

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DOKTORA TEZİ

KUATERNİYONİK EĞRİLER VE UYGULAMALARI

Gizem CANSU

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**ANKARA
2022**

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Doktora Tezi

KUATERNİYONİK EĞRİLER VE UYGULAMALARI

Gizem CANSU

Ankara Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Yusuf YAYLI

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, tezin diğer bölümlerinde kullanılacak olan ön bilgiler, bazı temel kavramlar ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, 3-boyutlu ve 4- boyutlu uzaydaki kuaterniyonik eğrilerin tanımları ve bu eğrilerin Frenet elemanları yardımıyla Serret-Frenet çatıları ve bazı teoremler verilmiştir. Ayrıca bu eğrilerle ilgili karakterizasyonlar verilmiştir. 4-boyutlu uzaydaki kuaterniyonik eğriler için yeni bir çatı tanımlanarak genel çatı tanımı verilmiştir. Yeni çatı yardımıyla kuaterniyonik helislerlerin tanımları verilerek çatı yapıları ve eksenleri hesaplanmıştır.

Dördüncü bölümde, üç boyutlu tanımlanan küresel eğriler yardımıyla kuaterniyonik helisler için yeni karakterizasyonlar verilmiştir.

Beşinci bölümde, katsayıları hiper dual sayılar olan hiper dual kuaterniyonik eğrilerin tanımları verilmiş ve Serret-Frenet çatıları ile eksenleri hesaplanmıştır.

Altıncı bölümde ise, tezde elde edilen bulgulara ve sonuçlara yer verilmiştir.

Mayıs 2022, 80 sayfa

Anahtar Kelimeler: Kuaterniyonik eğriler, Kuaterniyonik eğrilik, Kuaterniyonik helisler, Küresel Eğriler, Hiper dual kuaterniyonik eğriler.

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

QUATERNIONIC CURVES AND THEIR APPLICATIONS

Gizem CANSU

Ankara University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Yusuf YAYLI

This thesis consists of six chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

The second chapter, preliminaries, some definitions and theorems that will be used in other section of the thesis are given.

In the third chapter, the definitions of quaternionic curves in 3-dimensional and 4-dimensional space and the Serret Frenet frames and some theorems are given with the help of Frenet elements of these curves. In addition, characterizations related to these curves are given. A new frame is defined for quaternionic curves in 4-dimensional space and a general frame definition is given. With the help of the new frame, the definitions of the quaternionic helices were given and the frame structures and axes were calculated.

In the fourth chapter, new characterizations for quaternionic helices are given with the help of three-dimensional defined spherical curves.

In the fifth chapter, constant affine curvature with curves on a affine surface are given.

In the sixth chapter, the findings and results obtained in the thesis are given.

May 2022, 80 pages

Key Words: Quaternionic curves, Quaternionic curvature, Quaternionic helices, Spherical Curves, Hyper dual quaternionic curves.

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının oluşmasında beni yönlendiren, destekleyen, araştırmalarımın her aşamasında bilgi, öneri ve yardımlarını esirgemeyerek çalışmanın ilerlemesinde katkıda bulunan danışman hocam Sayın Prof. Dr. Yusuf YAYLI (Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı)' ya ve sonsuz sabrı ve emeği ile desteğini her zaman yanımda hissettiğim hocam Sayın Prof. Dr. İsmail GÖK (Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı)' e ve her konuda bilgi, görüş ve yardımlarını esirgemeyen saygıdeğer tez izleme kurulu üyesi hocam Sayın Prof. Dr. Baki KARLIĞA (Gazi Üniversitesi Matematik Bölümü)' ya, destekleriyle yanımda olan gülyüzlü hocam Sayın Prof. Dr. F. Nejat EKMEKÇİ (Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı)' ye ve makale çalışmalarında bıkmadan sıkılmadan sabırla bana yardım eden sayın hocam Doç. Dr. Zehra ÖZDEMİR (Amasya Üniversitesi Matematik Bölümü)' e en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Akademik eğitim sürecim boyunca beni destekleyen ailem oldukları için çok şanslı olduğum haklarını asla ödeyemeyeceğim canım annem Cemile CANSU ve canım babam Ali CANSU'ya bugünlere gelmemde verdikleri özveri ve emekleri için en derin ve en kıymetli duygularıyla sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum. Ayrıca canım kardeşim Doğan Görkem CANSU ve canım ablam Gamze CANSU BORAN'a desteklerinden dolayı teşekkür ederim. Teyzesi olmaktan gurur duyduğum Asya BORAN'a tezimi ithaf ediyorum.

Doktora eğitimim boyunca destekleriyle her zaman yanımda olan kıymetli dostlarım Duygu ÇANDARLI ve Beyhan YILMAZ'a, tam vazgeçmişken beni cesaretlendiren ayağa kaldıran ve her türlü yardımı esirgemeyen çok kıymetli canım öğretmenim sayın Raşit CESUR'a ve her zaman beni destekleyen, yardım eden canım arkadaşlarım Derya KAHVECİ ve Ebru YANIK'a teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Gizem CANSU

Ankara, Mayıs 2022

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI

ETİK.....	i
ÖZET.....	ii
ABSTRACT.....	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
SİMGELER DİZİNİ.....	v
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vi
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	4
3. GENEL KUATERNİYONİK EĞRİLER.....	11
3.1 3-Boyutlu Uzayda Kuaterniyonik Eğriler.....	11
3.2 4-Boyutlu Uzayda Kuaterniyonik Eğriler.....	12
3.3 4-Boyutlu Uzayda Kuaterniyonik Eğriler İçin Ana Teorem..	22
4. KÜRESEL EĞRİLER VE HELİSLER.....	62
5. HİPER DUAL KUATERNİYONİK EĞRİLER.....	64
6. TARTIŞMA VE SONUÇ.....	76
KAYNAKLAR.....	77
ÖZGEÇMİŞ.....	79

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{E}^3$	3–Boyutlu Öklid Uzayı
$\mathbb{E}^4$	4–Boyutlu Öklid Uzayı
q	Herhangi Bir Kuaterniyon
S_q	q Kuaterniyonunun Skaler Kısım
V_q	q Kuaterniyonunun Vektörel Kısım
$\mathbb{H}$	Kuaterniyonlar Cümlesi
$\langle, \rangle$	İç Çarpım
Λ	Vektörel Çarpım
$\ , \ $	Norm
$\bar{q}$	q Kuaterniyonunun Eşleniği
q_0	Birim Kuaterniyon
q^{-1}	q Kuaterniyonunun Ters
$h(,)$	Kuaterniyon İç Çarpımı
$\times$	Kuaterniyon Çarpımı
S_0	q_0 Kuaterniyonunun Ekseni
$\beta(s)$	3–Boyutlu Uzayda Kuaterniyonik Eğri
$\gamma(s)$	4–Boyutlu Uzayda Kuaterniyonik Eğri
$\alpha(s)$	Küresel Eğri
HD	Hiper Dual Sayılar Kümesi
H_{HD}	Hiper Dual Kuaterniyonlar Cümlesi

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1 $\gamma(s)$ eğrisi için Tip I Kuaterniyonik Eğri.....	49
Şekil 3.2 $\gamma(s)$ eğrisi için Tip II Kuaterniyonik Eğri.....	52
Şekil 3.3 $\gamma(s)$ eğrisi için Tip I Kuaterniyonik Eğri.....	58
Şekil 3.4 $\gamma(s)$ eğrisi için Tip II Kuaterniyonik Eğri.....	61



1. GİRİŞ

Kuaterniyon sayı sistemi ilk defa 1843 yılında İrlandalı matematikçi Sir W. R. Hamilton tarafından literatürde ifade edilmiş ve 3-boyutlu uzaydaki matematiğe uygulanmıştır. Kuaterniyonlar, bir düzlemde noktalar tarafından temsil edilen karmaşık sayılara benzeyen dört boyutlu uzaydaki sayı sistemleridir. Kuaterniyonlar ve karmaşık sayılar birbirlerine benzer özelliklere sahip gibi görünse de aslında benzer değildir. Çünkü kuaterniyonlarda tanımlanan çarpım değişmeli değildir bu açıdan karmaşık sayılardan farklılaşırlar. İlk zamanlarda kuaterniyon sayı sistemi çalışılırken sağ çarpım ve sol çarpım sonuçları birbirinden farklı sonuçlar verdiği için değişme özelliğini ($ab=ba$) sağlamadıkları gözlemlenmiştir ve bu bir problem gibi kabul edilmiştir. Kuaterniyonlar kendilerine özgün yapıları nedeniyle geometride dönme ve öteleme hareketlerinin temsilinde oldukça kullanışlıdır. Kuaterniyonlar değişme özelliğini sağlamadığı için bir çok uygulamada yerini vektörler ve matrisler almışlardır. Günümüzde ise kuaterniyonlarda dönme hareketini hesaplamak, vektörler ve matrislerden daha hızlı olduğu için bir çok alanda ve uygulamalı matematik alanında kullanılmaktadırlar. Kuaterniyonlar geçmişten günümüze kadar fizik alanında klasik Newton fiziğinden kuantum fiziğine, kimya alanında moleküler yapıların analizinde, biyoloji ve tıbbi bilimler alanında DNA ve protein yapılarının analizinde, bir çok bilgisayar uygulamalarında, astrofizikte, robotik ve animasyonlarda kullanılmışlardır ve hala da etkin olarak kullanılmaktadırlar. Kuaterniyonlar son yıllarda özellikle bilişim alanlarında robotik uygulamalarda ve animasyonlarda kullanılan, kinematik ve dinamik ifadelerin elde edilmesinde önemli bir rol oynarlar.

Kuaterniyonların kümesi $\mathbb{H}$, 4-boyutlu vektör uzayına denk gelir. $\mathbb{H}$ uzayının her bir elemanı; a, b, c, d birer reel sayı ve $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$ $\mathbb{R}$ nin bazları olmak üzere $a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3 + d\vec{e}_4$ şeklinde ifade edilir. Günümüzde kuaterniyonların, reel, kompleks, dual ve hiper dual kuaterniyonlar olmak üzere farklı tiplerde özellikleri incelenmektedir. Bilim insanları, kuaterniyonların farklı tiplerini inceleyerek pek çok çalışmalarda bulunmuşlardır.

Kuaterniyonlar üzerinde eğri tanımı ilk olarak K.Baharatti ve M.Nagaraj tarafından 1987 yılında verilmiştir. K.Baharatti ve M.Nagaraj, $\mathbb{R}^3$ ve $\mathbb{R}^4$ uzaylarındaki kuaterniyonik eğrileri ve onların Frenet çatılarını çalışmışlardır. Hacısalihoğlu "Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonların Teorisi" adlı kitabında reel ve dual kuaterniyonların özelliklerini inceleyerek çalışmalarda bulunmuştur. Karadağ ise $\mathbb{R}^3$ ve $\mathbb{R}^4$ uzaylarındaki kuaterniyonik eğrilerin harmonik eğriliklerini incelemiş Ward ise $\mathbb{R}^3$ ve $\mathbb{R}^4$ uzaylarındaki kuaterniyonik eğrilerin dönme matrislerini çalışmıştır ve kuaterniyonların matris formlarını vermiştir. A.C. Coken ve A.Tuna 4-boyutlu semi öklidiyen uzayında kuaterniyonik eğrilerin diferensiyel geometrisini çalışmışlardır. Kula, doktora tezinde split kuaterniyonları çalışmış ve Hamilton operatörleri ile özelliklerini vermiştir.

Öklid uzayında sabit eğilimli veya genel helis eğrisinin hız vektörü, eğri boyunca sabit bir doğrultu ile sabit açı yapar. Eğriliği κ , torsiyonu τ olan genel helisin karakterizasyonu, $\frac{\kappa}{\tau}$ oranının eğri boyunca sabit olması ile ifade edilir. 4- boyutllu Öklid uzayında benzer karakterizasyon A. Mağden tarafından verilmiştir. Mağden'e göre $\mathbb{R}^4$ uzayında alınan bir eğrinin sırasıyla sıfırdan farklı k_1 , k_2 , k_3 birinci ,ikinci ve üçüncü eğriliği için

$$\frac{(k_1)^2}{(k_2)^2} + \left[\frac{1}{k_3} \frac{d}{ds} \left(\frac{k_1}{k_2} \right) \right]^2$$

oranı sabitse bu eğri E^4 uzayında bir helis belirtir.

Kuaterniyonik helisler, kuaterniyonlar kullanılarak tanımlanan helislerdir. Yoon, $\mathbb{E}^4$ uzayındaki helisleri, kuaterniyonik eğrilerin eğrilikleri yardımıyla,

$$\left(\frac{K}{k} \right)^2 + \left[\frac{1}{\tau - K} \frac{d}{ds} \left(\frac{K}{k} \right) \right]^2 = \text{sabit}$$

denklemleri ile karakterize etmiştir. Aksoyak, kuaterniyonik helisler için Yoon'un ve K.Baharatti ile M.Nagaraj yöntemlerine benzer bir yöntem kullanarak yeni bir çatı tanımlamıştır.

Bu tez çalışması altı bölüm başlığından oluşmaktadır. Tezin ikinci bölümünde, tez çalışmasının diğer bölümlerinde kullanılacak olan ön bilgiler ile bazı temel kavramlar verilmiştir. Üçüncü bölümde, üç boyutlu ve dört boyutlu uzaylarda tanımlanan genel kuaterniyonik eğrilerin tanımı, bu eğrilerin Serret-Frenet çatıları ile formülleri ve genel kuaterniyonik eğriler ile ilgili teoremler verilmiştir. Özellikle dört uzayda K.Baharatti ile M.Nagaraj ve F. Aksoyak'ın çalışmalarında kullandıkları yöntemle benzer bir yöntemle bizde yeni bir çatı tanımlayarak bu çatının Serret- Frenet formüllerini elde edilmiştir. Daha sonra bu üç çalışma baz alınarak yeni bir Ana teorem verilerek dört boyutlu uzaylarda uzaydaki kuaterniyonik eğriler için genel bir çatı tanımı yapılmıştır ve bu çatının Serret- Frenet formülleri verilmiştir. Bu bölümde verilen ana teorem yardımıyla kuaterniyonların sağ ve sol çarpım kullanılarak kuaterniyonik helislerin tanımı verilmiştir ve bu helislerin çatı yapıları ve eksenleri hesaplanmıştır. Daha sonra bu kuaterniyonik helisler için örnekler verilerek ana teoremden verilen sağ ve sol çatıları kullanılarak Serret- Frenet formülleri ve eksenleri hesaplanmıştır. Tezin dördüncü bölümünde, üçüncü bölümünde tanımladığımız kuaterniyonik helisler için üç boyutlu uzayda tanımlanan küresel eğriler yardımıyla yeni karakterizasyonlar verilmiştir. Ayrıca kuaterniyonik helis olması durumunda karakterizasyonlar yine küresel eğrilerin karakterizasyonları yardımıyla Mağden ve Yoon'un verdikleri teoremlere benzer yöntemle verilmiştir. Beşinci bölümünde ise daha önce katsayıları reel ve dual sayılar ile çalışılmış olan kuaterniyonlar için katsayıları olarak hiper dual sayılar kullanılarak hiper dual kuaterniyonik eğriler ve onların Serret- Frenet çatıları ve eksenleri üçüncü bölümde ispatı verilen ana teorem yardımıyla hesaplanmıştır. Tezin son bölümünde ise bu tez çalışmasında elde edilen bulgulara ve sonuçlara yer verilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 2.1.1 (Reel Kuaterniyon) $q = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 + a_4\vec{e}_4$ ve $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$ şeklinde tanımlanan bir reel kuaterniyon $\vec{e}_4 = +1, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ gibi sıralı dört sayıdan oluşur. Burada $\vec{e}_4 = +1$ kuaterniyonun reel birimi, diğer $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ ise $\mathbb{R}^3$ ün standart baz vektörleri olmak üzere aşağıdaki özellikleri sağlar:

$$(i) \vec{e}_4 = \vec{e}_i \times \vec{e}_i, (1 \leq i \leq 3)$$

$$(ii) \vec{e}_i \times \vec{e}_j = -\vec{e}_k = -e_j \times e_i, (i, j, k) \text{ ise } (123) \text{ un çift permutasyonudur.}$$

$q = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 + a_4\vec{e}_4$ reel kuaterniyonunun skaler kısmı $S_q = a_4$ ve vektörel kısmı $\vec{V}_q = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$ olmak üzere,

$$q = S_q + \vec{V}_q$$

şeklinde yazılabilir (Bharathi ve Nagaraj 1987).

Tanım 2.1.2 (Kuaterniyonlar Kümesi)

$$\mathbb{H} = \{q \mid q = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 + a_4\vec{e}_4, a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4 \in \mathbb{R}^3\}$$

kümesine kuaterniyonlar kümesi denir (Bharathi ve Nagaraj 1987).

Tanım 2.1.3 (İki Kuaterniyonun Toplamı) $q_1 = S_{q_1} + \vec{V}_{q_1} = a_1\vec{e}_1 + b_1\vec{e}_2 + c_1\vec{e}_3 + d_1\vec{e}_4$ ve $q_2 = S_{q_2} + \vec{V}_{q_2} = a_2\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + c_2\vec{e}_3 + d_2\vec{e}_4$ $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$ olmak üzere q_1 ve q_2 kuaterniyonlarının toplamı,

$$\begin{aligned} \oplus : \mathbb{H} \times \mathbb{H} &\rightarrow \mathbb{H} \\ (q_1, q_2) &\rightarrow q_1 \oplus q_2 = (S_{q_1} + \vec{V}_{q_1}) + (S_{q_2} + \vec{V}_{q_2}) = (S_{q_1} + S_{q_2}) + (\vec{V}_{q_1} + \vec{V}_{q_2}) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır (Bharathi ve Nagaraj 1987).

Bu toplamda $S_{q_1}, S_{q_2} \in \mathbb{R}$ olup “ $\oplus$ ” işlemi $\mathbb{R}$ nin toplama işlemi ve $\vec{V}_{q_1}, \vec{V}_{q_2}$ birer vektör olup “ $\oplus$ ” işlemi ise reel vektör uzayının toplamı işlemidir.

$q_1 \oplus q_2 = q_2 \oplus q_1$ olduğu için $(\mathbb{H}, +)$ bir değişmeli(Abel) gruptur. $(0,0,0,0)$ kuaterniyonu sıfır kuaterniyonu olarak tanımlanır ve bu Abel grubunun etkisiz elemanıdır.

Tanım 2.1.4 (Bir Skaler ile Kuaterniyon Çarpımı) $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $q = S_q + \vec{V}_q \in \mathbb{H}$ olmak üzere reel kuaterniyonlar kümesi üzerinde bir skaler ile bir kuaterniyonunun çarpımı

$$\begin{aligned} \odot : \mathbb{R} \times \mathbb{H} &\rightarrow \mathbb{H} \\ (\lambda, q) &\rightarrow \lambda \odot q = (\lambda a) \vec{e}_1 + (\lambda b) \vec{e}_2 + (\lambda c) \vec{e}_3 + (\lambda d) \vec{e}_4 = \lambda S_q + \lambda \vec{V}_q \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır ve bu çarpım aşağıdaki özellikleri sağlar:

- i) $\lambda \odot (q_1 \oplus q_2) = \lambda \odot q_1 \oplus \lambda \odot q_2; \quad \forall q_1, q_2 \in \mathbb{H} \text{ ve } \forall \lambda \in \mathbb{R},$
- ii) $(\lambda_1 + \lambda_2) \odot q = \lambda_1 \odot q \oplus \lambda_2 \odot q; \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \text{ ve } \forall q \in \mathbb{H},$
- iii) $(\lambda_1 \cdot \lambda_2) \odot q = \lambda_1 \odot (\lambda_2 \odot q); \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \text{ ve } \forall q \in \mathbb{H},$
- iv) $1 \odot q = q \odot 1 = q; \quad \forall q \in \mathbb{H}.$

Burada $\{\mathbb{H}, \oplus, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot\}$ kümesi bir reel vektör uzayı belirtir. Böylece bu uzaya kısaca $\mathbb{H}$ uzayı diyebiliriz (Bharathi ve Nagaraj 1987).

Tanım 2.1.5 (Kuaterniyon Çarpımı) $q_1 = a_1 \vec{e}_1 + b_1 \vec{e}_2 + c_1 \vec{e}_3 + d_1 \vec{e}_4$ ve $q_2 = a_2 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + c_2 \vec{e}_3 + d_2 \vec{e}_4, \quad q_1, q_2 \in \mathbb{H}$ olmak üzere $\mathbb{H}$ uzayında, Öklid uzayının vektörel çarpımı ve iç çarpımı kullanılarak iki kuaterniyonun çarpımı aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$q_1 \times q_2 = S_{q_1} \times S_{q_2} - \langle \vec{V}_{q_1}, \vec{V}_{q_2} \rangle + S_{q_1} \vec{V}_{q_2} + S_{q_2} \vec{V}_{q_1} + \vec{V}_{q_1} \wedge \vec{V}_{q_2}. \quad (1)$$

(Bharathi and Nagaraj 1987).

Lemma 2.1 $\mathbb{H}$ uzayı üzerinde tanımlanan çarpma işlemi aşağıdaki özellikleri sağlamaktadır:

i) $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$ olmak üzere $q_1 \times q_2$ de bir kuaterniyondur.

ii) Kuaterniyon çarpımı birleşme özelliğini sağlar.

iii) Kuaterniyon çarpımı dağılma özelliğini sağlar.

iv) Kuaterniyon çarpımı sağ çarpım ve sol çarpım sonuçları farklı geldiği için değişme özelliğini sağlamamaktadır.

Tanım 2.1.6 (İki Kuaterniyonun Eşitliği) $\forall q_1, q_2 \in \mathbb{H}$ olmak üzere $\mathbb{H}$ uzayı üzerinde iki kuaterniyonun eşitliği aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$q_1 = q_2 \iff S_{q_1} = S_{q_2} \text{ ve } \vec{V}_{q_1} = \vec{V}_{q_2}$$

(Bharathi ve Nagaraj 1987).

Tanım 2.1.7 (Kuaterniyonun Eşleniği) $q = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3 + d\vec{e}_4 = S_q + \vec{V}_q \in \mathbb{H}$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} \overline{(\)} : \mathbb{H} &\rightarrow \mathbb{H} \\ q &\rightarrow \bar{q} = d\vec{e}_4 - a\vec{e}_1 - b\vec{e}_2 - c\vec{e}_3 = S_q - \vec{V}_q \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan $\bar{q}$ ya q kuaterniyonunun eşleniği denir (Bharathi ve Nagaraj 1987).

Tanım 2.1.8 (Bir Kuaterniyonun Normu) $q = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3 + d\vec{e}_4 \in \mathbb{H}$ için

$$\begin{aligned} ||| : \mathbb{H} &\rightarrow \mathbb{R} \\ q &\rightarrow \|q\| \end{aligned}$$

olmak üzere

$$h(q, q) = \|q\|^2 = q \times \bar{q} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

şeklinde tanımlanan $\|q\|$ reel sayısına q kuaterniyonunun normu denir (Bharathi ve Nagaraaj 1987).

Tanım 2.1.9 (Birim Reel Kuaterniyon) $q_0 \in \mathbb{H}$ olmak üzere q_0 kuaterniyonunun normu $\|q_0\|=1$ ise q_0 kuaterniyonuna birim reel kuaterniyon denir (Bharathi ve Nagaraaj 1987).

