9, \beta = 0, t = 0.1$$

değerlerinde ki eğrisi Şekil 4.4. ile,

$$\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2, \alpha_3 = 1, z = 1, x = 1, \gamma = 0.9, \beta = 0, t = 0.1$$

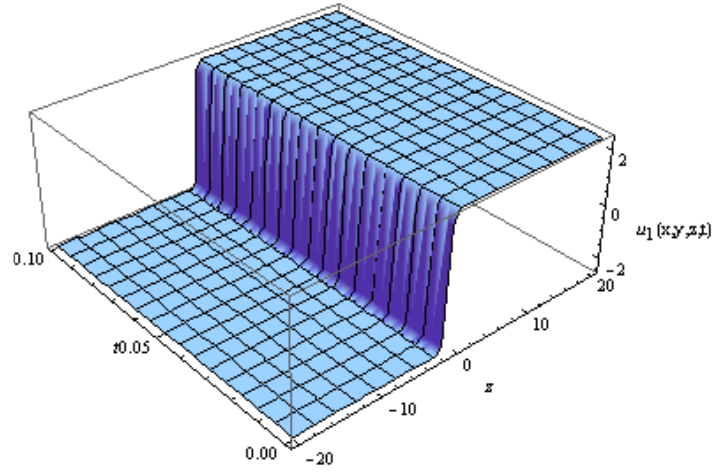
değerlerinde ki eğrisi Şekil 4.5. ile,

$$\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2, \alpha_3 = 3, x = 1, y = 1, \gamma = 0.9, \beta = 0, t = 0.1$$

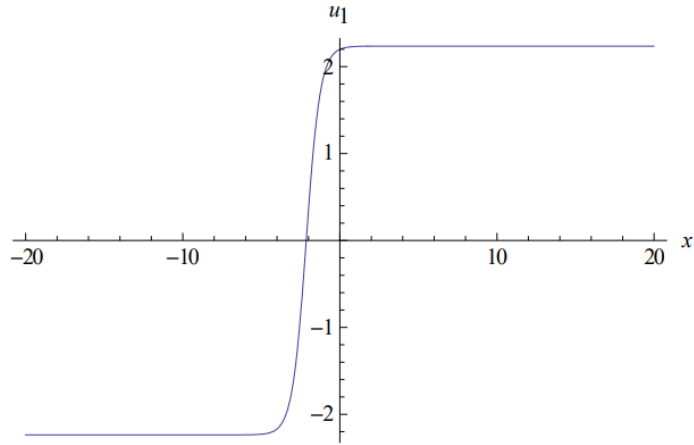
değerlerinde ki eğrisi ise Şekil 4.6. ile verildi. Şekil 4.7. ile verilen yüzey, (4.1) ile verilen conformable kesirli mertebeden genişletilmiş BKP-Boussinesq denklemin  $u_3(x, y, z, t)$  analitik çözümünün

$$\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = -1, y = 1, z = 1, \gamma = 0.9, \beta = 0$$

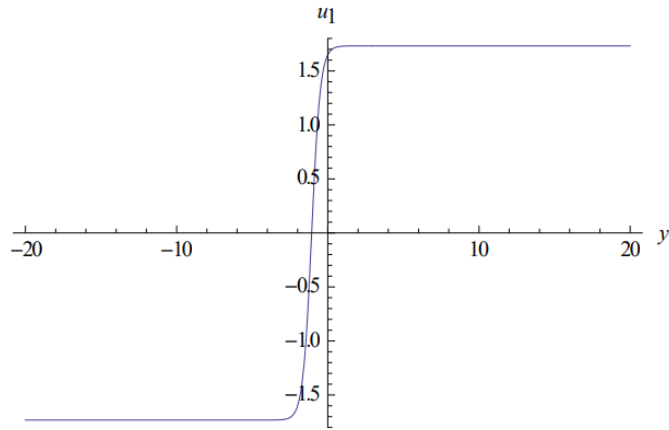
değerleri için verildi.



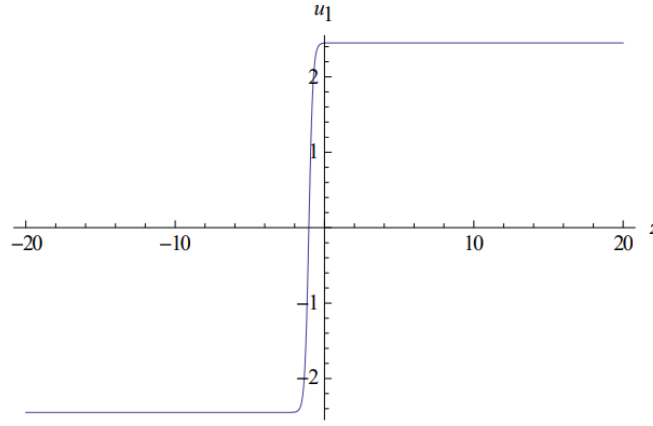
Şekil 4.3. Farklı  $z$  ve  $t$  değerleri için  $u_1(x, y, z, t)$  analitik çözüm yüzeyi



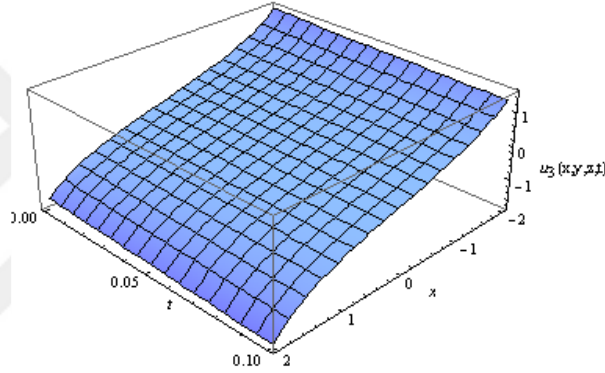
Şekil 4.4. Farklı  $x$  değerleri için  $u_1(x, y, z, t)$  analitik çözüm eğrisi



Şekil 4.5. Farklı  $y$  değerleri için  $u_1(x, y, z, t)$  analitik çözüm eğrisi



Şekil 4.6. Farklı  $z$  değerleri için  $u_1(x, y, z, t)$  analitik çözüm eğrisi



Şekil 4.7. Farklı  $x$  ve  $t$  değerleri için  $u_3(x, y, z, t)$  analitik çözüm yüzeyi

Şekil 4.8. ile verilen yüzey ise conformable kesirli mertebeden genişletilmiş BKP-Boussinesq denklemin  $u_3(x, y, z, t)$  analitik çözümünün

$$\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = -2, \alpha_3 = -1, x = 1, z = 1, \gamma = 0.9, \beta = 0$$

değerleri için verildi. (4.1) ile verilen denklemin

$$\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = -2, \alpha_3 = -3, x = 1, y = 1, \gamma = 0.9, \beta = 0$$

değerleri için  $u_3(x, y, z, t)$  analitik çözümünün yüzeyi Şekil 4.9. ile verildi. Ayrıca (4.1)

ile verilen denklemin,  $u_3(x, y, z, t)$  analitik çözümünün

$$\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = -1, z = 1, y = 1, \gamma = 0.9, \beta = 0, t = 0.1$$

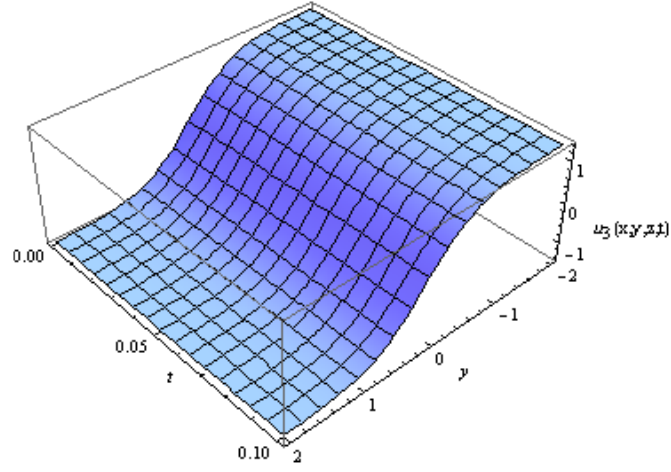
değerlerinde ki eğrisi Şekil 4.10. ile,

$$\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = -2, \alpha_3 = -1, z = 1, x = 1, \gamma = 0.9, \beta = 0, t = 0.1$$

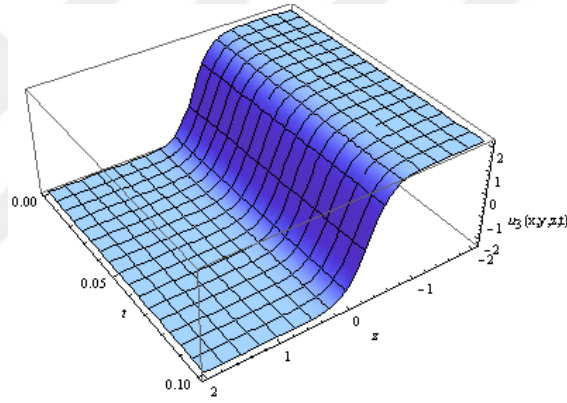
değerlerinde ki eğrisi Şekil 4.11. ile,

$$\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = -2, \alpha_3 = -3, x = 1, y = 1, \gamma = 0.9, \beta = 0, t = 0.1$$

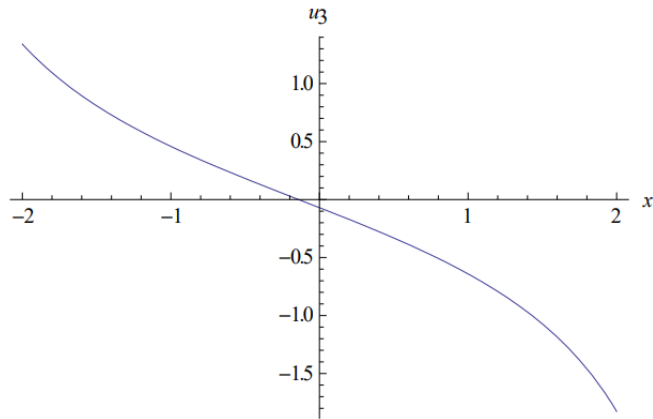
değerlerinde ki eğrisi ise Şekil 4.12. ile verildi.



