

**T.C.  
FIRAT ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



**SONLU BİR ARALIKTA SÜREKSİZLİĞE SAHİP  
DİFERENSİYEL DENKLEM İÇİN TERS PROBLEM**

**Ender KULA**

Yüksek Lisans Tezi

MATEMATİK ANABİLİM DALI

OCAK 2023

**T.C.**  
**FIRAT ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

**SONLU BİR ARALIKTA SÜREKSİZLİĞE SAHİP DİFERENSİYEL  
DENKLEM İÇİN TERS PROBLEM**

Tez Yazarı  
**Ender KULA**

Danışman  
Prof. Dr. Hikmet KEMALOĞLU

OCAK 2023  
ELAZIĞ

**T.C.**  
**FIRAT ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

---

Başlığı: Sonlu Bir Aralıkta Süreksizliğe Sahip Diferensiyel Denklem İçin Ters Problem

Yazarı: Ender KULA

İlk Teslim Tarihi: 03.01.2023

Savunma Tarihi: 24.01.2023

---

**TEZ ONAYI**

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına göre hazırlanan bu tez aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından değerlendirilmiş ve akademik dinleyicilere açık yapılan savunma sonucunda OYBİRLİĞİ ile kabul edilmiştir.

Danışman:	Prof. Dr. Hikmet KEMALOĞLU Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi	<i>İmza</i> Onayladım
Başkan:	Doç. Dr. Sertaç GÖKTAŞ Mersi Üniversitesi, Fen Fakültesi	Onayladım
Üye:	Doç. Dr. Emrah YILMAZ Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi	Onayladım

Bu tez, Enstitü Yönetim Kurulunun ...../...../20..... tarihli toplantısında tescillenmiştir.

*İmza*

Prof. Dr. Burhan ERGEN  
Enstitü Müdürü

## BEYAN

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım “ Sonlu Bir Aralıkta Süreksizliğe Sahip Diferensiyel Denklem İçin Ters Problem ” Başlıklı Yüksek Lisans Tezimin içindeki bütün bilgilerin doğru olduğunu, bilgilerin üretilmesi ve sunulmasında bilimsel etik kurallarına uygun davrandığımı, kullandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi, maddi ve manevi desteği olan tüm kurum/kuruluş ve kişileri belirttiğimi, burada sunduğum veri ve bilgileri unvan almak amacıyla daha önce hiçbir şekilde kullanmadığımı beyan ederim.

24.01.2023

**Ender KULA**



# ÖNSÖZ

---

Bu çalışmamda Sturm-Liouville operatöründe ters nodal probleminin bir  $(0, \pi)$  aralığındaki sıçramalı süreksiz bir noktada Prüfer dönüşümü kullanarak Sturm-Liouville denkleminin öz değerlerini, nodal noktalarını ve nodal uzunluklarını inceleyeceğiz.

Bana bu çalışmayı vererek beni yönlendiren, yardımcı olan ve yaptığım çalışmalar esnasında benden ilgilerini eksik etmeyen değerli hocam Sayın Prof. Dr. Hikmet KEMALOĞLU'na ve kıymetli Göksel KULA'ya derin teşekkürlerimi sunarım.

**Ender KULA**  
ELAZIĞ, 2023



# İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖNSÖZ.....	iv
İÇİNDEKİLER .....	v
ÖZET .....	vi
ABSTRACT .....	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR .....	viii
<b>1. GİRİŞ .....</b>	<b>1</b>
<b>2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER.....</b>	<b>3</b>
<b>3. TERS NODAL PROBLEMİN ÇÖZÜMÜ .....</b>	<b>12</b>
<b>4. SONUÇ.....</b>	<b>23</b>
KAYNAKLAR.....	24
ÖZGEÇMİŞ	

# ÖZET

---

## Sonlu Bir Aralıkta Süreksizliğe Sahip Diferensiyel Denklem İçin Ters Problem

**Ender KULA**

Yüksek Lisans Tezi

FIRAT ÜNİVERSİTESİ

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Ocak 2023, Sayfa: viii + 25

---

Bu çalışmada, sonlu bir aralığın orta noktasında süreksizlik sınır şartına sahip bir Sturm-Liouville problemi için ters nodal problemin çözümü verilmiştir. Bunun için Prüfer dönüşümü kullanılmıştır. Öncelikle bu dönüşüm yardımıyla özdeğerler, özfonksiyonların sıfırları (nodal noktalar) ve nodal uzunluklar için asimptotik formlar bulunmuştur. Sonraki aşamada: Nodal parametreler yardımıyla  $q(x)$  potansiyel fonksiyon için bir formül verilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Sturm Liouville, Prüfer dönüşüm, Nodal noktalar, Sıçrama şartı

# ABSTRACT

---

## Inverse Problem For A Differential Equation With Discontinuity In A Finite Range

**Ender KULA**

Master's Thesis

FIRAT UNIVERSITY  
Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Department of Mathematics

January 2023, Pages: viii + 25

---

In this study, the solution of the inverse nodal problem is given for a Sturm-Liouville problem with a discontinuity boundary condition at the midpoint of a finite interval. For this, Prüfer transform is used. First of all, with the help of this transformation, asymptotic forms for eigenvalues, zeros of eigenfunctions (nodal points) and nodal lengths are found. In the next step: a formula for potential function  $q(x)$  is given with the help of nodal parameters.

**Keywords:** Sturm Liouville, Prufer transformation, Nodal points, Jump condition

## SİMGELER VE KISALTMALAR

### Simgeler

---

$L$	:	Sturm-Liouville Operatörü
$C_2[a,b]$	:	$[a,b]$ kapalı bölgesinde kompleks, ya da reel değerli sürekli operatörlerin oluşturduğu uzay
$q$	:	Sturm-Liouville probleminde potansiyel fonksiyon
$O$	:	Asimptotik değerler
$o$	:	Sonsuz küçük değerler
$\lambda_m$	:	$m$ . sıradaki öz değer
$y_m(x, \lambda_m)$	:	$m$ . öz değeri karşılayan $m$ . öz fonksiyon
$p(\lambda)$	:	Spektral fonksiyon
$x_j^{(n)}$	:	$j$ . nodal nokta
$l_j^{(n)}$	:	$j$ . nodal uzunluk

# 1. GİRİŞ

Sonlu veya sonsuz aralıklar içinde süreksizlikleri olan başlangıç ve sınır değer problemleri genellikle uygulamalı matematik, mekanik ve ayrıca doğa bilimlerinin diğer konularında ortaya çıkar. Buradaki temel süreksizlik, yer kabuğunun altında kayma hareketlerinin meydana gelmesinden kaynaklanmaktadır. Hald, alt mantoda yoğunluk biliniyorsa, yoğunluğun burulma modunun özdeğerleri yardımıyla tek olarak belirlendiğini gösterdi [1]. Yazar, aralık içindeki iki süreksizliği dikkate almış  $[0, L]$  ve özdeğerlerin potansiyeli benzersiz bir şekilde belirlediğini göstermiştir.

Süreksiz Sturm-Liouville problemi için ters problemin çözümü, birçok alanda uygulanması nedeniyle yaygın olarak çalışılmaktadır. Shieh ve Yurko ters nodal ve ters spektral problemleri çözdüler ve aralarında bağlantılar kurdular [2].

Özkan ve Keskin, problemin katsayılarının nodal noktaları tarafından benzersiz bir şekilde belirlenebileceğini göstermiştir [3, 4]. Sturm-Liouville operatörü için ters nodal ve özdeğer problemleri Wang ve Yurko tarafından çeşitli durumlar için çalışıldı [5, 6]. Ayrıca referanslarda ters nodal ve özdeğer problemleri ile ilgili daha fazla sonuç vardır [1, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15]. Aşağıdaki Sturm-Liouville problemini, aralık içindeki süreksizlik koşullarıyla birlikte ele alalım.

$$\ell_y := -y'' + q(x)y = \lambda^2 y, \quad 0 < x < L, \quad (1.1)$$

$$y(0) = 0 = y(L), \quad (1.2)$$

$$y\left(\frac{L}{2} + 0\right) = \alpha y\left(\frac{L}{2} - 0\right), \quad y'\left(\frac{L}{2} + 0\right) = \alpha^{-1} y'\left(\frac{L}{2} - 0\right) \quad (1.3)$$

spektral parametredir,  $q(x)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$   $\alpha > 0$ ,  $\alpha \neq 1$  ve  $q(x) \in C^1([0, L])$

Bu çalışmayı genel hatlarıyla şu şekilde planladık; Bölüm 2'de klasik anlamından farklı olan dönüşüm Prüfer dönüşümü tanımladık. Bu adım, ana sonuçlar için çok önemlidir. Daha sonra, modifiye edilmiş Prüfer dönüşümü yardımıyla (1.1)-(1.3) için problemin öz parametreleri için formüller elde edilmiştir. Bölüm 3'te, iki durumda nodal uzunluğu yardımıyla potansiyel fonksiyon için bir ifade tanımladık. Özellikle Prüfer dönüşümü ile süreksiz sınır koşulları arasındaki ilişkinin bu alana ciddi katkılar sağlayacağını düşünüyoruz.

Lineer diferansiyel fonksiyonlar teorisinde spektral analizin ters problemlerin oldukça büyük bir önemi vardır. Spektral analizin ters problemleri lineer diferansiyel denklemin spektral kısmi nitelikleri için biçiminin tespit edilmesi problemidir [16].

