

ANKARA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

PİSAGOR BULANIK KÜMELER İÇİN BENZERLİK ÖLÇÜLERİ VE  
BAZI KARAR VERME UYGULAMALARI

Büşra AYDOĞAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA  
2022

Her hakkı saklıdır

# ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

## PİSAGOR BULANIK KÜMELER İÇİN BENZERLİK ÖLÇÜLERİ VE BAZI KARAR VERME UYGULAMALARI

Büşra AYDOĞAN

Ankara Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Şeyhmus YARDIMCI

Bu tez yedi bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, bulanık küme, sezgisel bulanık küme gibi bazı temel kavramlara yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, teze adını veren Pisagor bulanık küme kavramı detaylı bir şekilde tanıtılmıştır. Pisagor üyelik dereceleri ve Pisagor bulanık kümeler arasındaki bazı küme işlemlerine yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde, ilk olarak Pisagor bulanık kümeler için bazı benzerlik ölçüleri tanıtılmış ve sonrasında bazı kosinüs ve kotanjant tabanlı benzerlik ölçüleri incelenmiştir.

Beşinci bölümde, Pisagor bulanık nokta kavramı tanıtılıp bazı özellikleri incelenmiştir.

Altıncı bölümde, Pisagor bulanık kümeler ile bazı karar verme uygulamaları yapılmıştır. Aslında bir örüntü tanıma problemi incelenip yorumlanmıştır.

Son kısımda ise tezin genel bir değerlendirilmesi yapılmıştır.

**Haziran 2022, 33 sayfa**

**Anahtar Kelimeler:** Pisagor bulanık kümeler, benzerlik ölçüleri, çok kriterli karar verme.

# ABSTRACT

Master Thesis

## SIMILARITY MEASURES FOR PYTHAGOREAN FUZZY SETS AND SOME DECISION MAKING APPLICATIONS

Büşra AYDOĞAN

Ankara University  
Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Department of Mathematics

Supervisor: Prof.Dr. Şeyhmus YARDIMCI

This thesis consists of seven chapters. The first chapter is devoted to the introduction.

In Chapter 2, some basic concepts such as fuzzy set and intuitionistic fuzzy set are given.

In Chapter 3, the concept of the Pythagorean fuzzy set, which gives its name to the thesis, is explained in detail. The Pythagorean fuzzy membership degrees and some set theoretic operations between Pythagorean fuzzy sets are given.

In Chapter 4, some similarity measures are recalled for Pythagorean fuzzy sets, and then some cosine and cotangent based similarity measures are examined.

In Chapter 5, the concept of Pythagorean fuzzy point is recalled and some properties are studied.

In Chapter 6, some decision making applications with Pythagorean fuzzy sets are discussed. Indeed, a pattern recognition problem is analyzed and interpreted.

In the last chapter, a general evaluation of the thesis is made.

**June 2022, 33 pages**

**Key Words:** Pythagorean fuzzy sets, Similarity Measure, Decision Making.

## TEŞEKKÜR

Bu alıőmanın gerekleőmesinde, her zaman yanımda olan, bilgilerini benimle paylaőıp beni destekleyen saygıdeğer danıőmanım Prof. Dr. Şeyhmus YARDIMCI (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı) 'ya , tez süresi boyunca birlikte çalıőtıđım, bana yol gösteren, çalıőmalarıma katkı sağlayan saygıdeğer hocalarım Prof. Dr. Murat OLGUN (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı) 'a ve Doç. Dr. Mehmet ÜNVER (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı) 'e sonsuz saygı, sevgi ve teőekkürlerimi sunarım. Çalıőmalarımda ve hayatımda her zaman bana yardımcı olan saygıdeğer hocam Mustafa Gülfirat (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'a ve sevgili arkadaőım Ebru Yanık'a teşekkür ederim.

Lisans ve yüksek lisans süresince beni her zaman destekleyip yanımda olan anneme ve aileme teşekkür ederim.

Bu tez " TÜBİTAK 121F007 nolu Araőtırma Projesi" tarafından desteklenmiőtir.

Büşra AYDOĞAN  
Ankara, Haziran 2022

## İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI	
ETİK . . . . .	i
ÖZET . . . . .	ii
ABSTRACT . . . . .	iii
TEŞEKKÜR . . . . .	iv
SİMGELER DİZİNİ . . . . .	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ . . . . .	vii
ÇİZELGELER DİZİNİ . . . . .	viii
1. GİRİŞ . . . . .	1
2. TEMEL KAVRAMLAR . . . . .	2
2.1 Bulanık Küme Teorisi . . . . .	2
2.1.1 Bulanık Küme . . . . .	2
2.2 Bulanık Kümeler Üzerinde Küme İşlemleri . . . . .	3
2.3 Sezgisel Bulanık Kümeler Üzerinde Küme İşlemleri . . . . .	6
2.4 Çok Kriterli Karar Verme . . . . .	7
2.5 Örüntü Tanıma ve Medical Tanı . . . . .	8
3. PİSAGOR BULANIK KÜMELER . . . . .	9
3.1 Pisagor Üyelik Dereceleri . . . . .	9
3.2 Pisagor Bulanık Kümelerde Bazı Küme İşlemleri . . . . .	11
4. PİSAGOR BULANIK KÜMELER İÇİN BAZI BENZERLİK ÖLÇÜLERİ . . . . .	13
4.1 Pisagor Bulanık Kümeler için Kosinüs Fonksiyonu Tabanlı Benzerlik Ölçüleri . . . . .	16
4.2 Pisagor Bulanık Kümeler için Kotanjant Fonksiyonu Tabanlı Benzerlik Ölçüsü . . . . .	19
5. PİSAGOR BULANIK NOKTALAR . . . . .	21
5.1 Pisagor Bulanık için Üstel Benzerlik Ölçüsü . . . . .	23
6. PİSAGOR BULANIK KÜMELER İÇİN BAZI KARAR VERME UYGULAMALARI . . . . .	26
6.1 Örüntü Tanıma . . . . .	26
6.2 Medikal Tanı . . . . .	26
7. TARTIŞMA VE SONUÇ . . . . .	30
KAYNAKLAR . . . . .	31
ÖZGEÇMİŞ . . . . .	33

## SİMGELER DİZİNİ

<i>IFS</i>	Sezgisel bulanık kümeler
<i>PFS</i>	Pisagor bulanık kümeler
<b>N</b>	Pozitif tam sayılar kümesi



## ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1	.....	11
-----------	-------	----



## ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 5.1	$WPFC^1$ ve $S_0$ benzerlik ölçülerine göre benzerlik . . . . .	25
Çizelge 6.1	$A_i$ ve $A$ arasındaki benzerlik ölçüsü . . . . .	27
Çizelge 6.2	$A_i$ ve $A$ arasındaki ağırlıklı benzerlik ölçüsü . . . . .	28
Çizelge 6.3	$D_i$ ve $H$ arasındaki benzerlik ölçüsü . . . . .	29
Çizelge 6.4	$D_i$ ve $H$ arasındaki ağırlıklı benzerlik ölçüsü . . . . .	29



## 1. GİRİŞ

Bulanık küme teorisi, 1965 yılında A. Zadeh tarafından "Bir nesne kümenin ya elemanıdır ya da değildir." şeklindeki ikili mantık sistemini genelleştirmek için geliştirilmiştir. Bulanık küme, klasik kümelerdeki karakteristik fonksiyonun bir genişlemesidir ve bir ait olma fonksiyonu ile karakterize edilir. Burdaki ait olma fonksiyonu  $[0, 1]$  aralığında değer alır. Bulanık kümeler tanımlandıktan sonra Krassimir T. Atanassov tarafından 1984 yılında sezgisel bulanık kümeler, bulanık kümelerin bir genelleştirilmesi olarak tanımlanmıştır. Sezgisel bulanık kümeler, negatif olmayan ait olma fonksiyonu ile ait olmama fonksiyonu ile birlikte tanımlanır ve toplamları  $[0, 1]$  aralığındadır.

Pisagor bulanık kümeler ise sezgisel bulanık kümelerin bir genelleştirilmesidir. Sezgisel bulanık kümeler, aitlik dereceleri (ait olma ve ait olmama) toplamı  $[0, 1]$  aralığında iken Pisagor bulanık kümelerde aitlik derecelerinin (ait olma ve ait olmama) kareleri toplamı  $[0, 1]$  aralığına düşer. Bu ise bize Pisagor bulanık kümeler ailesinin sezgisel bulanık kümeler ailesini kapsadığını ve Pisagor aitlik dereceleri analitik düzlemin I. bölgesinde bir noktaya karşılık geldiğini gösterir. Pisagor bulanık kümeler, pek çok teorik ve uygulamalı çalışma alanına sahiptir (Garg 2016), (Khan v.d. 2017), (Lu v.d. 2017), (Peng v.d. 2015), (Zeng v.d. 2016), (Zhang v.d. 2014), (Wei 2016), (Wei v.d. 2018). Bunlardan biri de çok kriterli karar vermedir. Çok kriterli karar verme, birden fazla çelişen kritere göre, alternatiflerin sıralanması sürecidir. Burada kriterler üzerinden en iyi alternatif belirlenir. Çok kriterli karar verme personel seçimi, medikal tanı, örüntü tanıma ve bunun gibi bir çok alanda kullanılmaktadır. Karar verme süreçlerinde benzerlik ölçülerinden yararlanılabilir. Bir benzerlik ölçüsü, iki matematiksel nesne arasındaki benzerlik derecesinin belirlenmesinde önemli bir rol oynar. Bulanık kümeler arasındaki bir benzerlik ölçüsü, örüntü tanıma, medikal tanı gibi yaygın bir uygulama alanına sahiptir. Son zamanlarda bulanık, sezgisel, Pisagor bulanık kümeler üzerinde benzerlik ölçüleri ile ilgili çok fazla çalışma yapılmıştır.

## 2. TEMEL KAVRAMLAR

### 2.1 Bulanık Küme Teorisi

#### 2.1.1 Bulanık Küme

Bu bölümde bulanık küme teorisinde kullanılan bazı temel tanımlar verilecektir.

**Tanım 2.1**  $\Omega$  bir evrensel küme olmak üzere  $A \subset \Omega$  olsun.  $A$  kümesinin karakteristik fonksiyonu  $\chi_A : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$  her  $\omega \in \Omega$  için

$$\chi_A(\omega) := \begin{cases} 1 & , \omega \in A \text{ ise} \\ 0 & , \omega \notin A \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır.

Örneğin,  $\Omega = \mathbb{R}$  ve  $A = \mathbb{N}$  alınırsa

$$\chi_{\mathbb{N}}(\omega) = \begin{cases} 1 & , \omega \text{ bir pozitif tamsayı ise} \\ 0 & , \omega \text{ diğer durumlarda} \end{cases}$$

ile tanımlı  $\chi_{\mathbb{N}} : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$  fonksiyonu  $\mathbb{N}$  kümesinin karakteristik fonksiyonudur.

Burada  $\mathbb{N}$  tüm pozitif tamsayılar kümesini göstermektedir.

Karakteristik fonksiyon aslında bir elemanın bir kümeye aitliğini modellemektedir.

Ancak karakteristik fonksiyon bazı gerçek hayat uygulamalarını modellemekte yetersiz kalmaktadır. Bunun için aşağıdaki örneği inceleyebiliriz.

