

T.C.
YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SAYISAL DEĞİŞKENE BAĞLI ABSTRACT
FONKSİYONLARIN KUVVET SERİSİNE AÇILIMININ
KULLANILMASIYLA OPERATÖR DENKLEMLERİN
ÇÖZÜM YÖNTEMİ ÜZERİNE

GÖKÇEHAN BAYRAKTAR

TEZ DANIŞMANI

DR. ÖĞR. ÜYESİ HÜRMET FULYA AKIZ

İKİNCİ TEZ DANIŞMANI

DOÇ. DR. HÜSEYİN KAMACI

YOZGAT - 2022

T.C.
YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SAYISAL DEĞİŞKENE BAĞLI ABSTRACT
FONKSİYONLARIN KUVVET SERİSİNE AÇILIMININ
KULLANILMASIYLA OPERATÖR DENKLEMLERİN
ÇÖZÜM YÖNTEMİ ÜZERİNE

GÖKÇEHAN BAYRAKTAR

TEZ DANIŞMANI

DR. ÖĞR. ÜYESİ HÜRMET FULYA AKIZ

İKİNCİ TEZ DANIŞMANI

DOÇ. DR. HÜSEYİN KAMACI

YOZGAT - 2022

TEZ BEYANI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan eder, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

GÖKÇEHAN BAYRAKTAR

06/06/2022

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SAYISAL DEĞİŞKENE BAĞLI ABSTRACT FONKSİYONLARIN KUVVET SERİSİNE AÇILIMININ KULLANILMASIYLA OPERATÖR DENKLEMLERİN ÇÖZÜM YÖNTEMİ ÜZERİNE

GÖKÇEHAN BAYRAKTAR

YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI: DR. ÖĞR. ÜYESİ HÜRMET FULYA AKIZ
İKİNCİ DANIŞMAN: DOÇ. DR. HÜSEYİN KAMACI

Bu tezde, sayısal değişkene bağlı abstract (soyut) fonksiyonların ve operatör-fonksiyonların temel özellikleri ayrıntılı olarak incelenmiştir. Bu fonksiyonlar için limit, süreklilik, diferansiyel ve Riemann integral kavramları ve ayrıca özellikleri verilmiştir. Abstract fonksiyonların kuvvet serisine açılımı gösterilmiş ve sonrasında Abel teoremi ve ispatı sunulmuştur. Analitik abstract fonksiyonlar verilmiş ve Taylor serisine açılımı gösterilmiştir. Daha sonra, abstract fonksiyonların ve operatör-fonksiyonların kuvvet serisine açılımı yardımıyla $Ax - \lambda Cx = y$ ve $A(\lambda)x = y(\lambda)$ şeklindeki operatör denklemlerin çözüm yöntemleri sunulmuştur. Son olarak, önerilen bu çözüm yöntemlerinin etkinliğini göstermek için parametreye bağlı operatör denklemin çözümüne ait bir örnek verilmiştir.

2022, ix+33

ANAHTAR KELİMELER: Abstract fonksiyonlar, Operatör-fonksiyonlar, Analitik abstract fonksiyonlar, Operatör denklemlerin çözümleri.

ABSTRACT

MASTER THESIS

**ON THE SOLUTION METHOD OF OPERATOR EQUATIONS USING POWER
SERIES EXPANSION OF ABSTRACT FUNCTIONS DEPENDING ON
NUMERICAL VARIABLES**

GÖKÇEHAN BAYRAKTAR

**YOZGAT BOZOK UNIVERSITY
SCHOOL OF GRADUATE STUDIES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS**

**SUPERVISOR: ASST. PROF. DR. HÜRMET FULYA AKIZ
CO-SUPERVISOR: ASSOC. PROF. DR. HÜSEYİN KAMACI**

In this thesis, the basic properties of abstract functions and operator-functions depending on numerical variables are examined in detail. For these functions, the concepts of limit, continuity, differential and Riemann integral as well as their properties are given. Power series expansion of abstract functions is shown, and then Abel's theorem and its proof are presented. Analytical abstract functions are given and their expansion into Taylor series is shown. Then, using the power series expansion of abstract functions and operator-functions, the solution methods of operator equations in the form of $Ax - \lambda Cx = y$ and $A(\lambda)x = y(\lambda)$ are presented. Finally, an example of the solution of the parameter dependent operator equation is given to demonstrate the effectiveness of these proposed solution methods.

2022, ix+33

KEYWORDS: Abstract functions, Operator-functions, Analytical abstract functions, Solutions of operator equations.

ÖNSÖZ

“Sayısal Değişkene Bağlı Abstract Fonksiyonların Kuvvet Serisine Açılımının Kullanılmasıyla Operatör Denklemlerin Çözüm Yöntemi Üzerine” başlıklı tez çalışmasının seçiminden sonuçlandırılmasına kadar geçen tüm aşamalarda değerli zamanlarını ayırarak her türlü destek ve yardımlarını esirgemeyen ve bilgileriyle beni yönlendiren değerli tez danışmanlarım Dr. Öğr. Üyesi Hürmet Fulya AKIZ ve Doç. Dr. Hüseyin KAMACI’ya teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek lisans ders döneminde kendilerinden çok şey öğrendiğim kıymetli hocam Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV’e çok teşekkür ederim.

Tezi inceleyerek değerli yorumlarıyla teze katkı sağlayan jüri üyelerine teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek lisans eğitimi konusunda beni cesaretlendiren, çalışmalarım boyunca yardımını hiç esirgemeyen değerli arkadaşım Nuray SUCU’ya teşekkürü bir borç bilirim.

Her zaman maddi ve manevi desteğini yanımda hissettiğim ve yüksek lisans eğitimim süresince bana moral veren aileme sonsuz teşekkür ederim.

GÖKÇEHAN BAYRAKTAR

06/06/2022

İÇİNDEKİLER

Tez Onay Sayfası.....	ii
Tez Beyanı.....	iii
Özet.....	iv
Abstract.....	v
Önsöz.....	vi
İçindekiler.....	vii
Simgeler ve Kısaltmalar Listesi.....	ix
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL BİLGİLER.....	3
2.1. Lineer Uzaylar.....	3
2.2. Normlu Uzaylar.....	4
2.3. Banach Uzayları.....	4
2.4. Operatörler.....	5
2.5. Lineer Operatörler.....	6
2.6. Normlu Uzaylarda Operatörler, Limit ve Süreklilik.....	6
2.7. Sınırlı Lineer Operatörler.....	7
2.8. Lineer Operatörün Normu ve $\mathcal{L}(X, Y)$ Normlu Uzayı.....	7
2.9. Lineer Normlu Uzaylarda Ters Operatörler.....	8
3. SAYISAL DEĞİŞKENE BAĞLI ABSTRACT FONKSİYONLAR.....	11
3.1. Abstract Fonksiyonun Tanımı, Limiti ve Sürekliliği.....	11
3.2. Abstract Fonksiyonun Diferansiyellenmesi.....	13
3.3. Abstract Fonksiyonlar için Riemann İntegrali.....	15
3.4. Abstract Fonksiyonların Kuvvet Serisine Açılımı.....	17
3.5. Analitik Abstract Fonksiyonlar ve Taylor Serileri.....	21
4. ABSTRACT FONKSİYONLARIN KUVVET SERİSİNE AÇILIMI İLE OPERATÖR DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜNÜN BULUNMASI.....	24
5. OPERATÖR-FONKSİYONLARIN KUVVET SERİSİNE AÇILIMI İLE OPERATÖR DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜNÜN BULUNMASI.....	26
6. PARAMETREYE BAĞLI OPERATÖR DENKLEMİN ÇÖZÜMÜNE AİT BİR ÖRNEK.....	28

7. SONUÇ VE ÖNERİLER	31
8. KAYNAKLAR.....	32
ÖZGEÇMİŞ	



SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklamalar
$\ A\ $: A 'nın normu
$ A $: A 'nın mutlak değeri
$x'(\lambda)$: x fonksiyonunun λ noktasındaki birinci türevi
$x^{(k)}(\lambda)$: x fonksiyonunun λ noktasındaki k -yüncü türevi
\mathbb{R}	: Reel sayılar kümesi
\mathbb{C}	: Kompleks sayılar kümesi

Kısaltmalar	Açıklamalar
max	: Maksimum
min	: Minimum
sup	: Supremum

1. GİRİŞ

Fonksiyon 17. yüzyıldan beri bilinen ve matematiğin temel konuları arasında yer alan bir kavramdır. Bir fonksiyon üç temel parçadan oluşur: Girdi, bağıntı, çıktı. Kısaca, fonksiyon girdilerin her birini en az ve en çok bir çıktıya bağlayan bağıntı olarak düşünülebilir. Matematiksel olarak, A ve B iki küme olmak üzere A 'dan B 'ye bir fonksiyon $f: A \rightarrow B$ şeklinde ifade edilebilir. A 'ya f fonksiyonun tanım kümesi (bölgesi), B 'ye f fonksiyonun değer kümesi (bölgesi) ve $f(A) \subseteq B$ kümesine de f fonksiyonun görüntü kümesi (bölgesi) denir. Fonksiyonların tanım bölgesi ve değer bölgesi, küme yapısını taşıyan keyfi seçimlerdir. Dolayısıyla, bu bölgeler özel olarak cebirsel yapılar, topolojik uzaylar, lineer uzaylar, normlu uzaylar, Banach uzayları veya Hilbert uzayları gibi özel yapılar seçilebilir. Özellikle matematik temelli araştırmalarda, tanım bölgesi veya değer bölgesi bu tip uzay yapıları olan fonksiyonlar ilgi çekmiştir. Genellikle, tanım ve değer bölgeleri vektör uzaylar olan fonksiyonlara operatör veya operatör-fonksiyonlar denilmektedir (Nikolski, 2002; Morris, 2020). 1972 yılında Ladas ve Lakshmikantham tarafından yayımlanan 'Differential Equations in Abstract Spaces' isimli kitabın birinci bölümünde, tanım bölgesi reel veya kompleks sayılar kümesi ve değer bölgesi Banach uzayı olan fonksiyonlar ile ilgilenildi ve bu fonksiyonlar abstract fonksiyonlar olarak isimlendirildi. Ayrıca, bu kitap bölümünde, abstract fonksiyonların sürekliliği ve diferansiyellenebilirliği tartışıldı ve bu fonksiyonlar için Riemann integrali ve bazı temel özellikleri incelendi.