Spektral analizin ters problemleri matematiksel fiziğin nonlineer diferansiyel denklemlerinin çözümünün bulunması için yeni bir metot geliştirilmesi açısından oldukça öneme sahiptir. Bunun

gibi ters problemler; sismoloji, mekanik, fizik, jeofizik, meteoroloji, matematik, elektronik, tıp gibi buna benzer nice tabiat ilimlerinin beliren oldukça mühim denklemlerin çözümünün bulunmasında ayrıcalıklı bir önemi vardır [16]. Sturm-Liouville teorisi 1829 ile 1836 yıllarındaki Sturm'un orijinal çalışmasıyla başlamaktadır. 1837 yılında Sturm ve Liouville, kısa fakat oldukça değerli eserlerini "*Journal de Mathematique*" isimli dergide yayınladılar. Bu çalışmalarında

$$y'' = (q(x) - \lambda)y, \quad 0 < x < 1, \quad (1.4)$$

diferansiyel ifadesinde sınır değer denklemini incelediler. Bu denklemde  $x$  parametresi kompleks değerli,  $q$  da  $[0,1]$  aralığında karesel integrali alınabilen reel değerler alabilen operatördür. Sturm ve Liouville, (1.4) denklemi için

$$\begin{aligned} y(0)\cos\theta + y'(0)\sin\theta &= 0, \\ y(1)\cos\psi + y'(1)\sin\psi &= 0, \end{aligned} \quad (1.5)$$

uç noktalar denkleminin belirgin olmayan çözümlerinin var olup olmadığını incelediler. Burada  $\theta, \psi; 0$  ve  $\pi$  arasındaki reel sayılardır. (1.4) ve (1.5) sınır değer denklemi çözülürse, kompleks değerli sayısına  $\lambda$  ifadesine  $q, \theta$  ve  $\psi$  için bir öz değerdir denir.  $\lambda$ 'ya bağlı çözümü belirsiz ifadelere,  $q, \theta$  ve  $\psi$  için öz fonksiyondur denir. Bunun gibi denklemlerin bütün öz değerleriyle meydana getirdiği kümeye, (1.4), (1.5) ile verilen sınır değer probleminin spektrumu denir [17]. Spektral teoride değer verilen çalışmalar bazı zamanlarda bir boyutlu zamandan bağımsız olan Schrödinger fonksiyonu ismi ile de anılan

$$l = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$$

biçimindeki Sturm-Liouville fonksiyonuna ulaşılmıştır. Bu durumdaki fonksiyonlar için spektral teoriyle alakalı yapılan çalışmaların ilki; D'alambert, Bernoulli, Euler, Sturm ve Liouville gibi önemli bilim insanları titreşim problemlerine uyguladılar. 20. yüzyılda diferansiyel ve integral operatörlerin farklı sınıfları için spektral teori hızlı bir biçimde ilerlemiştir. Bu sahada; Birkhoff, Hilbert, Neumann, Steklov, Stone, Weyl gibi ünlü matematik bilimcilerin ifade ettiği düşünceler önemli fayda sağlamıştır. Spektral teorisinin ters problemleriyle ilgili asıl neticeler, 1900'lü yılların sonlarına doğru ortaya çıkmıştır [16].

## 2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

**Tanım 2.1. (Prüfer Dönüşümü)** İkinci mertebeden, self-adjoint bir lineer diferansiyel denklem,

$$\frac{d}{dx} \left[ P(x) \frac{du}{dx} \right] + Q(x)u = 0, \quad a < x < b \quad (2.1)$$

biçiminde verilsin. (2.1) diferansiyel denkleminin çözümlerinin bulunabilmesi için kullanılan yöntemlerden birisi de şimdi vereceğimiz Prüfer dönüşümüdür. Bu denklemde verilen katsayı fonksiyonlarından  $Q(x)$  sürekli,  $P(x) > 0$  ve  $P(x), C^1$  sınıfındadır,  $a < x < b$  aralığında verilen (2.1) denkleminin çözümlerinin salınımlarını bulmak yerine, aynı aralıktaki sıfırlarının sayısını bulmak yeterlidir. (2.1) ifadesinde  $P(x) \equiv 1$  alınarak, Sturm-Karşılaştırma teoremi uygulanacaktır. Yani (2.1) biçiminde daha genel denklemlere genişletilecektir. Prüfer'in amacı,  $u$  ve  $Pu'$  bilinmeyen fonksiyonlar olmak üzere,  $(Pu', u)$  düzlemini kutupsal koordinatlara dönüştürecek olan, birinci-mertebeden iki tane diferansiyel denklemden oluşan bu sistemi, (2.1) denklemine özdeş tutmaktır. Prüfer bu düşünceyle  $Pu'$  ve  $u$  bilinmeyenlerini,

$$P(x)u' = r(x) \cos \theta(x), \quad u(x) = r(x) \sin \theta(x) \quad (2.2)$$

biçiminde tanımlandı. Bu ifadelerden yeni  $r$  ve  $\theta$  bağlı değişkenleri çekilerek düzenlenirse,

$$r^2 = u^2 + P^2 u'^2, \quad \theta = \arctan (u / Pu') \quad (2.3)$$

olur. Burada  $r$  (uzunluk) ve  $\theta$  (faz değişkeni) olarak isimlendirilir.  $r \neq 0$  iken, (2.3) ile tanımlanan  $(Pu', u) = (r, \theta)$  dönüşümü Jacobian'ın sıfırdan farklı olması ile analitiktir.

Trivial olmayan çözümler için  $r$  daima pozitifdir. Çünkü verilen bir  $x$  değeri için, eğer  $u(x) = u'(x) = 0$  ise, o zaman teklilik teoremlerinden dolayı  $u(x) \equiv 0$  trivial çözüm olacaktır. (2.1) ye denk olan diferansiyel denklem sistemi,  $r(x)$  ve  $\theta(x)$  için aşağıdaki gibi verilir.

Bunun için  $\cot \theta = Pu' / u$  nun diferansiyeli alınır (eğer  $\theta = 0 \pmod{\pi}$  ise o zaman  $\theta = u / Pu'$  ifadesinin diferansiyeli alınarak işlem yapılır),

$$-\operatorname{cosec}^2 \theta \frac{d\theta}{dx} = \frac{(Pu')'}{u} - \frac{Pu'^2}{u^2} = -Q(x) - \frac{1}{P} \cot^2 \theta$$

olur. Bu eşitliğin her iki tarafını  $-\sin^2 \theta$  ile çarparsak,

$$\frac{d\theta}{dx} = Q(x) \sin^2 \theta + \frac{1}{P(x)} \cos^2 \theta = F(x, \theta) \quad (2.4)$$

diferansiyel denklemini elde ederiz. Şimdide  $K = r(a)$  ile verilen ifadelerden ilkinin diferansiyelini alır ve gerekli sadeleştirme ve düzenlemeleri yaparsak,

Bu sabitler  $K = r(a)$  ilk uzunluk ve  $\forall = \theta(a)$  ilk fazdır.  $K$  sabiti,  $u$  çözümünün bir sabitle çarpımıyla değişir. Böylece (2.1) denkleminin bir  $u(x)$  çözümünün sıfırları yalnızca (2.4) diferansiyel denklemi üzerinde çalışılarak bulunabilir.

**Tanım 2.2. (Hilbert Uzayı)** Hilbert uzayıyla ilgili kavramlar 1912’de meşhur Alman matematik bilimci Hilbert’in “*Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen irtegral gleichungen*” isimli eserinde görülmüştür. Sonrasında, meşhur matematik bilimci Neumann Hilbert uzayını aksiyomlarla kanıtlamıştır [18].

$k, l, m, \dots$  elemanlarının  $T$  ile gösterilen bir kümesi olsun. Eğer  $T$  kümesi aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa  $T$  uzayı artık bir soyut hilbert uzayıdır.

a)  $T$  lineer bir uzay olsun.

b)  $T$  uzayındaki  $\forall k, l \in T$  eleman ikilisine bu elemanların iç çarpımı ile ifade edilen, aşağıdaki koşulları karşılayan ve  $\langle k, l \rangle$  ile belirtilen bir reel sayı karşılık gelir.

i)  $\langle k, l \rangle = \langle l, k \rangle$

ii)  $\langle k + m, l \rangle = \langle k, l \rangle + \langle m, l \rangle$

ii)  $\langle \lambda k, l \rangle = \lambda \langle k, l \rangle, (\forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ için})$

iv)  $k \neq 0$  ise  $\langle k, l \rangle \geq 0$

c)  $p(k, l) = \|k - l\|$  şeklinde aldığımız metrik için  $T$  uzayına tam uzaydır denir.

d)  $T$  uzayının boyutu sonsuzdur.

Eğer yalnız a), b) ve c) özellikleri varsa,  $T$  uzayı için bir Hilbert üniter uzayı denilir [19, 20].

**Tanım 2.3.** ( $L_2[e, f]$  uzayı)  $[e, f]$  aralığında tanımlı karesel integrallenebilen ölçülebilir, kompleks değerli  $k(e), b(e), \dots$  fonksiyonlarının oluşturduğu uzay  $L_2[e, f]$  uzayı denir.