**Örnek 2.1**  $0^\circ\text{C}$  ve üzeri sıcaklığı “sıcak”  $0^\circ\text{C}$  altını “soğuk” diye modellersek  $S = \{\omega \in \mathbb{R} : \omega \geq 0\}$  kümesinin karakteristik fonksiyonu

$$\chi_S(\omega) = \begin{cases} 1 & , \omega \geq 0 \text{ ise} \\ 0 & , \omega < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

$\Omega = \{z \in Z : -40 \leq z \leq 40\}$  kümesi üzerinde sıcak ve soğuşu modellemektedir. Burada  $5^\circ C$  ile  $40^\circ C$ ,  $\varkappa_S$  fonksiyonu altında aynı değeri alır ve ikisi de sıcak olarak nitelendirilir. Ancak bu ise pratikte çok da faydalı bir bilgi içermemektedir. Bu tarz eksikliklerin üstesinden gelebilmek adına bulanık küme kavramı ortaya atılmıştır.

**Tanım 2.2**  $\Omega$  bir evrensel küme olmak üzere,  $\Omega$  kümesinden  $[0, 1]$  kaplı aralığına tanımlı her fonksiyona  $\Omega$  kümesi üzerinde bir bulanık küme denir. Yani  $\Omega$  kümesi üzerinde bir bulanık  $A$  kümesi  $\gamma_A : \Omega \rightarrow [0, 1]$  fonksiyonu yardımıyla karakterize edilir.  $A$  bulanık kümesi için

$$A = \{\langle \omega, \gamma_A(\omega) \rangle : \omega \in \Omega\}$$

gösterimi kullanılır. Burada  $\gamma_A$  fonksiyonuna  $A$  bulanık kümesinin ait olma fonksiyonu ve her  $\omega \in \Omega$  için  $\gamma_A(\omega)$  değerine  $\omega$  elemanının  $A$  bulanık kümesine olan ait olma derecesi denir (Zadeh 1965).

Klasik küme teorisinde bir küme ile karakteristik fonksiyonu birebir eşlenmektedir. Bu durum ve Tanım 2.2 göz önüne alındığında bulanık kümelerin klasik kümelerin bir genelleştirmesi olduğu görülür. Aslında  $\gamma_A = \varkappa_A$  alınırsa klasik bir kümenin bir bulanık küme olduğu görülür.

**Örnek 2.2**  $\Omega = \{x, y, z, t, e\}$  kümesi üzerinde  $\gamma_A(x) = 0.2$ ,  $\gamma_A(y) = 0.3$ ,  $\gamma_A(z) = 0.9$  ve  $\gamma_A(t) = 1$ ,  $\gamma_A(e) = 0.75$  ile tanımlı  $\gamma_A$  fonksiyonu bir bulanık kümedir. Bu bulanık küme

$$A = \{\langle x, 0.2 \rangle, \langle y, 0.3 \rangle, \langle z, 0.9 \rangle, \langle t, 1 \rangle, \langle e, 0.75 \rangle\}$$

şeklinde bir gösterime sahiptir.

Şimdi Örnek 2.1'de verilen gerçek hayat uygulamasını tekrar ele alalım.

**Örnek 2.3**  $\Omega = \{z \in Z : -40 \leq z \leq 40\}$  olmak üzere  $\gamma_A(z) = \frac{z + 40}{80}$ ,  $-40^\circ C$  en soğuk ve  $40^\circ C$  en sıcak olmak üzere  $-40^\circ C$  derece ile  $40^\circ C$  arasındaki sıcaklığı modellemektedir. Burada Örnek 2.1'in aksine  $\gamma_A(5) = 0.5625$  ve  $\gamma_A(40) = 1$  olur.

## 2.2 Bulanık Kümeler Üzerinde Küme İşlemleri

Bu kısımda bulanık kümeler için tanımlanmış bazı temel kavramlar verilecektir. Bu kısım boyunca  $\Omega$  boş kümeden farklı bir küme olarak göz önüne alınacaktır.

**Tanım 2.3** Ait olma fonksiyonu özdeş olarak sıfıra eşit olan bulanık kümeye bulanık boş küme denir (Zadeh 1965).

**Tanım 2.4**  $A$  ve  $B$  iki bulanık küme olmak üzere her  $\omega \in \Omega$  için  $\gamma_A(\omega) = \gamma_B(\omega)$  ise  $A$  bulanık kümesi ile  $B$  bulanık kümesi eşittir denir. Bu durum  $A = B$  veya  $\gamma_A = \gamma_B$  ile gösterilir (Zadeh 1965).

**Tanım 2.5**  $A$  bir bulanık küme olsun. Ait olma fonksiyonu  $1 - \gamma_A$  olan bulanık kümeye  $A$  bulanık kümesinin tümleyeni denir ve  $A^c$  ile gösterilir. Yani,  $A^c$  bulanık kümesinin ait olma fonksiyonu  $\gamma_{A^c} = 1 - \gamma_A$  şeklindedir (Zadeh 1965).

Klasik kümelerde olduğu gibi bulanık kümelerde de kapsama bağıntısı önemli rol oynamaktadır. Şimdi bu kavram ve bununla ilişkili olan birleşim ve kesişim kavramlarını vereceğiz.

**Tanım 2.6**  $A$  ve  $B$  iki bulanık küme olmak üzere her  $\omega \in \Omega$  için  $\gamma_A(\omega) \leq \gamma_B(\omega)$  oluyorsa  $A$  bulanık kümesi  $B$  bulanık kümesinin bir alt kümesidir veya  $A$  bulanık kümesi  $B$  bulanık kümesini kapsar denir. Bu durumda  $A \subset B$  veya  $B \supset A$  yazılır (Zadeh 1965).

**Tanım 2.7**  $A$  ve  $B$  iki bulanık küme olsun. Ait olma fonksiyonu  $\gamma_C(\omega) = \max \{ \gamma_A(\omega), \gamma_B(\omega) \}$  ile tanımlı  $C$  bulanık kümesine  $A$  bulanık kümesi ile  $B$  bulanık kümesinin birleşimi denir (Zadeh 1965).

**Tanım 2.8**  $A$  ve  $B$  iki bulanık küme olsun. Ait olma fonksiyonu  $\gamma_C(\omega) = \min \{ \gamma_A(\omega), \gamma_B(\omega) \}$  ile tanımlı  $C$  bulanık kümesine  $A$  bulanık kümesi ile  $B$  bulanık kümesinin kesişimi denir (Zadeh 1965).

**Önerme 2.1**  $A$ ,  $B$  ve  $C$  bulanık kümeler olmak üzere,

- i)  $A, B \subset A \cup B$ ,
- ii)  $A \cap B \subset A, B$ ,
- iii)  $(A^c)^c = A$ ,
- iv)  $A \cup B = B \cup A$ ,
- v)  $A \cap B = B \cap A$ ,
- vi)  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ,
- vii)  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ,

viii)  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$  ve  $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$  (De Morgan Kuralları) gerçekenir (Zadeh 1965).

**İspat. (i)** Her  $\omega \in \Omega$  için  $\gamma_A(\omega), \gamma_B(\omega) \leq \max \{\gamma_A(\omega), \gamma_B(\omega)\}$  olduğundan  $A, B \subset A \cup B$  gerçekenir.

ii) Her  $\omega \in \Omega$  için  $\gamma_A(\omega), \gamma_B(\omega) \geq \min \{\gamma_A(\omega), \gamma_B(\omega)\}$  olduğundan  $A \cap B \subset A, B$  gerçekenir.

iii) Her  $\omega \in \Omega$   $1 - (1 - \gamma_A(\omega)) = \gamma_A(\omega)$  olduğundan  $(A^c)^c = A$  gerçekenir.

iv) Her  $\omega \in \Omega$  için  $\max \{\gamma_A(\omega), \gamma_B(\omega)\} = \max \{\gamma_B(\omega), \gamma_A(\omega)\}$  olduğundan  $A \cup B = B \cup A$  gerçekenir.

(v) Her  $\omega \in \Omega$  için  $\min \{\gamma_A(\omega), \gamma_B(\omega)\} = \min \{\gamma_B(\omega), \gamma_A(\omega)\}$  olduğundan  $A \cap B = B \cap A$  gerçekenir.

(vi)  $\omega \in \Omega$  olmak üzere  $A, B$  ve  $C$  bulanık kümeleri için aşağıdaki altı durum mevcuttur:

$$\begin{aligned} \gamma_A(\omega) &\geq \gamma_B(\omega) \geq \gamma_C(\omega), \gamma_A(\omega) \geq \gamma_C(\omega) \geq \gamma_B(\omega), \\ \gamma_B(\omega) &\geq \gamma_A(\omega) \geq \gamma_C(\omega), \gamma_B(\omega) \geq \gamma_C(\omega) \geq \gamma_A(\omega), \\ \gamma_C(\omega) &\geq \gamma_B(\omega) \geq \gamma_A(\omega), \gamma_C(\omega) \geq \gamma_A(\omega) \geq \gamma_B(\omega). \end{aligned}$$

Bu durumlar göz önüne alındığında

$$\max \{\gamma_A(\omega), \min \{\gamma_B(\omega), \gamma_C(\omega)\}\} = \min \{\max \{\gamma_A(\omega), \gamma_B(\omega)\}, \max \{\gamma_A(\omega), \gamma_C(\omega)\}\} \quad (2.1)$$

olduğu görülür. Örneğin  $\gamma_A(\omega) \geq \gamma_B(\omega) \geq \gamma_C(\omega)$  olduğunda

$$\max \{\gamma_A(\omega), \min \{\gamma_B(\omega), \gamma_C(\omega)\}\} = \gamma_A(\omega)$$

ve

$$\min \{\max \{\gamma_A(\omega), \gamma_B(\omega)\}, \max \{\gamma_A(\omega), \gamma_C(\omega)\}\} = \gamma_A(\omega)$$

olduğundan (2.1) eşitliği gerçekenir. Benzer şekilde diğer beş durumda da (2.1) eşitliğinin doğruluğu gösterilebilir.

vii) İspat (vi) önermesinin ispatına benzer şekilde yapılır.

viii)  $\omega \in \Omega$  olmak üzere  $A$  ve  $B$  bulanık kümeleri için  $\gamma_A(\omega) \leq \gamma_B(\omega)$  veya  $\gamma_B(\omega) \leq$

$\gamma_A(\omega)$  durumları mevcuttur. Bu durumlar göz önüne alındığında

$$\begin{aligned}\gamma_{(A \cup B)^c} &= 1 - \max \{ \gamma_A(\omega), \gamma_B(\omega) \} \\ &= \min \{ 1 - \gamma_A, 1 - \gamma_B \} \\ &= \gamma_{A^c \cap B^c}\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\gamma_{(A \cap B)^c} &= 1 - \min \{ \gamma_A(\omega), \gamma_B(\omega) \} \\ &= \max \{ 1 - \gamma_A, 1 - \gamma_B \} \\ &= \gamma_{A^c \cup B^c}\end{aligned}$$

olduğu görülür. ■

**Tanım 2.9**  $\Omega$  kümesinden  $[0, 1]$  aralığına tanımlı ve her  $\omega \in \Omega$  için  $\gamma_A(\omega) + \eta_A(\omega) \leq 1$  olacak biçimde bir  $(\gamma_A, \eta_A)$  fonksiyon ikilisine  $\Omega$  üzerinde bir sezgisel bulanık küme denir. Yani  $\Omega$  kümesi üzerinde bir  $A$  sezgisel bulanık kümesi  $\gamma_A : \Omega \rightarrow [0, 1]$  ve  $\eta_A : \Omega \rightarrow [0, 1]$  fonksiyonları ile karakterize edilir.  $A$  sezgisel bulanık kümesi için

$$A = \{ \langle \omega, \gamma_A(\omega), \eta_A(\omega) \rangle : \omega \in \Omega \}$$

gösterimi kullanılır. Burada  $\gamma_A$  fonksiyonuna  $A$  bulanık kümesinin ait olma fonksiyonu ve  $\eta_A$  fonksiyonuna  $A$  kümesinin ait olmama fonksiyonu denir. Her  $\omega \in \Omega$  için  $\gamma_A(\omega)$  değerine  $\omega$  elemanının  $A$  bulanık kümesine olan ait olma derecesi ve  $\eta_A(\omega)$  değerine  $\omega$  elemanının  $A$  bulanık kümesine olan ait olmama derecesi denir (Atanassov 1986).