Tanım 2.1.10 (Birim Kuaterniyonunun Eksen)

$$q_o = \frac{q}{\|q\|} = \frac{a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3 + d\vec{e}_4}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}}$$

q_o birim reel kuaterniyonu

$$q_o = \cos w + S_0 \sin w$$

şeklinde yazılabilir. Eğer $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ ise

$$\begin{aligned} \cos w &= \frac{d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ \sin w &= \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \end{aligned}$$

olacak şekilde q_o birim reel kuaterniyonunun ekseni

$$S_0 = \frac{ae_1 + be_2 + ce_2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

olarak tanımlar (Bharathi ve Nagaraaj 1987).

Tanım 2.1.11 (Kuaterniyon İç Çarpımı) $\forall q_1, q_2 \in \mathbb{H}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} h : \mathbb{H} \times \mathbb{H} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (q_1, q_2) &\rightarrow h(q_1, q_2) = \frac{1}{2}(q_1 \times \bar{q}_2 + q_2 \times \bar{q}_1) \end{aligned}$$

olacak şekilde bir simetrik, reel değerli, bilineer h formu tanımlarsak bu forma kuaterniyonik iç çarpım denir (Bharathi ve Nagaraj 1987).

Tanım 2.1.12 $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$ olmak üzere eğer $h(q_1, q_2) = 0$ ise q_1 ile q_2 kuaterniyonuna h -ortogonal denir (Bharathi ve Nagaraj 1987).

Tanım 2.1.13 (Bir Kuaterniyonun Ters) $q = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3 + d\vec{e}_4 \in \mathbb{H}$ olmak üzere q kuaterniyonunun tersi

$$\begin{aligned} (\)^{-1} : \mathbb{H} - \{0\} &\rightarrow \mathbb{H} - \{0\} \\ q &\rightarrow (q)^{-1} = \frac{\bar{q}}{\|q\|^2} \end{aligned}$$

olacak şekilde tanımlanır (Bharathi and Nagaraj 1987).

Tanım 2.1.14 (Uzaysal Kuaterniyon) $q = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3 + d\vec{e}_4 \in \mathbb{H}$ olmak üzere

$$\{q \in \mathbb{H} \mid q + \bar{q} = 0\}$$

şartını sağlayan kuaterniyonlara uzaysal (spatial) kuaterniyon denir.

Uzaysal (spatial) kuaterniyonların kümesi, üç boyutlu vektör uzayı olan $\mathbb{R}^3$ uzayına izomorftur. Uzaysal (spatial) kuaterniyonların skaler kısımları $S_q = 0$ ve vektörel kısımları $\vec{V}_q \neq 0$ dır. Bu iki özellik kullanılarak q_1 ve q_2 iki uzaysal kuaterniyonun kuaterniyon çarpımını aşağıdaki gibi hesaplayabiliriz:

$$q_1 \times q_2 = - \langle q_1, q_2 \rangle + q_1 \wedge q_2$$

(Bharathi ve Nagaraj 1987).

Tanım 2.1.15 (Temporal Kuaterniyon) $q = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3 + d\vec{e}_4 \in \mathbb{H}$ olmak üzere

$$\{q \in \mathbb{H} \mid q - \bar{q} = 0\}$$

şartını sağlayan kuaterniyonlara temporal kuaterniyon denir.(Bharathi ve Nagaraj 1987).

Temporal kuaterniyonları için skaler kısımları $S_q \neq 0$ ve vektörel kısımları $\vec{V}_q = 0$ dır. Bu iki özellik kullanılarak q_1 ve q_2 iki temporal kuaterniyonun kuaterniyon çarpımını aşağıdaki gibi hesaplayabiliriz:

$$q_1 \times q_2 = - \langle q_1, q_2 \rangle$$

(Bharathi ve Nagaraj 1987).

Lemma2.2 Uzaysal ve temporal kuaterniyonları kullanarak genel bir kuaterniyonu

$$q = \frac{1}{2} (q + \bar{q}) + \frac{1}{2} (q - \bar{q})$$

şeklinde yazabiliriz.

Tanım 2.1.16 (Küresel Eğriler) $\mathbb{E}^3$ de merkezi a ve yarıçapı r olan bir küre $\mathbb{S}^2$ ile gösterilir ve $\mathbb{S}^2 = \{P \in \mathbb{E}^3 \mid \langle \overrightarrow{P-a}, \overrightarrow{P-a} \rangle = r^2\}$ şeklinde tanımlanır. Burada $P \in \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{E}^3$, $P = (p_1, p_2, p_3)$, $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ için $\overrightarrow{P-a} = (a_1 - p_1, a_2 - p_2, a_3 - p_3)$ olup $(a_1 - p_1)^2 + (a_2 - p_2)^2 + (a_3 - p_3)^2 = r^2$ elde edilir.

$\mathbb{E}^3$ de verilen bir α eğrisi bir $\mathbb{S}^2$ küresi üzerinde yatıyor ise α eğrisine küresel eğri denir (Sabuncuoğlu 2001).

Tanım 2.1.17 (Helis Olma Şartı) $\mathbb{E}^3$ te $\alpha(s) : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi verilsin. κ ve τ , eğriliği ve burulması ve $\kappa \neq 0$ olmak üzere α eğrisinin helis olması için gerek ve yeter koşul $\frac{\tau}{\kappa}$ nın sabit olmasıdır (Sabuncuoğlu 2001).

Tanım 2.1.18 (CCR Eğri Olma Şartı) $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eğrisinin sıfırdan farklı tüm eğrilikleri için $\frac{k_{i+1}}{k_i}$ oranı sabit ise bu eğriye bir CCR eğrisi denir (Monterde 2004).



3. GENEL KUATERNİYONİK EĞRİLER

Bu bölümde öncelikle Nagaraj ve Bharathi tarafından $\mathbb{E}^3$ ve $\mathbb{E}^4$ uzaylarındaki kuaterniyonik eğrilerin Frenet- Serret formülleri vereceğiz. Daha sonra $\mathbb{E}^4$ uzayındaki bir kuaterniyonik eğri için Nagaraj ve Bharathi'nın kullandığı yöntemle benzer bir yolla kuaterniyonlar için genel bir kuaterniyonik çatı inşa edeceğiz. Bunun bir uygulaması olarak helisler için kuaterniyonların sağdan ve soldan çarpma özelliğini kullanarak Sağ Helis ve Sol Helis için iki ayrı çatıları tanımlayacağız ve bunların karakterizasyonları vereceğiz.

3.1 3-Boyutlu Uzayda Kuaterniyonik Eğriler

Tanım 3.1.1 (3-Boyutlu Uzayda Kuaterniyonik Eğriler) $\mathbb{R}$ nin bir $I = [0, 1]$ açığını alalım. $\{\beta \in \mathbb{H}, \beta + \bar{\beta} = 0\}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \beta : I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{H} \\ s &\longrightarrow \beta(s) = \beta_1(s)\vec{e}_1 + \beta_2(s)\vec{e}_2 + \beta_3(s)\vec{e}_3 \end{aligned} \quad (2)$$

s yay parametresi olmak $\beta(s)$ eğrisine $\mathbb{H}$ uzayında bir kuaterniyonik eğri denir.

Burada

$$\begin{aligned} h(t(s), t(s)) &= h(n(s), n(s)) = h(b(s), b(s)) = 1 \\ h(t(s), n(s)) &= h(t(s), b(s)) = h(n(s), b(s)) = 0 \end{aligned}$$

bulunur (Bharathi. ve Nagaraj 1987).

$\beta(s)$ eğrisinin Frenet çatısı $\{t(s), n(s), b(s)\}$ olsun. Burada $t(s)$, $\beta(s)$ eğrisinin tanjant vektörü $n(s)$, $\beta(s)$ eğrisinin birim normal vektörü $b(s)$, $\beta(s)$ eğrisinin birim binormal vektörüdür. $k(s)$, $r(s)$ sırasıyla $\beta(s)$ eğrisinin birinci eğriligi ve torsiyonu

olmak üzere $\beta(s)$ eğrisinin Frenet formülleri aşağıdaki gibi verilir,

$$\begin{aligned} t'(s) &= k(s)n(s), \\ n'(s) &= -k(s)t(s) + r(s)b(s), \\ b'(s) &= -r(s)n(s). \end{aligned} \tag{3}$$

$t(s) = \beta'(s)$ ve $k(s) = \|t'(s)\|$ dir (Bharathi ve Nagaraj 1987).

Teorem 3.1.1 $\beta = \beta(s)$, $\mathbb{E}^3$ 'de Frenet elemanları $\{t(s), n(s), b(s); k(s), r(s)\}$ olan bir uzaysal kuaterniyonik eğri olsun. Frenet elemanları $\{t(s), n(s), b(s); k(s), r(s)\}$ kullanılarak, Uzunoglu, Yaylı ve Gök'ün 2016 yılındaki çalışmalarına benzer yöntemle $\beta(s)$ eğrisi boyunca alternatif bir hareketli kuaterniyonik çatı oluşturabiliriz.

$\beta(s)$ eğrisinin $n(s)$, $c(s) = \frac{n'(s)}{\|n'(s)\|} = -\frac{k}{f}t + \frac{r}{f}b$ ve $w(s) = n(s) \times c(s) = \frac{r}{f}t + \frac{k}{f}b$ frenet vektörlerinin türevleri alınarak alternatif hareketli frenet çatı aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned} n'(s) &= f(s)c(s) \\ c'(s) &= -f(s)n(s) + g(s)w(s) \\ w'(s) &= -g(s)c(s) \end{aligned}$$

burada $f = \sqrt{k^2 + r^2}$ ve $g = \frac{k^2}{k^2 + r^2} \left(\frac{r}{k}\right)'$, $\gamma(s)$ eğrisinin alternatif hareketli frenet çatısının eğrilikleridir.

Ayrıca bu yeni alternatif hareketli kuaterniyonik frenet vektörleri,

$$h(n, n) = h(c, c) = h(w, w) = 1 \text{ ve } h(n, c) = h(n, w) = h(c, w) = 0$$

eşitliklerini sağlar.

3.2 4-Boyutlu Uzayda Kuaterniyonik Eğriler

Tanım 3.2.1 (4-Boyutlu Uzayda Kuaterniyonik Eğriler) Dört boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{R}^4$ birim kuaterniyonların uzayı $\mathbb{H}$ ile tanımlanır. $\mathbb{R}$ nin bir $I = [0, 1]$ aralığını

alalım ve $s \in I$ eğri boyunca yay uzunluğu parametresi olmak üzere

$$\begin{aligned} \gamma: I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{H} \\ s &\longrightarrow \gamma(s) = \gamma_0(s)\vec{e}_1 + \gamma_1(s)\vec{e}_2 + \gamma_2(s)\vec{e}_3 + \gamma_3(s)\vec{e}_4 \end{aligned} \quad (4)$$

$\gamma(s)$ eğrisine $\mathbb{H}$ te birim kuaterniyonik eğri denir.

$\gamma(s)$ eğrisinin Frenet çatısı aşağıdaki eşitlikler kullanılarak bulunur.

$$h(T(s), T(s)) = h(N_1(s), N_1(s)) = h(N_2(s), N_2(s)) = h(N_3(s), N_3(s)) = 1$$

ve

$$h(T, N_1) = h(T, N_2) = h(T, N_3) = h(N_1, N_2) = h(N_2, N_3) = 0$$

bulunur (Bharathi ve Nagaraj 1987).

$\gamma(s)$ eğrisinin Frenet çatısı $\{T(s), N_1(s), N_2(s), N_3(s)\}$ ve sıfırdan farklı eğrilikleri $\{K(s), k(s), (r - K)(s)\}$ olsun. Burada $T(s)$, $\gamma(s)$ eğrisinin tanjant vektörü, $N_1(s), N_2(s), N_3(s)$ $\gamma(s)$ eğrisinin birim normal vektörleridir. $K(s), k(s), (r - K)(s)$ sırasıyla $\gamma(s)$ eğrisinin birinci eğriliği, torsiyonu ve bitorsiyonu olmak üzere, $\gamma(s)$ eğrisinin Frenet formülleri aşağıdaki gibi verilir,

$$\begin{aligned} T'(s) &= K(s)N_1(s), \\ N_1'(s) &= -K(s)T(s) + k(s)N_2(s), \\ N_2'(s) &= -k(s)N_1(s) + (r - K)(s)N_3(s), \\ N_3'(s) &= -(r - K)(s)N_2(s). \end{aligned} \quad (5)$$

$T(s) = \gamma'(s)$ ve $K(s) = \|T'(s)\|$ dir.

$\gamma(s)$ eğrisinin Frenet formülleri $\mathbb{E}^3$ uzayındaki $\beta(s)$ eğrisinin Frenet formülleri kullanılarak elde edilir (Bharathi ve Nagaraj 1987).

Nagaraj ve Bharathi , çalışmalarında aşağıda verilen teori ile üçboyutlu uzaydaki $\beta(s)$ birim spatial kuaterniyonik eğrilerinin Serret-Frenet formüllerini kullanarak dört boyutlu uzayda bulunan $\gamma(s)$ eğrilerinin Serret-Frenet formülleri vermişlerdir. Bu ilişkiler sadece kuaterniyonlar için belirlenir (Bharathi ve Nagaraj 1987).

$\beta(s)$ birim spatial kuaterniyonik eğrisinin frenet elemanları $\{t(s), n(s), b(s); k(s), r(s)$ ve $\gamma(s)$ kuaterniyonik eğrisinin frenet elemanları $\{T(s), N_1(s), N_2(s), N_3(s); K(s), k(s), (r - K)(s)\}$ olmak üzere dört boyutlu uzayda tanımlanan $\gamma(s)$ kuaterniyonik eğrisi, üç boyutlu uzayda tanımlanan $\beta(s)$ birim spatial kuaterniyonik eğrisi ile ilişkilidir, çünkü birim uzaysal kuaterniyon $N_1(s) \times \bar{T}(s)$ Bharathi K. and Nagaraj M. 1987 yılındaki çalışmalarında $\beta(s)$ eğrisinin birim teğet vektörüne eşittir. Daha sonra, üç boyutlu uzaydaki $\beta(s)$ eğrisinin Frenet vektörleri ve eğrilik fonksiyonları kullanılarak, dört boyutlu uzaydaki $\gamma(s)$ kuaterniyonik eğrisinin diğer Frenet vektörleri ve eğrilikleri aşağıdaki gibi elde edilir Bu ilişkiler:

$$\begin{aligned} N_1(s) &= t(s) \times T(s), t(s) = N_1(s) \times \bar{T}(s), \\ N_2(s) &= n(s) \times T(s), n(s) = N_2(s) \times \bar{T}(s), \\ N_3(s) &= b(s) \times T(s), b(s) = N_3(s) \times \bar{T}(s), \\ h(T(s), T(s)) &= h(N_1(s), N_1(s)) = h(N_2(s), N_2(s)) = h(N_3(s), N_3(s)) = 1, \\ h(T(s), N_1(s)) &= h(T(s), N_3(s)) = h(N_1(s), N_2(s)) = h(N_2(s), N_3(s)) = 0 \end{aligned}$$

olarak elde edilmiştir (Bharathi ve Nagaraj 1987).

Şimdi bu ilişkilerin nasıl elde edildiğini gösterelim:

$T(s) = \gamma'(s)$, $K(s) = \|T'(s)\|$ olmak üzere,

$N_1(s) = \frac{T'(s)}{\|T'(s)\|}$ olarak tanımlansın. $T(s)$ nin türevini alınırsa,

$$T'(s) = K(s)N_1(s)$$

olarak bulunur.

$N_1(s) = t(s) \times T(s)$ eşitliğin türevi alınırsa,,

$$N_1'(s) = t'(s) \times T(s) + t(s) \times T'(s)$$

elde edilir.

Burada $t'(s) = k(s)n(s)$ ve $T'(s) = K(s)N_1(s)$ eşitlikleri yerine yazılırsa,

$$N_1'(s) = k(s)n(s) \times T(s) + t(s) \times K(s)N_1(s)$$

bulunur. Bu eşitlik düzenlenirse

$$N_1'(s) = -K(s)T(s) + k(s)N_2(s)$$

elde edilir.

$N_2(s) = n(s) \times T(s)$ eşitliğin türevi alınırsa

$$N_2'(s) = n'(s) \times T(s) + n(s) \times T'(s)$$

elde edilir.

Burada $n'(s) = k(s)t(s) + r(s)b(s)$ ve $T'(s) = K(s)N_1(s)$ eşitlikleri yerine yazılırsa,

$$N_2'(s) = (k(s)t(s) + r(s)b(s)) \times T(s) + n(s) \times K(s)N_1(s)$$

bulunur. Bu eşitlik düzenlenirse

$$N_2'(s) = -k(s)N_1(s) + (r(s) - K(s))N_3$$

elde edilir.

$N_3(s) = b(s) \times T(s)$ eşitliğin türevi alınırsa

$$N_3'(s) = b'(s) \times T(s) + b(s) \times T'(s)$$

elde edilir. Burada $b'(s) = -r(s)n(s)$ ve $T'(s) = K(s)N_1(s)$ eşitlikleri yerine yazılırsa,

$$N_3'(s) = -r(s)n(s) \times T(s) + K(s)b(s) \times t(s) \times T(s)$$

bulunur. Bu eşitlik düzenlenirse

$$N_3'(s) = -(r - K)(s)N_2(s)$$

elde edilir.(Bharathi ve Nagaraj 1987).

Burada $\gamma(s)$ kuaterniyonik eğrisinin torsiyonu, $\beta(s)$ birim spatial kuaterniyonik eğrisinin birinci eğriligidir, $\gamma(s)$ kuaterniyonik eğrisinin bitorsiyonu $(r - K)$ ve $r(s)$, $\beta(s)$ birim spatial kuaterniyonik eğrisinin torsiyonu ve $K(s)$ ise $\gamma(s)$ kuaterniyonik eğrisinin birinci eğriliği olduğunu vurgulamak istiyoruz.

Teorem 3.2.1 $\mathbb{R}$ nin bir $I = [0, 1]$ aralığı ve $s \in I$ kuaterniyonik eğri boyunca yay uzunluğu parametresi olmak üzere

$$\begin{aligned} \gamma : I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{H} \\ s &\longrightarrow \gamma(s) = \gamma_0(s)\vec{e}_1 + \gamma_1(s)\vec{e}_2 + \gamma_2(s)\vec{e}_3 + \gamma_3(s)\vec{e}_4 \end{aligned} \quad (6)$$

Frenet vektörleri $\{T(s), N_1(s), N_2(s), N_3(s)\}$ ve sıfırdan farklı eğrilikleri $\{K(s), k(s), (r - K)(s)\}$ olmak üzere $\gamma(s)$ kuaterniyonik eğrisinin Frenet formülleri şu şekilde gösterilir:

$$\begin{aligned} T'(s) &= K(s)N_1(s), \\ N_1'(s) &= -K(s)T(s) + k(s)N_2(s), \\ N_2'(s) &= -k(s)N_1(s) + (r - K)(s)N_3(s), \\ N_3'(s) &= -(r - K)(s)N_2(s). \end{aligned}$$

Burada $T(s)=\gamma'(s)$ bir birim tanjant vektörü, $N_1(s)$, $N_2(s)$, $N_3(s)$ $\gamma(s)$ eğrisinin birim normal vektörleridir. $K(s) = \|T'(s)\|$, $k(s)$, $(r - K)(s)$ sırasıyla $\gamma(s)$ kuaterniyonik eğrisinin birinci eğriliği, torsiyonu ve bitorsiyonudur.(Bharathi ve Nagaraj 1987).

Önerme: 3.2.1 F. Aksoyak, *A New Type of Quaternionic Frame in $\mathbb{R}^4$* çalışmasında üç boyutlu uzayda bulunan $\beta(s)$ birim spatial kuaterniyonik eğrisinin Serret- Frenet formüllerini kullanarak dört boyutlu uzay tanımlanan $\gamma(s)$ kuaterniyonik eğrisinin Serret-Frenet formüllerini ve Frenet elemanlarını Nagaraj ve Bharathi'nin kullandığı yöntemle benzer bir yöntem kullanarak aşağıdaki ilişkileri vermiştir :

Üç boyutlu uzayda, Frenet vektörleri $\{t(s), n(s), b(s)\}$ ve sıfırdan farklı eğrilikleri $\{k(s), r(s)\}$ olan $\beta(s)$ birim spatial kuaterniyonik eğrisi ve dört boyutlu uzayda Frenet vektörleri $T(s), N_1(s), N_2(s), N_3(s)\}$ ve sıfırdan farklı eğrilikleri $\{K(s), k(s), (r - K)(s)\}$ olan $\gamma(s)$ kuaterniyonik eğrisi olsun.

Dört boyutlu uzayda tanımlanan $\gamma(s)$ kuaterniyonik eğrisi, üç boyutlu uzayda tanımlanan $\beta(s)$ spatial kuaterniyonik eğrisi ile ilişkilidir, çünkü $N_1(s) \times \bar{T}(s)$ birim spatial kuaterniyonu , $\beta(s)$ birim spatial kuaterniyonik eğrisinin birim binormaline eşittir. Daha sonra, üç boyutlu uzaydaki $\beta(s)$ eğrisinin Frenet vektörleri ve eğrilik fonksiyonları kullanılarak, dört boyutlu uzaydaki $\gamma(s)$ kuaterniyonik eğrisinin diğer Frenet vektörleri ve eğrilikleri aşağıdaki gibi elde edilir Bu ilişkiler:

$$\begin{aligned} N_1(s) &= b(s) \times T(s), b(s) = N_1(s) \times \bar{T}(s), \\ N_2(s) &= n(s) \times T(s), n(s) = N_2(s) \times \bar{T}(s), \\ N_3(s) &= t(s) \times T(s), t(s) = N_3(s) \times \bar{T}(s), \\ h(T(s), T(s)) &= h(N_1(s), N_1(s)) = h(N_2(s), N_2(s)) = h(N_3(s), N_3(s)) = 1, \\ h(T(s), N_1(s)) &= h(T(s), N_3(s)) = h(N_1(s), N_2(s)) = h(N_2(s), N_3(s)) = 0. \end{aligned}$$

Şimdi bu ilişkilerin nasıl elde edildiğini gösterelim:

$T(s)=\gamma'(s)$ ve $K(s) = \|T'(s)\|$ olmak üzere,

$N_1(s) = \frac{T'(s)}{\|T'(s)\|}$ olarak tanımlansın. $T(s)$ nin türevini alırsa

$$T'(s) = K(s)N_1(s)$$

olarak bulunur.

$N_1(s) = b(s) \times T(s)$ eşitliğin türevi alırsa

$$N_1'(s) = b'(s) \times T(s) + b(s) \times T'(s)$$

elde edilir.

Burada $b'(s) = -r(s)n(s)$ ve $T'(s) = K(s)N_1(s)$ eşitlikleri yerine yazılırsa,

$$N_1'(s) = -r(s)n(s) \times T(s) + b(s) \times K(s)N_1(s)$$

bulunur. Bu eşitlik düzenlenirse

$$N_1'(s) = -K(s)T(s) - r(s)N_2(s)$$

elde edilir.

$N_2(s) = n(s) \times T(s)$ eşitliğin türevi alırsa

$$N_2'(s) = n'(s) \times T(s) + n(s) \times T'(s)$$

elde edilir.

Burada $n'(s) = k(s)t(s) + r(s)b(s)$ ve $T'(s) = K(s)N_1(s)$ eşitlikleri yerine yazılırsa,

$$N_2'(s) = (k(s)t(s) + r(s)b(s)) \times T(s) + n(s) \times K(s)N_1(s)$$

bulunur. Bu eşitlik düzenlenirse

$$N_2'(s) = r(s)N_1(s) + (K(s) - k(s))N_3$$

elde edilir.