$L_2[e, f]$  uzayı her  $k, b \in L_2[e, f]$  için  $d : L_2[e, f] \times L_2[e, f] \rightarrow \mathbb{R}^+$

$$d(k, b) = \left( \int_e^f |k(t) - b(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

uzunluğu ile bir metrik uzay;  $\|\cdot\| : L_2[e, f] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\|k\| = \left( \int_e^f |k(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

ifadesi normlu uzayı sağlayan bir uzunluktur. Burada iç çarpım,  $\langle k, b \rangle = \int_e^f k(e) \overline{b(e)} de$  İle ifade

edilir.  $L_2[e, f]$  uzayı Hilbert uzayı olacaktır [20, 21, 22]. Bir Sturm-Liouville difarensiyel

denkleminin spektral teorisi:  $L_2(-\infty, \infty), L_2(0, \infty), L_2[0, \pi]$  ve  $L_2(0, 1)$  uzayları için çalışılabilir [19].

**Tanım 2.4.** ( $C[e, f]$  uzayı)  $[e, f]$  kapalı aralığında tanımlı olan sürekli, kompleks ve ya reel değerler alabilen bütün fonksiyonların meydana getirdiği uzaya  $C[e, f]$  uzayı denir. Bu uzay  $k, b \in C[e, f]$  ve  $d: C[e, f] \times C[e, f] \rightarrow \mathbb{R}^+$  olmak üzere,

$$d(k, b) = \max_{e \leq n \leq f} |k(n) - b(n)|$$

metriği ile bir metrik uzay;  $\|\cdot\|: C[e, f] \rightarrow \mathbb{R}$  olmak üzere,

$$\|k\| = \max_{e \leq n \leq f} |k(n)|$$

uzunluğuyla normlu bir uzay olacaktır. Üst kısımda ifade edilen metrik için, Rus matematik bilim insanı Pafnuty Lvovich Chebishev'yle alakalı olduğu için Chebishev metriği de denir. Bu uzay için,

$$\langle k, b \rangle = \int_e^f k(n) \overline{b(n)} dn \text{ olarak tanımlansın. } \|k\| = \left( \int_e^f |k(n)|^2 dn \right)^{1/2}$$

Normuyla değerlendirdiğimiz uzayımız tam olmadığı için Hilbert uzayı olmayacaktır [21].

**Tanım 2.5. (Sobolev Uzayı)** Sobolev uzayları eliptik diferansiyel denklemler için Rus matematik bilim insanı Sergei Lvovich Sobolev 1930 1940 yılları arasında çalışmıştır [21]. Sobolev uzayı'da oldukça kıymetli Hilbert uzayıdır.

Varsayalım ki  $\Omega, \mathbb{R}^n$  uzayı için herhangi sınırlı bölge ve  $L_2(\Omega)$  uzayı'da Lebesgue uzayı olsun.  $W^{1,2}(\Omega)$  Sobolev uzayı,  $v \in L_2(\Omega)$ ,  $\frac{\partial v}{\partial x_i} \in L_2(\Omega)$  özelliğini sağlayan bütün  $v$

operatörlerinin uzayı olacaktır. Burada 1, birinci mertebeden kısmi türevlerin  $L_2(\Omega)$  uzayında olmasını gerektirir. 2 de,  $L_2(\Omega)$  uzayında ait olma şartındaki integrantın kuvvetini gösterir.

$W^{1,2}(\Omega), L_2(\Omega)$  uzaylarında  $W^{1,2}(\Omega) \subset L_2(\Omega)$  ilişkisi mevcuttur.  $h, t \in W^{1,2}(\Omega)$  olsunlar  $W^{1,2}(\Omega)$  Sobolev uzayında tanımlanan iç çarpım,

$$\langle h, t \rangle = \int_{\Omega} h \cdot t dx + \int_{\Omega} \text{grad} h \cdot \text{grad} t dx$$

veya

$$\langle h, t \rangle = \int_{\Omega} h \cdot \bar{t} dx + \int_{\Omega} Dh \cdot D\bar{t} dx$$

şeklinde tanımlanır. Bu uzayda norm,

$$\|h\| = \left( \int_{\Omega} h^+ dx + \int_{\Omega} |gradh|^2 dx \right)^{1/2}$$

şeklinde gösterilir. Sobolev uzaylarına  $W$ - uzayı denilmektedir [22].

**Tanım 2.6. (Özdeğer, Özfonksiyon)**  $L$  lineer bir operatör olmak üzere,  $x \neq 0$  şekilde alınsın  $Lx = \lambda x$  olacak şekilde bir  $x$  fonksiyonu bulunabiliyorsa,  $\lambda$  ya operatörün öz değeri  $x$  fonksiyonuna da  $L$  operatörünün bir özvektörü (veya özfonksiyonu) denir [19].

**Tanım 2.7. (Sturm-Liouville Operatörü)** Kuantum mekaniği ile klasik fizikte bulunan özdeğer denklemi,  $(c, d)$  aralığı için

$$c_1 y(c) + c_2 y'(c) = 0, \quad d_1 y(d) + d_2 y'(d) = 0 \quad (2.5)$$

sınır koşulları mevcut olsun,

$$p'(x)y'(x) + p(x)y''(x) + \lambda P(x)y(x) - q(x)y(x) = 0 \quad (2.6)$$

diferansiyel denklem sınıfındadır. Bu ifade de  $q, p$  ve  $\rho [c, d]$  aralığı için tanımlanan sürekli operatörlerdir,  $\rho$  operatörüne de ağırlık operatörü denir [23].

Uygulamalarımızda kullandığımız esas operatörlerden bir diğeri de

$$L = \frac{d^2}{dx^2} + q(x)$$

formunda ifade edilen Sturm-Liouville denklemidir. Bu denklemde  $q [c, d]$  aralığında sürekli ve reel değerli bir fonksiyondur.  $L$  operatörü için büyük bir öneme sahip sınır koşulları  $\theta, \psi \in (0, \pi]$  şeklinde alınsın genellikle aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\begin{aligned} y(c) \cos \theta + y'(c) \sin \theta &= 0 \\ y(d) \cos \psi + y'(d) \sin \psi &= 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Yukarda belirtilen sınır koşullarına sınır koşullarının ayrık şartları denir.

$$-\frac{d^2 y}{dx^2} + q(x)y = \lambda y \quad (2.8)$$

ifadesine bakacak olursak, bu denklem (2.6) ifadesinin  $p(x) = \rho(x) = 1$  özel hali olacaktır. (2.7) ve (2.8) sınır değer denklemi kaynaklarda Sturm-Liouville sınır değer problemi şeklinde de bilinir. (2.6) sınır koşulu  $\sin \theta \neq 0$  ve  $\sin \psi \neq 0$  olmak üzere

$$\begin{aligned} y(c) \cot \theta + y'(c) &= 0 \\ y(d) \cot \psi + y'(d) &= 0 \end{aligned}$$

şeklinde de ifade edilebilir. Bu ifadede  $\cot \theta = -e$  ve  $\cot \psi = E$  olacak şekilde alırsak

$$y'(c) - ey(c) = 0$$

$$y'(d) + Ey(d) = 0$$

sınır şartlarını buluruz. Bulduğumuz bu şartlara impedance sabitli sınır koşulları,  $e$  ve  $E$  değişmezlerine ise impedance değişmezi denilir [19].

$p$ ,  $q$  ve  $\rho$  operatörleri  $R$  kümesinde tanımlanmış ve üç fonksiyonda periyodik ise (2.6) ifadesine;

$$y(c) = y(d), \quad y'(c) = y'(d)$$

periyodik sınır şartı ,

$$y(c) = -y(d), \quad y'(c) = -y'(d)$$

anti periyodik sınır şartları ile, Sturm-Liouville periyodik sınır değer denklemi denilmektedir. Bahsi geçen şartlar sağlandığında (2.8) denklemi bir Hill denklemi olur.

(2.6) denklemi için özel olarak  $q = 0$ ,  $p = 1$  alınırsa

$$-y'' = \lambda \rho(x) y,$$

denklemini string denklemi olur [24].

**Tanım 2.8. (Regüler Sturm-Liouville Problemi)** Eğer (2.5) ve (2.6) sınır değer denklemi aşağıdaki şartları sağlıyorsa regüler Sturm-Liouville denklemi elde edilir.

a)  $c_1, c_2, d_1$  ve  $d_2$  reeldir.

b)  $p(x), q(x)$  ve  $\rho(x)$  katsayı operatörleri sınır değerleri barındıran tüm durumlarda sürekli ve reel değerlidir.

c) Sınır değerleri bulunduran her yerde  $p(x), \rho(x) > 0$  dır.

Bir sturm liouville denklemi regüler değilse singülerdir [23].

**Tanım 2.9. (Başlangıç ve Sınır Koşulları)** En başta ele aldığımız denkleme ilişkin bir çözümün olabilmesi için bazı şartların yardımına ihtiyacımız olmaktadır. Bu yardımına ihtiyaç duyduğumuz şartları aşağıdaki başlıklar için ele alabiliriz.

