

T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**PELL-LUCAS POLİNOMLARI İLE TANIMLANAN ANALİTİK
FONKSİYONLARIN BİR ALT SINIFI İÇİN KATSAYI TAHMİNLERİ**

ONUR SABUR
Yüksek Lisans Tezi

DANIŞMAN
Doç. Dr. MURAT ÇAĞLAR

OCAK-2023
KARS



T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI



PELL-LUCAS POLİNOMLARI İLE TANIMLANAN ANALİTİK
FONKSİYONLARIN BİR ALT SINIFI İÇİN KATSAYI TAHMİNLERİ

ONUR SABUR

Yüksek Lisans Tezi

DANIŞMAN

Doç. Dr. MURAT ÇAĞLAR

OCAK-2023

KARS

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Onur SABUR'un Doç. Dr. Murat ÇAĞLAR danışmanlığında yüksek lisans tezi olarak hazırladığı “Pell-Lucas Polinomları ile Tanımlanan Analitik Fonksiyonların Bir Alt Sınıfı İçin Katsayı Tahminleri” adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sınavı sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Öğretim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek oy ile kabul edilmiştir.

.... / /2023

Adı ve Soyadı

İmza

Başkan : Doç. Dr. Çetin YILDIZ

Üye : Doç. Dr. Murat ÇAĞLAR

Üye : Doç. Dr. Veysel NEZİR

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun / /2023 gün ve / sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Fikret AKDENİZ
Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Onur SABUR

ÖZET

(Yüksek Lisans Tezi)

PELL-LUCAS POLİNOMLARI İLE TANIMLANAN ANALİTİK FONKSİYONLARIN BİR ALT SINIFI İÇİN KATSAYI TAHMİNLERİ

Onur SABUR

Kafkas Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Murat ÇAĞLAR

Bu tezde, Pell-Lucas polinomları yardımıyla birim diskte analitik ve bi-ünivalent fonksiyonların yeni bir alt sınıf tanımlanarak bu sınıf için katsayı eşitsizlikleri ve Fekete-Szegö problemi ele alınmıştır.

Anahtar Kelimeler: Analitik Fonksiyonlar, Bi-ünivalent Fonksiyonlar, Katsayı Eşitsizlikleri, Fekete-Szegö Eşitsizliği, Pell-Lucas Polinomları

2023, 61 sayfa

ABSTRACT

(M. Sc. Thesis)

COEFFICIENT ESTIMATES FOR A SUBCLASS OF ANALYTIC FUNCTIONS DEFINED BY PELL-LUCAS POLYNOMIALS

Onur SABUR

Kafkas University
Graduate School of Applied and Naturel Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Dr. Murat ÇAĞLAR

In this thesis, a new subclass of analytic and bi-univalent functions is defined by Pell-Lucas polynomials on the unit disk, and coefficient inequalities and the Fekete-Szegö problem are discussed for this subclass.

Key Words: Analytic Functions, Bi-univalent Functions, Coefficient Inequalities, Fekete-Szegö Inequality, Pell-Lucas Polynomials.

2023, 61 pages

ÖNSÖZ

Yüksek lisans tezi olarak hazırlayıp sunduğum bu çalışma Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda ortaya çıkarılmıştır. Bilgi, teşvik ve üstün becerisiyle bana çalışmamda ışık tutan, hazırlık çalışmalarımda etkin katkısı olan, zamanını ve tecrübesini benden esirgemeyen Erzurum Teknik Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi danışman hocam, Sayın Doç. Dr. Murat ÇAĞLAR'a ve bu zaman zarfında katkılarını eksik görmeyen Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi Sayın Prof. Dr. Erhan DENİZ'e teşekkürlerimi sunarım. Yüksek lisans eğitimi aldığım süre zarfında her şekilde yardım ve destekleri ile göstermiş oldukları sabırdan dolayı sevgili eşim ve kızıma teşekkür ederim.

Onur SABUR

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT	ii
ÖNSÖZ.....	iii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	v
TABLolar DİZİNİ	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	vii
1. GİRİŞ	1
2. KURUMSAL TEMELLER	5
2.1. Temel Kavramlar	5
2.2. Analitik ve Ünivalent Fonksiyonlar	7
2.3. Normalize Edilmiş Ünivalent Fonksiyonlar	13
3. MATERYAL VE YÖNTEM	28
3.1. Bi-Ünivalent Fonksiyonların Tanımı ve Bazı Özellikleri	28
3.2. Pell-Lucas Polinomu ve Özellikleri	31
3.3. Rekürans Bağlantıya Sahip Polinomlar	33
3.4. Pell ve Pell-Lucas Polinomlarının Üreteç Fonksiyonları	36
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	39
5. TARTIŞMA VE SONUÇ.....	48
KAYNAKLAR.....	49

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1: w_0 Noktasına Göre Yıldızıl Bölge	17
Şekil 2: Koebe Fonksiyonu.....	19
Şekil 3: Konveks Bölge	20
Şekil 4: $f \prec g$ Subordinasyonu.....	21



TABLÖLAR DİZİNİ

Tablo 1: Lucas, Pell ve Pell-Lucas Sayı Dizilerinin İlk 10 Terimi.....	33
Tablo 2: Lucas polinomunun ilk 10 üyesi.	34
Tablo 3: Pell ve Pell-Lucas polinomlarının ilk 10 üyesi.	35



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{C}$	: Kompleks düzlem
$\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$	: Genişletilmiş kompleks düzlem
U	: $\{z \in \mathbb{C} : z < 1\}$, Açık birim disk
$U(z_0, r)$	: z_0 merkezli r yarıçaplı açık disk
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{N}^+$	: Pozitif tam sayılar kümesi
γ	: $\mathbb{C}$ düzleminde bir eğri
$f^{(n)}$	: f fonksiyonun n . mertebeden türevi
$\mathcal{A}$	: U birim diskinde tanımlı analitik fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{S}$	: $\mathcal{A}$ ya ait ünivalent fonksiyonların sınıfı
Σ	: $\mathcal{A}$ ya ait bi-ünivalent fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{P}$	: Caratheodory sınıfı
Ω	: Schwarz fonksiyonlarının sınıfı
$\mathcal{S}^*$	: $\mathcal{A}$ ya ait yıldızlı fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{C}$	: $\mathcal{A}$ ya ait konveks fonksiyonların sınıfı
$f \prec g$	: f fonksiyonunun g fonksiyonuna subordinasyonu
$Q_n(x)$	: Pell-Lucas polinomu

1. GİRİŞ

Geometrik fonksiyonlar teorisinin en önemli konularından birisi ünivalent fonksiyonlar teorisidir. Kompleks düzlemin basit bağlantılı bir öz altkümesini birim diske konform olarak dönüştüren fonksiyonun varlığı Riemann dönüşüm teoremi ile bilinir. Bu nedenle keyfi basit bağlantılı bölgeler üzerinde tanımlanan ünivalent fonksiyonlarla çalışmak yerine birim diskte tanımlanan ünivalent fonksiyonlarla çalışmak çok kez kolaylık sağlar. Ünivalent fonksiyonlar üzerindeki çalışmalar, $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ birim diskinde analitik, ünivalent ve $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ şartlarını sağlayan fonksiyonların oluşturduğu bir $\mathcal{S}$ sınıfı üzerinde yoğunlaşmıştır.

1907 yılında Koebe, $\mathcal{S}$ sınıfına ait fonksiyonlar altında U birim diskinin görüntüsünü incelemiş ve U birim diskinin $f \in \mathcal{S}$ altındaki görüntüsünün sınırı olan $\partial f(U)$ nun orijine olan uzaklığının $1/4$ ten küçük olamayacağını ispatlamıştır. (Literatürde Koebe-Çeyrek Teoremi olarak bilinir.)

1916 yılında Bieberbach tarafından ileri sürülen $z \in U$ olmak üzere $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonu $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ biçiminde bir Taylor açılımına sahipse $n = 2, 3, \dots$ için $|a_n| \leq n$ tahmini uzun yıllar matematikçiler tarafından ispatlanmaya çalışılmış ve 1985 yılına kadar bu tahmin sadece $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ katsayıları için sağlanabilirken 1985 yılında Brange's tarafından tüm a_n değerleri için ispatlanmıştır.

Bu aşamalar

$n = 2$ için	$ a_2 \leq 2$	Bieberbach (1916)
$n = 3$ için	$ a_3 \leq 3$	Löwner (1923)
$n = 4$ için	$ a_4 \leq 4$	Garabedian ve Schiffer (1955)
$n = 5$ için	$ a_5 \leq 5$	Pederson ve Schiffer (1972)
$n = 6$ için	$ a_6 \leq 6$	Pederson ve Ozawa (1968-1969)

Tüm n 'ler için $|a_n| \leq n$ L. De Branges (1985) şeklindedir.

Unutulmamalıdır ki, katsayı problemini en önemli kılan sebep katsayının fonksiyonun geometri üzerindeki rolüdür. Örneğin ikinci katsayı kullanılarak, yukarıda da bahsedilen Koebe-Çeyrek teoremi, büyüme (Growth) ve genişleme (Distorsiyon) teoremleri ispatlanır.

1985 yılında elde edilen bu çözüm ünivalent fonksiyonlar teorisini zenginleştirmiştir ve beraberinde birçok yeni problemin ortaya çıkmasına vesile olmuştur. Bu problemlerden biri ünivalent fonksiyonların alt sınıflarının özelliklerini araştırmak olmuştur. Bu alt sınıfların en önemlilerinden biri yıldızlı fonksiyonların sınıfı $\mathcal{S}^*$, diğeri de konveks fonksiyonların sınıfı $\mathcal{C}$ dir.

Ele alınan problemlerden bir diğeri de hem kendisi hem de tersi ünivalent olan yani kısaca bi-ünivalent fonksiyonların belirttiği serinin katsayıları için kesin bir üst sınır bulmaktır. Bu problemle ilgili ilk çalışma 1967 yılında Lewin [28] tarafından yapılmıştır. Lewin çalışmasında Grunsky eşitsizliğini kullanarak her $f, f^{-1} \in \mathcal{S}$ için $|a_2| \leq 1.51$ olduğu ispatlanmıştır. Yalnız bu üst sınır kesin değildir. 1979 yılında Brannan ve Clunie [4] $|a_2| \leq \sqrt{2}$ bularak Lewin'in sonucunu iyileştirmiştir. Netanyahu [32] 1968 yılında $\max|a_2| = 4/3$ olarak ispatlamıştır. Styer ve Wright [39] çalışmasında Netanyahu'nun bu çalışmasından yola çıkarak $|a_2| > 4/3$ eşitsizliğini sağlayan bi-ünivalent fonksiyonların var olduğuna dair bazı örnekler vermiştir. Bundan sonraki yıllarda bi-ünivalent fonksiyonların katsayıları üzerine çalışmalar hız kazanarak bi-ünivalent fonksiyonların alt sınıfları için katsayı problemi çalışılmıştır. Bu aşamada da ilk çalışma Kedzierawski [23] tarafından 1985 yılında yapılmıştır.