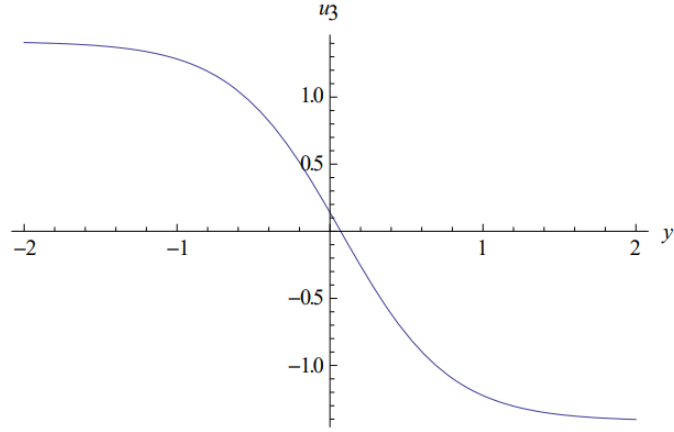
Şekil 4.8. Farklı  $y$  ve  $t$  değerleri için  $u_3(x, y, z, t)$  analitik çözüm yüzeyi



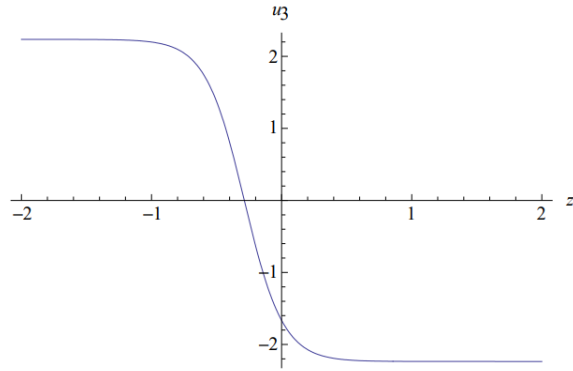
Şekil 4.9. Farklı  $z$  ve  $t$  değerleri için  $u_3(x, y, z, t)$  analitik çözüm yüzeyi



Şekil 4.10. Farklı  $x$  değerleri için  $u_3(x, y, z, t)$  analitik çözüm eğrisi



Şekil 4.11. Farklı  $y$  değerleri için  $u_3(x, y, z, t)$  analitik çözüm eğrisi



Şekil 4.12. Farklı  $z$  değerleri için  $u_3(x, y, z, t)$  analitik çözüm eğrisi

#### 4.2. Conformable Kesirli Mertebeden Genelleştirilmiş Calogero–Bogoyavlenskii–Schiff Denklemi

Bu kısımda, conformable kesirli mertebeden genelleştirilmiş Calogero–Bogoyavlenskii–Schiff denklemi analitik olarak çözüldü.

2008 yılında, A.M. Wazwaz genelleştirilmiş Calogero–Bogoyavlenskii–Schiff denkleminin analitik çözümlerini elde etti (Wazwaz, 2008). 2013 yılında yapılan çalışmada ise, genelleştirilmiş Calogero–Bogoyavlenskii–Schiff denkleminin analitik çözümleri tanjant hiperbolik yöntemi ile elde edildi (Moatimid, 2013). Genelleştirilmiş Calogero–Bogoyavlenskii–Schiff denkleminin analitik çözümleri, 2018 yılında, Chen ve Ma tarafından yapılan çalışmada Hirota bilineer form kullanılarak elde edildi (Chen ve

Ma, 2018). 2018 yılında yapılan bir diğer çalışmada ise, denklemin analitik çözümlerini  $\tan(\phi(\xi)/2)$  açılım yöntemi ile elde edildi (Hammouch, 2018). 2021 yılında yapılan çalışmada ise, Y. M. Li ve arkadaşları denklemi Bernoulli alt denklem fonksiyon ve üstel fonksiyon yöntemlerini kullanarak analitik olarak çözdüler (Li ve ark., 2021).

$\delta_1, \delta_2$  sıfır olmayan reel sabitler ve  $0 < \gamma \leq 1$  olmak üzere, conformable kesirli mertebeden genelleştirilmiş Calogero–Bogoyavlenskii–Schiff denklemi

$$\frac{\partial^\gamma}{\partial t^\gamma} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y} + 3 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial y} + \delta_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \delta_2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (4.8)$$

şeklindedir. (4.8) ile verilen conformable kesirli mertebeden genelleştirilmiş Calogero–Bogoyavlenskii–Schiff denklemine,  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta$  reel sabitler ve

$$u(x, y, t) = U(\xi)$$

olmak üzere,

$$\xi = \alpha_0 \frac{t^\gamma}{\gamma} + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \beta \quad (4.9)$$

formunda dalga dönüşümü uygulanırsa

$$(\alpha_0 \alpha_1 + \delta_1 \alpha_1 \alpha_2 + \delta_2 \alpha_2^2) U_{\xi\xi} + \alpha_1^3 \alpha_2 U_{4\xi} + 6 \alpha_1^2 \alpha_2 U_\xi U_{\xi\xi} = 0 \quad (4.10)$$

adi türevli diferansiyel denklemi elde edilir. İntegral sabiti sıfır alınarak, (4.10) adi türevli diferansiyel denkleminin  $\xi$  değişkenine göre bir kez integralinin alınmasıyla, (4.10) adi diferansiyel denklemi

$$(\alpha_0 \alpha_1 + \delta_1 \alpha_1 \alpha_2 + \delta_2 \alpha_2^2) U_\xi + \alpha_1^3 \alpha_2 U_{\xi\xi\xi} + 3 \alpha_1^2 \alpha_2 (U_\xi)^2 = 0 \quad (4.11)$$

olarak yazılır. (4.11) ile verilen adi diferansiyel denklemde

$$U_\xi = V$$

formunda dönüşüm yapılırsa, (4.11) ile verilen diferansiyel denklem

$$(\alpha_0 \alpha_1 + \delta_1 \alpha_1 \alpha_2 + \delta_2 \alpha_2^2) V + \alpha_1^3 \alpha_2 V_{\xi\xi} + 3 \alpha_1^2 \alpha_2 V^2 = 0 \quad (4.12)$$

şeklinde yazılır. (4.12) ile verilen diferansiyel denklemin düzenlenmesi ile

$$V_{\xi\xi} = - \frac{\alpha_0 \alpha_1 + \delta_1 \alpha_1 \alpha_2 + \delta_2 \alpha_2^2}{\alpha_1^3 \alpha_2} V - \frac{3}{\alpha_1} V^2 \quad (4.13)$$

denklemi elde edilir. (4.13) ile verilen lineer olmayan adi diferansiyel denklemde bulunan  $V_{\xi\xi}$  ifadesinin yerine, (4.13) eşitliği kullanılırsa,  $F(V)$  fonksiyonu

$$F(V) = \pm V \sqrt{- \frac{\alpha_0 \alpha_1 + \delta_1 \alpha_1 \alpha_2 + \delta_2 \alpha_2^2}{\alpha_1^3 \alpha_2} - \frac{2}{\alpha_1} V} \quad (4.14)$$

olarak yazılır. (4.14) ile verilen denklemde (3.4) eşitliği kullanılırsa, Teorem 3.1.1 yardımı ile (4.13) ile verilen lineer olmayan adi diferansiyel denkleminin analitik çözümleri,

$\frac{\alpha_0\alpha_1+\delta_1\alpha_1\alpha_2+\delta_2\alpha_2^2}{\alpha_1^3\alpha_2} < 0$  olmak üzere,

$$V_1(\xi) = \frac{-(\alpha_0\alpha_1 + \delta_1\alpha_1\alpha_2 + \delta_2\alpha_2^2)}{2\alpha_1^2\alpha_2} \left( \operatorname{sech} \left( \frac{\sqrt{-(\alpha_0\alpha_1 + \delta_1\alpha_1\alpha_2 + \delta_2\alpha_2^2)}}{2\sqrt{\alpha_1^3\alpha_2}} \xi \right) \right)^2,$$

$$V_2(\xi) = \frac{\alpha_0\alpha_1 + \delta_1\alpha_1\alpha_2 + \delta_2\alpha_2^2}{2\alpha_1^2\alpha_2} \left( \operatorname{csch} \left( \frac{\sqrt{-(\alpha_0\alpha_1 + \delta_1\alpha_1\alpha_2 + \delta_2\alpha_2^2)}}{2\sqrt{\alpha_1^3\alpha_2}} \xi \right) \right)^2$$

$\frac{\alpha_0\alpha_1+\delta_1\alpha_1\alpha_2+\delta_2\alpha_2^2}{\alpha_1^3\alpha_2} > 0$  olmak üzere ise,

$$V_3(\xi) = \frac{-(\alpha_0\alpha_1 + \delta_1\alpha_1\alpha_2 + \delta_2\alpha_2^2)}{2\alpha_1^2\alpha_2} \left( \sec \left( \frac{\sqrt{\alpha_0\alpha_1 + \delta_1\alpha_1\alpha_2 + \delta_2\alpha_2^2}}{2\sqrt{\alpha_1^3\alpha_2}} \xi \right) \right)^2,$$

$$V_4(\xi) = \frac{-(\alpha_0\alpha_1 + \delta_1\alpha_1\alpha_2 + \delta_2\alpha_2^2)}{2\alpha_1^2\alpha_2} \left( \csc \left( \frac{\sqrt{\alpha_0\alpha_1 + \delta_1\alpha_1\alpha_2 + \delta_2\alpha_2^2}}{2\sqrt{\alpha_1^3\alpha_2}} \xi \right) \right)^2$$