(i) **Sınır şartları:** Kısmi diferansiyel problemin uygulandığı  $\Omega$  alanının  $\Gamma$  sınırları dahilinde sağlanacak zorunlu koşullardır. Sınır koşullarının değişik üç hali  $\alpha, \beta$  ve  $g$  fonksiyonları  $\Gamma$  bölgesinde tanımlanmış operatörler olsun. Bunlar özel adlarıyla şöyledir.

$$\text{Dirichlet şartı : } u|_{\Gamma} = g,$$

$$\text{Neumann şartı : } \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma} = g \text{ (veya 0),}$$

Karışık (mixed) veya Robin Şartı :  $\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} = g$ ,

(ii) **Başlangıç Koşulları:** Başlangıçta ele aldığımız  $\Omega$  alanı boyunca denklemi sağlayan koşullardır. Genelde, başlangıç koşulları operatörün ve bunun zamana göre türevinin seçilimi şeklinde olacaktır [25].

**Tanım 2.10. (Nodal Nokta Kümesi)** (2.5)-(2.6) özdeğer denkleminin nodal noktalarının kümesi  $y_m(x)$  öz fonksiyonlarının kökleri  $\{x_i^{(m)}\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ ,  $m > 2$  kümesinin elemanlarından olacaktır.  $\{x_i^{(m)}\}$  kümesi (2.5)-(2.6) problemindeki  $p, \rho$  ve  $q$ 'dan oluşan parametreleriyle ve  $c_1, c_2, d_1, c$  ve  $d$  değerleriyle alakalıdır [23].

**Tanım 2.11. (Self-Adjoint Operatör)**  $K \in B(X)$  olmak üzere.  $K = K^*$  ise,  $K$  dönüşümüne self-adjoint ya da hermityen operatör denir [26].

**Tanım 2.12. (Büyük O Notasyonu)** 1892 yılında Alman matematik bilimci Bachmann, “Analytische Zahlentheorie” isimli kitapta operatörlerin asimptotik durumlarına bir anlam kazandırmak için farklı bir isimlendirme bulmuştur. Bachmann’ın bu buluşu daha ileriki zamanlarda “Big Oh” sembolü ile isimlendirilmiştir. İsimlendirilen ifade ünlü Alman matematik bilimci Landau tarafından sıkça kullanılmıştır. Çok sık kullanıldığı için de kendi ismi olan Landau sembolü de denilmiştir [27].

$\forall r \geq 0$  şeklinde bir tamsayı alırsak  $h(r)$  sıfır ve pozitif değerler alabilen bir operatör olmak üzere.  $\forall r \geq r_0$  alınsın  $h(r) \leq Cs(r)$  olacak şekilde bir  $r_0$   $C > 0$  değişmezi mevcutsa  $h(r) = O(s(r))$  şeklinde gösterilir. Büyük O formülünün matematikle ilgili özelliklerinden bazıları aşağıdaki gibidir.

a)  $h_1(r) = O(s_1(r))$  ve  $h_2(r) = O(s_2(r))$  şeklinde verilsin,

i)  $h_1(r) + h_2(r) = O(\max\{s_1(r), s_2(r)\})$

ii)  $O(h_1(r)).O(h_2(r)) = O(h_1(r).h_2(r))$

iii)  $k \neq 0$ ,  $O(kh_1(r)) = O(h_1(r))$

iv)  $O(k + h_1(r)) = O(h_1(r))$

v)  $h_1(r).h_2(r) = O(s_1(r).s_2(r))$

b)  $h_1(r)$  ve  $h_2(r)$  fonksiyonları  $\forall r \geq 0$  şeklinde alınan sıfır veya pozitif olabilen tamsayısı için tanımlanmış pozitif değerli operatörler olsunlar,  $h(r) = h_2(r)$  ve  $Z \geq 0$  için

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{h_2(r)}{h_1(r)} = Z \text{ olduğunda:}$$

$$h(r) = O(h_1(r)) \text{ şeklindedir.}$$

$$\text{c) } h(r) = O(s(r)) \text{ ve } s(r) = O(k(r)) \text{ ise } h(r) = O(k(r)) \text{ şeklindedir.}$$

d)  $h(r)$  ve  $s(r)$  sonlu bir aralık için integrali alınabilen operatörler ve  $r \geq r_0$  için  $h(r) = O(t(r))$  olsun. Bu durumda,

$$\int_{r_0}^r h(y) dy = O\left(\int_{r_0}^r |s(y)| dy\right), r \geq r_0$$

şeklindedir.

e)  $i = 1, 2, \dots, k$  olmak üzere  $h_i(r) = O(s_i(r))$  olsun. Bu durumda,

$$\sum_{i=1}^k h_i(r) = O\left(\sum_{i=1}^k |s_i(r)|\right)$$

şeklindedir.

f) Aldığımız bir k operatörüne göre

$$\text{i) } \frac{1}{1 + O(k(r))} = 1 + O(k(r))$$

$$\text{ii) } \log[1 + O(k(r))] = O(k(r))$$

$$\text{iii) } \exp[O(k(r))] = 1 + O(k(r))$$

şeklindedir [28, 29].

**Tanım 2.13. (Küçük o Notasyonu)**  $h(m) \in O(t(m))$  sağlaması için gerekli şartlar

$$\lim_{m \rightarrow m_0} \frac{h(m)}{t(m)} = 0$$

şeklinde olmalıdır. Bu ifade asimptotiksel anlamında önemsenmeyebilir olarak düşünebiliriz. “ $h(m), t(m)$  in küçük o sudur” şeklinde ifade edilir. Düşündüğümüz ifade;  $m \rightarrow m_0$  iken  $t(m), h(m)$  fonksiyonundan daha fazla büyüyecektir. Küçük o sembolü için şu özellikleri söyleyebiliriz [28, 29].

a)  $o(h) + o(h) \in o(h)$

b)  $o(h)o(t) \in o(ht)$

c)  $o(o(h)) \in o(h)$

d)  $o(h) \in O(h)$

**Tanım 2.14.(Ortalama Değer Teoremi)**  $g, [c, d]$  aralığında integrallenebilen bir fonksiyon olsun ;

$$f(k) = \frac{1}{c-d} \int_c^d g(x) dx$$
 biçiminde tanımlanan  $k$  reel sayısına  $g$  fonksiyonunun  $[c, d]$

aralığındaki ortalama değeri denir.

**Tanım 2.15.(Taylor Serisi)** İç nokta olarak  $b$  noktasını içeren bir aralıkta  $g$  her mertebeden türeve sahip bir fonksiyon olsun  $x = b$ 'de  $g$  ile üretilen Taylor serisi

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(b)}{k!} (x-b)^k = g(b) + g'(b)(x-b) + \frac{g''(b)(x-b)^2}{2!} + \dots + \frac{g^n(b)(x-b)^n}{n!}$$

şeklindedir.

**Tanım 2.16 (Geometrik Seri ve Toplamı)** Dizimiz  $a_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \dots + a_1 r^n$

şeklinde alınan geometrik dizi olsun  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  dizisine geometrik seri denir.  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_1 r^{n-1})$  serisinin  $n$ .

kısmi toplamı:  $s_n = a_1 \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$  formülü ile bulunur.

**Tanım 2.17(Süreklilik)**  $A \subseteq \mathbb{R}$  ve  $x_0 \in A$  olmak üzere  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  bir fonksiyon olsun

Her  $\varepsilon > 0$  sayısı için en az bir  $\delta > 0$  sayısı  $|x - x_0| > \delta$  özelliğindeki her  $x \in A$  için

$|f(x) - f(x_0)| > \varepsilon$  şartına uygun  $\varepsilon$  sayısı bulunursa  $f$  fonksiyonuna  $x_0$  noktasında

süreklidir denir.

**Tanım 2.18. (Süreksizlik Çeşitleri)**

**Kaldırılabilir Süreksizlik:** Herhangi bir operatörün bilinen noktalardaki süreksizliğini dört başlık altında ele alabiliriz. Bunlardan ilki kaldırılabilir süreksizliktir. Bu süreksizlik çeşidinde fonksiyonun bir bilinen noktada sağ ve sol limit değerleri vardır. Bu limit değerleri birbirine eşittir, fakat fonksiyon değeri limit değerinden farklıdır.  $h(x)$   $\mathbb{R}$ 'de tanımlı bir fonksiyon ve olmak üzere,

$$\lim_{x \rightarrow b^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow b^+} h(x) = L \text{ ve } f(b) = c, c \neq L \text{ ise } b \text{ noktasında kaldırılabilir süreksizlik}$$

vardır.

**Sıçrama Süreksizliği:** Bir diğer süreksizlik çeşidi de sıçrama süreksizliğidir. Bu süreksizlik çeşidinde alınan bir fonksiyonun sağ ve sol limitleri vardır, fakat bu değerler birbirine eşit değildir, böylelikle fonksiyon alınan noktada limite sahip değildir, fonksiyonumuz alınan noktalarda farklı değerler alabilecektir.  $h(x)$   $\mathbb{R}$ 'de tanımlı bir fonksiyon ve  $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$  olmak üzere

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow b^-} h(x) = L_1 \\ \lim_{x \rightarrow b^+} h(x) = L_2 \end{array} \right\} \text{ve } L_1 \neq L_2 \text{ ise } b \text{ noktasında sıçramalı süreksizlik vardır.}$$

**Sonsuz Süreksizlik:** Bu süreksizlik çeşidi tanımlanan bir fonksiyon için aldığımız bir noktadaki sağdan veya soldan limitleri ya da yalnızca bir tanesi negatif ya da pozitif sonsuzluğa sahiptir, dolayısıyla fonksiyon alınan noktada tanımsız olur.