Kedzierawski çalışmasında,

$$|a_2| \leq \begin{cases} 1.5894; & f, f^{-1} \in \mathcal{S} \\ 2; & f, f^{-1} \in \mathcal{S}^* \\ 1.507; & f \in \mathcal{S}^*, f^{-1} \in \mathcal{S} \\ 1.224; & f \in \mathcal{C}, f^{-1} \in \mathcal{S} \end{cases}$$

kesin olmayan sınırları elde etmiştir. Aynı yılda Branna ve Tan [40] daha iyi bir sınır olarak $|a_2| \leq 1.485$ olduğu ispatlamıştır. Daha sonra 1986 yılında Brannan ve Taha'nın güçlü bi-yıldızıl, α - mertebeden bi-yıldızıl ve α - mertebeden bi-konveks fonksiyonlar için a_2 ve a_3 için kesin olmayan üst sınırlarını vermiştir. Özellikle 2010 yılından sonra bi-ünivalent fonksiyonların alt sınıflara ait fonksiyonlar için a_2 , a_3 ve a_4 katsayılarının kesin olmayan üst sınırlarını bulma problemi oldukça hız kazanmıştır. Öyle ki; bu ilk iki katsayı ile ilgili üst sınırlar 2010 yılında Srivastava, Mishra ve Gochhayat'ın [37] çalışmasıyla başlamış, 2011 yılında Frasin ve Aouf [13], 2012 yılında; Ali, Lee, Ravichandran ve Supramaniam [1], Xu, Gui ve Srivastava [44], Xu, Xiao ve Srivastava [45], Li and Wang [29], 2013 yılında; Deniz [19], Çağlar, Orhan ve Yağmur [8], Kumar, Kumar ve Ravichandran [27], Srivastava, Bulut, Çağlar ve Yağmur [36], Bulut [5], Crişan [7], Magesh ve Yamini [30], Tang, Deng ve Li [41], Murugusundaramoorthy, Magesh ve Prameela [31], Prema ve Keerthi [35], Srutha ve Chinthamani [38] ile devam etmiştir. Bu çalışmaların tamamında bulunan üst sınırlar kesin değildir. Dolayısıyla bi-ünivalent fonksiyonların katsayı problemi ile ilgili iki açık problem göze çarpmaktadır. Bunlardan biri her $n \in \mathbb{N}$ için genel a_n katsayılarının üst sınırını bulmak diğeri kesin üst sınır bulmaktır. Her iki problemde bugüne kadar çözülememiştir. Yalnız Jahangiri ve Hamidi [20] 2013 yılında yaptığı çalışmada bi-ünivalent fonksiyonların bir alt sınıfı için Faber polinomlarının katsayılarının özelliklerini kullanarak $k \in \{2, 3, \dots, n-1\}$ için $a_k = 0$ olması durumunda a_n için kesin olmayan üst sınır bulmuştur. Bununla açık problem olarak bildiğimiz genel a_n katsayılarının üst sınırını bulmak kısmende olsa çözüme kavuşmuştur. Bu çalışmadan sonra bu konu üzerine 2014 yılında; Hamidi ve Jahangiri [15,16], Bulut [6] ve Jahangiri, Hamidi ve Halim [22], 2015 yılında; Jahangiri ve Hamidi [21] ve Hamidi ve Jahangiri [17] ve 2016 yılında ise; Hamidi ve Jahangiri [18] ve Deniz ve arkadaşlarının [10] çalışmalarını görmekteyiz.

Bu tez çalışmasında, literatürde son zamanlarda bu konu ile ilgili yapılan çalışmalardan yola çıkılarak Pell-Lucas polinomları yardımıyla bi-ünivalent fonksiyonların $R_G(\beta, \gamma, \delta, x)$ sınıfı aşağıdaki biçimde tanımlanır:

$\gamma \geq 1, \delta \geq 0, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ve $z, w \in \Delta, g(w) = f^{-1}(w)$ olmak üzere,

$$1 + \frac{1}{\beta} \left[(1-\gamma) \frac{f(z)}{z} + \gamma f'(z) + \delta z f''(z) - 1 \right] \prec G \{ L_{2x,1,n}(x) \} (z) - 1$$

ve

$$1 + \frac{1}{\beta} \left[(1-\gamma) \frac{g(w)}{w} + \gamma g'(w) + \delta w g''(w) - 1 \right] \prec G \{ L_{2x,1,n}(x) \} (w) - 1$$

şartları sağlanırsa $f(z)$ fonksiyonu $R_G(\beta, \gamma, \delta, x)$ sınıfına aittir denir.

Bu sınıf için katsayı eşitsizlikleri ve Fekete-Szegö problemi ele alınmıştır.

Bu amaç doğrultusunda;

Kuramsal temeller bölümünde, tez boyunca kullanılacak olan temel tanımlara, önemli bazı teorem ve sonuçlara yer verilmiştir.

Materyal ve yöntem bölümünde, bi-ünivalent fonksiyonların ve Pell-Lucas polinomlarının tanımlarından ve özelliklerinden bahsedilmiştir.

Araştırma bulguları bölümünde, yukarıda tanımlanan $R_G(\beta, \gamma, \delta, x)$ sınıfı için katsayı eşitsizlikleri ve Fekete-Szegö eşitsizliği elde edilmiştir.

2. KURUMSAL TEMELLER

2.1. Temel Kavramlar

Bu kısımda daha sonraki kısımlarda kullanılacak olan temel kavramlar verilmiştir.

Tanım 2.1.1 (r -komşuluğu): $z_0 \in \mathbb{C}$ ve $r > 0$ bir reel sayı olmak üzere $U(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ ifadesi z_0 merkezli, r yarıçaplı açık disk (veya z_0 noktasının r -komşuluğu) olarak adlandırılır. [34]

$\bar{U}(z_0, r)$ ile $U(z_0, r)$ nin kapanışı $\partial U(z_0, r)$ ile de onun sınırı ve orijin merkezli r yarıçaplı disk $U(0, r) = U_r$ ile gösterilecektir.

Özel durumda orijin merkezli açık birim disk $U = \{z : |z| < 1, z \in \mathbb{C}\}$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.1.2 (İç Nokta): $S \subset \mathbb{C}$ herhangi bir küme olsun. $z_0 \in S$ noktası için $U(z_0, r) \subset S$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı varsa z_0 noktasına S kümesinin bir iç noktası denir. [34]

Tanım 2.1.3 (Açık Küme): Bir $S \subset \mathbb{C}$ kümesi verilsin. Eğer S kümesinin her noktası S nin bir iç noktası ise S kümesine açık küme denir. [34]

Tanım 2.1.4 (Kapalı Küme): $S \subset \mathbb{C}$ olsun. S kümesinin tümleyeni açık küme ise, S kümesine kapalı küme denir. [34]

Tanım 2.1.5 (Bağlantılı Küme): Eğer $S \subset S_1 \cup S_2$, $S \cap S_1 \neq \emptyset$, $S \cap S_2 \neq \emptyset$ ve $S \cap S_1 \cap S_2 = \emptyset$ olacak şekilde S_1 ve S_2 gibi boş olmayan iki ayrık ve açık küme bulunamaz ise $S \subset \mathbb{C}$ kümesine bağlantılıdır denir. Aksi halde bağlantısız küme denir. [34]

Örneğin; $\mathbb{C}$ nin kendisi bağlantılıdır.

Tanım 2.1.6 (Bölge): Açık ve bağlantılı kümelere bölge denir. [34]

Örneğin; $\mathbb{C}$ hem açık hem de bağlantılı olduğundan bir bölgedir.

Tanım 2.1.7 (Süreklilik): $S \subset \mathbb{C}$, $f : S \rightarrow \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve $z_0 \in S$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $|z - z_0| < \delta$ olduğunda $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ olacak biçimde $\delta = \delta(z_0, \varepsilon) > 0$ sayısı varsa f ye z_0 noktasında süreklidir denir. Eğer f fonksiyonu S kümesinin her bir noktasında sürekli ise f ye S kümesinde sürekli fonksiyon denir. [34]

Tanım 2.1.8 (Eğri): $[a, b] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere sürekli bir $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonuna $\mathbb{C}$ düzleminde eğri (yol) denir. $\gamma(a)$ ve $\gamma(b)$ noktalarına da sırasıyla eğrinin başlangıç ve bitim noktaları denir. [34]

Tanım 2.1.9 (Kapalı Eğri): $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ye bir eğri olsun. $\gamma(a) = \gamma(b)$ ise γ ya kapalı eğri denir. [34]

Tanım 2.1.10 (Basit Kapalı Eğri): Uç noktaların çakışması hariç kendini kesmeyen eğrilere basit eğri, hem basit hem de kapalı eğrilere de basit kapalı eğri veya Jordan eğrisi denir. Jordan eğrisi düzlemi Jordan eğrisinin içi ve dışı olmak üzere iki bölgeye ayırır. Jordan eğrisinin içine Jordan bölgesi denir. γ Eğrisi $[a, b]$ kapalı aralığında türevlenebilir olsun. Eğer $[a, b]$ kapalı aralığında γ' türevi sürekli ve sıfırdan farklı ise γ eğrisine düzgün eğri denir. t , a dan b ye artarken, buna karşılık gelen $\gamma(t)$ değerlerinin $\gamma(a)$ dan $\gamma(b)$ ye doğru sıralanması eğrinin yönünü belirtir. Kapalı bir eğrinin yönü ya pozitif ya da negatiftir. Kapalı olmayan eğriler için başlangıç noktasından bitiş noktasına doğru sıralama yön olarak alınır. [34]

Tanım 2.1.11 (Düzgün Eğri): γ eğrisi $[a, b]$ kapalı aralığında türevlenebilir olsun. Eğer $[a, b]$ kapalı aralığında γ' türevi sürekli ve sıfırdan farklı ise γ eğrisine düzgün eğri denir. [34]

2.2. Analitik ve Ünivalent Fonksiyonlar

Bu kısımda analitik ve ünivalent fonksiyon kavramları tanıtılacak ve bu fonksiyonlar yardımıyla bazı tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.2.1 (Diferansiyellenebilme): $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}$ bir bölge olmak üzere $f : \mathcal{A} \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ye bir fonksiyon ve $z_0 \in \mathcal{A}$ olsun. Eğer

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

sonlu limiti varsa $f(z)$ fonksiyonu $z_0 \in \mathcal{A}$ noktasında diferansiyellenebilirdir (türevlenebilirdir) denir. Bu limit değeri $f'(z_0)$ ile gösterilir ve $z = z_0$ noktasında $f(z)$ fonksiyonunun türevi olarak adlandırılır. [34]

Tanım 2.2.2 (Analitiklik): Bir f kompleks fonksiyonu bir z_0 noktasında ve bu noktanın belli bir $U(z_0, \varepsilon)$ komşuluğundaki bütün noktalarında diferansiyellenebiliyorsa f ye z_0 noktasında analitiktir denir. Eğer bu f kompleks fonksiyonu bir $S \subset \mathbb{C}$ kümesinin her noktasında analitikse f ye S kümesinde analitik denir. Tüm kompleks düzlemde analitik olan fonksiyonlara tam fonksiyon denir. [34]

Örneğin; $f(z) = \sin z$ bir tam fonksiyon olup $f(z) = \arg z$ bir tam fonksiyon değildir.

$z = x + iy$ olmak üzere $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ kompleks değişkenli kompleks değerli fonksiyonu analitik ise,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \quad \text{ve} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y)$$

olarak ifade edilen Cauchy-Riemann denklemlerini sağlar. [34]

Teorem 2.2.3 (Liouville Teoremi): Bir $f(z)$ tam fonksiyonu sınırlı ise sabittir. [34]

Kompleks fonksiyonlar teorisinde, analitik fonksiyonlar için önemli bir yere sahip olan Cauchy-Türev formülü aşağıdaki gibidir.

Teorem 2.2.4 (Cauchy-Türev Formülü): f , pozitif yönlü basit kapalı γ eğrisi içinde ve üzerinde analitik bir fonksiyon ve z_0 bu eğrinin içinde bir nokta ise $n \in \mathbb{N}$ için

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

dir. [34]

Cauchy-Türev formülünün en önemli sonuçlarından biri şudur: f , bir bölgede analitik bir fonksiyon ise bu bölgede her mertebeden türevi vardır ve bu türevler de o bölgede analitiktir. Bu durumda f analitik fonksiyonu z_0 noktasında

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad (2.1)$$

şeklinde bir Taylor açılımına sahiptir. Fakat reel değişkenli bir fonksiyonun bir noktada birinci mertebeden türevi varsa bu noktada daha yüksek mertebeden türevi vardır diyemeyiz.

Örneğin, $f(x) = x^{3/2}$ reel değişkenli fonksiyonunun $x = 0$ noktasında birinci mertebeden türevi olduğu halde, aynı fonksiyonun $x = 0$ noktasında ikinci mertebeden türevi yoktur.

Tanım 2.2.5 (Ayrık Tekil Nokta): Bir $w = f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasının bir $U(z_0, r) - \{z_0\}$ delinmiş komşuluğunda analitik fakat z_0 noktasında analitik değilse f fonksiyonu için z_0 noktası bir ayrık tekil noktadır denir. [34]

Teorem 2.2.6 (Laurent Teoremi): c_0 ve c_1 , merkezleri z_0 noktasında bulunan pozitif yönde yönlendirilmiş iki çember olsun. $r_0 < r_1$ olmak üzere c_0 , r_0 yarıçaplı ve c_1 de r_1 yarıçaplı çemberler olarak alınsın. Eğer bir f fonksiyonu c_0 ile c_1 in üzerinde ve bunların arasında kalan halka bölgenin tamamında analitik ise bu durumda bölgedeki her z noktasında $f(z)$ fonksiyonu a_n ve b_n kompleks sayılar olmak üzere

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

açılımı ile temsil edilir. Buna $f(z)$ fonksiyonunun z_0 noktasının delinmiş bir komşuluğundaki Laurent serisi (açılımı) denir. [34]

Tanım 2.2.7 (Kutup Noktası): z_0 , $f(z)$ fonksiyonunun ayık tekil noktası olsun. Laurent açılımındaki b_n katsayılarından sadece sonlu tanesi sıfırdan farklı ise z_0 noktasına $f(z)$ fonksiyonunun kutup noktası denir. [34]

Tanım 2.2.8 (Meromorf Fonksiyon): Kompleks düzlemin bir $\mathcal{A}$ bölgesinde kutup noktaları hariç analitik olan $f(z)$ fonksiyonuna $\mathcal{A}$ da meromorf fonksiyon denir. [34]

Teorem 2.2.9 (Maksimum Modül Prensibi): f fonksiyonu kompleks düzlemin bir $\mathcal{A}$ bölgesinde analitik olsun. Bu fonksiyon $\mathcal{A}$ bölgesinde sabit olmadıkça, $|f(z)|$ maksimum değerini $\mathcal{A}$ bölgesinin sınırında alamaz. [34]

Sonuç 2.2.10: $\mathcal{A}$ kompleks düzlemde sınırlı bir bölge ve sabit olmayan f fonksiyonu da bu bölgenin sınırında sürekli ve içinde analitik olsun. Bu durumda $|f(z)|$ maksimum değerini $\mathcal{A}$ bölgesinin sınırında alır. [34]

Maksimum prensibinin önemli sonuçlarından birisi Schwarz lemmasıdır.

