

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

**DURUMA BAĞLI RİCCATİ DENKLEMİ (SDRE) TEMELLİ KONTROL YÖNTEMİ
VE SDRE'NİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hafsa Ceren DEMİRCİ

Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği Anabilim Dalı

Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği Programı

HAZİRAN 2022

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

**DURUMA BAĞLI RİCCATI DENKLEMİ (SDRE) TEMELLİ KONTROL YÖNTEMİ
VE SDRE'NİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Hafsa Ceren DEMİRCİ
(504181116)**

Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği Anabilim Dalı

Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği Programı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. A. Leyla GÖREN - SÜMER

HAZİRAN 2022

ISTANBUL TECHNICAL UNIVERSITY ★ GRADUATE SCHOOL

**STATE DEPENDENT RICCATI EQUATION (SDRE) BASED CONTROL METHOD
AND APPROXIMATE SOLUTION OF SDRE**

M.Sc. THESIS

**Hafsa Ceren DEMİRCİ
(504181116)**

Department of Control and Automation Engineering

Control and Automation Engineering Programme

Thesis Advisor: Prof. Dr. A. Leyla GÖREN - SÜMER

JUNE 2022

İTÜ, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü'nün 504181116 numaralı Yüksek Lisans Öğrencisi Hafsa Ceren DEMİRCİ, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı "DURUMA BAĞLI RİCCATİ DENKLEMİ (SDRE) TEMELLİ KONTROL YÖNTEMİ VE SDRE'NİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ" başlıklı tezini aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı : **Prof. Dr. A. Leyla GÖREN - SÜMER**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri : **Doç. Dr. Ali Fuat Ergenç**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Janset Daşdemir
Yıldız Teknik Üniversitesi

Teslim Tarihi : **2 Haziran 2022**
Savunma Tarihi : **13 Haziran 2022**



ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasında yalnızca doğrusal olmayan sistemlerin kontrolü problemi için yaklaşık optimal bir çözüme yer verilmiştir. Hayatın diğer yanı tekinsiz akıp giderken, bu hayatı keyifli, kendinden razı ve her gün yeniden hale getirenleri anmak için bu yazı ayrılmıştır.

Kendisini tanıdığım ilk andan beri hayatıma sayısız defa dokunan, danışmanlığı tüm hayatıma eşlik eden, varlığı ve sohbeti yüzümde hep gülümseme olan değerli hocam Prof. Dr. Leyla GÖREN'e,

Türlü koşuşturmanın, çeşit çeşit bakışın, üzerimize sinen onca kokunun içinde, bir nefes soluklanmak hakkımın hep saklı olduğu Aybala'ya,

Yollar tanıdıklığını yitirdiğinde ve sapaklar artık yabancı geldiğinde, kendi kestirmeleriyle ışık olan ve dengeyi hep kuran Yeşim'e,

Hayatın sıklıkla bahtsızlaşan, ve bahtsızlaştıkça da keyifli olabilen o benzersiz tarafında hep tanıdık, hep yakın iki dost Tarık ve Zeyneb'e,

Her köşe başında yeni bir rastlantıyla hayatımızın her anına yakından şahit olabilirken, beraber geçecek günlerin artık planlanması gerekse de, mesafelerle ve zamanla savaşımadan, kaldığımız yerden devam edebildiğimiz Celaleddin ve Esra'ya,

Şu zamanı, kendi çemberinde hep bir miktar bükebilen, olağandışının bu kadar olağan aktığına başka kimsede rastlamadığım Gamze'ye,

İnsanın kendini, kendisine bile zamansız bulabildiği bu çağda, hep "hoşgeldin", hep "tam zamanında" olan; kaytarmada işbirlikçi, "bir el daha"ya hep istekli, kahvenin mi serzenişin mi bahane olduğu anlaşılmayan her bir kıymetli an için Tolga ve Handan'a,

Dünyayı bir anda kendinden ibaret kılabilen minik Atom ve daha minik Bambam'a,

Hayatımın ayrılmaz ve en güzel motifi anneme, kardeşlerime ve her nefeste var olan Umut'a teşekkürler.

HAZİRAN 2022

Hafsa Ceren DEMİRCİ
(Kontrol ve Otomasyon Mühendisi)



İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ	vii
İÇİNDEKİLER	ix
KISALTMALAR	xi
SEMBOLLER	xiii
ÇİZELGE LİSTESİ	xv
ŞEKİL LİSTESİ	xvii
ÖZET	xix
SUMMARY	xxi
1. GİRİŞ	1
2. KAPALI ÇEVİRİM OPTİMAL KONTROL PROBLEMİ	7
2.1 Hamilton-Jacobi-Bellman Denklemi	7
2.1.1 Varyasyonlar hesabıyla HJB denklemlerinin ilişkisi	9
2.2 Doğrusal Karesel Regülatör (LQR)	10
3. DURUMA BAĞLI RİCCATİ DENKLEMİ YÖNTEMİ	15
3.1 Matematiksel Gösterimlerin Tanımı	15
3.2 Duruma Bağlı Katsayılı (SDC) Gösterim	16
3.2.1 SDC gösteriminin serbestliği	18
3.3 Duruma Bağlı Riccati Denklemi (SDRE) İle Kontrolör Tasarım Yöntemi	18
3.3.1 Doğrusal olmayan karesel optimal kontrol problemi	19
3.4 SDRE Yönteminde Tasarım Serbestliği	21
3.4.1 SDC gösteriminin seçimi	21
3.4.2 $Q(x)$ ve $R(x)$ matrislerinin seçimi	23
3.5 SDRE'de Kararlılık ve Optimallik	24
4. SDRE'NİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ	27
4.1 Radyal Temelli Fonksiyonlar	27
4.2 SDRE'nin Yaklaşık Çözümü İçin İki Algoritma	29
5. ARABA-SARKAÇ SİSTEMİNİN SDRE KONTROLÜ	33
5.1 Araba-Sarkaç Sistemi	33
5.2 Araba-Sarkaç Sistemi İçin SDC Gösterimi	34
5.3 Araba-Sarkaç Sistemi İçin SDRE'nin Yaklaşık Çözümü	37
5.3.1 Algoritma 1 ile SDRE'nin yaklaşık çözümü	37
5.3.2 Algoritma 2 ile SDRE'nin yaklaşık çözümü	41
5.3.3 Önerilen yaklaşıklık algoritmalarının araba-sarkaç sistemi için performansı	45
6. MANYETİK KALDIRMA SİSTEMİNİN SDRE KONTROLÜ	47
6.1 Manyetik Kaldırma Sistemi	47
6.2 Manyetik Kaldırma Sistemi İçin SDRE'nin Yaklaşık Çözümü	48
7. SONUÇLAR	53
KAYNAKLAR	57
ÖZGEÇMİŞ	61

KISALTMALAR

SDRE	: Duruma Bağlı Riccati Denklemi (State Dependent Riccati Equation)
SDC	: Duruma Bağlı Katsayı (State Dependent Coefficient)
HJB	: Hamilton-Jacobi-Bellman
LQR	: Doğrusal Karesel Regülatör (Linear Quadratic Regulator)
ARE	: Cebirsel Riccati Denklemi (Algebraic Riccati Equation)





SEMBOLLER

M	: Arabanın kütlesi
m	: Sarkacın kütlesi
l	: Sarkacın uzunluğu
g	: Yerçekimi ivmesi
θ	: Sarkacın açısı
$A(x), B(x)$: Duruma bağlı sistem matrisleri
$C(x)$: Duruma bağlı çıkış matrisi
$Q(x), R(x)$: Duruma bağlı tasarım parametreleri





ÇİZELGE LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Çizelge 4.1 : Radyal temelli fonksiyonlar.	29
Çizelge 5.1 : Araba-sarkaç sistemi için deneylerin başlangıç noktası değerleri. ...	39
Çizelge 6.1 : Manyetik kaldırma sistemi için deneylerin başlangıç noktası değerleri.	50





ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 5.1 : Araba-sarkaç sistemi.	33
Şekil 5.2 : sinc fonksiyonu	35
Şekil 5.3 : Araba-sarkaç sistemi için kontrol edilebilirlik matrisinin determinantı.	36
Şekil 5.4 : Araba-sarkaç sistemi için SDRE'nin standart ve yaklaşık çözüm değerleri (Algoritma 1).	38
Şekil 5.5 : SDRE'nin yaklaşık çözümü ile kontrol edilen kapalı çevrimli sistemin davranışı (Algoritma 1).	39
Şekil 5.6 : SDRE'nin yaklaşık çözümü ile kontrol edilen kapalı çevrimli sisteme uygulanan kontrol işareti (Algoritma 1).....	40
Şekil 5.7 : Deney 1 için SDRE'nin yaklaşık ve standart çözümü (Algoritma 1)..	40
Şekil 5.8 : Deney 1 için SDRE'nin yaklaşık ve standart çözümüne bağlı kontrol kazançları (Algoritma 1).	41
Şekil 5.9 : Araba-sarkaç sistemi için SDRE'nin standart ve yaklaşık çözüm değerleri (Algoritma 2).	42
Şekil 5.10 : SDRE'nin yaklaşık çözümü ile kontrol edilen kapalı çevrimli sistemin davranışı (Algoritma 2).	43
Şekil 5.11 : SDRE'nin yaklaşık çözümü ile kontrol edilen kapalı çevrimli sisteme uygulanan kontrol işareti (Algoritma 2).....	43
Şekil 5.12 : Deney 2 için SDRE'nin yaklaşık ve standart çözümü (Algoritma 2)..	44
Şekil 5.13 : Deney 2 için SDRE'nin yaklaşık ve standart çözümüne bağlı kontrol kazançları (Algoritma 2).	44
Şekil 5.14 : Deney 2 için SDRE'nin yaklaşık çözümü ile kontrol edilen kapalı çevrimli sistemin davranışı.	46
Şekil 6.1 : Manyetik kaldırma sistemi.....	47
Şekil 6.2 : Manyetik kaldırma sistemi için SDRE'nin standart ve yaklaşık çözüm değerleri.	50
Şekil 6.3 : Farklı başlangıç koşullarına göre SDRE'nin yaklaşık çözümü ile kontrol edilen kapalı çevrimli sistemin davranışı (Algoritma 1).....	51
Şekil 6.4 : Farklı başlangıç koşullarına göre SDRE'nin yaklaşık çözümü ile kontrol edilen kapalı çevrimli sistemin kontrol işareti (Algoritma 1).	51
Şekil 6.5 : Deney 1 için SDRE'nin yaklaşık ve standart çözümü (Algoritma 2)..	52
Şekil 6.6 : Deney 1 için SDRE'nin yaklaşık ve standart çözümüne bağlı kontrol kazançları.	52



DURUMA BAĞLI RİCCATİ DENKLEMİ (SDRE) TEMELLİ KONTROL YÖNTEMİ VE SDRE'NİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ

ÖZET

Doğrusal olmayan sistemlerin kontrolünde karşılaşılan asıl zorluk, optimal ve uygulanabilir bir kontrol kuralının elde edilmesidir. Bir sistemin kontrolü için belirlenen amaç ölçütünü minimum yapan optimal kontrol kuralı, Hamilton Jacobi Bellman (HJB) yöntemiyle elde edilir. Ancak, doğrusal olmayan veya yüksek boyutlu sistemler için kısmi diferansiyel denklemler içeren HJB ifadesini çözmek zordur ve kesin çözümü bulmak mümkün olmayabilir. Bu sebeple, HJB denklemlerini çözmekten kaçınmak için pek çok çalışma yayınlanmıştır.

Karesel amaç ölçütüne sahip doğrusal ve zamanla değişmeyen sistemler için HJB denklemi, cebirsel Riccati denklemine dönüşür ve kontrol problemi "Doğrusal Karesel Regülatör (Linear Quadratic Regulator, LQR)" olarak adlandırılır. Doğrusal olmayan kontrol yöntemlerinin aksine, LQR teorisi oldukça pratiktir ve karesel amaç ölçütüne sahip doğrusal sistemler için son derece basit bir geri beslemeli optimal kontrol kuralı sunar. Ancak çok sayıda sistem doğrusal değildir. Sistemlerin çalışma aralıklarına bağlı olarak doğrusallaştırma yapılabilir. Ancak doğrusal olmayan özellikler; sistemin yapısal özelliğidir ve doğrusallaştırma sonucu, önemli ve faydalı olabilecek bu özellikler kaybolur. Bahsedilen bu bilgiler ışığında, düşük boyutlu doğrusal olmayan sistemler veya karesel amaç ölçütlü doğrusal sistemler için optimal kontrol kuralının elde edilebildiği söylenebilir.

Bu noktada "Duruma Bağlı Riccati Denklemi (State Dependent Riccati Equation, SDRE)"; LQR teorisini temel alan, sistemin doğrusal olmayan özelliklerini göz önünde bulunduran, sistematik tasarım adımlarına sahip, esnek bir kontrol yöntemi olarak karşımıza çıkar. SDRE yöntemi; kontrolör tasarımında, sistemin doğrusal olmayan özelliklerinin korunmasına imkan tanır. Ayrıca, sistem dinamiği üzerinde karşılanması kolay olan koşullara sahiptir ve bu sayede çok çeşitli doğrusal olmayan sistemlere uygulanabilir.

SDRE kontrol yöntemi; doğrusal olmayan dinamikleri, bir durum vektörü ve duruma bağlı katsayılı matris değerli fonksiyonlarla çarpanlara ayırır. Bu çarpanlara ayrılmış gösterim, tek bir biçimde değildir ve kapalı çevrimli sistemin performansını arttıracak bir gösterim seçilebilir.

SDRE yönteminde, kontrol sinyalini hesaplamak için her adımda cebirsel Riccati denklemi çözülür. HJB'nin çözümü ile elde edilecek optimal kontrol kuralı yerine, SDRE yaklaşık optimal bir kontrol kuralı sunar. Bu nedenle, istenen amaç ölçütü yaklaşık olarak minimum yapılır ve performanstan feragat edilmiş olur. Ancak SDRE

yöntemiyle; gerçek zamanlı uygulamaya izin veren, uygulanması kolay ve yaklaşık optimal bir kontrol kuralı elde edilir.

SDRE kontrol kuralı, sistemi noktasal kararlı yapan bir kontrol kuralıdır. Her adımda cebirsel Riccati denklemi çözümlenerek inşa edildiği için, kontrol kuralının açık ifadesi bilinmez. Oysa, kontrol kuralının ifadesi, kararlılık analizinde vazgeçilmezdir. Bu noktada, her adımda Riccati denkleminin çözümlenmesinden kaçınmak ve SDRE kontrol kuralının analitik bir ifadesini elde edebilmek için bir yöntem önerilmiştir. Buna göre, kontrol işaretinin inşasında kullanılan SDRE'nin çözümünü yaklaşık şekilde ifade edebilecek, birbirine benzer iki algoritma sunulmuştur. Bu sayede çözüm, sistemin durumlarına bağlı olarak analitik şekilde ifade edilebilmiş ve SDRE yöntemindeki hesaplama yükü hafifletilmiştir. Bu yaklaşık çözüme göre hesaplanan kontrol kuralının sınanması için literatürde çokça kullanılan araba-sarkaç sistemi ve manyetik kaldırma sistemi kullanılmıştır. SDRE'nin yaklaşık çözümüne bağlı sonuçlar ile standart çevrimiçi SDRE sonuçları karşılaştırılmıştır. Sonuçta, yaklaşık çözüm ile hesaplanan kontrol kuralı ile standart SDRE'ye oldukça yakın bir performans elde edilmiştir.



STATE DEPENDENT RICCATI EQUATION (SDRE) BASED CONTROL METHOD AND APPROXIMATE SOLUTION OF SDRE

SUMMARY

For controlling a system, the control rule is expected to provide the following features: optimal control which satisfies a performance index, disturbance rejection, small computation effort, feedback structure. While controlling a nonlinear system, the main difficulty is that finding the optimal solution might be challenging and if the solution is too complex, implementation might not be possible.

To control the nonlinear systems, the Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) strategy provides the optimal control solution. However, solving partial differential equations for nonlinear or high-dimensional systems is inefficient; therefore it may not be possible to determine the exact solution of HJB equation. Even if a solution exists, it may be too complicated for implementation.

To avoid solving HJB equations for nonlinear regulator problem, numerous papers have been published in recent years. But these methods have major constraints in system model and control input; so, their implementation areas are limited.

If a system is linear time invariant and corresponding cost function is infinite time quadratic cost function, then corresponding HJB equation can be represented as Algebraic Riccati Equation and the control problem is called as Linear Quadratic Regulation (LQR) problem. On the contrary to nonlinear control approaches, LQR theory is relatively practical and well documented for linear systems. LQR theory provides optimal control rule for linear systems with quadratic cost function and the control rule can be extremely straightforward. However, linear systems are not common systems; in fact, a large number of systems are nonlinear. It is possible to deal with nonlinear systems by using linearization near the operation point if the operation range is sufficiently small. If the operation range is wide, then nonlinear system can be linearized near different operation points and linear controller methods can be applied. However, nonlinearity is inherent in the system. When a system is linearized around an operation point, it loses nonlinear behaviors even if the nonlinearity has significant or useful role in the system. As a result, optimal control solutions can be found for very low-dimensional nonlinear systems or linear systems with quadratic cost function.

To overcome the aforementioned issues for nonlinear systems, the "State Dependent Riccati Equation (SDRE)" approach is an extremely attractive control tool which is motivated by LQR theory and allows to preserve the system nonlinearity. Besides, SDRE approach has mild conditions on system dynamics and it can be applied to wide class of nonlinear systems. SDRE provides a systematic design technic which is not available in other nonlinear controller design methods. SDRE stands out compared

to other nonlinear control methods with this aspect. Moreover, controller design is flexible in SDRE method.

SDRE method is originally proposed by Pearson in 1962 to provide feedback control for nonlinear systems. The SDRE control method factorizes the nonlinear dynamics into a state vector and a state dependent matrix valued function, which enables the nonlinear system dynamics to be captured by a linear-like state dependent structure. Hence, this factorization is not unique and a design flexibility is offered to control designer to maximize robustness of the closed loop system via factorization. Selecting state dependent coefficient matrices is the first and most important step of SDRE systematic design process. Besides, SDRE provides to build a trade-off between state errors and control effort by using a performance criteria and the performance design parameters create an additional flexibility on controller design.

SDRE provides an approximately optimal control rule instead of the optimal control rule obtained from the HJB. There is a trade-off between optimal control and approximately optimal (suboptimal) control. Optimal control is a control rule that globally minimizes (or maximizes) the desired performance criteria. But solving HJB equations might not be possible or implementing optimal control rule might be difficult and expensive. But in SDRE, the control rule is suboptimal and approximately minimizes desired performance criteria. So performance is sacrificed but the control rule is easy to implement which allows real time implementation.

In the SDRE control approach, the algebraic Riccati equation is solved at each step and quite simple and applicable control rule is calculated similar to LQR theory. SDRE does not have too restrictive limitations on nonlinear system, and under mild conditions, SDRE guarantees a pointwise stabilizing controller. The control rule is local asymptotic stable and SDRE does not provide a global asymptotic solution for all case. The controlled system stability can be analyzed if the control rule is obtained analytically. But in SDRE controller, algebraic Riccati equation is solved at each step to calculate control signal. In order to realize this process, computation time should be short enough. So this assumption may not be possible, especially as the number of states increases.

In this study, to overcome aforementioned issue of the SDRE-based control technique, a method is proposed to obtain an approximate solution of SDRE. Using this method, the approximate solution of the SDRE is obtained as a function of the system's states. Thus, the approximate solution of the SDRE can be expressed analytically. Moreover, it is possible to make the stability analysis theoretically before the application and then use it in the control of the system. With this proposed method, the online calculation effort of the SDRE control method is reduced. In addition, it is determined whether the obtained control rule stabilizes the system before applying to system.

Based on the proposed approximate solution method, two similar algorithms are created. In order to test the method, nonlinear cart-pendulum and magnetic levitation systems, which are widely used in the literature, are discussed and controlled by the control rule created by the approximate solution of the SDRE.

The cart pendulum system is a two-dimensional underactuated nonlinear system which has a single-inverted pendulum placed on a motorized cart on a linear rail; and the

control problem is to move the cart to a specific position while keeping the pendulum at its unstable equilibrium point.

To design a SDRE controller, first the "best" representation is determined to maximize controllability in operation range. Once state dependent coefficient representation and performance design parameters are selected, approximate solution of SDRE is obtained by using both approximation algorithms. Control signals which constructed via approximated solutions, are used to control the cart-pendulum system. Algorithm performances and the approximation results according to the standard SDRE are analyzed.

The magnetic levitation system is an unstable, electromechanical, nonlinear system; and the control problem is to keep the magnetic ball at desired point by applying magnetic force. First, a proper representation and controller design parameters are determined for SDRE controller. After that, the operation range is divided into 7 areas and the approximate function for the solution of SDRE is constructed by using second method. Magnetic levitation system is controlled by using approximate solution and results are compared with standart SDRE.

It has been observed that the performance of the system controlled by the approximate solution of SDRE is very similar to the performance of standart SDRE controller.