$g(x)$   $\mathbb{R}$ 'de tanımlı bir fonksiyon

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = \pm\infty \\ \lim_{x \rightarrow b^+} g(x) = \pm\infty \end{array} \right\} \text{ise } g \text{ fonksiyonunun } x = b \text{ noktasında sonsuz süreksizliği vardır.}$$

**Salınım (osilasyon) Süreksizliği:** Son başlığımızdaki süreksizlik çeşidi de osilasyon süreksizliğidir. Bu süreksizlik çeşidinde fonksiyonlardan bazıları tanımlanan noktaya yaklaştığında salınım yaparlar. Böylece fonksiyon belirli bir reel sayıya yaklaşmaz. Aldığımız bu noktadan sağdan ve soldan baktığımız çift taraflı limit değerleri yoktur. Böylelikle fonksiyon aldığımız noktada sürekli olmayacaktır.

$g(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  şeklinde bir fonksiyonumuz olsun,

$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \text{tanımsız olur,}$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \text{tanımsız olacaktır. } g \text{ fonksiyonunun } x=0 \text{ noktasında } \text{salınım (osilasyon) süreksizliği vardır.}$

### 3. TERS NODAL PROBLEMİN ÇÖZÜMÜ

Prüfer Dönüşümü ikinci mertebeden self-adjoint bir lineer diferansiyel denklemin  $\frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{du}{dx} \right] + q(x)u = 0$ ,  $a < x < b$  biçiminde verilen diferansiyel denklemin çözümünün bulunabilmesi için kullanılan yöntemlerden biri de Prüfer dönüşümüdür. Sturm-Liouville operatöründe ters nodal problemlerini spektral denklemlerin yeniden yapılandırılması ve spektral karakterlerin sınır koşullarını, spektrum değerini, Sturm-Liouville denkleminin nodal noktalarını ve nodal uzunluklarını inceleyeceğiz. Sınırlı Sturm-Liouville probleminin farklı sınır değerleri için çözümlerini ele alacağız. Daha önce Hikmet Kemalöglü ve Seyfollah Mosazadeh tarafından yayınladıkları makalede ele alınan aşağıda gösterilen öz parametreye bağlı sınır koşulları verilen sturm-liouville operatörünün ters nodal problemini inceleyelim [30].

$$\ell y = -y'' + q(x)y = \lambda^2 y, \quad 0 < x < \pi, \quad (3.1)$$

$$y'(0) + f(\lambda)y(0) = 0, \quad y'(\pi) + g(\lambda)y(\pi) = 0 \quad (3.2)$$

$$y\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) = \alpha y\left(\frac{\pi}{2} - 0\right), \quad y'\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) = \alpha^{-1} y'\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) \text{ ise} \quad (3.3)$$

**Teorem 3.1** şartları verilen Sturm-Liouville probleminin özdeğerleri  $n \rightarrow \infty$  iken

$$\lambda_n = 2n + 4n\theta_0(2n) \left( \frac{1}{\pi - 2\theta_0(2n)} \right) + \frac{1}{4n\pi} \left( w_1 + (-1)^{n-1} w_2 + \frac{8\mathfrak{U}_n^2}{\pi} \right) + \frac{8\mathfrak{U}_n \theta_0(2n)}{\pi^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

şeklindedir. Burada

$n \in \mathbb{N}$  için

$$\theta(0, \lambda) = \frac{f(\lambda)}{f^2(\lambda) + \lambda^2}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{U}_n = \left\{ \begin{array}{l} \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right), \text{ için } n = (2K) \text{ ise} \\ -\arcsin\left(\frac{|\alpha|}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right), \text{ için } n = (2K+1) \text{ ise} \end{array} \right\} \\ w_1 = \int_0^\pi q(x)dx, \quad w_2 = \int_0^\pi q(x)dx - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} q(x)dx \end{array} \right\} \text{ dir.}$$

**İspat:**

$$y\left(\frac{\pi}{2}+0\right) = R\left(\frac{\pi}{2}+0\right) \sin\left(\lambda\theta\left(\frac{\pi}{2}+0\right)\right) = \alpha R\left(\frac{\pi}{2}-0\right) \sin\left(\lambda\theta\left(\frac{\pi}{2}-0\right)\right) \text{ ile}$$

$$u = \lambda\theta\left(\frac{\pi}{2}-0\right) \text{ ve } V = \lambda\theta\left(\frac{\pi}{2}+0\right) \text{ alırsak,}$$

$\sin V = \alpha \sin U$  şeklinde olur ,

$$\text{Ayrıca } y'\left(\frac{\pi}{2}+0\right) = \alpha^{-1} y'\left(\frac{\pi}{2}-0\right) \text{ elde ederiz.}$$

$\cos V = \alpha^{-1} \cos U$  olduğundan

$$\sin^2 V + \cos^2 V = \alpha^2 \sin^2 U + \alpha^{-2} \cos^2 U \Rightarrow 1 = \frac{\alpha^4 \sin^2 U + \cos^2 U}{\alpha^2}$$

$\alpha^4 \sin^2 U + 1 - \sin^2 U = \alpha^2$  ifadeyi düzenlersek

$$\sin^2 U = \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^4 - 1} = \frac{1}{\alpha^2 + 1} \Rightarrow \sin U = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + 1}} \text{ şeklinde olacaktır.}$$

$U$ 'yu bulmak için fonksiyonun tersini alırsak,

$$U = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + 1}}\right) \text{ ifadesini buluruz.}$$

$$\theta\left(\left(\frac{\pi}{2}-0\right), \lambda\right) = \frac{2n\pi}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right). \quad (3.4)$$

Benzer şekilde elde ettiğimiz,

$$\begin{cases} \frac{1}{\alpha} \sin V = \sin U \\ \alpha \cos V = \cos U \end{cases} \text{ bağıntılarından } \frac{1}{\alpha^2} \sin^2 V + \alpha^2 \cos^2 V = 1 \text{ elde edilir.}$$

Ayrıca

$$\sin^2 V = \frac{\alpha^2}{1+\alpha^2} \Rightarrow V = \arcsin\left(\frac{|\alpha|}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right)$$

olup  $\arcsin x$ 'in Taylor açılımından

$$\theta\left(\left(\frac{\pi}{2}+0\right), \lambda\right) = \frac{(2n+1)\pi}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \arcsin\left(\frac{|\alpha|}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right) \quad (3.5)$$

elde edilir. Burada

$$\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right) + \arcsin\left(\frac{|\alpha|}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right) = \frac{\pi}{2}$$

şeklindedir.

$$y'(0) + f(\lambda)y(0) = 0, \quad y'(\pi) + g(\lambda)y(\pi) = 0$$

sınır değer şartlarını ele alırsak,

$$y(x) = R(x)\sin(\lambda\theta(x, \lambda))$$

$$y'(x) = \lambda R(x)\cos(\lambda\theta(x, \lambda))$$

Prüfer dönüşümünü kullanırsak;

$$\lambda R(0)\cos(\lambda\theta(0, \lambda)) + f(\lambda)R(0)\sin(\lambda\theta(0, \lambda)) = 0$$

veya

$$-\frac{\lambda}{f(\lambda)} = \tan(\lambda\theta(0, \lambda)) \quad (3.6)$$

şeklinde olacaktır.

Diğer taraftan

$$y'(\pi) + g(\lambda)y(\pi) = 0$$

sınır değer şartını ele alırsak bu denklem içinde

$$y(\pi - x) = R(\pi - x)\sin(\lambda\theta(\pi - x, \lambda))$$

$$y'(\pi - x) = \lambda R(\pi - x)\cos(\lambda\theta(\pi - x, \lambda))$$

dönüşümünü kullanırsak

$$\lambda R(0)\cos(\lambda\theta(0, \lambda)) + g(\lambda)R(0)\sin(\lambda\theta(0, \lambda)) = 0$$

veya

$$-\frac{\lambda}{g(\lambda)} = \tan(\lambda\theta(0, \lambda)) \quad (3.7)$$

şeklinde olacaktır.

(3.5) ve (3.6) denklemlerinden  $-\frac{\lambda}{f(\lambda)} = -\frac{\lambda}{g(\lambda)}$  ve buradan  $f(\lambda) \equiv g(\lambda)$  olur.

$-\frac{\lambda}{f(\lambda)} = \tan(\lambda\theta(0))$  bulduğumuz ifadeye fonksiyonun tersini alırsak

$\lambda\theta(0) = \arctan\left(-\frac{\lambda}{f(\lambda)}\right)$  olur.  $\theta(0) = \frac{1}{\lambda}\arctan\left(-\frac{\lambda}{f(\lambda)}\right)$  elde ederiz.  $\text{Arctan}(x)$  tek

fonksiyon olduğundan  $\theta(0) = -\frac{1}{\lambda}\arctan\left(\frac{\lambda}{f(\lambda)}\right)$  şeklinde yazabiliriz.