Lemma 2.2.11 (Schwarz Lemması): f fonksiyonu U birim diskinde analitik ve $f(0)=0$ olsun. Eğer U birim diskinde $|f(z)| \leq 1$ ise bu durumda $|f'(0)| \leq 1$ ve $|f(z)| \leq |z|$ dir. Eşitlik sadece $\theta \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(z) = e^{i\theta} z$ fonksiyonu ile sağlanır. [9]

Teorem 2.2.12 (Minimum Prensibi): $f(z)$ fonksiyonu kompleks düzlemin bir $\mathcal{A}$ bölgesinde sabit olmayan bir fonksiyon ve her $z \in \mathcal{A}$ için $f(z) \neq 0$ olsun. Bu durumda $|f(z)|$, $\mathcal{A}$ bölgesinde minimum değer alamaz. [34]

Sonuç 2.2.13: $\mathcal{A}$ kompleks düzlemde sınırlı bir bölge, $f(z)$ sabit olmayan bir fonksiyon ve her $z \in \mathcal{A}$ için $f(z) \neq 0$ olsun. Ayrıca $f(z)$ fonksiyonunun $\mathcal{A}$ bölgesinin içinde analitik, sınırında sürekli olduğunu kabul edelim. Bu durumda $|f(z)|$ minimum değerini $\mathcal{A}$ bölgesinin sınırında alır. [34]

Tanım 2.2.14 (Ünivalent Fonksiyon): f , $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}$ bölgesinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Her $z_1, z_2 \in \mathcal{A}$ için $f(z_1) = f(z_2)$ olması sadece $z_1 = z_2$ olmasını gerektiriyorsa (veya $z_1 \neq z_2$ olduğunda $f(z_1) \neq f(z_2)$ gerçekleşiyorsa) f fonksiyonuna $\mathcal{A}$ bölgesinde ünivalent (yalıncat veya schlicht) fonksiyon denir. [11]

Örneğin; $f(z) = \bar{z}$ bir ünivalent fonksiyondur. Eğer $f(z)$, z_0 noktasının bir komşuluğunda ünivalent ise $f(z)$ ye yerel ünivalent fonksiyon denir.

Teorem 2.2.15: Analitik bir f fonksiyonunun z_0 noktasında yerel ünivalent olması için gerek ve yeterli koşul $f'(z_0) \neq 0$ olmasıdır. [11]

Ayrıca $f'(z_0) \neq 0$ şartı $f(z)$ fonksiyonunun ünivalentliği için gerek şarttır fakat yeterli değildir. Yani sadece f analitik fonksiyonu ünivalent ise $f'(z_0) \neq 0$ dır. Tersisi daima

doğru değildir. Bir kümede yerel ünivalent olan analitik fonksiyonların, bu kümede ünivalent olması gerekmez.

Örnek 2.2.16: $f(z) = z^2$ fonksiyonu $\mathcal{A} = \{z : 1 < |z| < 2, 0 < \arg z < 3\pi/2\}$ bölgesinde yerel ünivalent olmasına rağmen ünivalent değildir. Gerçekten de $f(z) = z^2$ fonksiyonu, $\mathcal{A}$ bölgesinde analitik ve her $z_0 \in \mathcal{A}$ için $f'(z_0) \neq 0$ sağlandığından yerel ünivalenttir. Fakat,

$$f\left(\frac{5}{3\sqrt{2}} + i \frac{5}{3\sqrt{2}}\right) = f\left(-\frac{5}{3\sqrt{2}} - i \frac{5}{3\sqrt{2}}\right) = i \frac{25}{9}$$

olduğundan $f(z) = z^2$ fonksiyonu $\mathcal{A}$ bölgesinde ünivalent değildir.

Eğer $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}$ bölgesinde f analitik fonksiyonu yerel ünivalent ise, bu durumda $z \in \mathcal{A}$ noktasında $f'(z)$ türevi, f nin yerel geometrik davranışını belirler. $|f'(z)|$ ve $\arg f'(z)$ değerleri sırasıyla yerel büyüme (uzunluklar için) ve yerel dönme etkenleridir. Buna ilave olarak, $f : \mathcal{A} \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analitik dönüşümünün Jacobian determinanı $Jf(z) = |f'(z)|^2$ ile verilmektedir. Jacobian determinantının $|f'(z)|^2$ ifadesine eşit olduğu Cauchy-Riemann denklemlerinden kolayca görülür. Böylece Teorem 2.2.15 ten analitik fonksiyonlar için Jacobian determinantının sıfırdan farklı olması, yerel ünivalentlik için gerek ve yeter şarttır.

Tanım 2.2.17 (Konform Dönüşüm): Eğer bir dönüşüm, belli bir noktadan geçen iki düzgün eğri arasındaki açının büyüklüğünü ve yönünü koruyorsa, bu dönüşüme bu noktada konform dönüşüm denir. Eğer bir f fonksiyonu, bir $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}$ bölgesinin tüm noktalarında konform ise, f fonksiyonu $\mathcal{A}$ bölgesinde konformdur denir. Örneğin $f(z) = e^z$ dönüşümü $\mathbb{C}$ düzleminin tamamında konformdur. [11]

Örneğin; $f(z) = z^2$ dönüşümü $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ düzleminde konformdur.

Teorem 2.2.18: f fonksiyonun analitik olduğu her z noktasında $f'(z) \neq 0$ koşulu sağlanıyorsa, f fonksiyonu konformdur. [11]

Dolayısıyla bir bölgede analitik ve ünivalent bir fonksiyon konformdur. En önemli konform dönüşümlerden biri Möbius dönüşümüdür.

Bu dönüşüm; $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ sabitler ve

$ad - bc \neq 0$ ve $T: \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ olmak üzere

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{veya} \quad T(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}$$

biçiminde tanımlanır. Neden $ad - bc \neq 0$ olmalıdır? Çünkü, $z \neq w$ için

$$\begin{aligned} T(z) - T(w) &= \frac{az + b}{cz + d} - \frac{aw + b}{cw + d} \\ &= \frac{(ad - bc)(z - w)}{(cz + d)(cw + d)} \end{aligned}$$

olup, eğer $ad - bc = 0$ ise $T(z) = T(w)$ olur. Bu da T nin sabit olması anlamına gelir. Aynı zamanda $ad - bc \neq 0$ alınması T nin bire bir olduğunu gösterir. Sabit fonksiyonun bire bir olmadığı açıktır.

z -düzlemindeki $\mathcal{D} \subset \mathbb{C} (\mathcal{D} \neq \mathbb{C})$ bölgesini, w -düzlemindeki $\mathcal{D}_1$ bölgesi üzerine resmeden f analitik fonksiyonunun varlığı 1851 yılında Riemann tarafından ortaya atılmıştır.

Teorem 2.2.19 (Riemann Dönüşüm Teoremi): Kompleks düzlemin her $\mathcal{D} \subset \mathbb{C} (\mathcal{D} \neq \mathbb{C})$ basit bağlantılı bölgesi konform olarak U birim diski üzerine resmedilir. Ayrıca, $z_0 \in \mathcal{D}$

olmak üzere $f(z_0)=0$ ve $f'(z_0)>0$ koşullarını sağlayan ve $\mathcal{D}$ yi U birim disk üzerine resmeden bir tek konform dönüşüm vardır. [11]

2.3. Normalize Edilmiş Ünivalent Fonksiyonlar

Bu bölümde geometrik fonksiyonlar teorisinin özel bir konusu olan ünivalent fonksiyonları biraz daha ayrıntılı sunacağız. Analitik olarak, bir ünivalent fonksiyon sıfırdan farklı türeve sahip iken; geometrik olarakta basit eğrileri basit eğrilere dönüştürür. Hem analitik hem de ünivalent fonksiyon ise basit bağlantılı bölgeleri basit bağlantılı bölgelere dönüştürür. Riemann dönüşüm teoreminden, keyfî bir basit bağlantılı bölgede tanımlı f ünivalent fonksiyonu yerine U açık birim diskte tanımlı bir f ünivalent fonksiyonu seçilebilir. Bu fonksiyon için $f(0)=0$, $f'(0)=1$ normalizasyon şartları göz önüne alınırsa (2.1) serisi

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, \quad (z \in U) \quad (2.2)$$

şeklini alır. Burada (2.2) şeklinde tanımlanmış fonksiyona normalize edilmiş analitik fonksiyon denir. Normalize edilmiş analitik fonksiyonların sınıfını $\mathcal{A}$ ile göstereceğiz ve kısaca

$$\mathcal{A} = \left\{ f : \forall z \in U \text{ için } f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \right\}$$

şeklindeki analitik fonksiyon yazılabilir.

Ünivalent fonksiyonlar teorisinin temel taşı olan bir sınıfı aşağıda tanımlayalım.

Tanım 2.3.1 ($\mathcal{S}$ Sınıfı): U birim diskinde ünivalent olan $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonlarının oluşturduğu sınıfa $\mathcal{S}$ sınıfı denir ve kısaca

$$\mathcal{S} = \{ f \in \mathcal{A} : \forall z \in U \text{ için } f - \text{ünivalent} \}$$

şeklinde gösterilir. [11,14,33]

$\mathcal{S}$ sınıfına ait bazı fonksiyon örneklerini aşağıda verelim.

(i) $w = f(z) = \frac{z}{(1-z)}$ fonksiyonu U birim diskini $\text{Re}(w) > -1/2$ sağ yarı düzlemine resmeder.

(ii) $f(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ fonksiyonu U birim diskini $\mathbb{C} \setminus \{(-\infty, -1/2] \cup (1/2, \infty)\}$ bölgesi üzerine resmeder.

(iii) $f(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ Koebe fonksiyonu U birim diskini $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -1/4]$ bölgesi üzerine resmeder.

Ayrıca şunu da belirtelim ki, $\mathcal{S}$ sınıfına ait iki fonksiyonun toplamı $\mathcal{S}$ sınıfına ait olmayabilir.

Örneğin;

$$f_1(z) = \frac{z}{1-z} \quad \text{ve} \quad f_2(z) = \frac{z}{1+iz}$$

fonksiyonları $\mathcal{S}$ sınıfına ait olmasına rağmen,

$$f_1'(z) = \frac{1}{(1-z)^2} \quad \text{ve} \quad f_2'(z) = \frac{1}{(1+iz)^2}$$

türevlerinden

$$f_1'(z) + f_2'(z) = \frac{2 - 2(1-i)z}{(1-z)^2(1+iz)^2}$$

elde edilir.

Buradan $z = \frac{1+i}{2} \in U$ noktasında $f_1'(z) + f_2'(z) = 0$ olduğu görülür. Bununla beraber $\mathcal{S}$ sınıfındaki birçok özellik bazı dönüşümler altında korunur.

Teorem 2.3.2: $f \in \mathcal{S}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur:

(i) Eşlenik alma: $g(z) = \overline{f(\bar{z})} = z + \bar{a}_2 z^2 + \dots$ ise, $g \in \mathcal{S}$ dir.

(ii) Döndürme (Rotasyon): $\theta \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$g(z) = e^{-i\theta} f(e^{i\theta} z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n e^{i(n-1)\theta} z^n, \quad (z \in U)$$

fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

(iii) Genişleme (Dilatasyon): $0 < r < 1$ olmak üzere

$$g(z) = r^{-1} f(rz) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n r^{n-1} z^n, \quad (z \in U)$$

fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

(iv) Disk otomorfizmi (Koebe veya Bieberbach dönüşümü): $z_0 \in U$ olmak üzere

$$g(z) = \frac{f\left(\frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0 z}\right) - f(z_0)}{(1-|z_0|^2) f'(z_0)}, \quad (z \in U)$$

fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

(v) Değer bölgesi dönüşümü: ψ fonksiyonu $f(U)$ da ünivalent ve $\psi(0) = 0$, $\psi'(0) = 1$ koşulunu gerçekleyen bir fonksiyon ise $\psi \circ f \in \mathcal{S}$ dir.