Bu tez çalışmasında, abstract fonksiyonlar için limit, süreklilik, diferansiyel, integral gibi kavramların özelliklerinin geliştirmesi ve ayrıca bu fonksiyonların kuvvet serisine açılımı ile bazı operatör denklemlerin çözümünün araştırılması amaçlanmaktadır. Bunlara ek olarak, hem abstract fonksiyonların hem de operatör-fonksiyonların kuvvet serisine açılımı yardımıyla bazı operatör denklemlerin çözümünün incelenmesi hedeflenmektedir. Bu amaçlar doğrultusunda, bu çalışmada, abstract fonksiyonlar üzerine temellenmiş yeni kavramlar, özellikler, önermeler ve çözüm yaklaşımları sunulmaktadır.

Tez çalışmasının yapısı şu şekilde organize edilmiştir: İkinci bölümde, lineer uzay, normlu uzay, Banach uzayı, lineer operatör, sınırlı lineer operatör gibi bazı temel kavramlar ve özellikleri verildi. Üçüncü bölümde, abstract fonksiyonlar için limit, süreklilik, diferansiyel, integral gibi kavramlar verildi ve bu kavramların özellikleri incelendi. Ayrıca, abstract fonksiyonların kuvvet serisine açılımı ve analitik abstract

fonksiyonların Taylor serisine açılımı tanıtıldı. Dördüncü ve beşinci bölümlerde, abstract fonksiyonların ve operatör-fonksiyonların kuvvet serisine açılımı yardımıyla $Ax - \lambda Cx = y$ ve $A(\lambda)x = y(\lambda)$ şeklindeki operatör denklemlerin çözüm yöntemleri araştırıldı. Altıncı bölümde, parametreye bağlı operatör denklemin çözümüne ait bir örnek verildi. Son bölümde, bu tez çalışmasının bazı sonuçları ve gelecek araştırmalara yönelik öneriler sunuldu.



2. TEMEL BİLGİLER

Bu bölümde, bazı kaynaklardan (Chen vd., 2004; Jebriil ve Ali, 2003; Hille ve Phillips, 1957; Nikolski, 2002; Trenogin, 1980; Yosida, 1995; Zeidler, 1995) yararlanılarak lineer uzay, normlu uzay, Banach uzayı, lineer operatör, sınırlı lineer operatör ve ters operatör gibi temel kavramlar ve özellikleri verilir.

2.1. Lineer Uzaylar

Tanım 2.1.1. E bir küme ve \mathfrak{F} bir cisim olsun.

- i. $E \times E$ 'den E 'ye $\forall x, y \in E$ için $(x, y) \rightarrow x + y$ şeklinde tanımlanan toplama fonksiyonu
- ii. $\mathfrak{F} \times E$ 'den E 'ye $\forall \lambda \in \mathfrak{F}$ ve $\forall x \in E$ için $(\lambda, x) \rightarrow \lambda x$ şeklinde tanımlanan skaler ile çarpma fonksiyonu

için aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa E 'ye \mathfrak{F} üzerinde bir lineer uzay (vektör uzayı) denir.

$\forall x, y, z \in E$ ve $\forall \lambda, \mu \in \mathfrak{F}$ için,

$$L1) x + y = y + x,$$

$$L2) x + (y + z) = (x + y) + z,$$

$$L3) \forall x \in E \text{ için } x + 0 = 0 + x = x \text{ olacak şekilde bir } 0 \in E \text{ vardır,}$$

$$L4) \forall x \in E (x \neq 0) \text{ için } x + (-x) = (-x) + x = 0 \text{ olacak şekilde bir } -x \in E \text{ vardır,}$$

$$L5) \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y,$$

$$L6) (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x,$$

$$L7) \lambda(\mu x) = (\lambda \mu)x,$$

$$L8) 1x = x.$$

Eğer $\mathfrak{F} = \mathbb{R}$ ise E reel lineer uzay, $\mathfrak{F} = \mathbb{C}$ ise E kompleks lineer uzay olarak isimlendirilir.

Tanım 2.1.1'den aşağıdaki özellikler görülür:

- 1) $\forall x \in E$ için $0x = 0$,
- 2) λ skaleri için $\lambda 0 = 0$,
- 3) $(-1)x = -x$.

(3) özelliği göz önüne alınarak, y elemanının tersi $-y$ olmak üzere $x-y = x + (-1)y$ dir.

Örnek 2.1.2. $C_{[a,b]}$ uzayı $[a, b]$ aralığında tanımlanmış sürekli $x(t), y(t), z(t), \dots$ fonksiyonların kümesini temsil eder. $[a, b]$ aralığında sürekli olan fonksiyonların toplamı

ve $[a, b]$ aralığında sürekli olan fonksiyonun skaler ile çarpımı da sürekli fonksiyon olduğundan sürekli fonksiyonların kümesi $C_{[a,b]}$ bir lineer uzay oluşturur.

2.2. Normlu Uzaylar

Tanım 2.2.1. E lineer uzay ve $\|\cdot\|: E \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $\forall x, y \in E$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{F}$ için,

$$N1) \|x\| \geq 0 \text{ ve } \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

$$N2) \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|,$$

$$N3) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

özellikleri sağlanıyorsa $\|\cdot\|$ fonksiyonuna E üzerinde bir norm ve $(E, \|\cdot\|)$ ikilisine bir normlu uzay denir.

(N3) de verilen normun üçgen eşitsizliği yardımı ile ters üçgen eşitsizliği

$$\left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\| \quad (2.1)$$

şeklinde elde edilir.

Tanım 2.2.2. $(E, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay olmak üzere $E \times E$ üzerinde

$$\rho(x, y) = \|x - y\| \quad (2.2)$$

ile tanımlı ρ fonksiyonu E üzerinde bir metriktir ve bu metriğe norm tarafından üretilen metrik denir. Yani, $\forall x, y, z \in E$ için,

$$M1) \rho(x, y) \geq 0,$$

$$M2) \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$$

$$M3) \rho(x, y) = \rho(y, x),$$

$$M4) \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(y, z).$$

Örnek 2.2.3. $C_{[a,b]}$ lineer uzayında $x(t) \in C_{[a,b]}$ nin normu

$$\|x\|_{\infty} = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)| \quad (2.3)$$

şeklinde tanımlanır. $C_{[a,b]}$ bir normlu uzaydır.

2.3. Banach Uzayları

Tanım 2.3.1. E normlu uzay ve $\{x_n\}$, E uzayında bir dizi olsun. $n \rightarrow \infty$ için $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ olacak şekilde bir $x \in E$ varsa (yani, $\forall \varepsilon > 0$ için $n \geq n_0$ olduğunda $\|x_n - x\| < \varepsilon$ olacak

şekilde bir n_0 sayısı varsa) $\{x_n\}$ dizisi x 'e yakınsaktır denir ve $n \rightarrow \infty$ iken $x_n \rightarrow x$ ile gösterilir.

Tanım 2.3.2. $m, n \rightarrow \infty$ için $\|x_m - x_n\| \rightarrow 0$ ise (yani, $\forall \varepsilon > 0$ için $m, n \geq n_0$ olduğunda $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir n_0 sayısı varsa) $\{x_n\}$ dizisine E normlu uzayında Cauchy dizisi denir.

Her yakınsak dizi bir Cauchy dizisidir. Fakat her Cauchy dizisi bir yakınsak dizi değildir.

Tanım 2.3.3. Bir normlu uzayda her Cauchy dizisi yakınsak ise bu uzaya tam uzay denir.

Tanım 2.3.4. Bir normlu uzay tam ise bu uzaya Banach uzayı denir.

Örnek 2.3.5. $C_{[a,b]}$ normlu uzayı aynı zamanda bir Banach uzayıdır.

2.4. Operatörler

X ve Y iki uzay olsun. X uzayının bir D alt uzayını alalım. Her bir $x \in D$ elemanına yalnız ve yalnız bir $y \in Y$ elemanı karşılık getirildiğinde D uzayında bir $y = F(x)$ operatörü tanımlanır. Bu D uzayına F operatörünün tanım bölgesi denir ve $D(F)$ şeklinde gösterilir.

Aşağıdaki eşitlikle tanımlanan

$$R = R(F) = \{y \in Y: y = F(x), x \in D(F)\} \quad (2.4)$$

uzayına F operatörünün değerler bölgesi denir. Bu operatör $F: X \rightarrow Y$ şeklinde gösterilir. Bu gösterimde $X = D(F)$ ve $Y = R(F)$ eşitlikleri değil $D(F) \subseteq X$ ve $R(F) \subseteq Y$ kapsamaları kastedilir.

Burada $f(t, s, x)$ fonksiyonunun $[a, b] \times [a, b] \times (-\infty, +\infty)$ uzayında tanımlanmış sürekli bir fonksiyon olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$(Fx)(t) = \int_a^b f(t, s, x(s)) ds, \quad t \in [a, b] \quad (2.5)$$

eşitliği ile bir $F: C_{[a,b]} \rightarrow C_{[a,b]}$ operatörü tanımlanmış olur. Bu eşitlikle tanımlanan F operatörüne integral operatör denir.

2.5. Linear Operatörler

Tanım 2.5.1. X ve Y iki lineer uzay olsun. $A: X \rightarrow Y$ operatörünün tanım bölgesi $D(A)$ bir lineer manifold olduğunda, yani her bir $x, y \in D(A)$ ve her bir λ, μ skaler sayıları için $\lambda x + \mu y \in D(A)$ olduğunda ve ayrıca

$$A(\lambda x + \mu y) = \lambda Ax + \mu Ay \quad (2.6)$$

eşitliği sağlandığında A operatörüne lineer operatör denir. Burada, lineer operatör A 'nın değerler bölgesi $R(A)$ 'nın da bir lineer manifold olduğu kolaylıkla görülebilir.

2.6. Normlu Uzaylarda Operatörler, Limit ve Süreklilik

Bu bölümde, X ve Y normlu uzaylar olmak üzere $F: X \rightarrow Y$ operatörünün verildiğini ve F operatörünün tanım bölgesi x_0 noktasının bir

$$S_r(x_0) = \{x \in X: \|x - x_0\| < r\} \quad (2.7)$$

komşuluğunu sağladığını varsayalım. Burada belirtilen x_0 noktası $D(F)$ bölgesine dahil olmayabilir.