$\text{Arctan}(x)$  fonksiyonunun Taylor açılımı  $\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + \frac{x^n}{n}$  olduğundan

$$\theta(0, \lambda) = -\frac{1}{\lambda} \arctan\left(\frac{\lambda}{f(\lambda)}\right) = -\frac{1}{\lambda} \left( \frac{\lambda}{f(\lambda)} - \frac{\lambda^3}{f^3(\lambda)} + \frac{\lambda^5}{f^5(\lambda)} - \dots + \frac{\lambda^{2n+1}}{f^{2n+1}(\lambda)} \right)$$

yazılabilir. Böylece  $-\frac{1}{f(\lambda)} + \frac{\lambda^2}{f^3(\lambda)} - \frac{\lambda^4}{f^5(\lambda)} + \dots + \frac{\lambda^{2n}}{f^{2n+1}(\lambda)}$  şekline dönüşür. Buradan,

$$-\frac{1}{f(\lambda)} \left( 1 - \frac{\lambda^2}{f^2(\lambda)} + \frac{\lambda^4}{f^4(\lambda)} - \dots + \frac{\lambda^{2n}}{f^{2n}(\lambda)} \right) = -\frac{1}{f(\lambda)} \sum_{n=0}^{\infty} \left( -\frac{\lambda^2}{f^2(\lambda)} \right)^n \text{ haline gelir.}$$

$\theta(0, \lambda) = -\theta(0, \lambda)$  şeklinde alınırsa  $f(\lambda) \approx a\lambda^r$  şeklinde alabiliriz.

$$f(\lambda) = a\lambda^r, \quad 1 \leq r \leq 2 \text{ ve } a = \begin{cases} a > 1 \text{ veya } a < -1, \text{ ise } r=1 \\ a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ için } 1 < r \leq 2 \end{cases} \text{ olarak alırsak}$$

seri toplamından ifademiz,

$$\theta(0, \lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{f(\lambda)} \left( \frac{1 - \left( -\frac{\lambda^2}{f^2(\lambda)} \right)^{n+1}}{1 - \left( -\left( \frac{\lambda}{f(\lambda)} \right)^2 \right)} \right) = \frac{1}{f(\lambda)} \left( \frac{1}{1 + \left( \frac{\lambda}{f(\lambda)} \right)^2} \right) = \frac{1}{f(\lambda)} \left( \frac{f^2(\lambda)}{f^2(\lambda) + \lambda^2} \right)$$

$$\theta(0, \lambda) = \frac{f(\lambda)}{f^2(\lambda) + \lambda^2} \text{ halini alacaktır.} \quad (3.8)$$

$1 \leq r \leq 2$  için  $f(\lambda) = a\lambda^r$  değerini  $\theta(0, \lambda)$ 'da yerine yazarsak ifademiz,

$$\theta(0, \lambda) = \left( \frac{a\lambda^r}{(a\lambda^r)^2 + \lambda^2} \right) = \left( \frac{a\lambda^r}{a^2\lambda^{2r} + \lambda^2} \right) \text{ ifadesini buluruz. } f(\lambda) \text{ için belirttiğimiz,}$$

şartları göz önüne alırsak;  $\theta(0, \lambda) = O\left(\frac{1}{\lambda^r}\right)$  asimptotikliğini düşünebiliriz. (3.9)

Diğer yandan,  $-y'' = -q(x)y + \lambda^2 y$  başlangıçta ele aldığımız Sturm-Liouville denklemini  $y'' = (q - \lambda^2)y$  şeklinde düzenleyip

$y = R(x) \sin(\lambda\theta(x, \lambda))$ ,  $y' = R(x)\lambda \cos(\lambda\theta(x, \lambda))$  Prüfer dönüşümünü Sturm-Liouville denklemine uygularsak

$$\theta'(x, \lambda) = 1 - \frac{q(x)}{\lambda^2} \sin^2(\lambda\theta(x, \lambda)), \quad x < \frac{\pi}{2} \quad (3.10)$$

Her iki tarafın  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  aralığı için integrali alırsak

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta'(x, \lambda) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - \frac{q(x)}{\lambda^2} \sin^2(\lambda\theta(x, \lambda)) dx$$

elde edilir.

$$\theta\left(\frac{\pi}{2} - 0, \lambda\right) - \theta(0, \lambda) = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{q(x)}{\lambda^2} \sin^2(\lambda\theta(x, \lambda)) dx \quad (3.11)$$

halini alacaktır.

$$\sin^2(\lambda\theta(x)) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{(\sin \lambda\theta(x) \cos \lambda\theta(x))'}{\lambda\theta'(x)} \right)$$

olduğundan.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{q(x)}{\lambda^2} \sin^2(\lambda\theta(x, \lambda)) dx = \frac{1}{2\lambda^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} q(x) dx - \frac{1}{2\lambda^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{q(x)}{\lambda\theta'(x)} (\sin \lambda\theta(x, \lambda) \cos \lambda\theta(x, \lambda))' dx$$

İşlemleri devam ettirirsek

$$= \frac{1}{2\lambda^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} q(x) dx - \frac{1}{2\lambda^2} \left\{ \left[ \left( \frac{q(x)}{\lambda\theta'(x, \lambda)} \sin \lambda\theta(x, \lambda) \cos \lambda\theta(x, \lambda) \right) \right]_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{\lambda} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{q(x)}{\theta'(x, \lambda)} \right) \underbrace{\sin \lambda\theta(x, \lambda) \cos \lambda\theta(x, \lambda)}_{\text{Sınırlı}} dx \right\}$$

$$= \frac{1}{2\lambda^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} q(x) dx - \frac{1}{2\lambda^2} \left( O\left(\frac{1}{\lambda}\right) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right) = \frac{1}{2\lambda^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} q(x) dx + O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right),$$

burda (3.8) ifadesi yerine yazılırsa

$$\theta\left(\frac{\pi}{2} - 0, \lambda\right) - \underbrace{\theta(0, \lambda)}_{(-\theta(0, \lambda))} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2\lambda^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} q(x) dx + O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right) \quad (3.12)$$

elde edilir.

Benzer şekilde  $x > \frac{\pi}{2}$  için  $-y'' = -q(x)y + \lambda^2 y$  ise  $y'' = (q(x) - \lambda^2)y$  şeklinde

düzenleyip Prüfer dönüşümü uygularsak,

$$\theta'(\pi - x, \lambda) = 1 - \frac{q(x)}{\lambda^2} \sin^2(\lambda\theta(\pi - x, \lambda)), \quad x > \frac{\pi}{2}. \quad (3.13)$$

olarak elde edilir.

Buradan aralığın diğer tarafı, yani  $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$  aralığı için aynı işlemleri devam ettirirsek,

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\theta((\pi - x), \lambda))' dx &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 1 - \frac{q(x)}{\lambda^2} \sin^2(\lambda\theta((\pi - x), \lambda)) dx \\ &= \underbrace{-\theta(0, \lambda)}_{(-\theta(0, \lambda))} + \theta\left(\frac{\pi}{2} + 0, \lambda\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2\lambda^2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} q(x) dx - \frac{1}{2\lambda^2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{q(x)}{\lambda\theta(\pi - x, \lambda)} (F(\lambda\theta(\pi - x, \lambda)))' dx \\ &= \frac{\pi}{2} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{q(x)}{\lambda^2} \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{(\sin \lambda\theta(\pi - x, \lambda) \cos \lambda\theta(\pi - x, \lambda))'}{\lambda\theta'(\pi - x, \lambda)} \right) dx \\ &= \frac{\pi}{2} - \left( \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{q(x)}{2\lambda^2} dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{q(x)}{2\lambda^2} \frac{(\sin \lambda\theta(\pi - x, \lambda) \cos \lambda\theta(\pi - x, \lambda))'}{\lambda\theta'(\pi - x, \lambda)} dx \right). \\ F(\lambda\theta((\pi - x), \lambda)) &= \sin(\lambda\theta((\pi - x), \lambda)) \cos(\lambda\theta((\pi - x), \lambda)) = \frac{1}{2} \sin(2\lambda\theta((\pi - x), \lambda)) \end{aligned}$$

kısmi integrasyon ile

$$\begin{aligned} \underbrace{-\theta(0, \lambda)}_{(-\theta(0, \lambda))} + \theta\left(\left(\frac{\pi}{2} + 0\right), \lambda\right) &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2\lambda^2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} q(x) dx - \frac{1}{2\lambda^3} \left\{ \frac{q(x)}{\theta'((\pi - x), \lambda)} F(\lambda\theta((\pi - x), \lambda)) \right\} \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left( \frac{q(x)}{\theta'((\pi - x), \lambda)} \right)' \{ F(\lambda\theta((\pi - x), \lambda)) \} \end{aligned}$$

elde edilir.

$$F(\lambda\theta((\pi - x), \lambda)) = O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right) \text{ olduğundan}$$

$$\theta(0, \lambda) + \theta\left(\left(\frac{\pi}{2} + 0\right), \lambda\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2\lambda^2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} q(x) dx + O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right)$$

$$\theta\left(\left(\frac{\pi}{2} + 0\right), \lambda\right) = -\theta(0, \lambda) + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2\lambda^2} \left( \int_0^{\pi} q(x) dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} q(x) dx \right) + O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right) \quad (3.14)$$

elde edilir.

