T.C.
SÜLEYMAN DEMİREL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇİFT MİNKOWSKİ PİSAGOR HODOGRAF EĞRİLERİN KARAKTERİZASYONU

Merve IŞIK

Danışman
Prof. Dr. Ahmet YÜCESAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
ISPARTA – 2022

İÇİNDEKİLER

sayfa

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ÇİFT MİNKOWSKİ PİSAGOR HODOGRAF EĞRİLERİN KARAKTERİZASYONU

Merve IŞIK

Süleyman Demirel Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ahmet YÜCESAN

Bu tez çalışmasında, uzaysal Minkowski Pisagor hodograf eğrinin kuaterniyonik formu ele alındı ve bu kuaterniyonik form kullanılarak çift Minkowski Pisagor hodograf eğrinin tanımlanmasında önemli bir eşitlik elde edildi. Daha sonra, çift Minkowski Pisagor hodograf eğri tanımlandı ve timelike asli normalli regüler spacelike çift Minkowski Pisagor hodograf eğrinin Frenet elemanlarının rasyonel vektörel fonksiyonlar olduğu gösterildi. Polinom timelike asli normalli spacelike, yarı-null veya null genel ve slant helislerin çift Minkowski Pisagor hodograf eğriler olduğu gösterildi. Reel ve kuaterniyon polinomlar kullanılarak çift Minkowski Pisagor hodograf eğrinin Hopf benzeri dönüşüm formu ve kuaterniyon formu elde edildi. Son olarak, beşinci dereceden polinom timelike asli normalli spacelike eğrinin bir genel helis olması için gerek ve yeter şartın bir çift Minkowski Pisagor hodograf eğri olduğu gösterildi.

Anahtar Kelimeler: Minkowski Pisagor hodograf eğriler, çift Minkowski Pisagor hodograf eğriler, polinom genel helis, polinom slant helis.

2022, 43 sayfa

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

CHARACTERIZATION OF DOUBLE MINKOWSKI PYTHAGOREAN HODOGRAPH CURVES

Merve IŞIK

Süleyman Demirel University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Ahmet YÜCESAN

In this thesis, the quaternionic form of the spatial Minkowski Pythagorean hodograph curve is examined and by using this quaternionic form, an important equation is obtained in describing the double Minkowski Pythagorean hodograph curve. Then, the double Minkowski Pythagorean hodograph curve is defined and it is shown that the Frenet elements of the timelike principal normal regular spacelike double Minkowski Pythagorean hodograph curve are rational vector functions. It has been shown that polynomial timelike principal normal spacelike, pseudo-null or null general and slant helices are double Minkowski Pythagorean hodograph curves. Hopf-like map form and quaternion form of double Minkowski Pythagorean hodograph curve are obtained by using real and quaternion polynomials. Finally, it is shown that the necessary and sufficient condition for a timelike principal normal spacelike quintic to be a general helix is a double Minkowski Pythagorean hodograph curves.

Key Words: Minkowski Pythagorean hodograph curves, double Minkowski Pythagorean hodograph curves, polynomial general helix, polynomial slant helix.

2022, **43 pages**

TEŞEKKÜR

Bu çalışma için beni yönlendiren ve çalışmamın her aşamasında ilgi ve desteğini benden esirgemeyen danışman hocam Prof. Dr. Ahmet YÜCESAN'a sonsuz teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Yüksek lisans eğitimim boyunca beni her konuda destekleyen aileme teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Merve IŞIK

ISPARTA, 2022

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathcal{A}$	Kuaterniyon
$\mathcal{A}^*$	Kuaterniyonun eşleniği
B	Binormal vektör
$C\ell(2,1)$	Clifford cebiri
$\deg(h(t))$	$h(t)$ polinomun derecesi
H	Hopf dönüşümü
$\widetilde{H}$	Hopf-benzeri dönüşüm
$\mathbb{H}$	Kuaterniyonlar cebiri
N	Asli normal vektör
$\mathbf{N}$	Normun karesi
Qu_{31}	Kuaterniyon polinomun e_{31} kısmının katsayısı
$\mathbb{R}^3$	Öklid $3-$ uzay
$\mathbb{R}^3_1$	Minkowski $3-$ uzay
T	Teğet vektör alanı
$z_1,\ z_2$	Karmaşık polinomlar
$\alpha,\ \beta$	Kuaterniyon polinomlar
κ	Eğrilik
τ	Burulma
$<,>_L$	Lorentz iç çarpım
$\wedge$	Lorentz vektörel çarpım

1.GİRİŞ

$\mathbb{R}^3$ Öklid 3−uzayda $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ polinom eğrisinin $\gamma'(t)$ hodografı bazı $\sigma(t)$ reel polinomu için

$$x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) = \sigma^2(t)$$

Pisagor şartını sağlıyorsa $\gamma(t)$ eğrisine Pisagor hodograf denir (Farouki ve Sakkalis, 1990; Farouki ve Sakkalis, 1994). Moon (1999), Pisagor şartını $\mathbb{R}^3_1$ Minkowski 3−uzaya genelleştirmiş ve bazı $\sigma(t)$ reel polinomu için

$$x'^2(t) + y'^2(t) - z'^2(t) = \sigma^2(t)$$

şartını sağlayan $\gamma(t)$ eğrisini Minkowski Pisagor hodograf olarak tanımlamıştır. $\mathbb{R}^3_1$ Minkowski 3−uzaydaki Lorentz metriği notasyonu ile bu şart

$$< \gamma'(t), \gamma'(t) >_L = \sigma^2(t)$$

şeklinde yazılır. Böylece Minkowski Pisagor hodograf eğrisinin teğet vektörü asla timelike olamaz ve Minkowski Pisagor hodograf eğriler ya spacelike ya da null Minkowski Pisagor hodograf eğrilerdir.

Çeşitli uygulamalar için düzlemsel eğrilerin ofsetleri (kaymaları) gereklidir. Örneğin, ofsetler bilgisayar sayısal kontrol makinelerinin takım yolları olarak kullanılır. Eğriler ve yüzeylerin temsilinin doğruluğu ve etkinliği, bilgisayar destekli geometrik tasarımdaki temel konulardan biri olduğundan, polinom veya rasyonel ofsetlere sahip eğriler ayrıntılı olarak araştırılmıştır. Özellikle, Farouki ve Sakkalis (1990) tarafından tanıtılan Pisagor hodograf eğrileri, rasyonel ofsetlere sahip polinom eğrileridir. Belirli bir eğrinin ofsetini bir takım yolu olarak veya diğer uygulamalar için kullanmak için, kırpma işlemi uygulanmalıdır. Bu işlem istenmeyen parçaları keser ve gerçek offseti verir. Geometriye ve offset mesafesine bağlı olarak, kırpma işlemi zaman alıcı ve hesaplama açısından zor olabilir. Bu soruna zarif bir yaklaşım Moon (1999) ve Choi vd. (1999) tarafından getirilmiş ve kırpma işlemi formüle edilmiştir. Düzlemsel bir bölgenin (Pottmann ve Peternell, 1998; Degen, 2004) orta ekseni, sınıra en az iki noktada temas eden tüm dış teğet çemberlerinin merkezlerinden oluşmaktadır. Orta eksen dönüşümü daha sonra, ek koordinat olarak karşılık gelen çemberin yarıçapını kullanarak, bölgenin orta ekseninin noktalarının $xyz-$uzayına kaldırılmasıyla elde edilen uzay eğrileri sistemidir (Kosinka ve Jüttler, 2006). Düzlemsel bir bölgenin sınırları için offset formülü ile motive edilen Moon (1999), Minkowski Pisagor Hodograf eğrilerini Lorentz metriğine göre Minkowski (veya yarı-Öklid) uzayındaki polinom hız eğrileri olarak tanımlamıştır. Eğer orta eksen dönüşümü bir (parçalı) Minkowski Pisagor hodograf eğri ise, sınır bölgesine karşılık gelen $\delta-$offset eğrileri rasyoneldir. Ayrıca iç ofsetler için düzeltme prosedürü daha basit hale gelir (Pottmann ve Peternell, 1998). Böylece, Minkowski Pisagor Hodograf eğriler düzlemsel bölgelerin orta eksen dönüşümlerini temsil etmek için çok uygundur ve bu gözlemler Minkowski Pisagor hodograf eğrileri çalışmaya teşvik eder.

Uzayda sabit bir vektör ile sabit bir açı yapan polinom eğriler kavramı Farouki vd. (2004) tarafından çalışıldı ve bu tür eğriler polinom helis olarak adlandırılır. Bir eğri için, verilen sabit bir vektör (helisin ekseni) boyunca bir u birim vektörü için $\langle T, u\rangle = c$ oluyorsa bu eğriye helis denir. Burada $c \in \mathbb{R}$ ve $T = \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|}$ birim teğet vektördür. Ancak, diğer kaynaklarda bu eğriler genel helis olarak da adlandılır. Benzer şekilde, T birim vektör yerine eğrinin N asli normal vektörü düşünülürse eğri slant helis olarak adlandırılır.

Eğri ve yüzeylerin bilgisayar destekli tasarımı alanındaki bazı problemler ve helis eğriler arasındaki ilişkinin kurulmasında beşinci dereceden polinom helislerin kullanımının uygun olduğu görülmektedir (Choi vd., 2002; Farouki, 2002). Farouki vd. (2004) nin çalışmasında bahsedildiği gibi herhangi bir polinom helis bir Pisagor hodograf eğrisi olmalıdır. Yani $\left\|\gamma'\right\|^2$ bir polinomun tam karesidir. Ayrıca, bu durum üçüncü dereceden polinom durumda yeterlidir. Yani, tüm Pisagor hodogaflar üçüncü dereceden polinom eğriler helistir. Helis olması için diğer gerekli şart ise $\frac{\left\|\gamma'\wedge\gamma''\right\|^2}{\left\|\gamma'\right\|^2}$ ifadesinin de bir polinomun tam karesi olmasıdır. Ancak Beltran ve Monterde (2007) in çalışmasında $\frac{\left\|\gamma'\wedge\gamma''\right\|^2}{\left\|\gamma'\right\|^2}$ yerine $\left\|\gamma' \wedge \gamma''\right\|^2$ ifadesine odaklanılmış ve polinom helisler için hem $\left\|\gamma'\right\|^2$ nın hem de $\left\|\gamma' \wedge \gamma''\right\|^2$ nin polinomların tam karesi olması gerektiğini göstermişlerdir. Bu tür eğrileri de $2-$Pisagor hodograf (veya çift Pisagor hodograf) eğriler olarak isimlendirmişlerdir. Ayrıca çift Pisagor hodografları karakterize etmişler ve beşinci derece polinom helis olması için gerek ve yeter şartın polinom eğrisinin çift Pisagor hodograf olması gerektiğini göstermişlerdir. Farouki vd. (2009) $\mathbb{R}^3$ deki regüler polinom eğriler için helis koşulu, rasyonel Frenet çatılarının varlığı ve çift Pisagor hodograf yapısı arasındaki ilişkileri uzaysal Pisagor hodografın kuaterniyon ve Hopf dönüşüm temsilleri açısından açıklamışlardır. Deshmukh vd. (2019) da bir polinom eğrisinin slant helis ise bir polinom çift Pisagor hodograf olması gerektiğini gösterdirler.

Minkowski $3-$uzayda herhangi polinom spacelike ve null helislerin bir Minkowski Pisagor hodograf eğriler olduğu Kosinka ve Jüttler (2006) tarafından elde edilmiş ve Minkowski $3-$uzayda bir uzaysal eğrinin üçüncü dereceden polinom Minkowski Pisagor hodograf olması için gerek ve yeter şartın eğrinin spacelike veya null üçüncü dereceden polinom helis olduğunu göstermişlerdir.

Bu çalışmaların devamı olarak bu tez çalışmasında Minkowski Pisagor hodograf eğriler yeniden ele alındı ve uzaysal Minkowski Pisagor hodograf eğrinin kuaterniyonik formu kullanılarak çift Minkowski Pisagor hodograf eğrinin tanımlanmasında önemli bir eşitlik elde edildi. Daha sonra, çift Minkowski Pisagor hodograf eğri kavramı tanımlandı ve timelike asli normalli regüler spacelike çift Minkowski Pisagor hodograf eğrisinin Frenet elemanlarının rasyonel vektörel fonksiyonlar olduğu gösterildi. Polinom timelike asli normalli spacelike, yarı-null veya null genel ve slant helislerin çift Minkowski Pisagor hodograf eğriler olduğu gösterildi. Reel ve kuaterniyon polinomlar kullanılarak çift Minkowski Pisagor hodograf eğrinin Hopf benzeri dönüşüm formu ve kuaterniyon formu elde edildi. Son olarak, beşinci dereceden polinom timelike asli normalli spacelike eğrinin bir genel helis olması için gerek ve yeter şartın bir çift Minkowski Pisagor hodograf eğri olduğu gösterildi.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, Minkowski Pisagor hodograf eğriler ve çift Minkowski Pisagor hodograf eğrilerin çalışılabilmesi için gerekli olan tanım ve teoremler verildi.

2.1. Minkowski 3−Uzay

Tanım 2.1. $\mathbb{R}^3$, Öklid 3−uzayında $u = (u_1, u_2, u_3)$ ve $v = (v_1, v_2, v_3)$ vektörleri için

$$\langle u, v \rangle_L = u_1 v_1 + u_2 v_2 - u_3 v_3 \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlanan simetrik, bilineer ve non-dejenere metrikli uzaya Minkowski 3−uzay denir ve $\mathbb{R}_1^3$ ile gösterilir. Burada tanımlanan $\langle , \rangle_L$ metriği Lorentz metriği olarak adlandırılır (O'Neill, 1983; Lopez, 2014).

Tanım 2.2. $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski 3−uzay ve $u \in \mathbb{R}_1^3$ olsun.

$i)$ Eğer $< u, u >_L > 0$ veya $u = 0$ ise u vektörü spacelike,

$ii)$ Eğer $< u, u >_L < 0$ ise u vektörü timelike,

$iii)$ Eğer $< u, u >_L = 0$ ve $u \neq 0$ ise u vektörü lightlike (null) olarak adlandırılır (O'Neill, 1983; Lopez, 2014).

Bir vektörün causal karakteri; spacelike, timelike veya lightlike (null) olma özelliğidir (Lopez, 2014).

Tanım 2.3. $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski 3−uzayında,

$$\mathbb{Q} = \{(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}_1^3 : u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 = 0\} - \{(0, 0, 0)\}$$

şeklinde tanımlanan tüm lightlike vektörlerin kümesine $\mathbb{R}_1^3$ ün light konisi denir (O'Neill, 1983; Lopez, 2014).

Tanım 2.4. $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski 3−uzayında tüm timelike vektörlerin kümesi

$$\mathcal{T} = \{(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}_1^3 : u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 < 0\}$$

olsun. $u \in \mathcal{T}$ için

$$C(v) = \{u \in \mathcal{T} : < u, v >_L < 0\}$$

şeklinde tanımlanan kümeye v yi bulunduran $\mathbb{R}_1^3$ ün timekonisi denir (O'Neill, 1983; Lopez, 2014).