(vi) Çıkarılmış değer dönüşümü: $w \notin f(U)$ olsun. Bu durumda,

$$g(z) = \frac{f(z)}{1 - f(z)/w}, (z \in U)$$

fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

(vii) n . kök dönüşümü: Eğer $n = 2, 3, \dots$ ise

$$g(z) = \sqrt[n]{f(z^n)} = z + \frac{a_2}{n} z^{n+1} + \frac{1}{2n^2} (2na_3 - (n-1)a_2^2) z^{2n+1} + \dots, (z \in U)$$

fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına aittir. [11]

Tanım 2.3.3 ($\mathcal{P}$ sınıfı): U birim diskinde $p(0)=1$, $\text{Re } p(z) > 0$ koşullarını sağlayan

$p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ şeklindeki fonksiyonların oluşturduğu sınıfa Caratheodory sınıfı veya

$\mathcal{P}$ sınıfı denir. [11]

Örneğin; $p(z) = (1+z)/(1-z)$, $z \in U$ fonksiyonu $\mathcal{P}$ sınıfına ait olup, U birim diskini sağ yarı düzlem üzerine resmeden bir konform dönüşümdür. Ayrıca, $\mathcal{P}$ sınıfına ait bir fonksiyonun ünivalent olması gerekmez.

Örneğin; $f(z) = 1 + z^n$ fonksiyonu $\mathcal{P}$ sınıfına ait olmasına rağmen $n \in \mathbb{N}_0$, $n \geq 2$ için ünivalent değildir.

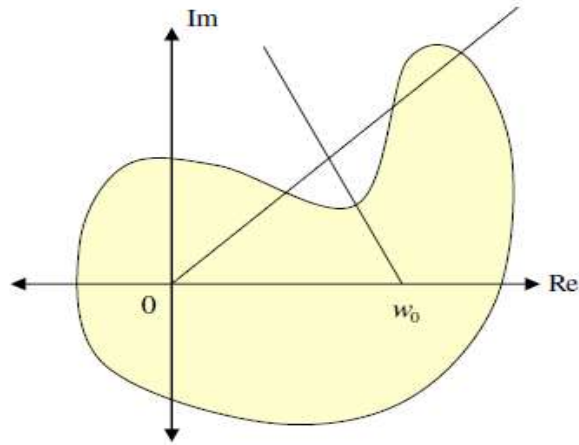
Tanım 2.3.4 (Ω sınıfı): U birim diskinde $\phi(0)=0$ ve $|\phi(z)| < 1$ koşullarını sağlayan analitik fonksiyonların oluşturduğu sınıfa Schwarz fonksiyonlarının sınıfı denir ve Ω ile gösterilir. [11]

Bunların yanı sıra, $\mathcal{P}$ sınıfı ile Schwarz fonksiyonları arasında aşağıda olduğu gibi önemli bir bağ vardır:

$$p \in \mathcal{P} \Leftrightarrow p(z) = \frac{1 + \phi(z)}{1 - \phi(z)} \quad (\phi \in \Omega)$$

$\mathcal{P}$ ve Ω sınıflarını tanımladıktan sonra, $\mathcal{S}$ sınıfının iki önemli alt sınıfını aşağıdaki şekilde verebiliriz.

Tanım 2.3.5 ($\mathcal{S}^*$ sınıfı): $\mathcal{B} \subset \mathbb{C}$ kümesi verilsin. $\mathcal{B}$ kümesindeki sabit bir w_0 noktasını her $w \in \mathcal{B}$ noktasına birleştiren doğru parçası tamamen $\mathcal{B}$ kümesinde kalıyorsa, $\mathcal{B}$ ye w_0 noktasına göre yıldızıl küme denir. w_0 noktası özel olarak orijin seçilirse, bu kümeye orijine göre yıldızıl küme veya kısaca yıldızıl küme adı verilir. Eğer bir f fonksiyonu U birim diskini w_0 noktasına göre bir yıldızıl kümeye resmediyorsa, f fonksiyonuna w_0 noktasına göre yıldızıl fonksiyon denir. Özel durumda, f fonksiyonu U birim diskini yıldızıl bir kümeye resmediyorsa, f fonksiyonuna yıldızıl fonksiyon denir. $f \in \mathcal{A}$ olması durumunda yıldızıl fonksiyonların sınıfı $\mathcal{S}^*$ ile gösterilir. [11,33]



Şekil 1: w_0 Noktasına Göre Yıldızıl Bölge

Yıldızıl fonksiyonların yukarıdaki geometrik tanımını analitik olarak ifade eden en önemli teorem aşağıda verilmiştir.

Teorem 2.3.6: $f \in \mathcal{A}$ olsun. Bu halde $f \in \mathcal{S}^*$ olması için gerek ve yeter şart

$$f \in \mathcal{S}^* \Leftrightarrow \frac{zf'}{f} \in \mathcal{P}$$

olmasıdır. Ayrıca, $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{S}^* \Rightarrow |a_n| \leq n$ değerlendirmesi doğrudur.

[14,33]

Kısaca yıldızlı fonksiyonların sınıfını,

$$\mathcal{S}^* = \left\{ f \in \mathcal{A} : \forall z \in U \text{ için } \operatorname{Re} \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right) > 0 \right\}$$

biçiminde gösterebiliriz.

Örneğin, $\mathcal{S}$ sınıfına ait fonksiyonlardan en önemlilerinden birisi $z \in U$ olmak üzere,

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$$

şeklinde tanımlanan Koebe fonksiyonudur.

Bu fonksiyonu,

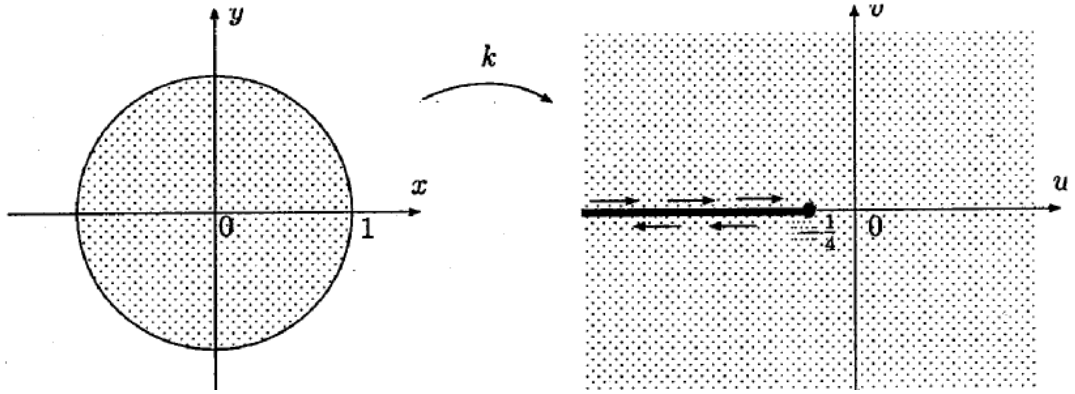
$$k(z) = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{1+z}{1-z} \right)^2 - 1 \right]$$

şeklinde yazabiliriz.

Ayrıca $k(z)$ fonksiyonu,

$$u(z) = \frac{1+z}{1-z}, \quad g(z) = u^2(z), \quad k(z) = \frac{1}{4} [g(z) - 1]$$

biçiminde yazılarak U birim diskini $-\infty$ dan $-1/4$ e kadar negatif reel eksenine çıkartılmış kompleks düzlem üzerine konform olarak dönüştürdüğünü görebiliriz. $k(z)$ dönüşümü ünivalent fonksiyonlar teorisinde çok sayıda problemde önemli rol oynar.



Şekil 2: Koebe Fonksiyonu

Yukarıdaki şekilden de görüldüğü gibi $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{S}^*$ dır. Ayrıca

Teorem 2.3.6 kullanılarak $z = re^{i\theta}$ ve $(0 \leq r < 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi)$ olmak üzere,

$$\operatorname{Re} \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{1+z}{1-z} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}} \right) = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\theta} \geq \frac{1+r}{1-r} > 0$$

elde edilir.

Buradan da $k(z) \in \mathcal{S}^*$ olduğu görülür.

Koebe fonksiyonunun dönmeleri (rotation), her $z \in U$ için,

$$k_{\theta}(z) = \frac{z}{(1-e^{i\theta}z)^2}$$

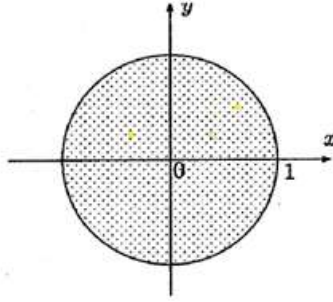
şeklinde tanımlanır ve $k_{\theta}(z)$ fonksiyonları $\mathcal{S}$ sınıfına ait fonksiyonlardır.

$k_\theta(z)$ fonksiyonu altında U birim diskinin görüntüsü $\mathbb{C} - (-\infty, -e^{-i\theta}/4)$ olur.

$\alpha \in (0, 2]$ ve $z \in U$ olmak üzere $f(z) = \frac{1}{2\alpha} \left[\left(\frac{1+z}{1-z} \right)^\alpha - 1 \right]$ fonksiyonu,

“genelleştirilmiş Koebe fonksiyonu” olarak adlandırılır ve $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

Tanım 2.3.7 ($\mathcal{C}$ sınıfı): $\mathcal{B} \subset \mathbb{C}$ kümesi verilsin. Her $w_1, w_2 \in \mathcal{B}$ için w_1 noktasını w_2 noktasına birleştiren doğru parçası tamamen $\mathcal{B}$ içinde kalıyorsa $\mathcal{B}$ ye konveks küme denir. Eğer bir f fonksiyonu birim diski, konveks bir kümeye resmediyorsa f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. $f \in \mathcal{A}$ olması durumunda konveks fonksiyonların sınıfı $\mathcal{C}$ ile gösterilir. [11, 33]



Şekil 3: Konveks Bölge

Konveks fonksiyonları analitik olarak ifade eden en önemli teorem aşağıdaki gibidir.

Teorem 2.3.8: $f \in \mathcal{A}$ olsun. O halde $f \in \mathcal{C}$ olması için gerek ve yeter şart

$$f \in \mathcal{C} \Leftrightarrow 1 + \frac{zf''}{f'} \in \mathcal{P}$$

olmasıdır. Ayrıca,

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{C} \Rightarrow |a_n| \leq 1 \ (n = 2, 3, \dots) \text{ değerlendirmesi doğrudur. [14, 33]}$$

Teorem 2.3.6 ve Teorem 2.3.8 in bir sonucu olarak ilk kez Alexander tarafından verilmiş olan aşağıdaki teorem $\mathcal{S}^*$ ve $\mathcal{C}$ sınıflarına ait fonksiyonlar arasındaki çok önemli bir bağlantıyı ifade eder.

Teorem 2.3.9 (Alexander Teoremi): $f \in \mathcal{A}$ ve $z \in U$ olmak üzere, $g(z) = zf'(z)$ olsun.

Bu durumda, $f \in \mathcal{C}$ olması için gerek ve yeter şart $g \in \mathcal{S}^*$ olmasıdır. [11, 14, 33]

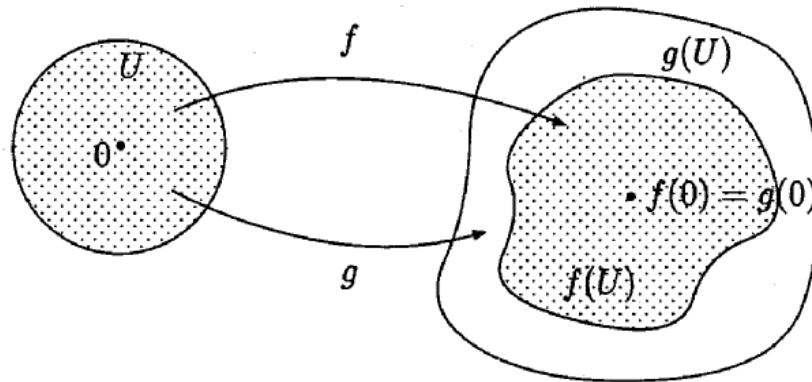
Yukarıdaki tanımlardan da anlaşıldığı üzere bu sınıflar arasında $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}^* \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{A}$ şeklinde bir ilişki vardır.