Tanım 2.6.1. Keyfi $\varepsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ sayısı vardır öyle ki $\|x - x_0\| < \delta$ şartını sağlayan her $x \in S_r(x_0)$ için $\|F(x) - y_0\| < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanıyorsa $y_0 \in Y$ elemanına $F(x)$ operatörünün $x \rightarrow x_0$ şartında limiti denir ve $\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = y_0$ veya $x \rightarrow x_0$ için $F(x) \rightarrow y_0$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.6.2. $F: X \rightarrow Y$ operatörü, $x_0 \in X$ noktasının bir $S_r(x_0) \subset X$ komşuluğunda tanımlansın. $x \rightarrow x_0$ için $F(x) \rightarrow F(x_0)$ olduğunda F operatörü x_0 noktasında süreklidir denir.

Tanım 2.6.3. Q kümesi X normlu uzayından alınmış bir küme olsun. Her bir $x \in Q$ elemanı için $\|x\| \leq R$ eşitsizliğini sağlayan bir $R > 0$ sayısı varsa Q kümesine sınırlı küme denir.

Tanım 2.6.4. $F(x)$ operatörünün tanım bölgesinin $D(F) \subseteq X$ ve değerler bölgesinin $R(F) \subseteq Y$ olduğunu varsayalım. Burada $D(F)$ tanım bölgesinden alınmış her bir sınırlı kümeyi Y uzayının sınırlı kümesine dönüştüren F operatörüne sınırlı operatör denir.

2.7. Sınırlı Linear Operatörler

Tanım 2.7.1. $D(A) = X$ ve $R(A) \subseteq Y$ şartlarını sağlayan A lineer operatörü için

$$\{\|Ax\|: \|x\| \leq 1\} \quad (2.8)$$

kümesi sınırlı olduğunda A operatörüne sınırlı operatör denir.

Teorem 2.7.2. A lineer operatörünün sınırlı olması için gerek ve yeter şart bir $c > 0$ sayısında her bir $x \in X$ için

$$\|Ax\| < c\|x\| \quad (2.9)$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

Teorem 2.7.3. X ve Y uzayları Banach uzayları ve $A: X \rightarrow Y$ operatörü $D(A) = X$ olan lineer operatör olsun. Bu A operatörünün sürekli olması için gerek ve yeter şart bu operatörünün sınırlı olmasıdır.

Örnek olarak

$$v(t) = \int_a^b K(t,s)u(s) ds \quad (2.10)$$

eşitliği ile tanımlanan integral operatörünü ele alalım. Burada $K(t,s)$ fonksiyonunun $[a,b] \times [a,b]$ karesinde sürekli bir fonksiyon olduğunu varsayalım. Bu durumda (2.10) eşitliği $C_{[a,b]}$ uzayında bir A sınırlı lineer operatörü aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$(Au)(t) = \int_a^b K(t,s)u(s) ds \quad (2.11)$$

Bu integral operatörü için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\|Au\|_{C_{[a,b]}} \leq \left(\max_{t \in [a,b]} \int_a^b |K(t,s)| ds \right) \|u\|_{C_{[a,b]}} \quad (2.12)$$

2.8. Linear Operatörün Normu ve $\mathcal{L}(X, Y)$ Normlu Uzayı

X normlu uzayının tümünde tanımlanmış ve değerleri Y normlu uzayında olan lineer ve sürekli A, B, C, \dots operatörlerinin kümesini ele alalım. Bu kümede operatörlerin toplamı ve skaler ile çarpımı işlemleri sırasıyla $(A + B)x = Ax + Bx$ ve $(\lambda A)x = \lambda Ax$ eşitlikleriyle tanımlanır.

Burada X ve Y uzaylarının her ikisi de ya reel ya da kompleks olması gerekir. X ve Y uzaylarının her ikisinin de reel olması halinde operatörlerin reel sayılarla çarpımı, her ikisinin de kompleks olması halinde ise kompleks sayılarla çarpımı tanımlanır. Böylece bu yöntemle lineer sürekli operatörlerin lineer uzayı tanımlanmış olur. Operatörlerin bu lineer uzayında norm aşağıdaki formülle tanımlanır:

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| \quad (2.13)$$

Bu tanıma dayanarak (Teorem 2.7.2 ile)

$$\|Ax\| \leq \|A\| \|x\| \quad (2.14)$$

eşitsizliği bulunur.

X normlu uzayının tümünde tanımlanmış ve değerleri Y normlu uzayında olan lineer sürekli operatörlerin normlu uzayı sembolik olarak $\mathcal{L}(X, Y)$ şeklinde gösterilir.

Bu durumda aşağıdaki teorem verilir.

Teorem 2.8.1. X normlu uzay ve Y Banach uzayı ise $\mathcal{L}(X, Y)$ uzayı Banach uzayı olur.

$\mathcal{L}(X, X)$ uzayı kısaca $\mathcal{L}(X)$ ile gösterilir. $\mathcal{L}(X)$ uzayında operatörlerin çarpımı tanımlanabilir. $A \in \mathcal{L}(X)$ ve $B \in \mathcal{L}(X)$ için $(AB)x = A(Bx)$ dir. $A \in \mathcal{L}(X)$ için k doğal sayı olmak üzere A^k da tanımlıdır. $\mathcal{L}(X)$ uzayında operatörlerin çarpımı işlemi operatörlere bağlı operatör-fonksiyonların tanımlanmasına imkan sağlar. Örneğin

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}, \quad A^0 = I \quad (2.15)$$

Burada $e^A \in \mathcal{L}(X)$ ve $\|e^A\| \leq e^{\|A\|}$ olur.

2.9. Lineer Normlu Uzaylarda Ters Operatörler

Tanım 2.9.1. ($N(A)$ Sıfırlar Kümesi) $A: X \rightarrow Y$ lineer operatörünün verildiğini varsayalım. Burada X ve Y lineer uzaylardır ve A operatörünün tanım bölgesi $D(A) \subseteq X$ ve değerler bölgesi $R(A) \subseteq Y$ dir.

A operatörünün sıfırlar kümesi $N(A)$ ile gösterilir ve

$$N(A) = \{x \in D(A): Ax = 0\} \quad (2.16)$$

eşitliği ile verilir.

Teorem 2.9.2. A operatörünün $D(A)$ tanım bölgesini $R(A)$ değerler bölgesine bire-bir eşlemesi için gerek ve yeter şart $N(A) = \{0\}$ olmasıdır.

A operatörü $D(A)$ tanım bölgesini $R(A)$ değerler bölgesine bire-bir eşlediğinde $A^{-1}: R(A) \rightarrow D(A)$ ters operatörü tanımlanabilir.

Teorem 2.9.3. A^{-1} operatörü tanımlı ise bu operatörün $R(A)$ da sınırlı olması için gerek ve yeter şart her bir $x \in D(A)$ için $m > 0$ olmak üzere

$$\|Ax\| \leq m \|x\| \quad (2.17)$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

Tanım 2.9.4. $A: X \rightarrow Y$ operatörü için $R(A) = Y$ ve ayrıca A operatörünün ters operatörü $A^{-1}: Y \rightarrow D(A)$ mevcut ve sınırlı olduğunda, yani $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$ olduğunda lineer A operatörüne sürekli dönüştürülebilir operatör denir.

Teorem 2.9.5. A operatörünün sürekli dönüştürülebilir olması için gerek ve yeter şart $R(A) = Y$ ve tüm $x \in D(A)$ için (2.17) eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

Teorem 2.9.6. (($I - C$)⁻¹ Ters Operatörünün Varlığı Teoremi) $C \in \mathcal{L}(X)$ olduğunu ve $\|C\| < 1$ şartının sağlandığını varsayalım. Bu durumda $I - C$ operatörü sürekli dönüştürülebilendir ve aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır:

$$\|(I - C)^{-1}\| \leq (1 - \|C\|)^{-1} \quad (2.18)$$

$$\|I - (I - C)^{-1}\| \leq \|C\|(1 - \|C\|)^{-1} \quad (2.19)$$

Teorem 2.9.7. $A, B \in \mathcal{L}(X, Y)$ olsun. Ayrıca A operatörünün sürekli dönüştürülebilir olduğunu ve

$$\|(B - A)A^{-1}\| < 1 \quad (2.20)$$

eşitsizliğin sağlandığını varsayalım. Bu durumda B operatörü de sürekli dönüştürülebilendir ve aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır:

$$\|B^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|(B - A)A^{-1}\|} \quad (2.21)$$

$$\|B^{-1} - A^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\| \|(B - A)A^{-1}\|}{1 - \|(B - A)A^{-1}\|} \quad (2.22)$$

Bu teoremden aşağıdaki sonuç çıkarılır.

Sonuç 2.9.8. A operatörünün sürekli dönüştürülebilir olduğunu ve

$$\|B - A\| < \|A^{-1}\|^{-1} \quad (2.23)$$

eşitsizliğin sağlandığını varsayalım. Bu durumda B operatörü sürekli dönüştürülebilendir ve aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır.

$$\|B^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|B - A\| \|A^{-1}\|} \quad (2.24)$$

$$\|B^{-1} - A^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|^2 \|B - A\|}{1 - \|B - A\| \|A^{-1}\|} \quad (2.25)$$



3. SAYISAL DEĞİŞKENE BAĞLI ABSTRACT FONKSİYONLAR

Bu bölümde, ilk olarak abstract fonksiyonun tanımı, limiti, sürekliliği, diferansiyeli ve integrali verilir ve özellikleri detaylı olarak incelenir. Daha sonra, abstract fonksiyonların kuvvet serisine açılımı, analitik abstract fonksiyonlar ve bu fonksiyonların Taylor serisine açılımı sunulur. Bu bölüm ‘Differential Equations in Abstract Spaces’ isimli kitabın ‘The Calculus of Abstract Functions’ başlıklı birinci bölümünden yararlanılarak oluşturulmuştur (Ladas ve Lakshmikantham, 1972).

3.1. Abstract Fonksiyonun Tanımı, Limiti ve Sürekliliği

Tanım 3.1.1. Λ sayısal eksen üzerindeki veya kompleks düzlem üzerindeki noktaların bir kümesi ve X bir Banach uzay olsun. Tanım bölgesi Λ ve değerler bölgesi X Banach uzayı (tam normlu uzay) olan bir $x(\lambda)$ dönüşümüne sayısal değişkene bağlı (sayısal değişkenli) abstract fonksiyon denir.