1. GİRİŞ

Bir kontrolör tasarımında, uygulanacak kontrol kuralı için uygulanabilir olması, optimal olması, geri besleme biçiminde olması, bozucuları bastırabilmesi gibi temel isterler mevcuttur. Optimal kontrol kuralı ile, belirlenen tasarım kriterleri en iyi şekilde sağlanır. Geri besleme içermeyen kontrol yapıları bozuculara karşı daha hassastır. Ayrıca kontrol tasarımı genellikle sistemin uygun bir modeli üzerinden yapılır ve modelleme esnasında kütlenin noktasal olması, sürtünmelerin ihmal edilmesi gibi kabuller yapılır. Geri beslemeli kontrol yapısı, buna benzer modellenmemiş ve ihmal edilmiş durumlarla başa çıkmayı mümkün kılar. Bununla birlikte kontrol kuralının gerçekleştirilebilir bir ifade olması önemlidir. Karmaşık denklemler veya hesaplanması zor olan ifadeler uygulamada zorluk oluşturur. Özellikle çevrimiçi yapılan kontrollerde hesaplama yükü, kontrol kuralının gerçekleştirilebilmesi için önemlidir. Doğrusal olmayan bir sistemin kontrolünde ise, bahsedilen bu kriterlerin içinden karşılanması en zor olanı, istenen performans kriterini sağlayan optimal kuralın bulunmasıdır.

Doğrusal olmayan sistemler için optimal kontrol kuralı, Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) yöntemiyle elde edilir [1]. Ancak doğrusal olmayan sistemler için kısmi diferansiyeller içeren HJB denklemini çözmek kolay değildir. Yüksek boyutlu sistemlerde karmaşıklık arttığı için, HJB denkleminin kesin çözümünü bulmak mümkün olmayabilir. Üstelik elde edilen çözümün karmaşıklığına bağlı olarak çözüm uygulanamaz olabilir. Doğrusal olmayan regülatör probleminde HJB denklemlerini çözümlenmenin zorluğundan kaçınmak ve uygulanabilir kontrol kuralı elde edebilmek için çeşitli çalışmalar yayınlanmıştır. [2]'de yer alan çalışmada yüksek mertebeden bir sistemin kontrolü için düşük mertebeden sistemler kullanılmıştır. Yüksek mertebeli sistem, iki tane düşük mertebeli sistem ile yaklaşık olarak ifade edilmiş ve sistem, yaklaşık optimal şekilde kontrol edilmiştir.

[3]–[5]'teki çalışmalarda HJB'nin tam çözümü yerine yaklaşık çözümü araştırılmıştır. Optimal kontrol için tanımlanan performans kriteri kuvvet serisine açılmış ve HJB'nin

yaklaşık bir çözümü bulunmuştur. Ancak bu yöntemin kullanılabilmesinin şartı, sistemin giriş bakımından doğrusal olmasıdır.

[6]'da, tek girişli ve giriş bakımından doğrusal sistemlerin kontrolüne dair bir çalışma yer alır. Sistemin dinamik denklemleri, o an bulunduğu durumlar etrafında doğrusallaştırılır ve elde edilen doğrusal sistem için optimal kontrol, varyasyonlar hesabı ile bulunur. Daha sonra kontrol işareti, önceden belirlenmiş kısa bir süre boyunca orijinal sisteme uygulanır ve süre sonunda bu işlemler tekrarlanır. Benzer bir çalışma [7]'de yer alır. Bu çalışmada, çok girişli doğrusal olmayan bir sistem için iki farklı doğrusallaştırma yöntemi kullanılarak sistem çalışma noktası etrafında doğrusallaştırılmış ve karesel bir amaç ölçütünü sağlayan geri besleme formunda bir kontrol kuralı elde edilmiştir.

Ancak bahsi geçen bu çalışmalar sistem ve kontrol üzerinde katı kısıtlamalara sahiptir ve bu kısıtlamalar karşılandığı sürece uygulanabilir kontrol yöntemleridir. Öte yandan sistem doğrusal olduğunda, karesel bir amaç ölçütü için HJB denklemi Riccati denklemine dönüşür ve optimizasyon problemi "Doğrusal Karesel Regülatör (Linear Quadratic Regulator, LQR)" olarak adlandırılır. Literatürde pek çok uygulama alanı olan LQR probleminde, karesel amaç ölçütüne sahip doğrusal sistemlerin optimal kontrolü için gerekli kontrol kuralı, Riccati denkleminin çözülmesiyle elde edilir. Cebirsel olan Riccati denklemlerinin çözümü, HJB'ye kıyasla kolaydır ve elde edilen kontrol kuralı uygulama için oldukça basittir [1].

Ancak pek çok sistem doğrusal olmayan özelliklere sahiptir. Üstelik doğrusal olmama, sadece sistemin yapısından kaynaklı değil, kontroldeki fiziksel sınırlamalardan da kaynaklı olabilir. Eğer doğrusal olmayan sistemin çalışma aralığı yeterince küçükse, çalışma noktasının yakınında (eğer mümkünse) doğrusallaştırma yapılabilir. Çalışma aralığının geniş olduğu durumlarda, çalışma alanı bölünerek her bir aralıkta sistem doğrusallaştırılabilir ve doğrusal kontrol yöntemleri uygulanabilir. Ancak doğrusallaştırılmış sisteme göre tasarım yapıldığında, fiziksel sistemin önemli olabilecek doğrusal olmayan özellikleri göz ardı edilir ve kontrol tasarımı bu ihmal altında yapılır. Bahsedilen bütün bu sorunlar göz önüne alındığında, "Duruma Bağlı Riccati Denklemi (State Dependent Riccati Equation, SDRE)" yöntemi, doğrusal

olmayan sistemlerin kontrolünde doğrusallaştırmaya gerek duymayan bir kontrol yöntemi olarak ortaya çıkmış ve özellikle son on yılda popüler hale gelmiştir.

SDRE yöntemi ilk olarak Pearson tarafından 1962’de doğrusal olmayan ve zamanla değişen $\dot{x}(t) = f(x,t) + B(x,t)u(t)$ formundaki (giriş affine) sistemlerin sonlu zaman ufuklu optimal kontrolü için önerilmiştir [8]. Buna göre, doğrusal olmayan sistem anlık olarak doğrusal zamanla değişmeyen sistem olarak kabul edilir ve bu duruma karşı düşen optimal kontrol kuralı LQR tekniği ile hesaplanır. Sonuçta durumlar ve zamana bağlı bir kontrol kuralı elde edilir. Benzer şekilde sonsuz zaman ufuklu kontrol problemi de matris Riccati denkleminin sürekli hal çözümü olarak düşünülmüştür. Bu yöntemde sistemin doğrusal olmayan özellikleri korunur ve bu özellikler kontrol tasarımının bir parçası olur.

SDRE yöntemi, sistematik bir kontrol tasarımına sahiptir ve bu yönüyle diğer doğrusal olmayan kontrol yöntemlerinden ayrılır. Tasarım sürecindeki ilk adım, doğrusal olmayan sistemi, duruma bağlı katsayılara (state dependent coefficient, SDC) sahip doğrusal benzeri bir yapıya getirmektir. Bunun için, doğrusal olmayan sistem denklemleri, bir durum vektörü ve durumlara bağlı bir matris çarpanı (SDC matrisi) olacak şekilde çarpanlara ayrılır. Daha sonra durumlara bağlı olan bu SDC matrisleri ile Riccati denklemi düzenlenir ve SDRE ifadesi elde edilir. Ardından SDRE, yörünge boyunca her x noktasında çözülerek $u(x) = -R^{-1}(x)B^T(x)P(x)x$ formunda bir kontrol kuralı elde edilir. Bu kural, doğrusal olmayan bir geri besleme kuralıdır ve bağlı olduğu $P(x)$ ifadesi SDRE’nin çözümüdür.

SDRE temelli kontrol yöntemi, 1962’deki ilk çalışmadan sonra, 1990’ların sonlarına kadar ilgi görmemiş bir kontrol yöntemi iken Cloutier, D’Souza ve Mracek tarafından yapılan çalışmalarla ivme kazanmıştır.

[9]’da yer alan çalışmada doğrusal olmayan H_∞ probleminde SDRE yöntemi kullanılmıştır. Durum vektörü tek boyutlu olduğunda, amaç ölçütündeki durum ve kontrol ağırlıkları sistemin durumuna bağlı seçildiğinde, SDRE’nin optimal kontrol kuralını sağladığı gösterilmiştir. Bu kural aynı zamanda global asimptotik kararlıdır. Durum vektörü çok boyutlu olduğunda ise kontrol edilebilirlik ve gözlenebilirlik için tanımlanan karşılanması kolay koşullar altında sistemin lokal asimptotik veya

yarı global asimptotik kararlı olduğu gösterilmiştir. Bahsedilen bu teorik özellikler, [10]'da tek boyutlu ve çok boyutlu sistem için örneklerle anlatılmıştır. Ayrıca bu çalışmada, kontrol işareti üzerindeki fiziksel sınırlamaların SDRE kontrol tasarımında kullanımını açıklayan bir örnek de mevcuttur. Tek boyutlu sistemler [11]'deki çalışmada da incelenmiş ve SDRE yöntemi altında global asimptotik kararlılık için, amaç ölçütündeki durum ve kontrol ağırlıklarının en az birinin sistemin durumuna bağlı olması gerektiği gösterilmiştir. Pearson tarafından giriş affine sistemler için önerilen SDRE yöntemi [12]'de genişletilmiş ve giriş affine olmayan sistemler için uygulanabilirliği gösterilmiştir. İlave olarak orijin etrafındaki yeterince küçük bir çalışma bölgesi için asimptotik kararlılık şartları belirlenmiştir ancak geniş çalışma bölgesi için kararlılık şartları oluşturulamamıştır. Bu çalışmalara ek olarak, H_∞ , H_2 kontrol yapıları ve doğrusal olmayan filtreleme için SDRE tekniğine genel bakış, [13]'teki çalışmada bulunabilir.

Sürekli zamanlı yöntemlerin yanı sıra, ayrık zamanlı SDRE doğrusal olmayan kontrol yapıları da çeşitli çalışmalarda yer almıştır. [14]'te giriş affine formundaki bir uçuş kontrol sistemi için ayrık zamanlı SDRE yöntemi kullanılmıştır. [15]'teki çalışmada bir sarkaç, kararsız denge noktasında ayrık zamanlı SDRE ile kontrol edilmiştir.

Bahsedilen bu SDRE tasarım yöntemlerinin yanı sıra, literatürde yer alan doğrusal olmayan diğer tasarım yöntemlerini SDRE yöntemiyle birleştiren hibrit yaklaşımlar da önerilmiştir. Örneğin, [16]'da kayan ufuk ve SDRE yöntemleri birleştirilerek sonsuz zaman ufuklu doğrusal olmayan optimizasyon problemine sonlu zaman ufuklu bir yaklaşım getirilmiştir. [17]'de sinir ağları, MPC ve SDRE birleşimine dayanan bir yöntem önerilmiştir. Burada sinir ağları, MPC'nin amaç ölçütünü minimum yapacak şekilde eğilirken, SDRE kontrol yapısı sistemi kararlı kılan temel yörüngeyi belirler. Bu yöntem, 6 serbestlik dereceli bir helikopterin kontrolünde kullanılmıştır.

Yukarıda bahsi geçen çalışmalardan görüldüğü üzere, SDRE kontrol yöntemi, sistemin doğrusal olmayan özelliklerine göre tasarıma izin veren, geniş bir uygulama alanına sahip, pratik ve esnek bir doğrusal olmayan kontrol yöntemidir.

Bu tez çalışmasında SDRE kontrol yöntemi incelenmiş ve SDRE'nin yaklaşık çözümü için bir yöntem önerilmiştir. Önerilen yöntem, doğrusal olmayan

4 durumlu araba-sarkaç sisteminin ve manyetik kaldırma sisteminin kontrolüne uygulanmış ve elde edilen sonuçlar standart SDRE kullanılarak elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır.





2. KAPALI ÇEVİRİM OPTİMAL KONTROL PROBLEMİ

Bu bölümde doğrusal ve doğrusal olmayan sistemlerin kapalı çevrimli optimal kontrolü problemi incelenecektir. Doğrusal olmayan sistemlerin optimal kontrolü için 'Pontryagin Minimum Prensi' ve Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) denklemi kullanılacaktır. Ardından doğrusal sistemler için HJB denklemleri yeniden düzenlemek ve "Doğrusal Karesel Regülatör, (Linear Quadratic Regulator, LQR)" ifadesi elde edilecektir. Bu bölümdeki bilgiler [1] 'den özetlenmiştir.

2.1 Hamilton-Jacobi-Bellman Denklemi

Doğrusal olmayan bir sistemin bir performans kriterine (amaç ölçütü) göre optimal kontrol problemi en genel haliyle Denklem 2.1 ve 2.2'de tanımlanmıştır:

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), t) \quad (2.1)$$

$$J(x(t_0), t_0) = \int_{t_0}^{t_f} V(x(t), u(t), t) dt \quad (2.2)$$

Denklem 2.1'de verilen doğrusal olmayan sistemin, istenen performans kriterini sağlayan optimal kontrol kuralı, HJB denkleminin çözümü ile, sistemin durumlarına bağlı olarak bulunacaktır. Kontrol kuralının kontrol edilen sistemin durumlarına bağlılığı ile kapalı çevrim bir kontrol kuralının elde edilmesi sağlanmış olur.

Sistemin t anındaki $x^*(t)$ başlangıç koşulu için performans kriterinin minimum değeri $J^*(x^*(t), t)$ olarak tanımlansın:

$$J^*(x^*(t), t) = \int_t^{t_f} V(x^*(\tau), u^*(\tau), \tau) d\tau \quad (2.3)$$

Burada u^* sistemi, $x^*(t)$ noktasından başlayarak ilgili performans kriterini minimum yapan yörüngede kontrol eden optimal kontrol işaretidir.

Optimal yörünge civarında amaç ölçütünün varyasyonunun sıfıra eşit olacağı varsayılabilir:

$$\begin{aligned}\frac{dJ^*(x^*(t),t)}{dt} &= \left(\frac{\partial J^*(x^*(t),t)}{\partial x^*} \right)' x^*(t) + \frac{\partial J^*(x^*(t),t)}{\partial t} \\ &= \left(\frac{\partial J^*(x^*(t),t)}{\partial x^*} \right)' f(x^*(t),u^*(t),t) + \frac{\partial J^*(x^*(t),t)}{\partial t}\end{aligned}\quad (2.4)$$

Burada ilk terim, Denklem 2.3'e göre yeniden ifade edilebilir:

$$\frac{dJ^*(x^*(t),t)}{dt} = -V(x^*(t),u^*(t),t) \quad (2.5)$$

Buna göre Denklem 2.4 düzenlenirse, Denklem 2.6 elde edilir:

$$\frac{\partial J^*(x^*(t),t)}{\partial t} + V(x^*(t),u^*(t),t) + \left(\frac{\partial J^*(x^*(t),t)}{\partial x^*} \right)' f(x^*(t),u^*(t),t) = 0 \quad (2.6)$$

Burada Hamiltoniyen ifadesi Denklem 2.7'de yer alan şekilde tanımlanabilir:

$$\mathcal{H} = V(x^*(t),u^*(t),t) + \left(\frac{\partial J^*(x^*(t),t)}{\partial x^*} \right)' f(x^*(t),u^*(t),t) = 0 \quad (2.7)$$

Hamiltoniyen ifadesine göre optimum amaç ölçütü J^* 'nin varyasyonu olan Denklem 2.6 ifadesi düzenlenirse Hamilton-Jacobi denklemi elde edilir:

$$\frac{\partial J^*(x^*(t),t)}{\partial t} + \mathcal{H}\left(x^*(t), \frac{\partial J^*(x^*(t),t)}{\partial x^*}, u^*(t), t\right) = 0; \forall t \in [t_0, t_f] \quad (2.8)$$

Alt indisler kısmi türevleri temsil edecek şekilde HJB denklemi, Denklem 2.9'da düzenlenmiştir:

$$J_t^* + \mathcal{H}(x^*(t), J_x^*, u^*(t), t) = 0 \quad (2.9)$$

$$J_t^* = \frac{\partial J^*(x^*(t),t)}{\partial t}; \quad J_x^* = \frac{\partial J^*(x^*(t),t)}{\partial x^*}$$

HJB denklemi, doğrusal olmayan kısmi diferansiyeller içeren bir denklemdir ve çözümü birçok problem için oldukça zordur. Optimal kontrol işareti $u^*(t)$ için bir çözüme ulaşılsa bile bu çözüm çok karmaşık ve uygulanması mümkün olmayan bir matematiksel ifade olabilir. Bu noktada çoğunlukla düşük boyutlu doğrusal olmayan sistemler veya karesel amaç ölçütüne sahip doğrusal sistemler için uygulanabilir sonuçlar elde edilebildiği söylenebilir. HJB denklemi, karesel amaç ölçütüne sahip doğrusal sistemler için düzenlenirse Riccati denklemine dönüşür ve LQR probleminin temelini oluşturur.

2.1.1 Varyasyonlar hesabıyla HJB denklemlerinin ilişkisi

Varyasyonlar Hesabı'na göre yardımcı durumlar $\lambda(t)$ şöyle ifade edilir:

$$\lambda^*(t) = \frac{\partial J^*(x^*(t), t)}{\partial x^*} \quad (2.10)$$

Durumlar ve yardımcı durumlar arasındaki ilişki, Denklem 2.11'de verilmiştir:

$$\dot{\lambda}^*(t) = - \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \right)_* \quad (2.11)$$

"Pontryagin Minimum Prensibi"ne göre optimal yörüngeye götüren kontrol işareti, Hamiltoniyen fonksiyonunu minimum yapar [1]. Buna göre, kısıtlamasız kontrolde optimal kontrol işareti için sağlanması gereken koşul, Denklem 2.12'dedir:

$$\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} \right)_* = 0 \longrightarrow u^*(t) = h(x^*(t), J_x^*, t) \quad (2.12)$$

Buna göre, $\lambda(t)$ ve $\dot{\lambda}(t)$ ifadeleri kullanılarak Denklem 2.13 elde edilir.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial J^*(x^*(t), t)}{\partial x^*} \right) = \frac{d}{dt} [\lambda^*(t)] = - \frac{\partial \mathcal{H} \left(x^*(t), \frac{\partial J^*(x^*(t), t)}{\partial x}, u^*(t), t \right)}{\partial x^*} \quad (2.13)$$

Bu ifade, Denklem 2.8'de elde edilen Hamilton-Jacobi-Bellman ifadesine eşittir. Böylece HJB ve varyasyonlar hesabı yaklaşımı ile elde edilen sonuçların eşdeğerliği gösterilmiştir.

2.2 Doğrusal Karesel Regülatör (LQR)

Bu bölümde doğrusal bir sistem için karesel regülatör problemi incelenecek ve optimal kontrol için HJB denklemleri kullanılacaktır.

Aşağıdaki doğrusal sistemi ele alalım:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (2.14)$$

Sistemin optimal olarak kontrol edilmek istenen amaç ölçütünü tanımlayalım:

$$J = \frac{1}{2}x'(t_f)Fx(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [x'(t)Q(t)x(t) + u'(t)R(t)u(t)] dt \quad (2.15)$$

Burada, $\frac{1}{2}x'(t_f)Fx(t_f)$ ifadesi amaç ölçütünün nihai değerini ifade eder. Karesel bir amaç ölçütüne sahip olmak için F ve $Q(t)$ matrisleri reel, simetrik ve yarı pozitif; $R(t)$ ise reel, simetrik ve kesin pozitif olmalıdır.

Doğrusal karesel regülatör probleminde optimal kontrol kuralını bulmak için öncelikle Hamiltoniyen ifadesini, Denklem 2.7'de belirtildiği şekilde elde edelim:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x(t), u(t), J_x^*, t) &= \frac{1}{2}x'(t)Q(t)x(t) + \frac{1}{2}u'(t)R(t)u(t) \\ &+ J_x^{*'}(x(t), t)[A(t)x(t) + B(t)u(t)] \end{aligned} \quad (2.16)$$

Denklem 2.12'de verilen optimizasyon için gerekli koşulu yazalım:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = 0 \longrightarrow R(t)u(t) + B'(t)J_x^{*'}(x(t), t) = 0 \quad (2.17)$$

Bu koşulu sağlayan kontrol kuralı:

$$u^*(t) = -R^{-1}(t)B'(t)J_x^*(x(t), t) \quad (2.18)$$

olarak ifade edilir. Ancak $u(t)$ 'nin Hamiltoniyen ifadesini minimum yaptığını göstermek için ilk türevin sıfıra eşit olması yeterli değildir. Buna ilave olarak ikinci türevin de pozitif olması gereklidir:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial u^2} = R(t)$$

Karesel amaç ölçütü için $R(t)$ kesin pozitif kabul edildiği için $\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial u^2}$ ifadesi her zaman pozitifdir ve elde edilen $u^*(t)$ kontrol kuralı \mathcal{H} ifadesini minimum yapar. Bu kontrol kuralının elde edilmesi için ise $J_x^*(x(t))$ ifadesinin hesaplanması gerekir. Elde edilen kontrol kuralını Hamiltoniyen ifadesine yazıp yeniden düzenleyelim:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x(t), u(t), J_x^*, t) &= \frac{1}{2} x'(t) Q(t) x(t) + \frac{1}{2} J_x^{*'} B(t) R^{-1}(t) B'(t) J_x^* \\ &\quad + J_x^{*'} A(t) x(t) - J_x^{*'} B(t) R^{-1}(t) B'(t) J_x^* \\ &= \frac{1}{2} x'(t) Q(t) x(t) - \frac{1}{2} J_x^{*'} B(t) R^{-1}(t) B'(t) J_x^* \\ &\quad + J_x^{*'} A(t) x(t) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Tüm bu elde edilen ifadeler ışığında, HJB denklemini ve sınır koşulunu yazalım:

$$J_t^* + \frac{1}{2} x^{*'}(t) Q(t) x^*(t) - \frac{1}{2} J_x^{*'} B(t) R^{-1}(t) B'(t) J_x^* + J_x^{*'} A(t) x^*(t) = 0 \quad (2.20)$$

$$J^*(x^*(t_f), t_f) = \frac{1}{2} x^{*'}(t_f) F(t_f) x^*(t_f) \quad (2.21)$$

HJB denkleminin çözülebilmesi için J_t^* ve J_x^* ifadelerine ihtiyaç vardır. Doğrusal karesel regülatör probleminde amaç ölçütü J , sistemin durumlarına göre kareseldir. Buna göre reel, simetrik ve kesin pozitif bir P matrisi ile J karesel olarak en genel formda şöyle ifade edilebilir:

$$J^*(x(t), t) = \frac{1}{2} x'(t) P(t) x(t) \quad (2.22)$$

Bu duruma karşı düşen sınır koşulu ifadesi Denklem 2.23'te verilmiştir:

$$\frac{1}{2} x'(t_f) P(t_f) x(t_f) = \frac{1}{2} x'(t_f) F(t_f) x(t_f) \quad (2.23)$$

Bu eşitliğe göre $P(t_f) = F(t_f)$ 'dir.