**Örnek 2.4**  $\Omega = \{x, y, z\}$  kümesi üzerinde  $\gamma_A(x) = 0.3$ ,  $\eta_A(x) = 0.4$ ,  $\gamma_A(y) = 0.4$ ,  $\eta_A(y) = 0.1$ ,  $\gamma_A(z) = 0.2$ ,  $\eta_A(z) = 0.3$  ile tanımlı  $\gamma_A$  fonksiyonu bir sezgisel bulanık kümedir. Gerçekten  $\gamma_A(x) + \eta_A(x) \leq 1$ ,  $\gamma_A(y) + \eta_A(y) \leq 1$ ,  $\gamma_A(z) + \eta_A(z) \leq 1$  olur.

### 2.3 Sezgisel Bulanık Kümeler Üzerinde Küme İşlemleri

Bu kısımda sezgisel bulanık kümeler için tanımlanmış bazı temel kavramlar verilecektir. Bu kısım boyunca  $\Omega$  boş kümeden farklı bir küme olarak göz önüne alınacaktır.

**Tanım 2.10**  $A$  ve  $B$  iki bulanık küme olmak üzere her  $\omega \in \Omega$  için  $\gamma_A(\omega) \leq \gamma_B(\omega)$  ve  $\eta_A(\omega) \geq \eta_B(\omega)$  ise  $A$  kümesi  $B$  kümesinin alt kümesidir denir ve  $A \subset B$  ile gösterilir (Atanassov 1986).

**Tanım 2.11**  $A$  ve  $B$  iki bulanık küme olmak üzere  $A \subset B$  ve  $B \subset A$  oluyorsa  $A$  kümesi  $B$  kümesine eşittir denir ve  $A = B$  yazılır (Atanassov 1986).

**Tanım 2.12**  $A$  bir sezgisel bulanık küme olmak üzere,  $A$  kümesinin tümleyeni

$$A^c = \{ \langle \omega, \eta_A(\omega), \gamma_A(\omega) \rangle : \omega \in \Omega \}$$

ile tanımlı sezgisel bulanık kümedir (Atanassov 1986).

**Tanım 2.13**  $A$  ve  $B$  iki sezgisel bulanık küme olsun.  $A$  ve  $B$  kümesinin birleşimi

$$A \cup B = \{ \langle \omega, \max(\gamma_A(\omega), \gamma_B(\omega)), \min(\eta_A(\omega), \eta_B(\omega)) \rangle : \omega \in \Omega \}$$

şeklinde tanımlanır (Atanassov 1986).

**Tanım 2.14**  $A$  ve  $B$  iki sezgisel bulanık küme olsun.  $A$  ve  $B$  kümesinin kesişimi

$$A \cap B = \{ \langle \omega, \min(\gamma_A(\omega), \gamma_B(\omega)), \max(\eta_A(\omega), \eta_B(\omega)) \rangle : \omega \in \Omega \}$$

şeklinde tanımlanır.

## 2.4 Çok Kriterli Karar Verme

Çok kriterli karar verme, birden fazla çelişen kriter üzerinde alternatiflerin değerlendirilip sıralanması sürecidir. Çok kriterli karar verme, kriterler oluşturup bunlara göre alternatifler üzerinden en iyi seçimi yapıp diğer alternatifleri sıralayan ve böylece seçimleri kolaylaştıran bir süreçtir. Çok kriterli karar verme, kullanım alanları düşünüldüğünde bir çok kolaylık sağlamaktadır ve son zamanlarda medikal tanı, örüntü tanıma, finansal- ekonomik-stratejik seçimlerde ve bunun gibi bir çok alanda yaygın şekilde kullanılmaktadır.

## 2.5 Örüntü Tanıma ve Medical Tanı

Örüntü tanıma, örüntülerin özelliklerindeki benzerliğe bağlı olarak bir dizi örüntüyü sınıflara ayırma sürecidir. Buradaki süreç; bilinmeyen bir örüntü verisini bilinen veriler arasında sınıflandırmak ve en iyi sonucu bulma şeklinde işler. Medical tanı da özel bir örüntü tanıma ve belirli semptomlara sahip bir hasta için verilen tanımlar üzerinden en doğru tanının bulunması sürecidir. Medikal tanı ve örüntü tanıma aşlında çok kriterli karar verme problemleridir.



### 3. PİSAGOR BULANIK KÜMELER

Bu bölümde Yager tarafından 2013 yılında tanımlanan Pisagor bulanık kümeler incelenecektir.

**Tanım 3.1**  $\Omega$  kümesinden  $[0, 1]$  aralığına tanımlı ve her  $\omega \in \Omega$  için  $\gamma_A^2(\omega) + \eta_A^2(\omega) \leq 1$  olacak biçimde her  $(\gamma_A, \eta_A)$  fonksiyon ikilisine  $\Omega$  üzerinde bir Pisagor bulanık küme denir. Yani  $\Omega$  kümesi üzerinde bir  $A$  Pisagor bulanık kümesi  $\gamma_A : \Omega \rightarrow [0, 1]$  ve  $\eta_A : \Omega \rightarrow [0, 1]$  fonksiyonları ile karakterize edilir.  $A$  Pisagor bulanık kümesi için

$$A = \{ \langle \omega, \gamma_A(\omega), \eta_A(\omega) \rangle : \omega \in \Omega \}$$

gösterimi kullanılır. Burada  $\gamma_A$  fonksiyonuna  $A$  bulanık kümesinin ait olma fonksiyonu ve  $\eta_A$  fonksiyonuna  $A$  kümesinin ait olmama fonksiyonu denir. Her  $\omega \in \Omega$  için  $\gamma_A(\omega)$  değerine  $\omega$  elemanının  $A$  bulanık kümesine olan ait olma derecesi ve  $\eta_A(\omega)$  değerine  $\omega$  elemanının  $A$  bulanık kümesine olan ait olmama derecesi denir (Yager 2013).

$A$  sezgisel bulanık kümesi için  $\pi_A = 1 - \gamma_A^2 - \eta_A^2$  şeklinde tanımlı  $\pi_A : \Omega \rightarrow [0, 1]$  olmak üzere  $\pi_A$  fonksiyonuna duraksama fonksiyonu denir.

**Örnek 3.1**  $\Omega = \{a, b, c\}$  kümesi üzerinde  $\gamma_A(a) = 0.3$ ,  $\eta_A(a) = 0.4$ ,  $\gamma_A(b) = 0.4$ ,  $\eta_A(b) = 0.1$ ,  $\gamma_A(c) = 0.2$ ,  $\eta_A(c) = 0.3$  ile tanımlı  $\gamma_A$  fonksiyonu bir Pisagor bulanık kümedir. Gerçekten  $\gamma_A^2(a) + \eta_A^2(a) \leq 1$ ,  $\gamma_A^2(b) + \eta_A^2(b) \leq 1$ ,  $\gamma_A^2(c) + \eta_A^2(c) \leq 1$  olur.

Şimdi ise Pisagor bulanık kümeler için üyelik derecelerini inceleyelim.

#### Tanım 3.2 3.1 Pisagor Üyelik Dereceleri

Pisagor üyelik derecelerini her  $\omega \in \Omega$  için  $r(\omega) \in [0, 1]$  bağlılık gücü ve  $d(\omega) \in [0, 1]$  bağlılık yönü ile de ifade edilebilir. Burada  $r(\omega)$  ve  $d(\omega)$ ,  $\gamma_A(\omega)$  ve  $\eta_A(\omega)$  üyelik dereceleri ile ilişkilidir.

$\gamma_A(\omega)$ ,  $A$ ' da  $\omega$ 'in üyeliği için bir destek ve  $\eta_A(\omega)$ ,  $A$ ' da  $\omega$ 'in üyeliğine karşı destek olarak adlandırılır ve aşağıdaki gibi ifade edilir :

$$\gamma_A(\omega) = r(\omega) \cdot \cos(\theta(\omega))$$

$$\eta_A(\omega) = r(\omega) \cdot \sin(\theta(\omega))$$

$$\theta(\omega) = (1 - d(\omega)) \cdot \frac{\pi}{2} ; \theta(\omega) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Şimdi  $\gamma_A(\omega)$  ve  $\eta_A(\omega)$  in  $r(\omega)$  ile ilişkisini inceleyelim. Her  $\omega \in \Omega$  için

$$\gamma_A^2(\omega) + \eta_A^2(\omega) = r^2(\omega) \cos^2(\theta(\omega)) + r^2(\omega) \sin^2(\theta(\omega))$$

ve

$$\gamma_A^2(\omega) + \eta_A^2(\omega) = r^2(\omega) [\cos^2(\theta(\omega)) + \sin^2(\theta(\omega))]$$

elde edilir. Burada  $\cos^2(\theta(\omega)) + \sin^2(\theta(\omega)) = 1$  olduğundan  $\gamma_A^2(\omega) + \eta_A^2(\omega) = r^2(\omega)$  elde edilir.

Dolayısıyla

$$\gamma_A^2(\omega) = r^2(\omega) - \eta_A^2(\omega)$$

$$\eta_A^2(\omega) = r^2(\omega) - \gamma_A^2(\omega)$$

olur.

Şimdi  $d(\omega)$  değerine bakalım. Her  $\omega \in \Omega$  için

$$\theta(\omega) = (1 - d(\omega)) \frac{\pi}{2}$$

olur. O halde

**1.**  $d(\omega) = 1$  olduğunda  $\theta(\omega) = 0$ ,  $\cos(\theta(\omega)) = 1$ ,  $\sin(\theta(\omega)) = 0$  olup

$\gamma_A(\omega) = r(\omega)$ ,  $\eta_A(\omega) = 0$  elde edilir.

**2.**  $d(\omega) = 0$  olduğunda  $\theta(\omega) = \frac{\pi}{2}$ ,  $\cos(\theta(\omega)) = 0$ ,  $\sin(\theta(\omega)) = 1$  olup

$\gamma_A(\omega) = 0$ ,  $\eta_A(\omega) = r(\omega)$  elde edilir.