Tanım 2.5. U, $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski $3-$uzayının bir altuzay olsun. $u, v \in U$ için

$< u, v >_{L_U} = < u, v >_L$

şeklinde tanımlı indirgenmiş metrik U yu aşağıdaki şekilde sınıflar:

$i)$ İndirgenmiş metrik pozitif tanımlı yani U iç çarpım uzayı ise U ya spacelike altuzay

$ii)$ İndirgenmiş metriğin indeksi 1 olan non-dejenere ise U ya timelike altuzay,

$iii)$ İndirgenmiş metrik dejenere ise U ya lightlike altuzay denir (O'Neill, 1983; Lopez, 2014).

Tanım 2.6. $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski $3-$uzayında herhangi bir u vektörü için

$\|u\| = \sqrt{|< u, u >_L|}$

şeklinde tanımlanan reel sayı u nun normu olarak adlandırılır ve normu 1 olan vektöre de birim vektör denir (O'Neill, 1983; Lopez, 2014).

Teorem 2.7. $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski $3-$uzayında iki timelike vektör u ve v olsun. O zaman,

$i)$ $|< u, v >_L| \geq \|u\| \, \|v\|$

dir ve eşitlik ancak ve ancak u ve v orantılı ise geçerlidir.

$ii)$ Eğer u ve v aynı timekonide ise

$< u, v >_L = - \|u\| \, \|v\| \cosh \phi$

olacak şekilde u ve v vektörleri arasında hiperbolik açı olarak adlandırılan bir tek $\phi \geq 0$ reel sayısı vardır (O'Neill, 1983; Lopez, 2014).

Tanım 2.8. $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski $3-$uzayında u bir spacelike vektör ve v bir timelike vektör olsun. O zaman,

$|< u, v >_L| = \|u\| \, \|v\| \sinh \phi$

olacak şekilde u ve v vektörleri arasında hiperbolik açı olarak adlandırılan bir tek negatif olmayan ϕ reel sayısı vardır (Ratcliffe, 2006; Ali ve Mahmoud, 2014).

Tanım 2.9. u ve v, $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski 3−uzayında timelike altuzayında bulunan spacelike vektörler olsun. O zaman,

$|< u, v >_L| > \|u\| \, \|v\|$

dir ve

$|< u, v >_L| = \|u\| \, \|v\| \cosh \phi$

olacak şekilde u ve v vektörleri arasında hiperbolik açı olarak adlandırılan bir tek pozitif ϕ reel sayısı vardır (Ratcliffe, 2006; Ali ve Mahmoud, 2014).

Tanım 2.10. u ve v, $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski 3−uzayında spacelike altuzayında bulunan spacelike vektörler olsun. O zaman,

$|< u, v >_L| \leq \|u\| \, \|v\|$

dir ve

$|< u, v >_L| = \|u\| \, \|v\| \cos \theta$

olacak şekilde u ve v vektörleri arasında trigonometrik açı olarak adlandırılan bir tek pozitif θ reel sayısı vardır (Ratcliffe, 2006; Ali ve Mahmoud, 2014).

Tanım 2.11. $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski 3−uzay ve $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}_1^3$ olsun.

$< u \wedge v, w >_L = \det(u, v, w)$

eşitliğini sağlayan

$u \wedge v = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_2 v_1 - u_1 v_2)$

şeklinde tanımlı vektöre, u ve v nin Lorentz vektör çarpımı denir. Burada $\det(u, v, w)$, u, v, w vektörlerinin koordinatlarının sütunları oluşturduğu matrisin determinantıdır (Lopez, 2014).

Tanım 2.12. $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}_1^3$ diferansiyellenebilir dönüşüme $\mathbb{R}_1^3$ de bir (diferansiyellenebilir) eğri denir. Burada I, $\mathbb{R}$ reel ekseninin bir açık aralığıdır (Lopez, 2014).

Tanım 2.13. $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}_1^3$, $\mathbb{R}_1^3$ de bir eğri olsun. $\forall t \in I$ için

$\gamma'(t) = d\gamma(\frac{d}{du}\big|_t) \in T_{\gamma(t)}\mathbb{R}_1^3$

teğet vektörüne γ nın hız vektörü denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.14. $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$, n. dereceden polinom eğrisi olsun.

$\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t), \gamma_3'(t))$,

$(n-1)$. dereceden bir polinom eğrisine $\gamma(t)$ nın hodografı denir (Farouki ve Sakkalis, 1994).

Tanım 2.15. γ, $\mathbb{R}_1^3$ de bir eğri olsun. $\forall t \in I$ için

$i)$ $\gamma^{'}(t)$ hız vektörü spacelike ise γ eğrisine spacelike,

$ii)$ $\gamma^{'}(t)$ hız vektörü timelike ise γ eğrisine timelike,

$iii)$ $\gamma^{'}(t)$ hız vektörü lightlike (null) ise γ eğrisine lightlike (null) dır denir (O'Neill, 1983; Lopez, 2014).

Eğer $\forall t \in I$ için $\gamma'(t) \neq 0$ ise eğri regüler olarak adlandırılır ve $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski $3-$uzayda eğrilerin causal karakteri regülerlik şartını etkiler (Lopez, 2014).

Önerme 2.16. $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski $3-$uzayında herhangi bir timelike ya da null eğri regülerdir (Lopez, 2014).

Spacelike eğriler bazı noktalarda regüler olmayabilir. Bu nedenle çalışmanın bundan sonraki kısımlarında regüler spacelike eğriler dikkate alınacaktır.

Örnek 2.17. $\gamma(t) = (t, t^2, t^2)$, ikinci dereceden polinom eğrisi $y - z = 0$ denklemli lightlike düzleminde bir spacelike eğridir ve $\gamma(t)$ nin birinci dereceden hodografı

$\gamma'(t) = (1, 2t, 2t)$

dır (Lopez, 2014).

Önerme 2.18. $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}_1^3$, spacelike veya timelike bir eğri olsun. $t_0 \in I$ verildiğinde $\forall s \in (-\epsilon, \epsilon)$ için $\|\beta'(s)\| = 1$ özeliğini sağlayan $\beta = \gamma \circ \phi$ ile verilen $\beta : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}_1^3$ eğrisi olacak şekilde $\phi : (-\epsilon, \epsilon) \to (\sigma_0 - \delta, \sigma_0 + \delta)$ difeomorfizmi ve δ, $\epsilon > 0$ vardır (Lopez, 2014).

$\mathbb{R}_1^3$ Minkowski $3-$uzayında regüler spacelike ve timelike eğriler s yay-uzunluğu parametresi ile yeniden parametrize edilebilirler. Bir lightlike (null) eğri için ise yay-uzunluğu ile yeniden parametrizasyonu anlamlı değildir.

Lemma 2.19. $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}_1^3$, izi doğru olmayan bir lightlike (null) eğri olsun. $\left\|\beta^{''}(s)\right\| = 1$ olacak şekilde $\beta = \gamma \circ \phi$ ile verilen γ nın yeniden parametrizasyonu vardır. γ nın yay-uzunluğu ile yarı-parametrize (veya yarı-yay uzunluğu ile parametrize) edildiği söylenir (Lopez, 2014).

Uyarı 2.20. Eğer $\gamma = \gamma(t)$ bir regüler eğri ve $\beta = \gamma \circ \phi$, γ nın yeniden parametrizasyonu ise γ ve β nın causal karakteri aynıdır (Lopez, 2014).

Tanım 2.21. $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski $3-$uzayda spacelike veya timelike asli normal vektöre sahip spacelike veya timelike eğriler Frenet eğrileri olarak adlandırılır (Lopez, 2014).

Teorem 2.22. γ, $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski $3-$uzayda s yay uzunluğu ile parametrize edilmiş spacelike bir eğri olsun. O zaman $T = \gamma^{'}(s)$, γ nın birim spacelike teğet vektörü, N birim asli normal vektörü ve B birim binormal vektörü olmak üzere $\{T, N, B\}$ Frenet çatısı için,

$i)$ Eğer $T^{'}$ vektörü spacelike veya timelike ise Frenet formülleri

$$T^{'} = \kappa N$$
$$N^{'} = -\varepsilon\kappa T + \tau B$$
$$B^{'} = \tau N$$

dir. Burada, $\varepsilon = < N, N >_L = \pm 1$ dir.

$ii)$ Eğer $T^{'}$ vektörü $\forall s$ için null (lightlike) yani γ yarı-null eğri ise Frenet formülleri

$$T^{'} = N$$
$$N^{'} = \tau N$$
$$B^{'} = -T - \tau B$$

dir. Burada $< T, T >_L = 1$, $< N, N >_L = < B, B >_L = < T, N >_L = < B, N >_L = 0$ ve $< N, B >_L = 1$ dir. τ fonksiyonu γ nın yarı-burulması olarak adlandırılır ve γ nın eğriliğinin tanımı yoktur (Lopez, 2014).

Önerme 2.23. $\gamma(t)$, $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski $3-$uzayda bir spacelike eğri olsun. O zaman $\gamma(t)$, $t_0 \in I$ ye karşılık gelen bir bükülmeye sahiptir ancak ve ancak $t \in I$ için$\left\|\gamma^{'}(t) \wedge \gamma^{''}(t)\right\|^2 = 0$ dır. Bu, izole bir bükülme noktası durumunu içerir. Burada $I = \{t_0\}$ dır (Kosinka ve Jüttler, 2006).

Teorem 2.24. γ, $\mathbb{R}^3_1$ Minkowski $3-$uzayda yay uzunluğu ile parametrize edilmiş bir Frenet eğri olsun. O zaman, γ bir afin düzleme indirgenir ancak ve ancak burulma sıfırdır (Lopez, 2014).

Aslında $\tau = 0$, bir eğrinin Minkowski $3-$uzayda düzlemsel olması için ne gerekli ne de yeterli bir koşuldur. Diğer taraftan, lightlike düzlemlerde bulunan eğrilerin yalnızca bükülmelerden oluştuğu gösterilebilir. Dolayısıyla bu tip eğriler burulmanın sıfır olmaksızın düzlemseldirler (Minkowski eğriliği 1 olarak değerlendirilir ve burulma eğrilik rolünü oynar) (Kosinka ve Jüttler, 2006).

Önerme 2.25. Eğer $\gamma(t)$, $\mathbb{R}^3_1$ Minkowski $3-$uzayda sıfır burulmaya sahip bir eğri ise $\gamma(t)$ bir düzlemsel eğri veya yarı-yay uzunluğu ile parametrize edilmiş

$W(s) = \frac{1}{6\sqrt{2}}(6s - s^3, 3\sqrt{2}s^2, 6s + s^3)$

şeklinde $W-$null kubik (üçüncü dereceden polinom $W-$null) eğri olarak adlandırılan bir eğridir (Walrave 1995; Kosinka ve Jüttler, 2006).

Tanım 2.26. $\mathbb{R}^3_1$ Minkowski $3-$uzayda bir düzlemde bulunmayan eğriye uzaysal eğri denir (Kosinka ve Jüttler, 2006).

Tanım 2.27. γ, $\mathbb{R}^3_1$ Minkowski $3-$uzayda yay uzunluğu (eğer γ null ise yarı-yay uzunluğu) ile parametrize edilmiş regüler bir eğri olsun. γ nın teğet vektörü T olmak üzere $< T, u >_L$ sabit olacak şekilde sıfırdan farklı $u \in \mathbb{R}^3_1$ vektörü varsa γ ya bir genel helis ve u ya paralel herhangi bir doğruya da genel helisin ekseni denir. Özellikle, genel helisin ekseninin null veya null olmamasına göre genel helis, sırasıyla, dejenere veya dejenere olmayan şeklinde adlandırılır (Barros vd., 2001; Lopez, 2014).

Teorem 2.28 (**Lancret Teoremi**). γ, $\mathbb{R}^3_1$ Minkowski $3-$uzayda κ eğrilik ve τ burulmasına sahip bir null olmayan eğri olsun. O zaman, γ bir genel helisdir ancak ve ancak $\frac{\tau}{\kappa}$ sabittir (Barros vd., 2001).

Teorem 2.29. γ, $\mathbb{R}^3_1$ Minkowski $3-$uzayda s yarı-yay uzunluğu yani $\left\|\gamma''(s)\right\| = 1$ ile parametrize edilmiş bir null eğri olsun. O zaman $T = \gamma'(s)$, γ nın lightlike teğet vektörü, $N = \gamma''(s)$ birim spacelike asli normal vektörü ve $< T, B >_L = 1$ olacak şekilde N ye ortogonal olan bir tek lightlike B binormal vektörü olmak üzere $\{T, N, B\}$ null çatısı için, Frenet formülleri

$$T' = N$$
$$N' = -\tau T - B$$
$$B' = \tau N$$

dir. Burada, $B = -\gamma'''(s) - \tau\gamma'(s)$ binormal vektör ve $\tau = \frac{1}{2} < \gamma'''(s), \gamma'''(s) >$, γ nın lightlike eğriliği olarak adlandırılır (Duggal ve Bejancu, 1996; Ferrandez vd., 2001; Wang ve Pei, 2011).

Teorem 2.30. γ, $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski $3-$uzayda yarı-yay uzunluğu ile parametrize edilmiş bir null Frenet eğri olsun. Eğer γ nın lightlike eğriliği sabit ise γ bir null helis olarak adlandırılır (Ferrandez, vd., 2001; Inoguchi ve Lee, 2008).

Teorem 2.31. γ, $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski $3-$uzayda yarı-yay uzunluğu ile parametrize edilmiş bir null Frenet eğrisi bir null genel helisdir ancak ve ancak γ bir null helisdir (Ferrandez vd., 2002; Inoguchi ve Lee, 2008).

2.2. $C\ell(2,1)$ Clifford Cebiri

Dejenere olmayan bir kuadratik form ile donatılmış herhangi bir reel lineer uzay ilişkili bir Clifford cebirine sahiptir. Özellikle, (2.1) belirsiz kuadratik forma sahip üç boyutlu reel lineer uzay olan $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski $3-$uzaya karşılık gelen Clifford cebiri $C\ell(2,1)$ ile gösterilir. $C\ell(2,1)$ Clifford cebiri, baz elemanlarının dört farklı sınıfına sahiptir. Bunlar; skalere özdeş eleman 1, ortonormal baz vektörler e_1, e_2, e_3, bivektörler e_{23}, e_{31}, e_{12} ve yarı-skaler e_{123} dür.

$$e_1^2 = e_2^2 = -1 = -e_3^2,$$

$$e_{23}^2 = e_{31}^2 = 1 = -e_{12}^2$$

ve eğer $i \neq j$ ise,

$$e_ie_j = -e_je_i,$$

temel ilişkilerinden çarpma işleminin değişmeli olmadığı kuralı rahatlıkla görülebilir. Clifford cebirinin herhangi elemanı bu baz elemanlarının bir lineer bileşimidir. Gösterimi basitleştirmek için Clifford cebirinin elemanlarını temsil etmek için $\mathbb{R}^8$ deki vektörler kullanılacak. O halde,

$$
\begin{aligned}
A &= [a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7] \\
&= a_0 1 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_{23} + a_5 e_{31} + a_6 e_{12} + a_7 e_{123}
\end{aligned}
$$

şeklinde yazılabilir. Elemanların eşleniği ve normun karesi sırasıyla

$$A^* = [a_0, -a_1, -a_2, -a_3, -a_4, -a_5, -a_6, -a_7]$$

ve

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{N}(A) = AA^* &= (a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 - a_4^2 - a_5^2 + a_6^2 + a_7^2) \\
&\quad + (2a_0 a_7 - 2a_1 a_4 - 2a_2 e_5 - 2a_3 e_6) e_{123}
\end{aligned}
$$

şeklinde tanımlanır. Eşlenik operatörü $(AB)^* = B^* A^*$ eşitliğini sağlar.