Şimdi ünivalent fonksiyonlar teorisinde önemli bir yer teşkil eden subordinasyon ve Hadamard çarpımı kavramlarını verelim.

Tanım 2.3.10: f ve g fonksiyonları U birim diskinde tanımlı iki analitik fonksiyon olsun. U birim diskinde $f(z) = g(\omega(z))$ olacak şekilde bir $\omega \in \Omega$ fonksiyonu varsa, f fonksiyonu U da g fonksiyonuna subordinatedir denir ve $f \prec g$ ile gösterilir. [11]

Eğer g ünivalent ise $f \prec g \Leftrightarrow f(0) = g(0)$ ve $f(U) \subseteq g(U)$ gerektirmesi doğrudur.

f nin g ye subordinasyonundan anlaşılabacak şey aşağıdaki şekille izah edilmiştir.



Şekil 4: $f \prec g$ Subordinasyonu

Subordinasyon Prensibi (Lindelöf Prensibi): Eğer f fonksiyonu U birim diskinde analitik, ünivalent ve g fonksiyonu da U birim diskinde analitik bir fonksiyon ayrıca $g(0)=f(0)$ ve $g(U) \subset f(U)$ ise, bu durumda U_r diskinde her $r < 1$ için $|g'(0)| \leq |f'(0)|$ ve $g(U_r) \subset f(U_r)$ dir. [11]

Özellikle, eğer $f \prec g$ ise,

$$\max_{|z| \leq r} |f(z)| \leq \max_{|z| \leq r} |g(z)|, \quad (r \in (0,1))$$

eşitsizliği doğrudur.

Ayrıca,

$$p \in \mathcal{P} \Leftrightarrow p(z) \prec \frac{1+z}{1-z} \quad \text{ve} \quad \phi \in \Omega \Leftrightarrow \phi(z) \prec z$$

gerektirmeleri yazılır.

Tanım 2.3.11: $f, g \in \mathcal{A}$ fonksiyonları

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \quad \text{ve} \quad g(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n$$

şeklinde verilsin.

f ve g fonksiyonlarının Hadamard çarpımları,

$$(f * g)(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n b_n z^n = (g * f)(z)$$

şeklinde tanımlanır. Burada "*" Hadamard çarpımını gösterir. [11]

Tanım 2.3.12 (R sınıfı): $\mathcal{A}$ sınıfında

$$\operatorname{Re}(f'(z)) > 0 \quad (z \in U)$$

şartını sağlayan $f(z)$ fonksiyonlarına R sınıfındandır denir. [14]

Ünivalentlik kriterlerinden en kolay ifade edilen ve ispatlananlardan biri aşağıdaki Noshiro, Warschawski ve Wolff' un kriteridir:

- f fonksiyonu konveks bir $D \subset \mathbb{C}$ bölgesinde analitik ve her $z \in D$ için $\operatorname{Re} f'(z) > 0$ ise f fonksiyonu D bölgesi üzerinde ünivalenttir.

Tanım 2.3.13 ($\mathcal{S}^*(\beta)$ sınıfı): $0 \leq \beta < 1$ olmak üzere her $z \in U$ için

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \beta$$

koşulunu sağlayan $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonuna β – mertebeden yıldızlı fonksiyon ve bu fonksiyonların oluşurduğu sınıfa da β – mertebeden yıldızlı fonksiyonların sınıfı denir ve $\mathcal{S}^*(\beta)$ ile gösterilir. [14]

Tanım 2.3.14 ($\mathcal{C}(\beta)$ sınıfı): $0 \leq \beta < 1$ olmak üzere her $z \in U$ için

$$\operatorname{Re}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > \beta$$

koşulunu sağlayan $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonuna β . mertebeden konveks fonksiyon ve bu fonksiyonların oluşurduğu sınıfa da β . mertebeden konveks fonksiyonların sınıfı denir ve $\mathcal{C}(\beta)$ ile gösterilir. [14]

Subordinasyonu kullanarak $\mathcal{S}^*(\beta)$ ve $\mathcal{C}(\beta)$ fonksiyonlarını

$$\mathcal{S}^*(\beta) = \left\{ f \in \mathcal{A} : \frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \frac{1+(1-2\beta)z}{1-z}, 0 \leq \beta < 1 \right\}$$

ve

$$\mathcal{C}(\beta) = \left\{ f \in \mathcal{A} : 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \prec \frac{1+(1-2\beta)z}{1-z}, 0 \leq \beta < 1 \right\}$$

şeklinde de yazabiliriz.

Özel olarak, $\mathcal{S}^*(0) = \mathcal{S}^*$ ve $\mathcal{C}(0) = \mathcal{C}$ yazılır. Buradan da anlaşıldığı üzere, $\mathcal{S}^*(\beta) \subset \mathcal{S}^*$ ve $\mathcal{C}(\beta) \subset \mathcal{C}$ dir.

Tanım 2.3.15: $\varphi: U \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu $\varphi(0) = 1$, $\varphi'(0) > 0$, $\text{Re}(\varphi(z)) > 0$ koşullarını sağlasın. Ayrıca $\varphi(U)$ da reel eksene göre simetrik olsun. Bu koşulları sağlayan fonksiyonlar $\mathcal{W}$ sınıfındandır denilir. Bu durumda $\varphi \in \mathcal{W}$ ise

$$\varphi(z) = 1 + B_1 z + B_2 z^2 + \dots \quad (z \in U, B_k \in \mathbb{C})$$

şeklinde Taylor açılımına sahiptir. [1]

Aynı $\mathcal{W}$ sınıfı ile $\mathcal{P}$ sınıfı arasında yakından bir ilişki vardır. Öyle ki; $p_1, p_2 \in \mathcal{P}$ ve $u, v: U \rightarrow U$, $u(0) = v(0) = 0$ fonksiyonları için

$$p_1(z) = \frac{1+u(z)}{1-u(z)} = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$$

ve

$$p_2(z) = \frac{1+v(z)}{1-v(z)} = 1 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots$$

şeklinde tanımlansın.

Buradan,

$$u(z) = \frac{p_1(z)-1}{p_1(z)+1} = \frac{c_1}{2}z + \frac{1}{2}(c_2 - \frac{c_1^2}{2})z^2 + \dots$$

ve

$$v(z) = \frac{p_2(z)-1}{p_2(z)+1} = \frac{b_1}{2}z + \frac{1}{2}(b_2 - \frac{b_1^2}{2})z^2 + \dots$$

yazılır.

Böylece,

$$\varphi(u(z)) = 1 + \frac{B_1 c_1}{2}z + \left\{ \frac{1}{2}(c_2 - \frac{c_1^2}{2})B_1 + \frac{1}{4}c_1^2 B_2 \right\} z^2 + \dots$$

ve

$$\varphi(v(z)) = 1 + \frac{B_1 b_1}{2}z + \left\{ \frac{1}{2}(b_2 - \frac{b_1^2}{2})B_1 + \frac{1}{4}b_1^2 B_2 \right\} z^2 + \dots$$

elde edilir.

Tanım 2.3.16 (Ma-Minda Yıldızıl Fonksiyon): $f \in \mathcal{A}$ ve $\varphi \in \mathcal{W}$ olsun. Her $z \in U$ için

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \varphi(z)$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlara Ma-Minda Yıldızıl fonksiyon denir. Ma-Minda Yıldızıl fonksiyon sınıfı $\mathcal{S}^*[\varphi]$ ile gösterilir. [1]

Özel durumda,

$$\mathcal{S}^*\left[\frac{1+z}{1-z}\right] = \mathcal{S}^*$$

$$\mathcal{S}^*\left[\frac{1+(2\alpha-1)z}{1-z}\right] = \mathcal{S}^*(\alpha) \quad (0 \leq \alpha < 1)$$

yazılır.

Tanım 2.3.17 (Ma-Minda Konveks Fonksiyon): $f \in \mathcal{A}$ ve $\varphi \in \mathcal{W}$ olsun. Her $z \in U$ için,

$$1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \prec \varphi(z)$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlara Ma-Minda konveks fonksiyon denir. Ma-Minda konveks fonksiyon sınıfı $\mathcal{C}[\varphi]$ ile gösterilir. [1]

Özel durumda,

$$\mathcal{C}\left[\frac{1+z}{1-z}\right] = \mathcal{C} \quad \text{ve} \quad \mathcal{C}\left[\frac{1+(2\alpha-1)z}{1-z}\right] = \mathcal{C}(\alpha) \quad (0 \leq \alpha < 1)$$

yazılır.

Tanım 2.3.18 (γ -Mertebeden Ma-Minda Yıldızlı Fonksiyon): $f \in \mathcal{A}$ ve $\varphi \in \mathcal{W}$ olsun. $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ olmak üzere her $z \in U$ için,

$$1 + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1 \right) \prec \varphi(z)$$

koşulunu sağlayan fonksiyona γ -kompleks mertebeden Ma-Minda yıldızlı fonksiyon denilir. Bu fonksiyon sınıfı $S^*[\gamma; \varphi]$ ile gösterilir. [10]

Tanım 2.3.19 (γ -Mertebeden Ma-Minda Konveks Fonksiyon): $f \in \mathcal{A}$ ve $\varphi \in \mathcal{W}$ olsun. $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ olmak üzere her $z \in U$ için,

$$1 + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) \prec \varphi(z)$$

koşulunu sağlayan fonksiyona γ -kompleks mertebeden Ma-Minda konveks fonksiyon denilir. Bu fonksiyon sınıfı $\mathcal{C}[\gamma; \varphi]$ ile gösterilir. [10]

Tanım 2.3.20 ($\mathcal{K}(\beta)$ sınıfı): $0 \leq \beta < 1$ olmak üzere her $z \in U$ için,

$$\operatorname{Re} \left(\frac{zf'(z)}{g(z)} \right) > \beta$$

koşulunu sağlayan bir $g \in \mathcal{S}^*$ fonksiyonu varsa bu durumda $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonuna β – mertebeden konvekse yakın fonksiyon ve bu fonksiyonların oluşurduğu sınıfa da β – mertebeden konvekse yakın fonksiyonların sınıfı denir ve $\mathcal{K}(\beta)$ ile gösterilir. [15]

Özel olarak $\mathcal{K}(0) = \mathcal{K}$ sınıfına konvekse yakın fonksiyonların sınıfı bu sınıfa ait fonksiyonlardaki konvekse yakın fonksiyon denir. Yukarıdaki sınıflar arasında $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}^* \subset \mathcal{K} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{A}$ içerme bağıntısı vardır.

Tanım 2.3.21: Analitik bir f fonksiyonunun katsayıları yardımıyla tanımlanan $E(a_2, a_3) = |a_3 - a_2^2|$ fonksiyoneline Fekete-Szegö fonksiyoneli denir. Genel olarak Fekete-Szegö fonksiyoneli, μ bir reel ya da kompleks sayı olmak üzere, $E(a_2, a_3; \mu) = |a_3 - \mu a_2^2|$ olarakta bilinmektedir. Bu fonksiyonelin bir üst sınırının bulunması problemi analitik fonksiyonlar teorisinde Fekete-Szegö problemi olarak bilinir. [12]

Fekete-Szegö problemi ile ilgili aşağıdaki teorem bilinmektedir.

Teorem 2.3.22 (Fekete-Szegö problemi): Her $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonu için,

$$|a_3 - \mu a_2^2| \leq 1 + 2e^{\frac{-2\mu}{1-\mu}} \quad (0 \leq \mu < 1)$$

eşitsizliği yazılır. Bu sınır $[0, 1)$ aralığındaki her μ değeri için kesindir. [11]

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde ilk olarak bi-ünivalent fonksiyonun tanımı ve seriye açılımı gibi bazı özellikleri verildi. Akabinde, Pell-Lucas polinomunun tanımından ve bazı özelliklerinden bahsedilmiştir.

3.1. Bi-Ünivalent Fonksiyonların Tanımı ve Bazı Özellikleri

Bu başlık altında bi-ünivalent fonksiyonun tanımı ve seriye açılımı gibi bazı özellikleri verildi.

Tanım 3.1.1: Hem kendisi hem de tersi ünivalent olan fonksiyona bi-ünivalent fonksiyon denir.

Bir f fonksiyonun tersi f^{-1} ile gösterilirse,

$$f^{-1}(f(z)) = z$$

yazılır. Diğer taraftan *Koebe-Çeyrek* teoremine göre her U diskinin $f \in \mathcal{S}$ altında görüntüsü orijin merkezli $\frac{1}{4}$ yarıçaplı disk ihtiva ettiğini biliyoruz. Böylece her $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonu,

$$f^{-1}(f(z)) = z, \quad (z \in U)$$

ve

$$f(f^{-1}(w)) = w, \quad \left(|w| < r_0(f), \quad r_0(f) \geq \frac{1}{4} \right)$$

olacak şekilde f^{-1} tersine sahiptir.