şeklinde elde edilir.  $U_\xi = V$  olduğu dikkate alınır,

$\frac{\alpha_0\alpha_1+\delta_1\alpha_1\alpha_2+\delta_2\alpha_2^2}{\alpha_1^3\alpha_2} < 0$  olmak üzere,

$$U_1(\xi) = \frac{\sqrt{-(\alpha_0\alpha_1 + \delta_1\alpha_1\alpha_2 + \delta_2\alpha_2^2)}}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}} \tanh \left( \frac{\sqrt{-(\alpha_0\alpha_1 + \delta_1\alpha_1\alpha_2 + \delta_2\alpha_2^2)}}{2\sqrt{\alpha_1^3\alpha_2}} \xi \right),$$

$$U_2(\xi) = \frac{\sqrt{-(\alpha_0\alpha_1 + \delta_1\alpha_1\alpha_2 + \delta_2\alpha_2^2)}}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}} \coth \left( \frac{\sqrt{-(\alpha_0\alpha_1 + \delta_1\alpha_1\alpha_2 + \delta_2\alpha_2^2)}}{2\sqrt{\alpha_1^3\alpha_2}} \xi \right)$$

$\frac{\alpha_0\alpha_1+\delta_1\alpha_1\alpha_2+\delta_2\alpha_2^2}{\alpha_1^3\alpha_2} > 0$  olmak üzere ise,

$$U_3(\xi) = -\frac{\sqrt{\alpha_0\alpha_1 + \delta_1\alpha_1\alpha_2 + \delta_2\alpha_2^2}}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}} \tan \left( \frac{\sqrt{\alpha_0\alpha_1 + \delta_1\alpha_1\alpha_2 + \delta_2\alpha_2^2}}{2\sqrt{\alpha_1^3\alpha_2}} \xi \right),$$

$$U_4(\xi) = \frac{\sqrt{\alpha_0\alpha_1 + \delta_1\alpha_1\alpha_2 + \delta_2\alpha_2^2}}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}} \cot \left( \frac{\sqrt{\alpha_0\alpha_1 + \delta_1\alpha_1\alpha_2 + \delta_2\alpha_2^2}}{2\sqrt{\alpha_1^3\alpha_2}} \xi \right)$$

elde edilir. Yukarıda verilen  $U_1(\xi), U_2(\xi), U_3(\xi), U_4(\xi)$  eşitliklerinde

$$u(x, y, t) = U(\xi)$$

değer kullanılırsa, (4.8) ile verilen conformable kesirli mertebeden genelleştirilmiş Calogero–Bogoyavlenskii–Schiff denkleminin analitik çözümleri

$\frac{\alpha_0\alpha_1+\delta_1\alpha_1\alpha_2+\delta_2\alpha_2^2}{\alpha_1^3\alpha_2} < 0$  olmak üzere,

$$u_1(x, y, t) = \frac{\sqrt{-(\alpha_0\alpha_1 + \delta_1\alpha_1\alpha_2 + \delta_2\alpha_2^2)}}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}} \tanh\left(\frac{\sqrt{-(\alpha_0\alpha_1 + \delta_1\alpha_1\alpha_2 + \delta_2\alpha_2^2)}}{2\sqrt{\alpha_1^3\alpha_2}} \xi\right),$$

$$u_2(x, y, t) = \frac{\sqrt{-(\alpha_0\alpha_1 + \delta_1\alpha_1\alpha_2 + \delta_2\alpha_2^2)}}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}} \coth\left(\frac{\sqrt{-(\alpha_0\alpha_1 + \delta_1\alpha_1\alpha_2 + \delta_2\alpha_2^2)}}{2\sqrt{\alpha_1^3\alpha_2}} \xi\right)$$

$\frac{\alpha_0\alpha_1+\delta_1\alpha_1\alpha_2+\delta_2\alpha_2^2}{\alpha_1^3\alpha_2} > 0$  olmak üzere ise,

$$u_3(x, y, t) = -\frac{\sqrt{\alpha_0\alpha_1 + \delta_1\alpha_1\alpha_2 + \delta_2\alpha_2^2}}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}} \tan\left(\frac{\sqrt{\alpha_0\alpha_1 + \delta_1\alpha_1\alpha_2 + \delta_2\alpha_2^2}}{2\sqrt{\alpha_1^3\alpha_2}} \xi\right),$$

$$u_4(x, y, t) = \frac{\sqrt{\alpha_0\alpha_1 + \delta_1\alpha_1\alpha_2 + \delta_2\alpha_2^2}}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}} \cot\left(\frac{\sqrt{\alpha_0\alpha_1 + \delta_1\alpha_1\alpha_2 + \delta_2\alpha_2^2}}{2\sqrt{\alpha_1^3\alpha_2}} \xi\right)$$

olarak elde edilir. Burada

$$\xi = \alpha_0 \frac{t^\gamma}{\gamma} + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \beta$$

şeklindedir.

(4.8) ile verilen denklemin

$$\alpha_0 = -3, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1, \gamma = 0.9, \beta = 0, \delta_1 = 0.2, \delta_2 = 0.1$$

değerlerinde ki  $u_1(x, y, t)$  analitik çözümünün yüzeyi farklı  $x$  ve  $t$  değerleri için Şekil

4.13 ile verildi. Şekil 4.14 ise conformable kesirli mertebeden genelleştirilmiş Calogero–

Bogoyavlenskii–Schiff denkleminin  $u_1(x, y, t)$  analitik çözümünün

$$\alpha_0 = -3, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2, x = 1, \gamma = 0.9, \beta = 0, \delta_1 = 0.2, \delta_2 = 0.1$$

değerlerinde ki yüzeyi göstermektedir. Ayrıca (4.8) ile verilen denklemin

$$\alpha_0 = -3, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1, t = 0.1, \gamma = 0.9, \beta = 0, \delta_1 = 0.2, \delta_2 = 0.1$$

parametre değerleri farklı  $x$  ve  $y$  değerleri için  $u_1(x, y, t)$  analitik çözüm yüzeyi Şekil

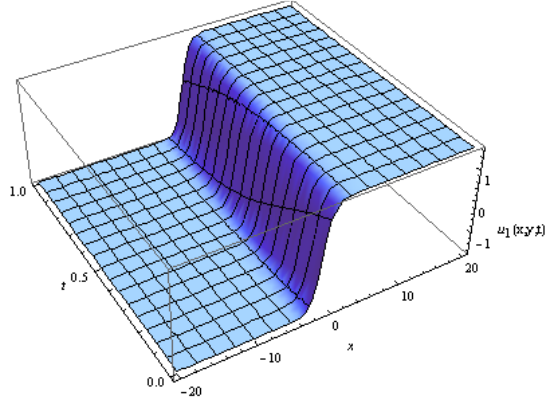
4.15 ile verildi. Şekil 4.16 ile denklemin farklı  $x$  değerleri ve

$$\alpha_0 = -3, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1, y = 1, \gamma = 0.9, \beta = 0, \delta_1 = 0.2, \delta_2 = 0.1, t = 0.1$$

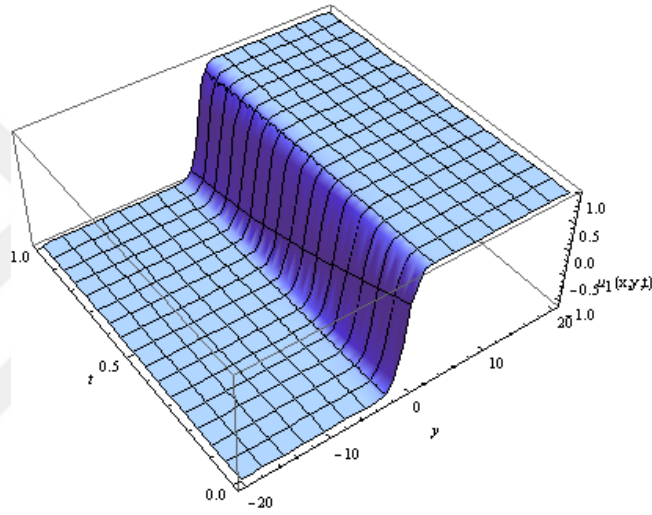
parametre değerleri için  $u_1(x, y, t)$  analitik çözümünün eğrisi gösterildi. Şekil 4.17 ile

$$\alpha_0 = -3, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2, x = 1, \gamma = 0.9, \beta = 0, \delta_1 = 0.2, \delta_2 = 0.1, t = 0.1$$

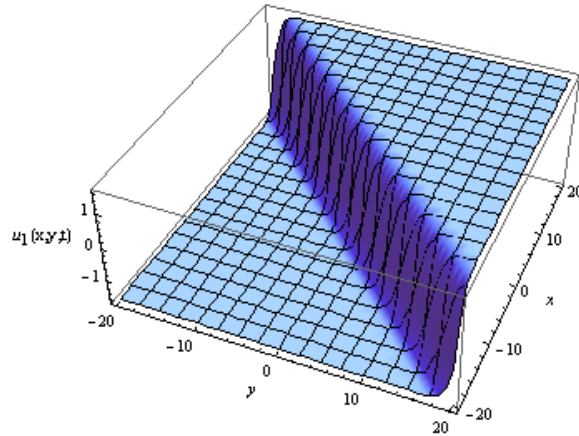
değerlerinde ki  $u_1(x, y, t)$  analitik çözüm eğrisi farklı  $y$  değerleri için gösterildi.