Genel formdaki J ifadesini kullanarak J_t^* ve J_x^* ifadelerini hesaplayalım:

$$\begin{aligned}\frac{\partial J^*}{\partial t} &= J_t = \frac{1}{2}x(t)\dot{P}(t)x(t) \\ \frac{\partial J^*}{\partial x} &= J_x = P(t)x(t)\end{aligned}\quad (2.24)$$

$$u^*(t) = -R^{-1}(t)B'(t)P(t)x^*(t) \quad (2.25)$$

Elde edilen J_x^* , $u^*(t)$ 'de yerine yazılırsa:

$$u^*(t) = -R^{-1}(t)B'(t)P(t)x^*(t) \quad (2.26)$$

amaç ölçütü olan J fonksiyonunu minimum yapan kontrol işareti $u^*(t)$ bulunur. Ancak burada P matrisi bilinmeyendir ve HJB denklemini kullanılarak hesaplanması gerekir. Bunun için genel formda elde edilen J_t^* ve J_x^* ifadelerini HJB denkleminde yerine yazalım:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}x'(t)\dot{P}(t)x(t) + \frac{1}{2}x(t)Q(t)x(t) \\ &-\frac{1}{2}x'(t)P(t)B(t)R^{-1}(t)B'(t)P(t)x(t) \\ &+ x'(t)P(t)A(t)x(t) = 0\end{aligned}\quad (2.27)$$

Bu eşitliği düzenleyebilmek için $P(t)A(t)$ ifadesine basit bir dönüşüm uygulayalım:

$$P(t)A(t) = \frac{1}{2} [P(t)A(t) + \{P(t)A(t)\}'] + \frac{1}{2} [P(t)A(t) - \{P(t)A(t)\}'] \quad (2.28)$$

Bu durumda HJB denklemini şöyle yazılabilir:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}x'(t)(\dot{P}(t) + Q(t) - P(t)B(t)R^{-1}(t)B'(t)P(t) \\ &+ P(t)A(t) + A'(t)P(t))x(t) = 0\end{aligned}\quad (2.29)$$

Elde edilen HJB denklemini her $x(t)$ için sağlanmalıdır. Öyleyse bu denklemini sağlayan asıl koşul:

$$\dot{P}(t) + Q(t) - P(t)B(t)R^{-1}(t)B'(t)P(t) + P(t)A(t) + A'(t)P(t) = 0 \quad (2.30)$$

ifadesidir. Bu denklem yeniden düzenlendiğinde "Diferansiyel Matris Riccati Denklemi" elde edilir:

$$\dot{P}(t) = -P(t)A(t) - A'(t)P(t) + P(t)B(t)R^{-1}(t)B'(t)P(t) - Q(t) \quad (2.31)$$

Matris Riccati denklemi, doğrusal olmayan diferansiyel bir denklemdir. Doğrusal olmayan sistemler için HJB denklemi kısmi diferansiyeller içerirken, sistem doğrusal olduğunda doğrusal olmayan ancak adi bir diferansiyel denkleme (ordinary differential equation, ODE) dönüşür. Bu durumda $P(t)$ matrisi nümerik olarak çözülebilir. Üstelik $P(t)$ simetrik olduğu için $n \times n$ denklem yerine $n(n+1)/2$ denklemin çözülmesi yeterlidir.

Sistem doğrusal ve zamanla değişmeyen olduğunda ise A ve B matrisleri sabit matrislerdir. Q ve R matrislerinin de sabit seçilmesi durumunda, $t_f \rightarrow \infty$ için diferansiyel matris Riccati denklemi "Cebirsel Riccati Denklemi"ne dönüşür. Bu durumda P matrisi de sabit bir matris olacağı için zamanla değişmez ve $\dot{P}(t) = 0$ olur. Cebirsel Riccati denklemi şöyle ifade edilir:

$$PA + A'P - PBR^{-1}B'P + Q = 0 \quad (2.32)$$

Özet olarak optimal kontrol kuralını elde etmek için HJB denklemleri çözülmelidir. Ancak doğrusal olmayan veya yüksek boyutlu sistemler için kısmi diferansiyel denklemleri çözmek kolay ve verimli değildir. Üstelik bazı durumlarda HJB denklemlerinin kesin çözümünü elde etmek mümkün olmayabilir veya elde edilen çözüm uygulanamayacak kadar karmaşık olabilir. Doğrusal sistemler için, HJB denklemleri matris Riccati denklemine, doğrusal zamanla değişmeyen sistemler için ise cebirsel Riccati denklemine dönüşür. HJB denklemini çözmeye kıyasla bu denklemleri çözmek çok daha kolaydır. Ancak doğrusal sistemler yaygın sistemler değildir ve birçok sistem doğrusal olmayan özellikler içerir. Eğer doğrusal olmayan sistemin çalışma aralığı yeterince küçükse, doğrusal durumun avantajını kullanmak için, sistem çalışma noktası etrafında doğrusallaştırılabilir. Eğer çalışma aralığı genişse, doğrusal olmayan sistem farklı çalışma noktalarının civarında doğrusallaştırılarak kontrolör tasarımı yapılabilir. Ancak doğrusal olmama, sistemin doğal yapısında vardır ve doğrusallaştırma sonucu önemli ve faydalı olabilecek doğrusal olmayan özellikler kontrolör tasarımında ihmal edilir. Bahsedilen bu

sorunların üstesinden gelmek için, SDRE temelli kontrol yöntemi, LQR teorisini temel alan ve sistemin doğrusal olmayan özelliklerinin korunmasına izin veren bir kontrol aracı olarak karşımıza çıkar. Sonraki bölümde, SDRE temelli kontrol yöntemi incelenecektir.



3. DURUMA BAĞLI RİCCATİ DENKLEMİ YÖNTEMİ

SDRE tekniği, yalınlığı ve uygulama kolaylığı nedeniyle doğrusal olmayan sistemlerin kontrolü için oldukça dikkat çeken bir kontrol aracıdır. SDRE yönteminde temelde LQR teorisi esas alınır, ancak LQR'nin aksine, sistemin doğrusallaştırılmasına ihtiyaç duyulmaz; sistemin doğrusal olmayan özellikleri korunur.

SDRE yöntemini diğer doğrusal olmayan kontrolör yöntemlerinden ayıran önemli bir yönü, kontrolör tasarımının sistematik olmasıdır. Bu sayede kontrolör, belirli adımlar ve analizler sonucunda kolayca tasarlanabilir. Sistematik tasarıma ilave olarak SDRE yöntemi, tasarım esnekliği olan bir kontrol yöntemidir. Bu yöntemde, bir performans kriteri tanımlanarak sistemin durumları ve kontrol sinyalinin davranışı belirlenebilir. Performans kriterindeki durum ve kontrol işaretinin ağırlıkları, kontrolör tasarımında esneklik oluşturur. Bir diğer esneklik ise model seçiminde mevcuttur. SDRE yöntemi, doğrusala benzer ancak durumlara bağlı katsayılara sahip bir gösterime ihtiyaç duyar. Bölüm 3.2.1'de belirtildiği gibi bu yapı, sonsuz farklı şekilde duruma bağlı katsayılı olarak ifade edilebilir. Bu esneklikten faydalanılarak kontrolör tasarımı için "en uygun model" belirlenebilir.

SDRE kontrol yönteminde, kontrol edilecek model üzerinde ağır kısıtlamalar yoktur. Doğrusal olmayan sistem için, karşılanması zor olmayan bu koşullar altında, noktasal kararlı (pointwise stable) bir kontrol kuralı elde edilir. Bu kontrol kuralını bulmak için duruma bağlı Riccati denkleminin çözülmesi gereklidir. Elde edilen kontrol kuralı ise oldukça basit ve uygulanabilir.

3.1 Matematiksel Gösterimlerin Tanımı

Bu bölümde, kullanılan matematiksel gösterimler tanımlanmıştır. \mathbb{R} gerçekte sayılar kümesidir ve pozitif her n sayısı için \mathbb{R}^n , n boyutlu Euclidean uzayıdır. Sistem durumlarını tanımlayan kümesi Ω ile gösterilmiştir. n , sistemin durum sayısını belirtmek üzere, Ω , \mathbb{R}^n 'nin orijin noktasını içeren bir alt kümesidir ($0 \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$). $C^0(\Omega)$, Ω

üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonları temsil eder. $C^k(\Omega)$ veya C^k ise Ω üzerinde k defa türevlenebilir sürekli fonksiyonları temsil eder.

3.2 Duruma Bağlı Katsayılı (SDC) Gösterim

Duruma bağlı katsayılı (state dependent coefficient, SDC) gösterim [13]; doğrusal olmayan sistemler için, sistemin doğrusala benzer şekilde durum uzayında ifade edilmesini sağlayan bir çarpanlara ayırma işlemidir:

$$\dot{x} = A(x)x + B(x)u, \quad x(0) = x_0 \quad (3.1)$$

Bu gösterimde A ve B matrisleri, sistemin durumlarına bağlı olarak değişir. Duruma bağlı katsayılı gösterim, doğrusal olmayan her sistem için elde edilemeyebilir. Önerme 1'deki koşullar sağlandığında, $\dot{x} = f(x)$ şeklindeki doğrusal olmayan sistem için duruma bağlı matrislerin varlığı garanti edilir:

Önerme 1 [18]

f fonksiyonu, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ olan ve $f(0) = 0$ ile $f(\cdot) \in C^k(\Omega)$, $k \geq 1$ koşullarını sağlayan bir fonksiyon olsun. Bu durumda $\forall x \in \Omega$ için, $f(x)$ fonksiyonunun $A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ olan bir duruma bağlı $A(x)$ gösterimi vardır. Belirtilen koşullar altında $A(x)$ şöyle hesaplanır:

$$A(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=\lambda x} d\lambda$$

Burada λ , integral işleminde kullanılan yapay bir değişkendir.

Önerme 1, $A(x)$ matrisinin varlığını kanıtlamaya ek olarak, Lemma 1'de açıklanan SDC gösteriminin basit ama çok önemli bir özelliğini gösterir:

Lemma 1 [19]

Herhangi bir SDC gösterimine ait $A(x)$ matrisi şu koşulu sağlar:

$$f(x) = A(x)x$$

$A(0)$, $f(x)$ fonksiyonunun orijin etrafında doğrusallaştırılmış ifadesidir ve $A(0) = \frac{\partial f(0)}{\partial x}$ olarak yazılabilir.

Burada $\frac{\partial f(0)}{\partial x}$, $f(x)$ 'in orijin etrafındaki Taylor doğrusallaştırmasıdır. x , 0'a giderken, SDC gösterimindeki $A(x)$ matrisi, orijin etrafında doğrusallaştırılmış f fonksiyonuna yakınsar. Sonuçta $A(x)$ 'in seçiminden bağımsız olarak, $A(0)$ her zaman doğrusallaştırılmış $f(0)$ fonksiyonuna eşittir.

SDC gösteriminin belirlenmesi, doğrusal olmayan bir sistem için SDRE yöntemi kullanılarak kontrol kuralının türetilmesinin ilk ve en önemli adımıdır. SDC gösterimi ile $\dot{x}(t) = f(x) + B(x)u(t)$ biçiminde olan herhangi bir doğrusal olmayan sistem, duruma bağlı $A(x)$ ve $B(x)$ matrislerini içerecek şekilde yeniden yazılabilir.

[12]'de yer alan açıklayıcı ve basit bir örnek, doğrusal olmayan bir sistem için çeşitli SDC matrislerini gösterir:

Örnek 1 Aşağıda verilen doğrusal olmayan sistemi ele alalım:

$$\dot{x}_1 = x_2 - x_1x_2, \quad \dot{x}_2 = u$$

Sistem, SDC formunda şu şekilde temsil edilebilir:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = A_i(x) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad i = 1, 2, 3$$

Bu formu sağlayan $A_i(x)$ matris örnekleri şöyledir:

$$A_1(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 - x_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2(x) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}x_2 & 1 - \frac{1}{2}x_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3(x) = \begin{bmatrix} -x_2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Burada $A_2(x)$, Önerme 1 kullanılarak elde edilmiştir. $\frac{\partial f(0)}{\partial x}$ ve verilen $A(x)$ 'lerin orijindeki gösterimlerinin eşit olduğuna dikkat edelim:

$$\frac{\partial f(0)}{\partial x} = \begin{bmatrix} -x_2 & 1 - x_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial f(0)}{\partial x} = A_1(0) = A_2(0) = A_3(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3.2.1 SDC gösteriminin serbestliği

Örnek 1, verilen çok değişkenli doğrusal olmayan bir sistemin üç farklı SDC formunu gösterir. Çok değişkenli sistemler için ($n > 1$), $A(x)$ tek bir biçimde değildir ve aslında $A(x)$ matrisi için sonsuz sayıda gösterim mevcuttur [20].

Öte yandan, skaler durum için ($n = 1$), SDC gösterimi $a(x) = \frac{f(x)}{x}$ şeklinde ifade edilir. Burada $f(x) = a(x)x$ 'tir ve $a(x)$ 'in boyutu 1'dir [9].

Önerme 2, çok değişkenli doğrusal olmayan sistemlerin SDC gösterilimi için yararlı bir özellik ortaya koymaktadır:

Önerme 2 [21]

Çok değişkenli doğrusal olmayan bir sistem için $A_1(x)$ ve $A_2(x)$ matrisleri, sistemin iki farklı SDC gösterimi olsun. Buna göre sistemin $A(x)$ matrisi, bu iki SDC gösteriminin ağırlıklı toplamı olarak yazılabilir:

$$A(x, \alpha) = \alpha A_1(x) + (1 - \alpha) A_2(x) \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad (3.2)$$

Burada herhangi bir $\alpha \in \mathbb{R}$ için, $A(x, \alpha)$ bir SDC gösterimini temsil eder ve sonsuz farklı şekilde ifade edilebilir.

Önerme 2'ye göre $A(x, \alpha)$, doğrusal olmayan bir sistemin sonsuz elemanlı SDC gösterimleri kümesini temsil eder. Burada α serbest bir tasarım parametresidir ve seçiminde bir kısıtlama yoktur. Dolayısıyla, α herhangi bir gerçek değer olabilir; ancak basitlik için $\alpha \in [0, 1]$ arasında seçilebilir. $\alpha = 1$ olduğunda, $A(x)$ tamamen $A_1(x)$ 'e bağlıdır ve $\alpha = 0$ ise, $A(x)$ tamamen $A_2(x)$ 'ye bağlıdır. Bu durumda $\alpha \in [0, 1]$ için, $A(x, \alpha)$, $A_1(x)$ ve $A_2(x)$ 'ye bağlı sonsuz farklı biçimde olabilir.

3.3 Duruma Bağlı Riccati Denklemi (SDRE) İle Kontrolör Tasarım Yöntemi

Duruma bağlı Riccati denklemi (SDRE) ile kontrolör tasarım yöntemi, LQR problemi ve cebirsel Riccati denklemini temel alır.

3.3.1 Doğrusal olmayan karesel optimal kontrol problemi

Sonsuz zaman ufuklu, sürekli zamanlı, doğrusal olmayan optimal kontrol problemini ele alalım:

$$\dot{x}(t) = f(x) + B(x)u(t), \quad x(0) = x_0 \quad (3.3)$$

$$J(x_0, u(\cdot)) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \{x^T(t)Q(x)x(t) + u^T(t)R(x)u(t)\} dt \quad (3.4)$$

Burada sistem, durumlar bakımından doğrusal olmayan ama giriş bakımından doğrusal (giriş affine) bir sistemdir. Tüm durumların ölçülebildiği varsayımı altında durum vektörü $x = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$; giriş vektörü $u(t) = [u_1(t), \dots, u_m(t)]^T \in \mathbb{R}^m$; $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$; $B: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ ve $1 \leq m \leq n$ 'dir. Sistemin kontrol edilebilmesi için ise $B(x) \neq 0 \forall x$ olmalıdır.

Sistemin amaç ölçütü J ise giriş bakımından karesel ama durumlar bakımından karesel olmayan bir ifadedir. $Q(x)$ ve $R(x)$ amaç ölçütündeki tasarım parametreleridir ve $Q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, $R: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m}$ olan duruma bağlı matris değerli fonksiyonlardır.

SDRE yönteminin doğrusal olmayan optimal kontrol problemine uygulanabilmesi için Denklem 3.3 ve 3.4, aşağıdaki koşulları sağlamalıdır: [19]

Koşul 1 f sürekli, türevlenebilir ve durumlara bağlı bir fonksiyon; B ise sürekli bir fonksiyon olsun:

$$f(\cdot) \in C^1(\Omega) \quad x \in \Omega, \quad B(\cdot) \in C^0(\Omega)$$

Koşul 2 Genelliği bozmadan, sistemin kontrol girişi sıfırken ($u = 0$) orijin noktası $x = 0 \in \Omega$ sistemin denge noktası olsun:

$$\dot{x} = f(0) = 0 \quad (u = 0 \text{ ve } B(x) \neq 0 \forall x \in \Omega \text{ koşulu altında})$$

Koşul 3 Amaç ölçütündeki tasarım parametreleri Q ve R pozitif, sürekli ve simetrik matris değerli fonksiyonlar olsun:

$$Q(x) = Q^T(x) \geq 0, \quad R(x) = R^T(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega$$
$$Q(x), R(x) \in C^0(\Omega)$$

Koşul 4 $A(x), B(x)$ ve $C(x)$, doğrusal olmayan sistemin SDC gösterimine ilişkin matrisler olmak üzere, sistem $\forall x \in \Omega$ için $\{A(x), B(x)\}$ matrislerine göre noktasal kararlı kılınabilir olsun ve $C^T(x)C(x) = Q(x)$ olduğu durumda $\{C(x), A(x)\}$ matrislerine göre noktasal gözlenebilir olsun.

$A(x) : \mathbb{R}^{n \times n}$ ve $B(x) : \mathbb{R}^{n \times m}$ olmak üzere, sistemin kontrol edilebilirlik matrisi

$$M_c = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B]$$

$\forall x \in \Omega$ için tam ranklı ise ($\text{rank}(M_c) = n$), $\{A(x), B(x)\}$ noktasal kontrol edilebilir (pointwise controllable) ve dolayısıyla noktasal kararlı kılınabilir (pointwise stabilizable) [22]. Benzer şekilde, $C(x) : \mathbb{R}^{r \times n}$ olmak üzere, sistemin gözlenebilirlik matrisi

$$M_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

$\forall x \in \Omega$ için tam ranklı ise ($\text{rank}(M_o) = n$), $\{C(x), A(x)\}$ noktasal gözlenebilir (pointwise observable) [22].

Önerme 1’de belirtilen $A(x)$ matrisinin varlık koşulu, Koşul 1 ve Koşul 2 ile karşılanır ve böylece $A(x)$ ile $B(x)$ ’in varlığı garanti edilir. Ayrıca Lemma 1’de belirtildiği üzere $A(x)$ matrisi, $A(x)$ ’in seçiminden bağımsız bir şekilde $A(0) = \frac{\partial f(0)}{\partial x}$ ifadesini sağlar. Buna göre, doğrusallaştırılmış f fonksiyonu kararsız ise $\{A(0), B(0)\}$ çifti herhangi bir gösterimde kararsız olacağı için Koşul 4 sağlanamaz. Türevi alınamayan sistem dinamiklerinin, sistem durumlarından bağımsız terimlerin, durumlar ve kontrol işareti üzerindeki sınırlayıcıların varlığında, bahsedilen bu problemle karşılaşılabilir. Bu durumda SDRE yönteminin uygulanabilmesi için sistemin uygun biçimde ifade edilebilmesi gerekir, [19]. Buna örnek bir çalışma için [21] incelenebilir.