$N_3(s) = t(s) \times T(s)$ eşitliğin türevi alınırsa

$$N_3'(s) = t'(s) \times T(s) + t(s) \times T'(s)$$

elde edilir.

Burada $t'(s) = k(s)n(s)$ ve $T'(s) = K(s)N_1(s)$ eşitlikleri yerine yazılırsa,

$$N_3'(s) = k(s)n(s) \times T(s) + t(s) \times K(s)N_1(s)$$

bulunur. Bu eşitlik düzenlenirse

$$N_3'(s) = -(K(s) - k(s))N_2(s)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} T'(s) &= K(s)N_1(s), \\ N_1'(s) &= -K(s)T(s) - r(s)N_2(s), \\ N_2'(s) &= rN_1(s) + (K - k)(s)N_3(s), \\ N_3'(s) &= -(K - k)(s)N_2(s). \end{aligned} \tag{7}$$

(Aksoyak 2019).

Bizde çalışmamızın bu kısmında, Nagaraj-Bharathi ve F. Aksoyak'ın çalışmalarına benzer yöntemle dört boyutlu uzayda tanımlanan kuaterniyonik eğriler için yeni alternatif bir çatı tanımlayacağız. Biz üç boyutlu uzaydaki ve dört boyutlu uzaydaki $\beta(s)$ ve $\gamma(s)$ eğrilerinin eğrilikleri arasındaki ilişkiyi Nagaraj-Bharathi ve F. Aksoyak'ın çalışmalarında kullandığı yöntemlere benzer bir yöntemle ve Teorem

3.1.1'den yararlanarak şu şekilde belirledik:

Teorem 3.2.2 Üç boyutlu uzayda, Frenet vektörleri $\{n(s), c(s), w(s)\}$ ve sıfırdan farklı eğrilikleri $\{f(s), g(s)\}$ olan $\beta(s)$ birim spatial kuaterniyonik eğrisi ve dört boyutlu uzayda Frenet vektörleri $\{T(s), N_1(s), N_2(s), N_3(s)\}$ ve sıfırdan farklı eğrilikleri $\{K(s), k(s), (r - K)(s)\}$ olan $\gamma(s)$ kuaterniyonik eğrisi olsun.

Dört boyutlu uzayda tanımlanan $\gamma(s)$ kuaterniyonik eğrisi, üç boyutlu uzayda tanımlanan $\beta(s)$ spatial kuaterniyonik eğrisi ile ilişkilidir, çünkü $N_1(s) \times \bar{T}(s)$ birim spatial kuaterniyonu, $\beta(s)$ eğrisinin birim normaline eşit olsun. Daha sonra, üç boyutlu uzaydaki $\beta(s)$ eğrisinin Frenet vektörleri ve eğrilik fonksiyonları kullanılarak, dört boyutlu uzaydaki $\gamma(s)$ kuaterniyonik eğrisinin diğer Frenet vektörleri ve eğrilikleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} N_1(s) &= n(s) \times T(s), n(s) = N_1(s) \times \bar{T}(s), \\ N_2(s) &= c(s) \times T(s), c(s) = N_2(s) \times \bar{T}(s), \\ N_3(s) &= w(s) \times T(s), w(s) = N_3(s) \times \bar{T}(s), \\ f(s) &= \sqrt{k^2(s) + r^2(s)} \\ g(s) &= \sigma f(s), \quad \sigma = \frac{k^2(s)}{(k^2(s) + r^2(s))^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{r(s)}{k(s)} \right)', \\ h(T(s), T(s)) &= h(N_1(s), N_1(s)) = 1, \\ h(N_2(s), N_2(s)) &= h(N_3(s), N_3(s)) = 1, \\ h(T(s), N_1(s)) &= h(T(s), N_2(s)) = h(T(s), N_3(s)) = 0 \\ h(N_1(s), N_2(s)) &= h(N_2(s), N_3(s)) = 0. \end{aligned}$$

Bu denklemler yardımıyla oluşan yeni çatımızın Frenet formüllerinin nasıl bulunduğu aşağıda gösterelim:

$$T(s) = \gamma'(s) \quad K(s) = \|T'(s)\| \text{ olmak üzere,}$$

$N_1(s) = \frac{T'(s)}{\|T'(s)\|}$ olarak tanımlansın. $T(s)$ nin türevini alırsa

$$T'(s) = K(s)N_1(s)$$

olarak bulunur.

$N_1(s) = n(s) \times T(s)$ eşitliğin türevi alırsa

$$N_1'(s) = n'(s) \times T(s) + n(s) \times T'(s)$$

elde edilir. $f(s) = \sqrt{k^2(s) + r^2(s)}$ olmak üzere burada $n'(s) = f(s)c(s)$ ve $T'(s) = K(s)N_1(s)$ eşitlikleri yerine yazılırsa,

$$N_1'(s) = f(s)c(s) \times T(s) + n(s) \times K(s)N_1(s)$$

bulunur. Bu eşitlik düzenlenirse

$$N_1'(s) = -K(s)T(s) + f(s)N_2(s)$$

elde edilir.

$N_2(s) = c(s) \times T(s)$ eşitliğin türevi alırsa

$$N_2'(s) = c'(s) \times T(s) + c(s) \times T'(s)$$

elde edilir.

$g(s) = \sigma f(s)$ ve $\sigma = \frac{k^2(s)}{(k^2(s) + r^2(s))^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{r(s)}{k(s)} \right)'$ olmak üzere burada

$$c'(s) = -f(s)n(s) + g(s)w(s)veT'(s) = K(s)N_1(s)$$

eşitlikleri yerine yazılırsa,

$$N_2'(s) = -f(s)n(s) + g(s)w(s) \times T(s) + c(s) \times K(s)N_1(s)$$

bulunur. Bu eşitlik düzenlenirse

$$N_2'(s) = -f(s)N_1(s) + (g(s) - K(s))N_3$$

elde edilir.

$N_3(s) = w(s) \times T(s)$ eşitliğin türevi alınır

$$N_3'(s) = w'(s) \times T(s) + w(s) \times T'(s)$$

elde edilir.

Burada $w'(s) = -g(s)c(s)$ ve $T'(s) = K(s)N_1(s)$ eşitlikleri yerine yazılırsa,

$$N_3'(s) = -g(s)c(s) + K(s)T(s) + w(s) \times K(s)N_1(s)$$

bulunur. Bu eşitlik düzenlenirse

$$N_3'(s) = -(g(s) - K(s))N_2(s)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} T'(s) &= K(s)N_1(s), \\ N_1'(s) &= -K(s)T(s) + f(s)N_2(s), \\ N_2'(s) &= -f(s)N_1(s) + (g(s) - K(s))N_3(s), \\ N_3'(s) &= -(g(s) - K(s))N_2(s). \end{aligned} \tag{8}$$

3.3. 4-Boyutlu Uzaydaki Kuaterniyonik Eğriler İçin Ana Teorem

Teorem 3.3.1 (Ana Teorem) $X(s)$, s yay parametresine bağlı düzgün bir birim kuaterniyonik fonksiyon ve $Y(s) = \frac{1}{\|X'(s)\|}X'(s)$ de, $X(s)$ tarafından üretilen bir

birim kuaterniyon olsun.

$$\begin{aligned} \gamma: I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{H} \\ s &\longrightarrow \gamma(s) = \gamma_0(s)\vec{e}_1 + \gamma_1(s)\vec{e}_2 + \gamma_2(s)\vec{e}_3 + \gamma_3(s)\vec{e}_4 \end{aligned}$$

dört boyutlu uzayda tanımlanan $\gamma(s)$ kuaterniyonik eğrisi, üç boyutlu uzayda tanımlanan $\beta_i(s) = \int \xi_i(s)ds$ ($i = R$ ve $i = L$) birim spatial kuaterniyonik eğrisi ile bağlantılıdır. $\beta_i(s) = \int \xi_i(s)ds$ eğrisi $i = R$ ve $i = L$ için sırasıyla $\xi_R = Y(s) \times \bar{X}(s)$ ve $\xi_L = \bar{X}(s) \times Y(s)$ olarak elde edilir. Yani $Y(s)$ fonksiyonu ile $\bar{X}(s)$ fonksiyonu sırasıyla sağ ve sol kuaterniyon çarpımı kullanılarak $\gamma(s)$ kuaterniyonik eğrisi boyunca $X(s)$ fonksiyonu yardımıyla iki farklı tipte Frenet formülü oluşturabiliriz. Buradaki en önemli nokta $\left\{ \xi_i(s), \eta_i(s) = \frac{\xi'_i(s)}{\xi_i(s)}, \varrho_i(s) = \xi_i(s) \times \eta_i(s) \right\}$, $\beta_i(s)$ birim kuaterniyonik eğrisinin genel hareketli ortonormal kuaterniyonik çatısı olmasıdır.

Tip I (Sağ Çarpım Frenet Çatısı)

$$\begin{aligned} X'(s) &= r_3(s)Y(s), \\ Y'(s) &= -r_3(s)X(s) + r_1(s)Z_R(s), \\ Z'_R(s) &= -r_1(s)Y(s) + (r_2 - r_3)(s)W_R(s), \\ W'_R(s) &= -(r_2 - r_3)(s)Z_R(s). \end{aligned} \tag{9}$$

$\xi_R(s) = Y(s) \times \bar{X}(s)$ koşulunu sağlayan $\gamma(s)$ kuaterniyonik eğrisi boyunca $\{X(s), Y(s), Z(s) = \eta_R(s) \times X(s), W(s) = \varrho_R(s) \times X(s)\}$ ortonormal çatısı yazılabilir. $\gamma(s)$ kuaterniyonik eğrisinin sıfırdan farklı eğrilikleri $r_3(s) = \|X'(s)\|$ birinci eğriligi, $r_1(s)$ torsiyonu ve $(r_2 - r_3)(s)$ ise bitorsiyonudur. Burada önemli bir nokta vardır ki bu da $r_1(s)$ ve $r_2(s)$ eğrilikleri sırasıyla $\beta_R(s) = \int \xi_R(s)ds$ birim spatial kuaterniyon eğrisinin eğriligi ve torsiyonudur.

Tip II (Sol Çarpım Frenet Çatısı)

$$\begin{aligned}
X'(s) &= \tilde{r}_3(s)Y(s), \\
Y'(s) &= -\tilde{r}_3(s)X(s) + \tilde{r}_1(s)Z_L(s), \\
Z'_L(s) &= -\tilde{r}_1(s)Y(s) + (\tilde{r}_2 + \tilde{r}_3)(s)W_L(s), \\
W'_L(s) &= -(\tilde{r}_2 + \tilde{r}_3)(s)Z_L(s).
\end{aligned} \tag{10}$$

$\xi_L(s) = \bar{X}(s) \times Y(s)$ koşulunu sağlayan $\gamma(s)$ kuaterniyonik eğrisi boyunca $\{X(s), Y(s), Z(s) = X(s) \times \eta_L(s), W(s) = X(s) \times \varrho_L(s)\}$ ortonormal çatısı yazılabilir. $\gamma(s)$ kuaterniyonik eğrisinin sıfırdan farklı eğrilikleri $\tilde{r}_3(s) = \|X'(s)\|$ birinci eğriligi, $\tilde{r}_1(s)$ torsiyonu ve $(\tilde{r}_2 + \tilde{r}_3)(s)$ ise bitorsiyonudur. Burada önemli bir nokta vardır ki bu da $\tilde{r}_1(s)$ ve $\tilde{r}_2(s)$ eğrilikleri sırasıyla $\beta_L(s) = \int \xi_L(s)ds$ birim spatial kuaterniyon eğrisinin eğriligi ve torsiyonudur.

İspat. $\gamma(s)$, s yay uzunluğu parametresi ile tanımlı düzgün bir eğri ve $X(s)$, 4-boyutlu uzayda s yay uzunluğu parametresi ile tanımlı düzgün bir birim kuaterniyonik fonksiyon olsun. $X(s)$ birim kuaterniyonik fonksiyon olduğundan $\|X(s)\| = 1$ dir. $\gamma(s)$ eğrisi, $\gamma(s) = \int X(s)ds$ yani $\gamma'(s) = X(s)$ olarak belirlenebilir. Kuaterniyonik iç çarpım tanımı kullanılarak

$$X(s) \times \bar{X}(s) = 1 \tag{11}$$

olarak bulunur. Bu eşitliğin s yay uzunluğu parametresine göre türevi alınırsa,

$$X'(s) \times \bar{X}(s) + X(s) \times \bar{X}'(s) = 0. \tag{12}$$

elde edilir. Bulduğumuz bu son eşitlik iki önemli sonuç verir:

i) $X'(s)$ ile $X(s)$ ortogonaldır yani $h(X(s), X'(s)) = 0$ dır.

ii) $X'(s) \times \bar{X}(s)$ düzgün birim spatial kuaterniyondur.

$\gamma(s)$ eğrisinin birinci eğriliği $r_3(s) = \|X'(s)\|$ olarak tanımlanır. $\mathbb{E}^4$ uzayında s yay uzunluğu parametresine bağlı yeni düzgün birim kuaterniyon olarak

$$Y(s) = \frac{1}{\|X'(s)\|} X'(s) = \frac{1}{r_3(s)} X'(s) \text{ şeklinde yazılabilir. Bulduğumuz bu eşitliği}$$

$$X'(s) = \|X'(s)\| Y(s) = r_3(s) Y(s), \quad \|Y(s)\| = 1 \quad (13)$$

şeklinde yazabiliriz.

(12) ve (13) denklemlerinden

$$Y(s) \times \bar{X}(s) + X(s) \times \bar{Y}(s) = 0. \quad (14)$$

söylenebilir. (14) denklemi bize $Y(s)$ ile $X(s)$ birim kuaterniyonik fonksiyonlarının ortogonal olduğunu gösterir yani $h(Y(s), X(s)) = 0$ ve $Y(s) \times \bar{X}(s)$ veya $\bar{X}(s) \times Y(s)$ eşitliklerinin bir spatial birim kuaterniyon olduğunu gösterir. Buradan $\xi_R(s) = Y(s) \times \bar{X}(s)$ veya $\xi_L(s) = \bar{X}(s) \times Y(s)$ gibi iki birim spatial kuaterniyon belirlenebilir. Bu iki birim spatial kuaterniyon yardımıyla $\gamma(s)$ eğrisi için iki farklı çatı inşa edebiliriz. İspatında devamında Tip I ve Tip II de tanımlanan çatıların inşasını vereceğiz.

i) Tip I'de tanımlanan Sağ Çarpım Frenet Çatısını aşağıdaki gibi inşa edelim:

$X(s)$ ve $Y(s)$, 4-boyutlu uzayında birim spatial kuaterniyon oldukları için

$\xi_R(s) = Y(s) \times \bar{X}(s)$ bir birim spatial kuaterniyondur. $\gamma(s)$ eğrisi boyunca

$\xi_R(s) = Y(s) \times \bar{X}(s)$ olduğundan

$$Y(s) = \xi_R(s) \times X(s) \quad (15)$$

şeklinde yazılabilir. Böylelikle 3-boyutlu uzayda yeni bir birim spatial kuaterniyon

eğri olarak $\beta(s) = \int \xi_R(s)ds$ belirleyebiliriz. 3–boyutlu uzaydaki $\beta(s)$ kuaterniyonik eğrisi için Frenet formülleri oluşturmak için Bharathi K. ve Nagaraj M. 1987 deki çalışmalarında benzer yöntemleri kullanarak yeni Frenet çatımını $\left\{ \xi_R(s), \eta_R(s) = \frac{\xi'_R(s)}{\xi'_R(s)}, \varrho_R(s) = \xi_R(s) \times \eta_R(s) \right\}$ inşa edebiliriz. Yeni Frenet çatımımız

$$\begin{bmatrix} \xi'_R(s) \\ \eta'_R(s) \\ \varrho'_R(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & r_1(s) & 0 \\ -r_1(s) & 0 & r_2(s) \\ 0 & -r_2(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_R(s) \\ \eta_R(s) \\ \varrho_R(s) \end{bmatrix} \quad (16)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $r_1(s) = \|\xi'_R(s)\|$ ve $r_2(s)$, 3–boyutlu uzaydaki $\beta(s)$ eğrisinin sırasıyla eğriligi ve torsiyonudur.

Şimdiye kadar $X(s) = \gamma'(s)$ ve $Y(s) = Y(s) = \xi_R(s) \times X(s)$ olarak ifade edildi. Buradan $Y(s) = \xi_R(s) \times X(s)$ eşitliğinin türevini alırsak ve (16) daki denklemleri kullanırsak,

$$\begin{aligned} Y'(s) &= \xi'_R(s) \times X(s) + \xi_R(s) \times X'(s) \\ &= r_1(s)\eta_R(s) \times X(s) + \xi_R(s) \times r_3(s)Y(s) \\ &= r_1(s)\eta_R(s) \times X(s) + r_3(s)\xi_R(s) \times Y(s) \end{aligned} \quad (17)$$

olarak bulunur.

Eşitlik (15) deki gibi $Z(s) = \eta_R(s) \times X(s)$ birim ve düzgün kuaterniyonu tanımlarsak ve bunu (17) de yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} Y'(s) &= r_1(s)\eta_R(s) \times X(s) + r_3(s)\xi_R(s) \times Y(s) \\ &= -r_3(s)X(s) + r_1(s)Z(s) \end{aligned}$$

bulunur. Burada $Z(s)$ kuaterniyonu hakkında,

$$h(X(s), Z(s)) = h(Y(s), Z(s)) = 0 \text{ ve } h(Z(s), Z(s)) = 1$$

olduğu görülür ve bu da bize $Z(s)$ kuaterniyonun birim kuaterniyon olduğunu ve $X(s)$ ve $Y(s)$ kuaterniyonları ile ortogonal olduğunu gösterir.

$Z(s) = \eta_R(s) \times X(s)$ eşitliğinin türevini alırsak,

$Z'(s) = \eta'_R(s) \times X(s) + \eta_R(s) \times X'(s)$ bulunur.

$\eta'_R(s) = -r_1(s)\xi_R(s) + r_2(s)\varrho_R(s)$, $X'(s) = r_3(s)Y(s)$ ve $Y(s) = \xi_R(s) \times X(s)$ eşitlikleri yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} Z'_R(s) &= (-r_1(s)\xi_R(s) + r_2(s)\varrho_R(s)) \times X(s) + \eta_R(s) \times (r_3(s)Y(s)) \\ &= -r_1(s)\xi_R(s) \times X(s) + r_2(s)\varrho_R(s) \times X(s) + r_3(s)(\eta_R(s) \times \xi_R(s) \times X(s)) \end{aligned} \quad (18)$$

bulunur ve burada yeni birim ve düzgün bir kuaterniyon $W_R(s) = \varrho_R(s) \times X(s)$ şeklinde tanımlanır. Bu kuaterniyon (18) denkleminde yerine yazılırsa

$$Z'_R(s) = -r_1(s)Y(s) + (r_2 - r_3)(s)W_R(s)$$

elde edilir.

Yukarıda tanımlanan $W_R(s) = \varrho_R(s) \times X(s)$ kuaterniyonunun türevi alınır

$W'_R(s) = \varrho'_R(s) \times X(s) + \varrho_R(s) \times X'(s)$ bulunur.

$\varrho'_R(s) = -r_2(s)\eta_R(s)$ ve $X'(s) = r_3(s)Y(s)$ eşitlikleri yerine yazılırsa,

$W'_R(s) = -r_2(s)\eta_R(s) \times X(s) + r_3(s)\varrho_R(s) \times Y(s)$ elde edilir.

$Z_R(s) = \eta_R(s) \times X(s)$ ve $\varrho_R(s) = \xi_R(s) \times \eta_R(s)$ eşitlikleri yerine yazılırsa,

$$W'_R(s) = -(r_2 - r_3)(s)Z_R(s)$$

elde edilir.

Sonuç olarak $\gamma(s)$ eğrisinin, 4-boyutlu uzayda yeni Frenet elemanları $\{X(s), Y(s), Z_R(s), W_R(s)\}$ olmak üzere Tip I Sağ Çarpım Frenet Çatısı için, Frenet formülleri aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned} X'(s) &= r_3(s)Y(s), \\ Y'(s) &= -r_3(s)X(s) + r_1(s)Z_R(s), \\ Z'_R(s) &= -r_1(s)Y(s) + (r_2 - r_3)(s)W_R(s), \\ W'_R(s) &= -(r_2 - r_3)(s)W_R(s). \end{aligned} \tag{19}$$

Böylece Tip I'de tanımlanan Sağ Çarpım Frenet Çatısını için teoremin ispatı sağlanmıştır.

ii) Tip II de tanımlanan Sol Çarpım Frenet Çatısını Tip I deki yöntemlere benzer şekilde inşa edelim:

$X(s)$ ve $Y(s)$, 4-boyutlu uzayında birim spatial kuaterniyon oldukları için $\xi_L(s) = \bar{X}(s) \times Y(s)$ bir birim spatial kuaterniyondur. $\gamma(s)$ eğrisi boyunca $\xi_L(s) = \bar{X}(s) \times Y(s)$ olduğundan

$$Y(s) = X(s) \times \xi_L(s) \tag{20}$$

şeklinde yazılabilir. Böylelikle 3-boyutlu uzayda yeni bir birim spatial kuaterniyon eğri olarak $\beta(s) = \int \xi_L(s)ds$ belirleyebiliriz. 3-boyutlu uzaydaki $\beta(s)$ kuaterniyonik eğrisi için Frenet formülleri oluşturmak için Bharathi K. and Nagaraaj M. 1987'deki çalışmalarında benzer yöntemleri kullanarak yeni Frenet çatımızı

$\left\{ \xi_L(s), \eta_L(s) = \frac{\xi'_L(s)}{\xi'_L(s)}, \varrho_L(s) = \xi_L(s) \times \eta_L(s) \right\}$ inşa edebiliriz. Yeni Frenet çatımızı

$$\begin{bmatrix} \xi'_L(s) \\ \eta'_L(s) \\ \varrho'_L(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \hat{r}_1(s) & 0 \\ -\hat{r}_1(s) & 0 & \hat{r}_2(s) \\ 0 & -\hat{r}_2(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_L(s) \\ \eta_L(s) \\ \varrho_L(s) \end{bmatrix} \tag{21}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $\hat{r}_1(s) = \|\xi'_L(s)\|$ ve $r_2(s)$, 3-boyutlu uzaydaki $\beta_L(s)$ eğrisinin sırasıyla eğriliği ve torsiyonudur.

Şimdiye kadar $X(s) = \gamma'(s)$ ve $Y(s) = X(s) \times \xi_L(s)$ olarak ifade edildi. Buradan $Y(s) = X(s) \times \xi_L(s)$ eşitliğinin türevini alırsak ve (21) deki denklemleri kullanırsak,

$$\begin{aligned} Y'(s) &= X'(s) \times \xi_L(s) + X(s) \times \xi'_L(s) \\ &= \hat{r}_3(s)Y(s) \times \xi_L(s) + X(s) \times \hat{r}_1(s)\eta_L(s) \\ &= -\hat{r}_3(s)(Y(s) \times \xi_L(s)) + \hat{r}_1(s)X(s) \times \eta_L(s) \end{aligned} \quad (22)$$

olarak bulunur.