Şekil 4.13. Farklı  $x$  ve  $t$  değerleri için  $u_1(x, y, t)$  analitik çözüm yüzeyi



Şekil 4.14. Farklı  $y$  ve  $t$  değerleri için  $u_1(x, y, t)$  analitik çözüm yüzeyi



Şekil 4.15. Farklı  $x$  ve  $y$  değerleri için  $u_1(x, y, t)$  analitik çözüm yüzeyi

(4.8) ile verilen denklemin

$$\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1, y = -0.1, \gamma = 0.9, \beta = 0, \delta_1 = 0.2, \delta_2 = 0.1$$

değerlerinde ki  $u_3(x, y, t)$  analitik çözümünün yüzeyi farklı  $x$  ve  $t$  değerleri için Şekil 4.18 ile verildi. Şekil 4.19 ise conformable kesirli mertebeden genelleştirilmiş Calogero–

Bogoyavlenskii–Schiff denkleminin  $u_3(x, y, t)$  analitik çözümünün

$$\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1.5, x = -0.1, \gamma = 0.9, \beta = 0, \delta_1 = 0.2, \delta_2 = 0.1$$

değerlerinde ki yüzeyi göstermektedir. Ayrıca (4.8) ile verilen denklemin

$$\alpha_0 = -1, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1, t = 0.1, \gamma = 0.9, \beta = 0, \delta_1 = 0.2, \delta_2 = 0.1$$

parametre değerleri ve farklı  $x, y$  değerleri için  $u_3(x, y, t)$  analitik çözüm yüzeyi Şekil 4.20 ile verildi.

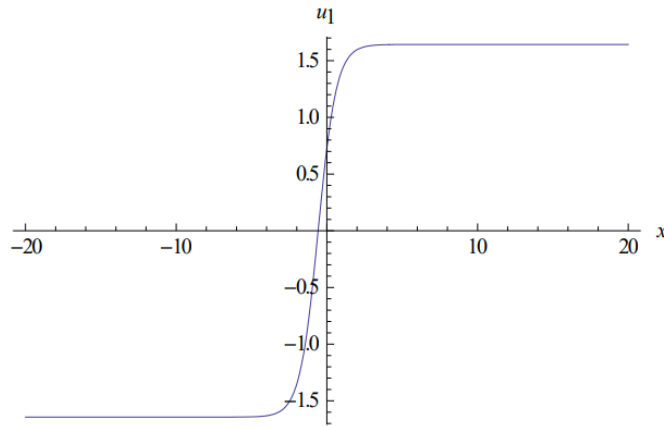
Şekil 4.21 ile denklemin farklı  $x$  değerleri ve

$$\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1, y = -0.1, \gamma = 0.9, \beta = 0, \delta_1 = 0.2, \delta_2 = 0.1, t = 0.1$$

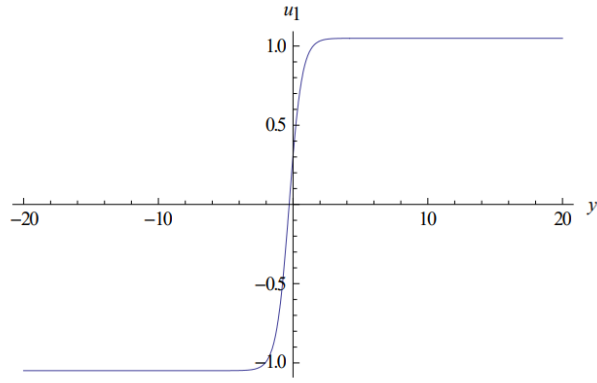
parametre değerleri için  $u_3(x, y, t)$  analitik çözümünün eğrisi gösterildi. Şekil 4.22 ile de farklı  $y$  değerleri ve

$$\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1.5, x = -0.1, \gamma = 0.9, \beta = 0, \delta_1 = 0.2, \delta_2 = 0.1, t = 0.1$$

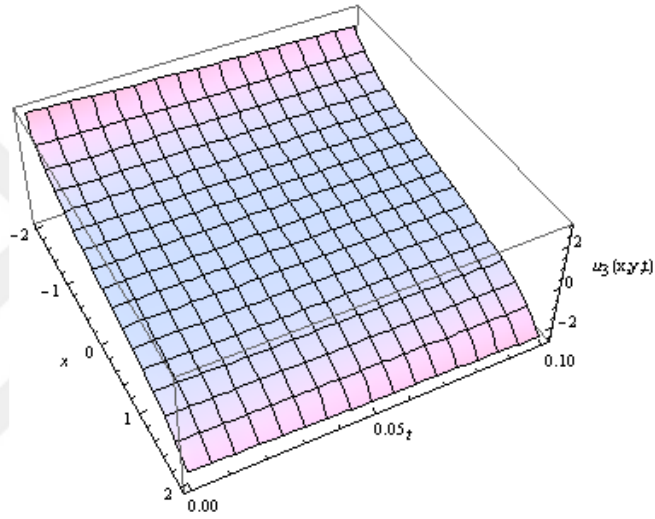
parametre değerlerinde ki  $u_3(x, y, t)$  analitik çözüm eğrisi gösterildi.



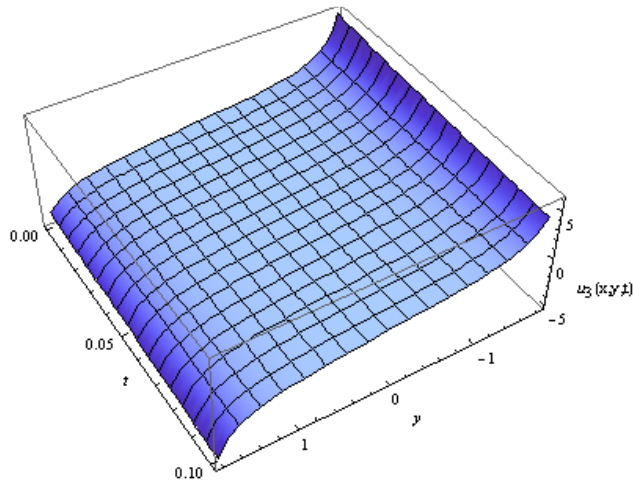
Şekil 4.16. Farklı  $x$  değerleri için  $u_1(x, y, t)$  analitik çözüm eğrisi



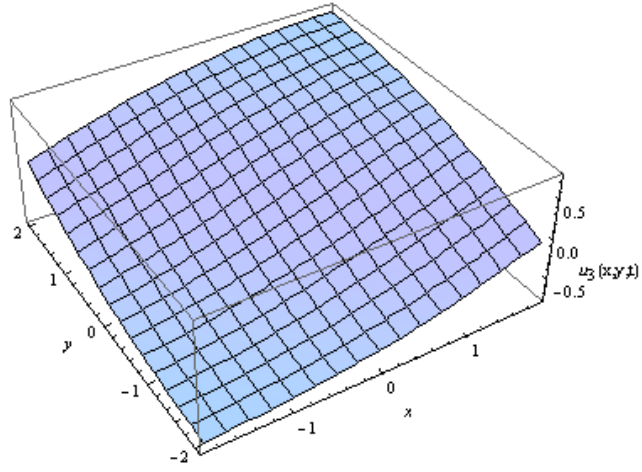
Şekil 4.17. Farklı  $y$  değerleri için  $u_1(x, y, t)$  analitik çözüm eğrisi



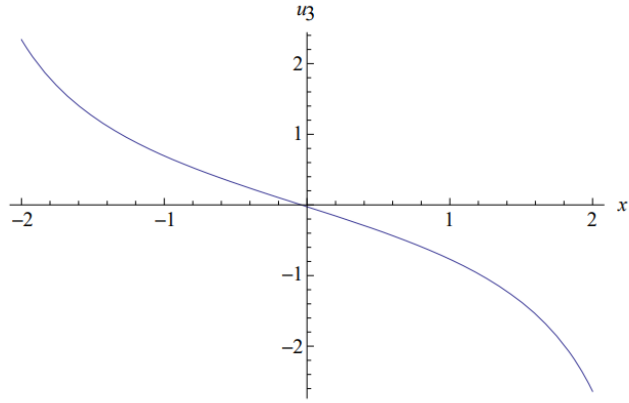
Şekil 4.18. Farklı  $x$  ve  $t$  değerleri için  $u_3(x, y, t)$  analitik çözüm yüzeyi



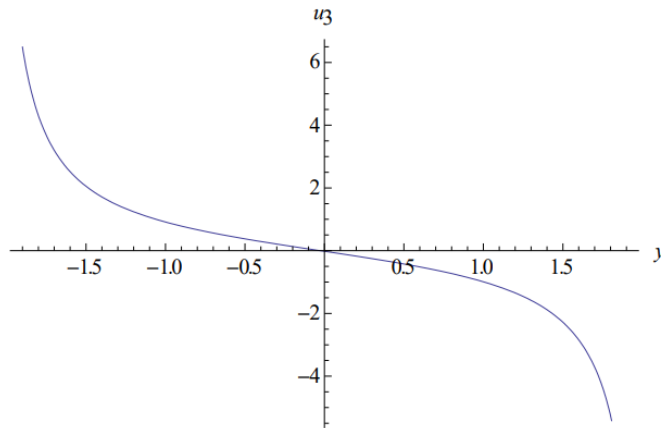
Şekil 4.19. Farklı  $y$  ve  $t$  değerleri için  $u_3(x, y, t)$  analitik çözüm yüzeyi



Şekil 4.20. Farklı  $x$  ve  $y$  değerleri için  $u_3(x, y, t)$  analitik çözüm yüzeyi



Şekil 4.21. Farklı  $x$  değerleri için  $u_3(x, y, t)$  analitik çözüm eğrisi



Şekil 4.22. Farklı  $y$  değerleri için  $u_3(x, y, t)$  analitik çözüm eğrisi

### 4.3. Conformable Kesirli Mertebeden Genelleştirilmiş (2+1) Boyutlu Hirota-Satsuma-Ito Denklemi

Genelleştirilmiş (2+1) boyutlu Hirota-Satsuma-Ito denkleminin analitik çözümleri Hirota bilinear yöntemi yardımı ile bulundu (Ma ve ark., 2018). 2020 yılında, Y. Zhang ve arkadaşları tarafından yapılan çalışmada ise, denklemin analitik çözümleri elde edildi (Zhang ve ark., 2020). 2020 yılında yapılan bir diğer çalışmada ise, Kuo ve Ma, genelleştirilmiş (2+1) boyutlu Hirota-Satsuma-Ito denklemini analitik olarak çözdüler (Kuo ve Ma, 2020). 2021 yılında yapılan çalışmada, genelleştirilmiş (2+1) boyutlu Hirota-Satsuma-Ito denkleminin analitik çözümleri bilineer yöntemi ile elde edildi (Zhao ve He, 2021). 2021 yılında yapılan bir diğer çalışmada ise, Lie simetri tekniği ile genelleştirilmiş (2+1) boyutlu Hirota-Satsuma-Ito denkleminin analitik çözümleri elde edildi (Kumar ve ark., 2021).