SDC biçimindeki model kullanılarak LQR probleminin çözümünde kullanılan cebirsel Riccati denklemi düzenlenirse, sürekli zamanlı cebirsel SDRE ifadesi elde edilir:

$$P(x)A(x) + A^T(x)P(x) - P(x)B(x)R^{-1}(x)B^T(x)P(x) + Q(x) = 0 \quad (3.5)$$

Koşul 3 ve Koşul 4 ile cebirsel SDRE denklemini sağlayan $P(x)$ 'in simetrik ve $P(x) \geq 0$ koşulunu sağlayan tek bir matris olması garanti edilir. Buna göre, LQR problemine benzer şekilde, cebirsel SDRE için sistemi noktasal kararlı kılan kontrol kuralı şöyledir:

$$u(x) = -R^{-1}(x)B^T(x)P(x)x \quad (3.6)$$

Bu ifade, doğrusal olmayan bir geri besleme kuralıdır. Buna göre, Denklem 2.15'te verilen amaç ölçütünü yaklaşık olarak minimum yapan kontrol kazancı:

$$K(x) = R^{-1}(x)B^T(x)P(x) \quad (3.7)$$

Verilen SDRE geri beslemeli kontrol kuralının sisteme uygulanmasıyla, durumlara bağlı olarak elde edilen kapalı çevrim sistem şöyledir:

$$\dot{x}(t) = [A(x) - B(x)R^{-1}(x)B^T(x)P(x)]x(t) \quad (3.8)$$

SDRE kontrol kuralı uygulanmış sistemin durumlarının izleyeceği yörüngeler Denklem 3.8'in çözümüyle bulunur.

3.4 SDRE Yönteminde Tasarım Serbestliği

3.4.1 SDC gösteriminin seçimi

Önerme 2'de belirtildiği üzere $\dot{x} = f(x)$ formundaki bir sistem için, belirli koşullar altında sonsuz tane SDC gösterimi bulunabilir ve her bir gösterim için $f(x) = A(x)x$ koşulu sağlanır. Sonsuz farklı gösterimin mevcut olması, tasarım açısından bir zorluk değil aksine kontrolör tasarımı kolaylaştıran bir unsurdur. Farklı $A(x)$ matrisleri incelenip doğrusal olmayan sistemin kontrolü için "en uygun" model seçilebilir. SDC gösteriminin seçiminin kontrol tasarımına etkisini görmek için Örnek 1'i yeniden inceleyelim:

$$\dot{x}_1 = x_2 - x_1x_2, \quad \dot{x}_2 = u$$

Verilen doğrusal olmayan sistem için tanımlanan üç farklı SDC gösterimi şöyledir:

$$A_1(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1-x_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2(x) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}x_2 & 1-\frac{1}{2}x_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3(x) = \begin{bmatrix} -x_2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Koşul 4'te belirtildiği üzere SDRE denkleminin çözümünde uygun formda bir $P(x)$ elde edebilmek için $\{A(x), B(x)\}$ matris çifti kararlı kılınabilir olmalıdır. Öyleyse her üç gösterime ait kontrol edilebilirlik matrisinin determinantını $\forall x \in \Omega$ için hesaplayalım:

- $A_1(x)$ için $\det(Mc) = x_1 - 1$.
- $A_2(x)$ için $\det(Mc) = \frac{1}{2}x_1 - 1$.
- $A_3(x)$ için $\det(Mc) = -1 \neq 0$.

Bir sistemin kontrol edilebilir olması için, kontrol edilebilirlik matrisinin determinantı, $\forall x \in \Omega$ için sıfırdan farklı olmalıdır. Buna göre, $A_1(x)$ matrisi için $\det(Mc)$, $x_1 = 1$ 'de sifira eşit olur ve $A_1(x)$ ile ifade edilen sistem $x_1 = 1$ için kontrol edilebilir değildir. Benzer şekilde $A_2(x)$ gösterimi seçildiğinde $x_1 = 2$ için sistem kontrol edilemezdir. Ancak $A_3(x)$ gösteriminde $\forall x \in \Omega$ için $\det(Mc)$ her zaman sıfırdan farklıdır. Sonuç olarak, $A_3(x)$ için sistemin kontrol edilebilir aralığı daha büyüktür ve $A_1(x)$ ve $A_2(x)$ 'ye göre daha iyi bir SDC gösterimidir. Önerme 2'de belirtildiği gibi $A(x)$, $A(x, \alpha)$ formunda yazıldıysa bu durumda α 'nın değişimine bağlı olarak kontrol edilebilirlik ve gözlenebilirlik koşulları incelenerek kontrol için en uygun gösterim bulunabilir.

Önerme 2'ye ilave olarak, eğer $A(x, \alpha)$ gösterimindeki durumlardan birinin türevi, başka bir duruma bağlı ise, sıfırdan farklı bir katsayı kullanılarak parametrelendirilmesi önerilmiştir [23]. Buna göre, eğer i 'nci durumun türevi j 'inci duruma bağlıysa, $A(x, \alpha)$ matrisinin $\{i, j\}$ elemanına sıfır olmayan bir değer yerleştirilir. Örneğin, $\dot{x}_3 = x_1 x_2$ ifadesini ele alalım. Burada seçilebilecek iki farklı gösterim $a_{31} = 0$, $a_{32} = x_1$ ve $a_{31} = x_2$, $a_{32} = 0$ 'dır. Ancak \dot{x}_3 , hem x_1 hem x_2 'ye bağlıdır. Oysa verilen parametrelendirmeler bu bağlılığı içermez. Bunun yerine $a_{31} = \alpha_1 x_2$ ve $a_{32} = (1 - \alpha_1) x_1$ seçmek daha iyi bir gösterim olacaktır.

3.4.2 $Q(x)$ ve $R(x)$ matrislerinin seçimi

$Q(x)$ ve $R(x)$ matris değerli fonksiyonları, amaç ölçütünde durumların ve kontrol işaretinin ağırlıklarını temsil eden SDRE tasarım parametreleridir ve kapalı çevrimli sistemin davranışı, bu parametreler aracılığıyla belirlenir. $Q(x)$ ve $R(x)$, matris değerli fonksiyonlardır. Tasarımda sabit matris olarak seçilebilecekleri gibi, aynı zamanda durumların fonksiyonu olarak da belirlenebilirler. Bu durum, durum uzayının farklı bölgelerinde farklı sistem davranışının belirlenmesine olanak tanır.

$Q(x)$ ve $R(x)$ fonksiyonlarının belirlenmesinde kesin kurallar yoktur. SDRE yönteminin uygulanması için gerekli olan Koşul 3 ve Koşul 4 sağlandıktan sonra deney sonuçlarına bağlı olarak $Q(x)$ ve $R(x)$ belirlenebilir. Buna ilave olarak, amaç ölçütünü dışbükey yapacak bir fonksiyon seçilebilir. Denklem 3.4'te yer alan amaç ölçütü için:

$$\frac{\partial^2 J}{\partial u^2} = R(t) \quad (3.9)$$

olduğuna göre, $R(x) > 0$ seçildiği müddetçe, amaç ölçütü J , u 'ya göre dışbükeydir. Koşul 3 ile $R(x)$ 'in pozitif olması garanti edilmiştir. Benzer şekilde, J 'nin sistemin durumlarına göre dışbükey olması için:

$$\frac{\partial^2 [x^T Q(x)x]}{\partial x^2} > 0 \quad (3.10)$$

koşulu sağlanmalıdır. Önerme 3'te J 'yi dışbükey yapan pozitif bir $Q(x)$ seçimi yer almaktadır.

Önerme 3 [24]

$l = x^T Q(x)x$ biçimindeki skaler fonksiyonu ele alalım. Q_0 , herhangi bir pozitif simetrik matris ve $Q_1(x) = \text{diag}(q_1(x_1), \dots, q_n(x_n))$ biçiminde köşegen bir matris olmak üzere, $Q(x) = Q_0 + Q_1(x)$ biçiminde tanımlı bir fonksiyon olsun. Burada q_i fonksiyonları, $q_i(x_i) = c_{i0} + c_{i2}x_i^2 + c_{i4}x_i^4 + \dots + c_{is_i}x_i^{s_i}$ ($c_{ij} \geq 0, j = 0, 2, 4, \dots, s_i$) yapısına sahip olsun. Bu durumda tanımlanan l fonksiyonu, x 'e göre global dışbükeydir.

Önerme 3'e göre, $Q(x)$ belirlenirken durumların karesel üstel ifadeleri kullanılır. Buna göre, sistem denge noktasından uzaklaştıkça maliyet üstel olarak artar ve bu noktalarda kontrol kazancının yüksek olması beklenebilir.

3.5 SDRE’de Kararlılık ve Optimallik

SDRE kontrol kuralı, Riccati denklemi teorisine göre sistemin her bir çalışma noktası için noktasal kararlı yapan bir kontrol kuralıdır. Buna göre, $K(x)$ SDRE yöntemiyle elde edilen kontrol kazancı olmak üzere, Denklem 3.11’de verilen kapalı çevrimli sistemin herhangi bir x çalışma noktası için tüm özdeğerleri sol yarı düzlemdedir.

$$A_{CL}(x) = A(x) - B(x)K(x) \quad (3.11)$$

Ancak noktasal kararlılıkta gerekli olan $Re[\lambda_i(A_{CL}(x))] < 0 \forall x$ şartı, global kararlılık için yeterli değildir. Bir sistemin global asimptotik kararlı olabilmesi için, sistemin başlangıç noktasından bağımsız bir şekilde orijin noktasına getirilebilmesi gereklidir. Bu durumu açıklamak için Örnek 2’de yer alan sistem incelenmiştir:

Örnek 2 [19]

$\dot{x}_1 = -x_1$, $\dot{x}_2 = -x_2 + x_1x_2^2$ için seçilen $A_1(x)$ gösterimini ele alalım:

$$A_1(x) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ x_2^2 & -1 \end{bmatrix}$$

$A_1(x)$ matrisinin her iki özdeğeri de $\lambda = -1$ ’dedir ve sol yarı düzlemde olduğu için kararlıdır. Buna göre sistemin $x_1(0) = x_{10}$ ve $x_2(0) = x_{20}$ başlangıç noktalarına göre durumlarının zamana bağlı fonksiyonları:

$$x_1(t) = x_{10}e^{-t}, \quad x_2(t) = \frac{2 x_{20} e^{-t}}{x_{10} x_{20} e^{-2t} + 2 - x_{10} x_{20}}$$

olarak hesaplanır. Burada $t = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x_{10} x_{20}}{x_{10} x_{20} - 2} \right)$ için $x_2(t) = \infty$ olur. Sonuç olarak $A_1(x)$ gösterimi noktasal kararlı olsa bile global asimptotik kararlı değildir.

SDRE yöntemiyle kontrol edilmiş kapalı çevrimli sistem, orijin etrafındaki küçük bir bölgede (Ω_0) lokal asimptotik kararlıdır. [25]’te yapılan çalışmada, C^0 matris değerli $A(x)$ ve $B(x)$ gösterimleri için SDRE ile kontrol edilen sistemin, Ω_0 ’dan daha büyük bir bölge için asimptotik kararlı olduğu gösterilmiştir. Öte yandan global kararlılık, tasarımda her zaman aranan bir özelliktir. n , durum sayısını; m , kontrol girişi sayısını

belirtmek üzere $1 \leq m \leq n$ genel durumu için global kararlılık, [19]'daki çalışmada incelenmiştir. Buna göre, $\|e^{A_{CL}(x)t}\| < M$ koşulu, $M > 0$ olmak üzere $\forall x \in \Omega \in \mathbb{R}^n$ ve $\forall t \in \mathbb{R}^+$ için sağlanırsa, SDRE ile kontrol edilen sistem için orijin denge noktası, global asimptotik kararlı olur ve tüm başlangıç noktaları için sistem orijin noktasına getirilebilir. Ancak burada üst sınır değeri M 'nin tespiti kolay değildir. Ayrıca bu koşul oldukça muhafazakardır ve bu koşulu sağlayan kontrol kuralının oluşturulması literatürde açık problemlerden biridir.

[26]'da yer alan çalışmada, çok boyutlu sistemlerde $n = m$ özel durumu incelenmiştir. Buna göre, B tam ranklı sabit bir matris ($B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $n = m$) ve $R > 0$ olan sabit bir matris olduğunda, kontrol edilen sistem global asimptotik kararlıdır. Ancak Koşul 1 - 4'e ilave olarak belirtilen bu koşullar ile global kararlılığı elde etmek için tasarıma sınırlama getirilmiştir.

[9,22] 'de yer alan çalışmalarda, tek durumlu doğrusal olmayan sistemlerin sonsuz ufuklu kontrol problemi için SDRE'nin global optimal kontrol kuralını sağladığı gösterilmiştir. Çözüm aynı zamanda global asimptotik kararlıdır. Bu özellik Önerme 4'te belirtilmiştir:

Önerme 4 [22]

Tek boyutlu doğrusal olmayan sistemlerin ($x \in \mathbb{R}^1$) sonsuz zaman ufuklu kontrol probleminde, SDRE geri beslemeli kontrol kuralı, her zaman optimal kontrol kuralıdır. Bu kontrol kuralı:

$$u = \frac{-1}{b(x)} \left(f(x) + \text{sgn}(x) \sqrt{f^2(x) + \frac{b^2(x)x^2 q(x)}{r(x)}} \right)$$

ile ifade edilir.

Tek boyutlu sistemler için verilen bu özellik, çok boyutlu sistemlerin SDRE yöntemiyle kontrolünde geçerli değildir. [20]'de yer alan çalışmada, SDRE'nin optimal geri besleme kuralını sağlayacağı bir SDC gösteriminin olduğu belirtilmiştir. Buna göre, değer fonksiyonu $J(x)$ 'in gradyanı $\partial J(x)/\partial x = P(x)x$ formunda ifade edilebilir olduğunda, sistemin SDC matrisi $A(x)$ de "doğru" seçilirse SDRE kontrol kuralı,

optimal kontrol kuralı olur. Ancak burada değer fonksiyonunun önceden bilinmesi gerektiği için doğru gösterimin tespit edilmesi kolay değildir. Öte yandan bu çalışma, $\partial J(x)/\partial x = P(x)x$ 'nin sağlandığı durumlarda, doğru SDC gösterimi ile optimal kuralın elde edilebileceğini göstermesi bakımından önemlidir.

[20] ve [27]'de yer alan çalışmalarda, SDRE'nin optimal olma durumu incelenmiştir. Optimallik için gerekli koşullar, Önerme 5'te özetlenmiştir:

Önerme 5 $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ olan C^1 vektör değerli bir fonksiyon olsun:

$$p(x) = [p_1(x), \dots, p_n(x)]^T$$

$p(x)$ için,

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_j} = \frac{\partial p_j}{\partial x_i}, \quad x \in \Omega, i = 1, \dots, n$$

koşulu sağlanırsa

$$V(x) = x^T \int_0^1 p(tx) dt$$

olan bir $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ve $V(0) = 0$ olan bir $V(x)$ fonksiyonu vardır.

Bu bilgiye göre, SDRE'nin pozitif çözümü $P(x)$ olmak üzere, eğer sistemin amaç ölçütünü minimum yapan değer fonksiyonu $V(x)$,

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} = P(x)x = p(x)$$

biçiminde yazılabilirse, SDRE kontrol kuralı istenen amaç ölçütüne göre optimal kontrol kuralı olur. $p(x)$ için gerekli simetri kuralı, tek boyutlu sistemlerde her zaman sağlanır. Dolayısıyla, SDRE kontrol kuralı tek boyutlu sistemler için her zaman optimaldir.

4. SDRE’NİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ

Doğrusal olmayan sistemlerin sonsuz ufuklu optimal kontrol probleminin çözümü için önerilen SDRE temelli kontrol yönteminde baş edilmesi gereken en önemli sorun kararlılığın garanti edilmesidir. Sistemi temsil eden SDC gösterimlerinin kuramsal olarak sonsuz sayıda olması nedeniyle, Bölüm 3.4.1’de belirtildiği üzere literatürde noktasal kararlılığı garanti eden SDC modelinin bulunmasına ilişkin bazı yaklaşımlar önerilmiştir. SDRE’nin çözümü olan $P(x)$, sistemin SDC modelindeki $A(x)$ ve $B(x)$ matrislerine ve tasarım parametreleri olan $Q(x)$ ve $R(x)$ bağlı olmasına rağmen, standart yöntemde kontrol kuralı çevrimiçi olarak cebirsel Riccati denkleminin çözümü ile hesaplanır. Bu nedenle kontrol kuralında kullanılan $P(x)$ ’in açık ifadesi bilinmez. Oysa kararlılık analizi için $P(x)$ ’in bilinmesi hayati önem taşır. Diğer taraftan, SDRE’nin her çevrimde cebirsel Riccati denkleminin (ARE) çözümünün bulunmasına ihtiyaç duyması, özellikle sistem mertebesi arttıkça hesaplama yükünü arttırır. Bu nedenle, bu tez çalışmasında SDRE’nin yaklaşık bir çözümünün elde edilmesi için bir yöntem önerilmiştir. Bu sayede, hem çevrimiçi hesap yükünün azaltılması hem de elde edilen kontrol kuralının sistemi kararlı kıldığıının garantilenmesi amaçlanmıştır.

Önerilen yöntem, [28]’de doğrusal olmayan ve sağ taraflı (nonlinear non-homogenous) matris değerli kısmi türevli diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümünü elde etmek için geliştirilmiş bir yonteme dayanmaktadır. Bu yöntem, bir fonksiyonun yaklaşık ifadesi için radyal temelli fonksiyonları (radial basis functions, RBF) kullanır. Bu konudaki temel bilgiler aşağıdaki alt bölümde verilmiştir.

4.1 Radyal Temelli Fonksiyonlar

Dağınık biçimdeki bir veri setinin yaklaşık ifadesinin elde edilmesi, mühendislikte sıkça karşılaşılan bir problemdir. [29]’da yer alan çalışmada, yaklaşık ifadenin elde edilmesinde radyal temelli fonksiyonların (Radial Basis Functions, RBF) kullanılması

önerilmiştir. Buna göre, bir veri setinin yaklaşık fonksiyonu, M tane RBF'nin ağırlıklı toplamı olarak ifade edilebilir:

$$f(x) = \sum_{j=1}^M w_j \phi(\|x - c_j\|) \quad (4.1)$$

Denklemden yer alan semboller şöyle tanımlanır:

x : fonksiyon girişi

$f(x)$: veri setinin yaklaşık fonksiyonu

M : yaklaşıklık için kullanılan RBF sayısı

c_j : RBF'lerin merkezleri

ϕ : radyal temelli fonksiyon

w_j : yaklaşık fonksiyondaki RBF ağırlıkları

$\|\cdot\|$: Euclidean normu

Denklemin 4.1'de, RBF merkezleri ve ağırlıkları (c_j, w_j) bilinmeyenlerdir. RBF merkezlerinin belirlenmesi, bu yöntemin en kritik adımıdır. Merkezler, veri setinde yer alan noktalardan rastgele belirlenebilir. Veya veri seti uygun kümelerle gruplandırılabilir ve kümelere bağlı olarak merkezlere karar verilebilir [30]. Merkezler belirlendikten sonra, RBF ağırlıkları hesaplanır.

Denklemin 4.1'den görüldüğü üzere, veri setinin yaklaşık fonksiyonu $f(x)$, w_j ağırlıklarına doğrusal olarak bağlıdır. Bu durumda w_j değerlerinin elde edilmesinde en küçük kareler yöntemi [31] veya "gradient-descent" yöntemi [30] kullanılabilir.

M farklı noktaya karşı düşen denklemler, Denklem 4.2'de verilmiştir:

$$h_i = f(x_i) = \sum_{j=1}^M w_j \phi(\|x_i - c_j\|) \quad (4.2)$$

$$h_i = \sum_{j=1}^M w_j \phi_{i,j} \quad i = 1, \dots, N$$

Bu denklemler, Denklem 4.3'te matris formunda ifade edilmiştir:

$$\begin{bmatrix} \phi_{1,1} & \dots & \phi_{1,M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{N,1} & \dots & \phi_{N,M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_N \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Farklı biçimdeki radyal temelli fonksiyonlar, Çizelge 4.1’de verilmiştir [32]. Bu çalışmada SDRE’nin yaklaşık çözümünde Gauss formunda bir RBF kullanılmıştır.

Çizelge 4.1 : Radyal temelli fonksiyonlar.

RBF	$\phi(r)$
Thin-Plate Spline	$r^2 \ln(r)$
Gauss	$e^{-\epsilon r^2}$
Inverse Quadric	$\frac{1}{\sqrt{1+\epsilon r^2}}$
Multiquadric	$\sqrt{1+\epsilon r^2}$

4.2 SDRE’nin Yaklaşık Çözümü İçin İki Algoritma

Ele alınan sistemin SDC gösterimi, $A(x)$ ve $B(x)$ matrisleri ile verilmiş olsun. Tasarım parametreleri ise $Q(x)$ ve $R(x)$ olsun. Bu sisteme ilişkin SDRE, Denklem 4.4’te verilmiştir:

$$P(x)A(x) + A^T(x)P(x) - P(x)B(x)R^{-1}(x)B^T(x)P(x) + Q(x) = 0 \quad (4.4)$$

SDRE’nin yaklaşık çözümünü elde etmek için; sistemin çalışma uzayında, r adet alt bölge ve her alt bölgeye ait baz fonksiyonları tanımlansın:

$$\mathbb{S}_i \triangleq \{x \mid h_i(x) \geq h_j(x), i = 1, \dots, r\}, \quad i \neq j \quad (4.5)$$

Bu tez çalışmasında $h_i(x)$ ’ler, $0 < h_i(x) \leq 1$ koşulunu sağlayan,

$$h_i(x) = e^{-(\epsilon_i \|x-x_i\|)^2} + b_i \quad (4.6)$$

biçiminde seçilmiş RBF fonksiyonlardır. x_i ’ler ise $h_i(x)|_{x=x_i} = 1$ ilişkisini sağlayan değerlerdir.