$\mathbb{R}_1^3$ Minkowski $3-$uzayın tüm vektörleri,

$$u = (u_1, u_2, u_3) \cong u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3 = [0, u_1, u_2, u_3, 0, 0, 0, 0] \in C\ell(2,1)$$

şeklinde saf vektörler ile özdeş olarak ifade edilebilir. $\mathbb{R}_1^3$ ve $C\ell(2,1)$ deki normlar

$$\boldsymbol{N}(u) = \|u\|^2$$

ile ilişkilidir. Bivektörlerle birleştirilmiş skaler kümesi, $C\ell(2,1)$ Clifford cebirinin

$$\mathbb{H} = \mathbb{R}1 + \mathbb{R}e_{12} + \mathbb{R}e_{23} + \mathbb{R}e_{31}$$

ile gösterilen (split) kuaterniyonlar olarak adlandırılan alt cebirini oluşturur. Kuaterniyonlar cebirinin elemanları

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A} &= [a_0, 0, 0, 0, a_4, a_5, a_6, 0] \\
&= a_0 1 + a_4 e_{23} + a_5 e_{31} + a_6 e_{12}
\end{aligned}
$$

şeklinde kaligrafik karakterler ile gösterilir.

$\mathcal{A} = a_0 1 + a_4 e_{23} + a_5 e_{31} + a_6 e_{12}$ ve $\mathcal{B} = b_0 1 + b_4 e_{23} + b_5 e_{31} + b_6 e_{12}$ iki (split) kuaterniyonun çarpımı

$$\mathcal{AB} = s_{\mathcal{A}} s_{\mathcal{B}} + < v_{\mathcal{A}}, v_{\mathcal{B}} >_L + s_{\mathcal{A}} v_{\mathcal{B}} + s_{\mathcal{B}} v_{\mathcal{A}} + v_{\mathcal{A}} \wedge v_{\mathcal{B}}$$

ile verilir. Burada $s_{\mathcal{A}} = a_0$ ve $s_{\mathcal{B}} = b_0$ sırasıyla $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ (split) kuaterniyonlarının reel kısımları, $v_{\mathcal{A}} = a_4 e_{23} + a_5 e_{31} + a_6 e_{12}$ ve $v_{\mathcal{B}} = b_4 e_{23} + b_5 e_{31} + b_6 e_{12}$ sırasıyla $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ (split) kuaterniyonlarının vektör kısımları ve

$$< v_{\mathcal{A}}, v_{\mathcal{B}} >_L = a_4 b_4 + a_5 b_5 - a_6 b_6$$

dir (Inoguchi, 1998; Choi, 2002; Kosinka ve Jüttler, 2009).

Lemma 2.32. $\mathbb{H}$ alt cebirinde $\mathcal{W}e_2\mathcal{W}^* = e_2$ nin tüm çözümleri

$\mathcal{W}(1,\phi)$=$[ch\phi, 0, 0, 0, 0, -sh\phi, 0, 0]$, $\phi \in \mathbb{R}$,

$\mathcal{W}(2,\phi) = [-ch\phi, 0, 0, 0, 0, -sh\phi, 0, 0], \phi \in \mathbb{R}$,

$\mathcal{W}(3,\phi) = [0, 0, 0, 0, -ch\phi, 0, -sh\phi, 0], \phi \in \mathbb{R}$,

$\mathcal{W}(4,\phi) = [0, 0, 0, 0, ch\phi, 0, -sh\phi, 0], \phi \in \mathbb{R}$,

şeklinde dört $1-$parametreli sistem formundadır (Kosinka ve Jüttler, 2009).

Uyarı 2.33. $\mathcal{W}e_2\mathcal{W}^* = e_2$ nin tüm çözümlerinin kümesi

$\mathbb{W} = \{\mathcal{W}(i,\phi) : i = 1,..,4; \phi \in \mathbb{R}\}$,

ile gösterilir (Kosinka ve Jüttler, 2009).

2.3. Bezier Eğrisi

Tanım 2.34. $i = \{0, 1, 2, ..., n\}$ olmak üzere

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i(1-t)^{n-i}$$

şeklinde tanımlanan n. dereceden bir polinoma Bernstein polinomu denir. Burada binom katsayıları

$$\binom{n}{i} = \begin{cases} \frac{n!}{i!(n-i)!}, & 0 \leq i \leq n \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

dir (Gerald, 2002).

Teorem 2.35. Bernstein polinomları aşağıdaki özeliklere sahiptir:

$i)$ $B_i^n(0) = \begin{cases} 1, & i = 0 \\ 0, & i \neq 0, \end{cases}$

$ii)$ $B_i^n(1) = \begin{cases} 1, & i = n \\ 0, & i \neq n, \end{cases}$

$iii)$ $B_i^n(t) \leq B_i^n\left(\frac{i}{n}\right)$, $t \in [0, 1]$,

$iv)$ $B_l^n\left(\frac{i}{n}\right) < B_i^n\left(\frac{i}{n}\right)$, $l \neq i$,

$v)$ $\sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) = 1$,

$vi)\ B_i^n(t)\, B_l^m(t) = \dfrac{\binom{n}{i}\binom{m}{l}}{\binom{n+m}{i+l}} B_{i+l}^{n+m}(t)\,,$

$vii)\ \int_0^1 B_i^n(t)\, dt = \frac{1}{n+1}$ (Gerald, 2002; Gravesen, 2002).

Tanım 2.36. $t \in [0,1]$ olmak üzere Bernstein polinomları yardımıyla tanımlanan

$\gamma(t) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) P_i$

şeklindeki eğriye $P_0, P_1, ..., P_n$ kontrol noktalarına sahip bir Bezier eğrisi denir (Gravesen, 2002).

3. MİNKOWSKİ PİSAGOR HODOGRAF EĞRİLER

Bu bölümde, Minkowski $3-$uzayda Minkowski Pisagor hodograf eğriler incelendi. Öncelikle Minkowski Pisagor hodograf eğrinin tanımı ile spacelike ve null Minkowski Pisagor hodograf eğri örnekleri verildi. Minkowski Pisagor hodograf eğri ile (split) kuaterniyon arasındaki ilişki ele alındı ve uzaysal Minkowski Pisagor hodograf eğrinin kuaterniyonik formu verildi. Daha sonra, çift Minkowski Pisagor hodograf eğrinin tanımlanmasında önemli bir eşitlik elde edildi. Son olarak, iki kompleks polinom ile tanımlanan Hopf dönüşümü kullanılarak verilen bir Minkowski Pisagor hodografın bileşenleri, eğrinin hızı ve serbest hiperbolik açısal parametre yardımıyla iki karmaşık polinom elde edildi.

Tanım 3.1. $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski $3-$uzayda polinom eğri olsun. γ nın $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ hodografı bazı $\sigma(t)$ reel polinom fonksiyonu için Pisagor yani,

$$x'^2(t) + y'^2(t) - z'^2(t) = \sigma^2(t)$$

şartını sağlıyorsa γ eğrisine Minkowski Pisagor hodograf eğri denir (Moon, 1999; Choi vd., 2002).

Lorentz metriğin notasyonu ile Minkowski Pisagor şartı

$$< \gamma'(t), \gamma'(t) >_L = \sigma^2(t)$$

şeklinde yazılır ve Minkowski metriği altında $\gamma(t)$ nın hızı $|\sigma(t)|$ dir. O halde, Minkowski Pisagor hodograf eğrinin $\gamma'(t)$ teğet vektörü (yani hodografı) timelike olamaz. Böylece, Minkowski Pisagor hodograf eğriler ya spacelike ya da null polinom eğrilerdir (Moon, 1999; Choi vd., 2002; Kosinka ve Jüttler, 2006).

Örnek 3.2. $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski $3-$uzayında

$$\gamma(t) = (\tfrac{16}{5}t^5 + \tfrac{10}{3}t^3, \tfrac{102}{5}t^5 + \tfrac{100}{3}t^3 + 25t, \tfrac{38}{5}t^5 + \tfrac{20}{3}t^3)$$

polinom eğrisi beşinci dereceden spacelike Minkowski Pisagor hodograf eğridir. Gerçekten de,

$$\sigma^2(t) = <\gamma'(t), \gamma'(t)>_L = (25 + 100t^2 + 96t^4)^2 > 0$$

dır.

Örnek 3.3. $\mathbb{R}^3_1$ Minkowski 3−uzayda

$\gamma(t) = (3t^2, t - 3t^3, t + 3t^3)$

polinom eğrisi null Minkowski Pisagor hodograf eğridir. Gerçekten de,

$\sigma^2(t) = <\gamma^{'}(t), \gamma^{'}(t)>_L = 0$

dır (Kosinka ve Jüttler, 2006).

Uyarı 3.4. Önerme 2.25 de verilen üçüncü dereceden polinom $W-$null eğrisi aynı zamanda bir Minkowski Pisagor hodograf eğridir. Çünkü herhangi polinom null eğri bir Minkowski Pisagor hodograf eğridir (Kosinka ve Jüttler, 2006).

3.1. Uzaysal Minkowski Pisagor Hodograf Eğrilerin Kuaterniyonik Formu

$\mathbb{R}^3_1$ Minkowski 3−uzayda $\gamma^{'}(t) = (x^{'}(t), y^{'}(t), z^{'}(t))$ Minkowski Pisagor hodografının bileşenleri, $p_0(t)$, $p_1(t)$, $p_2(t)$, $p_3(t)$ polinomlarına göre

$$\sigma(t) = p_0^2(t) - p_1^2(t) - p_2^2(t) + p_3^2(t)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} x'(t) &= -2\left(p_0(t)p_3(t) + p_1(t)p_2(t)\right) \\ y^{'}(t) &= p_0^2(t) + p_1^2(t) - p_2^2(t) - p_3^2(t), \\ z^{'}(t) &= 2\left(p_0(t)p_1(t) + p_2(t)p_3(t)\right) \end{aligned} \tag{3.1}$$

şeklinde ifade edilir öyle ki,

$$< \gamma^{'}(t), \gamma^{'}(t) >_L = x^{'2}(t) + y^{'2}(t) - z^{'2}(t) = \sigma^2(t)$$

dir. Eğer $p_0(t)$, $p_1(t)$, $p_2(t)$, $p_3(t)$ polinomları en fazla m. dereceden ise $\gamma(t)$ Minkowski Pisagor hodograf eğrisi, $\gamma^{'}(t)$ hodografının integralinin alınmasıyla $n = 2m + 1$ olmak üzere tek dereceye sahip olarak elde edilir. Bileşenleri (3.1) eşitliği ile verilen hodograf, kuaterniyonların cebiri kullanılarak

$$\gamma^{'}(t) = \mathcal{A}(t)e_2\mathcal{A}^*(t) \tag{3.2}$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$\mathcal{A}_\ell = p_{0_\ell}(t) + p_{1_\ell}e_{23} + p_{2_\ell}(t)e_{31} + p_{3_\ell}(t)e_{12}, \quad \ell = 0, 1, ..., m$$

Bernstein bileşenleri ile n. dereceden bir Minkowski Pisagor hodograf eğri için $m = \frac{1}{2}(n-1)$ dereceye sahip

$$\mathcal{A}(t) = p_0(t) + p_1(t)e_{23} + p_2(t)e_{31} + p_3(t)e_{12} = \sum_{\ell=0}^{m} \mathcal{A}_\ell \binom{m}{\ell} (1-t)^{m-\ell} t^\ell, \qquad (3.3)$$

şeklinde bir kuaterniyon polinom ve (3.2) deki

$$\mathcal{A}^*(t) = p_0(t) - p_1(t)e_{23} - p_2(t)e_{31} - p_3(t)e_{12},$$

$\mathcal{A}(t)$ nin eşleniğidir. $\mathcal{A}(t)$ nin $p_0(t)$, $p_1(t)$, $p_2(t)$, $p_3(t)$ bileşen polinomlarına göre uzaysal Minkowski Pisagor hodografı,

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= -2\left(p_0(t)p_3(t) + p_1(t)p_2(t)\right)e_1 \\ &\quad +(p_0^2(t) + p_1^2(t) - p_2^2(t) - p_3^2(t))e_2 + 2\left(p_0(t)p_1(t) + p_2(t)p_3(t)\right)e_3 \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir (Choi vd., 2002).

$\gamma'(t)$ Minkowski Pisagor hodografı (3.2) aracılığıyla tek parametreli bir kuaterniyon polinomları ailesi tarafından üretildiğine dikkat edilirse seçilen herhangi bir $\mathcal{A}(t)$ nin $\mathcal{A}(t)\mathcal{Q}(\theta)$ ile değiştirilmesiyle tam olarak aynı hodograf elde edilir. Burada, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ için

$$\mathcal{Q}(\theta) = \cos\theta + \sin\theta e_2,$$

olmak üzere $\mathcal{Q}(\theta)e_2\mathcal{Q}^*(\theta) = e_2$ eşitliğini sağlar. Ayrıca, açısal değişken (3.2) hodografında herhangi bir değişiklik olmaksızın t eğri parametresinin bir fonksiyonu olarak belirtilir. Aynı zamanda, $\mathcal{A}(t)$ ve $\mathcal{B}(t)$,

$$\mathcal{A}(t)e_2\mathcal{A}^*(t) = \gamma'(t) = \mathcal{B}(t)e_2\mathcal{B}^*(t)$$

eşitliğini sağlayan kuaterniyon polinomları olmak üzere $\mathcal{A}(t) = \mathcal{B}(t)\mathcal{W}$ olacak şekilde $\mathcal{W} \in \mathbb{W}$ vardır. Örneğin, $\phi \in \mathbb{R}$ için

$$\mathcal{W}(1,\phi) = \mathcal{W}_1 = \cosh\phi - \sinh\phi e_{31},$$

olmak üzere

$$\mathcal{W}_1 e_2 \mathcal{W}_1^* = e_2$$

eşitliğini sağlar.