Not 1. Şu andan itibaren aksi belirtilmedikçe normlu uzay terimiyle tam normlu uzay ifade edilecektir.

Tanım 3.1.2. $x(\lambda)$ abstract fonksiyonu λ_0 noktasının bir komşuluğunda tanımlanmış olsun (λ_0 noktasında tanımlanmamış da olabilir). Bu durumda $\lambda \rightarrow \lambda_0$ iken $\|x(\lambda) - a\| \rightarrow 0$ ise $a \in X$ elemanına $x(\lambda)$ fonksiyonunun $\lambda \rightarrow \lambda_0$ şartında limiti denir ve $a = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} x(\lambda) = y_0$ veya $\lambda \rightarrow \lambda_0$ şartında $x(\lambda) \rightarrow a$ şeklinde gösterilir.

Özellik 1. i. $x(\lambda)$ abstract fonksiyonu için $\lambda \rightarrow \lambda_0$ şartında $x(\lambda) \rightarrow a$ ve $\varphi(\lambda)$ skaler fonksiyonu için $\lambda \rightarrow \lambda_0$ şartında $\varphi(\lambda) \rightarrow \alpha$ ise bu takdirde $\lambda \rightarrow \lambda_0$ şartında $\varphi(\lambda) x(\lambda) \rightarrow \alpha a$ dir.

ii. $x(\lambda)$ ve $y(\lambda)$ abstract fonksiyonları için $\lambda \rightarrow \lambda_0$ şartında $x(\lambda) \rightarrow a$ ve $y(\lambda) \rightarrow b$ ise bu takdirde $x(\lambda) + y(\lambda) \rightarrow a + b$ dir.

Gerçekten,

$$\begin{aligned} \|\varphi(\lambda) x(\lambda) - \alpha a\| &= \|(\varphi(\lambda) x(\lambda) - \varphi(\lambda) a) + (\varphi(\lambda) a) - \alpha a\| \\ &\leq |\varphi(\lambda)| \|x(\lambda) - a\| + |\varphi(\lambda) - \alpha| \|a\| \end{aligned} \quad (3.1)$$

eşitsizliğinden $\lambda \rightarrow \lambda_0$ şartında $\varphi(\lambda) x(\lambda) \rightarrow \alpha a$ olduğu görülür.

$$\begin{aligned}\|x(\lambda) + y(\lambda) - (a + b)\| &= \|(x(\lambda) - a) + (y(\lambda) - b)\| \\ &\leq \|(x(\lambda) - a)\| + \|(y(\lambda) - b)\|\end{aligned}\quad (3.2)$$

eşitsizliğinden $\lambda \rightarrow \lambda_0$ şartında $x(\lambda) + y(\lambda) \rightarrow a + b$ olduğu görülür.

Özellik 2. $\lambda \rightarrow \lambda_0$ şartında $x(\lambda) \rightarrow a$ ise $\|x(\lambda)\| \rightarrow \|a\|$ dir.

$x(\lambda)$ vektörü λ_0 noktasının bir komşuluğunda sınırlı olduğu göz önüne alınır (fakat λ_0 noktasında sınırlı olmayabilir). Bu durumda $|\|x(\lambda)\| - \|a\|| \leq \|x(\lambda) - a\|$ ters üçgen eşitsizliğinden $\lambda \rightarrow \lambda_0$ şartında $\|x(\lambda)\| \rightarrow \|a\|$ olduğu görülür.

Not 2. λ reel değişken olduğunda abstract fonksiyonun tek yönlü limitleri de tanımlanabilir.

$x(\lambda)$ abstract fonksiyonu λ_0 noktasının bir komşuluğunda tanımlanmış olsun. $\lambda \rightarrow \lambda_0$ şartında $x(\lambda) \rightarrow x(\lambda_0)$ ise $x(\lambda)$ abstract fonksiyonuna λ_0 noktasında süreklidir denir.

Özellik 3. $x(\lambda)$ ve $y(\lambda)$ abstract fonksiyonları ve $\varphi(\lambda)$ skaler fonksiyonu λ_0 noktasında sürekli olsun. Bu durumda $\varphi(\lambda)x(\lambda)$ ve $x(\lambda) + y(\lambda)$ fonksiyonları da λ_0 noktasında sürekli fonksiyonlardır. Bu özellik Özellik 1'den yararlanılarak ispatlanabilir.

Özellik 4. $x(\lambda)$ abstract fonksiyonu λ_0 noktasında sürekli olsun. Bu durumda $\|x(\lambda)\|$ fonksiyonu da λ_0 noktasında süreklidir. λ_0 noktasının öyle bir komşuluğu vardır ki bu komşulukta $x(\lambda)$ fonksiyonu sınırlıdır.

Bu özellik, $|\|x(\lambda)\| - \|x(\lambda_0)\|| \leq \|x(\lambda) - x(\lambda_0)\|$ ters üçgen eşitsizliğinden yararlanılarak ispatlanabilir.

X ve Y Banach uzayları ve $\mathcal{L}(X, Y)$, X uzayının tümünde tanımlanmış ve değerleri Y uzayında olan sınırlı operatörlerin normlu uzayı olsun. $\mathcal{L}(X, Y)$ uzayında λ sayısal değişkenine bağlı $A(\lambda)$ operatör-fonksiyonunu göz önüne alalım. Yani her bir $\lambda \in A$ için $A(\lambda) \in \mathcal{L}(X, Y)$ olan $A(\lambda)$ operatör-fonksiyonunu göz önüne alalım.

Abstract fonksiyonlar için yukarıdaki Özellik 1-4 operatör-fonksiyonlar için de geçerlidir. $A(\lambda)$ operatör fonksiyonun λ_0 noktasında limit ve sürekliliği benzer şekilde tanımlanır. Keyfi $\varepsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ sayısı vardır öyle ki $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ şartını sağlayan her bir $\lambda \in S_r(\lambda_0)$ için $\|A(\lambda) - A_0\| < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanıyorsa $A_0 \in \mathcal{L}(X, Y)$ operatörüne $A(\lambda)$ operatör-fonksiyonunun λ_0 noktasındaki limiti denir. $A(\lambda)$ operatör-fonksiyonu λ_0 noktasının bir komşuluğunda ($S_r(\lambda_0)$) tanımlanmış olsun (λ_0 noktasında tanımlanmış

olmayabilir). $\lambda \rightarrow \lambda_0$ şartında $A(\lambda) \rightarrow A(\lambda_0)$ ise $A(\lambda)$ operatör-fonksiyonu λ_0 noktasında süreklidir denir.

Özellik 5. Değerleri X Banach uzayında olan $x(\lambda)$ abstract fonksiyonunu ve değerleri $\mathcal{L}(X, Y)$ uzayında olan $A(\lambda)$ operatör-fonksiyonunu varsayalım. Ayrıca, Y 'nin Banach uzayı olduğunu varsayalım. Eğer $\lambda \rightarrow \lambda_0$ şartında $x(\lambda) \rightarrow a$ ve $A(\lambda) \rightarrow A$ ise bu takdirde $\lambda \rightarrow \lambda_0$ şartında $A(\lambda)x(\lambda) \rightarrow Aa$ dir.

λ_0 noktasında $x(\lambda)$ ve $A(\lambda)$ sürekli olduklarında bu λ_0 noktasında $A(x)x(\lambda)$ çarpımı da λ_0 noktasında sürekli olur.

$[\alpha, \beta]$ aralığında $x(\lambda)$ abstract fonksiyonu tanımlansın. Bu fonksiyon (α, β) aralığının her bir noktasında sürekli ve α noktasında sağdan sürekli (yani $\lambda \rightarrow \alpha + 0$ şartında $x(\lambda) \rightarrow x(\alpha)$) ve β noktasında soldan sürekli (yani $\lambda \rightarrow \beta - 0$ şartında $x(\lambda) \rightarrow x(\beta)$) ise $x(\lambda)$ abstract fonksiyonuna $[\alpha, \beta]$ aralığında süreklidir denir.

Abstract $x(\lambda)$ fonksiyonu $[\alpha, \beta]$ aralığında sürekli olduğunda bu abstract fonksiyonu $[\alpha, \beta]$ aralığında sınırlı fonksiyon olur.

3.2. Abstract Fonksiyonunun Diferansiyellenebilirliği

Tanım 3.2.1. Sayısal α değişkenine bağlı değerleri X Banach uzayında olan $x(\lambda)$ abstract fonksiyonu λ_0 noktasının bir komşuluğunda tanımlansın. Bu durumda

$$x'(\lambda_0) = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \frac{x(\lambda) - x(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} \quad (3.3)$$

limit varsa $x'(\lambda_0)$ ifadesine $x(\lambda)$ fonksiyonunun λ_0 noktasındaki türevi denir. $x(\lambda)$ fonksiyonunun λ_0 noktasında türevi mevcutsa $x(\lambda)$ fonksiyonuna λ_0 noktasında diferansiyellenebilir denir.

Özellik 1. $x(\lambda)$ abstract fonksiyonu λ_0 noktasında diferansiyellenebilir ise $x(\lambda)$ fonksiyonu bu λ_0 noktasında sürekli fonksiyondur.

(3.3) eşitliğini sembolik olarak

$$x(\lambda) - x(\lambda_0) = x'(\lambda_0)(\lambda - \lambda_0) + o(x(\lambda_0), \lambda - \lambda_0) \quad (3.4)$$

şeklinde yazalım. $o(x(\lambda_0), \lambda - \lambda_0)$ ifadesi $\lambda - \lambda_0$ ifadesine göre daha yüksek mertebeden sıfıra yakınsak ifadedir. (3.4) eşitliğinin her yanından $\lambda \rightarrow \lambda_0$ şartında limite geçtiğimizde

$x(\lambda)$ fonksiyonu λ_0 noktasında diferansiyellenebilir olduğunda $x(\lambda)$ fonksiyonunun λ_0 noktasında sürekli olduğu görülür.

Kolaylıkla aşağıdaki özellikler de ispatlanır.

Özellik 2. $x(\lambda)$ ve $y(\lambda)$ abstract fonksiyonları λ_0 noktasında diferansiyellenebilir ise $x(\lambda) + y(\lambda)$ toplamı da λ_0 noktasında diferansiyellenebilirdir ve

$$(x + y)'(\lambda_0) = x'(\lambda_0) + y'(\lambda_0) \quad (3.5)$$

eşitliği sağlanır.