(3.4) ve (3.12)'den

$$\begin{aligned} \frac{2n\pi}{\lambda_{2n}} + \frac{1}{\lambda_{2n}} \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right) &= -\theta(0, \lambda) + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2\lambda^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} q(x) dx + O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right) \\ \frac{2n\pi}{\lambda_{2n}} &= \frac{\pi}{2} - \frac{\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right)}{\lambda_{2n}} - \frac{1}{2\lambda_{2n}^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} q(x) dx + O\left(\frac{1}{\lambda_{2n}^3}\right) - \theta(0, \lambda) \end{aligned} \quad (3.15)$$

olur. Buna benzer şekilde (3.5) ve (3.14)'den bulduğumuz denklemleri birbirine eşitlersek,

$$\frac{(2n+1)\pi}{\lambda_{2n+1}} = \frac{\pi}{2} + \frac{\arcsin\left(\frac{|\alpha|}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right)}{\lambda_{2n+1}} - \frac{1}{2\lambda_{2n+1}^2} \left( \int_0^{\pi} q(x) dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} q(x) dx \right) + O\left(\frac{1}{\lambda_{2n+1}^3}\right) - \theta(0, \lambda) \quad (3.16)$$

elde edilir.

$n \in \mathbb{N}$  için buradan,

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{U}_n = \left\{ \begin{array}{l} \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right), \text{ için } n = (2K) \text{ ise} \\ -\arcsin\left(\frac{|\alpha|}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right), \text{ için } n = (2K+1) \text{ ise} \end{array} \right\} \\ w_1 = \int_0^{\pi} q(x) dx, \quad w_2 = \int_0^{\pi} q(x) dx - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} q(x) dx \end{array} \right.$$

şeklinde gösterilirse,

$$\lambda_n = 2n + \frac{4n}{\pi} \theta(2n) \left( \frac{\pi}{\pi - 2\theta(2n)} \right) + \frac{1}{4n\pi} \left( w_1 + (-1)^{n-1} w_2 + \frac{8\mathfrak{U}_n^2}{\pi} \right) + \frac{8\mathfrak{U}_n \theta(2n)}{\pi^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

ifadesini elde ederiz.

Sonuç olarak, ispat tamamlanır.

$\left( w_1 + (-1)^{n-1} w_2 + \frac{8\mathfrak{U}_n^2}{\pi} = A_n \right)$  ile gösterilirse,

nodal noktaların asimptotikliğini bulmak için aşağıdaki eşitliklere ihtiyacımız olacaktır.

$$\frac{1}{\lambda_n} = \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^{(r+2)}}\right).$$

$$1 \leq r \leq 2, \quad \frac{1}{\lambda_n} = \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \quad (3.17)$$

Aşağıdaki teoremler nodal parametrelerin asimptotikliği ile ilgili olup  $q'$ 'nin bulunmasında kullanılacaktır.

$\{x_n^j\}_{j=1}^{n-1}$  parçalanışlarına karşılık gelen  $y_n\{x\} = y(x, \lambda_n)$  özfonksiyonun sıfırları olsun.

**Teorem 3.2** (3.1)- (3.3) probleminin nodal noktaları:

$$x_n^j = \frac{j\pi}{n} + \frac{1}{8n^2} \int_0^{x_n^j} q(s)ds + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \quad x_n^j \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \quad (3.18)$$

$$x_n^j = \frac{j\pi}{n} - \frac{j\pi}{n^2} \left( \frac{4n\theta(2n)}{\pi - 2\theta(2n)} + \frac{8\mathfrak{U}_n\theta(2n)}{\pi^2} + \frac{A_n}{8\pi n} \right) + \frac{1}{8n^2} \int_0^{x_n^j} q(s)ds - \frac{1}{8n^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} q(s)ds + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \quad (3.19)$$

$$x_n^j \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \text{ dir.}$$

**İspat:**

$x_n^j \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  için 0 dan  $x_n^j$  ye kadar (3.10) denkleminin integralini alıp  $\lambda = \lambda_n$  yerine yazarsak;

$$\theta(x_n^j, \lambda) - \theta(0, \lambda) = x_n^j - \int_0^{x_n^j} \frac{q(x)(1 - \cos(2\lambda\theta(x, \lambda)))}{2\lambda^2} dx$$

$$\theta(x_n^j, \lambda) + \theta(0, \lambda) = x_n^j - \frac{1}{2\lambda^2} \int_0^{x_n^j} q(x)dx + \frac{1}{2\lambda^2} \int_0^{x_n^j} q(x)\cos(2\lambda\theta(x, \lambda))dx \text{ olur.}$$

$$\frac{1}{2\lambda^2} \int_0^{x_n^j} q(x)\cos(2\lambda\theta(x, \lambda))dx = O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right) \text{ olduğundan istenilen sonuca kolaylıkla ulaşılabilir.}$$

Benzer şekilde  $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$  aralığında nodal noktalar bulunabilir.

**Teorem 3.3.**

(3.1)-(3.3) probleminin nodal uzunluğu

$$\ell_n^j = \frac{2\pi}{\lambda_n} + \frac{1}{2\lambda_n^2} \int_{x_n^j}^{x_n^{j+1}} q(s) ds + o\left(\frac{1}{\lambda_n^2}\right), \quad x_n^j \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \quad (3.20)$$

$$\ell_n^j = \frac{2\pi}{\lambda_n} + \frac{\Omega_n}{\lambda_n} + \frac{1}{2\lambda_n^2} \int_{x_n^j}^{x_n^{j+1}} q(s) ds + o\left(\frac{1}{\lambda_n^2}\right), \quad x_n^j \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \quad (3.21)$$

dir.

**İspat:**

$n \in \mathbb{N}$  ve  $x_n^j \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  aralığı için

$$x_n^{(j+1)} = \frac{(j+1)\pi}{n} + \frac{1}{8n^2} \int_0^{x_n^{(j+1)}} q(s) ds + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \quad x_n^{j+1} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$-x_n^j = \frac{j\pi}{n} + \frac{1}{8n^2} \int_0^{x_n^j} q(s) ds + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \quad x_n^j \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \text{ olup } l_n^j = x_n^{j+1} - x_n^j \text{ de yazılırsa}$$

$$l_n^j = \frac{\pi}{n} + \frac{1}{8n^2} \int_{x_n^j}^{x_n^{j+1}} q(s) ds + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad x_n^j \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

bulunur.

$n \in \mathbb{N}$  benzer şekilde  $x_n^j \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$  için (3.21)'e gidilebilir.

**Teorem 3.4.**

$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  ve  $k \in \{0,1\}$  için (3.1)-(3.3) probleminin  $q$  potansiyel fonksiyonu

$$q(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} 8n^2 \left( \frac{n\ell_n^j}{\pi} - 1 \right) + g_k \quad (3.22)$$

şeklindedir.

Burada  $j = j_n(x) = \max\{j : x_n^j < x\}$ ,

$g_k = \frac{1}{\pi} (w_1 + (-1)^{n-1} w_2)$  dir.

**İspat:**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n + \frac{4n}{\pi} \theta(2n) \left( \frac{\pi}{\pi - 2\theta(2n)} \right) + \frac{1}{4n\pi} \left( w_1 + (-1)^{n-1} w_2 + \frac{8\mathfrak{U}_n^2}{\pi} \right)}{+ \frac{8\mathfrak{U}_n \theta(2n)}{\pi^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)} \right) \approx 2n \text{ olur.}$$

Bulduğumuz bu değer (3.20) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\ell_n^j = \frac{\pi}{n} + \frac{1}{8n^2} \int_{x_n^j}^{x_n^{j+1}} q(s) ds + o\left(\frac{1}{\lambda_n^2}\right) \text{ olduğundan (3.20) denkleminde integralin ortalama}$$

değer teoremininden,  $z \in (x_n^j, x_n^{j+1})$  için

$$q(z) = \frac{1}{x_n^{j+1} - x_n^j} \int_{x_n^j}^{x_n^{j+1}} q(s) ds \text{ fonksiyonundan, } q(z) \ell_n^j = \int_{x_n^j}^{x_n^{j+1}} q(s) ds \text{ şeklinde } q(z) \text{ bulunur.}$$

$$\text{O halde bulduğumuz } q(z) \text{ fonksiyonu (3.20) denkleminde } \ell_n^j = \frac{2\pi}{\lambda_n} + \frac{1}{2\lambda_n^2} q(z) \ell_n^j \text{ olur.}$$

$$\text{Denklemini } q(z) = \frac{4\pi\lambda_n}{\ell_n^j} \left( \frac{\lambda_n \ell_n^j}{2\pi} - 1 \right) + o(1) \text{ olarak düzenlersek bununla birlikte } \lambda_n \approx 2n$$

$$\text{için } \frac{\lambda_n \ell_n^j}{2\pi} = 1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \text{ olur. Buradan da } q(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2\lambda_n^2 \left( \frac{\lambda_n \ell_n^j}{2\pi} - 1 \right), \quad x < \frac{\pi}{2} \quad (3.22)$$

ifadesi elde edilir.

**Teorem 3.5.**

$x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$  için  $k \in \{0, 1\}$  için (3.1)–(3.3) probleminin  $q$  potansiyel fonksiyonu,

$$q(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16n^2 \pi}{(2\pi + F_n)} \left( \frac{n \ell_n^j}{\pi} - \frac{F_n}{2\pi} - 1 \right) + \frac{2 \left( w + (-1)^{k-1} w_1 \right)}{(2\pi + F_k)}$$

şeklindedir

$j = j_n(x) = \max\{j : x_n^j < x\}$ . Burada

$$F_n = \frac{\theta(2n)}{\pi - 2\theta(2n)} + \frac{2\mathfrak{U}_n \theta(2n)}{n\pi^2} + \frac{A_n}{8n\pi} \text{ dir.}$$

**İspat:**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n + \frac{4n}{\pi} \theta(2n) \left( \frac{\pi}{\pi - 2\theta(2n)} \right) + \frac{1}{4n\pi} \left( w_1 + (-1)^{n-1} w_2 + \frac{8\mathfrak{U}_n^2}{\pi} \right)}{+ \frac{8\mathfrak{U}_n \theta(2n)}{\pi^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)} \right) \approx 2n \text{ olur.}$$

Bulduğumuz bu değer (3.21) denkleminde yerine yazılırsa,

$$l_n^j = \frac{\pi}{n} + \frac{\theta(2n)}{\pi - 2\theta(2n)} + \frac{2\mathfrak{U}_n \theta(2n)}{n\pi^2} + \frac{A_n}{8n\pi} + \frac{1}{8n^2} \int_{x_n^j}^{x_n^{j+1}} q(s) ds + o\left(\frac{1}{\lambda_n^2}\right) \quad (3.21)$$

elde edilir.