Eşitlik (20) deki gibi $Z_L(s) = X(s) \times \eta_L(s)$ birim ve düzgün kuaterniyonu tanımlarsak ve bunu (22) da yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} Y'(s) &= -\hat{r}_3(s)(Y(s) \times \xi_L(s)) + \hat{r}_1(s)X(s) \times \eta_L(s) \\ &= -\hat{r}_3(s)X(s) + \hat{r}_1(s)Z_L(s) \end{aligned}$$

bulunur. Burada $Z_L(s)$ kuaterniyonu hakkında,

$$h(X(s), Z_L(s)) = h(Y(s), Z_L(s)) = 0 \text{ ve } h(Z_L(s), Z_L(s)) = 1$$

olduğu görülür ve bu da bize $Z_L(s)$ kuaterniyonun birim kuaterniyon olduğunu ve $X(s)$ ve $Y(s)$ kuaterniyonları ile ortogonal olduğunu gösterir.

$Z_L(s) = X(s) \times \eta_L(s)$ eşitliğinin türevini alırsak,

$$Z'_L(s) = X'(s) \times \eta_L(s) + X(s) \times \eta'_L(s) \text{ bulunur.}$$

$$\eta'_L(s) = -\hat{r}_1(s)\xi_L(s) + \hat{r}_2(s)\varrho_L(s), \quad X'(s) = \hat{r}_3(s)Y(s) \text{ ve } Y(s) = X(s) \times \xi_L(s)$$

eşitlikleri yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} Z'_L(s) &= \hat{r}_3(s) (Y(s) \times \eta_L(s)) + X(s) \times (-\hat{r}_1(s)\xi_L(s) + \hat{r}_2(s)\varrho_L(s)) \quad (23) \\ &= \hat{r}_3(s) \times Y(s) - \hat{r}_1(s) (X(s) \times \xi_L(s)) + \hat{r}_2(s) (X(s) \times \varrho_L(s)) \end{aligned}$$

bulunur ve burada yeni birim ve düzgün bir kuaterniyon $W_L(s) = X(s) \times \varrho_L(s)$ şeklinde tanımlanır. Bu kuaterniyon (23) denkleminde yerine yazılırsa

$$Z'_L(s) = -\tilde{r}_1(s)\tilde{Y}(s) + (\tilde{r}_2 + \tilde{r}_3)(s)\tilde{W}_L(s)$$

elde edilir.

Yukarıda tanımlanan $W_L(s) = X(s) \times \varrho_L(s)$ kuaterniyonunun türevi alınır

$$W'_L(s) = X'(s) \times \varrho_L(s) + X(s) \times \varrho'_L(s) \text{ bulunur.}$$

$$\varrho'_L(s) = -\hat{r}_2(s)\eta_L(s) \text{ ve } X'(s) = \hat{r}_3(s)Y(s) \text{ eşitlikleri yerine yazılırsa,}$$

$$W'_L(s) = \hat{r}_3(s)Y(s) \times \varrho_L(s) + X(s) \times -\hat{r}_2(s)\eta_L(s) \text{ elde edilir.}$$

$$Z_L(s) = X(s) \times \eta_L(s) \text{ ve } \varrho_L(s) = \eta_L(s) \times \xi_L(s) \text{ eşitlikleri yerine yazılırsa,}$$

$$W'_L(s) = -(\hat{r}_2 + \hat{r}_3)(s)W_L(s)$$

elde edilir.

Sonuç olarak $\gamma(s)$ eğrisinin, 4-boyutlu uzayda yeni Frenet elemanları

$\{X(s), Y(s), Z_L(s), W_L(s)\}$ olmak üzere Tip II Sol Çarpım Frenet Çatısı için, Frenet

formüllerini aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned}
X'(s) &= \tilde{r}_3(s)Y(s), \\
Y'(s) &= -\tilde{r}_3(s)X(s) + \tilde{r}_1Z(s), \\
Z'_L(s) &= -\tilde{r}_1(s)Y(s) + (\tilde{r}_2 + \tilde{r}_3)(s)W_L(s), \\
W'_L(s) &= -(\tilde{r}_2 + \tilde{r}_3)(s)W_L(s).
\end{aligned} \tag{24}$$

Böylece Tip II'de tanımlanan Sol Çarpım Frenet Çatısını için teoremin ispatı sağlanmıştır.

Yukarıda verilen Ana Teorem için üç farklı sonuç ortaya çıkar:

i) Eğer Ana teoremde 4-boyutlu uzayda tanımlanan $\gamma(s)$ eğrisi için, $X(s)$ kuaterniyonik fonksiyonu yerine $\gamma(s)$ eğrisinin teğet vektörü olan $T(s)$ ve üç boyutlu uzay tanımlanan $\beta(s)$ eğrisi için $\xi_i(s)$ kuaterniyonu için $\beta(s)$ eğrisinin $t(s)$, teğet vektörü yazılırsa, Bharathi ve Nagaraj'ın bulduğu aşağıdaki Frenet Çatısı elde edilir:

$$\begin{aligned}
T'(s) &= K(s)N_1(s), \\
N'_1(s) &= -K(s)T(s) + k(s)N_2(s), \\
N'_2(s) &= -k(s)N_1(s) + (r - K)(s)N_3(s), \\
N'_3(s) &= -(r - K)(s)N_2(s).
\end{aligned}$$

ii) Eğer Ana teoremde 4-boyutlu uzayda tanımlanan $\gamma(s)$ eğrisi için, $X(s)$ kuaterniyonik fonksiyonu yerine $\gamma(s)$ eğrisinin teğet vektörü olan $T(s)$ ve üç boyutlu uzay tanımlanan $\beta(s)$ eğrisi için $\xi_i(s)$ kuaterniyonu için $\beta(s)$ eğrisinin $n(s)$, normal vektörü yazılırsa, F. Aksoyak, *A New Type of Quaternionic Frame in $\mathbb{R}^4$* çalışmasındaki aşağıdaki Frenet Çatısı elde edilir:

$$\begin{aligned}
T'(s) &= K(s)N_1(s), \\
N'_1(s) &= -K(s)T(s) - r(s)N_2(s), \\
N'_2(s) &= rN_1(s) + (K - k)(s)N_3(s), \\
N'_3(s) &= -(K - k)(s)N_2(s).
\end{aligned} \tag{25}$$

iii) Son olarak teorem 2 de bulduğumuz yeni çatı için, eğer Ana teoremden 4-boyutlu uzayda tanımlanan $\gamma(s)$ eğrisi için, $X(s)$ kuaterniyonik fonksiyonu yerine $\gamma(s)$ eğrisinin teğet vektörü olan $T(s)$ ve üç boyutlu uzay tanımlanan $\beta(s)$ eğrisi için $\xi_i(s)$ kuaterniyonu için $\beta(s)$ eğrisinin $n(s)$ vektörünü koyarak $n-c-w$ çatısı yardımıyla aşağıdaki Frenet Çatısı elde edilir:

$$\begin{aligned} T'(s) &= K(s)N_1(s), \\ N_1'(s) &= -K(s)T(s) + f(s)N_2(s), \\ N_2'(s) &= -f(s)N_1(s) + (g(s) - K(s))N_3(s), \\ N_3'(s) &= -(g(s) - K(s))N_2(s). \end{aligned} \tag{26}$$

Bu üç sonuç bize gösterirki Ana teorem yardımıyla 4-boyutlu uzayda tanımlanan kuaterniyonik eğriler için 3- boyutlu uzayda tanımlanan birim spatial kuaterniyonik eğrilerin frenet elemanları kullanılarak farklı Frenet çatıları elde edilebilir. Böylece 4-boyutlu uzayda tanımlanan kuaterniyonik eğriler için 3 boyutlu uzayda tanımlanan birim spatial kuaterniyonik eğriler yardımıyla Ana Teoremden elde ettiğimiz çatı genel bir çatı tanımını verir.

Tanım 3.3.1 (Sağ helis) $\gamma(s) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$ sıfırdan farklı eğrilikleri olan bir kuaterniyon olsun ve $\gamma(s)$ eğrisi üzerinde bir $\{X(s), Y(s), Z_R(s), W_R(s)\}$ ortonormal çatısı verilsin. $X(s), \gamma(s)$ üzerinde birim vektör alanı olmak üzere

$$h(X(s), U_R(s)) = \langle X(s), U_R(s) \rangle = \cos\theta, \theta \neq \frac{\pi}{2}, \theta = \text{sabit}$$

$\|U_R(s)\| = 1$ sabit vektör ise $\gamma(s)$ eğrisine, kuaterniyonik X-Sağ helis denir.

Sağ helisler, Ana teoremden verilen Tip I Frenet formülleri ile tanımlanır ve kuater-

niyonik X-Sağ helislerin Frenet çatısı aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned}
X'(s) &= r_3(s)Y(s), \\
Y'(s) &= -r_3(s)X(s) + r_1(s)Z_R(s), \\
Z'_R(s) &= -r_1(s)Y(s) + (r_2 - r_3)(s)W_R(s), \\
W'_R(s) &= -(r_2 - r_3)(s)W_R(s).
\end{aligned} \tag{27}$$

Burada $r_3(s)$, $r_1(s)$ ve $(r_2 - r_3)(s)$ eğrilikleri sıfırdan farklı eğriliklerdir.

Tanım 3.3.2 (Sağ Helis İçin Eksen) $\gamma(s) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$ bir kuaterniyonik X-Sağ helis ve bu helis üzerine bir $\{X(s), Y(s), Z_R(s), W_R(s)\}$ ortonormal çatısı verilsin. $\gamma(s)$ eğrisinin ekseni,

$$U_R(s) = X(s) + \left(\frac{r_3(s)}{r_1(s)} \right) Z_R(s) + \frac{1}{(r_2 - r_3)(s)} \left(\frac{r_3(s)}{r_1(s)} \right)' W_R(s)$$

şeklinde yazılabilir. Sağ helis için bu eksen,

$$U_R(s) = \left[1 + \left(\frac{r_3(s)}{r_1(s)} \right) \eta_R(s) + \frac{1}{(r_2 - r_3)(s)} \left(\frac{r_3(s)}{r_1(s)} \right)' \varrho_R(s) \right] \times X(s)$$

şeklinde yazılabilir yani $Q_R(s) = \left[1 + \left(\frac{r_3(s)}{r_1(s)} \right) \eta_R(s) + \frac{1}{(r_2 - r_3)(s)} \left(\frac{r_3(s)}{r_1(s)} \right)' \varrho_R(s) \right]$ kuaterniyonu yardımıyla,

$$U_R(s) = Q_R(s) \times X(s)$$

şeklinde yazılabilir.

Tanım 3.3.3 (Sağ helis için Darboux Kuaterniyonu) $\gamma(s) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$ s, yay uzunluğu parametresi ile tanımlı sıfırdan farklı eğrilikleri olan bir kuaterniyonik eğri olsun. $\gamma(s)$ eğrisinin Frenet elemanları $\{X(s), Y(s), Z_R(s), W_R(s); r_3(s), r_1(s), (r_2 - r_3)(s)\}$ olsun.

$\rho_R(s) = \frac{r_3(s)}{r_1(s)}$ ve $\sigma_R(s) = \frac{1}{(r_2 - r_3)(s)} \left(\frac{r_3(s)}{r_1(s)} \right)'$ birer reel kuaterniyon olmak üzere,

$$\begin{aligned}\mathcal{D} &= Q_R(s) \times X(s) \\ &= X(s) + \rho_R(s)Z_R(s) + \sigma_R(s)W_R(s)\end{aligned}$$

$\gamma(s)$ gerç k kuaterniyonik X-Sağ helisin Darboux kuaterniyonu olarak adlandırılır.

Sonuç 3.3.1 $\gamma(s) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$ s, yay uzunluğu parametresi ile tanımlı bir gerç k kuaterniyonik eğri olsun ve $\gamma(s)$ eğrisinin Frenet elemanları $\{X(s), Y(s), Z_R(s), W_R(s); r_3(s), r_1(s), (r_2 - r_3)(s)\}$ olsun. O halde $\gamma(s)$ eğrisi ancak ve ancak $\mathcal{D}$ sabit bir reel kuaterniyon ise, gerç k bir kuaterniyonik X-Sağ helistir. Bunun ispatı, Sağ helis için eksen tanımından kolayca yapılabilir.

Özel hal 1 Ana teoremd  Tip I (Sağ Çarpım Frenet Çatısı) için X yerine $\gamma(s)$ eğrisinin $T(s)$ teğet vektörü alınırsa, $\{X(s), Y(s), Z_R(s), W_R(s)\}$ Tip I Sağ Çarpım Frenet Çatısı D.W. Yoon'un *On the Quaternionic general helices in Euclidean 4-space*, makalesindeki aşığıdaki çatı ile çakışır:

$$\begin{aligned}T'(s) &= K(s)N_1(s), \\ N_1'(s) &= -K(s)T(s) + k(s)N_2(s), \\ N_2'(s) &= -k(s)N_1(s) + (\tau - K)(s)N_3(s), \\ N_3'(s) &= -(\tau - K)(s)N_3(s).\end{aligned}$$

Özel Hal 2 $\gamma(s) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$ olmak üzere $\gamma(s)$ eğrisi üzerinde $X(s) = \gamma'(s) = v_1$ alınırsa $\gamma(s)$ bir helistir.

Özel Hal 3 $\gamma(s) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$ eğrisi üzerinde $X(s) = v_2$ alınırsa $\gamma(s)$ bir slant helistir.

Teorem 3.3.2 $\mathbb{H}$ da sıfırdan farklı eğrilikleri $r_3(s)$, $r_1(s)$ ve $r_2(s) - r_3(s)$ olan yay uzunluğu parametresi ile tanımlanan birim kuaterniyonik bir $\gamma = \gamma(s)$ eğrisi alalım.

$\gamma(s)$ eğrisi $\mathbb{H}$ da genel X-Sağ helistir ancak ve ancak

$$\left(\frac{r_3(s)}{r_1(s)}\right)^2 + \left[\frac{1}{(r_2 - r_3)(s)} \frac{d}{ds} \left(\frac{r_3(s)}{r_1(s)}\right)\right]^2 \quad (28)$$

eşitliği sabittir.

İspat. $\gamma(s)$ eğrisi $\mathbb{H}$ da eksenini $U_R(s)$ birim vektörü olan bir X-Sağ helis olsun. $\gamma(s)$ eğrisi helis olduğu için teğet vektörü ile $U_R(s)$ eksenini sabit açı yapar.

Yani eğri boyunca $h(X(s), U_R(s)) = \text{sabittir}$. (helis olma şartı)

Buradan

$$h(X(s), U_R(s)) = \frac{1}{2}(X(s) \times \bar{U}_R(s) + U_R(s) \times \bar{X}(s))$$

eşitliğinin s yay parametresine göre türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} h(X(s), U_R(s)) &= \frac{1}{2} \frac{d}{ds} (X(s) \times \bar{U}_R(s) + U_R(s) \times \bar{X}(s)) \\ &= \frac{1}{2} (X'(s) \times \bar{U}_R(s) + U_R(s) \times \bar{X}'(s)) \\ &= h(X'(s), U_R(s)) \\ &= r_3(s)Y(s), U_R(s) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Burada Ana teoremin Tip I (Sağ Çarpım Frenet Çatısı) Frenet formülleri kullanılarak,

$$h(X'(s), U_R(s)) = h(r_3(s)Y(s), U_R(s)) = r_3(s)h(Y(s), U_R(s)) = 0$$

bulunur. Dolayısıyla $U_R(s)$ birim vektörünü ,

$$U_R(s) = a_1(s)X(s) + a_2(s)Z_R(s) + a_3(s)W_R(s) \quad (29)$$

şeklinde yazabiliriz. $U_R(s)$ birim vektör olduğundan $\|U_R(s)\| = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$ ve $h(X(s), U_R(s)) = a_1 = \text{sabit}$, $h(Z_R(s), U_R(s)) = a_2$, $h(W_R(s), U_R(s)) = a_3$ tür.

(29) eşitliğinin türevi alınırsa,

$$a_1(s)X'(s) + a_2'(s)Z_R(s) + a_2(s)Z_R'(s) + a_3'(s)W_R(s) + a_3(s)W_R'(s) = 0$$

ve

$$(a_1r_3 - a_2r_1)(s)Y(s) + (a_2' - a_3(r_2 - r_3)(s))Z_R(s) + (a_3' + a_2(r_2 - r_3)(s))W_R(s) = 0$$

eşitlikleri elde edilir.

Bu eşitlikler yardımıyla

$$\begin{aligned} (a_1r_3 - a_2r_1)(s) &= 0, \\ (a_2' - a_3(r_2 - r_3)(s))Z_R(s) &= 0, \\ (a_3' + a_2(r_2 - r_3)(s))W_R(s) &= 0 \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 \frac{r_3}{r_1}(s) = -\frac{1}{(r_2 - r_3)(s)}a_3', \\ a_2' &= a_3(r_2 - r_3)(s) \end{aligned} \tag{30}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitliklerdeki denklemler kullanılarak,

$$a_3'' - \frac{(r_2 - r_3)'(s)}{(r_2 - r_3)(s)}(s)a_3' + [(r_2 - r_3)(s)]^2 a_3 = 0 \tag{31}$$

başlangıç-değer problemi elde edilir ve bu denklemde $t = \int_0^S (r_2 - r_3)(s)ds$ dönüşümü yapılarak,

$$\frac{d^2}{dt^2}a_3(s) + a_3(s) = 0 \tag{32}$$

denklemini elde edilir. Bu denklemin çözümü ise aşağıdaki gibidir:

A ve B sabit olmak üzere,

$$a_3(s) = A \cos t(s) + B \sin t(s). \quad (33)$$

(30), (31), (32) ve (33) denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned} a_2(s) &= a_1(s) \frac{r_3(s)}{r_1(s)} = A \sin t(s) - B \cot t(s), \\ a_3(s) &= \frac{1}{(r_2 - r_3)(s)} \left(\frac{r_3(s)}{r_2(s)} \right)' a_1(s) = A \cos t(s) + B \sin t(s). \end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

Buradan A ve B aşağıdaki gibi hesaplanır,

$$\begin{aligned} A &= a_1(s) \left(\left(\frac{r_3(s)}{r_1(s)} \right) \sin t(s) + \frac{1}{(r_2 - r_3)(s)} \left(\frac{r_3(s)}{r_1(s)} \right)' \cos t(s) \right), \\ B &= a_1(s) \left(\frac{1}{(r_2 - r_3)(s)} \left(\frac{r_3(s)}{r_1(s)} \right)' \sin t(s) - \frac{r_3(s)}{r_1(s)} \cos t(s) \right). \\ A^2 + B^2 &= a_1^2(s) \left[\left(\frac{r_3(s)}{r_1(s)} \right)^2 + \frac{1}{[(r_2 - r_3)(s)]^2} \left(\frac{r_3(s)}{r_1(s)} \right)^2 \right] = \text{sabit} \end{aligned} \quad (34)$$

(28) denkleminde A, B ve a_1 birer sabit olduğu için

$$\left[\left(\frac{r_3(s)}{r_1(s)} \right)^2 + \frac{1}{[(r_2 - r_3)(s)]^2} \left(\frac{r_3(s)}{r_1(s)} \right)^2 \right] = \text{sabit}$$

bulunur.

Tersine (28) eşitliği sağlanırsa her zaman $h(X(s), U_R(s)) = \text{sabit}$ eşitliğini sağlayan bir $U_R(s)$ birim vektörü bulabiliriz. $U_R(s)$ birim vektörü,

$$U_R(s) = X(s) + \frac{r_3(s)}{r_1(s)} Z_R(s) + \frac{1}{(r_2 - r_3)(s)} \left(\frac{r_3(s)}{r_1(s)} \right)' W_R(s) \quad (35)$$

alınır ve bu denkleminin türevi alınırsa, $U_R'(s) = 0$ bulunur. Buradan $U_R(s)$ nun sabit vektör olduğu görülür. Sonuç olarak $\gamma(s)$ eğrisi, $\mathbb{H}$ da X-Sağ helistir.

Teorem 3.3.3 $\gamma(s) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$ yay uzunluğu ile tanımlanan bir kuaterniyonik eğri olssun ve bu eğrinin Frenet elemanları $\{X(s), Y(s), Z_R(s), W_R(s); r_3(s), r_1(s), (r_2 - r_3)(s)\}$ olsun.

$\gamma(s)$ eğrisi gerçek bir kuaterniyonik X-sağ helistir ancak ve ancak

$$\frac{r_3(s)}{r_1(s)}(r_2 - r_3)(s) + \left[\frac{\left(\frac{r_3(s)}{r_1(s)} \right)'}{(r_2 - r_3)(s)} \right]' = 0.$$

İspat. $\gamma(s)$ eğrisi gerçek bir kuaterniyonik X-Sağ helis olsun. Sonuç 3.3.1 bize $\mathcal{D}$ nin sabit bir reel kuaterniyon olduğunu verir. $\gamma(s)$ eğrisi boyunca $\mathcal{D}$ nin türevini alırsak ve burada Ana teoremden verdiğimiz Tip I Sağ çarpım Frenet çatısının denklemlerini kullanırsak

$$\frac{r_3(s)}{r_1(s)}(r_2 - r_3)(s) + \left[\frac{\left(\frac{r_3(s)}{r_1(s)} \right)'}{(r_2 - r_3)(s)} \right]' = 0.$$

elde ederiz.

Tersine,

$$\frac{r_3(s)}{r_1(s)}(r_2 - r_3)(s) + \left[\frac{\left(\frac{r_3(s)}{r_1(s)} \right)'}{(r_2 - r_3)(s)} \right]' = 0.$$

olduğunu kabul edelim. $\mathcal{D}' = 0$ veya $\mathcal{D}$ nin sabit bir reel kuaterniyon olduğunu elde etmek kolaydır. Dolayısıyla, $\gamma(s)$ eğrisi gerçek bir kuaterniyonik X-Sağ helistir. Bu da ispatı tamamlar.

Tanım 3.3.4 (Sol helis) $\gamma(s) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$ sıfırdan farklı eğrilikleri olan bir kuaterniyon olsun ve $\gamma(s)$ eğrisi üzerinde bir $\{X(s), Y(s), Z_L(s), W_L(s)\}$ ortonormal çatısı verilsin. $X(s), \gamma(s)$ üzerinde birim vektör alanı olmak üzere

$$h(X(s), U_L(s)) = \langle X(s), U_L(s) \rangle = \cos \theta, \theta \neq \frac{\pi}{2}, \theta = \text{sabit}$$

$\|U_L(s)\| = 1$ sabit vektör ise $\gamma(s)$ eğrisine, kuaterniyonik X-Sol helis denir.

Sol helisler, Ana teoremdede verilen Tip II Frenet formulleri ile tanımlanır ve kuaterniyonik X-Sol helislerin Frenet çatısı aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned} X'(s) &= \tilde{r}_3(s)Y(s), \\ Y'(s) &= -\tilde{r}_3(s)X(s) + \tilde{r}_1 Z_L(s), \\ Z'_L(s) &= -\tilde{r}_1(s)Y(s) + (\tilde{r}_2 + \tilde{r}_3)(s)W_L(s), \\ W'_L(s) &= -(\tilde{r}_2 + \tilde{r}_3)(s)W_L(s). \end{aligned}$$

Burada $\tilde{r}_3(s)$, $\tilde{r}_1(s)$ ve $(\tilde{r}_2 + \tilde{r}_3)(s)$ eğrilikleri sıfırdan farklı eğriliklerdir.