Uyarı 3.5. $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ ilkel hodografı,

$$obeb(x'(t), y'(t), z'(t)) = sabit$$

olmasıyla karakterize edilir. Pratikte ilkel hodograflar tercih edilir. Çünkü $x'(t)$,

$y^{'}(t)$, $z^{'}(t)$ nin ortak bir reel kökü genellikle $\gamma(t)$ eğrisi üzerinde bir tepe noktasına (ani teğet ters çevrilmesine) neden olur. Bununla birlikte, asal polinomlar $p_0(t)$, $p_1(t)$, $p_2(t)$, $p_3(t)$ yi $\mathcal{A}(t)$ nin bileşenleri olarak seçmek $\gamma^{'}(t)$ nin ilkelliğini garanti etmez. Asal reel polinomlar $p_0(t)$, $p_1(t)$, $p_2(t)$, $p_3(t)$ için (eğer varsa) $x^{'}(t), y^{'}(t), z^{'}(t)$ nin ortak çarpanı

$$obeb(x^{'}(t), y^{'}(t), z^{'}(t)) = |obeb(p_0(t) + p_3(t)e_{12}, p_1(t) - p_2(t)e_{12})|^2 \tag{3.4}$$

ile verilir. Bu, reel kökleri olmayan reel bir çift dereceli $h(t)$ polinomunu tanımlar. İlkel olmayan bir uzaysal Minkowski Pisagor hodografı, h nin derecesi $2r$ olduğunda $m-r$ dereceli uygun bir kuaterniyonik polinom $\mathcal{B}(t)$ için

$$h(t)\mathcal{B}(t)e_2\mathcal{B}^*(t) \tag{3.5}$$

biçiminde yazılabilir. Elbette, $p_0(t)$, $p_1(t)$, $p_2(t)$, $p_3(t)$ asal değilse

$obeb(p_0(t), p_1(t), p_2(t), p_3(t))$,

(3.4) deki $h(t)$ ye katkıda bulunacaktır.

Bir polinom spacelike eğrinin T birim spacelike teğeti t parametresine göre rasyonel bir bağımlılığa sahiptir ancak ve ancak spacelike eğrinin hodografı Minkowski Pisagordur. Gerçekten de T birim spacelike teğeti,

$$T = \frac{\gamma^{'}(t)}{\left\|\gamma^{'}(t)\right\|} = \frac{(-2(p_0(t)p_3(t)+p_1(t)p_2(t)), p_0^2(t)+p_1^2(t)-p_2^2(t)-p_3^2(t), 2(p_0(t)p_1(t)+p_2(t)p_3(t))}{\sigma(t)}$$

ile $p_0(t)$, $p_1(t)$, $p_2(t)$, $p_3(t)$ ve $\sigma(t)$ polinomlarına göre tanımlanır. Null eğri için T null teğeti,

$$\begin{aligned} T = \gamma^{'}(t) \quad &= (-2\left(p_0(t)p_3(t) + p_1(t)p_2(t)\right), \\ &\quad p_0^2(t) + p_1^2(t) - p_2^2(t) - p_3^2(t), 2\left(p_0(t)p_1(t) + p_2(t)p_3(t)\right)) \end{aligned}$$

olduğundan $p_0(t)$, $p_1(t)$, $p_2(t)$ ve $p_3(t)$ polinomlarına göre tanımlanır.

Bununla birlikte, bir polinom spacelike eğri için

$$N = \varepsilon B \wedge T, \; B = \frac{\gamma^{'}(t) \wedge \gamma^{''}(t)}{\left\|\gamma^{'}(t) \wedge \gamma^{''}(t)\right\|}$$

şeklinde tanımlanan N asli normali ve B binormali genel olarak rasyonel birim vektörler değildirler. Çünkü $\left\|\gamma^{'}(t) \wedge \gamma^{''}(t)\right\|$ değeri genel olarak bir polinomun karekökünü içerir. Benzer şekilde,

$$\kappa = \frac{\sqrt{|< \gamma'(t) \wedge \gamma''(t), \gamma'(t) \wedge \gamma''(t) >_L|}}{\|\gamma'(t)\|^3} \tag{3.6}$$

eşitliği ile verilen κ burulmasının genel olarak t ye rasyonel bir bağımlılığa sahip olmasına rağmen

$$\tau = -\varepsilon \frac{< \gamma'(t) \wedge \gamma''(t), \gamma'''(t) >_L}{< \gamma'(t) \wedge \gamma''(t), \gamma'(t) \wedge \gamma''(t) >_L}$$

eşitliği ile verilen τ burulması rasyonel bir bağımlılığa sahip değildir. T, N, B, κ ve τ nun t ye rasyonel bağımlılığını sağlamak için Bölüm 4 de tanımlanacak çift Minkowski Pisagor hodograf eğriler dikkate alınacaktır.

Teorem 3.6. $\mathbb{R}^3_1$ Minkowski 3−uzayda herhangi spacelike veya null helis bir Minkowski Pisagor hodograftır (Kosinka ve Jüttler, 2006).

Önerme 3.7. $\mathbb{R}^3_1$ Minkowski 3−uzayda üçüncü dereceden polinom uzaysal spacelike Minkowski Pisagor hodograf bir helisdir (Kosinka ve Jüttler, 2006).

Teorem 3.8. $\mathbb{R}^3_1$ Minkowski 3−uzayda bir uzaysal eğri üçüncü dereceden polinom Minkowski Pisagor hodograftır ancak ve ancak uzaysal eğri üçüncü dereceden polinom spacelike veya null helisdir (Kosinka ve Jüttler, 2006).

Önerme 3.9. $\gamma(t)$, teğet vektörü $p_0(t)$, $p_1(t)$, $p_2(t)$ ve $p_3(t)$ polinom fonksiyonları ile (3.1) eşitliğindeki gibi tanımlanan bir spacelike uzaysal Minkowski Pisagor hodograf eğri olsun. O zaman,

$$< \gamma'(t) \wedge \gamma''(t), \gamma'(t) \wedge \gamma''(t) >_L = \sigma^2(t)\rho(t) \tag{3.7}$$

şeklinde bir polinom fonksiyondur. Burada,

$$\begin{aligned} \rho(t) &= 4[\left(p_0(t)p_1'(t) - p_0'(t)p_1(t) + p_2'(t)p_3(t) - p_2(t)p_3'(t)\right)^2 \\ &\quad - \left(p_0'(t)p_3(t) - p_3'(t)p_0(t) + p_1'(t)p_2(t) - p_1(t)p_2'(t)\right)^2] \end{aligned} \tag{3.8}$$

dir.

İspat. $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, teğet vektörü $p_0(t)$, $p_1(t)$, $p_2(t)$ ve $p_3(t)$ fonksiyonları ile (3.1) eşitliğindeki gibi tanımlanan bir spacelike uzaysal Minkowski Pisagor hodograf eğri olsun. O halde,

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= (-2\left(p_0(t)p_3(t) + p_1(t)p_2(t)\right), p_0^2(t) + p_1^2(t) - p_2^2(t) - p_3^2(t), \\ &\qquad 2\left(p_0(t)p_1(t) + p_2(t)p_3(t)\right)) \end{aligned}$$

ve

$$
\begin{aligned}
\gamma^{''}(t) &= (-2\left(p_0^{'}(t)p_3(t)+p_0(t)p_3^{'}(t)+p_1^{'}(t)p_2(t)+p_1(t)p_2^{'}(t)\right), 2(p_0(t)p_0^{'}(t)\\
&\quad +p_1(t)p_1^{'}(t)-p_2^{'}(t)p_2(t)-p_3(t)p_3^{'}(t)), 2(p_0^{'}(t)p_1(t)+p_0(t)p_1^{'}(t)\\
&\quad +p_2^{'}(t)p_3(t)+p_2(t)p_3^{'}(t)))
\end{aligned}
$$

olmak üzere

$$
\begin{aligned}
\langle\gamma'(t)\wedge\gamma''(t),\gamma'(t)\wedge\gamma''(t)\rangle_L &= 4\left\|\gamma'(t)\right\|^2\left[\left(p_0(t)p_1'(t)-p_0'(t)p_1(t)+p_2^{'}(t)p_3(t)\right.\right.\\
&\quad \left.-p_2(t)p_3^{'}(t)\right)^2-\left(p_0^{'}(t)p_3(t)-p_3^{'}(t)p_0(t)\right.\\
&\quad \left.\left.+p_1'(t)p_2(t)-p_1(t)p_2'(t)\right)^2\right]
\end{aligned}
$$

olduğu görülür. Böylece,

$$
\langle\gamma'(t)\wedge\gamma''(t),\gamma'(t)\wedge\gamma''(t)\rangle_L
$$

eşitliğinin (3.7) şeklinde bir polinom fonksiyon olduğu görülür.

3.2. Uzaysal Minkowski Pisagor Hodograf Eğrilerin Hopf Dönüşüm Formu

Kuaterniyon gösterimine bir alternatif olarak (3.1) uzaysal Minkowski Pisagor hodografının $\mathbb{C}\times\mathbb{C}\rightarrow\mathbb{R}_1^3$ şeklinde Hopf dönüşümü aracılığıyla iki karmaşık polinomdan üretilebileceği gözlemlendi. Bu dönüşüm $p=(x,y,z)\in\mathbb{R}_1^3$ noktalarını

$$
p=H\left(z_1,z_2\right)=(-\dot{I}m(z_1^2+z_2^2),\operatorname{Re}(z_1^2+z_2^2),2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)) \tag{3.9}
$$

eşitliğine göre $z_1(t)=p_0(t)+p_3(t)e_{12}$ ve $z_2(t)=p_1(t)+p_2(t)e_{12}$ karmaşık sayı çiftleriyle ilişkilendirilebilir.

$z_1(t)$ ve $z_2(t)$ karmaşık polinomları göz önüne alınırsa (3.1) ile tanımlanan eğrinin $\gamma^{'}(t)$ hodografı,

$$
\gamma^{'}(t)=H(z_1(t),z_2(t)) \tag{3.10}
$$

şeklinde yazılır (Choi vd., 2002).

Sanal birim i yi kuaterniyon temel eleman e_{12} ile tanımlayarak, (3.3) kuaterniyon formdaki $\mathcal{A}(t)$ polinomu, (3.10) Hopf dönüşümü formundaki $z_1(t)=p_0(t)+p_3(t)e_{12}$ ve $z_2(t)=p_1(t)+p_2(t)e_{12}$ karmaşık polinomları cinsinden

$$
\mathcal{A}(t)=z_1(t)+z_2(t)e_{23} \tag{3.11}
$$

şeklinde ifade edilebilir (Choi vd., 2002). Tersine $\mathcal{A}(t)$ dan $z_1(t)$ ve $z_2(t)$, sırasıyla

$$z_1(t) = \tfrac{1}{2}[\mathcal{A}(t) - e_{12}\mathcal{A}(t)e_{12}], \qquad z_2(t) = \tfrac{1}{2}[\mathcal{A}(t) + e_{12}\mathcal{A}(t)e_{12}]e_{23} \tag{3.12}$$

eşitlikleriyle elde edilir. Tabii ki, (3.11) ve (3.12) ifadeleri (3.2) veya (3.10) aracılığıyla belirli bir $\gamma'(t)$ hodografını tanımlayan $\mathcal{A}(t)$ kuaterniyon polinomların tek parametreli ailesi veya $z_1(t)$ ve $z_2(t)$ karmaşık polinom çiftleri arasında özel olarak ilişkilendirilir.

Bir $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ Minkowski Pisagor hodografı verildiğinde, (3.2) ile tanımlanan $\mathbb{H} \to \mathbb{R}^3_1$ dönüşümü altındaki kuaterniyon ön-görüntü $\mathcal{A}(t)$,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(t) &= \sqrt{\tfrac{1}{2}(\sigma(t) + y'(t))}[\cosh\phi + \sinh\phi e_{31} + \tfrac{x'(t)\sinh\phi + z'(t)\cosh\phi}{\sigma(t)+y'(t)}e_{23} \\ &\quad - \tfrac{x'(t)\cosh\phi + z'(t)\sinh\phi}{\sigma(t)+y'(t)}e_{12}]\end{aligned}$$

olarak ifade edilir. Burada, $\sigma(t) =< \gamma'(t), \gamma'(t) >_L$ ve ϕ bir serbest hiperbolik açı parametresidir. Her t için yukarıdaki bağıntı $\mathbb{R}^3_1$ deki belirli bir $\gamma'(t)$ noktasının ön görüntüsünü ϕ yi artırarak izlenen $\mathbb{H}$ kuadratik uzayında bir hiperbol olarak tanımlar. Hopf dönüşümü $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}^3_1$ için ön-görüntü karmaşık polinomların tek parametreli ailesi $z_1(t)$ ve $z_2(t)$ serbest hiperbolik açısal parametre ϕ ile sırasıyla

$$z_1(t) = \sqrt{\tfrac{1}{2}(\sigma(t) + y'(t))}[\cosh\phi - \tfrac{x'(t)\cosh\phi + z'(t)\sinh\phi}{\sigma(t)+y'(t)}e_{12}]$$

ve

$$z_2(t) = \sqrt{\tfrac{1}{2}(\sigma(t) + y'(t))}[\tfrac{x'(t)\sinh\phi + z'(t)\cosh\phi}{\sigma(t)+y'(t)} + \sinh\phi e_{12}]$$

şeklinde verilir.

4. ÇİFT MİNKOWSKİ PİSAGOR HODOGRAF EĞRİLER

Bölüm 3 de belirtildiği üzere spacelike uzaysal Minkowski Pisagor hodograf eğrilerin T teğeti ve κ eğriliği eğrinin parametresine bağlı rasyonel bir bağımlılığa sahip olmasına rağmen N asli normal vektörü, B binormal vektörü ve τ burulması rasyonel bağımlılığa sahip değildir. Çünkü $\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|$ değeri genel olarak bir polinomun karekökünü içerir. Eğri parametresinde $\{T, N, B\}$, κ ve τ nun tamamının rasyonel olduğu eğrileri oluşturma olasılığını araştırmak için $\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|$ yani $< \gamma'(t) \wedge \gamma''(t), \gamma'(t) \wedge \gamma''(t) >_L$ nin yapısını daha ayrıntılı olarak incelemek gerekir.