Böylece  $d(\omega)$ , temel olarak 1 ile 0 arasında bir ölçekte değer alır. Yani

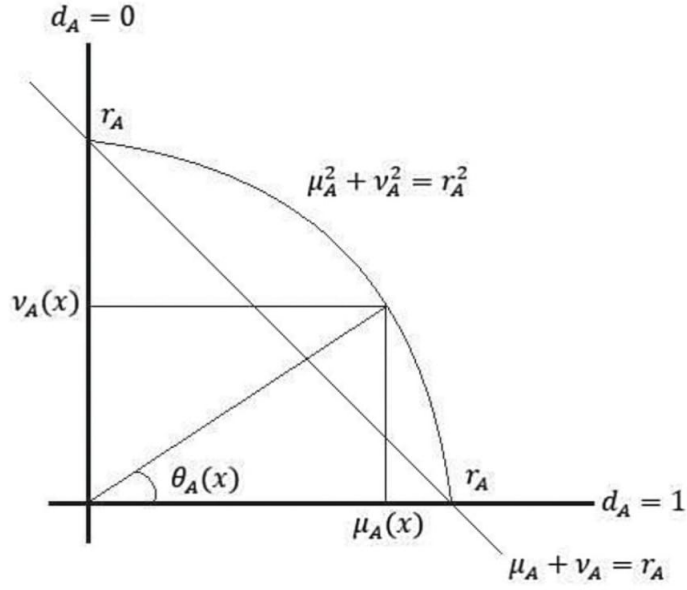
**i.**  $d(\omega) = 1$  iken  $r(\omega)$  in yönü tamamen üyeliğe doğrudur,

**ii.**  $d(\omega) = 0$  iken gücün yönü tamamen üyelik olmayana doğrudur ( Şekil 3.1).

**NOT** Pisagor üyelik dereceleri  $\gamma_A$  ve  $\eta_A$ , aslında bir  $(a, b)$  değer ikilisidir.  $a = \gamma_A(\omega)$  ve

$b = \eta_A(\omega)$  olmak üzere

$$a^2 + b^2 \leq 1 ; a, b \in [0, 1]$$



Şekil 3.1.

gerçeklenir.  $a = \gamma_A(\omega)$ ;  $A'$ 'da  $\omega$ 'nın üyeliği için destek derecesi ve  $b = \eta_A(\omega)$ ;  $A$  da  $\omega$ 'in üyeliğine karşı destek derecesidir. Buradan  $a^2 + b^2 = r^2$  şeklindedir. Böylece Pisagor üyelik derecesi  $r$  yarıçaplı çember üzerindedir. Herhangi iki  $(a, b)$  noktası,  $r^2 = a^2 + b^2$  yarıçaplı çember üzerinde  $(r \cdot \cos(\theta), r \cdot \sin(\theta))$  olarak ifade edilebilir. O halde

$$a = r \cdot \cos \theta \implies \cos \theta = \frac{a}{r}$$

$$b = r \cdot \sin \theta \implies \sin \theta = \frac{b}{r}$$

$$\theta = \operatorname{arccot} \frac{a}{b}, \quad d = \frac{\pi - 2\theta}{\pi}$$

elde edilir. Böylece  $(a, b)$  aslında  $r = \sqrt{(a^2 + b^2)}$  ve  $d = \frac{\pi - 2\theta}{\pi}$  ikilisi ile eşdeğerdir. Burada  $a, b \in [0, 1]$  ve  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$  olur.

### 3.2 Pisagor Bulanık Kümelerde Bazı Küme İşlemleri

Bu kısımda Pisagor bulanık kümeler için tanımlanmış bazı temel kavramlar verilecektir. Bu kısım boyunca  $\Omega$  boş kümeden farklı bir küme olarak göz önüne alınacaktır.

**Tanım 3.3**  $A$  ve  $B$  iki Pisagor bulanık küme olmak üzere her  $\omega \in \Omega$  için  $\gamma_A(\omega) \leq$

$\gamma_B(\omega)$  ve  $\eta_A(\omega) \geq \eta_B(\omega)$  ise  $A$  kümesi  $B$  kümesinin alt kümesidir denir ve  $A \subset B$  ile gösterilir (Yager 2013) .

**Tanım 3.4**  $A$  ve  $B$  iki Pisagor bulanık küme olmak üzere  $A \subset B$  ve  $B \subset A$  oluyorsa  $A$  kümesi  $B$  kümesine eşittir denir ve  $A = B$  yazılır (Yager 2013) .

**Tanım 3.5**  $A$  bir Pisagor bulanık küme olmak üzere,  $A$  kümesinin tümleyeni

$$A^c = \{\langle \omega, \eta_A(\omega), \gamma_A(\omega) \rangle : \omega \in \Omega\}$$

şeklinde tanımlı Pisagor bulanık kümedir (Yager 2013) .

**Tanım 3.6**  $A$  ve  $B$  iki Pisagor bulanık küme olsun.  $A$  ve  $B$  kümesinin birleşimi

$$A \cup B = \{\langle \omega, \max(\gamma_A(\omega), \gamma_B(\omega)), \min(\eta_A(\omega), \eta_B(\omega)) \rangle : \omega \in \Omega\}$$

şeklinde tanımlanır (Yager 2013) .

**Tanım 3.7**  $A$  ve  $B$  iki Pisagor bulanık küme olsun.  $A$  ve  $B$  kümesinin kesişimi

$$A \cap B = \{\langle \omega, \min(\gamma_A(\omega), \gamma_B(\omega)), \max(\eta_A(\omega), \eta_B(\omega)) \rangle : \omega \in \Omega\}$$

şeklinde tanımlanır (Yager 2013) .

#### 4. PİSAGOR BULANIK KÜMELER İÇİN BAZI BENZERLİK ÖLÇÜLERİ

Bu kısımda Pisagor bulanık kümeler için bir kosinüs benzerlik ölçüsü incelenecektir. Pisagor bulanık kümeler için kosinüs benzerlik ölçüsünü vermeden önce sezgisel bulanık kümeler için verilen bazı kosinüs benzerlik ölçülerini inceleyelim.

**Tanım 4.1**  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$  sonlu bir küme,

$$A = \{ \langle \omega_j, \gamma_A(\omega_j), \eta_A(\omega_j) \rangle : \omega_j \in \Omega \}$$

ve

$$B = \{ \langle \omega_j, \gamma_B(\omega_j), \eta_B(\omega_j) \rangle : \omega_j \in \Omega \}$$

$\Omega$  üzerinde iki sezgisel bulanık küme olmak üzere,  $A$  ve  $B$  arasındaki bir kosinüs benzerlik ölçüsü

$$IFC^1(A, B) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{\gamma_A(\omega_j)\gamma_B(\omega_j) + \eta_A(\omega_j)\eta_B(\omega_j)}{\sqrt{\gamma_A(\omega_j)^2 + \eta_A(\omega_j)^2} \sqrt{\gamma_B(\omega_j)^2 + \eta_B(\omega_j)^2}} \quad (4.1)$$

şeklinde tanımlanmıştır (Ye 2011). Shi ve Ye tarafından bu kosinüs benzerlik ölçüsü, duraksama derecesi ile

$$IFC^2(A, B) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{\gamma_A(\omega_j)\gamma_B(\omega_j) + \eta_A(\omega_j)\eta_B(\omega_j) + \pi_A(\omega_j)\pi_B(\omega_j)}{\sqrt{\gamma_A(\omega_j)^2 + \eta_A(\omega_j)^2 + \pi_A(\omega_j)^2} \sqrt{\gamma_B(\omega_j)^2 + \eta_B(\omega_j)^2 + \pi_B(\omega_j)^2}} \quad (4.2)$$

şeklinde geliştirilmiştir (Shi v.d. 2013).

Şimdi Pisagor bulanık kümeler arasındaki bazı kosinüs benzerlik ölçülerini inceleyelim.

**Tanım 4.2**  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$  sonlu bir küme ,

$$A = \{ \langle \omega_j, \gamma_A(\omega_j), \eta_A(\omega_j) \rangle : \omega_j \in \Omega \}$$

ve

$$B = \{ \langle \omega_j, \gamma_B(\omega_j), \eta_B(\omega_j) \rangle : \omega_j \in \Omega \}$$

$\Omega$  üzerinde iki pisagor bulanık küme olmak üzere,  $A$  ve  $B$  arasındaki bir kosinüs benzerlik ölçüsü

$$PFC^1(A, B) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{\gamma_A^2(\omega_j)\gamma_B^2(\omega_j) + \eta_A^2(\omega_j)\eta_B^2(\omega_j)}{\sqrt{\eta_A(\omega_j)^4 + \eta_A(\omega_j)^4} \sqrt{\eta_B(\omega_j)^4 + \eta_B(\omega_j)^4}} \quad (4.3)$$

şeklinde tanımlanmıştır (Wei 2018) .

**Teorem 4.1**  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$  sonlu bir küme ve  $A$  ve  $B$  iki Pisagor bulanık küme olmak üzere,  $A$  ve  $B$  arasındaki  $PFC^1$  kosinüs benzerlik ölçüsü

**PS1.**  $0 \leq PFC^1(A, B) \leq 1$

**PS2.**  $PFC^1(A, B) = PFC^1(B, A)$

**PS3.** Eğer  $A = B$  ise  $PFC^1(A, B) = 1$

şartlarını sağlar (Ye 2011).

**İspat. PS1.**  $PFC^1$  benzerlik ölçüsünün tanımında toplamın her bir terimi düzlemde  $(\gamma_A^2, \eta_A^2)$  ve  $(\gamma_B^2, \eta_B^2)$  vektörlerinin arasındaki açının kosinüsünü verdiği için her  $j = 1, \dots, n$  için

$$0 \leq \frac{\gamma_A^2(\omega_j)\gamma_B^2(\omega_j) + \eta_A^2(\omega_j)\eta_B^2(\omega_j)}{\sqrt{\eta_A(\omega_j)^4 + \eta_A(\omega_j)^4}\sqrt{\gamma_B(\omega_j)^4 + \eta_B(\omega_j)^4}} \leq 1$$

elde edilir. Diğer yandan 0 ile 1 arasındaki sayıların aritmetik ortalaması da yine 0 ile 1 arasında olacağından

$$0 \leq PFC^1(A, B) \leq 1$$

elde edilir.

**PS2.**  $PFC^1$ 'in tanımından

$$\begin{aligned} PFC^1(A, B) &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{\gamma_A^2(\omega_j)\gamma_B^2(\omega_j) + \eta_A^2(\omega_j)\eta_B^2(\omega_j)}{\sqrt{\gamma_A(\omega_j)^4 + \eta_A(\omega_j)^4}\sqrt{\gamma_B(\omega_j)^4 + \eta_B(\omega_j)^4}} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{\gamma_B^2(\omega_j)\gamma_A^2(\omega_j) + \eta_B^2(\omega_j)\eta_A^2(\omega_j)}{\sqrt{\gamma_B(\omega_j)^4 + \eta_B(\omega_j)^4}\sqrt{\gamma_A(\omega_j)^4 + \eta_A(\omega_j)^4}} \\ &= PFC^1(B, A). \end{aligned}$$

elde edilir.

**PS3.** Eğer  $A = B$  ise her  $j = 1, \dots, n$  için  $\gamma_A(\omega_j) = \gamma_B(\omega_j)$  ve  $\eta_A(\omega_j) = \eta_B(\omega_j)$  olur.