$c_1, c_2, c_3, c_4$  sıfır olmayan keyfi sabitler ve  $0 < \gamma \leq 1$  olmak üzere, conformable kesirli mertebeden genelleştirilmiş (2+1) boyutlu Hirota-Satsuma-Ito denklemi

$$c_1 \left[ 3 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^\gamma u}{\partial t^\gamma} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial^\gamma}{\partial t^\gamma} \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) \right] + c_2 \frac{\partial^\gamma}{\partial t^\gamma} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) + c_3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c_4 \frac{\partial^\gamma}{\partial t^\gamma} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0 \quad (4.15)$$

şekindedir. (4.15) ile verilen conformable kesirli mertebeden genelleştirilmiş (2+1) boyutlu Hirota-Satsuma-Ito denklemine,  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta$  reel sabitler ve

$$u(x, y, t) = U(\xi)$$

olmak üzere, (4.9) ile verilen dalga dönüşümü uygulanırsa

$$(c_2 \alpha_0 \alpha_2 + c_3 \alpha_1^2 + c_4 \alpha_0 \alpha_1) U_{\xi\xi} + c_1 \alpha_0 \alpha_1^3 U_{4\xi} + 6c_1 \alpha_0 \alpha_1^2 U_{\xi\xi} U_\xi = 0 \quad (4.16)$$

adi türevli diferansiyel denklemi bulunur. İntegral sabiti sıfır alınarak, (4.16) adi türevli diferansiyel denkleminin  $\xi$  değişkenine göre bir kez integralinin alınmasıyla, (4.16) adi diferansiyel denklemi

$$(c_2 \alpha_0 \alpha_2 + c_3 \alpha_1^2 + c_4 \alpha_0 \alpha_1) U_\xi + c_1 \alpha_0 \alpha_1^3 U_{\xi\xi\xi} + 3c_1 \alpha_0 \alpha_1^2 (U_\xi)^2 = 0 \quad (4.17)$$

olarak yazılır. (4.17) ile verilen adi diferansiyel denkleminde

$$U_\xi = V$$

formunda dönüşüm yapılırsa, (4.17) ile verilen diferansiyel denklem

$$(c_2 \alpha_0 \alpha_2 + c_3 \alpha_1^2 + c_4 \alpha_0 \alpha_1) V + c_1 \alpha_0 \alpha_1^3 V_{\xi\xi} + 3c_1 \alpha_0 \alpha_1^2 V^2 = 0 \quad (4.18)$$

şeklinde yazılır. (4.18) ile verilen diferansiyel denklemin düzenlenmesi ile

$$V_{\xi\xi} = - \frac{c_2 \alpha_0 \alpha_2 + c_3 \alpha_1^2 + c_4 \alpha_0 \alpha_1}{c_1 \alpha_0 \alpha_1^3} V - \frac{3}{\alpha_1} V^2 \quad (4.19)$$

eşitliği elde edilir. (4.19) ile verilen lineer olmayan adi diferansiyel denkleminde bulunan  $V_{\xi}$  ifadesinin yerine, (4.14) ifadesi yazılırsa  $F(V)$  fonksiyonu

$$F(V) = \pm V \sqrt{-\frac{c_2\alpha_0\alpha_2 + c_3\alpha_1^2 + c_4\alpha_0\alpha_1}{c_1\alpha_0\alpha_1^3} - \frac{2}{\alpha_1}V} \quad (4.20)$$

olarak yazılır. (4.20) ile verilen denklemden (3.4) eşitliği kullanılırsa, Teorem 3.1.1 yardımı ile (4.19) ile verilen lineer olmayan adi diferansiyel denkleminin analitik çözümleri,

$$\frac{c_2\alpha_0\alpha_2 + c_3\alpha_1^2 + c_4\alpha_0\alpha_1}{c_1\alpha_0\alpha_1^3} < 0 \text{ olmak üzere,}$$

$$V_1(\xi) = \frac{-(c_2\alpha_0\alpha_2 + c_3\alpha_1^2 + c_4\alpha_0\alpha_1)}{2c_1\alpha_0\alpha_1^2} \left( \operatorname{sech} \left( \frac{\sqrt{-(c_2\alpha_0\alpha_2 + c_3\alpha_1^2 + c_4\alpha_0\alpha_1)}}{2\sqrt{c_1\alpha_0\alpha_1^3}} \xi \right) \right)^2,$$

$$V_2(\xi) = \frac{c_2\alpha_0\alpha_2 + c_3\alpha_1^2 + c_4\alpha_0\alpha_1}{2c_1\alpha_0\alpha_1^2} \left( \operatorname{csch} \left( \frac{\sqrt{-(c_2\alpha_0\alpha_2 + c_3\alpha_1^2 + c_4\alpha_0\alpha_1)}}{2\sqrt{c_1\alpha_0\alpha_1^3}} \xi \right) \right)^2$$

$$\frac{c_2\alpha_0\alpha_2 + c_3\alpha_1^2 + c_4\alpha_0\alpha_1}{c_1\alpha_0\alpha_1^3} > 0 \text{ olmak üzere ise,}$$

$$V_3(\xi) = \frac{-(c_2\alpha_0\alpha_2 + c_3\alpha_1^2 + c_4\alpha_0\alpha_1)}{2c_1\alpha_0\alpha_1^2} \left( \operatorname{sec} \left( \frac{\sqrt{(c_2\alpha_0\alpha_2 + c_3\alpha_1^2 + c_4\alpha_0\alpha_1)}}{2\sqrt{c_1\alpha_0\alpha_1^3}} \xi \right) \right)^2,$$

$$V_4(\xi) = \frac{-(c_2\alpha_0\alpha_2 + c_3\alpha_1^2 + c_4\alpha_0\alpha_1)}{2c_1\alpha_0\alpha_1^2} \left( \operatorname{csc} \left( \frac{\sqrt{(c_2\alpha_0\alpha_2 + c_3\alpha_1^2 + c_4\alpha_0\alpha_1)}}{2\sqrt{c_1\alpha_0\alpha_1^3}} \xi \right) \right)^2$$

şeklinde elde edilir.  $U_{\xi} = V$  olduğu dikkate alınır,

$$\frac{c_2\alpha_0\alpha_2 + c_3\alpha_1^2 + c_4\alpha_0\alpha_1}{c_1\alpha_0\alpha_1^3} < 0 \text{ olmak üzere,}$$

$$U_1(\xi) = \frac{\sqrt{-(c_2\alpha_0\alpha_2 + c_3\alpha_1^2 + c_4\alpha_0\alpha_1)}}{\sqrt{c_1\alpha_0\alpha_1}} \tanh \left( \frac{\sqrt{-(c_2\alpha_0\alpha_2 + c_3\alpha_1^2 + c_4\alpha_0\alpha_1)}}{2\sqrt{c_1\alpha_0\alpha_1^3}} \xi \right),$$

$$U_2(\xi) = \frac{\sqrt{-(c_2\alpha_0\alpha_2 + c_3\alpha_1^2 + c_4\alpha_0\alpha_1)}}{\sqrt{c_1\alpha_0\alpha_1}} \coth \left( \frac{\sqrt{-(c_2\alpha_0\alpha_2 + c_3\alpha_1^2 + c_4\alpha_0\alpha_1)}}{2\sqrt{c_1\alpha_0\alpha_1^3}} \xi \right)$$

$$\frac{c_2\alpha_0\alpha_2 + c_3\alpha_1^2 + c_4\alpha_0\alpha_1}{c_1\alpha_0\alpha_1^3} > 0 \text{ olmak üzere ise,}$$

$$U_3(\xi) = -\frac{\sqrt{c_2\alpha_0\alpha_2 + c_3\alpha_1^2 + c_4\alpha_0\alpha_1}}{\sqrt{c_1\alpha_0\alpha_1}} \tan \left( \frac{\sqrt{c_2\alpha_0\alpha_2 + c_3\alpha_1^2 + c_4\alpha_0\alpha_1}}{2\sqrt{c_1\alpha_0\alpha_1^3}} \xi \right),$$

$$U_4(\xi) = \frac{\sqrt{c_2\alpha_0\alpha_2 + c_3\alpha_1^2 + c_4\alpha_0\alpha_1}}{\sqrt{c_1\alpha_0\alpha_1}} \cot \left( \frac{\sqrt{c_2\alpha_0\alpha_2 + c_3\alpha_1^2 + c_4\alpha_0\alpha_1}}{2\sqrt{c_1\alpha_0\alpha_1^3}} \xi \right)$$

elde edilir. Yukarıda verilen  $U_1(\xi), U_2(\xi), U_3(\xi), U_4(\xi)$  eşitliklerinde

$$u(x, y, t) = U(\xi)$$

eşitliği kullanılırsa, (4.15) ile verilen conformable kesirli mertebeden genelleştirilmiş (2+1) boyutlu Hirota-Satsuma-Ito denkleminin analitik çözümleri

$$\frac{c_2\alpha_0\alpha_2 + c_3\alpha_1^2 + c_4\alpha_0\alpha_1}{c_1\alpha_0\alpha_1^3} < 0 \text{ olmak üzere,}$$