(3.1) eşitliği,

$$\begin{aligned} < \gamma'(t) \wedge \gamma''(t), \gamma'(t) \wedge \gamma''(t) >_L &= (y'(t)z''(t) - y''(t)z'(t))^2 \\ &+ (x''(t)z'(t) - x'(t)z''(t))^2 \\ &- (x''(t)y'(t) - x'(t)y''(t))^2 \end{aligned}$$

eşitliğinde yerine yazılırsa (3.8) ile verilen $\rho(t)$ ile (3.7) denklemi doğrulanabilir. Ayrıca (3.8) polinomu,

$$\rho(t) = \sigma'^2(t) - < \gamma''(t), \gamma''(t) >_L$$

şeklinde yazılabilir. $\gamma(t)$ polinom eğrisi timelike asli normalli spacelike uzaysal Minkowski Pisagor hodograf eğri ise

$$\rho(t) = \|\gamma''(t)\|^2 \sinh^2 \phi(t)$$

şeklinde yorumlanabilir. Burada $\phi(t)$, timelike düzlemde bulunan spacelike $\gamma'(t)$ ve spacelike $\gamma''(t)$ arasındaki açıdır. Aslında $\rho(t)$ polinomu $p_0(t)$, $p_1(t)$, $p_2(t)$, $p_3(t)$ polinomları ve bunların türevleri $p_0'(t)$, $p_1'(t)$, $p_2'(t)$, $p_3'(t)$ cinsinden birkaç farklı şekilde yazılabilir. Örneğin,

$$\begin{aligned} \rho(t) &= 4[(p_0(t)p_0'(t) - p_1(t)p_1'(t) - p_2(t)p_2'(t) + p_3(t)p_3'(t))^2 \\ &- (p_0'(t)p_3(t) + p_0(t)p_3'(t) + p_1'(t)p_2(t) + p_1(t)p_2'(t))^2 \\ &- (p_0(t)p_0'(t) + p_1(t)p_1'(t) - p_2(t)p_2'(t) - p_3(t)p_3'(t))^2 \\ &+ (p_0'(t)p_1(t) + p_0(t)p_1'(t) + p_2'(t)p_3(t) + p_2(t)p_3'(t))^2] \end{aligned} \tag{4.1}$$

şeklinde veya yalnızca iki karenin farkı olan (3.8) eşitliğindeki gibi yazılabilir. (3.8) eşitliğinde iki kare farkı şeklinde ifade edilen $\rho(t) > 0$ şartı $\{T, N, B\}$ Frenet çatısı, κ eğrilik ve τ burulmasının eğrinin t parametresine göre rasyonel bir şekilde karakterize edilmesini sağlar.

Tanım 4.1. $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski 3−uzayda $\gamma(t)$ polinom eğrisi için

$$< \gamma^{'}(t), \gamma^{'}(t) >_L = x^{'2}(t) + y^{'2}(t) - z^{'2}(t) = \sigma^2(t) \tag{4.2}$$

ve

$$\begin{aligned} < \gamma'(t) \wedge \gamma''(t), \gamma'(t) \wedge \gamma''(t) >_L &= (y^{'}(t)z^{''}(t) - y^{''}(t)z'(t))^2 + (x^{''}(t)z'(t) \\ &\quad -x^{'}(t)z^{''}(t))^2 - (x^{''}(t)y^{'}(t) - x'(t)y^{''}(t))^2 \\ &= (\sigma\omega)^2(t) = \sigma^2(t)\rho(t) \end{aligned} \tag{4.3}$$

nin her ikisi de t nin polinom fonksiyonları ise yani, (4.2) ve (4.3) koşulları bazı $\sigma(t)$ ve $\omega(t)$ polinomları için aynı anda sağlanıyorsa $\gamma(t)$ polinom eğrisine çift Minkowski Pisagor hodograf eğri denir.

Örnek 4.2. $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski 3−uzayında

$\gamma(t) = (\frac{8}{5}t^5 - 64t, 16t^3, \frac{8}{5}t^5 + 64t)$

polinom eğrisi $t \neq 0$ için spacelike Minkowski Pisagor hodograf eğri olmasına rağmen çift Minkowski Pisagor hodograf eğri değildir. Gerçekten de,

$\sigma^2(t) = <\gamma^{'}(t), \gamma^{'}(t)>_L = 256t^4 > 0$

ve

$<\gamma'(t) \wedge \gamma''(t), \gamma'(t) \wedge \gamma''(t)>_L = -2097152t^6 < 0$

dır.

Uyarı 4.3. $\gamma(t)$ spacelike uzaysal Minkowski Pisagor hodograf eğrisinin çift Minkowski Pisagor hodograf eğri olması için gerek ve yeter şart (3.8) eşitliği ile verilen $\rho(t)$ polinom fonksiyonun sıfıra eşit veya sıfırdan büyük olmasıdır.

O halde, çift Minkowski Pisagor hodograf eğriler; timelike asli normalli spacelike eğriler, yarı-null (teğet vektörünün türevi null olan spacelike) eğriler veya null eğrilerdir.

Örnek 4.4. $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski 3−uzayında

$\gamma(t) = (\frac{8}{5}t^5 - 8, \frac{4}{3}t^3, -\frac{8}{5}t^5 + 1)$

polinom eğrisi beşinci dereceden yarı-null çift Minkowski Pisagor hodograf eğridir. Gerçekten de, $t \neq 0$ için

$$\sigma^2(t) = <\gamma^{'}(t), \gamma^{'}(t)>_L = 16t^4 > 0$$

ve

$$<\gamma'(t) \wedge \gamma''(t), \gamma'(t) \wedge \gamma''(t)>_L = 0$$

dır.

Örnek 4.5. Örnek 3.3 de verilen $\mathbb{R}^3_1$ Minkowski 3−uzayında

$$\gamma(t) = (3t^2, t - 3t^3, t + 3t^3)$$

polinom eğrisi üçüncü dereceden null çift Minkowski Pisagor hodograf eğridir. Gerçekten de,

$$\sigma^2(t) = <\gamma^{'}(t), \gamma^{'}(t)>_L = 0$$

ve

$$<\gamma'(t) \wedge \gamma''(t), \gamma'(t) \wedge \gamma''(t)>_L = 0$$

dır.

Uyarı 4.6. $\mathbb{R}^3_1$ Minkowski 3−uzayında herhangi polinom yarı-null veya null eğriler bir çift Minkowski Pisagor hodograf eğridir.

İspat. $\gamma(t)$, $\mathbb{R}^3_1$ Minkowski 3−uzayında herhangi polinom null eğrisi olsun. O zaman

$$< \gamma'(t), \gamma'(t) >_L = 0$$

ve

$$< \gamma'(t), \gamma^{''}(t) >_L = 0$$

dir. O halde,

$$< \gamma'(t) \wedge \gamma^{''}(t), \gamma'(t) \wedge \gamma^{''}(t) >_L = < \gamma'(t), \gamma^{''}(t) >^2_L - < \gamma^{'}(t), \gamma^{'}(t) >_L < \gamma^{''}(t), \gamma^{''}(t) >_L$$

eşitliğinden

$$< \gamma'(t) \wedge \gamma^{''}(t), \gamma'(t) \wedge \gamma^{''}(t) >_L = 0$$

dır. Benzer şekilde, polinom yarı-null eğri de bir çift Minkowski Pisagor hodograf eğridir.

Şimdi, aşağıdaki Lemma ile timelike asli normalli spacelike çift Minkowski Pisagor hodograf eğrilerin rasyonel Frenet elemanlara sahip eğriler olup olmadığı kontrol edilecek.

Lemma 4.7. Timelike asli normalli regüler spacelike çift Minkowski Pisagor hodograf eğrisinin Frenet elemanları rasyonel vektörel fonksiyonlardan oluşur.

İspat. $\gamma(t)$, timelike asli normalli regüler spacelike çift Minkowski Pisagor hodograf eğri olsun. O zaman $\gamma(t)$ nın Frenet çatısı,

$$T = \frac{\gamma^{'}(t)}{\sigma(t)},$$

$$B = \frac{\gamma^{'}(t) \wedge \gamma^{''}(t)}{\sigma(t)\omega(t)}$$

ve

$$N = -B \wedge T = \frac{\sigma(t)\gamma^{''}(t) - \sigma^{'}(t)\gamma^{'}(t)}{\sigma(t)\omega(t)}$$

dir. Ayrıca eğrilik ve burulması,

$$\kappa = \frac{\omega(t)}{\sigma^2(t)},$$

$$\tau = \frac{< \gamma^{'}(t) \wedge \gamma^{''}(t), \gamma^{'''}(t) >_L}{\sigma^2(t)\omega^2(t)}$$

dir. Böylece, Frenet elemanlarının rasyonel vektörel fonksiyonlar olduğu açıktır.

Kosinka ve Jüttler (2006) den bilindiği üzere herhangi polinom spacelike veya null genel helisler Minkowski Pisagor hodograf eğrilerdir. Diğer taraftan, polinom genel helisler ile çift Minkowski Pisagor hodograf eğriler arasındaki ilişkiyi veren aşağıdaki önerme verilir.

Önerme 4.8. Polinom timelike asli normalli spacelike, yarı-null veya null genel helisler çift Minkowski Pisagor hodograf eğrilerdir.

İspat. γ, bir polinom yarı-null veya null genel helis olsun. Açıkca herhangi polinom yarı-null veya null eğri bir çift Minkowski Pisagor hodograf eğri olduğundan herhangi yarı-null veya null genel helis de çift Minkowski Pisagor hodograf eğridir.

γ, bir polinom timelike asli normalli spacelike genel helis ve u, γ nın eksenine paralel olan sabit bir vektör olsun. O zaman,

$\langle T, u \rangle_L = c$

ve

$\langle N, u \rangle_L = 0$

dir. Burada c reel bir sabittir. O halde,

$u = \langle T, u \rangle_L T + \langle B, u \rangle_L B$

şeklinde yazılabilir. u, T ve B nin gerdiği spacelike düzlemde olduğundan u spacelike bir vektördür. Böylece,

$\langle B, u \rangle_L = \sqrt{1 - c^2}$

dir. Diğer taraftan, regüler timelike asli normalli spacelike eğrisinin spacelike birim teğet vektör alanı,

$T = \frac{\gamma'(t)}{\left\| \gamma'(t) \right\|}$

ve spacelike binormal vektör alanı,

$B = \frac{\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)}{\left\| \gamma'(t) \wedge \gamma''(t) \right\|}$

dır. O halde bir önceki ifadede verilenler, sırasıyla

$\left\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \right\rangle_L = \frac{1}{c} \left\langle \gamma'(t), u \right\rangle_L$

ve

$\left\langle \gamma'(t) \wedge \gamma''(t), \gamma'(t) \wedge \gamma''(t) \right\rangle_L = \frac{1}{\sqrt{1-c^2}} \left\langle \gamma'(t) \wedge \gamma''(t), u \right\rangle_L$

ifadelerine eşittir. Hipotezden $\gamma(t)$ timelike asli normalli spacelike eğrisi bir polinom genel helis olduğundan hem $\langle \gamma(t), u \rangle_L$ hem de $\left\langle \gamma'(t) \wedge \gamma''(t), u \right\rangle_L$ ifadeleri polinomdur. O halde polinom timelike asli normalli spacelike genel helisler çift Minkowski Pisagor hodograf eğrilerdir.

Lemma 4.9. Eğer $\gamma(t)$ polinom timelike asli normalli spacelike uzay eğrisi bir genel helis ise $\left\langle \gamma'(t) \wedge \gamma''(t), \gamma'''(t) \right\rangle_L$ karma çarpımı $\omega(t)$ polinomunun küpü ile orantılı olmak zorundadır.

İspat. $\gamma(t)$ polinom timelike asli normalli spacelike uzay eğrisi bir genel helis olsun. O zaman,

$\frac{\tau(t)}{\kappa(t)} = \frac{\left\langle \gamma^{'}(t)\wedge\gamma^{''}(t),\gamma^{'''}(t)\right\rangle_L}{\omega^3(t)} = c$

dir. Burada, c bir reel sabittir. Böylece, $\left\langle \gamma^{'}(t)\wedge\gamma^{''}(t),\gamma^{'''}(t)\right\rangle_L$ karma çarpımı $\omega(t)$ polinomunun küpü ile orantılı olmak zorundadır.

Şimdi n. dereceden bir Minkowski Pisagor hodograf eğrisi için $\deg(\rho) = 2n-6$ dır. Karelerin farkı olan $\rho(t)$ için (4.1) eşitliği çok ilginçtir. Çünkü bu eşitlik ikinci Pisagor şartı olarak isimlendirilen (4.3) şartını sağlaması için

$$\begin{aligned}\omega^2(t) &= 4[\left(p_0(t)p_1'(t) - p_0'(t)p_1(t) + p_2'(t)p_3(t) - p_2(t)p_3'(t)\right)^2 \\ &\quad - \left(p_0'(t)p_3(t) - p_0(t)p_3'(t) + p_1'(t)p_2(t) - p_1(t)p_2'(t)\right)^2]\end{aligned} \tag{4.4}$$

eşitliğini sağlayan $2\left(p_0(t)p_1'(t) - p_0'(t)p_1(t) + p_2'(t)p_3(t) - p_2(t)p_3'(t)\right)$, $2\left(p_0'(t)p_3(t) - p_0(t)p_3'(t) + p_1'(t)p_2(t) - p_1(t)p_2'(t)\right)$, $\omega(t)$ Pisagor üçlüsünü (Kubota, 1972) içermek zorundadır. (4.4) denkleminin çözümleri, $obeb(a(t), b(t)) = sabit$ olmak üzere $h(t)$, $a(t)$, $b(t)$ polinomları için

$$\begin{aligned}&p_0(t)p_1'(t) - p_0'(t)p_1(t) + p_2'(t)p_3(t) - p_2(t)p_3'(t) = h(t)(a^2(t) + b^2(t)), \\ &p_0'(t)p_3(t) - p_0(t)p_3'(t) + p_1'(t)p_2(t) - p_1(t)p_2'(t) = 2h(t)a(t)b(t), \\ &\omega(t) = 2h(t)(a^2(t) - b^2(t))\end{aligned} \tag{4.5}$$

formundadır. Örneğin,

$$\begin{aligned}&obeb(p_0(t)p_1'(t) - p_0'(t)p_1(t) + p_2'(t)p_3(t) - p_2(t)p_3'(t), \\ &\qquad p_0'(t)p_3(t) - p_0(t)p_3'(t) + p_1'(t)p_2(t) - p_1(t)p_2'(t)) \quad = sabit\end{aligned}$$

olmak üzere $h(t) = 1$ alınabilir.

Önerme 4.10. Polinom timelike asli normalli spacelike, yarı-null veya null slant helisler çift Minkowski Pisagor hodograf eğrilerdir.

İspat. Herhangi polinom yarı-null veya null eğri bir çift Minkowski Pisagor hodograf eğri olduğundan herhangi yarı-null veya null slant helis de çift Minkowski Pisagor hodograf eğridir.

γ, bir polinom timelike asli normalli spacelike slant helis olsun. O zaman,

$N = -\frac{\gamma^{'}(t)\wedge\gamma^{''}(t)}{\left\|\gamma^{'}(t)\wedge\gamma^{''}(t)\right\|} \wedge \frac{\gamma^{'}(t)}{\left\|\gamma^{'}(t)\right\|}$

timelike asli normali için

$\langle N, u\rangle_L = c$

dir. Burada u sabit bir vektör ve c reel bir sabittir. O halde,

$$\left\langle (\gamma^{'}(t) \wedge \gamma^{''}(t)) \wedge \gamma^{'}(t), u\right\rangle_L = c\left\|\gamma^{'}(t)\right\| \left\|\gamma^{'}(t) \wedge \gamma^{''}(t)\right\| \tag{4.6}$$

şeklinde yazılabilir. $\gamma(t)$ timelike asli normalli spacelike eğrisi bir polinom eğri olduğundan (4.6) eşitliğinin sol tarafı polinomdur. Böylece hem $\left\langle \gamma^{'}(t), \gamma^{'}(t)\right\rangle_L$ hem de $\left\langle \gamma^{'}(t) \wedge \gamma^{''}(t), \gamma^{'}(t) \wedge \gamma^{''}(t)\right\rangle_L$ ifadeleri polinom yani polinom timelike asli normalli spacelike slant helisler çift Minkowski Pisagor hodograf eğrilerdir.