Bu durumda $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{S}$ alınırsa, $f^{-1}(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n$ olacağı açıktır. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
f(f^{-1}(w)) &= f^{-1}(w) + a_2 [f^{-1}(w)]^2 + a_3 [f^{-1}(w)]^3 + \dots \\
&= w + \sum_{n=2}^{\infty} b_n w^n + a_2 \left[w + \sum_{n=2}^{\infty} b_n w^n \right]^2 + a_3 \left[w + \sum_{n=2}^{\infty} b_n w^n \right]^3 + \dots \\
&= w + (a_2 + b_2)w^2 + (b_3 + 2a_2b_2 + a_3)w^3 + (b_4 + 2a_2b_3 + a_2b_2^2 + 3a_3b_2 + a_4)w^4 + \dots \\
&= w
\end{aligned}$$

şeklinde olur. Buradan karşılıklı w nın aynı dereceli kuvvetlerinin katsayıları eşitlenirse a_n ile b_n ler arasında,

$$\begin{aligned}
a_2 + b_2 &= 0 \Rightarrow b_2 = -a_2 \\
b_3 + 2a_2b_2 + a_3 &= 0 \Rightarrow b_3 = 2a_2^2 - a_3 \\
b_4 + 2a_2b_3 + a_2b_2^2 + 3a_3b_2 + a_4 &= 0 \Rightarrow b_4 = -5a_2^3 + 5a_2a_3 - a_4
\end{aligned}$$

şeklinde bağıntılar elde edilir.

Böylece,

$$f^{-1}(w) = w - a_2 w^2 + (2a_2^2 - a_3)w^3 - (5a_2^3 - 5a_2a_3 + a_4)w^4 + \dots \quad (3.1)$$

olarak yazılır. Buradan $f^{-1}(z) \in \mathcal{A}$ olduğu görülmektedir. Yalnız şunu söylemekte fayda vardır her $f(z) \in \mathcal{S}$ için $f^{-1}(z) \in \mathcal{S}$ olmayabilir.

Örneğin; $f(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + \sum_{n=2}^{\infty} n z^n$

Koebe fonksiyonunu göz önüne alalım.

Bu fonksiyonun tersi için son eşitlikteki f^{-1} in açılımı kullanılırsa,

$$f^{-1}(z) = z - 2z^2 + 5z^3 - 14z^4 + \dots$$

olduğu görülür. Yine $f(z) \in \mathcal{S}$ sınıfına ait fonksiyonlar için $|a_n| \leq n$ olduğu bilgisinden yola çıkarak $|a_n| \not\leq n$ ise $f(z) \notin \mathcal{S}$ olduğunu söyleyebiliriz. Dolayısıyla Koebe fonksiyonun tersinin katsayılarına bakıldığında örneğin üçüncü katsayı için $|b_3| = 5 \not\leq 3$ olduğundan $\mathcal{S}$ sınıfına ait olamaz. Bu durum diğer katsayılar için de geçerlidir.

Bundan sonra $\mathcal{S}$ sınıfında bi-ünivalent fonksiyonların oluşturduğu sınıfını Δ ile göstereceğiz. Yani,

$$\Delta = \{ f \in \mathcal{S} : \forall z \in U \text{ için } f^{-1}(z) \in \mathcal{S} \}$$

şeklinde yazılır.

Δ sınıfından fonksiyonlara örnek olarak,

$$f_1(z) = \frac{z}{1-z}$$

$$f_2(z) = -\log(1-z)$$

$$f_3(z) = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

fonksiyonlarını verebiliriz.

Buna rağmen,

$$g_1(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$$

$$g_2(z) = z - \frac{z^2}{2}$$

$$g_3(z) = \frac{z}{1-z^2}$$

fonksiyonları Δ sınıfına ait değildir.

3.2. Pell-Lucas Polinomu ve Özellikleri

Bu kısımda [2,3] lisansüstü tezlerinden faydalananak Pell-Lucas sayılarının genelleştirilmesi olan Pell-Lucas Polinomunun tanımını ve bu polinomun özellikleri verilecektir. Pell-Lucas polinomunu kısaca $Q_n(x)$ ile göstereceğiz.

Tanım 3.2.1: Bir dizide bir terim kendinden önceki terimler aracılığı ile hesaplanıyorsa, bu diziye *rekürans (tekrarlama, indirgeme) dizisi* denir. Bu terimi hesaplarken kullanılan bağıntıya ise *rekürans bağıntısı* denir. [46]

Tanım 3.2.2: $\forall n \geq k$, sabit $a_j (0 \leq j \leq k-1)$ ve $a_0 \neq 0$ katsayıları için,

$$u_n = a_{k-1}u_{n-1} + a_{k-2}u_{n-2} + \dots + a_1u_{n-k+1} + a_0u_{n-k} \quad (3.2)$$

eşitliğini sağlayan (u_n) dizisine *k. dereceden homojen lineer rekürans dizi* denir. Buradaki eşitliğe ise *k. dereceden homojen lineer rekürans bağıntı* denir. Bu dizinin $u_0, u_1, \dots, u_{k-1}$ biçiminde olan k terimine (u_n) dizisinin *başlangıç koşulları* denir. [25,46]

Tanım 3.2.3: (3.2) eşitliğindeki gibi tanımlı olan (u_n) dizisi için,

$$p(x) = x^k - a_{k-1}x^{k-1} - a_{k-2}x^{k-2} - \dots - a_1x - a_0 \quad (3.3)$$

polinomuna (u_n) dizisinin *karakteristik polinomu* denir. [46]

Tanım 3.2.4: $p(x) = x^k - a_{k-1}x^{k-1} - a_{k-2}x^{k-2} - \dots - a_1x - a_0 = 0$ denkleminde (u_n) dizisinin *karakteristik denklemi* denir. [46]

Tanım 3.2.5: $p(x)$ polinomunun kökleri $b_1, b_2, \dots, b_k \in \mathbb{C}$ olmak üzere, $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$ için, $b_i \neq b_j$ ise $u_n = c_1 b_1^n + c_2 b_2^n + \dots + c_k b_k^n$ olacak şekilde $c_1, c_2, \dots, c_k$ sabitleri vardır. Bu eşitlik başlangıç koşulları için yerine yazılıp elde edilen denklem sisteminden $c_1, c_2, \dots, c_k$ bilinmeyenleri bulunur. Böylece elde edilen karakteristik polinomunun kökleri ve u_n arasındaki eşitliğe *rekürans bağıntısının çözümü* denir. [46]

Tanım 3.2.6: (u_n) dizisinin terimleri kullanılarak tanımlanan,

$$G(x) = u_0 x^0 + u_1 x^1 + u_2 x^2 + u_3 x^3 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} u_i x_i \quad (3.4)$$

serisine (u_n) dizisinin *üreteç fonksiyonu* denir. [25,46]

Tanım 3.2.7 (Lucas Sayıları): $L_0 = 2, L_1 = 1$ başlangıç koşulları ve $\forall n \geq 2$ için,

$$L_n = 2L_{n-1} + L_{n-2}$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlıdır.

Tanım 3.2.8 (Pell Sayıları): $P_0 = 0, P_1 = 1$ başlangıç koşulları ve $\forall n \geq 2$ için,

$$P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlıdır.

Tanım 3.2.9 (Pell-Lucas Sayıları): $Q_0 = 2, Q_1 = 2$ başlangıç koşulları ve $\forall n \geq 2$ için,

$$Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2}$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlıdır.

Tablo 1: Lucas, Pell ve Pell-Lucas Sayı Dizilerinin İlk 10 Terimi.

n	L_n	P_n	Q_n
1	1	1	2
2	3	2	6
3	4	5	14
4	7	12	34
5	11	29	82
6	18	70	198
7	29	169	478
8	47	408	1154
9	76	985	2786
10	123	2378	6726

3.3. Rekürans Bağntıya Sahip Polinomlar

Literatürde farklı biçimlerde tanımlanan polinom sınıfları mevcuttur. Tekrarlama bağıntısı yardımıyla tanımlanan birçok polinom sınıfı vardır. Bu polinom sınıflarının ortaya çıkışında Fibonacci sayıları ve tekrarlama bağıntısı temel hareket noktası olmuştur. Farklı başlangıç koşulları ve farklı tekrarlama bağıntısı yardımı ile çeşitli polinom sınıfları elde edilir. Bunlar Lucas polinomları, Pell polinomları ve Pell-Lucas polinomlarıdır. Bu polinomlar sırası ile; $L_n(x)$, $P_n(x)$ ve $Q_n(x)$ ile gösterilir.

Tanım 3.3.1 (Lucas Polinomu): M. Bicknell tarafından, 1970 yılında tanımlanan Lucas polinomları;

$$L_0(x) = 2, L_1(x) = x \quad (3.3)$$

olmak üzere,

$$L_n(x) = xL_{n-1}(x) + L_{n-2}(x); n \geq 2 \quad (3.4)$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanır. [25]

Tanım 3.3.2 (Pell Polinomu):

$$P_0(x) = 0, P_1(x) = 1$$

olmak üzere,

$$P_n(x) = 2xP_{n-1}(x) + P_{n-2}(x); n \geq 2 \quad (3.5)$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanır. [19]

Tanım 3.3.3 (Pell-Lucas Polinomu):

$$Q_0(x) = 2, Q_1(x) = 2x$$

olmak üzere,

$$Q_n(x) = 2xQ_{n-1}(x) + Q_{n-2}(x); n \geq 2 \quad (3.6)$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanır. [19]

Bu polinom sınıflarının ilk 10 üyesi aşağıdaki gibidir. [25,26]

Tablo 2: Lucas polinomunun ilk 10 üyesi.

n	$L_n(x)$
1	x
2	$x^2 + 2$
3	$x^3 + 3x$
4	$x^4 + 4x^2 + 2$
5	$x^5 + 5x^3 + 5x$
6	$x^6 + 6x^4 + 9x^2 + 2$
7	$x^7 + 7x^5 + 14x^3 + 7x$
8	$x^8 + 8x^6 + 20x^4 + 16x^2 + 2$
9	$x^9 + 9x^7 + 27x^5 + 30x^3 + 9x$
10	$x^{10} + 10x^8 + 35x^6 + 50x^4 + 25x^2 + 2$

Tablo 3: Pell ve Pell-Lucas polinomlarının ilk 10 üyesi.

n	$P_n(x)$	$Q_n(x)$
1	1	$2x$
2	$2x$	$4x^2 + 2$
3	$4x^2 + 1$	$8x^3 + 6x$
4	$8x^3 + 4x$	$16x^4 + 16x^2 + 2$
5	$16x^4 + 12x^2 + 1$	$32x^5 + 40x^3 + 10x$
6	$35x^5 + 32x^3 + 6x$	$64x^6 + 96x^4 + 63x^2 + 2$
7	$64x^6 + 80x^4 + 24x^2 + 1$	$128x^7 + 224x^5 + 112x^3 + 14x$
8	$128x^7 + 192x^5 + 80x^3 + 8x$	$256x^8 + 512x^6 + 320x^4 + 64x^2 + 2$
9	$256x^8 + 448x^6 + 240x^4 + 40x^2 + 1$	$512x^9 + 1152x^7 + 864x^5 + 240x^3 + 18x$
10	$512x^9 + 1024x^7 + 672x^5 + 160x^3 + 10x$	$1024x^{10} + 2560x^8 + 2240x^6 + 800x^4 + 100x^2 + 2$

Uyarı 3.3.4: Polinom sınıfları ile kendi sayı dizileri arasında çok güçlü bir bağ vardır.

Her bir polinom sınıfı aynı isme sahip sayı dizisi ile doğrudan bağlantılıdır.