$$u_1(x, y, t) = \frac{\sqrt{-(c_2\alpha_0\alpha_2 + c_3\alpha_1^2 + c_4\alpha_0\alpha_1)}}{\sqrt{c_1\alpha_0\alpha_1}} \tanh\left(\frac{\sqrt{-(c_2\alpha_0\alpha_2 + c_3\alpha_1^2 + c_4\alpha_0\alpha_1)}}{2\sqrt{c_1\alpha_0\alpha_1^3}} \xi\right),$$

$$u_2(x, y, t) = \frac{\sqrt{-(c_2\alpha_0\alpha_2 + c_3\alpha_1^2 + c_4\alpha_0\alpha_1)}}{\sqrt{c_1\alpha_0\alpha_1}} \coth\left(\frac{\sqrt{-(c_2\alpha_0\alpha_2 + c_3\alpha_1^2 + c_4\alpha_0\alpha_1)}}{2\sqrt{c_1\alpha_0\alpha_1^3}} \xi\right)$$

$$\frac{c_2\alpha_0\alpha_2 + c_3\alpha_1^2 + c_4\alpha_0\alpha_1}{c_1\alpha_0\alpha_1^3} > 0 \text{ olmak üzere ise,}$$

$$u_3(x, y, t) = -\frac{\sqrt{c_2\alpha_0\alpha_2 + c_3\alpha_1^2 + c_4\alpha_0\alpha_1}}{\sqrt{c_1\alpha_0\alpha_1}} \tan\left(\frac{\sqrt{c_2\alpha_0\alpha_2 + c_3\alpha_1^2 + c_4\alpha_0\alpha_1}}{2\sqrt{c_1\alpha_0\alpha_1^3}} \xi\right),$$

$$u_4(x, y, t) = \frac{\sqrt{c_2\alpha_0\alpha_2 + c_3\alpha_1^2 + c_4\alpha_0\alpha_1}}{\sqrt{c_1\alpha_0\alpha_1}} \cot\left(\frac{\sqrt{c_2\alpha_0\alpha_2 + c_3\alpha_1^2 + c_4\alpha_0\alpha_1}}{2\sqrt{c_1\alpha_0\alpha_1^3}} \xi\right)$$

bulunur. Burada

$$\xi = \alpha_0 \frac{t^\gamma}{\gamma} + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \beta$$

şeklindedir.

Şekil 4.23 ile conformable kesirli mertebeden genelleştirilmiş (2+1) boyutlu Hirota-Satsuma-Ito denkleminin farklı  $x, t$  değerlerinde ve

$\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1, \gamma = 0.1, \gamma = 0.9, \beta = 0, c_1 = 1, c_2 = -3, c_3 = 1, c_4 = 1$  parametre değerleri için  $u_1(x, y, t)$  analitik çözümünün yüzeyi gösterildi.

Şekil 4.24 ile de

$\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2, \gamma = 0.1, \gamma = 0.9, \beta = 0, c_1 = 2, c_2 = -3, c_3 = 1, c_4 = 1$  değerlerinde ki  $u_1(x, y, t)$  analitik çözüm yüzeyi farklı  $y$  ve  $t$  değerleri için gösterildi.

(4.15) ile verilen conformable kesirli mertebeden genelleştirilmiş (2+1) boyutlu Hirota-Satsuma-Ito denkleminin

$\alpha_0 = 2, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2, t = 0.1, \gamma = 0.9, \beta = 0, c_1 = 2, c_2 = -3, c_3 = 1, c_4 = 1$

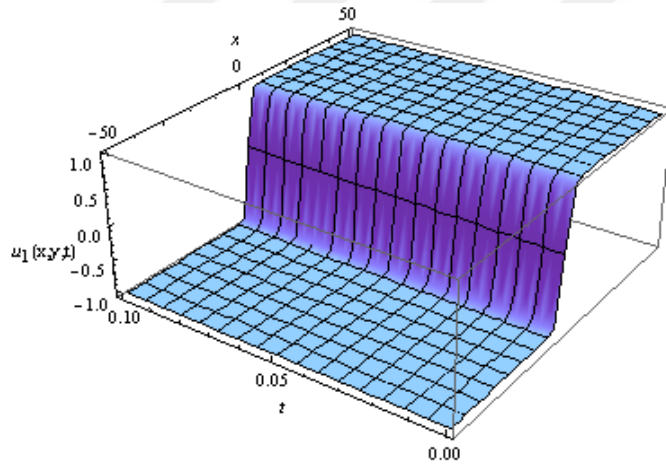
Parametre değerlerinde ki  $u_1(x, y, t)$  analitik çözümünün yüzeyi farklı  $x$  ve  $y$  değerleri için Şekil 4.25 ile verildi. Şekil 4.26 ise (4.15) ile verilen conformable kesirli mertebeden genelleştirilmiş (2+1) boyutlu Hirota-Satsuma-Ito denkleminin  $u_1(x, y, t)$  analitik çözümünün

$$\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1, y = 0.1, \gamma = 0.9, \beta = 0, c_1 = 1, c_2 = -3, c_3 = 1, c_4 = 1, t = 0.1$$

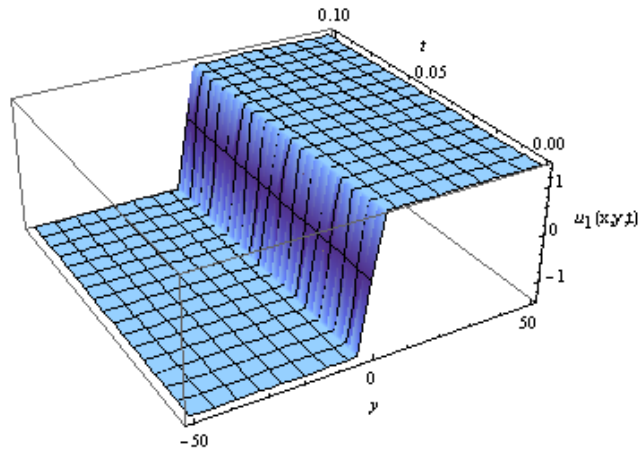
değerlerinde ki eğrisini göstermektedir. Bunların yanında, (4.15) ile verilen denklemin

$$\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2, x = 0.1, \gamma = 0.9, \beta = 0, c_1 = 1, c_2 = -3, c_3 = 1, c_4 = 1, t = 0.1$$

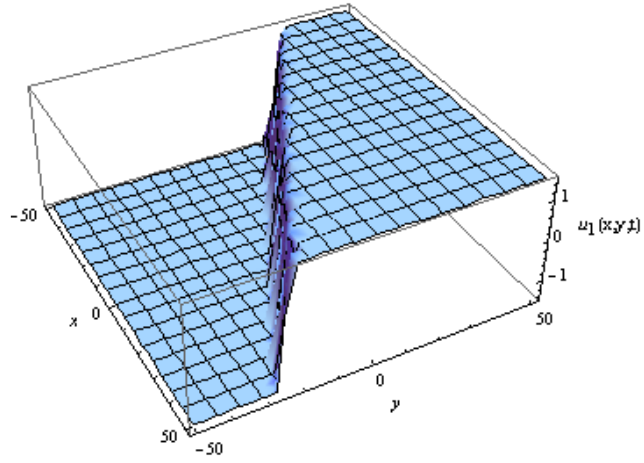
değerleri ve farklı  $y$  değerleri için  $u_3(x, y, t)$  analitik çözüm eğrisi Şekil 4.27 ile verildi.



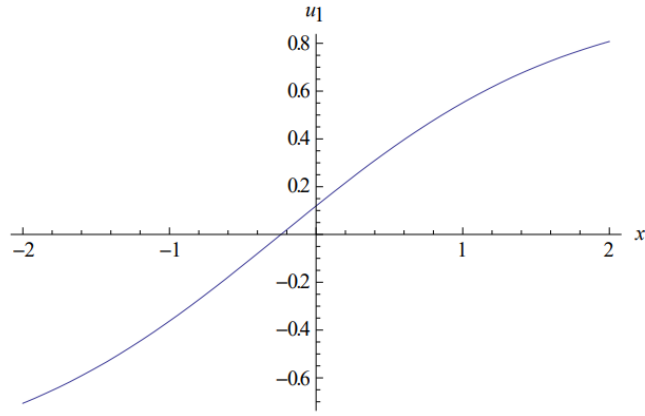
Şekil 4.23. Farklı  $x$  ve  $t$  değerleri için  $u_1(x, y, t)$  analitik çözüm yüzeyi



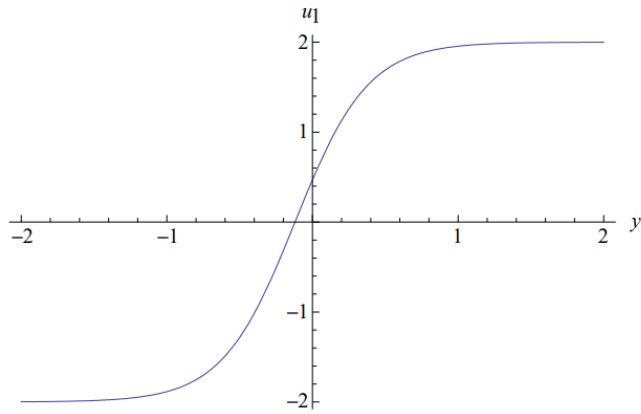
Şekil 4.24. Farklı  $y$  ve  $t$  değerleri için  $u_1(x, y, t)$  analitik çözüm yüzeyi



Şekil 4.25. Farklı  $x$  ve  $y$  değerleri için  $u_1(x, y, t)$  analitik çözüm yüzeyi



Şekil 4.26. Farklı  $x$  değerleri için  $u_1(x, y, t)$  analitik çözüm eğrisi



Şekil 4.27. Farklı  $y$  değerleri için  $u_1(x, y, t)$  analitik çözüm eğrisi

Şekil 4.28, (4.15) ile verilen conformable kesirli mertebeden geliştirilmiş (2+1) boyutlu Hirota-Satsuma-Ito denkleminin farklı  $x, t$  değerlerinde ve

$\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1, y = 0.1, \gamma = 0.9, \beta = 0, c_1 = 1, c_2 = 1, c_3 = 1, c_4 = 1$  değerleri için  $u_3(x, y, t)$  analitik çözümünün yüzeyi gösterildi. Şekil 4.29 ile  $\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0.2, x = 0.1, \gamma = 0.9, \beta = 0, c_1 = 2, c_2 = 1, c_3 = 1, c_4 = 1$  değerlerinde ki  $u_3(x, y, t)$  analitik çözüm yüzeyi farklı  $y$  ve  $t$  değerleri için gösterildi.