Tanım 3.3.5 (Sol Helis İçin Eksen) $\gamma(s) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$ bir kuaterniyonik X-Sol helis ve bu helis üzerine bir $\{X(s), Y(s), Z_L(s), W_L(s)\}$ ortonormal çatısı verilsin. $\gamma(s)$ eğrisinin ekseni,

$$U_L(s) = X(s) + \left(\frac{\tilde{r}_3(s)}{\tilde{r}_1(s)} \right) Z_L(s) + \frac{1}{(\tilde{r}_2 + \tilde{r}_3)(s)} \left(\frac{\tilde{r}_3(s)}{\tilde{r}_1(s)} \right)' W_L(s)$$

şeklinde yazılabilir. Sol helis için bu eksen,

$$U_L(s) = X(s) \times \left[1 + \left(\frac{\tilde{r}_3(s)}{\tilde{r}_1(s)} \right) \eta_L(s) + \frac{1}{(\tilde{r}_2 + \tilde{r}_3)(s)} \left(\frac{\tilde{r}_3(s)}{\tilde{r}_1(s)} \right)' \varrho_L(s) \right]$$

şeklinde yazılabilir yani $Q_L(s) = \left[1 + \left(\frac{\tilde{r}_3(s)}{\tilde{r}_1(s)} \right) \eta_L(s) + \frac{1}{(\tilde{r}_2 + \tilde{r}_3)(s)} \left(\frac{\tilde{r}_3(s)}{\tilde{r}_1(s)} \right)' \varrho_L(s) \right]$ kuaterniyonu yardımıyla,

$$U_L(s) = X(s) \times Q_L(s)$$

şeklinde yazılabilir.

Tanım 3.3.6 (Sol helis için Darboux Kuaterniyonu) $\gamma(s) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$ s, yay uzunluğu parametresi ile tanımlı sıfırdan farklı eğrilikleri olan bir kuaterniyonik eğri olsun. $\gamma(s)$ eğrisinin Frenet elemanları $\{X(s), Y(s), Z_L(s), W_L(s); \tilde{r}_3(s), \tilde{r}_1(s), (\tilde{r}_2 + \tilde{r}_3)(s)\}$ olsun.

$\rho_L(s) = \frac{\tilde{r}_3(s)}{\tilde{r}_1(s)}$ ve $\sigma_L(s) = \frac{1}{(\tilde{r}_2 + \tilde{r}_3)(s)} \left(\frac{\tilde{r}_3(s)}{\tilde{r}_1(s)} \right)'$ birer reel kuaterniyon olmak üzere,

$$\begin{aligned}\mathcal{D} &= X(s) \times Q_L(s) \\ &= X(s) + \rho_L(s)Z_L(s) + \sigma_L(s)W_L(s).\end{aligned}$$

$\gamma(s)$ gerç k kuaterniyonik X-Sol helisin Darboux kuaterniyonu olarak adlandırılır.

Sonuç 3.3.2 $\gamma(s) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$ s, yay uzunluğu parametresi ile tanımlı bir gerç k kuaterniyonik eğri olsun ve $\gamma(s)$ eğrisinin Frenet elemanları $\{X(s), Y(s), Z_L(s), W_L(s); \tilde{r}_3(s), \tilde{r}_1(s), (\tilde{r}_2 + \tilde{r}_3)(s)\}$ olsun. O halde $\gamma(s)$ eğrisi ancak ve ancak $\mathcal{D}$ sabit bir reel kuaterniyon ise, gerç k bir kuaterniyonik X-Sol helistir. Bunun ispatı, Sol helis için eksen tanımından kolayca yapılabilir.

Teorem 3.3.4 $\mathbb{H}$ da sıfırdan farklı eğrilikleri $\tilde{r}_3(s)$, $\tilde{r}_1(s)$ ve $(\tilde{r}_2(s) + \tilde{r}_3(s))$ olan yay uzunluğu parametresi ile tanımlanan birim kuaterniyonik bir $\gamma = \gamma(s)$ eğrisi alalım. $\gamma(s)$ eğrisi $\mathbb{H}$ da genel sol helistir ancak ve ancak

$$\left(\frac{\tilde{r}_3(s)}{\tilde{r}_1(s)} \right)^2 + \left[\frac{1}{(\tilde{r}_2 + \tilde{r}_3)(s)} \frac{d}{ds} \left(\frac{\tilde{r}_3(s)}{\tilde{r}_1(s)} \right) \right]^2 \quad (36)$$

eşitliği sabittir.

İspat. $\gamma(s)$ eğrisi $\mathbb{H}$ da ekseni $U_R(s)$ birim vektörü olan bir X-sağ helis olsun. $\gamma(s)$ eğrisi helis olduğu için teğet vektörü ile $U_L(s)$ ekseni sabit açı yapar.

Yani eğri boyunca $h(X(s), U_L(s)) = \text{sabittir}$. (helis olma şartı)

Buradan

$$h(X(s), U_L(s)) = \frac{1}{2}(X(s) \times \bar{U}_L(s) + U_L(s) \times \bar{X}(s))$$

eşitliğinin s yay parametresine göre türevi alınırsa,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}h(X(s), U_L(s)) &= \frac{1}{2} \frac{d}{ds}(X(s) \times \bar{U}_L(s) + U_L(s) \times \bar{X}(s)) \\
&= \frac{1}{2}(X'(s) \times \bar{U}_L(s) + U_L(s) \times \bar{X}'(s)) \\
&= h(X'(s), U_L(s)) \\
&= h(\tilde{r}_3(s)Y(s), U_L(s))
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Burada Ana teoremin Tip II (Sol Çarpım Frenet Çatısı) Frenet formülleri kullanılarak,

$$h(X'(s), U_L(s)) = h(\tilde{r}_3(s)Y(s), U_L(s)) = \tilde{r}_3(s)h(Y(s), U_L(s)) = 0$$

bulunur. Dolayısıyla $U_L(s)$ birim vektörünü,

$$U_L(s) = \tilde{a}_1(s)X(s) + \tilde{a}_2(s)Z_L(s) + \tilde{a}_3(s)W_L(s) \quad (37)$$

şeklinde yazabiliriz. $U_L(s)$ birim vektör olduğundan $\|U_L(s)\| = \tilde{a}_1^2 + \tilde{a}_2^2 + \tilde{a}_3^2 = 1$ ve $h(X(s), U_L(s)) = \tilde{a}_1 = \text{sabit}$, $h(Z_L(s), U_L(s)) = \tilde{a}_2$, $h(W_L(s), U_L(s)) = \tilde{a}_3$ tür.

(37) eşitliğinin türevi alınırsa,

$$\tilde{a}_1(s)X'(s) + \tilde{a}_2'(s)Z_L(s) + \tilde{a}_2(s)Z_L'(s) + \tilde{a}_3'(s)W_L(s) + \tilde{a}_3(s)W_L'(s) = 0$$

ve

$$(\tilde{a}_1\tilde{r}_3 - \tilde{a}_2\tilde{r}_1)(s)Y(s) + (\tilde{a}_2' - \tilde{a}_3(\tilde{r}_2 + \tilde{r}_3)(s))Z_L(s) + (\tilde{a}_3' + \tilde{a}_2(\tilde{r}_2 + \tilde{r}_3)(s))W_L(s) = 0$$

eşitlikleri elde edilir.

Bu eşitlik yardımıyla

$$\begin{aligned}(\tilde{a}_1 \tilde{r}_3 - \tilde{a}_2 \tilde{r}_1)(s) &= 0, \\(\tilde{a}_2' - \tilde{a}_3(\tilde{r}_2 + \tilde{r}_3)(s)) Z_L(s) &= 0, \\(\tilde{a}_3' + \tilde{a}_2(\tilde{r}_2 + \tilde{r}_3)(s)) W_L(s) &= 0\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}\tilde{a}_2 &= \tilde{a}_1 \frac{\tilde{r}_3}{\tilde{r}_1}(s) = -\frac{1}{(\tilde{r}_2 + \tilde{r}_3)(s)} \tilde{a}_3', \\ \tilde{a}_2' &= \tilde{a}_3(\tilde{r}_2 + \tilde{r}_3)(s)\end{aligned}\tag{38}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitliklerdeki denklemler kullanılarak ,

$$\tilde{a}_3'' - \frac{(\tilde{r}_2 + \tilde{r}_3)'(s)}{(\tilde{r}_2 + \tilde{r}_3)(s)}(s) \tilde{a}_3' + [(\tilde{r}_2 + \tilde{r}_3)(s)]^2 \tilde{a}_3 = 0\tag{39}$$

başlangıç-değer problemi elde edilir ve bu denklemde $\tilde{t} = \int_0^S (\tilde{r}_2 + \tilde{r}_3)(s) ds$ dönüşümü yapılarak,

$$\frac{d^2}{dt^2} \tilde{a}_3(s) + \tilde{a}_3(s) = 0\tag{40}$$

denklemini elde edilir. Bu denklemin çözümü ise aşağıdaki gibidir:

$\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ sabit olmak üzere,

$$\tilde{a}_3(s) = \tilde{A} \cos \tilde{t}(s) + \tilde{B} \sin \tilde{t}(s).\tag{41}$$

(38), (39), (40) ve (41) denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned}\tilde{a}_2(s) &= \tilde{a}_1(s) \frac{\tilde{r}_3(s)}{\tilde{r}_1(s)} = \tilde{A} \sin \tilde{t}(s) - \tilde{B} \cot \tilde{t}(s), \\ \tilde{a}_3(s) &= \frac{1}{(\tilde{r}_2 + \tilde{r}_3)(s)} \left(\frac{\tilde{r}_3(s)}{\tilde{r}_1(s)} \right)' \tilde{a}_1(s) = \tilde{A} \cos \tilde{t}(s) + \tilde{B} \sin \tilde{t}(s).\end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

Buradan $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ aşağıdaki gibi hesaplanır,

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= \tilde{a}_1(s) \left(\left(\frac{\tilde{r}_3(s)}{\tilde{r}_1(s)} \right) \sin \tilde{t}(s) + \frac{1}{(\tilde{r}_2 + \tilde{r}_3)(s)} \left(\frac{\tilde{r}_3(s)}{\tilde{r}_1(s)} \right)' \cos \tilde{t}(s) \right), \\ \tilde{B} &= \tilde{a}_1(s) \left(\frac{1}{(\tilde{r}_2 + \tilde{r}_3)(s)} \left(\frac{\tilde{r}_3(s)}{\tilde{r}_1(s)} \right)' \sin \tilde{t}(s) - \frac{\tilde{r}_3(s)}{\tilde{r}_1(s)} \cos \tilde{t}(s) \right). \\ \tilde{A}^2 + \tilde{B}^2 &= \tilde{a}_1^2(s) \left[\left(\frac{\tilde{r}_3(s)}{\tilde{r}_1(s)} \right)^2 + \frac{1}{[(\tilde{r}_2 + \tilde{r}_3)(s)]^2} \left(\frac{\tilde{r}_3(s)}{\tilde{r}_1(s)} \right)^{\prime 2} \right] = \text{sabit}\end{aligned}\quad (42)$$

(42) denkleminde $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ ve $\tilde{a}_1$ birer sabit olduğu için

$$\left[\left(\frac{\tilde{r}_3(s)}{\tilde{r}_1(s)} \right)^2 + \frac{1}{[(\tilde{r}_2 + \tilde{r}_3)(s)]^2} \left(\frac{\tilde{r}_3(s)}{\tilde{r}_1(s)} \right)^{\prime 2} \right] = \text{sabit}$$

bulunur ve bu da ispatı tamamlar.

Tersine (36) eşitliği sağlanırsa her zaman $h(X(s), U_L(s)) = \text{sabit}$ eşitliğini sağlayan bir $U_L(s)$ birim vektörü bulabiliriz. $U_L(s)$ birim vektörü,

$$U_L(s) = X(s) + \frac{\tilde{r}_3(s)}{\tilde{r}_1(s)} Z_L(s) + \frac{1}{(\tilde{r}_2 + \tilde{r}_3)(s)} \left(\frac{\tilde{r}_3(s)}{\tilde{r}_1(s)} \right)' W_L(s) \quad (43)$$

alınır ve bu denkleminin türevi alınırsa, $U_L'(s) = 0$ bulunur. Buradan $U_L(s)$ nun sabit vektör olduğu görülür. Sonuç olarak $\gamma(s)$ eğrisi, $\mathbb{H}$ da X-Sol helistir.

Teorem 3.3.5 $\gamma(s) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$ yay uzunluğu ile tanımlanan bir kuaterniyonik eğri olsun ve bu eğrinin Frenet elemanları $\{X(s), Y(s), Z_L(s), W_L(s); \tilde{r}_3(s), \tilde{r}_1(s), (\tilde{r}_2 - \tilde{r}_3)(s)\}$ olsun.

$\gamma(s)$ eğrisi gerçek bir kuaterniyonik X-Sol helistir ancak ve ancak

$$\frac{\tilde{r}_3(s)}{\tilde{r}_1(s)} (\tilde{r}_2 + \tilde{r}_3)(s) + \left[\frac{\left(\frac{\tilde{r}_3(s)}{\tilde{r}_1(s)} \right)'}{(\tilde{r}_2 + \tilde{r}_3)(s)} \right]' = 0.$$

İspat. $\gamma(s)$ eğrisi gerçek bir kuaterniyonik X-Sol helis olsun. Sonuç 3.3.2 bize D nin

sabit bir reel kuaterniyon olduğunu verir. $\gamma(s)$ eğrisi boyunca D nin türevini alırsak ve burada Ana teoremden verdiğimiz Tip II Sol çarpım Frenet çatısının denklemlerini kullanırsak

$$\frac{\tilde{r}_3(s)}{\tilde{r}_1(s)}(\tilde{r}_2 + \tilde{r}_3)(s) + \left[\frac{\left(\frac{\tilde{r}_3(s)}{\tilde{r}_1(s)} \right)'}{(\tilde{r}_2 + \tilde{r}_3)(s)} \right]' = 0.$$

elde ederiz.

Tersine,

$$\frac{\tilde{r}_3(s)}{\tilde{r}_1(s)}(\tilde{r}_2 + \tilde{r}_3)(s) + \left[\frac{\left(\frac{\tilde{r}_3(s)}{\tilde{r}_1(s)} \right)'}{(\tilde{r}_2 + \tilde{r}_3)(s)} \right]' = 0$$

olduğunu kabul edelim. $D' = 0$ veya D nin sabit bir reel kuaterniyon olduğunu elde etmek kolaydır. Dolayısıyla, $\gamma(s)$ eğrisi gerçek bir kuaterniyonik X-Sol helistir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.3.6 $\gamma(s) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$, Frenet elemanları $\{X(s), Y(s), Z_R(s), W_R(s); r_3(s), r_1(s), (r_2 - r_3)(s)\}$ olan yay uzunluğu ile tanımlanan gerçek bir kuaterniyonik eğri olsun ve bu eğrinin 3-boyutlu uzayda ilişkili olduğu spatial kuaterniyonik eğri $\beta(s) = \int \xi_R(s)ds$ olsun. $\gamma(s)$, 4-boyutlu uzayda bir sağ-kuaterniyonik C.C.R eğridir ancak ve ancak $\beta(s) = \int \xi_R(s)ds$ 3-boyutlu uzayda bir helistir.

İspat. $\gamma(s)$, 4-boyutlu uzayda sıfırdan farklı öklidiyen eğrilikleri $k_1(s), k_2(s), k_3(s)$ ve kuaterniyonik eğrilikleri $r_3(s) = k_1(s), r_1(s) = k_2(s), r_2(s) - r_3(s) = k_3(s)$ olan yay uzunluğu parametresi ile tanımlanmış bir gerçek sağ-kuaterniyonik C.C.R eğrisi ve $\gamma(s)$ kuaterniyonik eğrisinin, 3-boyutlu uzayda sıfırdan farklı eğrilikleri $r_1(s)$ ve $r_2(s)$ olan ilişkili olduğu spatial kuaterniyonik eğri $\beta(s) = \int \xi_R(s)ds$ olsun. $\gamma(s)$ kuaterniyonik eğrisi bir sağ-kuaterniyonik C.C.R eğrisi olduğundan $\frac{k_1}{k_2}$ ve $\frac{k_3}{k_2}$ oranları sabittir. Bu eğrilikleri kuaterniyonik eğrilikleri cinsinden yazarsak,

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{r_3(s)}{r_1(s)} \text{ ve } \frac{k_3}{k_2} = \frac{(r_2 - r_3)(s)}{r_1(s)}$$

bulunur. Bu oranlar sabit olduğu için

$$\frac{r_2(s)}{r_1(s)} = \frac{k_1(s) + k_3(s)}{k_2(s)} = \frac{k_1(s)}{k_2(s)} + \frac{k_3(s)}{k_2(s)}$$

ve

$$\frac{r_3(s)}{r_1(s)} = \frac{k_1(s)}{k_2(s)}$$

bulunur. $\frac{k_1(s)}{k_2(s)}$ oranı sabit bulunduğundan bu da bize 3-boyutlu uzayında $\beta(s) = \int \xi_R(s)ds$ bir helis olduğunu gösterir. Tersine ispatı yine aynı şekilde eğrilikler yardımıyla kolayca görülür. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.3.7 $\gamma(s) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$, Frenet elemanları $\{X(s), Y(s), Z_L(s), W_L(s); \tilde{r}_3(s), \tilde{r}_1(s), (\tilde{r}_2 + \tilde{r}_3)(s)\}$ olan yay uzunluğu ile tanımlanan gerçek bir kuaterniyonik eğri olsun ve bu eğrinin 3-boyutlu uzayda ilişkili olduğu spatial kuaterniyonik eğri $\beta(s) = \int \xi_L(s)ds$ olsun. $\gamma(s)$, 4-boyutlu uzayda bir sol-kuaterniyonik C.C.R eğridir ancak ve ancak $\beta(s) = \int \xi_L(s)ds$ 3-boyutlu uzayda bir helistir.

İspat. $\gamma(s)$, 4-boyutlu uzayda sıfırdan farklı öklidiyen eğrilikleri $\tilde{k}_1(s), \tilde{k}_2(s), \tilde{k}_3(s)$ ve kuaterniyonik eğrilikleri $\tilde{r}_3(s) = \tilde{k}_1(s), \tilde{r}_1(s) = \tilde{k}_2(s), \tilde{r}_2(s) + \tilde{r}_3(s) = \tilde{k}_3(s)$ olan yay uzunluğu parametresi ile tanımlanmış bir gerçek sol-kuaterniyonik C.C.R eğrisi ve $\gamma(s)$ kuaterniyonik eğrisinin, 3-boyutlu uzayda sıfırdan farklı eğrilikleri $\tilde{r}_1(s)$ ve $\tilde{r}_2(s)$ olan ilişkili olduğu spatial kuaterniyonik eğri $\beta(s) = \int \xi_L(s)ds$ olsun. $\gamma(s)$ kuaterniyonik eğrisi bir sol-kuaterniyonik C.C.R eğrisi olduğundan $\frac{\tilde{k}_1}{\tilde{k}_2}$ ve $\frac{\tilde{k}_3}{\tilde{k}_2}$ oranları sabittir. Bu eğrilikleri kuaterniyonik eğrilikleri cinsinden yazarsak,

$$\frac{\tilde{k}_1}{\tilde{k}_2} = \frac{\tilde{r}_3(s)}{\tilde{r}_1(s)} \text{ ve } \frac{\tilde{k}_3}{\tilde{k}_2} = \frac{(\tilde{r}_2 + \tilde{r}_3)(s)}{\tilde{r}_1(s)}$$

bulunur. Bu oranlar sabit olduğu için

$$\frac{\tilde{r}_2(s)}{\tilde{r}_1(s)} = \frac{\tilde{k}_3(s) - \tilde{k}_1(s)}{\tilde{k}_2(s)} = \frac{\tilde{k}_3}{\tilde{k}_2} - \frac{\tilde{k}_1(s)}{\tilde{k}_2(s)}$$

ve

$$\frac{\tilde{r}_3(s)}{\tilde{r}_1(s)} = \frac{\tilde{k}_1(s)}{\tilde{k}_2(s)}$$

bulunur. $\frac{k_1(s)}{k_2(s)}$ oranı sabit bulunduğundan bu da bize 3-boyutlu uzayda $\beta(s) = \int \xi_L(s)ds$ bir helis olduğunu gösterir. Tersine ispatı yine aynı şekilde eğrilikler yardımıyla kolayca görülür. Bu da ispatı tamamlar.

Aşağıda bulduğumuz sonuçlar ile ilgili iki örnek incelenecektir.

Örnek 3.1 eksenlerden ziyade sadece X-Sağ helis ve X-Sol helis çatıları hesaplanarak, sağ çarpım ve sol çarpım kullanılarak üç boyutlu uzaydaki eğrinin farklılaştığını göstermektir. Bu örnekte eğriliklerden biri sıfır olarak alınmıştır. Çatıları bu bilgi göz önüne alarak hesaplayacağız.

Örnek 3.2 de ise eksenlerini hesaplayabileceğimiz bir helis örneğini ele alarak sağ çarpım ve sol çarpım kullanılarak üç boyutlu uzaydaki eğrinin farklılaştığını göstereceğiz ve burada sıfırdan farklı eğrilikleri hesaplayacağız.

Örnek 3.1 $\gamma = \gamma(s) = \cos \frac{s}{\sqrt{3}} + \sin \frac{s}{\sqrt{3}} \vec{e}_1 + \frac{s}{\sqrt{3}} \vec{e}_2 + \frac{s}{\sqrt{3}} \vec{e}_3$, 4-boyutlu uzayda bir kuaterniyonik helis eğrisidir. $\gamma(s)$ eğrisinin, 3-boyutlu uzayda ilişkili olduğu $\beta(s)$ spatial kuaterniyonik eğrisi yardımıyla Ana teoremden verilen Tip I ve Tip II X-Sağ helis ve X-Sol helis çatılarını bulalım.

i) γ eğrisinin, Ana teoremden verilen Tip I, X-sağ helis çatısını hesaplayalım:

$\gamma(s)$ kuaterniyonik eğrisinin $\{X(s), Y(s), Z_R(s), W_R(s); r_3(s), r_1(s), (r_2 - r_3)(s)\}$ Fre-

net elemanlarını hesaplayalım:

$\gamma(s)$ kuaterniyonik eğrisinin türevini alırsak;

$$X(s) = \gamma'(s) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(-\sin \frac{s}{\sqrt{3}}, \cos \frac{s}{\sqrt{3}}, 1, 1 \right) \quad (44)$$

olarak bulunur. $X(s)$ vektörünün türevi alınır,

$$X'(s) = \frac{1}{3} \left(-\cos \frac{s}{\sqrt{3}}, -\sin \frac{s}{\sqrt{3}}, 0, 0 \right)$$

elde edilir. Buradan $\gamma(s)$ kuaterniyonik eğrisinin birinci eğriligi olan $r_3 = \|X'(s)\| = \frac{1}{3}$ olarak hesaplanır. Daha sonra $X'(s)$ vektörü kullanılarak $Y(s)$ vektörü aşağıdaki gibi bulunur:

$$Y(s) = \frac{X'(s)}{\|X'(s)\|} = \left(-\cos \frac{s}{\sqrt{3}}, -\sin \frac{s}{\sqrt{3}}, 0, 0 \right). \quad (45)$$

$Y(s) \times \bar{X}(s)$ bir spatial kuaterniyon olmak üzere, $\gamma(s)$ kuaterniyonik eğrisinin ilişkili olduğu 3 boyutlu uzaydaki $\beta(s)$ kuaterniyonik eğrisini $\xi_R(s)$ vektörü yardımıyla bulalım.

$$\xi_R(s) = Y(s) \times \bar{X}(s) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(1, \cos \frac{s}{\sqrt{3}} - \sin \frac{s}{\sqrt{3}}, \cos \frac{s}{\sqrt{3}} + \sin \frac{s}{\sqrt{3}} \right)$$

olmak üzere bu denklemin integrali alınır,

$$\beta_R(s) = \int \xi_R(s) = \left(\frac{s}{\sqrt{3}}, \sin \frac{s}{\sqrt{3}} + \cos \frac{s}{\sqrt{3}}, \sin \frac{s}{\sqrt{3}} - \cos \frac{s}{\sqrt{3}} \right)$$

bulunur.