O halde

$$\begin{aligned}
PFC^1(A, B) &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{\gamma_A^2(\omega_j)\gamma_B^2(\omega_j) + \eta_A^2(\omega_j)\eta_B^2(\omega_j)}{\sqrt{\gamma_A(\omega_j)^4 + \eta_A(\omega_j)^4} \sqrt{\gamma_B(\omega_j)^4 + \eta_B(\omega_j)^4}} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{\gamma_A^4(\omega_j) + \eta_A^4(\omega_j)}{\gamma_A^4(\omega_j) + \eta_A^4(\omega_j)} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n 1 \\
&= \frac{1}{n} \cdot n \\
&= 1.
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

$PFC^1$  kosinüs benzerlik ölçüsü ait olma derecesi ve ait olmama derecesi, duraksama derecesi ile birlikte düşünüldüğünde

$$PFC^2(A, B) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{\gamma_A^2(\omega_j)\gamma_B^2(\omega_j) + \eta_A^2(\omega_j)\eta_B^2(\omega_j) + \pi_A^2(\omega_j)\pi_B^2(\omega_j)}{\sqrt{\gamma_A(\omega_j)^4 + \eta_A(\omega_j)^4 + \pi_A(\omega_j)^4} \sqrt{\gamma_B(\omega_j)^4 + \eta_B(\omega_j)^4 + \pi_B(\omega_j)^4}} \quad (4.4)$$

şeklinde geliştirilmiştir (Wei 2018) .

**Teorem 4.2**  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$  sonlu bir küme ve  $A$  ve  $B$  iki Pisagor bulanık küme olmak üzere,  $A$  ve  $B$  arasındaki  $PFC^2$  kosinüs benzerlik ölçüsü

**PS1.**  $0 \leq PFC^2(A, B) \leq 1$

**PS2.**  $PFC^2(A, B) = PFC^2(B, A)$

**PS3.** Eğer  $A = B$  ise  $PFC^2(A, B) = 1$ dir.

şartlarını sağlar (Ye 2011).

**İspat.** İspat Teorem4.1'e benzer şekilde yapılabilir. ■

**Tanım 4.3**  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$  sonlu bir küme ,

$$A = \{ \langle \omega_j, \gamma_A(\omega_j), \eta_A(\omega_j) \rangle : \omega_j \in \Omega \}$$

ve

$$B = \{ \langle \omega_j, \gamma_B(\omega_j), \eta_B(\omega_j) \rangle : \omega_j \in \Omega \}$$

$\Omega$  üzerinde iki pisagor bulanık küme olmak üzere,  $A$  ve  $B$  arasında bir ağırlıklı kosinüs benzerlik ölçüsü

$$WPFC^1(A, B) = \sum_{j=1}^n m_j \frac{\gamma_A^2(\omega_j)\gamma_B^2(\omega_j) + \eta_A^2(\omega_j)\eta_B^2(\omega_j)}{\sqrt{\gamma_A(\omega_j)^4 + \eta_A(\omega_j)^4} \sqrt{\gamma_B(\omega_j)^4 + \eta_B(\omega_j)^4}} \quad (4.5)$$

şeklinde tanımlanır. Bu ağırlıklı kosinüs benzerlik ölçüsü duraksama derecesi ile birlikte

$$WPFC^2(A, B) = \sum_{j=1}^n m_j \frac{\gamma_A^2(\omega_j)\gamma_B^2(\omega_j) + \eta_A^2(\omega_j)\eta_B^2(\omega_j) + \pi_A^2(\omega_j)\pi_B^2(\omega_j)}{\sqrt{\gamma_A(\omega_j)^4 + \eta_A(\omega_j)^4 + \pi_A(\omega_j)^4} \sqrt{\gamma_B(\omega_j)^4 + \eta_B(\omega_j)^4 + \pi_B(\omega_j)^4}} \quad (4.6)$$

şeklinde geliştirilmiştir. Burada  $m = (m_1, \dots, m_n)^T$  ağırlık vektörü ve  $m_j \in [0, 1]$ ,  $\sum_{j=1}^n m_j = 1$  şeklindedir (Wei 2018) .

**Teorem 4.3**  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$  sonlu bir küme olmak üzere  $WPFC^1$  kosinüs benzerlik ölçüsü (PS1) – (PS3) şartlarını sağlar.

**İspat.** İspatı daha önceki ispatlara benzer şekilde yapılır. ■

#### 4.1 Pisagor Bulanık Kümeler için Kosinüs Fonksiyonu Tabanlı Benzerlik Ölçüleri

Bu kısımda Pisagor bulanık kümeler için kosinüs fonksiyonu tabanlı bazı benzerlik ölçüleri verilecek ve bazı özellikleri incelenecektir.

**Tanım 4.4**  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$  sonlu bir küme ,

$$A = \{ \langle \omega_j, \gamma_A(\omega_j), \eta_A(\omega_j) \rangle : \omega_j \in \Omega \}$$

ve

$$B = \{ \langle \omega_j, \gamma_B(\omega_j), \eta_B(\omega_j) \rangle : \omega_j \in \omega \}$$

$\Omega$  üzerinde iki Pisagor bulanık küme olmak üzere,  $A$  ve  $B$  arasındaki iki kosinüs tabanlı iki benzerlik ölçüsü

$$PFCS^1(A, B) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \cos \left[ \frac{\pi}{2} (|\gamma_A^2(\omega_j) - \gamma_B^2(\omega_j)| \vee |\eta_A^2(\omega_j) - \eta_B^2(\omega_j)|) \right] \quad (4.7)$$

$$PFCS^2(A, B) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \cos \left[ \frac{\pi}{4} (|\gamma_A^2(\omega_j) - \gamma_B^2(\omega_j)| + |\eta_A^2(\omega_j) - \eta_B^2(\omega_j)|) \right] \quad (4.8)$$

şeklinde tanımlanır. Burada " $\vee$ " maksimum operatörünü ifade etmektedir (Wei 2018) .

**Teorem 4.4**  $A$  and  $B$  iki Pisagor bulanık küme olmak üzere ,  $PFCS^k(A, B)$  ( $k = 1, 2$ ) kosinüs fonksiyonu tabanlı benzerlik ölçüsü

**PC1.**  $0 \leq PFCS^k(A, B) \leq 1$ ;

**PC2.**  $A = B$  gerek ve yeter şart  $PFCS^k(A, B) = 1$  olmasıdır,

**PC3.**  $PFCS^k(A, B) = PFCS^k(B, A)$ ,

**PC4.**  $C \in PFS$  olmak üzere,  $A \subset B \subset C$  ise,  $PFCS^k(A, C) \leq PFCS^k(A, B)$  ve  $PFCS^k(A, C) \leq PFCS^k(B, C)$  olur,

şartlarını sağlar (Ye 2011).

**İspat. PFC1.** Kosinüs fonksiyonu  $[0, 1]$  aralığında değer aldığı için kosinüs fonksiyonuna dayalı benzerlik ölçüsü de aritmetik ortalama gereğince  $[0, 1]$  aralığında değer alır. Böylece  $0 \leq PFCS^k(A, B) \leq 1$  sağlanır.

**PFC2.** Eğer  $A = B$  ise her  $j = 1, 2, \dots, n$  için

$$\gamma_A^2(\omega_j) = \gamma_B^2(\omega_j)$$

$$\eta_A^2(\omega_j) = \eta_B^2(\omega_j)$$

$j = (1, 2, \dots, n)$  olur. Buradan

$$|\gamma_A^2(\omega_j) - \gamma_B^2(\omega_j)| = 0$$

$$|\eta_A^2(\omega_j) - \eta_B^2(\omega_j)| = 0$$

olup  $PFCS^k(A, B) = 1$  elde edilir.

Diğer taraftan,  $PFCS^k(A, B) = 1$  ise

$$|\gamma_A^2(\omega_j) - \eta_B^2(\omega_j)| = 0$$

$$|\eta_A^2(\omega_j) - \eta_B^2(\omega_j)| = 0$$

şeklinde ifade edilebilir. O zaman  $\gamma_A^2(\omega_j) = \gamma_B^2(\omega_j)$   $\eta_A^2(\omega_j) = \eta_B^2(\omega_j)$  olup  $A = B$  elde edilir.

**PFC3.** Diğer ispatlarda olduğu gibi ispatlanabilir.

**PFC4.** Eğer  $A \subset B \subset C$  ise  $\gamma_A(\omega_j) \leq \gamma_B(\omega_j) \leq \gamma_C(\omega_j)$  ve  $\eta_A(\omega_j) \leq \eta_B(\omega_j) \leq \eta_C(\omega_j)$   $j = 1, \dots, n$  elde edilir. O halde,  $\gamma_A^2(\omega_j) \leq \gamma_B^2(\omega_j) \leq \gamma_C^2(\omega_j)$ ,  $\eta_A^2(\omega_j) \leq \eta_B^2(\omega_j) \leq \eta_C^2(\omega_j)$  olup

$$\begin{aligned}
|\gamma_A^2(\omega_j) - \gamma_B^2(\omega_j)| &\leq |\gamma_A^2(\omega_j) - \gamma_C^2(\omega_j)| \\
|\gamma_B^2(\omega_j) - \gamma_C^2(\omega_j)| &\leq |\gamma_A^2(\omega_j) - \gamma_C^2(\omega_j)| \\
|\eta_A^2(\omega_j) - \eta_B^2(\omega_j)| &\leq |\eta_A^2(\omega_j) - \eta_C^2(\omega_j)| \\
|\eta_B^2(\omega_j) - \eta_C^2(\omega_j)| &\leq |\eta_A^2(\omega_j) - \eta_C^2(\omega_j)|
\end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece  $PFCS^k(A, C) \leq PFCS^k(A, B)$  ve  $PFCS^k(A, C) \leq PFCS^k(B, C)$  elde edilir. Burada kosinüs fonsikiyonu  $[0, \frac{\pi}{2}]$  aralığında azalan bir fonksiyon olduğunu göz önünde bulundurulmalıdır. ■

$A$  ve  $B$  Pisagor bulanık kümeleri arasındaki kosinüs tabanlı benzerlik ölçüsü, ait olma derecesi ve ait olmama derecesi, duraksama derecesi ile birlikte düşünüldüğünde (Wei 2018) tarafından

$$PFCS^3(A, B) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \cos \left[ \frac{\pi}{2} (|\gamma_A^2(\omega_j) - \gamma_B^2(\omega_j)| \vee |\mu_A^2(\omega_j) - \eta_B^2(\omega_j)| \vee |\pi_A^2(\omega_j) - \pi_B^2(\omega_j)|) \right]$$

$$PFCS^4(A, B) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \cos \left[ \frac{\pi}{4} (|\gamma_A^2(\omega_j) - \gamma_B^2(\omega_j)| + |\eta_A^2(\omega_j) - \eta_B^2(\omega_j)| + |\pi_A^2(\omega_j) - \pi_B^2(\omega_j)|) \right]$$

şeklinde geliştirilmiştir .