4.1. Çift Minkowski Pisagor Hodograf Eğrilerin Kuaterniyon Formu

$\gamma(t)$ uzaysal Minkowski Pisagor hodograf eğrisi $\mathcal{A}(t)$ kuaterniyon polinomuna göre

$\sigma(t) = \mathcal{A}(t)\mathcal{A}^*(t),$

parametrik hıza ve

$\gamma'(t) = \mathcal{A}(t)e_2\mathcal{A}^*(t),$

$\gamma''(t) = \mathcal{A}'(t)e_2\mathcal{A}^*(t) + \mathcal{A}(t)e_2\mathcal{A}^{'*}(t)$

eşitlikleri ile birinci ve ikinci türeve sahip olsun. $\gamma'(t)$ ve $\gamma''(t)$ nin e_1, e_2 ve e_3 bazları, sırasıyla e_{23}, e_{31} ve e_{12} bazları ile özdeş kabul edilerek saf vektör kuaterniyonlar olduğu göz önüne alınırsa $\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)$ vektörel çarpımı, $\gamma'(t)$ ve $\gamma''(t)$ nin kuaterniyon çarpımının vektör kısmıdır ve $\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)$, bu kuaterniyon çarpımı ile onun eşleniğinin farkının yarısı olarak ifade edilir. Gerçekten de,

$$\gamma'(t)\gamma''(t) = \langle \gamma'(t), \gamma''(t)\rangle_L + \gamma'(t) \wedge \gamma''(t)$$

ve

$$\gamma''^*(t)\gamma'^*(t) = \langle \gamma''(t), \gamma'(t)\rangle_L + \gamma''(t) \wedge \gamma'(t)$$

olmak üzere

$$2\gamma'(t) \wedge \gamma''(t) = \gamma'(t)\gamma''(t) - \gamma''^*(t)\gamma'^*(t)$$

dir. Elde edilen bu eşitlikte $\gamma'(t)$ ve $\gamma''(t)$ ifadeleri yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} 2\gamma'(t) \wedge \gamma''(t) &= (\mathcal{A}(t)e_2\mathcal{A}^*(t)) \left(\mathcal{A}'(t)e_2\mathcal{A}^*(t) + \mathcal{A}(t)e_2\mathcal{A}'^*(t)\right) \\ &\quad - \left(\mathcal{A}'(t)e_2\mathcal{A}^*(t) + \mathcal{A}(t)e_2\mathcal{A}'^*(t)\right)^* (\mathcal{A}(t)e_2\mathcal{A}^*(t))^* \end{aligned}$$

olur.

$\sigma\,(t) = \mathcal{A}(t)\mathcal{A}^*(t) = \mathcal{A}^*(t)\mathcal{A}(t)$

ve

$\sigma'\,(t) = \mathcal{A}'(t)\mathcal{A}^*(t) + \mathcal{A}(t)\mathcal{A}'^*(t) = \mathcal{A}'^*(t)\mathcal{A}(t) + \mathcal{A}^*(t)\mathcal{A}'(t)$

eşitlikleri göz önüne alınırsa

$$\gamma'(t) \wedge \gamma''(t) = \mathcal{A}(t)e_2\mathcal{A}^*(t)\mathcal{A}'(t)e_2\mathcal{A}^*(t) + \sigma(t)\mathcal{A}'(t)\mathcal{A}^*(t)$$

veya

$$\gamma'(t) \wedge \gamma''(t) = \mathcal{A}(t)\left(e_2\mathcal{A}^*(t)\mathcal{A}'(t)e_2 + \mathcal{A}^*(t)\mathcal{A}'(t)\right)\mathcal{A}^*(t)$$

şeklinde yazılır. Şimdi

$\mathcal{A}(t) = p_0(t) + p_1(t)e_{23} + p_2(t)e_{31} + p_3(t)e_{12}$

için $\mathcal{A}^*(t)\mathcal{A}'(t)$ ve $e_2\mathcal{A}^*(t)\mathcal{A}'(t)e_2$ çarpanları, sırasıyla

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^*(t)\mathcal{A}'(t) &= (p_0p_0' - p_1p_1' - p_2p_2' + p_3p_3') + (p_0p_1' - p_0'p_1 + p_2'p_3 - p_2p_3')\,e_{23} \\ &+ (p_0p_2' - p_0'p_2 + p_1p_3' - p_1'p_3)\,e_{31} + (p_0p_3' - p_0'p_3 + p_1p_2' - p_1'p_2)\,e_{12}\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}e_2\mathcal{A}^*(t)\mathcal{A}'(t)e_2 &= -(p_0p_0' - p_1p_1' - p_2p_2' + p_3p_3') + (p_0p_1' - p_0'p_1 + p_2'p_3 - p_2p_3')\,e_{23} \\ &- (p_0p_2' - p_0'p_2 + p_1p_3' - p_1'p_3)\,e_{31} + (p_0p_3' - p_0'p_3 + p_1p_2' - p_1'p_2)\,e_{12}\end{aligned}$$

şeklinde verilir. Bu iki eşitlik toplanırsa

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^*(t)\mathcal{A}'(t) + e_2\mathcal{A}^*(t)\mathcal{A}'(t)e_2 &= 2\,(p_0p_1' - p_0'p_1 + p_2'p_3 - p_2p_3')\,e_{23} \\ &+ 2\,(p_0p_3' - p_0'p_3 + p_1p_2' - p_1'p_2)\,e_{12}\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\mathcal{A}^*(t)\mathcal{A}'(t) + e_2\mathcal{A}^*(t)\mathcal{A}'(t)e_2$ nin yalnızca $\mathcal{A}^*\,(t)\,\mathcal{A}'\,(t)$ nin (e_{23}, e_{12}) kısmının iki katı olduğu görülür. O halde, (3.8) içinde görünen

$$\begin{aligned}f\,(t) &= p_0(t)p_1'(t) - p_0'(t)p_1(t) + p_2'(t)p_3(t) - p_2(t)p_3'(t), \\ g\,(t) &= p_0'(t)p_3(t) - p_0(t)p_3'(t) + p_1'(t)p_2(t) - p_1(t)p_2'(t)\end{aligned}$$

polinomlarına göre

$$\gamma'(t) \wedge \gamma''\,(t) = 2\mathcal{A}(t)\left[f\,(t)\,e_{23} - g\,(t)\,e_{12}\right]\mathcal{A}^*\,(t) \tag{4.7}$$

şeklinde yazılabilir. Bu çarpım bileşenlerine göre

$$
\begin{aligned}
\gamma'(t) \wedge \gamma''(t) &= 2[(p_0^2(t) - p_1^2(t) + p_2^2(t) - p_3^2(t))f(t) \\
&\quad -2(p_1(t)p_3(t) + p_0(t)p_2(t))g(t)]e_{23} \\
&\quad +2[(p_0(t)p_3(t) - p_1(t)p_2(t))f(t) \\
&\quad -2(p_2(t)p_3(t) - p_0(t)p_1(t))g(t)]e_{31} \\
&\quad +2[2(p_0(t)p_2(t) - p_1(t)p_3(t))f(t) \\
&\quad -(p_0^2(t) + p_1^2(t) + p_2^2(t) + p_3^2(t))g(t)]e_{12}
\end{aligned}
$$

şeklinde ifade edilir ve

$$\langle \gamma'(t) \wedge \gamma''(t), \gamma'(t) \wedge \gamma''(t) \rangle_L = 4\sigma^2(t)\left[f^2(t) - g^2(t)\right]$$

olduğu görülür. Böylece $\langle \gamma'(t) \wedge \gamma''(t), \gamma'(t) \wedge \gamma''(t) \rangle_L$, t ye bağlı bir polinomdur ancak ve ancak $f(t)$ ve $g(t)$ polinomları Pisagor üçlüsünün elemanlarıdır. O halde, $obeb(a(t), b(t)) = sabit$ olacak şekilde $a(t)$, $b(t)$, $h(t)$ polinomları için

$$
\begin{aligned}
f(t) &= h(t)[a^2(t) + b^2(t)], \\
g(t) &= 2h(t)a(t)b(t)
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

dir.

$\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)$ nin bileşenleri (4.3) eşitliğini sağladığından eğer $\gamma(t)$ bir çift Minkowski Pisagor hodograf eğrisi ise $\gamma(t)$, reel bir $h(t)$ polinomu ve bir $\mathcal{B}(t)$ kuaterniyon polinomu cinsinden (3.5) biçiminde ifade edilir. Eğer $\gamma(t)$, n. dereceye sahip ise

$$\deg(\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)) = 2n - 4 = \deg(h(t)) + 2\deg(\mathcal{B}(t))$$

olmalıdır.

Önerme 4.11. (4.4) ve (4.5) şartlarını sağlayan (3.3) deki bir kuaterniyon polinomu tarafından belirtilen $\gamma(t)$ çift Minkowski Pisagor Hodograf eğrisi için $\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)$ vektör çarpımı,

$$\mathcal{B}(t) = \mathcal{A}(t)\mathcal{C}(t)$$

ile verilen $\mathcal{B}(t)$ ile (3.5) kuaterniyon Pisagor formunda ifade edilebilir. Burada,

$$\mathcal{C}(t) = -b(t) + a(t)e_{23} - a(t)e_{31} + b(t)e_{12} \tag{4.9}$$

dir.

İspat. $\gamma(t)$, (4.4) ve (4.5) şartlarını sağlayan (3.3) deki bir kuaterniyon polinomu tarafından belirtilen çift Minkowski Pisagor Hodograf eğrisi olsun. O zaman, $\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)$ vektörel çarpımı (3.5) yani

$$\gamma'(t) \wedge \gamma''(t) = h(t)\mathcal{B}(t)e_2\mathcal{B}^*(t)$$

formunda ifade edilebilir. e_{23}, e_{31} ve e_{12} kuaterniyon temel elemanları yerine, sırasıyla e_1, e_2 ve e_3 baz vektörleri düşünülürse (4.7) ve (4.8) eşitliklerinden

$$\mathcal{B}(t)e_2\mathcal{B}^*(t) = 2\mathcal{A}(t)\left[(a^2(t)+b^2(t))e_1 - 2a(t)b(t)e_3\right]\mathcal{A}^*(t)$$

olur. Eşitliğin sol tarafı $\mathcal{A}^*(t)$ ve sağ tarafı $\mathcal{A}(t)$ ile çarpılırsa

$$\mathcal{Q}(t)e_2\mathcal{Q}^*(t) = 2\sigma^2(t)\left[(a^2(t)+b^2(t))e_1 - 2a(t)b(t)e_3\right]$$

elde edilir. Burada,

$$\mathcal{Q}(t) = \mathcal{A}^*(t)\mathcal{B}(t)$$

dir. Bu eşitliğin genel çözümü

$$\mathcal{Q} = \frac{\sigma\left[-\left(a^2(t)+b^2(t)\right)e_{23}+(a^2(t)-b^2(t))e_{31}-2a(t)b(t)e_{12}\right]}{\sqrt{a^2(t)-b^2(t)}}(\cosh\phi - \sinh\phi e_{31})$$

dir. Burada, ϕ serbest hiperbolik açı parametresidir. Böylece,

$$\mathcal{B} = \mathcal{A}\frac{\left[-\left(a^2(t)+b^2(t)\right)e_{23}+(a^2(t)-b^2(t))e_{31}-2a(t)b(t)e_{12}\right]}{\sqrt{a^2(t)-b^2(t)}}(\cosh\phi - \sinh\phi e_{31})$$

elde edilir ve $\mathcal{B}(t)$ nin bir polinom olmasını sağlamak için, ϕ nin

$$\sinh\phi(t) = \frac{b(t)}{\sqrt{a^2(t)-b^2(t)}}, \quad \cosh\phi(t) = \frac{-a(t)}{\sqrt{a^2(t)-b^2(t)}}$$

şeklinde tanımlanan t ye bağımlılığı seçilir. O halde yerine koyma ve sadeleştirme ile $\mathcal{B}(t)$ için (4.9) çözümü elde edilir.

4.2. Çift Minkowski Pisagor Hodograf Eğrilerin Hopf Benzeri Dönüşüm Formu

(3.9) eşitliği ile verilen Hopf dönüşüm formu $z_1(t) = p_0(t) + p_3(t)e_{12}$ ve $z_2(t) = p_1(t) + p_2(t)e_{12}$ karmaşık polinomlardan uzaysal Minkowski Pisagor hodograflar inşa eder. Benzer şekilde, $\alpha(t) = p_0 + p_2e_{31}$ ve $\beta(t) = p_1 - p_3e_{31}$ kuaterniyon polinomları olmak üzere

$$\begin{array}{llll} \widetilde{H} & : \mathbb{H}\times\mathbb{H} & \rightarrow & \mathbb{R}^3_1 \\ & (\alpha,\beta) & \rightarrow & \widetilde{H}(\alpha,\beta) = (Qu_{31}(\alpha^*\beta - \alpha\beta^*), \alpha\alpha^* + \beta\beta^*, \alpha\beta^* + \alpha^*\beta) \end{array}$$

şeklinde tanımlanan Hopf benzeri dönüşüm formu ile $\alpha(t) = p_0 + p_2e_{31}$ ve

$\beta(t) = p_1 - p_3 e_{31}$ kuaterniyon polinomları yardımıyla uzaysal Minkowski Pisagor hodografın bileşenleri

$$\begin{aligned} x'(t) &= Qu_{31}(\alpha^*(t)\beta(t) - \alpha(t)\beta^*(t)) \\ y'(t) &= \alpha(t)\alpha^*(t) + \beta(t)\beta^*(t), \\ z'(t) &= \alpha(t)\beta^*(t) + \alpha^*(t)\beta(t) \end{aligned} \tag{4.10}$$

şeklinde verilir. Burada,

$$Qu_{31}(\alpha^*(t)\beta(t) - \alpha(t)\beta^*(t)),$$

$\alpha^*(t)\beta(t) - \alpha(t)\beta^*(t)$ kuaterniyon polinomun e_{31} kısmının katsayısıdır. Ayrıca,

$$\begin{aligned} \alpha(t)\beta'(t) - \alpha'(t)\beta(t) &= (p_0(t)p_1'(t) - p_0'(t)p_1(t) \\ &\quad + p_2'(t)p_3(t) - p_2(t)p_3'(t)) \\ &\quad + (p_0'(t)p_3(t) - p_3'(t)p_0(t) \\ &\quad + p_1'(t)p_2(t) - p_1(t)p_2'(t))e_{31} \end{aligned} \tag{4.11}$$

eşitliği elde edilir. (3.8) ve (4.11) eşitlikleri karşılaştırılırsa, $\rho(t)$ polinomu $\alpha(t)$ ve $\beta(t)$ kuaterniyon polinomları ile

$$\rho(t) = 4\boldsymbol{N}(\alpha(t)\beta'(t) - \alpha'(t)\beta(t)) \tag{4.12}$$

şeklinde ifade edilebilir. Böylece, çift Minkowski Pisagor hodograf eğriler bir reel polinomun karesi olan $N(\alpha(t)\beta'(t) - \alpha'(t)\beta(t))$ için uzaysal spacelike Minkowski Pisagor hodograf eğrilerdir. Çift Minkowski Pisagor hodograf eğriler teorisindeki öneminden dolayı, $\alpha(t)\beta'(t) - \alpha'(t)\beta(t)$ ifadesine $\alpha(t)$, $\beta(t)$ nin orantı polinomu denir. (3.6), (4.11) ve (4.12) eşitlikleri kullanılarak orantı polinomuna göre spacelike uzaysal Minkowski Pisagor hodograf eğrilerin eğriliği

$$\kappa(t) = 2\frac{\sqrt{|\boldsymbol{N}(\alpha(t)\beta'(t) - \alpha'(t)\beta(t))|}}{\boldsymbol{N}(\alpha(t)) - \boldsymbol{N}(\beta(t))}$$

ile verilir.