$L_n(x)$, $P_n(x)$ ve $Q_n(x)$ polinomları sınıflarında $x=1$ alındığında;

$$L_n(1) = L_n$$

$$P_n(1) = P_n$$

$$Q_n(1) = Q_n$$

elde edilir. [19, 25]

Uyarı 3.3.5: Lucas, Pell ve Pell-Lucas sayı dizileri ile polinomlarının tanımını negatif alt indisleri de kapsayacak biçimde genişletmek mümkündür. Bu şekilde yapılan tanımlamada aşağıdaki eşitlikler geçerlidir. [19, 25]

$$L_{-n} = (-1)^n L_n, \quad n \geq 1$$

$$P_{-n} = (-1)^{n+1} P_n, \quad n \geq 1$$

$$Q_{-n} = (-1)^n Q_n, \quad n \geq 1$$

$$L_{-n}(x) = (-1)^n L_n(x), \quad n \geq 1$$

$$P_{-n}(x) = (-1)^{n+1} P_n(x), \quad n \geq 1$$

$$Q_{-n}(x) = (-1)^n Q_n(x), \quad n \geq 1$$

3.4. Pell ve Pell-Lucas Polinomlarının Üreteç Fonksiyonları

Bu bölümde Pell ve Pell-Lucas polinomlarının üreteç fonksiyonları verilecektir. Üreteç fonksiyonları sabit katsayılı homojen lineer indirgeme bağıntılarının çözümünde önemli rol oynar. 1718 yılında Fransız matematikçi Abraham De Moivre (1667-1754) Fibonacci indirgeme bağıntısını çözmek için üreteç fonksiyonlarını bulmuştur. [24,42,43]

Teorem 3.4.1: $P_n(x)$, n . Pell polinomu olmak üzere $P_n(x)$ için üreteç fonksiyonu,

$$P(x, t) = \frac{1}{1 - 2xt - t^2}$$

dir.

İspat: $P_n(x)$ için üreteç fonksiyonu,

$$P(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{n+1}(x) t^n$$

olsun

$$P(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{n+1}(x) t^n = P_1(x) + \sum_{n=0}^{\infty} P_{n+1}(x) t^{n+1}$$

eşitliğinde (3.5) Pell polinomu indirgeme bağıntısı göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} P(x, t) &= 1 + \frac{1}{2x} \left[\frac{1}{t} \sum_{n=1}^{\infty} P_{n+2}(x) t^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} P_{n+1}(x) t^{n+1} \right] \\ &= 1 + \frac{1}{2x} \left[\frac{1}{t} \sum_{n=2}^{\infty} P_{n+1}(x) t^n - t \sum_{n=0}^{\infty} P_{n+1}(x) t^n \right] \\ &= 1 + \frac{1}{2x} \left[\frac{1}{t} \left(\sum_{n=0}^{\infty} P_{n+1}(x) t^n - 1 - 2xt \right) - t \sum_{n=0}^{\infty} P_{n+1}(x) t^n \right] \\ &= 1 + \frac{1}{2x} \left[\frac{1}{t} (P(x, t) - 1 - 2xt) - tP(x, t) \right] \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

Gerekli düzenlemeler yapılırsa $P_n(x)$ için üreteç fonksiyonu;

$$P(x, t) = \frac{1}{1 - 2xt - t^2}$$

olarak bulunur.

Teorem 3.4.2: $Q_n(x)$, n . Pell-Lucas polinomu olmak üzere $Q_n(x)$ üreteç fonksiyonu,

$$Q(x, t) = \frac{2x + 2t}{1 - 2xt - t^2}$$

dir.

İspat: $Q_n(x)$ için üreteç fonksiyonu,

$$Q(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_{n+1}(x) t^n$$

olsun.

$$Q(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_{n+1}(x) t^n = Q_1(x) + \sum_{n=0}^{\infty} Q_{n+1}(x) t^n$$

eşitliğinde (3.6) Pell-Lucas polinomu indirgeme bağıntısı göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} Q(x, t) &= 2x + \frac{1}{2x} \left[\frac{1}{t} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{n+2}(x) t^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} Q_{n+1}(x) t^{n+1} \right] \\ &= 2x + \frac{1}{2x} \left[\frac{1}{t} \sum_{n=2}^{\infty} Q_{n+1}(x) t^n - t \sum_{n=0}^{\infty} Q_{n+1}(x) t^n \right] \\ &= 2x + \frac{1}{2x} \left[\frac{1}{t} \left(\sum_{n=0}^{\infty} Q_{n+1} t^n - 2x - (4x^2 + 2)t \right) \right] - t \sum_{n=0}^{\infty} Q_{n+1} t^n \\ &= 2x + \frac{1}{2x} \left[\frac{1}{t} (Q(x, t) - 2x - (4x^2 + 2)t) \right] - tQ(x, t) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

Gerekli düzenlemeler yapılırsa $Q_n(x)$ üretç fonksiyonu;

$$Q(x, t) = \frac{2x + 2t}{1 - 2xt - t^2}$$

olarak bulunur.



4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde, aşağıdaki biçimde tanımlamış olduğumuz $R_G(\beta, \gamma, \delta, x)$ sınıfı için elde edilen sonuçlar ispatlarıyla birlikte verilmiştir.

Tanım 4.1: Aşağıdaki koşullar yerine getirildiğinde, formun $R_G(\beta, \gamma, \delta, x)$ fonksiyonları $\gamma \geq 1$, $\delta \geq 0$, $\beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ve $z, w \in \Delta$, için $f \in A$ sınıfına ait ve $g(w) = f^{-1}(w)$ için,

$$1 + \frac{1}{\beta} \left[(1-\gamma) \frac{f(z)}{z} + \gamma f'(z) + \delta z f''(z) - 1 \right] \prec G \{ L_{2x,1,n}(x) \} (z) - 1 \quad (4.1)$$

ve

$$1 + \frac{1}{\beta} \left[(1-\gamma) \frac{g(w)}{w} + \gamma g'(w) + \delta w g''(w) - 1 \right] \prec G \{ L_{2x,1,n}(x) \} (w) - 1. \quad (4.2)$$

şartları sağlanırsa $f(z)$ fonksiyonu $R_G(\beta, \gamma, \delta, x)$ sınıfına aittir denir. Burada,

$$G_{\{L_{2x,1,n}(x)\}}(z) = \frac{2 - 2xz}{1 - 2xz - z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} L_{2x,1,n}(x) z^n$$

ve

$$L_{2x,1,0}(x) = 2, L_{2x,1,2}(x) = 2x, L_{2x,1,2}(x) = 4x^2 + 2 \dots$$

dir.

Bu kısımda, alt sınıf $R_G(\beta, \gamma, \delta, x)$ için katsayı tahminleri ve Fekete-Szegö eşitsizliği elde ediyoruz.

Teorem 4.2: (2.2) ile verilen fonksiyon $f \in R_G(\beta, \gamma, \delta, x)$ sınıfından olsun.

Bu durumda,

$$|a_2| \leq \frac{2|x||\beta|\sqrt{2|x|}}{\sqrt{4x^2\beta(1+2\gamma+6\delta) - (4x^2+2)(1+\gamma+2\delta)^2}} \quad (4.3)$$

$$|a_3| \leq \frac{2|x||\beta|}{1+2\gamma+6\delta} + \frac{4|x^2||\beta^2|}{(1+\gamma+2\delta)^2} \quad (4.4)$$

dir.

İspat: $f(z) \in R_G(\beta, \gamma, \delta, x)$ olsun. Tanım 4.1'den öyle u ve v analitik fonksiyonları vardır ki

$$u(0) = 0; \quad v(0) = 0, \quad |u(z)| < 1 \text{ ve } |v(w)| < 1 \quad (\forall z, w \in \Delta)$$

olacak şekilde yazılabilir.

Buradan,

$$1 + \frac{1}{\beta} \left[(1-\gamma) \frac{f(z)}{z} + \gamma f'(z) + \delta z f''(z) - 1 \right] = G \{ L_{2x,1,n}(x) \} u(z) - 1 \quad (4.5)$$

ve

$$1 + \frac{1}{\beta} \left[(1-\gamma) \frac{g(w)}{w} + \gamma g'(w) + \delta w g''(w) - 1 \right] = G \{ L_{2x,1,n}(x) \} v(w) - 1 \quad (4.6)$$

yazılabilir.

Buna denk olarak,

$$1 + \frac{1}{\beta} \left[(1-\gamma) \frac{f(z)}{z} + \gamma f'(z) + \delta z f''(z) - 1 \right] = 1 + 2xu_1z + [2xu_2 + (4x^2+2)u_1^2]z^2 + \dots \quad (4.7)$$

ve

$$1 + \frac{1}{\beta} \left[(1-\gamma) \frac{g(w)}{w} + \gamma g'(w) + \delta z g''(w) - 1 \right] = 1 + 2xv_1w + [2xv_2 + (4x^2+2)v_1^2]w^2 + \dots \quad (4.8)$$

olur. (4.7) ve (4.8) eşitliklerinden,

$$1 + \frac{1}{\beta} \left[(1-\gamma) \frac{f(z)}{z} + \gamma f'(z) + \delta z f''(z) - 1 \right] = 1 + 2xt_1 z + [2xt_2 + (4x^2 + 2)t_1^2] z^2 + \dots \quad (4.9)$$

ve

$$1 + \frac{1}{\beta} \left[(1-\gamma) \frac{g(w)}{w} + \gamma g'(w) + \delta z g''(w) - 1 \right] = 1 + 2xs_1 w + [2xs_2 + (4x^2 + 2)s_1^2] w^2 + \dots \quad (4.10)$$

elde edilir. Burada $z, w \in U$ için ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$u(z) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n z^n \text{ ve } v(w) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n w^n \quad (4.11)$$

olduğu bilinmektedir. O halde

$$|t_n| \leq 1 \text{ ve } |s_n| \leq 1 \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (4.12)$$

dir. Böylece, (4.9) ve (4.10) deki denklemlerin katsayılarını karşılaştırdığımızda,

$$\left(\frac{1+\gamma+2\delta}{\beta} \right) a_2 = 2xt_1 \quad (4.13)$$

$$\left(\frac{1+2\gamma+6\delta}{\beta} \right) a_3 = 2xt_2 + (4x^2 + 2)t_1^2 \quad (4.14)$$

$$-\frac{(1+\gamma+2\delta)}{\beta} a_2 = 2xs_1 \quad (4.15)$$

ve

$$\frac{(1+2\gamma+6\delta)}{\beta} (2a_2^2 - a_3) = 2xs_2 + (4x^2 + 2)s_1^2 \quad (4.16)$$

elde edilir. (4.13) ve (4.15) denklemlerinden,

$$t_1 = -s_1 \quad (4.17)$$

ve

$$a_2^2 = \frac{4x^2 \beta^2}{2(1+\gamma+2\delta)^2} (t_1^2 + s_1^2) \quad (4.18)$$

eşitlikleri yazılır. Ayrıca (4.14) ve (4.16) eşitliklerini taraf tarafa toplayarak,

$$\frac{2(1+2\gamma+6\delta)}{\beta} a_2^2 = 2x(t_2 + s_2) + (4x^2 + 2)(t_1^2 + s_1^2) \quad (4.19)$$

denklemini elde edilir. Buradan (4.19) eşitliğinde (4.18) ifadesi yerine yazılarak, gerekli işlemler yapıldığında şunu elde ederiz,

$$a_2^2 = \frac{8x^3 \beta^2 (t_2 + s_2)}{8x^2 \beta (1+2\gamma+6\delta) - 2(4x^2 + 2)(1+\gamma+2\delta)^2} \quad (4.20)$$

Bu durumda (4.20) denkleminde $|t_n| \leq 1$, $|s_n| \leq 1$ ve $|t_2 + s_2| \leq |t_2| + |s_2|$ eşitsizlikleri yerine yazılarak,

$$|a_2| \leq \frac{2|\beta||x|\sqrt{2|x|}}{\sqrt{|4x^2 \beta (1+2\gamma+6\delta) - (4x^2 + 2)(1+\gamma+2\delta)^2|}} \quad (4.21)$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca, (4.14) eşitliğinden (4.16) eşitliği çıkarılarak işlemlere devam edildiğinde şunu elde ederiz,

$$2\left(\frac{1+2\gamma+6\delta}{\beta}\right)(a_3 - a_2^2) = 2x(t_2 - s_2) + (4x^2 + 2)(t_1^2 - s_1^2)$$

$$a_3 = \frac{2x\beta(t_2 - s_2)}{2(1+2\gamma+6\delta)} + a_2^2 \quad (4.22)$$

ve

$$a_3 = \frac{2x\beta(t_2 - s_2)}{2(1+2\gamma+6\delta)} + \frac{4x^2\beta^2(t_1^2 + s_1^2)}{2(1+\gamma+2\delta)^2} \quad (4.23)$$

bulunur. Son olarak (4.23) eşitliğinde (4.17) ve (4.18) eşitlikleri kullanılarak,

$$|a_3| \leq \frac{2|x||\beta|}{1+2\gamma+6\delta} + \frac{4x^2\beta^2}{(1+\gamma+2\delta)^2} \quad (4.24)$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece, Teorem 4.2'nin ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 4.2 de β, γ ve δ parametrelerinin özel değerleri için aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 4.3: $f \in R_G(1, 0, \delta, x)$ olsun. O zaman,

$$|a_2| \leq \frac{2|x|\sqrt{2|x|}}{\sqrt{|4x^2(1+6\delta) - (4x^2+2)(1+2\delta)^2|}}$$

ve

$$|a_3| \leq \frac{2|x|}{1+6\delta} + \frac{4|x^2|}{(1+2\delta)^2}$$

dir.