Ana teoremdede Tip I için verilen Frenet formüllerini 3-boyutlu uzaydaki $\beta_R(s)$ kuaterniyonik eğrisi için uygulanırsa, $\beta_R(s)$ kuaterniyonik eğrisinin diğer Frenet vektörlerini ve β_R eğrisinin eğriliklerini aşağıdaki hesaplanır:

$$\begin{aligned} \eta_R(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(0, -\sin \frac{s}{\sqrt{3}} - \cos \frac{s}{\sqrt{3}}, -\sin \frac{s}{\sqrt{3}} + \cos \frac{s}{\sqrt{3}} \right), \\ \varrho_R(s) &= \frac{1}{\sqrt{6}} \left(2, -\cos \frac{s}{\sqrt{3}} + \sin \frac{s}{\sqrt{3}}, -\cos \frac{s}{\sqrt{3}} - \sin \frac{s}{\sqrt{3}} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_1(s) &= \|\xi'_R(s)\| = \frac{\sqrt{2}}{3}, \\
r_2(s) &= \frac{1}{3}, \\
(r_2 - r_3)(s) &= 0
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Buradan $Z_R(s)$ ve $W_R(s)$ vektörlerini aşağıdaki gibi hesaplayalım:

$$\begin{aligned}
Z_R(s) &= \eta_R(s) \times X(s) \\
Z_R(s) &= \frac{1}{\sqrt{6}} \left(2 \sin \frac{s}{\sqrt{3}}, -2 \cos \frac{s}{\sqrt{3}}, 1, 1 \right)
\end{aligned}$$

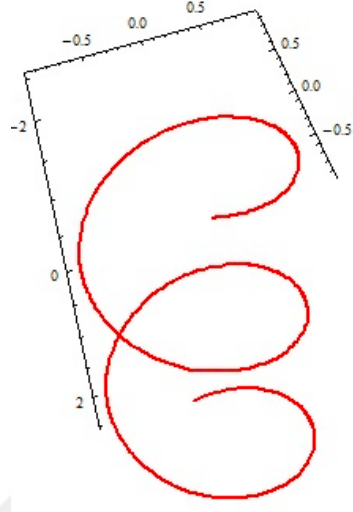
ve

$$\begin{aligned}
W_R(s) &= \varrho_R(s) \times X(s) \\
W_R(s) &= (0, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}).
\end{aligned}$$

Böylece $\gamma(s)$ kuaterniyonik eğrisinin Ana teorem Tip I çatısının frenet elemanlarını aşağıdaki gibi elde ettik:

$$\begin{aligned}
X(s) &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left(-\sin \frac{s}{\sqrt{3}}, \cos \frac{s}{\sqrt{3}}, 1, 1 \right), \\
Y(s) &= \left(-\cos \frac{s}{\sqrt{3}}, -\sin \frac{s}{\sqrt{3}}, 0, 0 \right), \\
Z_R(s) &= \frac{1}{\sqrt{6}} \left(2 \sin \frac{s}{\sqrt{3}}, -2 \cos \frac{s}{\sqrt{3}}, 1, 1 \right), \\
W_R(s) &= (0, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), \\
r_3 &= \frac{1}{3} \\
r_1(s) &= \frac{\sqrt{2}}{3} \\
(r_2 - r_3)(s) &= 0.
\end{aligned}$$

Ana teorem Tip I için $\gamma(s)$ kuaterniyonik eğrisinin görüntüsü aşağıdaki gibidir:



Şekil 3.1 $\gamma(s)$ eğrisi için Tip I Kuaterniyonik Eğri

ii) γ eğrisinin, Ana teoremden verilen Tip II, X-Sol helis çatısını hesaplayalım:

$\gamma(s)$ kuaterniyonik eğrisinin $\{X(s), Y(s), Z_L(s), W_L(s); \tilde{r}_3(s), \tilde{r}_1(s), (\tilde{r}_2 + \tilde{r}_3)(s)\}$ Frenet elemanlarını hesaplayalım:

$\gamma(s)$ kuaterniyonik eğrisinin türevini alırsak;

$$X(s) = \gamma'(s) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(-\sin \frac{s}{\sqrt{3}}, \cos \frac{s}{\sqrt{3}}, 1, 1 \right) \quad (46)$$

olarak bulunur. $X(s)$ vektörünün türevi alınırsa,

$$X'(s) = \frac{1}{3} \left(-\cos \frac{s}{\sqrt{3}}, -\sin \frac{s}{\sqrt{3}}, 0, 0 \right)$$

elde edilir. Buradan $\gamma(s)$ kuaterniyonik eğrisinin birinci eğriliği olan $r_3 = \|X'(s)\| = \frac{1}{3}$ olarak hesaplanır. Daha sonra $X'(s)$ vektörü kullanılarak $Y(s)$ vektörü aşağıdaki gibi bulunur:

$$Y(s) = \frac{X'(s)}{\|X'(s)\|} = \left(-\cos \frac{s}{\sqrt{3}}, -\sin \frac{s}{\sqrt{3}}, 0, 0 \right). \quad (47)$$

$\bar{X}(s) \times Y(s)$ bir spatial kuaterniyon olmak üzere, $\gamma(s)$ kuaterniyonik eğrisinin ilişkili olduğu 3 boyutlu uzaydaki $\beta(s)$ kuaterniyonik eğrisini $\xi_L(s)$ vektörü yardımıyla bulalım.

$$\xi_L(s) = \bar{X}(s) \times Y(s) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(1, \sin \frac{s}{\sqrt{3}} + \cos \frac{s}{\sqrt{3}}, \cos \frac{s}{\sqrt{3}} - \sin \frac{s}{\sqrt{3}} \right)$$

olmak üzere bu denklemin integrali alınırsa,

$$\beta_L(s) = \int \xi_L(s) = \left(\frac{s}{\sqrt{3}}, \sin \frac{s}{\sqrt{3}} - \cos \frac{s}{\sqrt{3}}, \sin \frac{s}{\sqrt{3}} + \cos \frac{s}{\sqrt{3}} \right)$$

bulunur.

Ana teoremdede Tip II için verilen Frenet formüllerini 3-boyutlu uzaydaki $\beta_L(s)$ kuaterniyonik eğrisi için uygulanırsa, $\beta_L(s)$ kuaterniyonik eğrisinin diğer Frenet vektörlerini ve $\beta_L(s)$ eğrisinin eğriliklerini aşağıdaki hesaplanır:

$$\begin{aligned} \eta_L(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(0, \cos \frac{s}{\sqrt{3}} - \sin \frac{s}{\sqrt{3}}, -\sin \frac{s}{\sqrt{3}} - \cos \frac{s}{\sqrt{3}} \right), \\ \varrho_L(s) &= \frac{1}{\sqrt{6}} \left(-2, \cos \frac{s}{\sqrt{3}} + \sin \frac{s}{\sqrt{3}}, \cos \frac{s}{\sqrt{3}} - \sin \frac{s}{\sqrt{3}} \right), \\ r_1(s) &= \|\xi'_L(s)\| = \frac{\sqrt{2}}{3}, \\ r_2(s) &= \frac{1}{3}, \\ (r_2 - r_3)(s) &= 0 \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Buradan $Z_L(s)$ ve $W_L(s)$ vektörlerini aşağıdaki gibi hesaplayalım:

$$\begin{aligned} Z_L(s) &= X(s) \times \eta_L(s) \\ Z_L(s) &= \frac{1}{\sqrt{6}} \left(2 \sin \frac{s}{\sqrt{3}}, -2 \cos \frac{s}{\sqrt{3}}, 1, 1 \right) \end{aligned}$$

ve

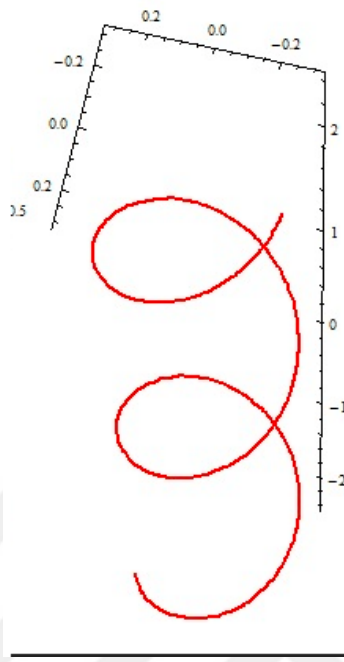
$$\begin{aligned} W_L(s) &= X(s) \times \varrho_L(s) \\ W_L(s) &= (0, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \end{aligned}$$

bulunur.

Böylece $\gamma(s)$ kuaterniyonik eğrisinin Ana teorem Tip II çatısının frenet elemanlarını aşağıdaki gibi elde ettik:

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left(-\sin \frac{s}{\sqrt{3}}, \cos \frac{s}{\sqrt{3}}, 1, 1 \right), \\ Y(s) &= \left(-\cos \frac{s}{\sqrt{3}}, -\sin \frac{s}{\sqrt{3}}, 0, 0 \right), \\ Z_L(s) &= \frac{1}{\sqrt{6}} \left(2 \sin \frac{s}{\sqrt{3}}, -2 \cos \frac{s}{\sqrt{3}}, 1, 1 \right), \\ W_L(s) &= (0, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), \\ r_3 &= \frac{1}{3} \\ r_1(s) &= \frac{\sqrt{2}}{3} \\ (r_2 - r_3)(s) &= 0. \end{aligned}$$

Ana teorem Tip II için $\gamma(s)$ kuaterniyonik eğrisinin görüntüsü aşağıdaki gibidir:



Şekil 3.2 $\gamma(s)$ eğrisi için Tip II Kuaterniyonik Eğri

Dolayısıyla $\gamma(s)$ kuaterniyonik eğrisinin Ana teoremden verilen Tip I ve tip II çatıları yukarıdaki gibi hesaplanabilir. Bulduğumuz bu çatılar yardımıyla aşağıda üç özel durum vereceğiz:

Durum 1

$\gamma(s)$ kuaterniyonik eğrisi için, $\xi_R(s)$ vektörü üç boyutlu uzayda ilişkili olduğu $\beta_R(s)$ eğrisinin teğet vektörü alınırsa,

$$\xi_R(s) = t(s)$$

Yoon'unun *On the Quaternionic general helices in Euclidean 4-space*, çalışmasındaki

çatı ve denklemler ile yukarıda bulduğumuz sonuçlar çıkarılır:

$$\begin{aligned}
X(s) &= T(s) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(-\sin \frac{s}{\sqrt{3}}, \cos \frac{s}{\sqrt{3}}, 1, 1 \right), \\
Y(s) &= N_1(s) = \left(-\cos \frac{s}{\sqrt{3}}, -\sin \frac{s}{\sqrt{3}}, 0, 0 \right), \\
Z_R(s) &= N_2(s) = \frac{1}{\sqrt{6}} \left(2 \sin \frac{s}{\sqrt{3}}, 2 \cos \frac{s}{\sqrt{3}}, 1, 1 \right), \\
W_R(s) &= N_3(s) = \left(0, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \\
r_3 &= K(s) = \frac{1}{3} \\
r_1(s) &= k(s) = -\frac{\sqrt{2}}{3} \\
(r_2 - r_3)(s) &= (r - K)(s) = 0.
\end{aligned}$$

Durum 2

$\gamma(s)$ kuaterniyonik eğrisi için, $\xi_R(s)$ ve $\xi_L(s)$ vektörleri üç boyutlu uzayda ilişkili olduğu $\beta_R(s)$ ve $\beta_L(s)$ eğrilerinin normalleri olarak alınır,

$$\xi_R(s) = \eta_R(s) \text{ ve } \xi_L(s) = \eta_L(s)$$

F.Aksoyak'ın *A New Type of Quaternionic Frame in $\mathbb{R}^4$* çalışmasındaki sonuçlar β_R ve β_L eğrilerin Frenet çatıları ve eğrilikleri ile çıkarılır: (ayrıntılar için bakınız *A New Type of Quaternionic Frame in $\mathbb{R}^4$* Örnek 6).

Durum 3

$\gamma(s)$ kuaterniyonik eğrisi için, $\xi_R(s)$ ve $\xi_L(s)$ vektörleri üç boyutlu uzayda ilişkili olduğu $\beta_R(s)$ ve $\beta_L(s)$ eğrisinin normal vektörü alınır,

$$\xi_R(s) = \eta_R(s) \text{ ve } \xi_L(s) = \eta_L(s)$$

üç boyutlu uzayda tanımlanan $n - c - w$ çatısı yardımıyla ilişkili olduğu eğrileri ve eğrilikleri kullanarak Frenet vektörlerini hesaplayalım:

Tip I çatısı için,

$$\begin{aligned}\xi_R(s) &= \eta_R(s) = N_1 \times \bar{T} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(1, \cos \frac{s}{\sqrt{3}} - \sin \frac{s}{\sqrt{3}}, \cos \frac{s}{\sqrt{3}} + \sin \frac{s}{\sqrt{3}} \right), \\ \eta_R(s) &= c(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(0, -\sin \frac{s}{\sqrt{3}} - \cos \frac{s}{\sqrt{3}}, -\sin \frac{s}{\sqrt{3}} + \cos \frac{s}{\sqrt{3}} \right), \\ \varrho_R(s) &= w(s) = \frac{1}{\sqrt{6}} \left(2, -\cos \frac{s}{\sqrt{3}} + \sin \frac{s}{\sqrt{3}}, -\cos \frac{s}{\sqrt{3}} - \sin \frac{s}{\sqrt{3}} \right), \\ f &= \sqrt{k^2 + r^2} = \|n'\| = \frac{\sqrt{2}}{3}, \\ g &= 0\end{aligned}$$

burada $k = r = \frac{1}{3}$ olarak hesaplanır.

Diğer yandan , $\vec{c} = -\frac{r_1}{f}\vec{t} + \frac{r_2}{f}\vec{b}$ ve $w = \frac{r_2}{f}\vec{t} + \frac{r_1}{f}\vec{b}$ vektörlerini hesaplanırsa,

$\frac{d\gamma}{ds} = t = \frac{r_2}{f}\vec{w} - \frac{r_1}{f}\vec{c}$ bulunur. Burada $r_1^2 + r_2^2 = \frac{2}{9}$ olduğundan $f = \sqrt{r_1^2 + r_2^2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$ olarak hesaplanır.

$r_1 = \frac{1}{3}$ ve $r_2 = \frac{1}{3}$ seçilirse,

$$\begin{aligned}\frac{d\gamma}{ds} &= t = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}} \cos \frac{s}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}} \sin \frac{s}{\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}} \cos \frac{s}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}} \sin \frac{s}{\sqrt{3}} \right) \\ \beta_R &= \left(\frac{s}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}-1}{2} \sin \frac{s}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}+1}{2} \cos \frac{s}{\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{3}+1}{2} \sin \frac{s}{\sqrt{3}} + \frac{1-\sqrt{3}}{2} \cos \frac{s}{\sqrt{3}} \right).\end{aligned}$$

$Z_R(s) = N_2(s) = c(s) \times T(s)$ ve $W_R(s) = N_3(s) = w(s) \times T(s)$ vektörleri hesaplanırsa:

$$\begin{aligned}Z_R(s) &= \frac{1}{\sqrt{6}} \left(2 \sin \frac{s}{\sqrt{3}}, -2 \cos \frac{s}{\sqrt{3}}, 1, 1 \right), \\ W_R(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (0, 0, -1, -1), \\ (r_2 - r_3)(s) &= r(s) - K(s) = 0\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Tip II için çatısı için, benzer işlemler yapılarak $\beta_L(s)$ eğrisinin Frenet vektörleri ve

eğrilikleriaşağıdak bulunur:

$$\begin{aligned}
\xi_L(s) &= n(s) = \bar{T} \times N_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(1, \cos \frac{s}{\sqrt{3}} + \sin \frac{s}{\sqrt{3}}, \cos \frac{s}{\sqrt{3}} - \sin \frac{s}{\sqrt{3}} \right), \\
\eta_L(s) &= c(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(0, \cos \frac{s}{\sqrt{3}} - \sin \frac{s}{\sqrt{3}}, -\sin \frac{s}{\sqrt{3}} - \cos \frac{s}{\sqrt{3}} \right), \\
\rho_L(s) &= w(s) = \frac{1}{\sqrt{6}} \left(-2, \cos \frac{s}{\sqrt{3}} + \sin \frac{s}{\sqrt{3}}, \cos \frac{s}{\sqrt{3}} - \sin \frac{s}{\sqrt{3}} \right), \\
f &= \sqrt{k^2 + r^2} = \|n'\| = \frac{\sqrt{2}}{3}, \\
g &= 0
\end{aligned}$$

burada $k = r = \frac{1}{3}$ olarak hesaplanır.

Diğer yandan, $\vec{c} = -\frac{r_1}{f}\vec{t} + \frac{r_2}{f}\vec{b}$ ve $w = \frac{r_2}{f}\vec{t} + \frac{r_1}{f}\vec{b}$ vektörlerini hesaplanırsa,

$\frac{d\gamma}{ds} = t = \frac{r_2}{f}\vec{w} - \frac{r_1}{f}\vec{c}$ bulunur. Burada $r_1^2 + r_2^2 = \frac{2}{9}$ olduğundan $f = \sqrt{r_1^2 + r_2^2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$ olarak hesaplanır.

$r_1 = \frac{1}{3}$ ve $r_2 = \frac{1}{3}$ seçilirse,

$$\begin{aligned}
\frac{d\gamma}{ds} &= t = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \cos \frac{s}{\sqrt{3}} + \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \sin \frac{s}{\sqrt{3}}, \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \cos \frac{s}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}} \sin \frac{s}{\sqrt{3}} \right), \\
\beta_L &= \left(-\frac{s}{\sqrt{3}}, \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \sin \frac{s}{\sqrt{3}} - \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \cos \frac{s}{\sqrt{3}}, \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \sin \frac{s}{\sqrt{3}} + \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \cos \frac{s}{\sqrt{3}} \right).
\end{aligned}$$

$Z_L(s) = N_2(s) = T(s) \times c(s)$ ve $W_L(s) = N_3(s) = T(s) \times w(s)$ vektörleri hesaplanırsa:

$$\begin{aligned}
Z_L(s) &= N_2(s) = \frac{1}{\sqrt{6}} \left(2 \sin \frac{s}{\sqrt{3}}, -2 \cos \frac{s}{\sqrt{3}}, 1, 1 \right), \\
W_L(s) &= N_3(s) = \left(0, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right).
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Örnek 3.2 $\gamma(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sin s, -\cos s, \frac{1}{2} \sin 2s, -\frac{1}{2} \cos 2s)$, 4-boyutlu uzayda bir kuaterniyonik helis eğrisidir. $\gamma(s)$ eğrisinin, 3-boyutlu uzayda ilişkili olduğu $\beta(s)$ spatial kuaterniyonik eğrisi yardımıyla Ana teoremden verilen Tip I ve Tip II X-Sağ helis

ve X-Sol helis çatılarını bulalım.

i) γ eğrisinin, Ana teoremden verilen Tip I, X-Sağ helis çatısını hesaplayalım:

$\gamma(s)$ kuaterniyonik eğrisinin $\{X(s), Y(s), Z_R(s), W_R(s); r_3(s), r_1(s), (r_2 - r_3)(s)\}$ Frenet elemanlarını hesaplayalım:

$\gamma(s)$ kuaterniyonik eğrisinin türevini alırsak;

$$X(s) = \gamma'(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos s, \sin s, \cos 2s, \sin 2s) \text{ ve } \|\gamma'(s)\| = 1 \quad (48)$$

olarak bulunur. $X(s)$ vektörünün türevi alınır,

$$X'(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin s, \cos s, -2\sin 2s, 2\cos 2s)$$

Buradan $\gamma(s)$ kuaterniyonik eğrisinin birinci eğriliği olan $r_3 = \|X'(s)\| = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$ olarak hesaplanır. Daha sonra $X'(s)$ vektörü kullanılarak $Y(s)$ vektörü aşağıdaki gibi bulunur:

$$Y(s) = \frac{X'(s)}{\|X'(s)\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-\sin s, \cos s, -2\sin 2s, 2\cos 2s). \quad (49)$$

$Y(s) \times \bar{X}(s)$ bir spatial kuaterniyon olmak üzere, $\gamma(s)$ kuaterniyonik eğrisinin ilişkili olduğu 3 boyutlu uzaydaki $\beta_R(s)$ kuaterniyonik eğrisini $\xi_R(s)$ vektörü yardımıyla bulalım.

$$\xi_R(s) = Y(s) \times \bar{X}(s) = \frac{1}{\sqrt{10}}(3, -\sin 3s, \cos 3s)$$

olmak üzere bu denklemin integrali alınır,

$$\beta_R(s) = \int \xi_R(s) = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}(3s, \frac{\cos 3s}{3}, \frac{\sin 3s}{3}) \right)$$

bulunur.

Ana teoremden Tip I için verilen Frenet formüllerini 3-boyutlu uzaydaki $\beta_R(s)$ kuaterniyonik eğrisi için uygulanırsa, $\beta_R(s)$ kuaterniyonik eğrisinin diğer Frenet vek-

törlerini ve β_R eğrisinin eğriliklerini aşağıdaki hesaplanır:

$$\begin{aligned}\eta_R(s) &= (0, -\cos 3s, -\sin 3s), \\ \varrho_R(s) &= \frac{1}{\sqrt{10}}(1, 3\sin 3s, -3\cos 3s), \\ r_3(s) &= \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}, \\ r_1(s) &= \frac{3}{\sqrt{10}}, \\ (r_2 - r_3)(s) &= \frac{4}{\sqrt{10}}\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Buradan $Z_R(s)$ ve $W_R(s)$ vektörlerini aşağıdaki gibi hesaplayalım:

$$\begin{aligned}Z_R(s) &= \eta_R(s) \times X(s) \\ Z_R(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos s, \sin s, -\cos 2s, -\sin 2s)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}W_R(s) &= \varrho_R(s) \times X(s) \\ W_R(s) &= \frac{1}{\sqrt{20}}(-4\sin s, 4\cos s, 2\sin 2s, -2\cos 2s).\end{aligned}$$

Böylece $\gamma(s)$ kuaterniyonik eğrisinin Ana teorem Tip I çatısının frenet elemanlarını aşağıdaki gibi elde ettik:

$$\begin{aligned}X(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos s, \sin s, \cos 2s, \sin 2s), \\ Y(s) &= \frac{1}{\sqrt{5}}(-\sin s, \cos s, -2\sin 2s, 2\cos 2s), \\ Z_R(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos s, \sin s, -\cos 2s, -\sin 2s), \\ W_R(s) &= \frac{1}{\sqrt{20}}(-4\sin s, 4\cos s, 2\sin 2s, -2\cos 2s),\end{aligned}$$

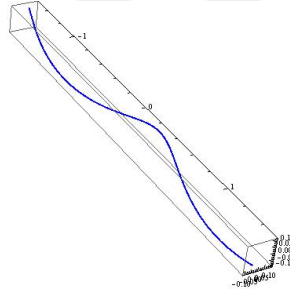
$$\begin{aligned}
r_3 &= \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}, \\
r_1(s) &= \frac{3}{\sqrt{10}}, \\
(r_2 - r_3)(s) &= \frac{4}{\sqrt{10}}.
\end{aligned}$$

$\gamma(s)$ kuaterniyonik eğrisinin Ana teorem Tip I çatısının frenet elemanları ve Tanım 3.3.2 yardımıyla X-Sağ helis eksen:

$$U_R(s) = \left(\frac{8}{3\sqrt{2}} \cos s, \frac{8}{3\sqrt{2}} \sin s, \frac{-2}{3\sqrt{2}} \cos 2s, \frac{-2}{3\sqrt{2}} \sin 2s \right)$$

şeklinde bulunur.