**Tanım 4.5**  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$  sonlu bir küme ,

$$A = \{ \langle \omega_j, \gamma_A(\omega_j), \eta_A(\omega_j) \rangle : \omega_j \in \Omega \}$$

ve

$$B = \{ \langle \omega_j, \gamma_B(\omega_j), \eta_B(\omega_j) \rangle : \omega_j \in \Omega \}$$

bu benzerlik ölçüleri (Wei 2018) tarafından

$$WPFCS^1(A, B) = \sum_{j=1}^n m_j \cos \left[ \frac{\pi}{2} (|\gamma_A^2(\omega_j) - \gamma_B^2(\omega_j)| \vee |\eta_A^2(\omega_j) - \eta_B^2(\omega_j)|) \right]$$

$$WPFCS^2(A, B) = \sum_{j=1}^n m_j \cos \left[ \frac{\pi}{4} (|\gamma_A^2(\omega_j) - \gamma_B^2(\omega_j)| + |\eta_A^2(\omega_j) - \eta_B^2(\omega_j)|) \right]$$

$$WPFCS^3(A, B) = \sum_{j=1}^n m_j \cos \left[ \frac{\pi}{2} (|\gamma_A^2(\omega_j) - \gamma_B^2(\omega_j)| \vee |\eta_A^2(\omega_j) - \eta_B^2(\omega_j)| \vee |\pi_A^2(\omega_j) - \pi_B^2(\omega_j)|) \right]$$

$$WPFCS^4(A, B) = \sum_{j=1}^n m_j \cos \left[ \frac{\pi}{4} (|\gamma_A^2(\omega_j) - \gamma_B^2(\omega_j)| + |\eta_A^2(\omega_j) - \eta_B^2(\omega_j)| + |\pi_A^2(\omega_j) - \pi_B^2(\omega_j)|) \right]$$

şekillerinde geliştirilmiştir. Burada  $m_j \in [0, 1]$  ve  $\sum_{j=1}^n m_j = 1$  şeklindedir.

**Teorem 4.5**  $A$  and  $B$  iki Pisagor bulanık küme olmak üzere ,  $WPFCS^k(A, B)$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) ağırlıklı kosinüs fonksiyonu tabanlı benzerlik ölçüsü

**PW1.**  $0 \leq WPFCS^k(A, B) \leq 1$ ,

**PW2.**  $A = B$  gerek ve yeter şart  $WPFCS^k(A, B) = 1$  olmasıdır,

**PW3.**  $WPFCS^k(A, B) = WPFCS^k(B, A)$ ,

**PW4.**  $C \in PFS$  olmak üzere,  $A \subset B \subset C$  ise,  $WPFCS^k(A, C) \leq WPFCS^k(A, B)$  ve  $WPFCS^k(A, C) \leq WPFCS^k(B, C)$  olur

şartlarını sağlar (Wei 2018) .

**İspat.** İspat Önerme 4.4'ün ispatına benzer şekilde yapılabilir. ■

## 4.2 Pisagor Bulanık Kümeler için Kotanjant Fonksiyonu Tabanlı Benzerlik Ölçüsü

**Tanım 4.6**  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$  sonlu bir küme,

$$A = \{ \langle \omega_j, \gamma_A(\omega_j), \eta_A(\omega_j) \rangle : \omega_j \in \Omega \}$$

ve

$$B = \{ \langle \omega_j, \gamma_B(\omega_j), \eta_B(\omega_j) \rangle : \omega_j \in \Omega \}$$

$\Omega$  üzerinde iki pisagor bulanık küme olmak üzere,  $A$  ve  $B$  arasındaki kotanjant fonksiyonu tabanlı iki benzerlik ölçüsü

$$PFCT^1(A, B) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \cot \left[ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} (|\gamma_A^2(\omega_j) - \gamma_B^2(\omega_j)| \vee |\eta_A^2(\omega_j) - \eta_B^2(\omega_j)|) \right]$$

$$PFCT^2(A, B) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \cot \left[ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} (|\gamma_A^2(\omega_j) - \gamma_B^2(\omega_j)| + |\eta_A^2(\omega_j) - \eta_B^2(\omega_j)|) \right]$$

şeklinde tanımlanmıştır (Wei 2018) .

$A$  ve  $B$  pisagor bulanık kümeleri arasındaki kotanjant fonksiyonu tabanlı benzerlik ölçüsü ait olma derecesi, ait olmama derecesi ve duraksama derecesi ile birlikte düşünüldüğünde

$$PFCT^3(A, B) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \cot \left[ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} (|\gamma_A^2(\omega_j) - \gamma_B^2(\omega_j)| \vee |\eta_A^2(\omega_j) - \eta_B^2(\omega_j)| \vee |\pi_A^2(\omega_j) - \pi_B^2(\omega_j)|) \right] \quad (4.9)$$

$$PFCT^4(A, B) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \cot \left[ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} (|\gamma_A^2(\omega_j) - \gamma_B^2(\omega_j)| + |\eta_A^2(\omega_j) - \eta_B^2(\omega_j)| + |\pi_A^2(\omega_j) - \pi_B^2(\omega_j)|) \right] \quad (4.10)$$

şeklinde geliştirilmiştir (Wei 2018) . Ayrıca ağırlıklı kotanjant fonksiyonu tabanlı benzerlik ölçüsü ise

$$WPFCT^1(A, B) = \sum_{j=1}^n m_j \cot \left[ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} (|\gamma_A^2(\omega_j) - \gamma_B^2(\omega_j)| \vee |\eta_A^2(\omega_j) - \eta_B^2(\omega_j)|) \right] \quad (4.11)$$

$$WPFCT^2(A, B) = \sum_{j=1}^n m_j \cot \left[ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} (|\gamma_A^2(\omega_j) - \gamma_B^2(\omega_j)| + |\eta_A^2(\omega_j) - \eta_B^2(\omega_j)|) \right] \quad (4.12)$$

$$WPFCT^3(A, B) = \sum_{j=1}^n m_j \cot \left[ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} (|\gamma_A^2(\omega_j) - \gamma_B^2(\omega_j)| \vee |\eta_A^2(\omega_j) - \eta_B^2(\omega_j)| \vee |\pi_A^2(\omega_j) - \pi_B^2(\omega_j)|) \right] \quad (4.13)$$

$$WFC^4(A, B) = \sum_{j=1}^n m_j \cot \left[ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} (|\gamma_A^2(\omega_j) - \gamma_B^2(\omega_j)| + |\eta_A^2(\omega_j) - \eta_B^2(\omega_j)| + |\pi_A^2(\omega_j) - \pi_B^2(\omega_j)|) \right] \quad (4.14)$$

şeklinde tanımlanır (Wei 2018) .

Tüm bu benzerlik ölçüleri de daha önceki özelliklere benzer özelliklere sahiptir (Wei 2018) .

## 5. PİSAGOR BULANIK NOKTALAR

Bu kısımda Pisagor bulanık nokta kavramı tanımlanacak ve bununla ilişkili bazı notasyonlar verilecektir.

Pisagor bulanık nokta kavramını tanımlamadan önce gerekli olan bir kavramdan başlayalım.

**Tanım 5.1**  $\Omega$  ve  $\Lambda$  boş kümeden farklı iki küme ,  $f : \Omega \rightarrow \Lambda$  bir fonksiyon ve  $A$  ve  $B$ ,  $\Lambda$  üzerinde tanımlı Pisagor bulanık kümeler olsun. O halde  $A$ 'nın görüntüsü  $f[A]$  ile ifade edilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\gamma_{f[A]}(\lambda) := \begin{cases} \sup_{z \in f^{-1}(\lambda)} \gamma_A(z) & , f^{-1}(\lambda) \text{ boş kümeden farklı ise} \\ 0 & , \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

ve

$$\eta_{f[A]}(\lambda) := \begin{cases} \inf_{z \in f^{-1}(\lambda)} \eta_A(z) & , f^{-1}(\lambda) \text{ boş kümeden farklı ise} \\ 1 & , \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

$B$  kümesinin ön-görüntüsü  $f^{-1}[B]$  gösterilir ve

$$\gamma_{f^{-1}[B]}(\omega) := \gamma_B(\omega)$$

ve

$$\eta_{f^{-1}[B]}(\omega) := \eta_B(\omega)$$

şeklinde tanımlanır (Olgun v.d. 2019)

**Tanım 5.2**  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$  sonlu bir küme ,  $u \in \Omega$ ,  $r \in [0, 1]$  ve  $\alpha^2 + \beta^2 = r^2$  olacak biçimde  $\alpha \in [0, 1]$  ve  $\beta \in (0, 1]$  reel sayıları verilsin. Bu durumda  $[u]_{\alpha, \beta} = (c_\alpha, 1 - c_{1-\beta})$ ,  $\Omega$  üzerinde Pisagor bulanık nokta olarak adlandırılır. Burada

$$c_\alpha(\omega) = \begin{cases} \alpha, & \omega = u \\ 0, & \omega \neq u \end{cases}$$

olup

$$1 - c_{1-\beta}(\omega) = \begin{cases} \beta, & \omega = u \\ 1, & \omega \neq u \end{cases}$$

olduğu açıkça görülür. Burada  $u$  noktasına  $[u]_{\alpha,\beta}$  Pisagor bulanık noktasının desteği denir. Ayrıca  $r_{[u]_{\alpha,\beta}} : \Omega \rightarrow [0, 1]$  fonksiyonu  $[u]_{\alpha,\beta}$  Pisagor bulanık kümesinin bağıllık gücü olarak adlandırılır ve

$$r_{[u]_{\alpha,\beta}}(\omega) = \begin{cases} r, & \omega = u \\ 1, & \omega \neq u \end{cases}$$

şeklinde ifade edilir.

Notasyon karışıklığa sebep olmayacağı zamanlarda  $[u]_{\alpha,\beta}$  gösterimi yerine  $[u]$  gösterim şeklinde kullanılacaktır.

**Tanım 5.3**  $[u_1]_{\alpha_1,\beta_1}$  ve  $[u_2]_{\alpha_2,\beta_2}$  iki Pisagor bulanık nokta olmak üzere,  $u_1 = u_2$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2$  ve  $\beta_1 = \beta_2$  ise  $[u_1] = [u_2]$  yazılabilir.

**Tanım 5.4**  $[u]_{\alpha,\beta}$ ,  $\Omega$  üzerinde bir Pisagor bulanık nokta olmak üzere, her  $\omega \in \Omega$  için  $\alpha \leq \gamma_A(\omega)$  ve  $\beta \geq \eta_A(\omega)$  ise  $A$  Pisagor bulanık kümesi  $[u]$  Pisagor bulanık noktasını içerir denir ve  $[u] \in A$  yazılabilir.

**Önerme 5.1**  $A$  bir Pisagor bulanık küme olmak üzere,  $A$  nın içerdiği Pisagor bulanık kümelerin birleşimi  $A$  Pisagor bulanık kümesini verir.

**İspat.**  $\bigcup_{[u] \in A} [u] \subset A$  olduğu kolayca görülebilir. Diğer taraftan  $\omega \in \Omega$  olmak üzere Pisagor bulanık nokta  $\omega_{\gamma_A(\omega), \eta_A(\omega)} \in A$  şeklinde verilsin. O halde

$$\begin{aligned} \mu_{\bigcup_{[u] \in A} [u] \subset A}(\omega) &= \sup_{[u]_{\alpha,\beta} \in A} \alpha \\ &\geq \gamma_A(\omega) \end{aligned}$$

olur. Burada supremumdaki  $\alpha$  değerinin  $u$  ya bağlı olduğunu unutmayalım.  $\omega \in \Omega$  keyfi olduğu için  $\gamma_{\bigcup_{[u] \in A} [u] \subset A}(\omega) \geq \gamma_A(\omega)$  şeklinde yazabiliriz. Benzer şekilde  $\eta_{\bigcup_{[u] \in A} [u] \subset A} \leq \eta_A$  elde edilir. Böylece  $A \subset \bigcup_{[u] \in A} [u]$  olup ispat tamamlanır. ■

**Önerme 5.2**  $f : \Omega \rightarrow \Lambda$  bir fonksiyon ve  $[u]_{\alpha,\beta} \in \Omega$  olsun. O halde  $[u]_{\alpha,\beta}$  in görüntüsü

$$f[u] := f[[u]_{\alpha,\beta}] = [f(u)]_{\alpha,\beta}$$

olacak şekilde Pisagor bulanık noktasıdır. Burada  $r_{f[u]_{\alpha,\beta}} = r_{[u]_{\alpha,\beta}}$  bağıllık gücü ve  $f(u)$  desteği  $\Lambda$  nin elemanıdır.