Özellik 3. $x(\lambda)$ abstract fonksiyonu ve $\varphi(\lambda)$ skaler fonksiyonu λ_0 noktasında diferansiyellenebilir ise $\varphi(\lambda) x(\lambda)$ fonksiyonu da λ_0 noktasında diferansiyellenebilirdir ve

$$(\varphi x)'(\lambda_0) = \varphi'(\lambda_0) x(\lambda_0) + \varphi(\lambda_0) x'(\lambda_0) \quad (3.6)$$

eşitliği sağlanır.

Özellik 4. $x(\lambda) \in X$ abstract fonksiyonu ve $A(\lambda) \in \mathcal{L}(X, Y)$ operatör-fonksiyonu λ_0 noktasında diferansiyellenebilir ise $A(\lambda) x(\lambda)$ fonksiyonu da λ_0 noktasında diferansiyellenebilirdir ve

$$(Ax)'(\lambda_0) = A'(\lambda_0) x(\lambda_0) + A(\lambda_0) x'(\lambda_0) \quad (3.7)$$

eşitliği sağlanır.

Özellik 5. Öncelikle hatırlatalım ki; lineer $A: X \rightarrow Y$ operatörünün $R(A)$ değerler bölgesi $R(A) = Y$ olduğunda ve A operatörünün ters operatörü A^{-1} sınırlı olduğunda yani $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$ olduğunda bu lineer A operatörüne sürekli dönüştürülen (sürekli ters operatörü olan) operatör denir.

$A(\lambda)$ operatör-fonksiyonu λ_0 noktasında diferansiyellenebilir ve λ_0 noktasının bir komşuluğunda $A(\lambda)$ operatör fonksiyonu sürekli dönüştürülebilir ise bu takdirde $A^{-1}(\lambda)$ ters operatör-fonksiyonu da λ_0 noktasında diferansiyellenebilirdir ve

$$(A^{-1})'(\lambda_0) = -A^{-1}(\lambda_0) A'(\lambda_0) A^{-1}(\lambda_0) \quad (3.8)$$

eşitliği sağlanır.

$x(\lambda)$ abstract fonksiyonunun yüksek mertebeli türevleri ardışık olarak tanımlanır. $x'(\lambda)$ türevinin \mathfrak{M} açık kümesinin noktalarında var olduğunu varsayalım. Bu $x'(\lambda)$ abstract fonksiyonu \mathfrak{M} kümesinin noktalarında diferansiyellenebilir olduğunda $x''(\lambda) =$

$[x']'(\lambda)$ alınır. Tümevarım yöntemi ile $x^{(k)}(\lambda)$ abstract fonksiyonu diferansiyellenebilir olduğunda $x^{(k+1)}(\lambda) = [x^{(k)}]'(\lambda)$ şeklinde tanımlanır, burada $x^{(k)}(\lambda) = \frac{d^k x(\lambda)}{d\lambda^k}$ dir. $x(\lambda)$ abstract fonksiyonunun λ_0 noktasında istenilen mertebeden türevleri mevcutsa bu fonksiyona λ_0 noktasında sonsuz mertebeden diferansiyellenebilirdir denir.

3.3. Abstract Fonksiyonlar için Riemann İntegrali

Tanım 3.3.1. $x: [a, b] \rightarrow X$ bir abstract fonksiyon olsun. Ayrıca, τ_i ($\lambda_i \leq \tau_i \leq \lambda_{i+1}$, $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$) noktalarını içeren $[a, b]$ aralığının parçalanışı ($a = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n = b$) σ ile gösterilsin ve $|\sigma| = \max_i |\lambda_{i+1} - \lambda_i|$ olsun. Bu durumda, Riemann toplamı

$$S_\sigma = \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_{i+1} - \lambda_i) x(\tau_i) \quad (3.9)$$

formundadır.

Eğer $|\sigma| \rightarrow 0$ iken $\lim S_\sigma$ mevcutsa ve X 'te σ 'dan bağımsız bir \mathcal{J} elemanı yakınsarsa, \mathcal{J} 'ya $x(\lambda)$ abstract fonksiyonunun Riemann integrali denir ve

$$\mathcal{J} = \int_a^b x(\lambda) d\lambda \quad (3.10)$$

ile gösterilir.

Teorem 3.3.2. Eğer $x: [a, b] \rightarrow X$ sürekli bir abstract fonksiyon ise bu takdirde $\int_a^b x(\lambda) d\lambda$ Riemann integrali mevcuttur.

İspat. Kapalı ve sınırlı bir aralıkta sürekli bir fonksiyonun düzgün sürekli olduğu ve X uzayının tam olduğu kullanılarak ispat kolaylıkla görülür.

Riemann integralin tanımını kullanarak, abstract fonksiyonlar için aşağıdaki özellikler verilebilir:

- i. $\int_a^b x(\lambda) d\lambda = -\int_b^a x(\lambda) d\lambda$
- ii. $\int_a^b x(\lambda) d\lambda = \int_a^c x(\lambda) d\lambda + \int_c^b x(\lambda) d\lambda$, $a < c < b$
- iii. $\lambda \in [a, b]$ için $x(\lambda) \equiv x_0$ ise $\int_a^b x_0 d\lambda = (b - a)x_0$ dır.
- iv. $\lambda = \eta(\tau)$, $[\alpha, \beta]$ aralığında artan sürekli bir fonksiyon öyle ki $a = \eta(\alpha)$ ve

$b = \eta(\beta)$ ise $\int_a^b x(\lambda) d\lambda = \int_a^\beta x(\eta(\tau)) \eta'(\tau) d\tau$ dır.

$$v. \quad \left\| \int_a^b x(\lambda) d\lambda \right\| \leq \int_a^b \|x(\lambda)\| d\lambda$$

Teorem 3.3.3. Eğer $\{x_n(\lambda)\}$ sürekli abstract fonksiyonların bir dizisi olsun. Bu dizi $[a, b]$ aralığındaki $x(\lambda)$ sürekli abstract fonksiyonuna düzgün yakınsaksa bu takdirde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b x_n(\lambda) d\lambda = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(\lambda) d\lambda = \int_a^b x(\lambda) d\lambda \quad (3.11)$$

dir.

İspat. Riemann integralin (v) özelliğini kullanarak (abstract fonksiyon için),

$$\begin{aligned} \left\| \int_a^b x_n(\lambda) d\lambda - \int_a^b x(\lambda) d\lambda \right\| &\leq \int_a^b \|x_n(\lambda) - x(\lambda)\| d\lambda \\ &\leq \max_{[a,b]} \|x_n(\lambda) - x(\lambda)\| (b - a) \end{aligned} \quad (3.12)$$

yazılabilir. Bu durumda, $n \rightarrow \infty$ iken $\left\| \int_a^b x_n(\lambda) d\lambda - \int_a^b x(\lambda) d\lambda \right\| \rightarrow 0$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.3.4. Eğer $x: [a, b] \rightarrow X$ sürekli bir abstract fonksiyon ise bu takdirde

$$\frac{d}{d\lambda} \int_a^\lambda x(s) ds = x(\lambda), \quad a \leq \lambda \leq b \quad (3.13)$$

dir.

İspat. $y(\lambda) = \int_a^\lambda x(s) ds$ olsun. $x(\lambda)$ abstract fonksiyonu $[a, b]$ aralığında düzgün süreklidir ve dolayısıyla

$$\begin{aligned} \left\| \frac{y(\lambda + h) - y(\lambda)}{h} - x(\lambda) \right\| &= \left\| h^{-1} \int_\lambda^{\lambda+h} (x(s) - x(\lambda)) ds \right\| \\ &\leq \max_{|s-\lambda| \leq |h|} \|x(s) - x(\lambda)\| \end{aligned} \quad (3.14)$$

yazılabilir. Bu durumda, $h \rightarrow 0$ iken $\left\| \frac{y(\lambda+h) - y(\lambda)}{h} - x(\lambda) \right\| \rightarrow 0$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.3.5. $x: [a, b] \rightarrow X$ bir abstract fonksiyonu sürekli diferansiyellenebilir ise bu durumda herhangi $\alpha, \beta \in (a, b)$ için

$$\int_{\alpha}^{\beta} x'(s) ds = x(\beta) - x(\alpha) \quad (3.15)$$

dir.

İspat. Teorem 3.3.4 den,

$$\frac{d}{d\lambda} \left[\int_a^{\lambda} x'(s) ds - x(\lambda) \right] \equiv 0, \quad \alpha \leq \lambda \leq \beta \quad (3.16)$$

yazılabilir. Dolayısıyla,

$$\int_a^{\lambda} x'(s) ds - x(\lambda) = \text{sabit} \quad (3.17)$$

dir. (3.17) eşitliğinde $\lambda = a$ için $\text{sabit} = -x(a)$ bulunur ve $\lambda = \beta$ alınarak sonuç elde edilir. Böylece ispat sonuçlanır.

$x: [a, b) \rightarrow X$ bir abstract fonksiyon öyle ki $b \leq \infty$ da tanımsız olsun. Bu durumda, $\int_a^b x(\lambda) d\lambda$ has olmayan integrali

$$\int_a^b x(\lambda) d\lambda = \begin{cases} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} x(\lambda) d\lambda, & b \leq \infty \\ \lim_{T \rightarrow \infty} \int_a^T x(\lambda) d\lambda, & b = \infty \end{cases} \quad (3.18)$$

şeklinde tanımlanır.

3.4. Abstract Fonksiyonların Kuvvet Serisine Açılımı

X normlu uzayında

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_k (\lambda - \lambda_0)^k \quad (3.19)$$

serisini göz önüne alalım. Burada $x_k \in X$ dir, fakat λ reel veya kompleks değişkendir. Bu seride $\lambda - \lambda_0 = \mu$ alabiliriz. Dolayısıyla, $\lambda_0 = 0$ olarak alınırsa (3.19) da verilen seri aşağıdaki seriye dönüşür.

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_k \lambda^k \quad (3.20)$$

Kuvvet serileri normlu uzaylarda özel seri tipidir. Bu kuvvet serilerinde serinin terimleri λ parametresine bağlıdır.

$$S_n(\lambda) = \sum_{k=0}^n x_k \lambda^k \quad (3.21)$$

sonlu toplamına (3.20) da verilen kuvvet serisinin kısmi toplamı denir.

(3.20) da verilen kuvvet serisinin yakınsak olduğu λ noktalarının kümesi olan Ω kümesine (3.20) da verilen serinin yakınsak olduğu bölge denir.