(4.15) ile verilen denkleminin

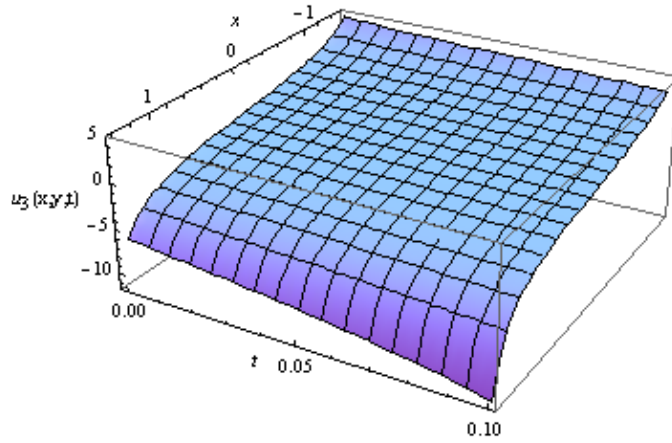
$\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0.2, x = 0.1, \gamma = 0.9, \beta = 0, c_1 = 2, c_2 = 1, c_3 = 1, c_4 = 1$  parametre değerlerinde ki  $u_3(x, y, t)$  tam çözümünün yüzeyi farklı  $x$  ve  $y$  değerleri için Şekil 4.30 ile verildi. Şekil 4.31 ise (4.15) ile verilen conformable kesirli mertebeden genelleştirilmiş (2+1) boyutlu Hirota-Satsuma-Ito denkleminin  $u_3(x, y, t)$  analitik çözümünün

$\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1, y = 0.1, \gamma = 0.9, \beta = 0, c_1 = 1, c_2 = 1, c_3 = 1, c_4 = 1, t = 0.1$

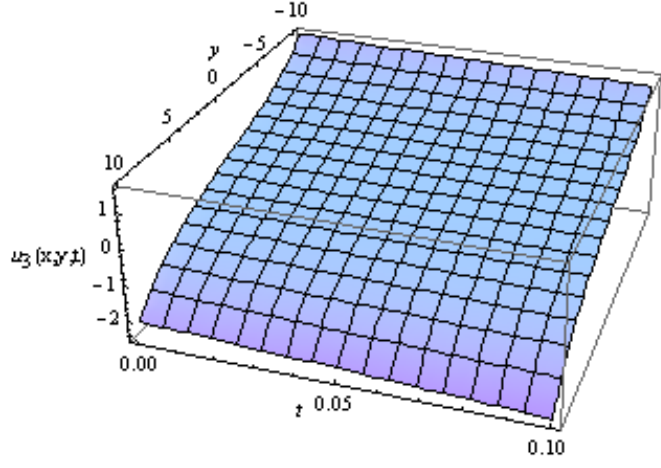
değerlerinde ki eğrisini göstermektedir. Bunların yanında, (4.15) ile verilen denklemin

$\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2, x = 0.1, \gamma = 0.9, \beta = 0, c_1 = 1, c_2 = 1, c_3 = 1, c_4 = 1, t = 0.1$

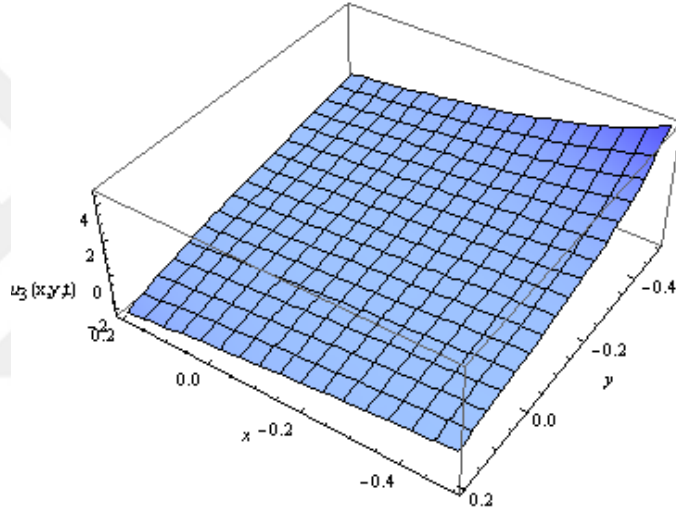
değerleri ve farklı  $y$  değerleri için  $u_3(x, y, t)$  analitik çözüm eğrisi Şekil 4.32 ile verildi.



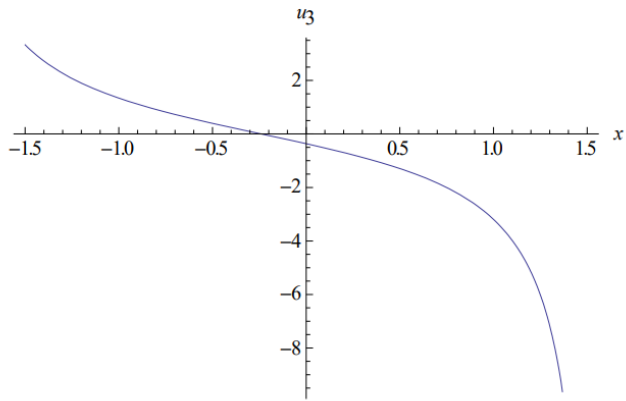
Şekil 4.28. Farklı  $x$  ve  $t$  değerleri için  $u_3(x, y, t)$  analitik çözüm yüzeyi



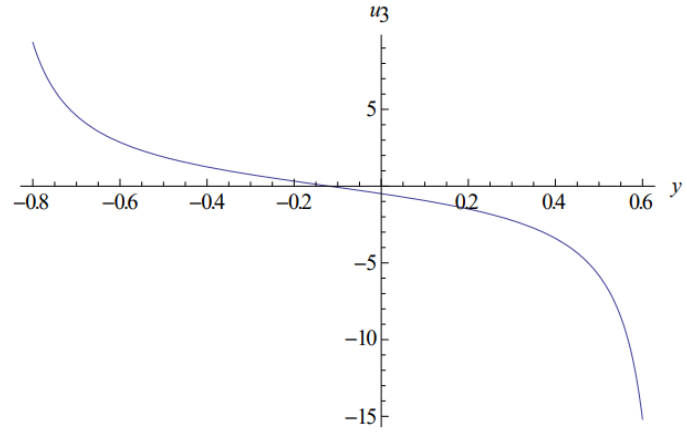
Şekil 4.29. Farklı  $y$  ve  $t$  değerleri için  $u_3(x, y, t)$  analitik çözüm yüzeyi



Şekil 4.30. Farklı  $x$  ve  $y$  değerleri için  $u_3(x, y, t)$  analitik çözüm yüzeyi



Şekil 4.31. Farklı  $x$  değerleri için  $u_3(x, y, t)$  analitik çözüm eğrisi



Şekil 4.32. Farklı  $y$  değerleri için  $u_3(x, y, t)$  analitik çözüm eğrisi

## 5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu tezde, zaman değişkenine bağlı conformable kesirli türev yaklaşımı içeren, conformable kesirli mertebenden genişletilmiş BKP-Boussinesq, geliştirilmiş Calogero–Bogoyavlenskii–Schiff ve geliştirilmiş (2+1) boyutlu Hirota-Satsuma-Ito denklemlerinin tam çözümleri elde edildi. Fonksiyonel değişken yöntemi ile elde edilen bu conformable kesirli mertebeden türevli kısmi diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerinin, bazı parametre değerleri için yüzeyleri ve eğrileri çizildi.

Tezde, göz önüne alınan üç denkleme, fonksiyonel değişken yöntemini uygulamak için ilk olarak, dalga dönüşümü uygulandı. Dalga dönüşümü uygulanması sonucu conformable kesirli mertebenden kısmi diferansiyel denklemler, tamsayı mertebeden türev içeren adi türevli diferansiyel denklemlere dönüştürüldü. Elde edilen adi türevli diferansiyel denklemlerin tam çözümleri etkili ve uygun bir yöntem olan fonksiyonel değişken yöntemi yardımı ile bulundu.

Her bir denklem için elde edilen analitik çözümlerin, conformable kesirli mertebenden kısmi türevli denklemleri sağladığı Mathematica programı ile görüldü. Elde edilen analitik çözümlerin bazı parametre değerlerindeki yüzeyleri ve eğrileri de verildi.

Sonuç olarak; fonksiyonel değişken yöntemi conformable kesirli türev içeren kısmi diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerinin bulunmasında etkili ve uygun bir yöntemdir. Fiziksel olayların modellenmesinde ortaya çıkacak olan farklı conformable kesirli türev içeren kısmi diferansiyel denklemlerin analitik çözümleri de fonksiyonel değişken yöntemi yardımı ile elde edilebilir.