**İspat.** Tanım 5.1 den,

$$\begin{aligned} \gamma_{f[A]}(\lambda) &= \begin{cases} \sup_{z \in f^{-1}(\lambda)} \gamma_A(z) & , f^{-1}(\lambda) \text{ boş kümeden farklı ise} \\ 0 & , \text{diğer durumlarda} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \alpha & , u \in f^{-1}(\lambda) \text{ ise} \\ 0 & , \text{diğer durumlarda} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \alpha & , u \in f^{-1}(\lambda) \text{ ise} \\ 0 & , \text{diğer durumlarda} \end{cases} . \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \eta_{f[A]}(\lambda) &= \begin{cases} \inf_{z \in f^{-1}(\lambda)} \gamma_A(z) & , f^{-1}(\lambda) \text{ boş kümeden farklı ise} \\ 0 & , \text{diğer durumlarda} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \beta & , u \in f^{-1}(\lambda) \text{ ise} \\ 0 & , \text{diğer durumlarda} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \beta & , u \in f^{-1}(\lambda) \text{ ise} \\ 0 & , \text{diğer durumlarda} \end{cases} . \end{aligned}$$

eşitlikleri yazılır. Bu ise ispatı tamamlar. Not etmek gerekir ki  $f(u)$ ,  $\Lambda$ 'da sıradan bir nokta iken,  $f[u] \in \Lambda$  bir Pisagor bulanık noktadır. ■

## 5.1 Pisagor Bulanık için Üstel Benzerlik Ölçüsü

Bu kısımda Pisagor bulanık kümeler için bir üstel benzerlik ölçüsü verilecektir ve  $WPFC^1$  benzerlik ölçüsü ile üstel benzerlik ölçüsü arasındaki ilişki ile ilgili bir örnek çözülecektir.

**Tanım 5.5**  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$  sonlu bir küme,

$$A = \{ \langle \omega_j, \gamma_A(\omega_j), \eta_A(\omega_j) \rangle : \omega_j \in \Omega \}$$

ve

$$B = \{ \langle \omega_j, \gamma_B(\omega_j), \eta_B(\omega_j) \rangle : \omega_j \in \omega \}$$

$\Omega$  üzerinde iki pisagor bulanık küme olmak üzere,  $A$  ve  $B$  arasındaki üstel benzerlik ölçüsü

$$S_0(A, B) = \sum_{i=1}^n m_i e^{-|\gamma_A^2(x_i) - \gamma_B^2(x_i)|} e^{-|\eta_A^2(x_i) - \eta_B^2(x_i)|}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada  $\sum_{i=1}^n m_i = 1$  olmak üzere  $m_i \geq 0$  bir reel sayıdır (Nguyen v.d. 2019).

Herhangi bir Pisagor bulanık nokta, Pisagor bulanık küme olarak düşünüldüğünde iki Pisagor nokta arasında benzerlik ölçüsü tanımlamak için bilinen bir benzerlik ölçüsü kullanabiliriz. Varsayalım ki  $[u]$ ,  $m_j$  desteği ile bir Pisagor bulanık nokta olsun.  $[u]$  nun ait olma fonksiyonu herhangi bir noktada  $m \neq m_j$  iken 0 değerini ve  $[u]$ 'nun ait olmama fonksiyonu herhangi bir noktada  $m \neq m_j$  iken 1 değerini alır. Bu yüzden, iki pisagor bulanık nokta arasındaki benzerlik ölçüsünün hesaplanmasındaki bu değerler önemli değildir. Böylece ağırlıklar

$$w_i = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

şeklinde tanımlanabilir. Aşağıdaki örnekte Pisagor bulanık noktalar arasındaki benzerlik ölçüsünün farklı değerler verdiği gösterilmiştir. Burada  $WPFC^1$  ve  $S_0$  benzerlik ölçüleri kullanılmıştır.

**Örnek 5.1**  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$  sonlu kümesi verilsin ve Pisagor bulanık noktalar  $[\omega_1]_{0.9,0.4}$ ,  $[\omega_1]_{0.1,0.4}$  ve  $[\omega_1]_{0.5,0.5}$  aynı  $x_i$  desteği ile şeklinde tanımlansın. Bu noktalar

$$[\omega_1]_{0.9,0.4} = \{ \langle \omega_1, 0.9, 0.4 \rangle, \langle \omega_1, 0, 1 \rangle, \langle \omega_1, 0, 1 \rangle \}$$

$$[\omega_1]_{0.1,0.4} = \{ \langle \omega_1, 0.1, 0.4 \rangle, \langle \omega_1, 0, 1 \rangle, \langle \omega_1, 0, 1 \rangle \}$$

$$[\omega_1]_{0.5,0.5} = \{ \langle \omega_1, 0.5, 0.5 \rangle, \langle \omega_1, 0, 1 \rangle, \langle \omega_1, 0, 1 \rangle \}$$

şeklinde ifade edildiklerinden  $WPFC^1$  ve  $S_0$  benzerlik ölçüleri kullanılarak verilen kümeler üzerinde hesaplanmış Tablo 5.1 de verilmiştir.

Tablo 5.1'de,  $WPFC^1$  VE  $S_0$  benzerlik ölçülerine göre  $[x_1]_{0.9,0.4}$  ve  $[x_1]_{0.5,0.5}$  ile  $[x_1]_{0.1,0.4}$  ve  $[x_1]_{0.5,0.5}$  arasındaki benzerlik ölçüsü değerleri verilmiştir.  $WPFC^1$  benzerlik benzerlik kullandığımız zaman  $[x_1]_{0.9,0.4}$  ve  $[x_1]_{0.5,0.5}$  arasındaki benzerlik ölçüsü  $[x_1]_{0.1,0.8}$  ve

Tablo 5.1.  $WPFC^1$  ve  $S_0$  benzerlik ölçülerine göre benzerlik

	$[x_1]_{0.9,0.4}, [x_1]_{0.5,0.5}$	$[x_1]_{0.1,0.4}, [x_1]_{0.5,0.5}$
$WPFC^1$	0.83073	0.0749838
$S_0$	0.625002	0.860708

$[x_1]_{0.4,0.5}$  arasındaki benzerlik ölçüsünden daha büyüktür ancak  $S_0$  benzerlik ölçüsü kullanıldığı zaman bu durum tam aksinedir. Bu yüzden Örnek 5.1  $WPFC^1$  ve  $S_0$  kullanıldığında iki farklı sonuç elde edilmiş olur.

## 6. PİSAGOR BULANIK KÜMELER İÇİN BAZI KARAR VERME UYGULAMALARI

Bu bölümde Pisagor bulanık kümeler için örüntü tanıma ve medikal tanı problemleri incelenecektir.

### 6.1 Örüntü Tanıma

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$  kriterler kümesi

$$A_1 = (\omega_1, 1.0, 0.0), (\omega_2, 0.8, 0.0), (\omega_3, 0.7, 0.1)$$

$$A_2 = (\omega_1, 0.8, 0.1), (\omega_2, 1.0, 0.0), (\omega_3, 0.9, 0.1)$$

$$A_3 = (\omega_1, 0.6, 0.2), (\omega_2, 0.8, 0.0), (\omega_3, 1.0, 0.0)$$

Pisagor bulanık kümeler ile temsil edilen üç tane örüntü olsun:

$A \in PFSs(\Omega)$  ise bilinmeyen bir örüntü olmak üzere

$$A = (\omega_1, 0.5, 0.3), (\omega_2, 0.6, 0.2), (\omega_3, 0.8, 0.1)$$

şeklinde tanımlansın. Buradaki amaç  $A$  örüntüsünü,  $A_1, A_2, A_3$  örüntülerinden biri ile sınıflandırmaktır. Tablo 6.1'e bakıldığında benzerlik ölçüleri sırasıyla hesaplanmıştır.

Benzerlikler  $(A_3, A)$ 'da maksimum değerleri almış olup bilinmeyen  $A$  örüntüsü bilinen  $A_3$  örüntüsü ile eşleşmiştir. Ağırlıklandırma yapıldığında  $m_1 = 0.5, m_2 = 0.3, m_3 = 0.2$  olmak üzere ağırlıklı benzerlik ölçüsü Tablo 6.2 de verilmiştir. Burada tablo incelendiğinde 10 benzerlik ölçüsü tarafından elde edilen sonuçlarla  $A_3$  ve  $A$  arasında maksimum değerleri almış olup bilinmeyen  $A$  örüntüsü bilinen  $A_3$  örüntüsü ile eşleşmiştir (Wei 2018) .

### 6.2 Medikal Tanı

$D = \{D_1(\text{viral ateş}), D_2(\text{sıtma}), D_3(\text{tifo}), D_4(\text{karın ağrısı problemi}),$

$D_5(\text{göğüs ağrısı problemi})\}$  tanı kümesi ve  $M = \{M_1(\text{ateş}), M_2(\text{baş ağrısı}), M_3(\text{karın ağrısı}),$

$M_4(\text{öksürük}), M_5(\text{göğüs ağrısı})\}$  semptomlar kümesi ve  $D_i(i = 1, \dots, 5)$  ve  $M_i(i =$

Tablo 6.1.  $A_i$  ve  $A$  arasındaki benzerlik ölçüsü

Benzerlik ölçüsü	$(A_1, A)$	$(A_2, A)$	$(A_3, A)$
$PFC^1(A_i, A)$	0.9783	0.9800	0.9888
$PFC^2(A_i, A)$	0.7252	0.7431	0.9089
$PFCS^1(A_i, A)$	0.7533	0.7728	0.9114
$PFCS^2(A_i, A)$	0.9173	0.9282	0.9729
$PFCS^3(A_i, A)$	0.7533	0.7728	0.9114
$PFCS^4(A_i, A)$	0.7533	0.7728	0.9114
$PFCT^1(A_i, A)$	0.5406	0.5244	0.6750
$PFCT^2(A_i, A)$	0.7181	0.7101	0.8007
$PFCT^3(A_i, A)$	0.5406	0.5244	0.6750
$PFCT^4(A_i, A)$	0.5406	0.5244	0.6750

1, ..., 5) Pisagor bulanık kümeleri verilsin. Varsayalım ki bir hasta verilen tüm semptomları taşıyor ve aşağıdaki gibi bir gösterime sahip olsun.

$$H(Hasta) = \{(m_1, 0.8, 0.1), (m_2, 0.6, 0.1), (m_3, 0.2, 0.8), (m_4, 0.6, 0.1), (m_5, 0.1, 0.6)\}.$$

Her semptomu taşımak üzere tanımlar aşağıdaki tanımlansın:

$$D_1(viral ateş) = \{(m_1, 0.4, 0.0), (m_2, 0.3, 0.5), (m_3, 0.1, 0.7), (m_4, 0.4, 0.3), (m_5, 0.1, 0.7)\}$$

$$D_2(sıtma) = \{(m_1, 0.7, 0.0), (m_2, 0.2, 0.6), (m_3, 0.0, 0.9), (m_4, 0.7, 0.0), (m_5, 0.1, 0.8)\}$$

$$D_3(tifo) = \{(m_1, 0.3, 0.3), (m_2, 0.6, 0.1), (m_3, 0.2, 0.7), (m_4, 0.2, 0.6), (m_5, 0.1, 0.9)\}$$

$$D_4(karın ağrısı) = \{(m_1, 0.1, 0.7), (m_2, 0.2, 0.4), (m_3, 0.8, 0.0), (m_4, 0.2, 0.7), (m_5, 0.2, 0.7)\}$$

$$D_5(göğüs ağrısı) = \{(m_1, 0.1, 0.8), (m_2, 0.0, 0.8), (m_3, 0.2, 0.8), (m_4, 0.2, 0.8), (m_5, 0.8, 0.1)\}$$

Buradaki amaç  $H$  hastasını,  $D_1, D_2, D_3, D_4, D_5$  tanımlarından biri ile sınıflandırmaktır. Bunun için öne sürülmüş olan benzerlik ölçüleri  $H$  ve  $D_i$  arasında hesaplanmıştır ve Tablo 6.3 te verilmiştir.