$\lambda \in \Omega$ için (3.20) kuvvet serisinin toplamı $S(\lambda)$ ile gösterilir. $S(\lambda)$ fonksiyonu Ω bölgesinde tanımlanmış ve değerleri X normlu uzayında olan abstract fonksiyondur. Bu durumda

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_k \lambda^k = S(\lambda) \quad (3.22)$$

olur. Burada her bir $\lambda \in \Omega$ için $n \rightarrow \infty$ şartında

$$S_n(\lambda) \rightarrow S(\lambda) \quad (3.23)$$

olur. (3.20) kuvvet serisinin yakınsaklık bölgesi boş değildir, burada $0 \in \Omega$ olduğu açıktır.

Şimdi aşağıdaki Abel teoremi verilebilir.

Teorem 3.4.1. (Abel Teoremi) $\lambda_0 \neq 0$ ve $\lambda_0 \in \Omega$ olduğunda $S_{|\lambda_0|}(0)$ dairesi Ω yakınsaklık bölgesine dahil olur. $r < |\lambda_0|$ şartını sağlayan her bir $\bar{S}_r(0)$ dairesinde (3.20) serisi λ değişkenine göre mutlak (absolute) ve düzgün yakınsak olur. Burada $S_r(0) = \{\lambda \in \Lambda : |\lambda| < r\}$ ve $\bar{S}_r(0) = \{\lambda \in \Omega : |\lambda| \leq r\}$ dir.

(3.20) serisi norma göre yakınsak olduğunda yani $n \rightarrow \infty$ şartında $\|S_n(\lambda) - S(\lambda)\| \rightarrow 0$ olduğunda bu seriye düzgün yakınsak seri denir.

(3.20) serisine uygun olan

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|x_k \lambda^k\| \quad (3.24)$$

sayısal serisi yakınsak olduğunda (3.20) serisine mutlak (absolute) yakınsak seri denir.

İspat. $\lambda_0 \in \Omega$ için (3.20) serisinin bu noktada yakınsak olduğu söylenebilir. Yakınsak serinin genel terimi sifira yakınsak olduğundan $n \rightarrow \infty$ şartında $x_n \lambda_0^n \rightarrow 0$ olur. Dolayısıyla, $\{x_n \lambda_0^n\}$ dizisi sınırlı dizidir. Yani öyle bir $M > 0$ sayısı vardır ki, $n = 1, 2, 3, \dots$ için

$$\|x_n \lambda_0^n\| \leq M \quad (3.25)$$

eşitsizliği sağlanır.

Şimdi burada $|\lambda| < |\lambda_0|$ olduğunu varsayalım. Bu durumda aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\|x_n \lambda^n\| = \left\| x_n \lambda_0^n \frac{\lambda^n}{\lambda_0^n} \right\| = \|x_n \lambda_0^n\| \left| \frac{\lambda}{\lambda_0} \right|^n \leq M \left| \frac{\lambda}{\lambda_0} \right|^n \quad (3.26)$$

Burada $\left| \frac{\lambda}{\lambda_0} \right| < 1$ olduğundan

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{\lambda}{\lambda_0} \right|^k \quad (3.27)$$

geometrik serisi yakınsaktır. Dolayısıyla, (3.26) da sunulan eşitsizlikten

$$\|x_n \lambda^n\| \leq M \left| \frac{\lambda}{\lambda_0} \right|^n \quad (3.28)$$

dir ve bu eşitsizlik ile (3.20) serisinin $|\lambda| < |\lambda_0|$ şartını sağlayan λ noktalarında yakınsak olduğu görülür. Böylece, $|\lambda| < |\lambda_0|$ dairesi Ω yakınsaklık bölgesine dahildir. Burada $|\lambda| \leq r < |\lambda_0|$ için daha güçlü olan

$$\|x_n \lambda^n\| \leq M \left(\frac{r}{|\lambda_0|} \right)^n \quad (3.29)$$

eşitsizliği elde edilir.

Burada serilerin yakınsaklığı için Weierstrass kriterine dayanılarak (3.20) serisinin bu şartlarda λ noktasına göre mutlak ve düzgün yakınsak olduğu bulunur.

Şimdi burada ele aldığımız (3.20) serisinin yakınsaklık yarıçapını aşağıdaki formülle tanımlayalım.

$$R = \sup_{\lambda \in \Omega} |\lambda| \quad (3.30)$$

Bu R yakınsaklık yarıçapı ve Abel teoreminden aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

1) $R = 0$ olduğunda $\Omega = \{0\}$ dir ve böylece (3.20) serisi tek bir $\lambda = 0$ noktasında yakınsak olur.

2) $0 < R < +\infty$ şartı sağlandığında $S_R(0)$ dairesi reel halde ise yakınsaklık aralığı Ω 'ya dahil olur. Yani $S_R(0) \subset \Omega$ olur.

3) $R = +\infty$ olduğunda (3.20) serisi her bir λ için yakınsak olur. Yani ya tüm kompleks düzlem ya da reel eksenin tüm noktalarında yakınsak olur. $S_R(0)$ kümesine (3.20) serisinin yakınsaklık dairesi, reel halde yakınsaklık aralığı denir.

Aşağıdaki Cauchy – Hadamard formülü doğrudur:

$$R = \left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|x_n\|} \right)^{-1} \quad (3.31)$$

Burada $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ notasyonu a_n dizisinin üst limitini gösterir. Yani $\{a_n\}$ dizisinin en büyük sağ limitini gösterir. Sonlu veya sonsuz $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|x_n\|} = e$ limiti mevcut ise $R = \frac{1}{e}$ dir.

Lemma 3.4.2. $M > 0$ ve $k > 0$ sabit sayılar olmak üzere $\forall n$ için

$$\|x_n\| \leq M k^n \quad (3.32)$$

eşitsizliğinin sağlandığını varsayalım. Bu durumda, (3.20) serisinin yakınsaklık yarıçapı R için

$$R \geq \frac{1}{k} \quad (3.33)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Bu lemmayı ispatlamak için $|\lambda| < \frac{1}{k}$ dairesinde (3.20) serisinin yakınsak olduğunu göstermek yeterlidir. Burada $|\lambda| k = q < 1$ olduğunu varsayalım. Bu durumda aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir.

$$\|x_n \lambda^n\| = \|x_n\| |\lambda|^n \leq M k^n |\lambda|^n = M q^n \quad (3.34)$$

Bu eşitsizlikten (3.20) serisinin yakınsak olan bir seri ile değerlendirildiği görülür. Buradan da (3.20) serisinin de yakınsak olduğu görülür. Böylece lemma ispatlanır.

Kuvvet serilerinin uygulamasında aşağıdaki teklük teoreminin önemli rolü vardır.

Teorem 3.4.3. $S_R(0)$, $R > 0$ dairesinde iki kuvvet serisi birbirinden farklıdır.

İspat. $S_R(0)$, $R > 0$ dairesinde iki kuvvet serisinin birbirine eşit olduğunu varsayalım. Yani

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_k \lambda^k = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{x}_k \lambda^k \quad (3.35)$$

olsun. Bu durumda $\lambda = 0 \in S_R(0)$ olduğundan (3.35) serisinde $\lambda = 0$ aldığımızda $\tilde{x}_0 = x_0$ elde edilir. Böylece

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k \lambda^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{x}_k \lambda^{k-1} \quad (3.36)$$

eşitliği yazılabilir ve bu eşitlikten $x_1 = \tilde{x}_1$ elde edilir. Bu işlemleri böyle devam ettirerek matematiksel tümevarım yöntemi ile bu serilerin tüm aynı numaralı katsayılarının birbirine eşit olduğu elde edilir, yani $x_k = \tilde{x}_k$, $k = 0,1,2, \dots$ eşitlikleri elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

3.5. Analitik Abstract Fonksiyonlar ve Taylor Serileri

Tanım 3.5.1. $x(\lambda)$ abstract fonksiyonu $\lambda = 0$ noktasının bir komşuluğunda yakınsak

$$x(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \lambda^k \quad (3.37)$$

kuvvet serisi şeklinde gösterildiğinde ve bu serinin yakınsaklık yarıçapı sıfıra eşit olmadığında yani $R > 0$ olduğunda $x(\lambda)$ fonksiyonuna $\lambda = 0$ noktasında analitik fonksiyondur denir.

Teorem 3.5.2. $\lambda = 0$ noktasında $x(\lambda)$ analitik abstract fonksiyon olduğunda bu $x(\lambda)$ fonksiyonu $S_R(0)$ dairesinde sürekli fonksiyondur. Burada $R > 0$ sayısı $x(\lambda)$ fonksiyonunun (3.37) açılımının yakınsaklık yarıçapıdır.

İspat. Öncelikle dikkate alalım ki $\rho \in (0, R)$ olduğunda sayısal

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \|x_k\| \rho^{k-1} \quad (3.38)$$

serisi yakınsaktır. Gerçekten de, $\tilde{\rho} \in (\rho, R)$ olduğunu varsayalım. Bu durumda Abel teoreminin ispatından görüldüğü gibi

$$\|x_k\| \tilde{\rho}^k \leq M \quad (k = 1,2,3, \dots) \quad (3.39)$$

eşitsizliği sağlanır. Bu durumda,

$$k \|x_k\| \rho^{k-1} = \|x_k\| \tilde{\rho}^k \frac{k}{\tilde{\rho}} \left(\frac{\rho}{\tilde{\rho}}\right)^{k-1} \leq \frac{M}{\tilde{\rho}} k q^{k-1} \quad (3.40)$$

eşitsizliği yazılabilir, burada $q = \frac{\rho}{\tilde{\rho}} < 1$ dir.

Not edelim ki $\sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1}$ serisi yakınsak seridir. Şimdi

$$C_1(\rho) = \sum_{k=1}^{\infty} k \|x_k\| \rho^{k-1} \quad (3.41)$$

alalım. Ayrıca $\lambda, \lambda_0 \in S_\rho(0)$ noktaları alalım. Bu noktalar için

$$x(\lambda) - x(\lambda_0) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k (\lambda^{k-1} + \lambda^{k-2} \lambda_0 + \dots + \lambda_0^{k-1}) (\lambda - \lambda_0) \quad (3.42)$$

eşitliği yazılabilir. (3.42) eşitliğinde (3.41) eşitliğini kullanarak

$$\|x(\lambda) - x(\lambda_0)\| \leq C_1(\rho) |\lambda - \lambda_0| \quad (3.43)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikten $x(\lambda)$ fonksiyonunun her bir $\lambda_0 \in S_R(0)$ noktasında sürekli olduğu görülür.