Sisteme ilişkin SDC matrislerinin ve tasarım parametrelerinin $x = x_i$ noktalarında aldığı değerlere karşı düşen,

$$A_i \triangleq A(x_i)$$

$$B_i \triangleq B(x_i)$$

$$Q_i \triangleq Q(x_i)$$

$$R_i \triangleq R(x_i)$$

matrislerini tanımlayalım. SDRE'nin $x = x_i$ deki çözümleri ise $P_i = P(x_i)$ olarak ARE çözümlerinden elde edilmiş olsun.

Bu tez çalışmasında, SDRE'nin yaklaşık çözümü için iki ayrı algoritma önerilmiştir.

Algoritma 1 Yukarıda tanımlanan $P_i = P(x_i)$ matrislerinin her elemanını p_{jk}^i ile gösterelim. SDRE'nin çözümü olan $P(x)$ 'in her elemanının $x = x_i$ noktalarında aldıkları değerlerin, yaklaşık olarak,

$$\hat{p}_{jk}(x) = \sum_i \tilde{p}_{jk}^i e^{-\left(\varepsilon_{jk}^i \|x-x_i\|\right)^2} + p_{jkb}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (4.7)$$

biçiminde olduğunu varsayalım, Bu ifadede,

$$\hat{p}_{jk}(x_i) = p_{jk}^i = \tilde{p}_{jk}^i + p_{jkb}$$

olmak üzere, ε_{jk}^i , p_{jkb} ve \tilde{p}_{jk}^i ifadeleri,

$$\min \left\| \hat{P}(x)A(x) + A^T(x)\hat{P}(x) - \hat{P}(x)B(x)R^{-1}(x)B^T(x)\hat{P}(x) + Q(x) \right\|$$

olacak şekilde bir optimizasyon algoritması yardımıyla bulunur. Burada $\hat{P}(x)$, her elemanı $\hat{p}_{jk}(x)$ olan bir matristir ve SDRE'nin yaklaşık çözümüdür.

Bazı durumlarda yukarıda verilen Algoritma 1'in hesap karmaşıklığı çok fazla olabilir. Bu durumda hesap karmaşıklığı daha az ancak doğruluğu daha düşük olan başka bir algoritma önerilmiştir.

Algoritma 2 Yukarıda tanımlanan $P_i = P(x_i)$ matrislerini ele alalım. SDRE'nin çözümü olan $P(x)$ 'in $x \neq x_i$ noktalarında aldıkları değerlerin yaklaşık olarak,

$$\hat{P}(x) = \sum_i \left(\tilde{P}_i e^{-\left(\varepsilon_i \|x-x_i\|\right)^2} + P_{ib} \right), \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (4.8)$$

biçiminde olduğunu varsayalım. Bu ifadede,

$$\hat{P}(x_i) = P_i = \tilde{P}_i + P_{ib}$$

olmak üzere, ε_i , \tilde{P}_i ve P_{ib} ifadeleri,

$$\min \left\| \hat{P}(x)A(x) + A^T(x)\hat{P}(x) - \hat{P}(x)B(x)R^{-1}(x)B^T(x)\hat{P}(x) + Q(x) \right\|$$

olacak şekilde bir optimizasyon algoritması yardımıyla bulunan değerlerdir. Burada $\hat{P}(x)$, SDRE'nin yaklaşık çözümüdür.

Önerilen her iki algoritma ile $P(x)$ 'in yaklaşık ifadesi analitik olarak elde edilebilir. Algoritma 1'de $P(x)$ 'in her elemanı için farklı bölgeler kullanılarak ayrı ayrı optimizasyon yapılır ve her eleman için geçerli optimal parametreler bulunur. Algoritma 2'de ise tüm elemanlar için ortak bölgeler kullanılır. Bu sebeple, doğruluğun Algoritma 1'e göre daha düşük olduğu söylenebilir.

Verilen her iki algoritmada kullanılan alt bölgelerin seçimi aşıkardır değildir. $A(x)$ ve $B(x)$ matrislerinin hızlı değiştiği bölgelerde daha sık yavaş değiştiği bölgelerde daha seyrek seçilmesi önerilebilir.

Bu tez çalışmasında Gauss tipi bir RBF seçilmiştir ancak farklı seçimler de mümkündür. RBF tipi belirlenirken amaç, en iyi yaklaşıklık sağlanması olmalıdır.

SDRE'nin yaklaşık çözümü $\hat{P}(x)$ kullanılarak oluşturulan kontrol kuralı ile kapalı çevrime sokulan sistem için bir aday Lyapunov fonksiyonu seçilip [28]'deki çalışmanın kararlılık analizi bölümündeki fikirler kullanılarak, $\hat{P}(x)$ üzerinden kararlılık analizi çevrimdışı yapılabilir.

Bu tez çalışmasında önerilen algoritmaların gerçekleştirilmesinde, [33]'te yer alan RBF sinir ağları ve "MATLAB - Neural Network Toolbox"ta yer alan "newrbe" komutu kullanılmıştır. [33]'teki optimizasyon algoritmasında, RBF fonksiyonları için gerekli merkez noktalarının yeri de optimizasyonun bir parçasıdır. Fonksiyon yaklaşıklıkta kullanılmak istenen bölge sayısı belirtildikten sonra, bu bölgelerin merkez noktaları olan x_i değerleri, fonksiyonu uygun yaklaşıklık ile ifade edecek şekilde "gradient descent" methodu ile bulunur. "newrbe" komutunda kullanılan algoritmada ise optimizasyonda kullanılan veri setindeki her nokta, merkez olarak belirlenir. Böylece kullanıcıya RBF merkezlerini belirleme imkanı sunulur.

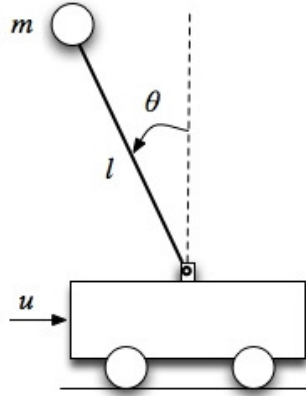


5. ARABA-SARKAÇ SİSTEMİNİN SDRE KONTROLÜ

Bu bölümde doğrusal olmayan araba-sarkaç sistemi için SDRE kontrol tasarımı açıklanmıştır. Kontrol kuralının hesaplanmasında SDRE'nin yaklaşık çözümü kullanılmıştır. Yaklaşıklık sonuçları, standart çevrimiçi SDRE sonuçları ile kıyaslanmıştır.

5.1 Araba-Sarkaç Sistemi

Araba-sarkaç sistemi, yatay bir ray üzerinde hareket eden bir araba ve bu araba etrafında serbestçe dönebilen bir sarkaçtan oluşur (Şekil 5.1).



Şekil 5.1 : Araba-sarkaç sistemi.

Sistemin girişi, arabayı yatay yönde hareket ettirmek için gerekli olan kuvettir. Bu hareket sonucunda sarkaç ivme kazanır ve kendi eksenini etrafında dönmeye başlar.

Araba-sarkaç sisteminin kontrolünde amaç, sarkacı dikey konumda tutarken arabayı belirlenmiş bir noktaya götürmektir. Bu kontrol esnasında sarkacı hareket ettirmenin tek yolu, arabayı hareket ettirmektir. Dolayısıyla arabaya kuvvet uygulayarak sarkaç pozisyonu kontrol edilir.

Araba-sarkaç sisteminin kontrolü; bir uzay gemisinin kalkışı sırasında konum kontrolü, insan vücudunun dik duruşu gibi dengenin korunmasını gerektiren hareket stratejilerini içeren çok sayıda görevde pratik uygulama alanına sahiptir.

Araba-sarkaç sistemine ait doğrusal olmayan dinamik denklemler, Denklem 5.1’de verilmiştir [21]:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \frac{1}{d} [ml\dot{\theta}^2 \sin \theta - mg \sin \theta \cos \theta + u] \\ \ddot{\theta} &= \frac{1}{dl} [(M+m)g \sin \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \theta - u \cos \theta] \\ d &\triangleq M + m \sin^2 \theta\end{aligned}\quad (5.1)$$

Denklemden M , arabanın kütlesi; m , sarkacın kütlesi; l , sarkacın uzunluğu; g , yerçekimi ivmesidir. Sistemin kontrol girişi u , arabanın hareketini sağlayan kuvvettir.

5.2 Araba-Sarkaç Sistemi İçin SDC Gösterimi

Önerme 2’de belirtildiği üzere SDC gösterimi tek bir biçimde değildir ve sonsuz farklı şekilde ifade edilebilir. Bölüm 3.4.1’te belirtildiği üzere, sistemin durumlarının türevi, diğer durumlara bağlı olduğunda bu bağıllığı temsil edecek şekilde parametreleştirme yapılmalıdır. Denklem 5.1’e göre \ddot{x} ve $\ddot{\theta}$; θ ile $\dot{\theta}$ ’a bağlıdır. Bunun için araba-sarkaç denklemlerindeki ilgili terimler, (Önerme 3’te bahsedildiği gibi) [21]’de verilen şekilde, α parametreleri cinsinden şöyle ifade edilmiştir:

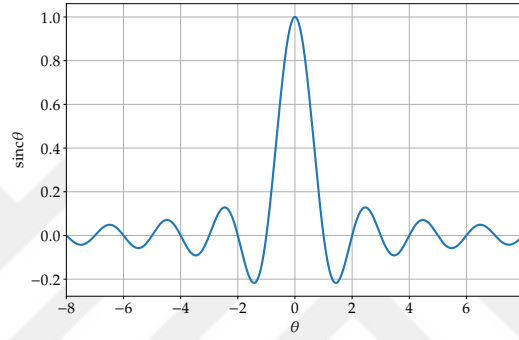
$$\begin{aligned}\dot{\theta}^2 \sin \theta &= \alpha_1 [\dot{\theta}^2 (\sin \theta / \theta)] \theta + (1 - \alpha_1) (\dot{\theta} \sin \theta) \dot{\theta} \\ \dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \theta &= \alpha_2 [\dot{\theta}^2 (\sin \theta / \theta) \cos \theta] \theta + (1 - \alpha_2) (\dot{\theta} \sin \theta \cos \theta) \dot{\theta}\end{aligned}\quad (5.2)$$

Buna göre α parametresine bağlı elde edilen SDC gösterimi, Denklem 5.3 ve 5.4’te verilmiştir:

$$A(x, \alpha) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{m \sin \theta (l \alpha_1 \dot{\theta}^2 - g \cos \theta)}{d} & 0 & \frac{ml(1-\alpha_1)\dot{\theta} \sin \theta}{d} \\ 0 & \frac{\sin \theta}{dl} [(M+m)g - ml\alpha_2 \dot{\theta}^2 \cos \theta] & 0 & -\frac{m(1-\alpha_2)\dot{\theta} \sin \theta \cos \theta}{d} \end{bmatrix}\quad (5.3)$$

$$B(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{d} \\ -\frac{1}{dl} \cos \theta \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

Sistemin durumları arabanın çizgisel konumu (x), sarkacın açısal konumu (θ), arabanın çizgisel hızı (\dot{x}) ve sarkacın açısal hızıdır ($\dot{\theta}$). Ayrıca sistemin tüm durumlarının ölçülebilir olduğu varsayılmıştır. Gösterimdeki sinc fonksiyonu, $\text{sinc } \theta = \sin \theta / \theta$ olarak tanımlanır ve sürekli bir fonksiyondur. θ sıfıra yaklaştıkça $\text{sinc } \theta = \sin \theta / \theta$ 'nin değeri 1'e yakınsar ve $\theta = 0$ için $\text{sinc}(0) = 1$ olur. Şekil 5.2, $\text{sinc } \theta$ fonksiyonun davranışını göstermektedir.



Şekil 5.2 : sinc fonksiyonu

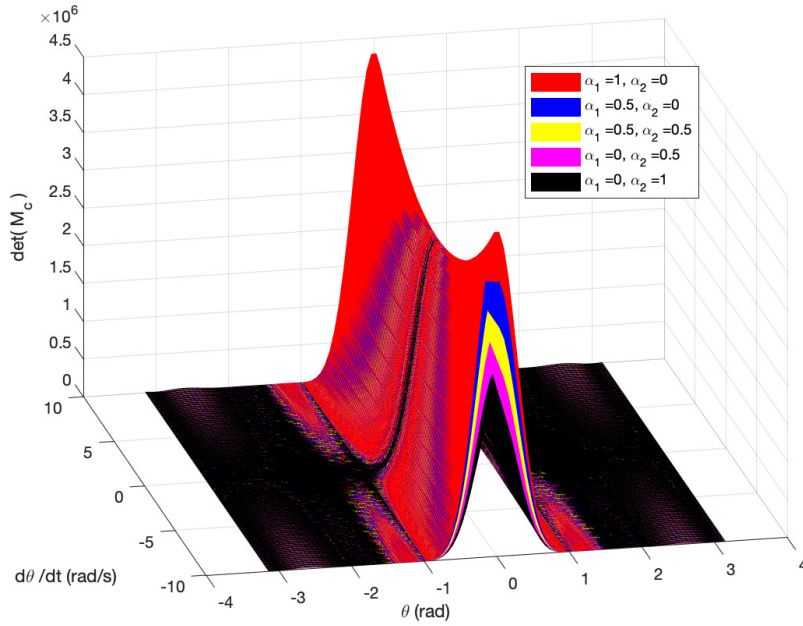
En iyi SDC gösterimine karar verebilmek için sistemin kontrol edilebilirlik matrisini MATLAB ile sembolik olarak hesaplayalım:

$$\det(M_C) = -\frac{1}{d^4 l^4} \text{sinc}^2 \theta \cos^2 \theta [g + mdl(\alpha_1 - \alpha_2) \dot{\theta}^2 \cos \theta]^2 \quad (5.5)$$

$\text{sinc } \theta = 0$ veya $\cos \theta = 0$ durumlarında kontrol edilebilirlik matrisinin determinanı sıfırdır ve bu durum α parametresinin değişiminden etkilenmez. Öyleyse kapalı çevrim sistem, herhangi bir α değeri için $\theta = \pi$ rad ve $\theta = \pm\pi/2$ rad açısal konumlarında kontrol edilebilir değildir. α 'ya bağlı elde edilen SDC formları, bu noktaların da kontrol edilebilir olduğu bir gösterim sunamamıştır. Bu durumda Koşul 4'te belirtilen tam kontrol edilebilirlik şartı, $\Omega = \{x : \theta \in [-\pi, \pi]\}$ için sağlanamamıştır. Buna karşın sistemin biri kararlı biri kararsız olmak üzere iki adet denge noktası vardır. $\theta = 0$ kararsız denge noktası, $\theta = \pi$ kararlı denge noktasıdır ve sistem $\theta = \pi$ için kontrol edilebilir olmasa da yapısı gereği bu noktada kararlıdır.

Araba-sarkaç sisteminde amaç, sistemi 0 rad civarında dengede tutmak olduğu için, SDRE kontrol tasarımında sistemin çalışma aralığı $\Omega = \{x : \theta \in [-1.484, 1.484] \text{ rad}\}$ alınmıştır (1.484 rad = 85 derece). Böylece matematiksel olarak kontrol edilemeyen $\theta = \pm\pi/2$ rad durumu, çalışma aralığının dışında bırakılmış ve yeni aralıkta sistemin tam kontrol edilebilirliği garantilenmiştir.

Sistem parametrelerini $g = 9.81 \text{ m/s}^2$, $m = 1 \text{ kg}$, $l = 1 \text{ m}$, $M = 0.5 \text{ kg}$ alalım. Buna göre kontrol edilebilirlik matrisinin determinantını, α 'nın değişimine bağlı olarak inceleyelim.



Şekil 5.3 : Araba-sarkaç sistemi için kontrol edilebilirlik matrisinin determinantı.

Şekil 5.3'te görüldüğü üzere, α 'nın bazı değerleri için $\det(M_C)$ sifıra yakındır ve bu noktalarda kontrol edilebilirlik düşüktür. Buna göre, en büyük determinant değerini sağlayan $\alpha_1 = 1$ ve $\alpha_2 = 0$ değerleri, SDC gösterimini oluşturmak için seçilebilir.

Fiziksel araba-sarkaç sisteminin çalışmasında kontrol işareti üzerinde veya arabanın hareket ettiği milin uzunluğu üzerinde kısıtlayıcılar mevcuttur. Bu çalışmada sistem kısıtsız olarak kabul edilmiştir. Araba-sarkaç sisteminin kısıtlayıcılar altında SDRE kontrolüne ait çalışma için [21] incelenebilir.

5.3 Araba-Sarkaç Sistemi İçin SDRE'nin Yaklaşık Çözümü

Bu bölümde araba-sarkaç sisteminin kontrolünde SDRE'nin yaklaşık çözümü kullanılmıştır. SDRE'nin çevrimiçi ve yaklaşık çözümü, belirlenen çalışma aralığında incelenmiştir. Farklı başlangıç noktaları için deneyler yapılmış ve SDRE'nin gerçek ve yaklaşık çözümleri kıyaslanmıştır.

Buna göre SDRE'nin pozitif simetrik çözümü,

$$P(x) = \begin{bmatrix} p_1(x) & p_2(x) & p_3(x) & p_4(x) \\ p_2(x) & p_5(x) & p_6(x) & p_7(x) \\ p_3(x) & p_6(x) & p_8(x) & p_9(x) \\ p_4(x) & p_7(x) & p_9(x) & p_{10}(x) \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

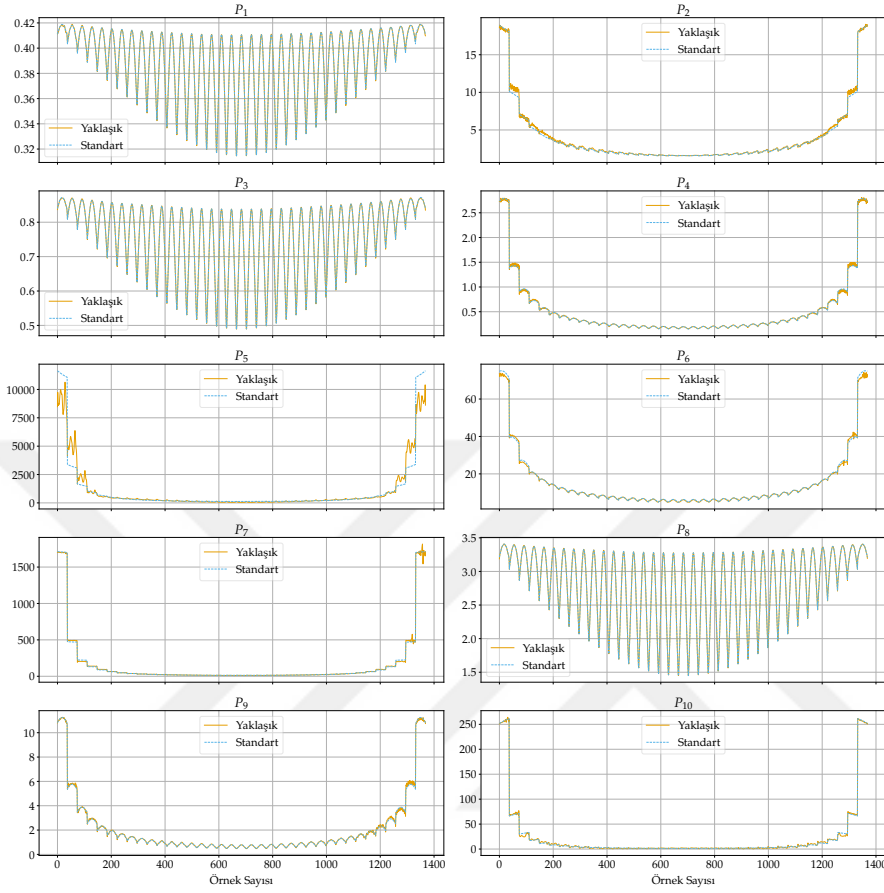
olsun. SDRE'nin yaklaşık çözümü için Bölüm 4.2'de verilen Algoritma 1 ve Algoritma 2 kullanılmıştır. Her iki algoritmada da, $P(x)$ 'in yaklaşık ifadesi için gerekli parametrelerin elde edilmesi için [33]'de yer alan optimizasyon algoritması kullanılmıştır. Optimizasyon için ihtiyaç duyulan veri seti sistemin çalışma aralığında $\theta \in [-1.484, 1.484]$ rad için 37 nokta ve $\dot{\theta} \in [-10, 10]$ rad/s için 37 nokta, toplamda $37 \times 37 = 1369$ nokta seçilerek elde edilmiştir. Tasarım parametreleri olan $Q(x)$ ve $R(x)$ matrisleri ise yapılan ön deneyler sonucunda Denklem 5.7'de verildiği gibi sabit matrisler olarak seçilmiştir:

$$Q(x) = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.01 \end{bmatrix}, \quad R(x) = 10 \quad (5.7)$$

5.3.1 Algoritma 1 ile SDRE'nin yaklaşık çözümü

Algoritma 1'e göre $P(x)$ 'in yaklaşık ifadesini elde etmek için, $p_1(x), p_2(x), \dots, p_{10}(x)$ fonksiyonları yaklaşık olarak elde edilecektir. Denklem 4.7'de yer alan parametrelerin elde edilmesi için [33]'da yer alan optimizasyon algoritmasında kullanılmak üzere, $p_5(x)$ için 2001, $p_7(x)$ için 1001, diğer fonksiyonlar için 101 merkez seçilmiştir. [33]'da yer alan optimizasyon algoritması ile belirlenen sayıdaki merkezlerin yeri "gradient descent" metodu ile bulunmuş ve Denklem 4.7'de yer alan parametreler elde

edilmiştir. Buna göre, çalışma aralığından toplanan örnekler için, SDRE'nin standart ve yaklaşık çözümlerine karşı düşen $p(x)$ fonksiyonlarının değerleri Şekil 5.4'te yer alır.