Tablo 6.3 e bakıldığında  $D_2$  ve  $H$  arasındaki benzerlik ölçüsü diğer benzerlik ölçüleri arasında en büyük değeri almıştır. Şimdi  $m_1 = 0.15, m_2 = 0.25, m_3 = 0.20,$

$m_4 = 0.15, m_5 = 0.25$  şeklinde verilsin.  $H$  ve  $D_i$  arasındaki ağırlıklı benzerlik ölçüsü

Tablo 6.2.  $A_i$  ve  $A$  arasındaki ağırlıklı benzerlik ölçüsü

Benzerlik ölçüsü	$(A_1, A)$	$(A_2, A)$	$(A_3, A)$
$WPFC^1(A_i, A)$	0.9686	0.9712	0.9844
$WPFC^2(A_i, A)$	0.6273	0.7237	0.9266
$WPFCS^1(A_i, A)$	0.6573	0.7627	0.9329
$WPFCS^2(A_i, A)$	0.8843	0.9228	0.9782
$WPFCS^3(A_i, A)$	0.6573	0.7627	0.9329
$WPFCS^4(A_i, A)$	0.6573	0.7627	0.9329
$WPFCT^1(A_i, A)$	0.4475	0.4995	0.7206
$WPFCT^2(A_i, A)$	0.6554	0.6887	0.8225
$WPFCT^3(A_i, A)$	0.4475	0.4995	0.7206
$WPFCT^4(A_i, A)$	0.4475	0.4995	0.7206

değerleri Tablo 6.4 de hesaplanmıştır. Tablo 6.4 e bakarak aşağıdaki sonuçları elde ederiz.

- $WPFC^1(A_i, B)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4, 5$  , benzerlik ölçüsü için  $D_3$  ve  $H$  arasındaki benzerlik derecesi en büyük değerlerden biridir. Bu yüzden  $H$  hastası bilinen  $D_3$  tanı sınıfına aittir.
- $WPFC^2(A_i, B)$ ,  $WPFCS^1(A_i, B)$ ,  $WPFCS^2(A_i, B)$ ,  $WPFCS^3(A_i, B)$ ,  $WPFCS^4(A_i, B)$ ,  $WPFCT^3(A_i, B)$ ,  $WPFCT^4(A_i, B)$ ,  $i=1,2,3,4,5$  , benzerlik ölçüleri için  $D_2$  ve  $H$  arasında en büyük değeri alır. Böylece  $H$  hastası bilinen  $D_2$  tanı sınıfına aittir.
- $WPFCT^1(A_i, B)$ ,  $WPFCT^2(A_i, B)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4, 5$  , benzerlik ölçüleri için  $D_1$  ve  $H$  arasındaki benzerlik ölçüsü derecesi en büyüktür. Bu yüzden  $H$  hastası bilinen  $D_1$  tanı sınıfına aittir.

Tablo 6.3.  $D_i$  ve  $H$  arasındaki benzerlik ölçüsü

Benzerlik ölçüsü	$(D_1, H)$	$(D_2, H)$	$(D_3, H)$	$(D_4, H)$	$(D_5, H)$
$PFC^1(D_i, H)$	0.8497	0.8271	0.7712	0.2951	0.2385
$PFC^2(D_i, H)$	0.8736	0.9051	0.7955	0.6213	0.5110
$PFCS^1(D_i, H)$	0.9086	0.9347	0.8470	0.7339	0.6392
$PFCS^2(D_i, H)$	0.9617	0.9626	0.9352	0.7879	0.7428
$PFCS^3(D_i, H)$	0.9040	0.9340	0.8470	0.7317	0.6392
$PFCS^4(D_i, H)$	0.9040	0.9340	0.8470	0.7317	0.6392
$PFCT^1(D_i, H)$	0.6815	0.7121	0.6357	0.4856	0.4393
$PFCT^2(D_i, H)$	0.7816	0.8003	0.7516	0.5497	0.5157
$PFCT^3(D_i, H)$	0.6721	0.7095	0.6357	0.4779	0.4393
$PFCT^4(D_i, H)$	0.6721	0.7095	0.6357	0.4779	0.4393

Tablo 6.4.  $D_i$  ve  $H$  arasındaki ağırlıklı benzerlik ölçüsü

Benzerlik ölçüsü	$(D_1, H)$	$(D_2, H)$	$(D_3, H)$	$(D_4, H)$	$(D_5, H)$
$WPFC^1(D_i, H)$	0.8237	0.7840	0.8283	0.3512	0.2360
$WPFC^2(D_i, H)$	0.8865	0.8904	0.8116	0.6629	0.5205
$WPFCS^1(D_i, H)$	0.9191	0.9250	0.8599	0.7627	0.6392
$WPFCS^2(D_i, H)$	0.9623	0.9554	0.9449	0.8115	0.7502
$WPFCS^3(D_i, H)$	0.9151	0.9244	0.8599	0.7601	0.6392
$WPFCS^4(D_i, H)$	0.9151	0.9244	0.8599	0.7601	0.6392
$WPFCT^1(D_i, H)$	0.6965	0.6917	0.6623	0.5193	0.4393
$WPFCT^2(D_i, H)$	0.7861	0.7802	0.7778	0.5844	0.5210
$WPFCT^3(D_i, H)$	0.6876	0.6898	0.6623	0.5096	0.4393
$WPFCT^4(D_i, H)$	0.6876	0.6898	0.6623	0.5096	0.4393

## 7. TARTIŞMA VE SONUÇ

Karar verme uygulamaları , çelişen bir çok kriter altında en iyi seçeneği bulma yöntemidir. Karar sürecinde çeşitli benzerlik ölçüleri kullanılarak en doğru seçimin hangisi olduğu benzerlik değerleri ile bulunabilir. Burada örüntü tanıma probleminde de yapıldığı gibi kosinüs benzerlik değerleri arasındaki en büyük değer örüntünün eşlenmesine yardımcı olur. Medical tanı problemlerinde ise hasta için en uygun teşhisin bulunmasını sağlar. Çok kriterli karar verme, medikal tanı ve örüntü tanıma gibi bir çok alana sahiptir. Bu tezde bulanık ve sezgisel bulanık kümeler hatırlatılıp Pisagor bulanık küme kavramı detaylı bir şekilde incelenmiştir. Pisagor nokta kavramı tanımlanıp bunun devamında Pisagor bulanık kümeler için kosinüs ve üstel benzerlik ölçüleri incelenmiş ve bu ölçüler kullanılarak örüntü tanıma problemleri incelenmiştir.

## KAYNAKLAR

- Atanassov, K. T., 1986. *Intuitionistic Fuzzy Sets*, Fuzzy Sets and Systems, 20, 87–96.
- Garg, H., 2016. *A New Generalized Pythagorean Fuzzy Information Aggregation Using Einstein Operations and Its Application to Decision Making*, International Journal of Intelligent Systems, 31(9), 998–999.
- Khan, M.S.A., Abdullah, S., Ali, A., Siddiqui, N., and Amin, F., 2017. *Pythagorean Hesitant Fuzzy Sets and Their Application to Group Decision Making with Incomplete Weight Information*, Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, 33(6), 3971–3985.
- Lu, M., Wei, G., Alsaadi, F.E., Hayat, T., and Alsaedi, A., 2017. *Hesitant Pythagorean Fuzzy Hamacher Aggregation Operators and Their Application to Multiple Attribute Decision Making*, Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, 33(2), 1105–1117.
- Nguyen, X. T., Garg, H. 2019. *Exponential Similarity Measures for Pythagorean Fuzzy Sets and Their Applications to Pattern Recognition and Decision-Making Process*, Complex and Intelligent Systems, 5(2), 217–228.
- Olgun, M., Ünver, M., Yardımcı, Ş., 2019. *Pythagorean Fuzzy Topological Spaces*, Complex and Intelligent Systems, 5(2), 177–183.
- Olgun, M., Ünver, M., Yardımcı, Ş., 2019. *Pythagorean Fuzzy Points and Applications in Pattern Recognition and Pythagorean Fuzzy Topologies*, Soft Computing, 25(7), 5225–5232.
- Peng, X., and Yang, Y., 2015. *Some Results for Pythagorean Fuzzy Sets*, International Journal of Intelligent Systems, 30(11), 1133–1160.
- Shi, L. L., Ye, J., Yardımcı, Ş., 2013. *Study on Fault Diagnosis of Turbine Using an Improved Cosine Similarity Measure for Vague sets.*, Journal Appl. Sci., 13(10), 1781–1786.
- Yager, R. R., 2013. *Pythagorean Fuzzy Subsets*, 2013 Joint IFSA World Congress and NAFIBS Annual Meeting (IFSA/ NAFIBS), 57–61.
- Ye, J., 2011. *Cosine Similarity Measures for Intuitionistic Fuzzy Sets and Their Applications*, Mathematical and Computer Modelling, 53, 91–97.
- Zadeh, L. A., 1965. *Fuzzy Sets*, Information and Control, 8, 338–353.
- Zeng, S., Chen J., and Li, X., 2016. *A Hybrid Method for Pythagorean Fuzzy Multiple-Criteria Decision Making*, International Journal of Information Technology and Decision Making, 15(02), 403–422.
- Zhang, X., and Xu, Z., 2014. *Extension of TOPSIS to Multiple Criteria Decision Making with Pythagorean Fuzzy Sets*, International Journal of Intelligent Systems, 29(12), 1061–1078.

- Wei, G., 2017. *Pythagorean Fuzzy Interaction Aggregation Operators and Their Application to Multiple Attribute Decision Making*, Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, 33(4) , 2119–2132, 1043–1070.
- Wei, G., Wei, Y., 2018. *Similarity Measures of Pythagorean Fuzzy Sets Based On The Cosine Function and Their Applications*, International Journal of Intelligent Systems, 33(3), 634–652.
- Wei, G., and Wei, Y., 2018. *Similarity Measures of Pythagorean Fuzzy Sets Based on The Cosine Function and Their Applications*, International Journal of Intelligent Systems, 33(3), 634–652.