Ana teorem Tip I için $\gamma(s)$ kuaterniyonik eğrisinin görüntüsü aşağıdaki gibidir:



Şekil 3.3 $\gamma(s)$ eğrisi için Tip I Kuaterniyonik Eğri

ii) γ eğrisinin, Ana teoremden verilen Tip II, X-sol helis çatısını hesaplayalım:

$\gamma(s)$ kuaterniyonik eğrisinin $\{X(s), Y(s), Z_L(s), W_L(s); \tilde{r}_3(s), \tilde{r}_1(s), (\tilde{r}_2 + \tilde{r}_3)(s)\}$ Fre-

net elemanlarını hesaplayalım:

$\gamma(s)$ kuaterniyonik eğrisinin türevini alırsak;

$$X(s) = \gamma'(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos s, \sin s, \cos 2s, \sin 2s) \text{ ve } \|\gamma'(s)\| = 1 \quad (50)$$

olarak bulunur. $X(s)$ vektörünün türevi alınırsa,

$$X'(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin s, \cos s, -2\sin 2s, 2\cos 2s)$$

elde edilir. Buradan $\gamma(s)$ kuaterniyonik eğrisinin birinci eğriliği olan $\tilde{r}_3 = \|X'(s)\| = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$ olarak hesaplanır. Daha sonra $X'(s)$ vektörü kullanılarak $Y(s)$ vektörü aşağıdaki gibi bulunur:

$$Y(s) = \frac{X'(s)}{\|X'(s)\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-\sin s, \cos s, -2\sin 2s, 2\cos 2s). \quad (51)$$

Ana teoremden Tip I için verilen Frenet formüllerini 3-boyutlu uzaydaki $\beta_L(s)$ kuaterniyonik eğrisi için uygulanırsa, $\beta_L(s)$ kuaterniyonik eğrisinin diğer Frenet vektörlerini ve β_L eğrisinin eğriliklerini aşağıdaki hesaplanır:

$$\xi_L(s) = \bar{X}(s) \times Y(s) = \frac{1}{\sqrt{10}}(-1, -3\sin s, 3\cos s)$$

olmak üzere bu denklemin integrali alınırsa,

$$\beta_L(s) = \int \xi_L(s) = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}(-s, 3\cos s, 3\sin s)\right)$$

bulunur.

$$\begin{aligned} \eta_L(s) &= (0, -\cos s, -\sin s), \\ \varrho_L(s) &= \frac{1}{\sqrt{10}}(3, -\sin s, \cos s), \\ \tilde{r}_3(s) &= \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}, \\ \tilde{r}_1(s) &= \frac{3}{\sqrt{10}}, \\ (\tilde{r}_2 + \tilde{r}_3)(s) &= \frac{4}{\sqrt{10}} \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Buradan $Z_L(s)$ ve $W_L(s)$ vektörlerini aşağıdaki gibi hesaplayalım:

$$\begin{aligned} Z_L(s) &= X(s) \times \eta_L(s) \\ Z_L(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos s, \sin s, -\cos 2s, -\sin 2s) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} W_L(s) &= X(s) \times \varrho_L(s) \\ W_L(s) &= \frac{1}{\sqrt{20}}(-4 \sin s, 4 \cos s, 2 \sin 2s, -2 \cos 2s). \end{aligned}$$

Böylece $\gamma(s)$ kuaterniyonik eğrisinin Ana teorem Tip II çatısının frenet elemanlarını aşağıdaki gibi elde ettik:

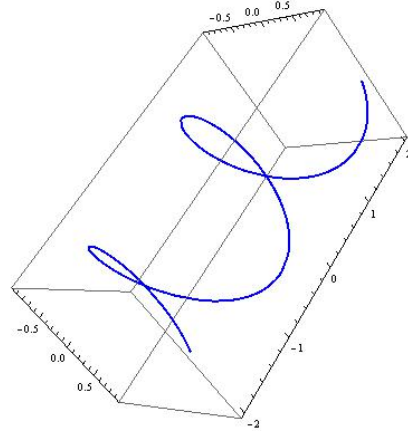
$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos s, \sin s, \cos 2s, \sin 2s), \\ Y(s) &= \frac{1}{\sqrt{5}}(-\sin s, \cos s, -2 \sin 2s, 2 \cos 2s), \\ Z_L(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos s, \sin s, -\cos 2s, -\sin 2s), \\ W_L(s) &= \frac{1}{\sqrt{20}}(-4 \sin s, 4 \cos s, 2 \sin 2s, -2 \cos 2s), \\ \tilde{r}_3 &= \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}, \\ \tilde{r}_1(s) &= \frac{3}{\sqrt{10}}, \\ (\tilde{r}_2 + \tilde{r}_3)(s) &= \frac{4}{\sqrt{10}}. \end{aligned}$$

$\gamma(s)$ kuaterniyonik eğrisinin Ana teorem Tip II çatısının frenet elemanları ve Tanım 3.3.5 yardımıyla X-Sol helis eksen:

$$U_L(s) = \left(\frac{8}{3\sqrt{2}} \cos s, \frac{8}{3\sqrt{2}} \sin s, \frac{-2}{3\sqrt{2}} \cos 2s, \frac{-2}{3\sqrt{2}} \sin 2s \right)$$

şeklinde bulunur.

Ana teorem Tip II için $\gamma(s)$ kuaterniyonik eğrisinin görüntüsü aşağıdaki gibidir:



Şekil 3.4 $\gamma(s)$ eğrisi için Tip II Kuaterniyonik Eğri

Burada yine üç özel durum için çatılar hesaplanabilir. Biz genel çatıları hesapladık.

4. KÜRESEL EĞRİLER VE HELİSLER

Bu kısımda helislerin karakterizasyonlarını, küresel eğrilerin karakterizasyonlarını kullanarak vereceğiz.

$\mathbb{E}^3$ te, $\kappa = \frac{r_1}{r_3}$, $\tau = r_2 - r_1$ eğrilikleri olan bir eğriyi $\alpha(s)$ ile $\mathbb{E}^4$ te, r_1, r_2, r_3 eğrilikleri olan bir eğriyi $\gamma(s)$ ile gösterelim. $\alpha(s)$ eğrisi ve $\gamma(s)$ aşağıdaki teoremleri sağlar.

Teroem 4.1 $\mathbb{E}^3$ uzayında $\kappa = \frac{r_1}{r_3}$, $\tau = r_2 - r_3$ eğriliklerine sahip bir uzay eğrisi $\alpha(s)$ olsun.

$\alpha(s)$ küreseldir $\Leftrightarrow \gamma(s)$, $\mathbb{E}^4$ te, $r_3, r_1, r_2 - r_3$ eğrilikleri olan bir helistir.

İspat. $\alpha(s)$ küresel olsun. Küresel eğrilerin hipotezleri yardımıyla

$$\frac{1}{\kappa} + \frac{1}{\tau^2} \left(\frac{1}{\kappa} \right)'$$

sabittir. O halde $\kappa = \frac{r_1}{r_3}$ ve $\tau = r_2 - r_3$ eğrilikleri yerine yazılırsa,

$$\frac{r_3}{r_1} + \left[\frac{1}{r_2 - r_3} \frac{d}{ds} \left(\frac{r_3}{r_1} \right) \right]$$

bulunur. (28) yardımıyla

$$\left(\frac{r_3}{r_1} \right)^2 + \left[\frac{1}{r_2 - r_3} \frac{d}{ds} \left(\frac{r_3}{r_1} \right) \right]^2$$

sabit bulunur. Bu da $\alpha(s)$ küresel eğrisinin $\mathbb{E}^4$ uzayındaki $\gamma(s)$ eğrisinin bir X-Sağ helis olduğunu belirtir.

Tersi için yine küresel eğrilerin hipotezleri yardımıyla hipotez tamamlanır.

Teroem 4.2 $\mathbb{E}^3$ uzayında $\kappa = \frac{r_1}{r_3}$, $\tau = r_2 + r_3$ eğriliklerine sahip bir uzay eğrisi

$\alpha(s)$ olsun.

$\alpha(s)$ küreseldir $\Leftrightarrow \gamma(s)$, $\mathbb{E}^4$ te, $r_3, r_1, r_2 + r_3$ eğrilikleri olan bir helistir.

İspat. $\alpha(s)$ küresel olsun. Küresel eğrilerin hipotezleri yardımıyla

$$\frac{1}{\kappa} + \frac{1}{\tau^2} \left(\frac{1}{\kappa} \right)'$$

sabittir. O halde $\kappa = \frac{r_1}{r_3}$ ve $\tau = r_2 + r_3$ eğrilikleri yerine yazılırsa,

$$\frac{r_3}{r_1} + \left[\frac{1}{r_2 + r_3} \frac{d}{ds} \left(\frac{r_3}{r_1} \right) \right]$$

bulunur. (36) yardımıyla

$$\left(\frac{r_3}{r_1} \right)^2 + \left[\frac{1}{r_2 + r_3} \frac{d}{ds} \left(\frac{r_3}{r_1} \right) \right]^2$$

sabit bulunur. Bu da $\alpha(s)$ küresel eğrisinin $\mathbb{E}^4$ uzayındaki $\gamma(s)$ eğrisinin bir X-Sol helis olduğunu belirtir.

Tersi için yine küresel eğrilerin hipotezleri yardımıyla hipotez tamamlanır.

5. HİPER DUAL KUATERNİYONİK EĞRİLER

Dual kuaterniyonlar ve dual kuaterniyonik eğriler A. Tuna Aksoy ve A.C. Çöken tarafından çalışmış ve karakterizasyonları verilmiştir. Biz bu bölümde hiper dual kuaterniyonların tanımını vererek hiper dual kuaterniyonik eğrileri tanımlayacağız. Hiper dual kuaterniyonların sağ çarpım ve sol çarpım kurallarını gözönüne alarak Frenet formüllerini ve karakterizasyonunu vermeye çalışacağız.

Tanım 5.1.1 (Hiper Dual Kuaterniyon) Katsayıları birer hiper dual sayılar olan kuaterniyonlara hiper dual kuaterniyon denir. Hiper dual kuaterniyonlar kümesi H_{HD} olmak üzere

$$H_{HD} = \left\{ \tilde{Q} = Q_0 + Q_1i + Q_2j + Q_3k; Q_0, Q_{1,2,3} \in HD \mid \begin{array}{l} Q_0 = \hat{q}_0 + \varepsilon \hat{q}_0^*, \\ Q_1 = \hat{q}_1 + \varepsilon \hat{q}_1^*, \\ Q_2 = \hat{q}_2 + \varepsilon \hat{q}_2^*, \\ Q_3 = \hat{q}_3 + \varepsilon \hat{q}_3^* \end{array} \right\}$$

şeklinde gösterilir.

Herhangi iki dual kuaterniyon $\tilde{q}_1 = A_0 + A_1i + A_2j + A_3k$ ve $\tilde{q}_2 = B_0 + B_1i + B_2j + B_3k$ olmak üzere bir hiper dual kuaterniyon

$$\hat{Q}_0 = \hat{q} + \delta \hat{q}^*, \delta \neq 0 \text{ ve } \delta^2 = 0$$

şeklinde ifade edilir. $\tilde{Q}_0$ hiper dual kuaterniyonunu

$$\tilde{Q} = Q_0 + Q_1i + Q_2j + Q_3k$$

şeklinde yazmak mümkündür. $\tilde{Q} = Q_0 + Q_1i + Q_2j + Q_3k$ hiper dual kuaterniyonunun skaler kısmı

$$S_{\tilde{Q}} = Q_0 = S_{\hat{q}} + \delta S_{\hat{q}^*}$$

ve vektörel kısmı

$$V_{\tilde{Q}} = Q_0 + Q_1i + Q_2j + Q_3k = V_{\tilde{q}} + \delta V_{\tilde{q}^*}$$

olmak üzere $\tilde{Q}$ hiper dual kuaterniyonu skaler ve vektörel kısımların toplamı olarak

$$\tilde{Q} = S_{\tilde{Q}} + V_{\tilde{Q}}$$

biçiminde yazılabilir.

Tanım 5.1.2 (Pür Hiper Dual Kuaterniyonu) $\tilde{Q}$ hiper dual kuaterniyonunun skaler kısmı sıfıra eşitse yani $S_{\tilde{Q}} = 0$ ise pür hiper dual kuaterniyon olarak adlandırılır.

Tanım 5.1.3 (Hiper Dual Kuaterniyonların Toplamı) H_{HD} cümlesi üzerinde iki hiper dual kuaterniyon $\tilde{Q} = Q_0 + Q_1i + Q_2j + Q_3k$ ve $\tilde{P} = P_0 + P_1i + P_2j + P_3k$ olmak üzere, bu iki hiper dual kuaterniyonun toplamı,

$$\begin{aligned} \oplus & : H_{HD} \times H_{HD} \rightarrow H_{HD} \\ \tilde{Q} \oplus \tilde{P} & = (S_{\tilde{Q}} + S_{\tilde{P}}) + (V_{\tilde{Q}} + V_{\tilde{P}}) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlıdır.

Tanım 5.1.4 (Hiper Dual Kuaterniyonların Bir Skaler ile Çarpımı) H_{HD} cümlesi üzerinde $\tilde{Q} = Q_0 + Q_1i + Q_2j + Q_3k$ hiper dual kuaterniyon ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere hiper dual kuaterniyonların skalarla çarpımı,

$$\begin{aligned} \odot & : \mathbb{R} \times H_{HD} \rightarrow H_{HD} \\ \lambda \odot \tilde{Q} & = \lambda Q_0 + (\lambda Q_1)i + (\lambda Q_2)j + (\lambda Q_3)k \end{aligned}$$

şeklinde tanımlıdır.

Tanım 5.1.5 (Hiper Dual Kuaterniyon Çarpımı) H_{HD} cümlesi üzerinde iki hiper dual kuaterniyon $\tilde{Q} = Q_0 + Q_1i + Q_2j + Q_3k$ ve $\tilde{P} = P_0 + P_1i + P_2j + P_3k$ olsun. Bu iki hiper dual kuaterniyonun çarpımı,

$$\begin{aligned} \otimes & : H_{HD} \times H_{HD} \rightarrow H_{HD} \\ (\tilde{Q}, \tilde{P}) & \rightarrow \tilde{Q} \otimes \tilde{P} \end{aligned}$$

şeklinde olmak üzere,

$$\tilde{Q} \otimes \tilde{P} = S_{\tilde{Q}}S_{\tilde{P}} - \langle V_{\tilde{Q}}, V_{\tilde{P}} \rangle + S_{\tilde{Q}}V_{\tilde{P}} + S_{\tilde{P}}V_{\tilde{Q}} + V_{\tilde{Q}} \wedge V_{\tilde{P}}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 5.1.6 (Hiper Dual Kuaterniyonunun Eşleniği) H_{HD} cümlesi üzerinde herhangi bir hiper dual kuaterniyonu $\tilde{Q} = Q_0 + Q_1i + Q_2j + Q_3k$ olmak üzere, bu hiper dual kuaterniyonun eşleniği $\overline{\tilde{Q}}$ ile gösterilir ve

$$\overline{\tilde{Q}} = Q_0 - Q_1i - Q_2j - Q_3k$$

şeklinde tanımlıdır.

Tanım 5.1.7 (Hiper Dual Kuaterniyonunun Normu) H_{HD} cümlesi üzerinde $\tilde{Q} = Q_0 + Q_1i + Q_2j + Q_3k$ hiper dual kuaterniyonu için,

$$\begin{aligned} N & : H_{HD} \rightarrow H_{HD} \\ \tilde{Q} & \rightarrow N(\tilde{Q}) = N_{\tilde{Q}} = Q_0^2 + Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan $N_{\tilde{Q}}$ hiper dual sayısına $\tilde{Q}$ hiper dual kuaterniyonun normu denir.

Eğer $N_{\tilde{Q}} = 1$ ise $\hat{Q}$ birim hiper dual kuaterniyonu olarak adlandırılır.

Tanım 5.1.8 (Hiper Dual Kuaterniyonunun Tersİ) H_{HD} cümlesi üzerinde $\tilde{Q} = Q_0 + Q_1i + Q_2j + Q_3k$ hiper dual kuaterniyonunun tersi

$$\tilde{Q}^{-1} = \frac{\overline{\tilde{Q}}}{N_{\tilde{Q}}} = \frac{Q_0 - Q_1i - Q_2j - Q_3k}{Q_0^2 + Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2}, \quad Q_0^2 + Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2 \neq 0$$

şeklinde tanımlıdır.

Tanım 5.1.9 (Pür Hiper Dual Kuaterniyonlar.Uzayı): H_{HD} cümlesi üzerinde bir birim hiper kuaterniyon

$$\tilde{Q} = \cos \frac{\tilde{\theta}}{2} + \sin \frac{\tilde{\theta}}{2} \tilde{S}$$

olmak üzere, $\tilde{Q}$ birim hiper kuaterniyonuna karşılık gelen hiper dual ortogonal matris

$$\tilde{A} = I_3 + \sin \tilde{\theta} \tilde{S} + (1 - \cos \tilde{\theta}) \tilde{S}^2$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned} f : \tilde{D}^3 &\rightarrow \tilde{D}^3 \\ \tilde{X} &\rightarrow f(\tilde{X}) = \tilde{Q} \tilde{X} \tilde{Q}^* \\ &= \hat{A} \tilde{X} \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Böylece $\tilde{D}^3$ uzayı pür hiper dual kuaterniyonlar uzayıdır.

Tanım 5.2.1 (Hiper Dual Kuaterniyonik Eğri) $H_{HD} = \{\tilde{Q} = Q_1 + Q_2i + Q_3j + Q_4k \mid \tilde{Q}_i = \hat{q}_i + \delta \hat{q}_i^*, \hat{q}_i \hat{q}_i^* \in D, \tilde{Q}_i \in HD\} \subset D_{HD}^4$ cümlesi ve $s \in I$ eğri boyunca yay uzunluğu parametresi ve $I, \mathbb{R}$ nin bir açık aralığı olmak üzere,

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha} : I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow H_{HD} \\ s &\longrightarrow \tilde{\alpha}(s) = \tilde{\alpha}_1(s) + \tilde{\alpha}_2(s)\vec{i} + \tilde{\alpha}_3(s)\vec{j} + \tilde{\alpha}_4(s)\vec{k}, \tilde{\alpha}_i(s) \in HD \end{aligned} \quad (52)$$

$\tilde{\alpha}(s)$ eğrisi, H_{HD} uzayında bir hiper dual kuaterniyonik eğri olarak tanımlanır. Yani katsayıları hiper dual sayılar olan kuaterniyonik eğrilere hiper dual kuaterniyonik

eğri denir.

$$\tilde{\alpha}(s) = \tilde{\alpha}(s) + \delta \tilde{\alpha}^*(s), \quad \tilde{\alpha}(s), \tilde{\alpha}^*(s) \in D^4$$

Bu çalışma boyunca, tüm eğrilerin yay uzunluğu parametresi ile çalıştığımızı varsayıyoruz.

Örnek 5.2.1

$$\tilde{\alpha}(s) = ((\cos s + \varepsilon \sin s) + si + \varepsilon j + k) + \delta ((e^s + \varepsilon s) + (\varepsilon \sin s) i + j + (s + \varepsilon s^2) k)$$

eğrisinin bir hiper dual kuaterniyonik eğrisi olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}(s) &= ((\cos s + \varepsilon \sin s) + si + \varepsilon j + k) + \delta ((e^s + \varepsilon s) + (\varepsilon \sin s) i + j + (s + \varepsilon s^2) k), \\ &= [(\cos s + \varepsilon \sin s) + \delta (e^s + \varepsilon s)] + [s + \delta (\varepsilon \sin s)] i + [\varepsilon + \delta] j \\ &\quad + [1 + \delta (s + \varepsilon s^2)] k \end{aligned}$$

şeklinde yazılırsa buradan $\tilde{\alpha}_1(s)$, $\tilde{\alpha}_2(s)$, $\tilde{\alpha}_3(s)$ ve $\tilde{\alpha}_4(s)$,

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_1(s) &= [(\cos s + \varepsilon \sin s) + \delta (e^s + \varepsilon s)], \\ \tilde{\alpha}_2(s) &= [s + \delta (\varepsilon \sin s)] \\ \tilde{\alpha}_3(s) &= [\varepsilon + \delta] \\ \tilde{\alpha}_4(s) &= [1 + \delta (s + \varepsilon s^2)] \end{aligned}$$

olarak yazılabilir ve böylece $\tilde{\alpha}(s)$ eğrisi aşağıdaki gibi yazılabilir ki bu da bize $\tilde{\alpha}(s)$ eğrisinin bir hiper dual kuaterniyonik eğrisi olduğunu gösterir:

$$\tilde{\alpha}(s) = \tilde{\alpha}_1(s) + \tilde{\alpha}_2(s)i + \tilde{\alpha}_3(s)j + \tilde{\alpha}_4(s)k.$$

Tanım 5.2.2

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}(s) &= \hat{\beta}_1(s)\vec{e}_1 + \hat{\beta}_2(s)\vec{e}_2 + \hat{\beta}_3(s)\vec{e}_3 \\ &\quad + \delta [\hat{\beta}_1^*(s)\vec{e}_1 + \hat{\beta}_2^*(s)\vec{e}_2 + \hat{\beta}_3^*(s)\vec{e}_3] \end{aligned}$$

yay uzunluğu ile parametrelenmiş bir dual spatial kuaterniyonik eğri olsun.