Sonuç 3.5.3. $S_R(0)$ dairesinde $\sum_{k=1}^{\infty} k x_k \lambda^{k-1}$ serisi yakınsaktır.

Bu sonucu ispatlamak için $\rho \in (|\lambda|, R)$ alarak $\sum_{k=1}^{\infty} k \|x_k\| \rho^{k-1}$ serisinin yakınsaklığını kullanmak yeterlidir. $\sum_{k=1}^{\infty} k \|x_k\| \rho^{k-1}$ serinin yakınsaklığı Teorem 3.5.2'nin ispatında gösterildi.

Teorem 3.5.4. $x(\lambda)$ abstract fonksiyonu $\lambda = 0$ noktasında analitik fonksiyon olduğunda $x(\lambda)$ fonksiyonu, kendisinin kuvvet serisinin $S_R(0)$ yakınsaklık dairesinde diferansiyellenebilir.

İspat. Öncelikle dikkate alalım ki $\rho \in (0, R)$ için

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \|x_k\| \rho^{k-2} \quad (3.44)$$

serisi yakınsak seridir. Bu serinin toplamını $C_2(\rho)$ ile gösterelim.

Burada

$$\frac{\mu^k - \lambda^k}{\mu - \lambda} - k \lambda^{k-1} = k(k-1) \int_0^1 (1-\theta) [(1-\theta)\lambda + \theta \mu]^{k-2} d\theta (\mu - \lambda), \quad \mu \neq \lambda \quad (3.45)$$

eşitliği kullanılarak $\mu, \lambda \in S_\rho(0)$ için aşağıdaki değerlendirme yapılır:

$$\left| \frac{\mu^k - \lambda^k}{\mu - \lambda} - k \lambda^{k-1} \right| \leq k(k-1) \rho^{k-2} |\mu - \lambda| \quad (3.46)$$

Burada

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx_k\lambda^{k-1} = u(\lambda) \quad (3.47)$$

olsun. Sonuç 3.5.3 göz önüne alınarak,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{x(\mu) - x(\lambda)}{\mu - \lambda} - u(\lambda) \right\| &= \left\| \sum_{k=2}^{\infty} x_k \left[\frac{\mu^k - \lambda^k}{\mu - \lambda} - k\lambda^{k-1} \right] \right\| \\ &\leq \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \|x_k\| \rho^{k-2} |\mu - \lambda| \\ &\leq C_2(\rho) |\mu - \lambda| \end{aligned} \quad (3.48)$$

eşitsizliği yazılabilir. Böylece $x(\lambda)$ abstract fonksiyonunun $S_R(0)$ dairesinde diferansiyellenebilir olduğu görülür ve $x'(\lambda) = u(\lambda)$ dır.

Sonuç 3.5.5. $x(\lambda)$ analitik abstract fonksiyonu kendisinin kuvvet serisinin yakınsak $S_R(0)$ dairesinde sonsuz mertebeden diferansiyellenebilir fonksiyondur ve

$$x^{(e)}(\lambda) = \sum_{k=e}^{\infty} k(k-1) \dots (k-e+1) x_k \lambda^{k-e} \quad (3.49)$$

açılımı doğrudur.

Bu sonucun ispatı Teorem 3.5.4'ün çok sayıda ardışık uygulanmasıyla gösterilebilir.

Tanım 3.5.6. $x(\lambda)$ abstract fonksiyonu $\lambda = 0$ noktasında sonsuz mertebeden diferansiyellenebilir olsun. Bu durumda,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{(k)}(0)}{k!} \lambda^k \quad (3.50)$$

serisine $x(\lambda)$ abstract fonksiyonunun Taylor serisi denir.

$x(\lambda)$ abstract fonksiyonu $\lambda = 0$ noktasında analitik fonksiyon ise bu fonksiyonun Taylor serisi teklik teoremine göre $S_R(0)$ dairesinde kendisine yakınsak olur.

Analitik abstract fonksiyonu $A, C \in \mathcal{L}(X, Y), y \in Y$ olmak üzere $Ax - \lambda Cx = y$ ve $A(\lambda) \in \mathcal{L}(X, Y)$ olmak üzere $A(\lambda)x = y(\lambda)$ operatör denklemlerin ve bu gibi operatör denklemlerin çözümünün bulunmasında geniş ölçüde kullanılır.

4. ABSTRACT FONKSİYONLARIN KUVVET SERİSİNE AÇILIMI İLE OPERATÖR DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜNÜN BULUNMASI

Bu bölümde,

$$Ax - \lambda Cx = y \quad (4.1)$$

şeklindeki operatör denklemini göz önüne alalım. Varsayalım ki $A, C \in \mathcal{L}(X, Y)$, $y \in Y$ ve λ skaler parametre öyle ki $|\lambda| < \rho$ olsun. (4.1) denkleminin x çözümü X normlu uzayında aranır. Burada $\|\lambda CA^{-1}\| < 1$ şartının sağlandığını yani

$$|\lambda| < \|CA^{-1}\|^{-1} \quad (4.2)$$

eşitsizliğinin sağlandığını varsayalım. İkinci bölümde sunulan operatörün tersinin olması hakkındaki şarta göre $A - \lambda C$ operatörü (4.2) şartını sağladığında sürekli dönüştürülebilir olur. Bu yüzden bu şartlarda (4.1) denklemi çözülür ve çözüm tek olur. Bu çözüm

$$x(\lambda) = (A - \lambda C)^{-1}y \quad (4.3)$$

formülü ile bulunur.

(4.2) şartının belirlediği dairede (4.3) formülü ile bulunan çözüm λ parametresine göre analitik abstract fonksiyon olur, bu yüzden de bu çözüm

$$x(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \lambda^k \quad (4.4)$$

şeklinde aranabilir.

Burada (4.4) açılımını (4.1) denkleminde aranan x çözümünün yerine koyalım ve teklik teoremini kullanalım.

$$\sum_{k=0}^{\infty} Ax_k \lambda^k = y + \sum_{k=0}^{\infty} Cx_k \lambda^{k+1} \quad (4.5)$$

eşitliğinden $x_0, x_1, \dots, x_k, \dots$ katsayılarının bulunması için aşağıdaki tekrarlayan denklemler sistemi bulunur.

$$\begin{aligned} Ax_0 &= y, \\ Ax_1 &= Cx_0, \\ &\dots \end{aligned}$$

$$Ax_k = Cx_{k-1},$$

...

Burada A operatörü sürekli dönüştürülebilen olduğundan ardışık olarak

$$x_0 = A^{-1}y,$$

$$x_1 = A^{-1}(CA^{-1})y,$$

...

$$x_k = A^{-1}(CA^{-1})^k y,$$

...

eşitlikleri bulunur.

Böylece (4.1) denkleminin çözümü

$$x(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} A^{-1}(CA^{-1})^k y \lambda^k \quad (4.6)$$

şeklinde bulunur. (4.1) denkleminin yaklaşık çözümü

$$x_n(\lambda) = \sum_{k=0}^n A^{-1}(CA^{-1})^k y \lambda^k \quad (4.7)$$

şeklinde bulunur.

Yaklaşık çözümde hata aşağıdaki şekilde değerlendirilir.

$$\begin{aligned} \|x(\lambda) - x_n(\lambda)\| &= \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} A^{-1}(CA^{-1})^k y \lambda^k \right\| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|A^{-1}\| \|CA^{-1}\|^k \|y\| |\lambda|^k \\ &= \frac{\|A^{-1}\| (\|A^{-1}\| \|C\| |\lambda|)^{n+1}}{1 - |\lambda| \|CA^{-1}\|} \|y\| \end{aligned} \quad (4.8)$$

5. OPERATÖR FONKSİYONLARIN KUVVET SERİSİNE AÇILIMI İLE OPERATÖR DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜNÜN BULUNMASI

Bu bölümde, genel halde

$$A(\lambda)x = y(\lambda) \quad (5.1)$$

operatör denklemlerinin verildiğini varsayalım.

Burada $|\lambda| < \rho$ şartını sağlayan her bir λ için $A(\lambda) \in \mathcal{L}(X, Y)$ olan operatör-fonksiyondur. $\lambda = 0$ noktasında $A(\lambda)$ operatör-fonksiyonunun analitik fonksiyon olduğunu ve $A(0)$ operatörünün sürekli dönüştürülebilir olduğunu varsayalım. $y(\lambda)$ abstract fonksiyonu $\lambda = 0$ noktasında λ parametresinin analitik fonksiyonudur ve $y(\lambda) \in Y$ dir. $x(\lambda)$ çözümü X uzayında aranır.

$A(\lambda)$ ve $y(\lambda)$ fonksiyonlarının $\lambda = 0$ noktasında analitik olmaları bu fonksiyonların yakınsaklık yarıçapları sıfır olmayan ρ' ve ρ sayılarına eşit olan

$$A(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \lambda^k, \quad y(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k \lambda^k \quad (5.2)$$

kuvvet serilerine açılacakları anlamına gelmektedir.

$A(\lambda)$ analitik olduğundan $\lambda = 0$ noktasında $A(\lambda)$ sürekli operatör-fonksiyondur. Bu yüzden öyle bir $r > 0$ sayısı bulunur ki $|\lambda| < r$ dairesinde

$$\|[A(\lambda) - A(0)]A^{-1}(0)\| < 1 \quad (5.3)$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlikten $|\lambda| < r$ dairesinde $A(\lambda)$ operatör-fonksiyonun sürekli dönüştürülebilir olduğu görülür. Böylece, (5.1) denkleminin bu şartlarda tek bir tane çözümü vardır ve bu çözüm

$$x(\lambda) = A^{-1}(\lambda)y(\lambda) \quad (5.4)$$

şeklindedir. Bu $x(\lambda)$ abstract çözümü $\lambda = 0$ noktasında analitik fonksiyondur. $x(\lambda)$ fonksiyonunun kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı $\min(\rho, r)$ olur. (5.1) denkleminin $x(\lambda)$ çözümünü

$$x(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \lambda^k \quad (5.5)$$

şeklinde arayalım. Bu (5.5) açılımını (5.1) denkleminde $x(\lambda)$ nın yerine yazarak belirsiz $x_0, x_1, \dots, x_k, \dots$ katsayıları için aşağıdaki eşitlikleri bulunur.

$$\begin{aligned}
A_0 x_0 &= y_0, \\
A_0 x_1 + A_1 x_0 &= y_1, \\
A_0 x_2 + A_1 x_1 + A_2 x_0 &= y_2, \\
&\dots \\
\sum_{k=0}^n A_k x_{n-k} &= y_n
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Burada $A_0 = A(0)$ sürekli dönüştürülebilendir. (5.6) sistemini ardışık olarak çözerek

$$x_0 = A_0^{-1} y_0, x_1 = A_0^{-1} y_1 - A_0^{-1} A_1 A_0^{-1} y_0, \dots \tag{5.7}$$

eşitlikleri bulunur.