Şekil 5.4 : Araba-sarkaç sistemi için SDRE'nin standart ve yaklaşık çözüm değerleri (Algoritma 1).

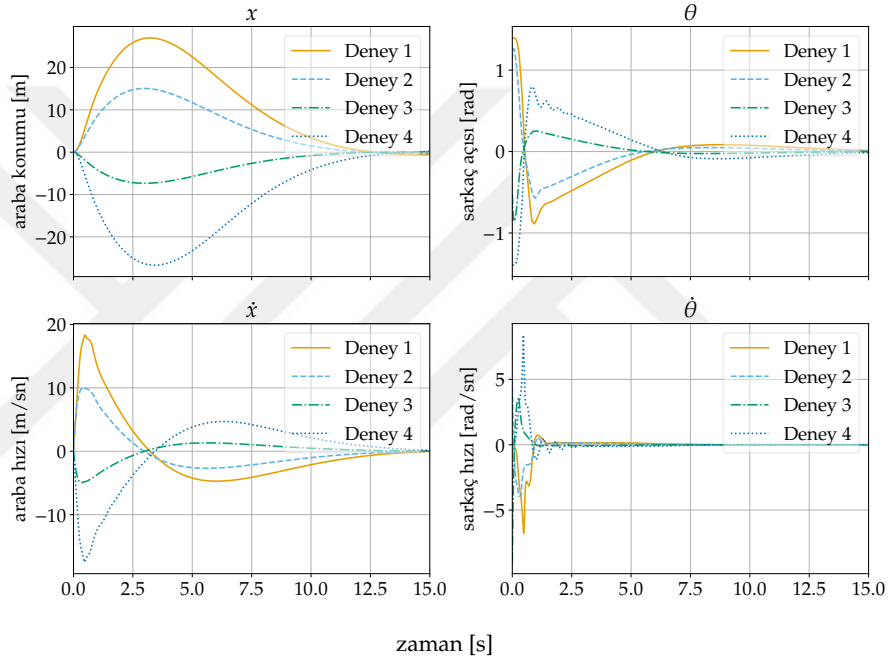
Şekil 5.4'te görüldüğü üzere $p_5(x)$ ve $p_7(x)$ 'in değer aralığı oldukça geniştir. Bu fonksiyonları uygun bir yaklaşıklık ile temsil edebilmek için daha fazla merkez belirlenmesine ihtiyaç duyulmuştur. Öte yandan sistemin SDRE kontrol kazancı $p(x)$ 'lere bağlı olarak açık şekilde ifade edilebilir:

$$K(x) = R^{-1}(x)B^T(x)P(x) \quad (5.8)$$

$$K(x) = 10^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{d} & -\frac{1}{dl} \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1(x) & p_2(x) & p_3(x) & p_4(x) \\ p_2(x) & p_5(x) & p_6(x) & p_7(x) \\ p_3(x) & p_6(x) & p_8(x) & p_9(x) \\ p_4(x) & p_7(x) & p_9(x) & p_{10}(x) \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

$$K(x) = 10^{-1} \begin{bmatrix} \frac{p_3(x)}{d} - \frac{p_4(x)}{dl} \cos \theta \\ \frac{p_6(x)}{d} - \frac{p_7(x)}{dl} \cos \theta \\ \frac{p_8(x)}{d} - \frac{p_9(x)}{dl} \cos \theta \\ \frac{p_9(x)}{d} - \frac{p_{10}(x)}{dl} \cos \theta \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

Denklem 5.10’da görüldüğü üzere, kontrol kuralı $p_5(x)$ ’ten bağımsızdır ve yalnızca $p_3(x)$, $p_4(x)$, $p_6(x)$, $p_7(x)$, $p_8(x)$, $p_9(x)$, $p_{10}(x)$ fonksiyonlarına bağlıdır. Buna göre sistem, $p_5(x)$ ’ten gelecek hesaplama yükünden bağımsız şekilde kontrol edilebilir. Ancak bütünlük oluşturmak açısından tüm $p(x)$ fonksiyonlarına bu tez çalışmasında yer verilmiştir.

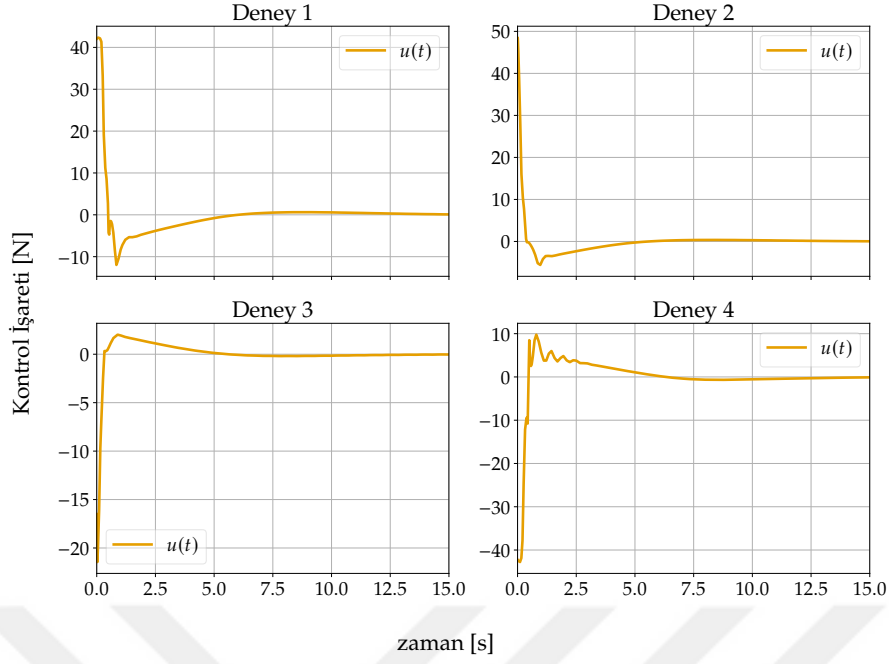


Şekil 5.5 : SDRE’nin yaklaşık çözümü ile kontrol edilen kapalı çevrimli sistemin davranışı (Algoritma 1).

Çizelge 5.1 : Araba-sarkaç sistemi için deneylerin başlangıç noktası değerleri.

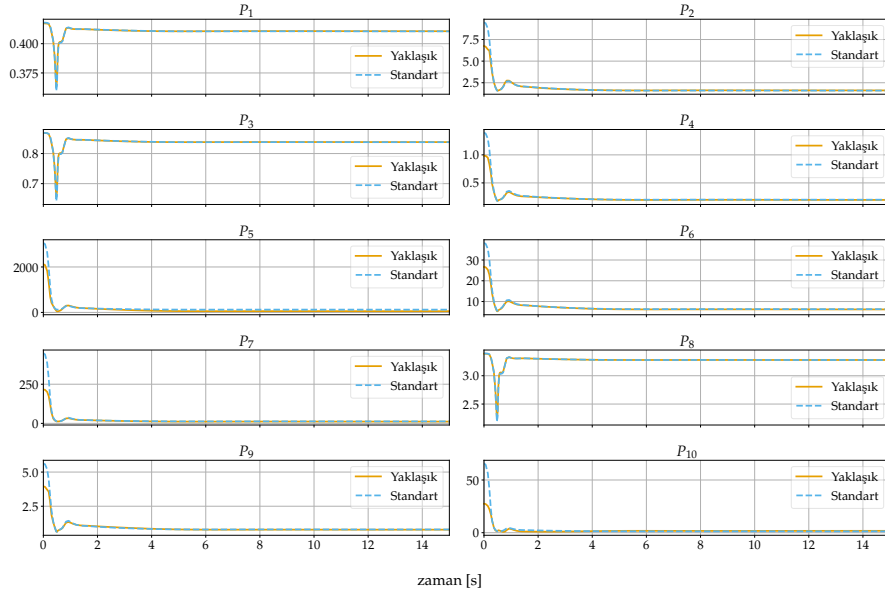
	Deney 1	Deney 2	Deney 3	Deney 4
θ [rad]	1.3963	1.1345	-0.5236	-1.3963
$\dot{\theta}$ [rad/s]	0	5	-9	0

Şekil 5.5, farklı başlangıç koşulları altında SDRE’nin yaklaşık çözümü ile kontrol edilen kapalı çevrimli sistemin cevaplarını göstermektedir. İlgili kontrol işaretleri, Şekil 5.6’da verilmiştir.

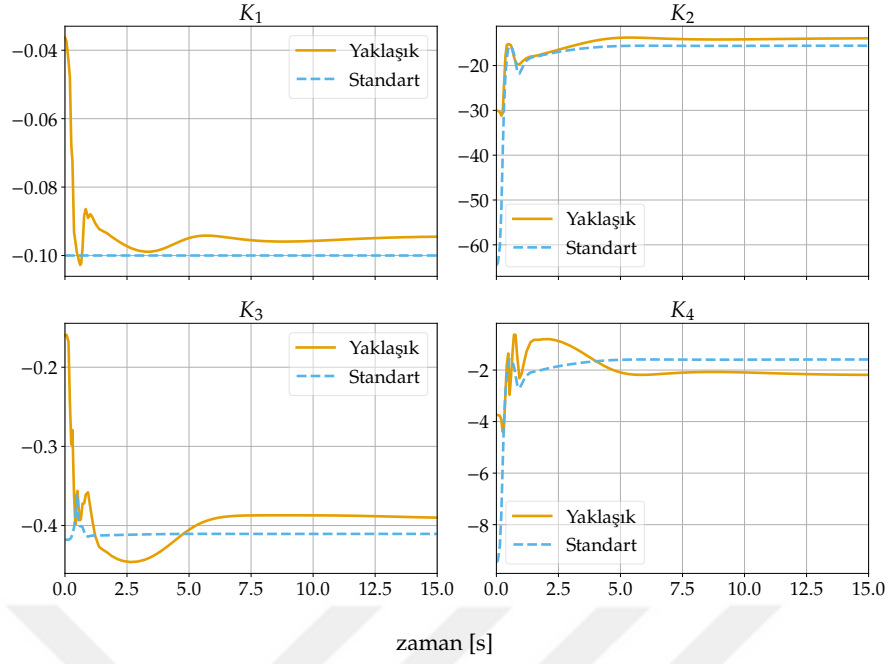


Şekil 5.6 : SDRE'nin yaklaşık çözümü ile kontrol edilen kapalı çevrimli sisteme uygulanan kontrol işareti (Algoritma 1).

Deneylerin başlangıç noktaları ise Çizelge 5.1'de yer alır. Sistemin SDC gösterim matrisleri yalnızca θ ve $\dot{\theta}$ durumlarına bağlı olduğu için bu değerlere bağlı olarak farklı başlangıç noktaları belirlenmiştir.



Şekil 5.7 : Deney 1 için SDRE'nin yaklaşık ve standart çözümü (Algoritma 1).



Şekil 5.8 : Deney 1 için SDRE'nin yaklaşık ve standart çözümüne bağlı kontrol kazançları (Algoritma 1).

Deney sonuçlarından görüldüğü üzere, seçilen başlangıç noktaları için araba sarkaç sistemi başarılı şekilde kontrol edilmiştir.

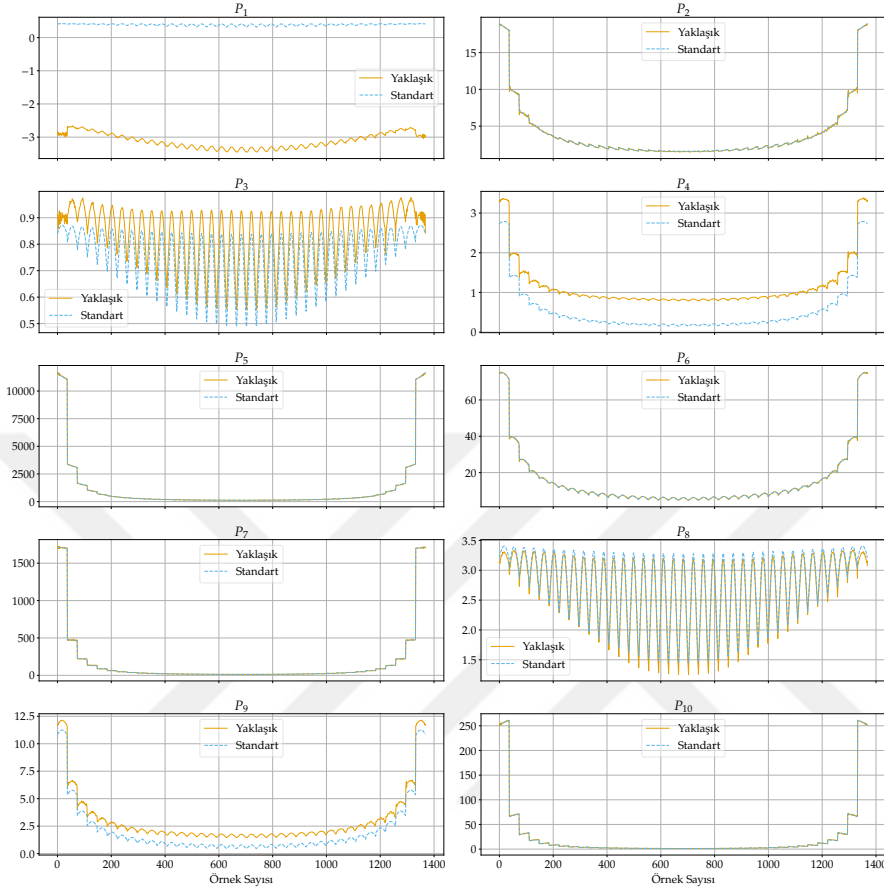
Sistemin davranışının analizine ilave olarak Deney 1 süresince, SDRE'nin yaklaşık çözümü ile sistem durumlarına bağlı olarak çevrimiçi hesaplanan gerçek çözümü Şekil 5.7'de verilmiştir. Bu çözümlere karşı düşen kontrolör kazançları Şekil 5.8'de yer alır.

Buna göre deney süresince elde edilen gerçek ve yaklaşık çözümler birbirine yakındır. Böylece doğrusal olmayan araba-sarkaç sistemi, her adımda cebirsel Riccati denkleminin çözülmesine ihtiyaç duyulmadan, SDRE'nin yaklaşık çözümü ile standart çevrimiçi SDRE yöntemine oldukça yakın şekilde kontrol edilebilmiştir. Sonraki bölümde, burada yapılan çalışmalar Algoritma 2 kullanılarak yapılmıştır.

5.3.2 Algoritma 2 ile SDRE'nin yaklaşık çözümü

Bu bölümde SDRE'nin çözümü, Algoritma 2 kullanılarak elde edilecektir. Algoritma 1'den farklı olarak burada $p_1(x), p_2(x), \dots, p_{10}(x)$ fonksiyonları ayrı ayrı değil $P(x)$ matrisini oluşturan bir bütün olarak ele alınacaktır. Dolayısıyla, [33]'te yer alan optimizasyon algoritmasında belirlenecek olan merkezler, tüm fonksiyonlar için ortak

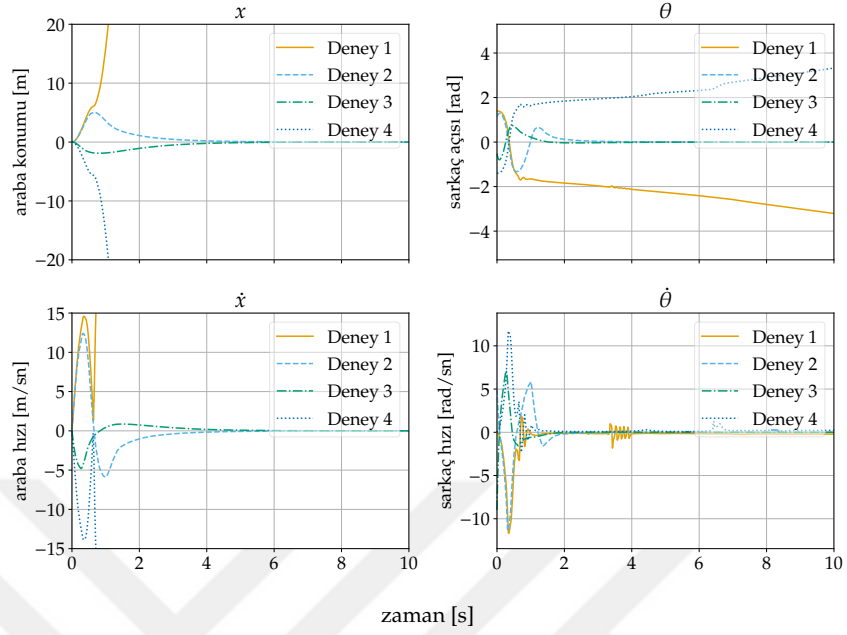
olacaktır. Yapılan deneyler sonucunda yaklaşıklık için 10001 merkez seçilmesi uygun görülmüştür. Bu merkezlerin yeri ve Denklem 4.8’de yer alan parametreler, optimizasyon algoritması ile elde edilmiştir.



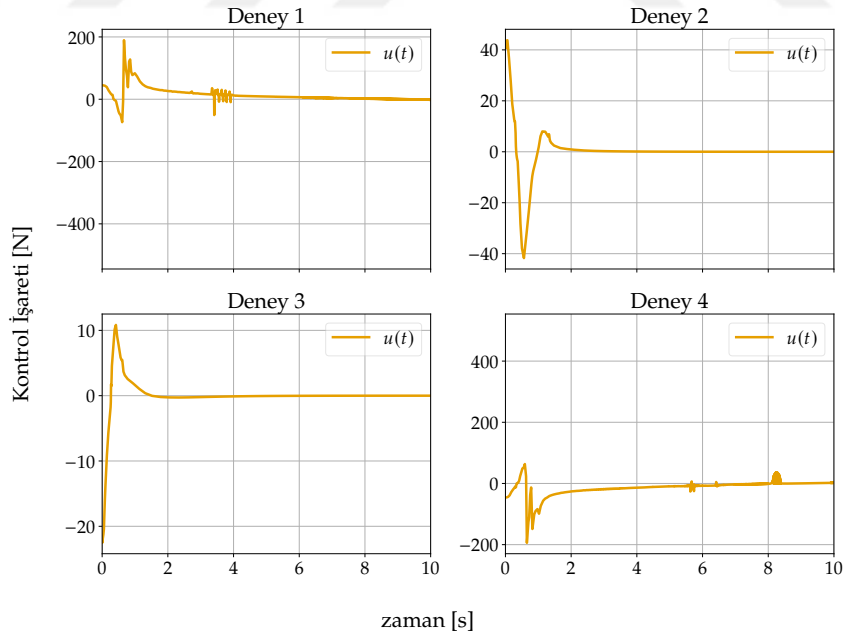
Şekil 5.9 : Araba-sarkaç sistemi için SDRE’nin standart ve yaklaşık çözüm değerleri (Algoritma 2).

Çalışma aralığından toplanan örnekler için, SDRE’nin standart ve yaklaşık çözümlerine karşı düşen $p(x)$ fonksiyonlarının değerleri Şekil 5.9’da yer alır. Araba sarkaç sistemi, özellikle θ ’nın değerine büyük ölçüde bağlıdır. θ , seçilen çalışma aralığının sınırlarına yaklaştıkça ($\theta \in [-1.484, 1.484]$ rad), $P(x)$ fonksiyonundaki değişimler ciddi şekilde artmaktadır. Bu sebeple, $p_1(x), p_2(x), \dots, p_{10}(x)$ fonksiyonları için merkezlerin aynı olması durumunda, fonksiyonlardaki değişimleri uygun yaklaşıklık ile temsil edebilmek için Algoritma 1’e göre fazla sayıda merkez kullanılması gerekmiştir. Şekil 5.9’daki yaklaşım sonuçlarına göre 10001 merkez kullanılmasına rağmen, özellikle $p_1(x)$ fonksiyonunun yaklaşık ifadesi, gerçek değerlere yeterince

yakın değildir. Ancak bir önceki bölümde belirtildiği üzere, kontrol kazancı $p_1(x)$ 'ten bağımsız olduğu için, kontrol buradaki yaklaşıklık hatasından etkilenmez.