Şimdi, Hopf benzeri dönüşüm gösterimindeki bir uzaysal Minkowski Pisagor hodograf eğrisinin bir çift Minkowski Pisagor hodograf eğri olması için (4.5) şartları bazı reel polinom $h(t)$ ve $obeb\,(a(t), b(t)) = sabit$ olan

$w(t) = a + be_{31}$ kuaterniyon polinomu için

$$\alpha(t)\beta'(t) - \alpha'(t)\beta(t) = h(t)w^2(t) \tag{4.13}$$

şeklinde ifade edilebilir öyle ki,

$$\deg\left(h(t)\right)+2\deg\left(\omega(t)\right)=2\deg\left(\alpha(t),\beta(t)\right)-2$$

dır.

Farouki vd. (2009) daki gözleme benzer şekilde (4.13) eşitliğinin sağ tarafının bir düzlemsel Minkowski Pisagor hodografı tanımladığı söylenebilir. Böylece, double Minkowski Pisagor hodograf eğriler ile düzlemsel Minkowski Pisagor hodograf eğriler arasındaki bağlantı aşağıdaki şekilde verilir.

Önerme 4.12. Hopf benzeri dönüşüm aracılığıyla $\alpha(t)$ ve $\beta(t)$ kuaterniyon polinomları tarafından belirtilen uzaysal Minkowski Pisagor hodograf eğrisi bir çift Minkowski Pisagor hodograf eğridir ancak ve ancak $\alpha(t)$ ve $\beta(t)$ kuaterniyon polinomlarının (4.11) orantı polinomu bir düzlemsel Minkowski Pisagor hodograf tanımlar.

Uzaysal Minkowski Pisagor hodograf eğrisinin hodografının bileşenleri $\alpha(t)=p_0(t)+p_2(t)e_{31}$ ve $\beta(t)=p_1(t)-p_3(t)e_{31}$ kuadratik polinomları cinsinden (4.10) eşitliğinde verilmişti. O halde (4.10) eşitliğinden

$$y^{'}(t)=\boldsymbol{N}\left(\alpha(t)\right)+\boldsymbol{N}\left(\beta(t)\right) \tag{4.14}$$

ve

$$z^{'}(t)-e_{31}x^{'}(t)=2\alpha(t)\beta^{*}(t) \tag{4.15}$$

şeklinde ifade edilebilir. (4.14) ve (4.15) eşitliklerinin diferansiyelleri alınırsa

$$y^{''}(t)=\alpha^{'}(t)\alpha^{*}(t)+\alpha(t)(\alpha^{*})^{'}(t)+\beta^{'}(t)\beta^{*}(t)+\beta(t)(\beta^{*})^{'}(t), \tag{4.16}$$

$$z^{''}(t)-e_{31}x^{''}(t)=2(\alpha^{'}(t)\beta^{*}(t)+\alpha(t)(\beta^{*})^{'}(t)) \tag{4.17}$$

eşitlikleri elde edilir. (4.14), (4.15), (4.16) ve (4.17)

$$x^{''}z^{'}-x^{'}z^{''}=\tfrac{1}{2}e_{31}\left[\left(z^{'}-x^{'}e_{31}\right)\left(z^{''}+e_{31}x^{''}\right)-\left(z^{'}+x^{'}e_{31}\right)\left(z^{''}-e_{31}x^{''}\right)\right],$$

$$\left(y^{'}z^{''}-y^{''}z^{'}\right)+e_{31}\left(x^{''}y^{'}-x^{'}y^{''}\right)=y^{'}\left(z^{''}+e_{31}x^{''}\right)-y^{''}\left(z^{'}+e_{31}x^{'}\right)$$

eşitliklerinde yerlerine yazılır ve

$$\eta(t)=\alpha(t)\beta'(t)-\alpha'(t)\beta(t) \tag{4.18}$$

eşitliği göz önüne alınırsa,

$$x''z' - x'z'' = 2e_{31}\left[\alpha^*(t)\beta^*(t)\eta(t) - \alpha(t)\beta(t)\eta^*(t)\right],$$

$$\left(y'z'' - y''z'\right) + e_{31}\left(x''y' - x'y''\right) = 2(\alpha^*(t)\alpha^*(t)\eta(t) - \beta(t)\beta(t)\eta^*(t))$$

elde edilir. Böylece, (4.3) eşitliğinden,

$$< \gamma'(t) \wedge \gamma''(t), \gamma'(t) \wedge \gamma''(t) >_L \ = 4(\boldsymbol{N}(\alpha(t) - \boldsymbol{N}(\beta(t))\boldsymbol{N}(\eta(t))$$

olduğu görülür. Diğer taraftan $\sigma^2(t) = \boldsymbol{N}(\alpha(t)) - \boldsymbol{N}(\beta(t))$ olduğundan $\rho(t) = 4\boldsymbol{N}(\eta(t))$ sonucu ortaya çıkar.

Uyarı 4.13. $\rho(t)$ nin (4.9) formundan ve çift Minkowski Pisagor hodograf eğri için (4.11) şartından çift Minkowski Pisagor hodograf eğriler için

$$\rho(t) = 4h^2(t)\boldsymbol{N}(w(t))^2$$

çıkarımı elde edilir. Böylece çift Minkowski Pisagor hodograf eğrileri için $\rho(t) = \omega^2(t)$ ile tanımlanan $\omega(t)$ polinomu

$$\omega(t) = 2h(t)\boldsymbol{N}(w(t))$$

şeklinde ifade edilir. O halde, Lemma 4.6 göz önüne alındığında helisler için $< \gamma'(t) \wedge \gamma''(t), \gamma'''(t) >_L$ karma çarpımı $(2h(t)N(w(t))^3$ ile orantılıdır.

Uyarı 4.14. Eğer $h(t)$ sabit olmayan bir polinom ise,

$$< \gamma'(t) \wedge \gamma''(t), \gamma'(t) \wedge \gamma''(t) >_L = 2\sigma(t)h(t)\boldsymbol{N}(w(t))$$

yazılabilmesi için tüm t ler için $h(t) \geq 0$ olmalıdır. Diğer taraftan, $h(t)$ negatif değilse (4.17) eşitliğinde $h(t)$ yerine onun mutlak değeri olan $|h(t)|$ yazılmalıdır. Uygulamada, ilkel düzlemsel Minkowski Pisagor hodograflarında olduğu gibi $h(t) = sabit$ seçimi tercih edilebilir.

Çift Minkowski Pisagor hodograf eğrilerin kuaterniyon ve Hopf benzeri dönüşüm formülasyonlarını birbirine bağlayan iki sonuca ulaşılır.

Sonuç 4.15 (*Orantı polinomların kuaterniyon formu*). $\alpha(t)$ ve $\beta(t)$ kuaterniyonlarının katsayıları

$$\alpha_\ell = p_{0_\ell} + p_{2_\ell}e_{31} \text{ ve } \beta_\ell = p_{1_\ell} - p_{3_\ell}e_{31},\ \ell = 0, 1, ..., m$$

olsun.

$$\mathcal{A} = p_0 + p_1e_{23} + p_2e_{31} + p_3e_{12} = p_0(t) + p_2(t)e_{31} + e_{23}(p_1 - p_3e_{31}) = \alpha + e_{23}\beta$$

ile tanımlanan (3.3) kuaterniyon polinomlarının karşılık geldiği Bernstein katsayıları

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_\ell &= \alpha_\ell + e_{23}\beta_\ell = \left(p_{0_\ell} + p_{2_\ell}e_{31}\right) + e_{23}\left(p_{1_\ell} - p_{3_\ell}e_{31}\right)\\ &= p_{0_\ell}(t) + p_{1_\ell}e_{23} + p_{2_\ell}(t)e_{31} + p_{3_\ell}(t)e_{12}\end{aligned}$$

şeklindedir. O halde,

$$e_{12}\left(\alpha_\kappa\beta_\ell - \alpha_\ell\beta_\kappa\right) = \tfrac{1}{2}\left(\mathcal{A}_\ell^*\mathcal{A}_k - \mathcal{A}_k^*\mathcal{A}_\ell\right) \wedge e_{31}$$

şeklinde yazılabilir. Böylece, Hopf benzeri dönüşüm modelindeki $\alpha(t)\beta'(t) - \alpha'(t)\beta(t)$ orantılı polinomu,

$$e_{12}\left[\alpha(t)\beta'(t) - \alpha'(t)\beta(t)\right] = \tfrac{1}{2}\left[\mathcal{A}'^*(t)\mathcal{A}(t) - \mathcal{A}^*(t)\mathcal{A}'(t)\right] \wedge e_{31}$$

olacak şekilde $\mathcal{A}(t)$ kuaterniyon polinomu ile ilişkilidir. Burada,

$$\tfrac{1}{2}\left[\mathcal{A}'^*(t)\mathcal{A}(t) - \mathcal{A}^*(t)\mathcal{A}'(t)\right] = vekt\left(\mathcal{A}^{*'}(t)\mathcal{A}(t)\right) \qquad (4.19)$$

sırf bir vektör kuaterniyondur ve (4.19) eşitliği $\mathcal{A}^{*'}(t)\mathcal{A}(t)$ nin e_{23} ve e_{12} katsayıları ile $\alpha(t)\beta'(t) - \alpha'(t)\beta(t)$ nin reel ve e_{31} katsayılarını özdeşleştirir.

Sonuç 4.16 (*Çift Minkowski Pisagor hodograf şartının kuaterniyon formu*).

$w(t) = a + be_{31}$

bir kuaterniyon polinom ve Önerme 4.8 de tanıtılan

$\mathcal{C}(t) = -b(t) + a(t)e_{23} - a(t)e_{31} + b(t)e_{12}$

kuaterniyon polinomu için

$$\tfrac{1}{2}\mathcal{C}(t)e_2\mathcal{C}^*(t) = \left(a^2(t) + b^2(t)\right)e_1 - 2a(t)b(t)e_3 = w^2(t)e_1$$

dır. O halde, (4.18) eşitliği kullanılırsa Hopf benzeri dönüşüm modelindeki (4.11) çift Minkowski Pisagor hodograf eğri şartı kuaterniyon formu olarak

$$\begin{aligned}\left(\tfrac{1}{2}\left[\mathcal{A}^*(t)\mathcal{A}'(t) - \mathcal{A}'^*(t)\mathcal{A}(t) \wedge e_{31}\right]e_1\right) &= e_{12}\left(\alpha(t)\beta'(t) - \alpha'(t)\beta(t)\right)e_1\\ &= h(t)e_{12}w^2(t)e_1 = \tfrac{1}{2}h(t)e_{12}\mathcal{C}(t)e_2\mathcal{C}^*(t)\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Bu ilişki,

$$\left[\mathcal{A}^*(t)\mathcal{A}'(t) - \mathcal{A}'^*(t)\mathcal{A}(t)\right] \wedge e_{31} = h(t)\mathcal{D}(t)e_2\mathcal{D}^*(t) \qquad (4.20)$$

eşitliği ile ifade edilebilir. Burada,

$$\mathcal{D}(t) = e_{12}\mathcal{C}(t) = -b(t) + a(t)e_{23} + a(t)e_{31} - b(t)e_{12} \qquad (4.21)$$

dir. Böylece, bir $\mathcal{A}(t)$ kuaterniyon polinomu ile (3.2) eşitliğinde belirtilen bir uzaysal Minkowski Pisagor hodograf eğrisinin bir çift Minkowski Pisagor hodograf eğri olması için gerek ve yeter şart (4.21) eşitliği ile verilen bazı $\mathcal{D}(t)$ kuaterniyon polinomunun (4.20) eşitliğini sağlamasıdır.

4.3. Beşinci Dereceden Polinom Genel Helislerin Karakterizasyonu

Beşinci dereceden polinom çift Minkowski Pisagor hodograf eğriler göz önüne alınırsa $\alpha(t) = p_0 + p_2 e_{31}$ ve $\beta(t) = p_1 - p_3 e_{31}$ fonksiyonları ikinci dereceden polinomlardır ve (4.13) eşitliğinin sol tarafındaki terim ikinci dereceden polinomdur. Böylece $h(t)$, $w(t)$ çifti için iki durum söz konusudur. Birincisi, $h(t)$ sabit ve $w(t)$ lineer polinomlar. İkincisi, $h(t)$ ikinci dereceden fonksiyon ve $w(t)$ bir sabit fonksiyondur. Böylece her iki durumda beşinci dereceden polinom helislerin iki sınıfı olan genel helisler ve monoton helislere karşılık gelir.

Şimdi birinci yani $h(t)$ sabit ve $w(t)$ lineer polinom durumu incelenecek ve genelliği bozmaksızın $h(t) = 1$ kabul edilecek.

Lemma 4.16. Monoton beşinci dereceden polinom spacelike helisler $h\,(t)$ sabiti ile karakterize edilir.