## KAYNAKLAR

- Abdou, M.A., Elhanbaly, A., 2007. Construction of periodic and solitary wave solutions by the extended Jacobi elliptic function expansion method, **Comm. Nonlinear Sci. Num. Simul.**, 12: 1229-1241.
- Aminikhah, H., Refahi Sheikhan, A., Rezazadeh, H., 2016. Travelling wave solutions of nonlinear systems of PDEs by using the functional variable method, **Bol. Soc. Paran. Mat.**, 34: 213–229.
- Biswas, A., Mirzazadeh, M., Eslami, M., Milovic, D. & Belic, M. 2014. Solitons in optical metamaterials by functional variable method and first integral approach. **Frequenz**, 68(11-12), 525-530.
- Chen, S. T. & Ma, W. X., 2018. Lump solutions of a generalized Calogero–Bogoyavlenskii–Schiff equation. **Computers & Mathematics with Applications**, 76(7): 1680-1685.
- Debnath, L. and Bhatta, D., 2007. Integral transforms and their Applications, **Chapman-Hall/CRC**, 143 s, USA.
- Fan, E., Zhang, J., 2002. Applications of Jacobi elliptic function method to special type nonlinear equations, **Phys. Lett. A**, 305: 383-392.
- Hammouch, Z., Mekkaoui, T. & Agarwal, P. 2018. Optical solitons for the Calogero–Bogoyavlenskii–Schiff equation in  $(2+ 1)$  dimensions with time-fractional conformable derivative. **The European Physical Journal Plus**, 133(7): 1-6.
- He, J.H., 2005. Application of homotopy perturbation method to nonlinear wave equations, **Chaos Soliton. Fract.**, 26: 695-700.
- He, J.H., 2005. Homotopy perturbation method for bifurcation of nonlinear problems, **Int. J. Nonlinear Sci. Numer. Simul.**, 6: 207-208.
- He, J.H., Wu X.H., 2006. Construction of solitary solution and compacton-like solution by a variational iteration method, **Chaos Soliton. Fract.**, 29: 108-113.
- He, J.H., Wu X.H., 2006. Exp-function method for nonlinear wave equations, **Chaos Soliton. Fract.**, 30: 700-708.
- He, J.H., Wu X.H., 2007. Solitary solutions, periodic solutions and compacton-like solutions using the Exp-function method, **Comp. Math. Appl.**, 54: 966-986.
- Hilfer, P., 2000. Various Approaches to the Fractional Calculus. (R Hilfer, Editör). **Applications of Fractional Calculus In Physics. World Scientific**, 99-088745, 3 s, Germany.
- Huiqun, Z., 2007. Extended Jacobi elliptic function expansion method and its applications, **Comm. Nonlinear Sci. Num. Simul.**, 12: 627-635.
- Khalil, R., Al Horani, M., Yousef, A., Sababheh, M. 2014. A new definition of fractional derivative. **J. Comput. Appl. Math.**, 264: 65-70.
- Khalique, C. M. & Moleleki, L. D., 2019. A  $(3+ 1)$ -dimensional generalized BKP–Boussinesq equation, **Lie group approach. Results in Physics**, 13: 102239.
- Kilbas, A.A., Srivastava, H.M., Trujillo, J.J., 2006. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. **Elsevier Science**, 540 s, New York.
- Kuo, C. K. & Ma, W. X., 2020. A study on resonant multi-soliton solutions to the  $(2+ 1)$ -dimensional Hirota–Satsuma–Ito equations via the linear superposition principle. **Nonlinear Analysis**, 190: 111592.

- Kutluay, S., Esen, A., Tasbozan, O., 2010. The  $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -expansion method for some nonlinear evolution equations, **Appl. Math. Comput.**, 217: 384-391.
- Li, Y. M., Baskonus, H. M. & Khudhur, A. M. 2021. Investigations of the complex wave patterns to the generalized Calogero–Bogoyavlenskii–Schiff equation. **Soft Computing**, 25(10): 6999-7008.
- Liu, J.B., Yang, K.Q., 2004. The extended F-expansion method and exact solutions of nonlinear PDE's, **Chaos Soliton. Fract.**, 22: 111-121.
- Liu, J.B., Yang, L., Yang, K., 2004. Jacobi elliptic function solutions of some nonlinear PDE's, **Phys. Lett. A**, 325: 268-275.
- Liu, S., Fu, Z., Zhao, Q., 2001. Jacobi elliptic function expansion method and periodic wave solutions of nonlinear wave equations, **Phys. Lett. A**, 289: 69-74.
- Liu, S., Fu, Z., Zhao, Q., 2001. New Jacobi elliptic function expansion method and new periodic solutions of nonlinear wave equations, **Phys. Lett. A**, 290: 72- 76.
- Liu, W. & Chen, K. 2013. The functional variable method for finding exact solutions of some nonlinear time-fractional differential equations. **Pramana**, 81(3), 377-384.
- Liu, Y., Wen, X. Y. & Wang, D. S., 2019. The N-soliton solution and localized wave interaction solutions of the (2+ 1)-dimensional generalized Hirota-Satsuma-Ito equation. **Computers & Mathematics with Applications**, 77(4): 947-966.
- Ma, W. X., Li, J. & Khalique, C. M., 2018. A study on lump solutions to a generalized Hirota-Satsuma-Ito equation in (2+ 1)-dimensions. **Complexity**, 2018.
- Malfeit, W., 1992. Solitary wave solutions of nonlinear wave equations, **Am. J. Phys.**, 60: 650-654.
- Mirzazadeh, M. & Biswas, A., 2014. Optical solitons with spatio-temporal dispersion by first integral approach and functional variable method. **Optik**, 125(19), 5467-5475.
- Moatimid, G. M., El-Shiekh, R. M. & Al-Nowehy, A. G. A., 2013. Exact solutions for Calogero–Bogoyavlenskii–Schiff equation using symmetry method. **Applied Mathematics and Computation**, 220: 455-462.
- Nazarzadeh, A., Eslami, M. & Mirzazadeh, M., 2013. Exact solutions of some nonlinear partial differential equations using functional variable method. **Pramana**, 81(2), 225-236.
- Oldham, K.B. and Spainer, J., 1974. The Fractional Calculus, **Academic Press**, 225 s, New York.
- Parkes, E.J., Duffy, B.R., 1996. An automated tanh-function method for finding solitary wave solutions to nonlinear evolution equations, **Comp. Phys. Commun.**, 98: 288-300.
- Parkes, E.J., Duffy, B.R., Abbott, P.C., 2002. The Jacobi elliptic-function method for finding periodic wave solutions to nonlinear evolution equations, **Phys. Lett. A**, 295: 280-286.
- Podlubny, L., 1999. Fractional Differential Equations. **Academic Press**, 340 s, London.
- Rezazadeh, H., Khodadad, F.S., Manafian, J., 2017. New structure for exact solutions of nonlinear time fractional Sharma- Tasso-Olver equation via conformable

- fractional derivative. **Applications and Applied Mathematics: An International Journal**, 12(1): 405-414.
- Rezazadeh, H., Vahidi, J., Zafar, A. & Bekir, A., 2020. The functional variable method to find new exact solutions of the nonlinear evolution equations with dual-power-law nonlinearity. **International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation**, 21(3-4), 249-257.
- Roshid, H. O., Khatun, M. S., Baskonus, H. M. & Belgacem, F. B. M., 2021. Breather, multi-shock waves and localized excitation structure solutions to the Extended BKP–Boussinesq equation. **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, 101: 105867.
- Verma, P. & Kaur, L., 2019. Integrability, bilinearization and analytic study of new form of (3+ 1)-dimensional B-type Kadomtsev–Petviashvili (BKP)-Boussinesq equation. **Applied Mathematics and Computation**, 346: 879-886.
- Wang, M.L., 1995. Solitary wave solutions for variant Boussinesq equations, **Phys. Lett. A**, 199: 169-172.
- Wang, M.L., Li, X., Zhang, J., 2008. The  $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -expansion method and travelling wave solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physics, **Phys. Lett. A**, 372: 417-423.
- Wang, M.L., Zhou, Y., Li, Z.B., 1996. Applications of a homogenous balance method to exact solutions of nonlinear equations in mathematical physics, **Phys. Lett. A**, 216: 67-75.
- Wazwaz, A.M., 2007. Analytic study for fifth-order KdV-type equations with arbitrary power nonlinearities, **Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simul.**, 12: 904-909.
- Wazwaz, A.M., 2007. The variational iteration method for rational solutions for KdV, K(2,2), Burgers and cubic Boussinesq equations, **J. Comp. Appl. Math.**, 207: 18-23.
- Wazwaz, A. M., 2008. Multiple-soliton solutions for the Calogero–Bogoyavlenskii–Schiff, Jimbo–Miwa and YTSE equations. **Applied Mathematics and Computation**, 203(2): 592-597.
- Wazwaz, A. M. & El-Tantawy, S. A., 2017. Solving the (3+ 1)-dimensional KP–Boussinesq and BKP–Boussinesq equations by the simplified Hirota’s method. **Nonlinear Dynamics**, 88(4): 3017-3021.
- Yan, X. W., Tian, S. F., Dong, M. J. & Zou, L., 2018. Bäcklund transformation, rogue wave solutions and interaction phenomena for a (3+ 1)-dimensional B-type Kadomtsev–Petviashvili–Boussinesq equation. **Nonlinear Dynamics**, 92(2): 709-720.
- Yang, C., 1996. A simple transformation for nonlinear waves, **Phys. Lett. A**, 224: 77-84.
- Zerarka, A., Ouamane, S. & Attaf, A., 2010. On the functional variable method for finding exact solutions to a class of wave equations. **Applied Mathematics and Computation**, 217(7), 2897-2904.
- Zhang, Y., Ma, W. X. & Yang, J. Y., 2020. A study on lump solutions to a (2+ 1)-dimensional completely generalized Hirota–Satsuma–Ito equation. **Discrete & Continuous Dynamical Systems-S**, 13(10): 2941.

Zhao, Z. & He, L., 2021. M-lump and hybrid solutions of a generalized (2+ 1)-dimensional Hirota–Satsuma–Ito equation. **Applied Mathematics Letters**, 111: 106612.

Zhou, Y.B., Wang, M.L., Wang, Y.M., 2003. Periodic wave solutions to coupled KdV equations with variable coefficients, **Phys. Lett. A**, 308: 31-36.