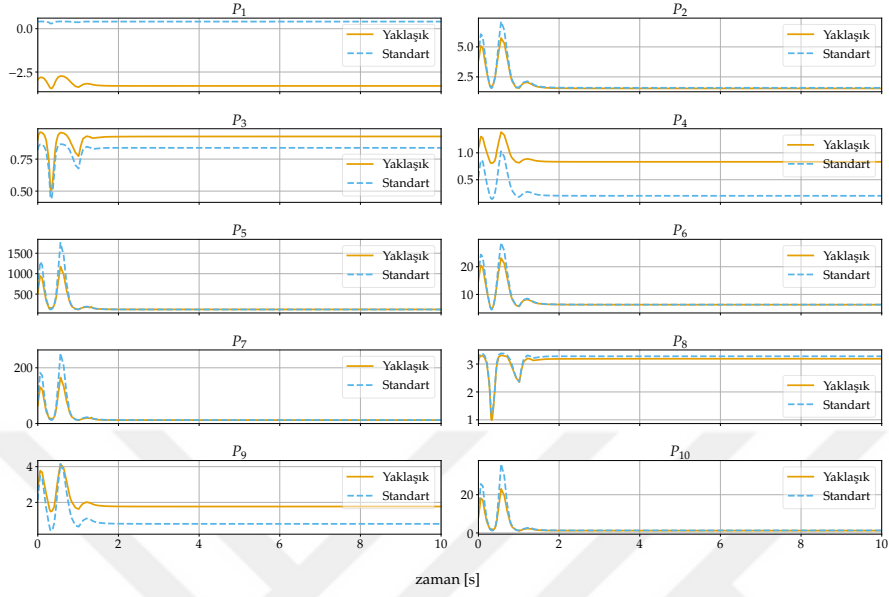


Şekil 5.10 : SDRE'nin yaklaşık çözümü ile kontrol edilen kapalı çevrimli sistemin davranışı (Algoritma 2).

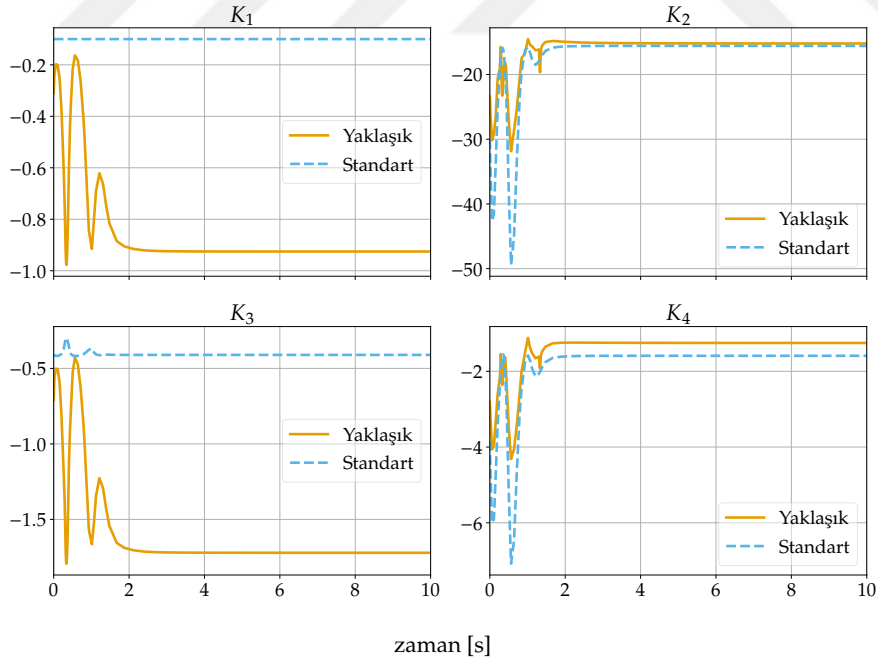


Şekil 5.11 : SDRE'nin yaklaşık çözümü ile kontrol edilen kapalı çevrimli sisteme uygulanan kontrol işareti (Algoritma 2).

Şekil 5.10, Çizelge 5.1’de yer alan farklı başlangıç koşullarına göre, SDRE’nin yaklaşık çözümü ile kontrol edilen kapalı çevrimli sistemin cevaplarını göstermektedir. İlgili kontrol işaretleri, Şekil 5.11’de verilmiştir.



Şekil 5.12 : Deney 2 için SDRE’nin yaklaşık ve standart çözümü (Algoritma 2).



Şekil 5.13 : Deney 2 için SDRE’nin yaklaşık ve standart çözümüne bağlı kontrol kazançları (Algoritma 2).

Algoritma 2 ile yapılan deney sonuçlarına göre Deney 1 ve Deney 4'te kontrol başarılı şekilde gerçekleştirilememiştir. Sarkacın açısı, araba-sarkaç sisteminin dinamiklerini ciddi şekilde etkilemektedir. Deney 1 ve 4 için sarkaç açısı incelendiğinde, seçilen çalışma aralığının dışına çıkıldığı rahatça görülebilir. Bu bölgeler, yaklaşık fonksiyon ile temsil edilmemiştir. Öte yandan Deney 2 ve 3 için, SDRE'nin yaklaşık çözümü ile başarılı bir kontrol gerçekleştirilmiştir.

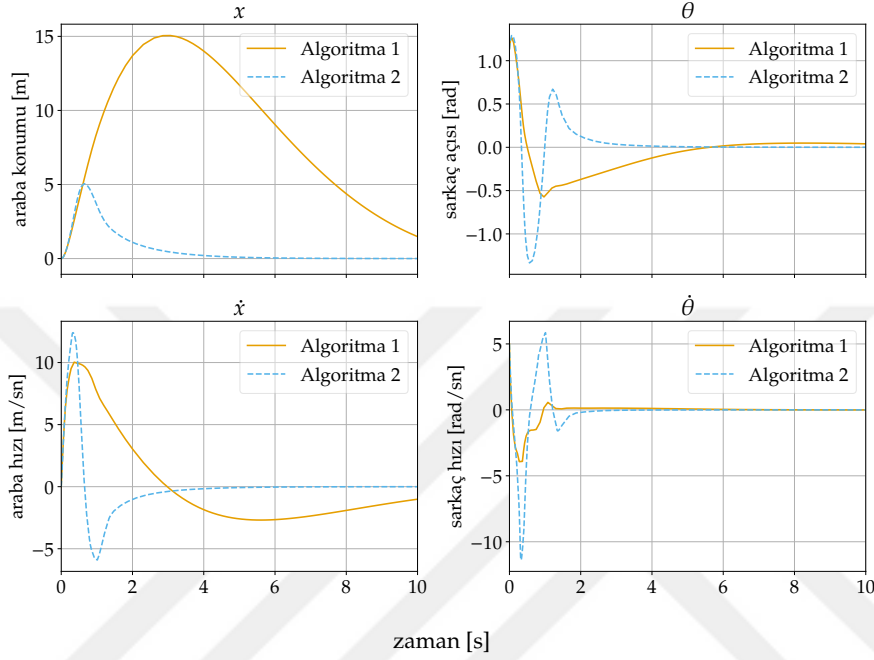
Şekil 5.12 ve Şekil 5.13'te, Deney 2 süresince, SDRE'nin yaklaşık çözümü ile sistem durumlarına bağlı olarak çevrimiçi hesaplanan gerçek çözümü ve bunlara karşı düşen kontrolör kazançları görülebilir. Sonuçlar, standart SDRE sonuçlarına benzerlik göstermektedir.

5.3.3 Önerilen yaklaşıklık algoritmalarının araba-sarkaç sistemi için performansı

Bu çalışmada, 4 durumlu araba sarkaç modeli, SDRE'nin 2 farklı yaklaşık çözümü ile kontrol edilmiştir. Algoritma 1'e göre yapılan yaklaşıklıkta SDRE'nin pozitif simetrik çözümü olan $P(x)$ matrisini oluşturan elemanlar ayrı fonksiyonlar olarak ele alınmıştır ve birbirinden bağımsız şekilde optimizasyon uygulanmıştır. Algoritma 2'de ise $P(x)$ bir bütün olarak ele alınır ve seçilen merkezler $P(x)$ 'in tüm elemanları için ortaktır. Bu durum, merkezlerin seçim serbestliğini azalttığı için yaklaşım performansında düşüş görülmüştür. Yaklaşımı iyileştirmek için Algoritma 1'e göre daha fazla sayıda merkez belirlenmesine ihtiyaç duyulmuştur.

Her iki algoritma ile elde edilen SDRE'nin yaklaşık çözümleri kullanılarak, Çizelge 5.1'de verilen başlangıç koşulları için deneyler yapılmıştır. Algoritma 1 kullanılarak inşa edilen $\hat{P}(x)$ ile, verilen başlangıç koşulları için başarılı bir kontrol gerçekleştirilmiştir. Yaklaşım sonuçları, standart SDRE sonuçlarına yakındır. Ancak Algoritma 2 ile inşa edilen $\hat{P}(x)$ ile, Deney 1 ve 4 kontrol edilememiştir. $\hat{P}(x)$, seçilen çalışma bölgesinden alınan değerlere göre elde edilir. Bölge dışındaki noktalar, yaklaşık fonksiyon ile temsil edilemez. Deney 1 ve 4'teki deney sonuçlarına göre, kontrol altındaki araba-sarkaç sistemi belirlenen çalışma bölgesinin dışına çıkmaktadır. Bu durumla başa çıkmak için, yaklaşık fonksiyonun sınır noktalara yakın değerlerinde daha iyi yaklaşım performansı gösterecek şekilde tasarım yapılması gereklidir.

Parametrelerin bulunması için kullanılan [33]'daki optimizasyon algoritmasında, yalnızca girişler normalize edilmiştir. Daha iyi bir yaklaşıklık elde edebilmek için çıkışların da normalize edilmesi gibi yöntemler uygulanabilir. Ancak Algoritma 2'nin yaklaşım performansını, Algoritma 1 ile aynı şartlarda incelemek için farklı iyileştirme adımları bu çalışmada uygulanmamıştır.



Şekil 5.14 : Deney 2 için SDRE'nin yaklaşık çözümü ile kontrol edilen kapalı çevrimli sistemin davranışı.

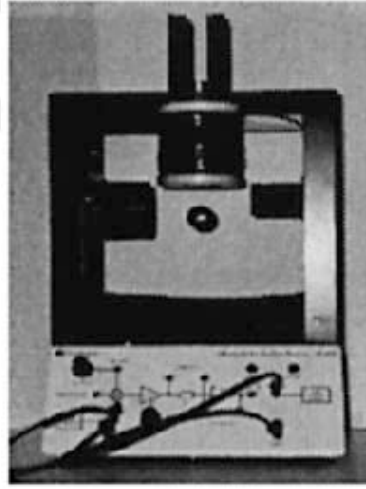
Şekil 5.14'te Deney 2 için Algoritma 1 ve 2 ile kontrol edilen sistemin durumlarına yer verilmiştir. Buradan görüldüğü üzere Algoritma 2'nin kullanıldığı durumda, sistem $\dot{\theta}$ için belirlenen $[-10 \ 10] \text{ rad/s}$ çalışma noktasının dışına bir miktar çıkmaktadır. Ancak araba-sarkaç sisteminin dinamikleri, sarkacın hızından çok açısız konumuna bağlıdır ve hızdaki bu ihlale rağmen sistem kontrol edilebilmiştir.

6. MANYETİK KALDIRMA SİSTEMİNİN SDRE KONTROLÜ

Bu bölümde doğrusal olmayan manyetik kaldırma sistemi için SDRE kontrolör tasarımı açıklanmıştır. Kontrol kuralının hesaplanmasında SDRE'nin yaklaşık çözümü kullanılmıştır. Yaklaşıklık sonuçları, standart çevrimiçi SDRE sonuçları ile kıyaslanmıştır.

6.1 Manyetik Kaldırma Sistemi

Manyetik kaldırma sistemi; doğrusal olmayan ve kararsız bir elektromekanik sistemdir. Bu sistemde amaç; manyetik özelliğe sahip olan topu, mıknatıs tarafından topa uygulanacak manyetik kuvvet ile istenen düşey pozisyonda dengede tutmaktır. Şekil 6.1'de fiziksel bir manyetik kaldırma sistemine yer verilmiştir:



Şekil 6.1 : Manyetik kaldırma sistemi.

Manyetik kaldırma sistemine ait doğrusal olmayan dinamik denklemler, SDRE'ye uygun biçimde, Denklem 6.1'de yer alan SDC matrisleri ile verilmiştir [34]:

$$\dot{x} = A(x)x + B(x)u, \quad x(0) = x_0$$

$$A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-g(2\alpha+2y_e+x_1)}{(\alpha+y_e+x_1)^2} & 0 \end{bmatrix}, \quad B(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K}{(\alpha+y_e+x_1)^2} \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

Denklemden yer alan sistem parametreleri $g = 9.81 \text{ m/s}^2$, $K = 5.695 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}^2$, $\alpha = 0.01234 \text{ m}$, $y_e = -0.022 \text{ m}$ 'dir. Sistemin durumları ise topun istenen denge noktasına göre konumu (x_1) ve topun hızıdır (x_2).

Sistemin kontrol edilebilirlik matrisi ve matrisin determinanı Denklem 6.2'de yer alır:

$$M_C = \begin{bmatrix} 0 & \frac{K}{(\alpha+y_e+x_1)^2} \\ \frac{K}{(\alpha+y_e+x_1)^2} & 0 \end{bmatrix}, \quad \det(M_C) = -\frac{K^2}{(\alpha+y_e+x_1)^4} \quad (6.2)$$

Manyetik kaldırma sistemi için verilen SDC matrislerine göre, kontrol edilebilirlik matrisinin determinanı, $K \neq 0$ için herhangi bir çalışma noktasında sıfırdan farklıdır. Bu durumda sistem, herhangi bir x durumu için kontrol edilebilirdir.

Kontrol için, [34]'te yer alan çalışma ile aynı tasarım parametreleri seçilmiştir:

$$Q(x) = \begin{bmatrix} 1250 \frac{(\alpha+y_e+x_1)^4}{K^2} & 0 \\ 0 & 8500 \end{bmatrix}, \quad R(x) = 8.5 \cdot 10^6 \quad (6.3)$$

6.2 Manyetik Kaldırma Sistemi İçin SDRE'nin Yaklaşık Çözümü

Manyetik kaldırma sistemi için SDRE'nin pozitif simetrik çözümü,

$$P(x) = \begin{bmatrix} p_1(x) & p_2(x) \\ p_2(x) & p_3(x) \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

olsun. Denklem 6.1'de yer alan sistemin SDC gösterim matrisleri yalnızca x_1 'e bağlıdır. Bu sebeple, SDRE'nin yaklaşık çözümünün elde edilmesi için farklı x_1 noktalarına ait değerler kullanılacaktır. Sistemin x_1 durumu için çalışma bölgesi, $\Omega = \{x : x_1 \in [-0.006, 0.006]\}$ seçilmiştir. Yaklaşık ifadenin elde edilmesi için Algoritma 2 kullanılmış, ilgili bilinmeyenler ise "MATLAB - Neural Network Toolbox"ta yer alan "newrbe" komutu kullanılarak hesaplanmıştır. Araba-sarkaç sisteminde kullanılan [33]'daki optimizasyon algoritmasından farklı olarak, bu komut ile kullanıcıya RBF

merkezlerini belirleme imkanı sunulur. Buna göre, x_1 için belirlenen çalışma aralığında, birbirine eş uzaklıkta 7 merkez seçilmiştir:

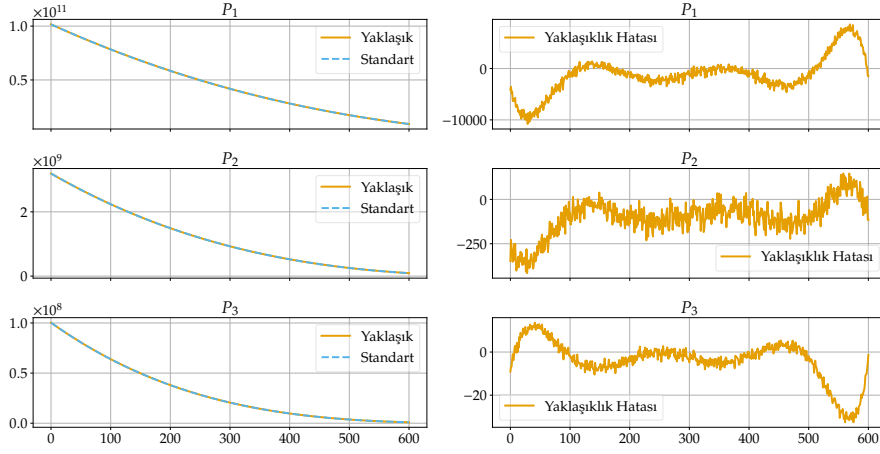
$$x_{1i} \in [-0.006 - 0.004 - 0.002 0 0.002 0.004 0.006] \quad i = 1, \dots, 7$$

Belirlenen bu 7 çalışma noktasına karşı düşen $P(x)$ matrisleri hesaplanmış ve Denklem 4.8'de yer alan bilinmeyenler "MATLAB - Neural Network Toolbox"ta bulunan "newrbe" komutu ile hesaplanmıştır. Buna göre elde edilen SDRE'nin yaklaşık çözümü Denklem 6.5'te verilmiştir. Burada Denklem 4.8'de belirtilen sabit P_{bi} matrisleri, "newrbe" komutuyla çalıştırılan optimizasyon algoritmasında tek bir matris olarak elde edildiği için, toplam ifadesinin dışına tek bir P_b matrisi olacak şekilde yazılmıştır.

$$\hat{P}(x) = \sum_i \left(\tilde{P}_i e^{-(\varepsilon_i \|x - x_i\|)^2} \right) + P_b \quad (6.5)$$

$$\begin{aligned} \tilde{P}_1 &= 10^{18} \begin{bmatrix} 1.0420 & 0.0730 \\ 0.0730 & 0.0027 \end{bmatrix} & \varepsilon_1 &= 15.6790, & x_{11} &= -0.006 \\ \tilde{P}_2 &= 10^{18} \begin{bmatrix} -4.0640 & -0.2913 \\ -0.2913 & -0.0114 \end{bmatrix} & \varepsilon_2 &= 15.6790, & x_{12} &= -0.004 \\ \tilde{P}_3 &= 10^{18} \begin{bmatrix} 4.9633 & 0.3641 \\ 0.3641 & 0.0152 \end{bmatrix} & \varepsilon_3 &= 15.6790, & x_{13} &= -0.002 \\ \tilde{P}_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \varepsilon_4 &= 15.6790, & x_{14} &= 0 \\ \tilde{P}_5 &= 10^{18} \begin{bmatrix} -4.7652 & -0.3667 \\ -0.3667 & -0.0171 \end{bmatrix} & \varepsilon_5 &= 15.6790, & x_{15} &= 0.002 \\ \tilde{P}_6 &= 10^{18} \begin{bmatrix} 3.7455 & 0.2955 \\ 0.2955 & 0.0146 \end{bmatrix} & \varepsilon_6 &= 15.6790, & x_{16} &= 0.004 \\ \tilde{P}_7 &= 10^{17} \begin{bmatrix} -9.2158 & -0.7459 \\ -0.7459 & -0.0386 \end{bmatrix} & \varepsilon_7 &= 15.6790, & x_{17} &= 0.006 \\ P_b &= 10^{12} \begin{bmatrix} -4.0644 & 0.2456 \\ 0.2456 & 0.0818 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Çalışma aralığından toplanan örnekler için, SDRE'nin standart ve yaklaşık fonksiyondan elde edilen çözümlerine karşı düşen $p(x)$ fonksiyonlarının değeri, Şekil 6.2'de verilmiştir.



Örnek Sayısı

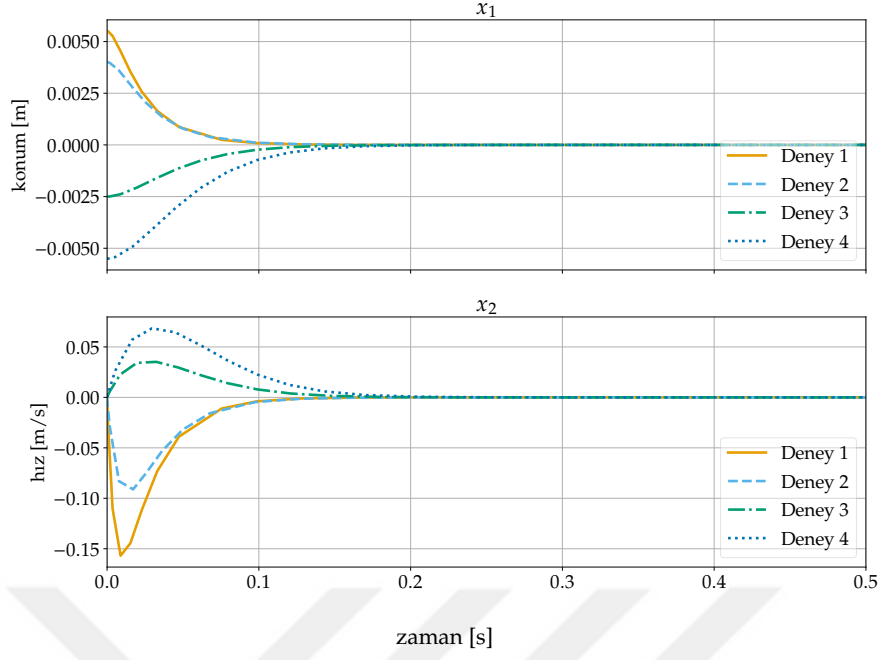
Şekil 6.2 : Manyetik kaldırma sistemi için SDRE'nin standart ve yaklaşık çözüm değerleri.