Benzer şekilde integralin ortalama değer teoremini kullanarak  $t \in (x_n^j, x_n^{j+1})$  aralığı için

$$q(t) = \frac{1}{x_n^{j+1} - x_n^j} \int_{x_n^j}^{x_n^{j+1}} q(s) ds, \text{ ifadesi düzenlenirse } q(t)(x_n^{j+1} - x_n^j) = \int_{x_n^j}^{x_n^{j+1}} q(s) ds \text{ olur.}$$

$$\ell_n^j = x_n^{j+1} - x_n^j, \text{ olduğundan } \int_{x_n^j}^{x_n^{j+1}} q(s) ds = q(t) \ell_n^j \text{ şeklinde } q(t) \text{ fonksiyonu bulunur.}$$

$$\text{Bulduğumuz } q(t) \text{ fonksiyonu (3.21) denkleminde } \ell_n^j = \frac{2\pi}{\lambda_n} + \frac{F_n}{\lambda_n} + \frac{1}{2\lambda_n^2} q(t) \ell_n^j, \text{ olur.}$$

$$\frac{\lambda_n \ell_n^j}{2\pi} = 1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \text{ şeklinde alınırsa, } \lambda_n \approx 2n \text{ yaklaşık değeri için}$$

$$q(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4\pi\lambda_n^2}{2\pi + F_n} \left( \frac{\lambda_n \ell_n^j}{2\pi} - \frac{F_n}{2\pi} - 1 \right), x > \frac{\pi}{2}$$

elde edilir. Böylelikle ispat tamamlanmış olur.

## 4. SONUÇ

Sturm-Liouville probleminin  $[0, \pi]$  aralığında sıçramalı süreksiz bir noktada, yani  $\left(\frac{\pi}{2} + 0\right)$   $\left(\frac{\pi}{2} - 0\right)$  noktalarında Prüfer dönüşümü kullanarak denklemin öz değerleri bulundu, ters nodal problem çözümünü verildi. Çalıştığımız aralığı nodal parçalara ayırdık çalıştığımız nodal noktaları genelleyerek  $x_n^j$  nodal noktaları elde edildi. Prüfer dönüşümü uyguladığımız Sturm-Liouville denklemi için  $(0, x_n^j)$ ,  $\left(\frac{\pi}{2}, x_n^j\right)$  aralıklarında ayrı ayrı integralleyerek her bir aralık için denklem elde edildi. Bu denklemler eşitlenerek  $x_n^j$ 'nin genel denklemi bulundu. Bu nodal noktalar arasındaki uzaklığı bularak  $\ell_n^j$  nodal uzunluk denklemlerini bulundu. Nodal uzunluk denklemlerinde integralin ortalama değer teoremini kullanarak potansiyel fonksiyonlar bulundu. Nodal uzunluk denkleminde gerekli düzenlemeleri yapıp limitten faydalanarak potansiyel fonksiyonların genel denklemi elde edildi.

## KAYNAKLAR

- [1] Hald, O.H. (1984). Discontinuous Inverse Eigenvalue Problems, *Comm. Pure Appl. Math.*, 37, ss. 539-577.
- [2] Shieh, C.T., Yurko, V.A. (2008). Inverse Nodal And Inverse Spectral Problems For Discontinuous Boundary Value Problems, *J. Math. Anal. Appl.*, 347, ss. 266-272.
- [3] Özkan, A.S., Keskin B. (2012). Spectral Problems For Sturm-Liouville Operatör With Boundary And Jump Conditions Linearly Dependent On The Eigenparameter, *Inv. Prob. Sci. Eng.*, 20, ss. 799-808.
- [4] Özkan, A.S., Keskin, B. (2015). Inverse Nodal Problems For Sturm-Liouville Equation With Eigenparameter-Dependent Boundary And Jump Conditions, *Inv. Prob. Sci. Eng.*, 23, ss. 1306-1312.
- [5] Wang, Y.P. (2015). Inverse Problems For Discontinuous Sturm-Liouville Operators With Mbced Spectral Data, *Inv. Prob. Sci. Eng.*, 23, ss. 1180-1198.
- [6] Wang, Y.P., Yurko, V. (2016). On The Inverse Nodal Problems For Discontinuous Sturm-Liouville Operators, *Diff. Egu.*, 260, ss. 4086-4109.
- [7] Buterin, S.A. (2011). On Half Inverse Problem For Differential Pencils With The Spectral Parameter In Boundary Conditions, *Tamkang J. Math* 43, ss. 355-304.
- [8] Buterin, S.A., Shieh, C.T. (2012). Incomplete inverse spectral and nodal problems for differential pencils, *Results in Math.*, 2, ss. 167-179.
- [9] Chen, X.F., Cheng, Y.H., Law, C.K. (2011). Reconstructing potentials from zeros of one eigenfunction, *Trans. Amer. Math. Sac.*, 303, ss. 4831-4851.
- [10] Cheng, Y.H., Law, C.K., Tsay, J. (2000). Remarks On A New Inverse Nodal Problem, *J. Math. Anal. Appl.*, 248, ss. 145-155.
- [11] Currie, S., Watson, B.A. (2007). Inverse Nodal Problems For Sturm-Liouville Equations On Graphs, *Inv. Proh.*, 23, ss. 2029-2040.
- [12] Gesztesy, F., Simon, B. (2000). Inverse Spectral Analysis With Partial Information On The Potential, II. The Case Of Discrete Spectrum, *Trans. Amer. Math. Sor.*, 352, ss. 2705-2787.
- [13] Gülsen, T., Yılmaz E., Akbarpoor, S. (2018). Numerical Investigation of the Inverse Nodal Problem by Chebyshev Interpolation Method, *Thermal Sci.*, 22, ss. 123-136.
- [14] Guo, Y., Wei, G. (2013). Inverse Problems: Dense Nodal Subset On An Interior Subinterval, *J. Diff. Equ.*, 255, ss. 2002-2017.
- [15] Hald, O.H., McLaughlin, J.R. (1989). Solution Of Inverse Nodal Problems, *Inv. Proh.*, 5 ss. 307-347.
- [16] Çakır, A. (2007). *Kompleks Potansiyele Sahip Sturm-Liouville Operatörleri İçin Ters Saçılma Problemi Ve Bazı Uygulamaları*, Yüksek Lisans Tezi, Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [17] Pöschel, J., Trubowitz, E. (1987). Inverse Spectral Theory, volume 130 of *Püre and Applied Mathematics*, Academic Press, Inc, Boston, MA.
- [18] Choudhary, B., Nanda, S. (1990). *Functional Analysis with Applications*, John Wiley and Sons İne.
- [19] Levitan, B. M., Sargsjan, I. S. (1975). *Introduction to Spectral Theory: Self Adjoint Ordinary Differential Operators*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.
- [20] Kolmogorov, A. N., Fomin, S. V. (1961). *Elements of the Theory of functions and Functional Analysis*, Volume 2 Measure, The Lebesque integral, Hilbert Space, Graylock Press, Albany N. Y.
- [21] Şuhubi, E. S. (2001). *Fonksiyonel Analiz*, İTÜ Vakfı Yayınları, İstanbul.

- [22] Lukkassen, D. (2004). A short Introduction to Sobolev Spaces and Applications for engineering students.
- [23] Njue, J. N. (2003). *Nodal Point data for inverse Sturm-Liouville Problems*, Master of Science, Iowa State University.
- [24] Cheng, Y. H. (2005). *Inverse Problems For Various Sturm-Liouville Operators*, Doctor of Philosophy, National Sun Yat Sen University.
- [25] Myint-U, T., Debnath L. (2006). *Linear Partial Differential Equations For Scientists And Engineers*, Birkhauser, Boston.
- [26] Choudhary, B., Nanda, S. (1990). *Functional Analysis with Applications*, John Wiley and Sons İne.
- [27] [http://en.wikipedia.org/wiki/Big\\_O\\_notation](http://en.wikipedia.org/wiki/Big_O_notation), *Büyük O gösterimi*. 15 Mart 2022.
- [28] Preiss, B. R. (1999). *Data Structures and Algorithms with object - Oriented Design Patterns in Java*, John-Wiley and Sons.
- [29] <http://www.math.uiuc.edu/~hildebr/595ama/ama-ch2.pdf>, *Asymptotic Notations*, 15 Mart 2022.
- [30] Koyunbakan, H., Mosazadeh, S. (2021). Inverse Nodal Problem For Discontinuous Sturm-Liouville Operator By New Prüfer Substitution, *Mathematical Sci.*, 15, 387-394