Burada $R = \min(\rho, r)$ dir. Bu R yarıçapı $A(\lambda)$ operatör-fonksiyonun kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı olan ρ' sayısına bağlı değildir.

$$\|y_n\| \leq M_1 \alpha^n, \|A_n A_0^{-1}\| \leq M \beta^{n-1} \quad (n \geq 1) \tag{5.8}$$

eşitsizliklerini varsayalım, bu durumda Lemma 3.4.2'ye göre $\rho \geq \alpha^{-1}$ olur. Buna ek olarak $|\lambda| < \frac{1}{M+\beta}$ olduğunda

$$\begin{aligned}
\|[A(\lambda) - A(0)]A^{-1}(0)\| &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} A_n A_0^{-1} \lambda^n \right\| \leq M |\lambda| \sum_{n=1}^{\infty} (|\lambda| \beta)^n \\
&= \frac{M |\lambda|}{1 - |\lambda| \beta} < 1
\end{aligned} \tag{5.9}$$

eşitsizliği elde edilir. Sonuçta yakınsaklık yarıçapı R için aşağıdaki eşitsizlik yazılır:

$$R \geq \min(\alpha^{-1}, (M + \beta)^{-1}) \tag{5.10}$$

Buradan $A(x) = A_0 + \lambda A_1$ ve $\|y_n\| \leq M_1 \alpha^n, \|A_1 A_0^{-1}\| \leq M$ için

$$R \geq \min(\alpha^{-1}, M^{-1}) \tag{5.11}$$

eşitsizliği elde edilir.

6. PARAMETREYE BAĞLI OPERATÖR DENKLEMİN ÇÖZÜMÜNE AİT BİR ÖRNEK

Reel parametrelili aşağıdaki integral denklemi ele alalım:

$$x(t) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(t - s + \lambda ts)x(s)ds = y(t) \quad (6.1)$$

Bu integral denklem $C_{[-\pi, \pi]}$ normlu uzayında verilmiş operatör denklemdir.

İlk olarak

$$\frac{d^k}{d\lambda^k} \cos(t - s + ts\lambda) = (ts)^k \cos\left(t - s + \lambda ts + k \frac{\pi}{2}\right) \quad (6.2)$$

eşitliğini göz önüne alalım. Dolayısıyla,

$$\cos(t - s + ts\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} (ts)^k \cos\left(t - s + k \frac{\pi}{2}\right) \lambda^k \quad (6.3)$$

yazılabilir. Böylece A_k operatör katsayıları aşağıdaki şekilde bulunur.

$$\begin{aligned} A_0 x &= x(t) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(t - s)x(s)ds, \\ A_k x &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (ts)^k \cos\left(t - s + k \frac{\pi}{2}\right) x(s) ds, k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (6.4)$$

Şimdi beşinci bölümdeki (5.6) denklem sistemindeki $A_0 x_0 = y_0$ denkleminde başlayalım.

Burada $y_0 = y$ ve $y_k = 0, k \geq 1$ alalım. Bu denklem 2. çeşit Fredholm denklemdir ve

$$x_0(t) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(t - s)x_0(s)ds = y(t) \quad (6.5)$$

şeklindedir. Gerçekten de

$$\cos(t - s) = \cos t \cos s + \sin ts \sin s \quad (6.6)$$

olduğundan

$$x_0(t) = y(t) + A \cos t + B \sin t \quad (6.7)$$

yazılabilir, burada

$$A = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x_0(s) \cos s ds \quad (6.8)$$

ve

$$B = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x_0(s) \sin s \, ds \quad (6.9)$$

dir.

(6.8) eşitlikliği göz önüne alınarak, (6.7) eşitliğinin her iki tarafı $\cos t$ ile çarpılıp t 'ye göre $-\pi$ 'den π 'ye integrallendiğinde

$$A = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(s) \cos s \, ds \quad (6.10)$$

ve (6.9) eşitliği göz önüne alınarak (6.7) eşitliğinin her iki tarafı $\sin t$ ile çarpılıp t 'ye göre $-\pi$ 'den π 'ye integrallendiğinde

$$B = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(s) \sin s \, ds \quad (6.11)$$

elde edilir.

Böylece (6.7) eşitliğinde (6.10) ve (6.11) eşitlikleri yerine yazılarak

$$x_0(t) = y(t) + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(t-s)y(s) \, ds \quad (6.12)$$

eşitliği elde edilir. Böylece $A_0 x_0 = y$ denkleminin $C_{[-\pi, \pi]}$ uzayında tek bir çözümü (6.12) formülü ile bulunmuş olur. A_0^{-1} operatörü $C_{[-\pi, \pi]}$ uzayında tanımlanmış operatördür. $C_{[-\pi, \pi]}$ uzayında tüm normlar

$$\|x_0\| = \|A_0^{-1}y\| \leq \|y\| + \frac{1}{\pi} \max_{t \in [-\pi, \pi]} \int_{-\pi}^{\pi} |\cos(t-s)| \, ds \|y\| \leq \left(1 + \frac{4}{\pi}\right) \|y\| \quad (6.13)$$

şeklinde değerlendirilir. Böylece $\|A_0^{-1}\| \leq \left(1 + \frac{4}{\pi}\right)$ eşitsizliği elde edilir.

Beşinci bölümdeki (5.6) denklem sistemindeki ikinci denklem

$$A_0 x_1 = -A_1 x_0 \quad (6.14)$$

şeklinde olur. Bu denklem açık şekilde

$$x_1(t) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(t-s)x_1(s) \, ds = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} ts \sin(t-s)x_0(s) \, ds \quad (6.15)$$

olarak yazılır. Bu eşitlikteki $x_0(t)$ fonksiyonu (6.12) formülü ile bulunmuştur.

Bu denklem de (6.5) şeklinde bir denklemdir. Bu denklemin çözümü de aşikar şekilde bulunur. Beşinci bölümdeki (5.5) serisinin tüm katsayıları bulunur. Bu (5.5) serisinin bu hal için yakınsaklık R yarıçapı değerlendirilmesi yapılır. Burada $\|A_k\| \leq \frac{2}{\pi}(\pi^2)^k = 2\pi(\pi^2)^{k-1}$ ve böylece $\|A_k A_0^{-1}\| \leq (2\pi + 8)(\pi^2)^{k-1}$ eşitsizlikleri elde edilir. Beşinci bölümdeki (5.10) formülüne göre

$$R \geq \frac{1}{\pi^2 + 2\pi + 8} \quad (6.16)$$

eşitsizliği elde edilir.

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada sayısal değışkene bağlı abstract fonksiyonların ve operatör-fonksiyonların özellikleri gösterildi. Abstract fonksiyonların kuvvet serisine açılımı verildi ve bu seri açılımı yardımıyla Abel teoreminin ispatı incelendi. Analitik abstract fonksiyonlar tanımlandı ve bu fonksiyonların Taylor serisine açılımı gösterildi. Abstract fonksiyonların ve operatör-fonksiyonların kuvvet serisine açılımının uygulanmasıyla $Ax + \lambda Cx = y$ ve $A(\lambda)x = y(\lambda)$ operatör denklemlerin çözüm yöntemleri gösterildi. Sonuç olarak, abstract fonksiyonların ve operatör-fonksiyonların kuvvet serisine açılımı ile ilişkili bu yöntemlerle operatör denklemlerin çözümleri için yeni perspektifler sunuldu. Böylece, hem abstract fonksiyonların ve operatör-fonksiyonların literatürüne hem de operatör denklemlerin çözüm modellerine katkı sağlandı. Abstract fonksiyonların ve operatör-fonksiyonların kuvvet serisi açılımlarının, farklı tipteki operatör denklemlerin çözümleri için uygulanabilirliği ön görülmekte ve ayrıca bu gelecek araştırmalar için önerilmektedir.

8. KAYNAKLAR

- Chen, G., Wei, Y. ve Xue, Y. (2004). *The generalized condition numbers of bounded linear operators in Banach spaces*, Journal of the Australian Mathematical Society, 76(2), 281-290. DOI:10.1017/S1446788700008958
- Jebril, I. H. ve Ali, R. I. M. (2003). *Bounded linear operators in probabilistic normed space*, Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, 4(1), 1-7.
- Hille, E. ve Phillips, R. S. (1957). *Functional analysis and semi-groups*, USA: American Mathematical Society.
- Nikolski, N. K. (2002). *Operators, functions, and systems: An easy reading. Hardy, Hankel, and Toeplitz*, USA: American Mathematical Society, Volume 92. <http://dx.doi.org/10.1090/surv/092>
- Ladas, G. E. ve Lakshmikantham, V. (1972). The calculus of abstract functions (Chapter 1), *Differential Equations in Abstract Spaces (Book)*, Volume 85, 1-20, Elsevier (Mathematics in Science and Engineering (Book series)). [https://doi.org/10.1016/S0076-5392\(08\)61153-4](https://doi.org/10.1016/S0076-5392(08)61153-4)
- Morris, K. A. (2020). *Functional analysis and operators (Appendix), Controller Design for Distributed Parameter Systems (Book)*, 253-287, Switzerland: Springer (Communications and Control Engineering (Book series)). <https://doi.org/10.1007/978-3-030-34949-3>
- Trenogin, V. A. (1980). *The functional analysis*, Moscow: Nauka, Fizmatlit.
- Yosida, K. (1995). *Functional analysis*, Berlin: Springer (Classics in Mathematics (Book Series), 1-504). <https://doi.org/10.1007/978-3-642-61859-8>
- Zeidler, E. (1995). *Applied functional analysis*, New York: Springer (Applied Mathematical Sciences (Book Series), Volume 109, 1-406).