Çizelge 6.1'de yer alan farklı x_1 başlangıç noktalarına göre, SDRE'nin yaklaşık çözümü ile kontrol edilen kapalı çevrimli sistemin cevapları Şekil 6.3'tedir. İlgili kontrol işaretleri, Şekil 6.4'te verilmiştir.

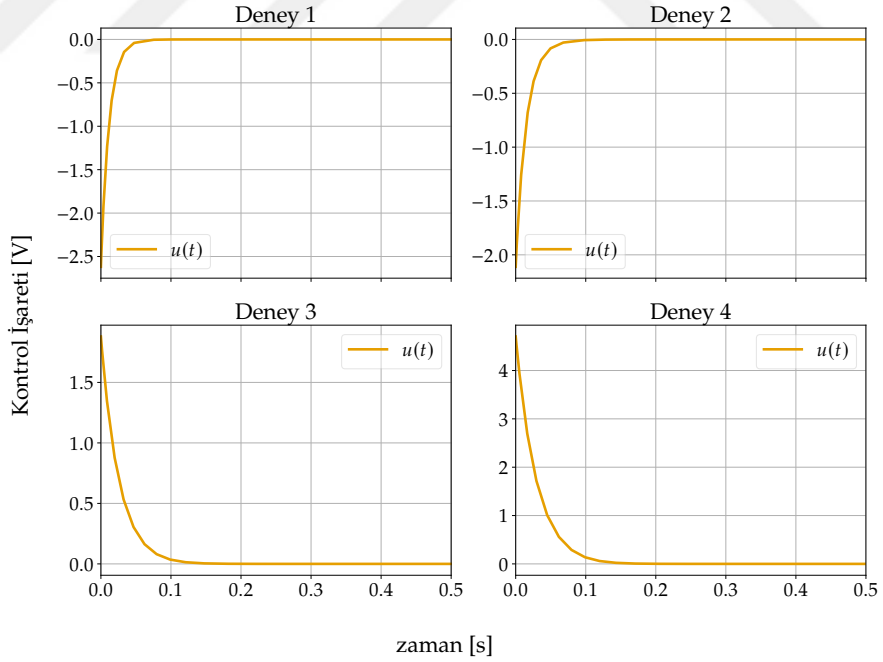
Çizelge 6.1 : Manyetik kaldırma sistemi için deneylerin başlangıç noktası değerleri.

	Deney 1	Deney 2	Deney 3	Deney 4
x_1 [m]	0.0055	0.004	-0.0025	-0.0055

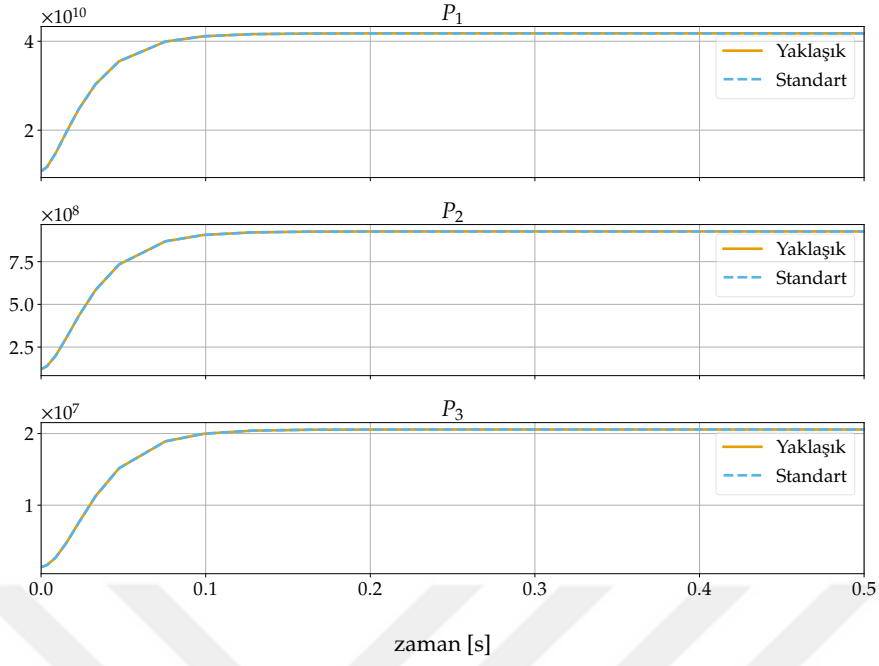
Sistemin davranışının analizine ilave olarak Deney 1 süresince, SDRE'nin yaklaşık çözümü ile sistem durumlarına bağlı olarak çevrimiçi hesaplanan gerçek çözümü Şekil 6.5'te verilmiştir. Bu çözümlere karşı düşen kontrolör kazançları Şekil 6.6'da yer alır. Şekil 6.5 ve 6.6'dan görüldüğü üzere, deney süresince elde edilen SDRE'nin gerçek ve yaklaşık çözümleri birbirine oldukça yakındır. Böylece doğrusal olmayan ve kararsız bir sistem olan manyetik kaldırma sistemi için SDRE'nin yaklaşık çözümü, 7 adet RBF ile ifade edilebilmiştir ve bu yaklaşık ifade ile, SDRE'nin standart çözümüne çok yakın şekilde sistem kontrol edilmiştir.



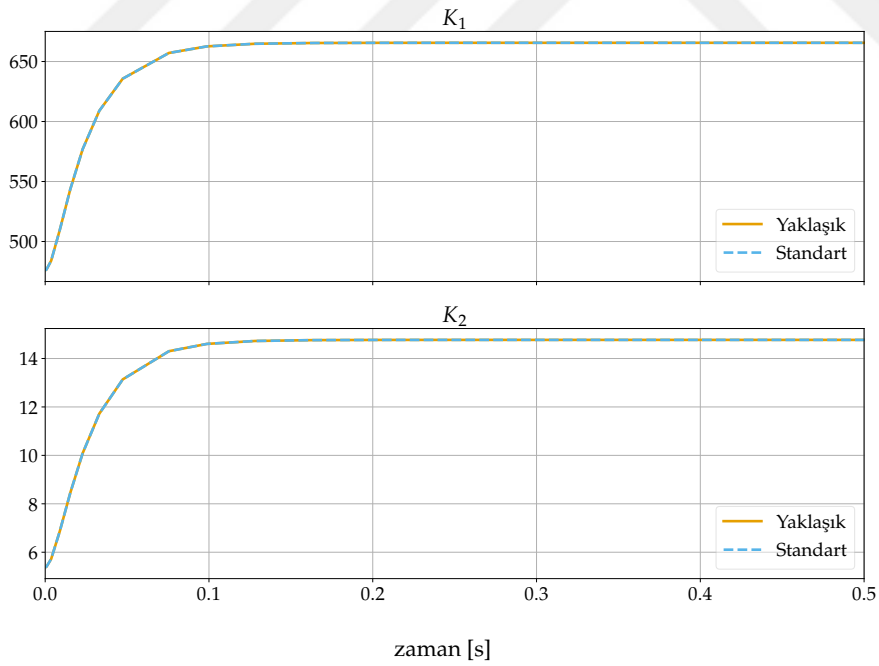
Şekil 6.3 : Farklı başlangıç koşullarına göre SDRE'nin yaklaşık çözümü ile kontrol edilen kapalı çevrimli sistemin davranışı (Algoritma 1).



Şekil 6.4 : Farklı başlangıç koşullarına göre SDRE'nin yaklaşık çözümü ile kontrol edilen kapalı çevrimli sistemin kontrol işareti (Algoritma 1).



Şekil 6.5 : Deney 1 için SDRE'nin yaklaşık ve standart çözümü (Algoritma 2).



Şekil 6.6 : Deney 1 için SDRE'nin yaklaşık ve standart çözümüne bağlı kontrol kazançları.

7. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında, doğrusal olmayan sistemlerin kontrolü için son yıllarda yaygın olarak üzerinde araştırma yapılan ve özellikle balistik sistemlerin kontrolü için uygulamada tercih edilen bir yöntem olan, SDRE temelli kontrol tekniği incelenmiştir.

İlgili literatürde vurgulandığı gibi SDRE temelli kontrol yöntemi her zaman kararlılığı garanti eden bir çözüm sunmaz. Elde edilen bir kontrol kuralının kararlılığı garanti ettiği, gerçek bir sisteme uygulanmadan önce bilinmesi gerekir. Bilindiği gibi, kararlılık analizi, ancak kontrol kuralının analitik ifadesi biliniyorsa yapılabilir. Oysa SDRE temelli kontrol kuralının sistemin durumlarına olan bağılılığı bilinmez, durumların anlık değerleri kullanılarak elde edilen ARE'nin çözümleri üzerinden hesaplanıp sisteme uygulanır. Diğer taraftan, yöntemin temel varsayımı, hesap süresinin sistemin dinamiğinden çok çok kısa olmasıdır. Bu varsayımın sağlanması, özellikle durum sayısı arttıkça mümkün olmaz.

SDRE temelli kontrol tekniğinin bu eksikliklerinin giderilmesi amacıyla, bu tez çalışmasında SDRE'nin yaklaşık bir çözümünün çevrimdışı elde edilmesi için bir yöntem önerilmiştir. Bu yöntem kullanılarak bulunan SDRE'nin yaklaşık, ancak analitik ifadesi bilinen çözümü kullanılarak oluşturulan kontrol kuralının sistemin durumlarına olan bağılılığı belirlenmiş olur. Böylece, kararlılık analizinin uygulama öncesi kuramsal olarak yapılıp sonra sistemin kontrolünde kullanılması mümkün olur. Önerilen bu yöntem sayesinde, SDRE temelli kontrol yönteminin hem çevrimiçi hesap yükünün azaltılmış olduğu hem de elde edilen kontrol kuralının sistemi kararlı kılıp kılmadığının önceden belirlenebilir olduğu söylenebilir.

Önerilen yaklaşık çözüm yöntemine dayanan, birbirine benzer iki algoritma oluşturulmuştur. Yöntemin sınanması için, literatürde yaygın olarak kullanılan doğrusal olmayan araba-sarkaç ve manyetik kaldırma sistemleri ele alınmış ve SDRE'nin yaklaşık çözümü ile oluşturulan kontrol kuralı ile kontrol edilmiştir. Bu örnek sistemlerin yaklaşık çözümün eldesi için önerilen iki ayrı algoritma da

kullanılmış ve sonuçlar karşılaştırılmıştır. Bu tez çalışmasında geliştirilen yöntem ile çevrimdışı elde edilen kontrol kuralı ile kontrol edilen sistemin performansının, SDRE'nin standart çevrimiçi hesabıyla oluşturulan kontrol kuralı ile kontrol edilen sistemin performansına oldukça yakın olduğu gözlenmiştir.

Yaklaşık fonksiyon ifadesindeki bilinmeyenlerin elde edilmesi için hem [33]'teki optimizasyon algoritması hem de MATLAB newrbe kullanılmıştır. [33]'teki algoritmada, istenen bölge sayısı belirtilir ve bölgelerin merkezleri algoritma tarafından bulunur. MATLAB newrbe de ise bölgeler ve merkezleri kullanıcı tarafından seçilir. İstenen hata oranına göre bölge sayıları arttırılıp azaltılarak yaklaşım performansı ve hesaplama yükü değiştirilebilir. Ayrıca yaklaşım performansı, kullanılacak farklı algoritmalar aracılığıyla da geliştirilebilir.

Bu tez çalışmasında SDRE'nin yaklaşık çözümü için geliştirilen algoritmalarda, Gauss tipinde radyal temelli fonksiyonlar kullanılmıştır. Burada amaç en iyi yaklaşıklık sağlanması olduğu için, farklı tipte fonksiyonlar da kullanılabilir.

Yaklaşık olarak elde edilen $\hat{P}(x)$ ifadesi, kontrol kuralının hesaplanmasında kullanılır. Araba-sarkaç sistemi için bu çalışmada seçilen SDC gösteriminde, kontrol kuralının $P(x)$ 'in bazı elemanlarından bağımsız olduğu görülmüştür. Burada bir seçenek olarak $P(x)$ 'in yaklaşık ifadesi yerine, $P(x)$ 'le inşa edilen kontrol kuralının yani $K(x)$ kazanç matrisinin yaklaşık ifadesi $\hat{K}(x)$ 'in bulunması yoluna da gidilebileceği görülmüştür.

Sistemin SDC gösteriminin belirlenmesi, SDRE'nin önemli bir adımıdır. Bu çalışmada, araba-sarkaç sistemi için en uygun SDC gösteriminin tespit edilmesinde kontrol edilebilirlik matrisinin determinantı incelenmiştir. Determinantı en büyük yapan $P(x)$ parametresine göre SDC matrisleri belirlenmiştir. Ancak $A(x)$ ve $B(x)$ matrislerinin hızlı değiştiği bölgelerde, bu değişimin etkilerini uygun yaklaşıklık ile ifade edebilmek için daha sık bölge seçilmesine ihtiyaç duyulmuştur. Buna göre α parametresi, SDRE'nin çözümünü en iyi yaklaşıklıkla ifade edebilecek şekilde de belirlenebilir.

Bu yüksek lisans tez çalışmasında yaklaşık çözüm ile bulunan kontrol kuralının kararlılık analizine yer verilmemiştir. Ancak SDRE'nin yaklaşık çözümü $\hat{P}(x)$ kullanılarak oluşturulan kontrol kuralı ile kapalı çevrime sokulan sistem için bir

aday Lyapunov fonksiyonu seçilip, [28]'de yer alan çalışmanın kararlılık analizi bölümündeki fikirler kullanılarak, $\hat{P}(x)$ üzerinden kararlılık analizi çevrimdışı yapılabilir. Bu konu, gelecek çalışmalara bırakılmıştır.





KAYNAKLAR

- [1] **Naidu, D.S.** (2003). *Optimal control systems / Desineni Subbaram Naidu.*, Electrical engineering textbook series, CRC Press, Boca Raton, Fla.
- [2] **Kokotovic, P.V. ve Sannuti, P.** (1968). Singular perturbation method for reducing the model order in optimal control design, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 13, 468–477.
- [3] **Garrard, W.L., Mcclamroch, N.H. ve Clark, L.G.** (1967). An Approach to Sub-optimal Feedback Control of Non-linear Systems, *International Journal of Control*, 5(5), 425–435.
- [4] **Garrard, W.L.** (1969). Additional results on sub-optimal feedback control of non-linear systems, *International Journal of Control*, 10(6), 657–663.
- [5] **Garrard, W.** (1972). Suboptimal feedback control for nonlinear systems, *Automatica*, 8(2), 219–221.
- [6] **Eller, D.H. ve Aggarwal, J.K.** (1968). Sub-optimal control of non-linear single input systems, *International Journal of Control*, 8(2), 113–121.
- [7] **Rosen, G.H. ve Wismer, D.A.** (1972). A sub-optimal feedback controller for on-line computer applications†, *International Journal of Control*, 15(1), 115–128.
- [8] **Pearson, J.D.** (1962). Approximation Methods in Optimal Control I. Sub-optimal Control†, *Journal of Electronics and Control*, 13(5), 453–469.
- [9] **Cloutier, J., souza, C. ve Mracek, C.** (1996). Nonlinear Regulation and Nonlinear H Control Via the State-Dependent Riccati Equation Technique: Part1, Theory.
- [10] **Cloutier, J., Souza, C. ve Mracek, C.** (1996). Nonlinear Regulation and Nonlinear H Control Via the State-Dependent Riccati Equation Technique: Part2, Examples.
- [11] **Qu, Z., Cloutier, J.R. ve Mracek, C.P.** (1996). A New Sub-Optimal Nonlinear Control Design Technique - SDARE, *IFAC Proceedings Volumes*, 29, 2242–2247.
- [12] **Wernli, A. ve Cook, G.** (1975). Suboptimal control for the nonlinear quadratic regulator problem, *Automatica*, 11(1), 75–84.

- [13] **Cloutier, J.** (1997). State-dependent Riccati equation techniques: an overview, *Proceedings of the 1997 American Control Conference (Cat. No.97CH36041)*, cilt 2, s.932–936 vol.2.
- [14] **Menon, P., Sweriduk, G., Vaddi, S. ve Ohlmeyer, E.** (2004). Nonlinear Discrete-Time Design Methods for Missile Flight Control Systems, 17.
- [15] **Dutka, A., Ordys, A. ve Grimble, M.** (2005). Optimized discrete-time state dependent Riccati equation regulator, *Proceedings of the 2005, American Control Conference, 2005.*, s.2293–2298 vol. 4.
- [16] **Sznaier, M., Cloutier, J.R., Hull, R.A., Jacques, D.R. ve Mracek, C.P.** (2000). Receding Horizon Control Lyapunov Function Approach to Suboptimal Regulation of Nonlinear Systems, *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 23, 399–405.
- [17] **Wan, E. ve Bogdanov, A.** (2001). Model predictive neural control with applications to a 6 DOF helicopter model, *Proceedings of the 2001 American Control Conference. (Cat. No.01CH37148)*, cilt 1, s.488–493 vol.1.
- [18] **Bass, R.** (1991). rho -synthesis: a 'robustness' margin for unstructured nonlinear and time-varying deviations, *[1991] Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control*, s.2531–2537 vol.3.
- [19] **Çimen, T.** (2012). Survey of State-Dependent Riccati Equation in Nonlinear Optimal Feedback Control Synthesis, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 35(4), 1025–1047.
- [20] **Huang, Y. ve Lu, W.M.** (1996). Nonlinear optimal control: alternatives to Hamilton-Jacobi equation, *Proceedings of 35th IEEE Conference on Decision and Control*, cilt 4, s.3942–3947 vol.4.
- [21] **Çimen, T.** (2010). Systematic and effective design of nonlinear feedback controllers via the state-dependent Riccati equation (SDRE) method, *Annual Reviews in Control*, 34(1), 32–51.
- [22] **Mracek, C.P. ve Cloutier, J.R.** (1998). Control designs for the nonlinear benchmark problem via the state-dependent Riccati equation method, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 8, 401–433.
- [23] **Cloutier, J. ve Stansbery, D.** (2002). The capabilities and art of state-dependent Riccati equation-based design, *Proceedings of the 2002 American Control Conference (IEEE Cat. No.CH37301)*, cilt 1, s.86–91 vol.1.
- [24] **Hammett, K.D.** (1997). *Control of Nonlinear Systems via State Feedback State-Dependent Riccati Equation Techniques*, (Doctoral dissertation). Retrieved from <https://apps.dtic.mil/sti/citations/ADA327140/>.

- [25] **Langson, W. ve Alleyne, A.** (2002). A Stability Result With Application to Nonlinear Regulation1, *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 124(3), 452–456.
- [26] **Hammett, K.D., Hall, C.D. ve Ridgely, D.B.** (1998). Controllability Issues in Nonlinear State-Dependent Riccati Equation Control, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 21(5), 767–773.
- [27] **Çimen, T.** (2008). State-Dependent Riccati Equation (SDRE) Control: A Survey, *IFAC Proceedings Volumes*, 41(2), 3761–3775, 17th IFAC World Congress.
- [28] **Yıldız, H.A. ve Gören-Sümer, L.** (2022). Stabilization of a class of underactuated Euler Lagrange system using an approximate model, *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 44(8), 1569–1578.
- [29] **Hardy, R.L.** Multiquadric equations of topography and other irregular surfaces, *Journal of Geophysical Research (1896-1977)*, 76(8), 1905–1915.
- [30] **Wu, Y., Wang, H., Zhang, B. ve Du, K.L.** (2012). Using Radial Basis Function Networks for Function Approximation and Classification, *ISRN Applied Mathematics*, 2012.
- [31] **Majdisova, Z. ve Skala, V.** (2018). A Radial Basis Function Approximation for Large Datasets.
- [32] **Skala, V.** (2016). A practical use of radial Basis functions interpolation and approximation, 37, 137–145.
- [33] **URL-1.** <<https://github.com/JeremyLinux/PyTorch-Radial-Basis-Function-Layer>>, erişim tarihi: 1.05.2022.
- [34] **Erdem, E. ve Alleyne, A.** (2004). Design of a class of nonlinear controllers via state dependent Riccati equations, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 12(1), 133–137.



ÖZGEÇMİŞ

Adı SOYADI: Hafsa Ceren DEMİRCİ

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans:** 2018, İstanbul Teknik Üniversitesi, Elektrik-Elektronik Fakültesi, Kontrol ve Otomasyon Bölümü
- **Y. Lisans:** 2022, İstanbul Teknik Üniversitesi, Elektrik-Elektronik Fakültesi, Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği Anabilim Dalı, Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği Programı

MESLEKİ DENEYİMLER VE ÖDÜLLER:

- 2018-(halen) Eatron Technologies, Kontrol Mühendisi