İspat. $\alpha\,(t) = p_0 + p_2 e_{31}$ ve $\beta\,(t) = p_1 - p_3 e_{31}$ derecesi iki veya daha küçük kuaterniyon polinomlar olsun. Birinci olasılık, $\alpha(t)$ ve $\beta(t)$ polinomlarının a, b, $r_i \in \mathbb{H}$ için

$\alpha(t) = a(t - r_1)(t - r_2)$, $\beta(t) = b(t - r_3)(t - r_4)$

eşitlikleri ile verilmesidir. O halde,

$$\begin{aligned} \alpha(t)\beta'(t) - \alpha'(t)\beta(t) &= ab[(-r_1 - r_2 + r_3 + r_4)t^2 + 2(r_1 r_2 - r_3 r_4)t \\ &\quad + (r_1 + r_2)r_3 r_4 - (r_3 + r_4)r_1 r_2] \end{aligned} \tag{4.22}$$

elde edilir. (4.13) eşitliği ve $h\,(t) = 1$ olduğundan (4.22) ifadesi

$w(t) = mt + n$ şeklinde birinci dereceden bir kuaterniyon polinomun karesidir ancak ve ancak

$$\begin{aligned} m^2 &= ab(-r_1 - r_2 + r_3 + r_4) \\ mn &= ab(r_1 r_2 - r_3 r_4) \\ n^2 &= ab((r_1 + r_2)r_3 r_4 - (r_3 + r_4)\, r_1 r_2) \end{aligned} \tag{4.23}$$

dir. (4.23) eşitliğinin ilk iki denkleminden

$m = \pm\sqrt{ab}\sqrt{-r_1 - r_2 + r_3 + r_4}, \qquad n = \frac{ab(r_1 r_2 - r_3 r_4)}{m}$

elde edilir. Elde edilen eşitlikler (4.23) un son denkleminde yerine yazılırsa

$$-r_1 r_2 r_3 - r_1 r_2 r_4 + r_1 r_3 r_4 + r_2 r_3 r_4 = \frac{r_1^2 r_2^2 - 2r_1 r_2 r_3 r_4 + r_3^2 r_4^2}{-r_1 - r_2 + r_3 + r_4} \tag{4.24}$$

eşitliği bulunur. (4.24) eşitliği

$$(r_1 - r_3)(r_2 - r_3)(r_1 - r_4)(r_4 - r_2) = 0$$

şeklinde yeniden yazılır. Böylece,

$$\alpha(t)\beta'(t) - \alpha'(t)\beta(t) = w(t)^2$$

dir ancak ve ancak $\alpha(t)$ ve $\beta(t)$ ortak bir lineer polinom çarpana sahiptir. Bu durumda $obeb\left(\alpha(t), \beta(t)\right) \neq sabit$ dır ki bu monoton spacelike helisleri karakterize eder. Gerçekten de, (4.10) eşitliğinden x', y', z' bileşenleri

$$\begin{aligned} x'(t) &= (-p_2 + p_0 e_{31})(p_1 - p_3 e_{31}) - (p_0 + p_2 e_{31})(p_3 + p_1 e_{31}) \\ y'(t) &= (p_0 + p_2 e_{31})(p_0 - p_2 e_{31}) + (p_1 - p_3 e_{31})(p_1 + p_3 e_{31}), \\ z'(t) &= (p_0 + p_2 e_{31})(p_1 + p_3 e_{31}) + (p_0 - p_2 e_{31})(p_1 - p_3 e_{31}) \end{aligned}$$

olup

$$obeb\left(x', y', z'\right) = \left|obeb\left(p_0 + p_2 e_{31}, p_1 - p_3 e_{31}\right)\right|^2 = |obeb(\alpha, \beta)|^2$$

dir. İkinci olasılık, $\alpha(t)$ ve $\beta(t)$ polinomlarının $a, b, r_i \in \mathbb{H}$ için

$\alpha(t) = a(t - r_1)(t - r_2),$

$\beta(t) = b(t - r_3)$

eşitlikleri ile verilmesidir. Benzer analiz $r_1 = r_3$ veya $r_2 = r_3$ olduğunu gösterir ve aynı sonuç elde edilir.

Son olasılık, $\alpha(t)$ ve $\beta(t)$ polinomlarının $a, b, r_i \in \mathbb{H}$ için

$\alpha(t) = a(t - r_1)(t - r_2),$

$\beta(t) = b$

eşitlikleri ile verilmesidir. O halde, $obeb\left(\alpha(t), \beta(t)\right) = sabit$ olacağından bu durum çelişkiye yol açar.

$w(t)$ nin sabit olduğu durum için kuaterniyonlara dayalı beşinci dereceden polinom spacelike Minkowski Pisagor hodografın tanımı kullanılacak. Bir uzaysal beşinci dereceden polinom spacelike genel helis,

$\mathcal{A}_0 = a + a_x e_{23} + a_y e_{31} + a_z e_{12}$,

$\mathcal{A}_1 = b + b_x e_{23} + b_y e_{31} + b_z e_{12}$,

$\mathcal{A}_2 = c + c_x e_{23} + c_y e_{31} + c_z e_{12}$,

kuaterniyon bileşenleri ile

$\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1 t + \mathcal{A}_2 t^2$

şeklinde bir ikinci dereceden polinom ile tanımlanır. p_0, p_1, p_2, p_3 fonksiyonlarına göre

$p_0(t) = a + bt + ct^2$,

$p_1(t) = a_x + b_x t + c_x t^2$,

$p_2(t) = a_y + b_y t + c_y t^2$,

$p_3(t) = a_z + b_z t + c_z t^2$

dir.

Farouki vd. (2004) tarafından beşinci dereceden polinom Pisagor hodograf helis için verilen Önerme 1 ve Beltran ve Monterde (2007) tarafından verilen çift Pisagor hodograf eğriler için verilen Lemma 3, benzer şekilde timelike asli normalli spacelike çift Minkowski Pisagor hodograf eğriler için aşağıdaki şekilde verilir.

Önerme 4.17. (3.2) eşitliği ile verilen Minkowski Pisagor hodografın bir beşinci dereceden polinom Minkowski Pisagor hodograf genel helis vermesi için yeterli bir şart

$\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}_0(1-t)^2 + 2\mathcal{A}_1(1-t)t + \mathcal{A}_2 t^2$

eşitliğindeki $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ kuaterniyonlarının lineer bağımlı olmasıdır.

Lemma 4.18. $\alpha(t) = p_0 + p_2 e_{31}$ ve $\beta(t) = p_1 - p_3 e_{31}$, $i = 0, 1, 2$ için $\{\mathcal{A}_i\}$ kuaterniyonları tarafından tanımlanan beşinci dereceden polinom timelike asli normalli spacelike çift Minkowski Pisagor hodograf eğrisinin ikinci dereceden polinomları olsun. Eğer (4.13) eşitliğindeki $w(t)$ sabit ise uygun c_0 ve c_2 reel sayıları için $\mathcal{A}_1 = c_0\mathcal{A}_0 + c_2\mathcal{A}_2$ dir.

Uyarı 4.19. Hesaplamaları daha kolay olduğu için burada Bernstein bazı yerine polinomların olağan bazı kullanıldı. Lemma 4.18 nin ifadesinde yalnızca bir baz değişikliği nedeniyle Bézier kuaterniyon katsayıları için doğru kalır.

İspat. $h(t) = m_0 + m_1 + m_2t^2$ ve $w(t) = \cosh\phi + \sinh\phi e_{31}$ olduğu kabul edilsin. Burada m_0, m_1, m_2, $\phi \in \mathbb{R}$ dir ve genelliği bozmaksızın $|w| = 1$ olsun.

(4.13) eşitliği kuaterniyonlar yardımı ile yeniden hesaplanırsa, eşitliğin sol tarafındaki ifadenin reel kısmı

$$\begin{aligned} p_0(t)p_1'(t) - p_0'(t)p_1(t) + p_2'(t)p_3(t) - p_2(t)p_3'(t) &= (a_xb_y + ab_z - a_zb - a_yb_x) \\ &\quad +2\,(a_xc_y + ac_z - a_yc_x - a_zc)\,t \\ &\quad +(-b_zc - b_yc_x + b_xc_y + bc_z)\,t^2 \end{aligned}$$

ve e_{31} kısmının katsayısı

$$\begin{aligned} p_0'(t)p_3(t) - p_3'(t)p_0(t) + p_1'(t)p_2(t) - p_1(t)p_2'(t) &= (a_yb - a_zb_x - ab_y + a_xb_z) \\ &\quad +2\,(a_yc - a_zc_x - ac_y + a_xc_z)\,t \\ &\quad +(b_yc - b_zc_x - bc_y + b_xc_z)\,t^2 \end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Benzer şekilde eşitliğin sağ tarafının reel kısmı,

$(m_0 + m_1 + m_2t^2)\cosh 2\theta$

ve e_{31} kısmının katsayısı

$(m_0 + m_1 + m_2t^2)\sinh 2\theta$

şeklinde yazılır.

Böylece, (4.13) koşulu altı denklemden oluşan bir sisteme çevrilir. t nin katsayılarını eşitleyerek,

$$\theta = \tfrac{1}{2}\tan h^{-1}\left(\tfrac{a_yc + a_zc_x - ac_y + a_xc_z}{a_xc_y + ac_z - a_yc_x - a_zc}\right),$$

ve

$$m_1 = 2\sqrt{(-a_zc - a_yc_x + a_xc_y + a_zc)^2 - (a_yc - a_zc_x - ac_y + a_xc_z)^2},$$

elde edilir. Bu değerleri diğer dört denklemde yerine yazılırsa

$$m_2 = \sqrt{(-b_z c - b_y c_x + b_x c_y + b c_z)^2 - (b_y c - b_z c_x - b c_y + b_x c_z)^2}$$

ve

$$m_0 = \sqrt{(a_x b_y + a b_z - a_z b - a_y b_x)^2 - (a_y b - a_z b_x - a b_y + a_x b_z)^2}$$

eşitlikleri elde edilir. O halde,

$\mathcal{A}_1 = \frac{2m_0}{m_1}\mathcal{A}_0 + \frac{2m_2}{m_1}\mathcal{A}_2$

olduğu görülür.

Teorem 4.20. Beşinci dereceden polinom timelike asli normalli spacelike eğri bir genel helisdir ancak ve ancak eğri bir çift Minkowski Pisagor hodograf eğridir.

İspat. Önerme 4.7 de polinom timelike asli normalli spacelike genel helislerin çift Minkowski Pisagor hodograf eğriler olduğu kanıtlandı.

Tersine, eğer $\left\langle \gamma'(t) \wedge \gamma''(t), \gamma'(t) \wedge \gamma''(t) \right\rangle$ bir polinom ise (4.13) eşitliğine sahip olunur. Beşinci dereceden polinom durumunda, yalnızca $h(t) = sabit$ veya $w(t) = sabit$ olasılıkları söz konusudur. Eğer $h(t) = sabit$ ise Lemma 4.16 dan eğri monoton helisdir. Eğer $w(t) = sabit$ ise Lemma 4.18 den eğriyi tanımlayan kuaterniyonlar lineer bağımlıdır ve Önerme 4.17 den de görüleceği üzere eğri bir genel helistir.

5. KAYNAKLAR

Ali, A.T., Mahmoud, S.R., 2014. Position Vector of Spacelike Slant Helices in Minkowski 3−Space. Honam Mathematical Journal, 36(2), 233 − 251.

Barros M., Ferrandez A., Lucas P., Moreno M.A., 2001. General Helices in the three-dimensional Lorentzian Space Forms. The Rocky Mountain Journal of Mathematics, 31(2), 373 − 388.

Beltran, J.V., Monterde, J., 2007. A Characterization of Quintic Helices. Journal of Computational and Applied Mathematics, 206, 116 − 121.

Choi, H.I., Han, Ch.Y., Moon, H.P., Roh, K.H., Wee, N.S., 1999. Medial Axis Transform, and Offset Curves by Minkowski Pythagorean Hodograph Curves. Computer Aided Design, 31, 59 − 72.

Choi, H.I., Lee, D.S., Moon, H.P. 2002. Clifford Algebra, Spin Representation, and Rational Parametrization of Curves and Surfaces. Advances in Computational Mathematics, 17, 5 − 48.

Degen, W.F.L., 2004. Exploiting Curvatures to Compute the Medial Axis for Domains with Smooth Boundary. Computer Aided Geometric Design, 21, 641 − 660.

Deshmukh, S., Alghanemi, A., Farouki, R.T., 2019. Space Curves Defined by Curvature–Torsion Relations and Associated Helices. Filomat, 33(15), 4951 − 4966.

Duggal K.L., Bejancu A., 1996. Lightlike Submanifold of Semi-Riemannian Manifolds and Applications. Kluwer Academic Publishers Group, 308p. Dordrecht.

Farouki, R.T., Sakkalis T., 1990. Pythagorean hodographs. IBM Journal of Research and Development, 34, 736 − 752.

Farouki, R.T., Sakkalis T., 1994. Pythagorean-hodographs Space Curves. Advances in Computational Mathematics, 2, 41 − 66.

Farouki, R.T., 2002. Pythagorean-Hodograph Curves, in: G. Farin, J. Hoschek, M.S. Kim (Eds.), Handbook of Computer Aided Geometric Design, North-Holland, Amsterdam.

Farouki, R.T., Han, Ch.Y., Manni, C., Sestini, A., 2004. Characterization and Construction of Helical Polynomial Space Curves. Journal of Computation Applied Mathematics, 162, $365-392$.

Farouki, R.T., Giannelli, C., Sestini, A., 2009. Helical Polynomial Curves and Double Pythagorean Hodographs I. Quaternion and Hopf Map Representations. Journal of Symbolic Computation, 44, $161-179$.

Ferrandez, A., Gimenez, A., Lucas, P., 2001. Null Helices in Lorentzian Space Forms. International Journal of Modern Physics A, 16, $4845-4863$.

Ferrandez, A., Gimenez, A., Lucas, P., 2002. Null Generalized Helices in Lorentz-Minkowski Spaces. Journal of Physics A, 35, $8243-8251$.

Gerald, F., 2002. Curves and Surfaces for CAGD. Academic Press, 500p, California.

Gravesen, J., 2002. Differential Geometry and Design of Shape and Motion, Lectures Notes. Department of Mathematics Technical University of Denmark 154p., Denmark.

Inoguchi J-I., 1998. Timelike Surfaces of Constant Mean Curvature in Minkowski $3-$Space. Tokyo Jornal of Mathematics, 21(1), $141-152$.

Inoguchi J-I., Lee S., 2008. Null Curves in Minkowski $3-$Space. International Electronic Journal of Geometry, 1(2), $40-83$.

Kosinka, J., Jüttler, B., 2006. Cubic Helices in Minkowski Space. Sitzungsberichte Abt. II, 215, $13-35$.

Kosinka, J., Jüttler, B., 2006. G1 Hermite Interpolation by Minkowski Pythagorean Hodograph Cubics. Computer Aided Geometric Design, 23(5), $401-418$.

Kosinka, J., Jüttler, B., 2009. C1 Hermite Interpolation by Pythagorean

Hodograph Quintics in Minkowski Space. Advances in Computational Mathematics, 30, $123-140$.

Kubota, K. K., 1972. Pythagorean Triples in Unique Factorization Domains The American Mathematical Monthly, 79(5), $503-505$.

Lopez R., 2014. Differential Geometry of Curves and Surfaces in Lorentz-Minkowski Space. International Electronic Journal of Geometry, 7(1), $44-107$.

Moon, H. P., 1999. Minkowski Pythagorean Hodographs. Computer Aided Geometric Design, 16(8), $739-753$.

O'Neill B., 1983. Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity, Academic Press, 468p, New York.

Pottmann, H., Peternell, M., 1998. Applications of Laguerre geometry in CAGD, Computer Aided Geometric Design, 15, $165-186$.

Ratcliffe, J.G., 2006. Foundations of Hyperbolic Manifolds, Second Edition. Springer Science+Business Media, LLC, N.Y., USA.

Walrave, J. 1995. Curves and Surfaces in Minkowski Space. K. U. Leuven, Faculty of Science Ph.D. Thesis, 138p, Leuven

Wang Z., Pei D., 2011. Null Darboux Developable and Pseudo-Spherical Darboux Image of Null Cartan Curve in Minkowski $3-$Space. Hokkaido Mathematical Journal 40(2), $219-240$.