$\{\tilde{t}, \tilde{n}, \tilde{b}; \tilde{K}, \tilde{R}\} \mathbb{Q}_D$, $\tilde{\beta}(s)$ boyunca Frenet çatısı olmak üzere, $\tilde{\beta}(s)$ dual spatial kuaterniyonik eğrisinin Serret-Frenet formülleri şu şekilde verilir:

$$\begin{aligned}\tilde{t} &= \hat{t} + \delta \hat{t}^* \\ &= (\hat{t}_1 i + \hat{t}_2 j + \hat{t}_3 k) + \delta (\hat{t}_1^* i + \hat{t}_2^* j + \hat{t}_3^* k), \quad \hat{t}_i \in D, \quad \hat{t}_i^* \in D \\ \tilde{n} &= \hat{n} + \delta \hat{n}^* \\ &= (\hat{n}_1 i + \hat{n}_2 j + \hat{n}_3 k) + \delta (\hat{n}_1^* i + \hat{n}_2^* j + \hat{n}_3^* k), \quad \hat{n}_i \in D, \quad \hat{n}_i^* \in D \\ \tilde{b} &= \hat{b} + \delta \hat{b}^* \\ &= (\hat{b}_1 i + \hat{b}_2 j + \hat{b}_3 k) + \delta (\hat{b}_1^* i + \hat{b}_2^* j + \hat{b}_3^* k), \quad \hat{b}_i \in D, \quad \hat{b}_i^* \in D\end{aligned}$$

vektörlerinin birer pür hiper dual birim kuaterniyon olduğu görülür.ve

$$\begin{aligned}\|\tilde{t}\| &= \|\tilde{n}\| = \|\tilde{b}\| = 1, \\ \langle \tilde{t}, \tilde{t} \rangle &= \langle \tilde{n}, \tilde{n} \rangle = \langle \tilde{b}, \tilde{b} \rangle = 1, \\ \langle \tilde{t}, \tilde{n} \rangle &= \langle \tilde{t}, \tilde{b} \rangle = \langle \tilde{n}, \tilde{b} \rangle = 0\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır.

$$\begin{aligned}\tilde{\kappa} &= \hat{\kappa} + \delta \hat{\kappa}^*, \\ \tilde{R} &= \hat{R} + \delta \hat{R}^*\end{aligned}$$

$\tilde{\kappa}$ ve $\tilde{R}$ hiper dual sayıları, sırasıyla $\tilde{\beta}(s)$ eğrisinin reel kısmı tarafından belirlenen, $\mathbb{R}^3$ uzayındaki eğrinin birinci eğriliği ve torsiyonudur.

$$\begin{bmatrix} \tilde{t}' \\ \tilde{n}' \\ \tilde{b}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{\kappa} & 0 \\ -\tilde{\kappa} & 0 & \tilde{R} \\ 0 & -\tilde{R} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{t} \\ \tilde{n} \\ \tilde{b} \end{bmatrix}.$$

3. bölümde ispatını verdiğimiz Ana teorem Tip I ve Tip II çatılarını katsayıları hiper dual sayı olan kuaterniyonik eğrilere uygularsak aşağıdaki tanımları ve çatıları elde edebiliriz. Bu tanımlar ve çatılar yardımıyla bir hiper dual kuaterniyonik helisin

karakterizasyonu kolaylıkla verilebilir.

Tanım 5.3.1: (Hiper Dual Kuaterniyonik X-Sağ Helis) $H_{HD} = \{\tilde{Q} = Q_1 + Q_2i + Q_3j + Q_4k \mid \tilde{Q}_i \in HD\} \subset D_{HD}^4$ cümlesi ve $s \in I$ eğri boyunca yay uzunluğu parametresi ve $I, \mathbb{R}$ nin bir açık aralığı olmak üzere,

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha} : I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow H_{HD} \\ s &\longrightarrow \tilde{\alpha}(s) = \tilde{\alpha}_1(s) + \tilde{\alpha}_2(s)\vec{i} + \tilde{\alpha}_3(s)\vec{j} + \tilde{\alpha}_4(s)\vec{k}, \tilde{\alpha}_i(s) \in HD \end{aligned} \quad (53)$$

sıfırdan farklı eğrilikleri olan bir hiper dual kuaterniyonik eğri olsun. ve $\tilde{\alpha}(s)$ eğrisi üzerinde bir $\{\tilde{X}(s), \tilde{Y}(s), \tilde{Z}_R(s), \tilde{W}_R(s)\}$ ortonormal çatısı verilsin.

$$\tilde{X}(s) = \frac{\tilde{\alpha}'(s)}{\|\tilde{\alpha}'(s)\|}, \tilde{\alpha}(s) \text{ üzerinde birim vektör alanı olmak üzere}$$

$$h(\tilde{X}(s), \tilde{U}_R(s)) = \langle \tilde{X}(s), \tilde{U}_R(s) \rangle = \cos\theta = \text{sabit}$$

$\|\tilde{U}_R(s)\| = 1$ sabit vektör ise $\tilde{\alpha}(s)$ eğrisine, bir hiper dual kuaterniyonik X-Sağ helis denir.

Hiper dual kuaterniyonik X-Sağ helisler, Ana teoremden verilen Tip I Frenet formüllerinin hiper dual sayılarla elde edilmesiyle tanımlanır ve hiper dual kuaterniyonik X-Sağ helisler aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{bmatrix} \tilde{X}' \\ \tilde{Y}' \\ \tilde{Z}'_R \\ \tilde{W}'_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{K} & 0 & 0 \\ -\tilde{K} & 0 & \tilde{\kappa} & 0 \\ 0 & -\tilde{\kappa} & 0 & \tilde{R} - \tilde{K} \\ 0 & 0 & -(\tilde{R} - \tilde{K}) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \\ \tilde{Z}_R \\ \tilde{W}_R \end{bmatrix}$$

Burada $\tilde{K}(s)$, $\tilde{\kappa}(s)$ ve $(\tilde{R} - \tilde{K})(s)$ eğrilikleri sıfırdan farklı eğriliklerdir.

Tanım 5.3.2 (Hiper Dual Kuaterniyonik X-Sağ Helis İçin Eksen)

$\tilde{\alpha} : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow H_{HD}$ Hiper dual kuaterniyonik X-Sağ helis ve bu helis üzerine

bir $\{\tilde{X}(s), \tilde{Y}(s), \tilde{Z}_R(s), \tilde{W}_R(s)\}$ ortonormal çatısı verilsin. Tanım 3.3.2 deki ispata benzer yöntemle $\tilde{\alpha}(s)$ eğrisinin eksen,

$$\tilde{U}_R(s) = \tilde{X}(s) + \left(\frac{\tilde{K}(s)}{\tilde{\kappa}(s)} \right) \tilde{Z}_R(s) + \frac{1}{(\tilde{R} - \tilde{K})(s)} \left(\frac{\tilde{K}(s)}{\tilde{\kappa}(s)} \right)' \tilde{W}_R(s)$$

şeklinde yazılabilir. Hiper dual kuaterniyonik X-Sağ helis için bu eksen, $\tilde{Q}_R(s)$ hiper dual kuaterniyonu yardımıyla da aşağıdaki,

$$\tilde{U}_R(s) = \tilde{Q}_R(s) \times \tilde{X}(s)$$

ifade edilebilir.

Teorem 5.3.1 $H_{HD} = \{\tilde{Q} = Q_1 + Q_2i + Q_3j + Q_4k \mid \tilde{Q}_i \in HD\} \subset D_{HD}^4$ de sıfırdan farklı eğrilikleri $\tilde{K}(s)$, $\tilde{\kappa}(s)$ ve $(\tilde{R} - \tilde{K})(s)$ olan yay uzunluğu parametresi ile tanımlanan bir hiper dual birim kuaterniyonik $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}(s)$ eğrisi alalım. $\tilde{\alpha}(s)$ eğrisi H_{HD} bir hiper dual kuaterniyonik X-Sağ helistir ancak ve ancak

$$\left(\frac{\tilde{K}(s)}{\tilde{\kappa}(s)} \right)^2 + \left[\frac{1}{(\tilde{R} - \tilde{K})(s)} \frac{d}{ds} \left(\frac{\tilde{K}(s)}{\tilde{\kappa}(s)} \right) \right]^2 \quad (54)$$

eşitliği sabittir.

İspat. $\tilde{\alpha}(s)$ eğrisi H_{HD} de eksen $\tilde{U}_R(s)$ birim vektörü olan bir hiper dual birim kuaterniyonik X-Sağ helis olsun. $\tilde{\alpha}(s)$ eğrisi helis olduğu için eğri boyunca

$$h(\tilde{X}(s), \tilde{U}_R(s)) = \text{sabittir. (helis olma şartı)}$$

Buradan

$$h(\tilde{X}(s), \tilde{U}_R(s)) = \frac{1}{2}(\tilde{X}(s) \times \overline{\tilde{U}_R(s)} + \tilde{U}_R(s) \times \overline{\tilde{X}(s)})$$

eşitliğinin s yay parametresine göre türevi alınırsa,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}h(\tilde{X}(s), \tilde{U}_R(s)) &= \frac{1}{2} \frac{d}{ds}(\tilde{X}(s) \times \overline{\tilde{U}}_R(s) + \tilde{U}_R(s) \times \tilde{X}(s)) \\
&= \frac{1}{2}(\tilde{X}'(s) \times \overline{\tilde{U}}_R(s) + \tilde{U}_R(s) \times \tilde{X}'(s)) \\
&= h(\tilde{X}'(s), \tilde{U}_R(s)) \\
&= \tilde{K}(s)h(\tilde{Y}(s), \tilde{U}_R(s))
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Burada Ana teoremin Tip I (Sağ Çarpım Frenet Çatısı) Frenet formüllerini hiper dual kuaterniyonik eğrileri için kullanarak,

$$h(\tilde{X}'(s), \tilde{U}_R(s)) = h(\tilde{K}(s)\tilde{Y}(s), \tilde{U}_R(s)) = \tilde{K}(s)h(\tilde{Y}(s), \tilde{U}_R(s)) = 0$$

bulunur. Dolayısıyla $\tilde{U}_R(s)$ birim vektörünü ,

$$\tilde{U}_R(s) = a_1(s)\tilde{X}(s) + a_2(s)\tilde{Z}_R(s) + a_3(s)\tilde{W}_R(s) \quad (55)$$

şeklinde yazabiliriz. $\tilde{U}_R(s)$ birim vektör olduğundan $\|\tilde{U}_R(s)\| = \tilde{a}_1^2 + \tilde{a}_2^2 + \tilde{a}_3^2 = 1$ ve $h(\tilde{X}(s), \tilde{U}_R(s)) = \tilde{a}_1 = \text{sabit}$, $h(\tilde{Z}_R(s), \tilde{U}_R(s)) = \tilde{a}_2$, $h(\tilde{W}_R(s), \tilde{U}_R(s)) = \tilde{a}_3$ tür. Burada hiper dual uzayında çalıştığımız için katsayıların hiper dual sayılar olduğunu unutmamalıyız.

$\tilde{U}_R(s)$ eşitliğinin türevi alınırsa,

$$\tilde{a}_1(s)\tilde{X}'(s) + \tilde{a}_2'(s)\tilde{Z}_R(s) + \tilde{a}_2(s)\tilde{Z}_R'(s) + \tilde{a}_3'(s)\tilde{W}_R(s) + \tilde{a}_3(s)\tilde{W}_R'(s) = 0$$

ve

$$\left(\tilde{a}_1\tilde{K}(s) - \tilde{a}_2\tilde{\kappa}(s)\right)(s)\tilde{Y}(s) + \tilde{a}_2' - \tilde{a}_3\left(\tilde{R} - \tilde{K}\right)(s)\tilde{Z}_R(s) + (\tilde{a}_3' + \tilde{a}_2(\tilde{R} - \tilde{K}))(s)\tilde{W}_R(s) = 0$$

eşitlikleri elde edilir.

Bu eşitlik yardımıyla

$$\begin{aligned}\left(\tilde{a}_1 \tilde{K}(s) - \tilde{a}_2 \tilde{\kappa}(s)\right)(s) &= 0, \\ \left(\tilde{a}_2' - \tilde{a}_3 \left(\tilde{R} - \tilde{K}\right)(s)\right) \tilde{Z}_R(s) &= 0, \\ \left(\tilde{a}_3' + \tilde{a}_2 \left(\tilde{R} - \tilde{K}\right)(s)\right) \tilde{W}_R(s) &= 0\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}\tilde{a}_2 &= \tilde{a}_1 \frac{\tilde{K}(s)}{\tilde{\kappa}(s)}(s) = -\frac{1}{\left(\tilde{R} - \tilde{K}\right)(s)} \tilde{a}_3', \\ \tilde{a}_2' &= \tilde{a}_3 \left(\tilde{R} - \tilde{K}\right)(s)\end{aligned}\tag{56}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitliklerdeki denklemler kullanılarak ,

$$\tilde{a}_3'' - \frac{\left(\tilde{R} - \tilde{K}\right)'(s)}{\left(\tilde{R} - \tilde{K}\right)(s)}(s) \tilde{a}_3' + \left[\left(\tilde{R} - \tilde{K}\right)(s)\right]^2 \tilde{a}_3 = 0\tag{57}$$

başlangıç-değer problemi elde edilir. Elde edilen bu başlangıç değer probleminin çözümü Teorem 3.3.1 dekine benzer yöntemle çözülerek

$$\left(\frac{\tilde{K}(s)}{\tilde{\kappa}(s)}\right)^2 + \left[\frac{1}{\left(\tilde{R} - \tilde{K}\right)(s)} \frac{d}{ds} \left(\frac{\tilde{K}(s)}{\tilde{\kappa}(s)}\right)\right]^2$$

bu eşitliğin sabit olduğu kolayca bulunur.

Tersine yine Teorem 3.3.2 dekine benzer yöntemle $\tilde{U}_R(s)$ in sabit olduğu bulunarak ispat tamamlanır.

Tanım 5.3.3 (Hiper Dual Kuaterniyonik X-Sol Helis) $H_{HD} = \{\tilde{Q} = Q_1 + Q_2i + Q_3j + Q_4k \mid \tilde{Q}_i \in HD\} \subset D_{HD}^4$ cümlesi ve $s \in I$ eğri boyunca yay uzunluğu

parametresi ve $I, \mathbb{R}$ nin bir açık aralığı olmak üzere,

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha} : I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow H_{HD} \\ s &\longrightarrow \tilde{\alpha}(s) = \tilde{\alpha}_1(s) + \tilde{\alpha}_2(s)\vec{i} + \tilde{\alpha}_3(s)\vec{j} + \tilde{\alpha}_4(s)\vec{k}, \tilde{\alpha}_i(s) \in HD \end{aligned} \quad (58)$$

sıfırdan farklı eğrilikleri olan bir hiper dual kuaterniyonik eğri olsun. ve $\tilde{\alpha}(s)$ eğrisi üzerinde bir $\{\tilde{X}(s), \tilde{Y}(s), \tilde{Z}_L(s), \tilde{W}_L(s)\}$ ortonormal çatısı verilsin.

$\tilde{X}(s) = \frac{\tilde{\alpha}'(s)}{\|\tilde{\alpha}'(s)\|}$, $\tilde{\alpha}(s)$ üzerinde birim vektör alanı olmak üzere

$$h(\tilde{X}(s), \tilde{U}_L(s)) = \langle \tilde{X}(s), \tilde{U}_L(s) \rangle = \cos\theta = \text{sabit}$$

$\|\tilde{U}_L(s)\| = 1$ sabit vektör ise $\tilde{\alpha}(s)$ eğrisine, bir hiper dual kuaterniyonik X-Sol helis denir.

Hiper dual kuaterniyonik X-Sol helisler, Ana teoremden verilen Tip II Frenet formüllerinin hiper dual sayılarla elde edilmesiyle tanımlanır ve hiper dual kuaterniyonik X-Sol helisler aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{bmatrix} \tilde{X}' \\ \tilde{Y}' \\ \tilde{Z}_L' \\ \tilde{W}_L' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{K} & 0 & 0 \\ -\tilde{K} & 0 & \tilde{\kappa} & 0 \\ 0 & -\tilde{\kappa} & 0 & \tilde{R} + \tilde{K} \\ 0 & 0 & -(\tilde{R} + \tilde{K}) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \\ \tilde{Z}_L \\ \tilde{W}_L \end{bmatrix}$$

Burada $\tilde{K}(s)$, $\tilde{\kappa}(s)$ ve $(\tilde{R} + \tilde{K})(s)$ eğrilikleri sıfırdan farklı eğriliklerdir.

Tanım 5.3.4 (Hiper Dual Kuaterniyonik X-Sol Helis İçin Eksen)

$\tilde{\alpha} : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow H_{HD}$ Hiper dual kuaterniyonik X-Sol helis ve bu helis üzerine bir $\{\tilde{X}(s), \tilde{Y}(s), \tilde{Z}_L(s), \tilde{W}_L(s)\}$ ortonormal çatısı verilsin. $\tilde{\alpha}(s)$ eğrisinin eksen,

$$\tilde{U}_L(s) = \tilde{X}(s) + \left(\frac{\tilde{K}(s)}{\tilde{\kappa}(s)} \right) \tilde{Z}_L(s) + \frac{1}{(\tilde{R} + \tilde{K})(s)} \left(\frac{\tilde{K}(s)}{\tilde{\kappa}(s)} \right)' \tilde{W}_L(s)$$

şeklinde yazılabilir. Hiper dual kuaterniyonik X-Sol helis için bu eksen, $\tilde{Q}_L(s)$ hiper dual kuaterniyonu yardımıyla,

$$\tilde{U}_L(s) = \tilde{X}(s) \times \tilde{Q}_L(s)$$

şeklinde yazılabilir.

Teorem 5.3.2 $H_{HD} = \{\tilde{Q} = Q_1 + Q_2i + Q_3j + Q_4k \mid \tilde{Q}_i \in HD\} \subset D_{HD}^4$ de sıfırdan farklı eğrilikleri $\tilde{K}(s)$, $\tilde{\kappa}(s)$ ve $(\tilde{R} + \tilde{K})(s)$ olan yay uzunluğu parametresi ile tanımlanan bir hiper dual birim kuaterniyonik $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}(s)$ eğrisi alalım. $\tilde{\alpha}(s)$ eğrisi H_{HD} bir hiper dual kuaterniyonik X-Sol helistir ancak ve ancak

$$\left(\frac{\tilde{K}(s)}{\tilde{\kappa}(s)}\right)^2 + \left[\frac{1}{(\tilde{R} + \tilde{K})(s)} \frac{d}{ds} \left(\frac{\tilde{K}(s)}{\tilde{\kappa}(s)}\right)\right]^2 \quad (59)$$

eşitliği sabittir.

İspat. Teorem 3.3.4 dekine benzer şekilde ispat kolayca verilebilir.

6. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada genel helis eğrileri kuaterniyonlar kullanılarak yeni bir perspektifle verilmiştir. Kuaterniyonlar çarpma için değişmeli özellik sağlamadığından, daha önceki çalışmalarda tek taraflı çarpma tarafından kullanılmıştır. Kuaterniyonik eğriler için sağ çarpım ve sol çarpım kullanarak yeni ifadeler elde ettik. Bu çarpımlar için örnekler verdik.

Bu çalışma daha önceki çalışmaların en genel hali şeklinde değerlendirilebilir. Diğer yandan helis eğrilerine, kuaterniyonlar kullanılarak yeni bir bakış kazandırılmıştır. Bunun için kuaterniyonların sağ çarpım ve sol çarpımı aktif bir şekilde kullanılmıştır. Ayrıca kuaterniyonik helislerin karakterizasyonları küresel eğriler yardımıyla verilmiştir.

Kuaterniyonlar için daha önceki çalışmalarda reel sayılar ve dual sayılar kullanılarak eğriler tanımlanmıştır. Biz bu çalışmada katsayıları hiper dual sayı alarak hiper dual kuaterniyonları ve hiper dual kuaterniyonik eğrileri tanımlayarak ve onların karakterizasyonlarını kuaterniyonların sağ çarpım ve sol çarpımını aktif bir şekilde kullanarak vermeye çalıştık.

KAYNAKLAR

- Bharathi K. and Nagaraj M. 1987. Quaternion valued function of a real variable Serret Frenet formula, Indian J. Pure Appl. Math. 18 507-511.
- Cansu G. Yaylı Y. and Gok I. 2021. A New Quaternion Valued Frame of Curves with an Application, Filomat 35:1, 315--330.
- Coken A. C. Ekici C. Kocayusufoğlu İ. and Görgülü A. 2009. Formulas for dual- split quaternionic curves, Kuwait J. Sci. Engrg. 36 1-14.
- Coken A. C and Tuna A. 2004. On the quaternionic inclined curves in the semi Euclidean space $\mathbb{R}^4$, Applied Math. Computation 155 373-389.
- Çil, F. 2000. Hiper Dual Sayılar ve Özellikleri, Yüksek Lisans Tezi, Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi, Rize.
- Dağdeviren A. and Yüce S. 2019. Dual Quaternions and Dual Quaternionic Curves, Filomat 33:4, 1037--1046.
- Demir, S. 2003. Komleks ve Dual Kuaterniyonların Fiziksel Uygulamaları, Yüksek Lisans Tezi, Anadolu Üniversitesi, Eskişehir.
- Gök, I., Okuyucu Z. and Kahraman F., 2011. On the Quaternionic B₂-slant helices in the Euclidean space $\mathbb{R}^4$, Adv. Appl. Clifford Algebras 21 707-719.
- Güngör M. A. and Tosun, M. 2011. Some characterizations of quaternionic rectifying curves, Differ. Geom. Dyn. Syst. 13, 89-100.
- Hacısalihoglu, H. H. 1983. Hareketler Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi, Gazi Üniversitesi Yayınları.
- Hacısalihoglu, H. 1998. H. Diferensiyel Geometri, Cilt 1,2. Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, Ankara.
- Hacısalihoglu, H. H. 2000. Dönüşümler ve Geometrilere, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, Ankara.
- Hamilton W.R. 1899. Elements of Quaternions, I, II and III. Chelsea.
- Kahraman Aksoyak, F. 2019. A New Type of Quaternionic Frame in $\mathbb{R}^4$, International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, 16, no. 6, 1950084, 11pp.
- Karadag, M. ve Sivridağ A. İ. 1997. Tek Değişkenli Kuaterniyon Değerli Fonksiyonlar ve Eğilim Çizgileri, Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Dergisi, 13 (1-2), 23-36.
- Karadag, M. and Sivridağ, A. İ. 2019. Some Characterizations for a Quaternion-Valued and Dual Variable Curve, Symmetry, 11, 125.
- Keçilioğlu, O. Ilarslan, K. 2013. Quaternionic Bertrand Curves in Euclidean 4-Space, Bulletin of Mathematical Analysis and Applications, 5(3), 27-38.
- Kula, L. and Yaylı Y. 2007. Split quaternions and rotations in semi Euclidean Space, Journal of Korean Mathematical Society 44, 1313--1327.

- Kula, L. 2003. Bölünmüş Kuaterniyonlar ve Geometrik Uygulamaları, Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi, Ankara.
- Magden A. 1993. On the curves of constant slope, YYU Fen Bilimleri Dergisi, 4, 103-109.
- Monterde, J. 2007. Curves with constant curvature ratios, Bulletin of Mexican Mathematic society 30(13); 177-186.
- Sivridağ, A.I. Güneş, R. Keleş, S. 1994. .The Serret-Frenet Formulae for Dual Quaternion Valued Functions of a single real Variable, Mech. Mach. Theory, 29, 749--754.
- Tuna, A. 2002. Yarı Öklid Uzayındaki Kuaterniyonik Eğriler için Serret-Frenet Formülleri, Yüksek Lisans Tezi, Süleyman Demirel Üniversitesi, Isparta.
- Ölmez, O. 2006. Genelleştirilmiş Kuaterniyonlar ve Uygulamaları, Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi, Ankara.
- Öztürk G. Kişi İ. and Büyükkütük S. 2017. Constant ratio quaternionic curves in Euclidean spaces, Adv. Appl. Clifford Algebr. 27, 1659-1673.
- Sabuncuoglu, A. 2001. Diferensiyel Geometri, Nobel Yayınevi, Ankara.
- Şenyurt S. Cevahir C. and Altun Y. 2017. On spatial quaternionic involute curve a new view, Adv. Appl. Clifford Algebr. 27, 1815--1824.
- Uzunoğlu, B. , Gök, I. ve Yaylı, Y. , 2016. A New Approach On Curves of Constant Precession, Applied Mathematics and Computation, Volume 275, 317-323.
- Yoon D.W. 2012. On the Quaternionic general helices in Euclidean 4-space, Honam Mathematical J. 34, No.3, 381-390.
- Zengin İ. 2022. Hiper Dual Sayıların Uygulamaları, Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi, Ankara.
- Ward, J. P. 1997. Quaternions and Cayley Numbers: Algebra and Applications, Kluwer Academic, Dordrecht. Vol II, Interscience Publishers.