Sonuç 4.4: $f \in R_G(1, \gamma, 0, x)$ olsun.

O zaman,

$$|a_2| \leq \frac{2|x|\sqrt{2|x|}}{\sqrt{|4x^2(1+2\gamma) - (4x^2+2)(1+\gamma)^2|}}$$

ve

$$|a_3| \leq \frac{2|x|}{1+2\gamma} + \frac{4|x^2|}{(1+\gamma)^2}$$

dir.

Sonuç 4.5: $f(z) \in R_G(1, 0, \delta, x)$ sınıfından olsun. O halde,

$$|a_2| \leq \frac{2|x|\sqrt{2|x|}}{\sqrt{|4x^2(1+6\delta) - (4x^2+2)(1+2\delta)^2|}}$$

ve

$$|a_3| \leq \frac{2|x|}{1+6\delta} + \frac{4|x^2|}{(1+2\delta)^2}$$

dir.

Şimdi de $f(z) \in R_G(\beta, \gamma, \delta, x)$ sınıfı için Fekete-Szegö eşitsizliğini verelim.

Teorem 4.6: (2.2) ile verilen $f(z)$ fonksiyonu $R_G(\beta, \gamma, \delta, x)$ sınıfından olsun. Bu durumda, $\mu \in \mathbb{R}$ için

$$F(\mu, \beta, \gamma, \delta, x) = \frac{2(1-\mu)x^2\beta}{4x^2\beta(1+2\gamma+6\delta) - (4x^2+2)(1+\gamma+2\delta)^2}$$

olmak üzere,

$$|a_3 - \mu a_2^2| \leq \begin{cases} \frac{2|x||\beta|}{1+2\gamma+6\delta}, & 0 \leq |F(\mu, \beta, \gamma, \delta, x)| \leq \frac{|\beta|}{2(1+2\gamma+6\delta)} \\ 4|x||F(\mu, \beta, \gamma, \delta, x)|, & |F(\mu, \beta, \gamma, \delta, x)| \geq \frac{|\beta|}{2(1+2\gamma+6\delta)} \end{cases} \quad (4.25)$$

olur.

İspat: (4.22) ve (4.20) eşitliklerinden,

$$\begin{aligned} a_3 - \mu a_2^2 &= \left(\frac{2x\beta}{2(1+2\gamma+6\delta)} + \frac{8(1-\mu)x^3\beta^2}{2[4x^2\beta(1+2\gamma+6\delta) - (4x^2+2)(1+\gamma+2\delta)^2]} \right) t_2 \\ &+ \left(\frac{8(1-\mu)x^3\beta^2}{2[4x^2\beta(1+2\gamma+6\delta) - (4x^2+2)(1+\gamma+2\delta)^2]} - \frac{2x\beta}{2(1+2\gamma+6\delta)} \right) s_2 \\ &= p(x) \left\{ \left(F(\mu, \beta, \gamma, \delta, x) + \frac{\beta}{2(1+2\gamma+6\delta)} \right) t_2 + \left(F(\mu, \beta, \gamma, \delta, x) - \frac{\beta}{2(1+2\gamma+6\delta)} \right) s_2 \right\} \end{aligned} \quad (4.26.)$$

elde edilir. Burada,

$$F(\mu, \beta, \gamma, \delta, x) = \frac{2(1-\mu)x^2\beta}{4x^2\beta(1+2\gamma+6\delta) - (4x^2+2)(1+\gamma+2\delta)^2} \quad (4.27)$$

olarak alınır ve $L_{p,q,1}(x) = p(x) \neq 0$, $L_{p,q,2}(x) = p^2(x) + 2q(x)$ eşitlikleri yerine yazılırsa,

$$|a_3 - \mu a_2^2| \leq \begin{cases} \frac{2|x||\beta|}{1+2\gamma+6\delta}, & 0 \leq |F(\mu, \beta, \gamma, \delta, x)| \leq \frac{|\beta|}{2(1+2\gamma+6\delta)} \\ 4|x||F(\mu, \beta, \gamma, \delta, x)|, & |F(\mu, \beta, \gamma, \delta, x)| \geq \frac{|\beta|}{2(1+2\gamma+6\delta)} \end{cases} \quad (4.28)$$

şeklinde bulunur. Böylece, Teorem 4.6'nın ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 4.6 da β, γ ve δ parametrelerinin özel değerleri için aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 4.7: $f \in R_G(1, 0, \delta, x)$ ve $\mu \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda,

$$F(\mu, 1, 0, \delta, x) = \frac{2(1-\mu)x^2}{4x^2(1+6\delta) - (4x^2+2)(1+2\delta)^2}$$

olmak üzere,

$$|a_3 - \mu a_2^2| \leq \begin{cases} \frac{2|x|}{1+6\delta}, & 0 \leq |F(\mu, 1, 0, \delta, x)| \leq \frac{1}{2(1+6\delta)} \\ 4|x||F(\mu, 1, 0, \delta, x)|, & |F(\mu, 1, 0, \delta, x)| \geq \frac{1}{2(1+6\delta)} \end{cases}$$

dir.

Sonuç 4.8: $f \in R_G(1, \gamma, 0, x)$ ve $\mu \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda,

$$F(\mu, 1, \gamma, 0, x) = \frac{2(1-\mu)x^2}{4x^2(1+2\gamma) - (4x^2+2)(1+\gamma)^2}$$

olmak üzere,

$$|a_3 - \mu a_2^2| \leq \begin{cases} \frac{2|x|}{1+2\gamma}, & 0 \leq |F(\mu, 1, \gamma, 0, x)| \leq \frac{1}{2(1+2\gamma)} \\ 4|x||F(\mu, 1, \gamma, 0, x)|, & |F(\mu, 1, \gamma, 0, x)| \geq \frac{1}{2(1+2\gamma)} \end{cases}$$

dir.

Sonuç 4.9: $f(z) \in R_G(\beta, 1, 1, x)$ sınıfından olsun. Bu durumda, $\mu \in \mathbb{R}$ için ve $\gamma=1$ ve $\delta=1$ yazılırsa,

$$F(\mu, \beta, 1, 1, x) = \frac{(1-\mu)x^2\beta}{(9x^2\beta - 8(4x^2 + 2))}$$

olmak üzere,

$$|a_3 - \mu a_2^2| \leq \begin{cases} \frac{2|x||\beta|}{9}, & 0 \leq |F(\mu, \beta, 1, 1, x)| \leq \frac{|\beta|}{18} \\ 4|x||F(\mu, \beta, 1, 1, x)|, & |F(\mu, \beta, 1, 1, x)| \geq \frac{|\beta|}{18} \end{cases}$$

olur.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Tez çalışmasında öncelikli olarak bi-ünivalent fonksiyonların tanımı ve seriye açılımı gibi bazı özellikleri verilmiştir.

Daha sonra Pell-Lucas polinomları yardımı ile bi-ünivalent fonksiyonların yeni bir $R_G(\beta, \gamma, \delta, x)$ alt sınıfı tanımlanmış ve $R_G(\beta, \gamma, \delta, x)$ sınıfına ait fonksiyonlar için $|a_2|$ ve $|a_3|$ katsayı eşitsizlikleri elde edilmiştir. Ayrıca, Fekete-Szegö problemi olarak bilinen $|a_3 - \mu a_2^2|$ fonksiyoneli için bir üst sınır bulunmuştur.

Yapılan bu çalışmada $R_G(\beta, \gamma, \delta, x)$ sınıfı ile elde edilen sonuçlar parametrelerin özel durumları için incelenmiştir.

KAYNAKLAR

- [1]. Ali, R.M., Lee, S. K., Ravichandran, V. and Supramaniam, S., 2012 “Coefficient estimates for bi-univalent Ma-Minda starlike and convex functions” *Applied Mathematics Letters*, 25, no. 3, pp. 344-351.
- [2]. Birinci, A. T. (2008). “Pell, Pell-Lucas, Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas Polinomları.” Yüksek Lisans Tezi, Gazi üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Ankara.
- [3]. Birol, F. (2018). “Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas, Genelleştirilmiş Pell Sayı Dizileri ve Polinomlarının Lineer Gruplarla İlişkileri.” Yüksek Lisans Tezi, Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Balıkesir.
- [4]. Brannan, D. A. and Clunie, J. G., (Eds.), 1980 “Aspect of Contemporary Complex Analysis” (Proceedings of the NATO Advanced Study Institute held at the University of Durham; July 1-20,1979), Academic Press, New York and London.
- [5]. Bulut, S., 2013 “Coefficient Estimates for A Class of Analytic and Bi-Univalent Functions” *Novi Sad J. Math.* Vol. 43, No. 2, pp. 59-65.
- [6]. Bulut, S., 2014 “Faber polynomial coefficient estimates for a comprehensive subclass of analytic bi-univalent functions” *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* 352, 479-484.
- [7]. Crişan, O., 2013 “Coefficient Estimates for Certain Subclasses of Bi-Univalent Functions” *Gen. Math. Ntes*, Vol. 16, No. 2, pp. 93-102.
- [8]. Çağlar, M., Orhan, H. and Yağmur, N., 2013 “Coefficient bounds for new subclasses of bi-univalent functions” *Filomat* 27(7), 1165-1171.
- [9]. Deniz, E., 2013 “Certain subclasses of bi-ünivalent functions satisfying subordinateconditions” *Journal of Classical Analysis*, 2(1), 49-60.
- [10]. Deniz, E., Jahangiri, J.M., Kına, S.K. and Hamidi, S.G., 2018 “Faber polynomial coefficients for generalized bi-subordinate functions of complex order”. *Journal Mathematical Inequalities* 12(3), 645-653.

- [11]. Duren, P. L., 1983 “Univalent functions” Springer Verlag. New York Inc.
- [12]. Fekete, M. and Szegö, G., (1933). Eine Bemerkung über ungerade schlichte Funktionen. J. London Math. Soc., 8, 85-89.
- [13]. Frasin, B.A. and Aouf, M.K., 2011 “New subclasses of bi-univalent functions” Applied Mathematics Letters, 24(9), pp. 1569-1573.
- [14]. Goodman, A. W., 1983 “Univalent Functions” I. Mariner Publishing Company., 245, Tampa, Florida.
- [15]. Hamidi, S. G. and Jahangiri, J.M., 2014 “Faber polynomial coefficient estimates for analytic bi-close-to-convex functions” C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. 1 352 (1), 17-20.
- [16]. Hamidi, S. G. and Jahangiri, J.M., 2014 “Unpredictability of the coefficients of m-fold symmetric bi-starlike functions” International Journal of Mathematics Vol. 25(7), 1450064 (8 pages).
- [17]. Hamidi, S. G. and Jahangiri, J.M., 2015 “Faber polynomial coefficient estimates for bi-univalent functions defined by subordinations” Bull. Iran. Math. Soc. 41(5) 1103-1119.
- [18]. Hamidi, S. G. and Jahangiri, J.M., 2016 “Faber polynomial coefficient of bi-subordinate functions” C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. 1 354 (4), 365-370.
- [19]. Horadam, A. F. And Mahon, J. M. (1985) “Pell-Lucas Polynomials”, The Fibonacci Quarterly, 23 (1), 7-20.
- [20]. Jahangiri, J.M. and Hamidi, S.G., 2013 “Coefficient estimates for certain classes of bi-univalent functions” International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, Article ID 190560, (4 pages).
- [21]. Jahangiri, J.M. and Hamidi, S.G., 2015 “Faber polynomial coefficient estimates for analytic bi- Bazilevic functions” Mat. Vesnik 67(2) 123-129.
- [22]. Jahangiri, J.M., Hamidi, S.G., and Halim, S. A., 2014 “Coefficient of bi-univalent functions with positive real part derivatives” Bull. Malays. Math. Sci. Soc. (2) 37(3), 633–640.

- [23]. Kedzierawski, A.W., 1985 “Some remarks on bi-univalent functions” Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska Sect. A 39, 77-81.
- [24]. Koshy, T. (2001). “Fibonacci and Lucas Numbers with Applications”, Wiley-Interscience, 215-226.
- [25]. Koshy, T. (2001). Fibonacci and Lucas Numbers With Applications, ISBN: 978-0-471-39969-8, A Wiley- Interscience Publication.
- [26]. Koshy, T. (2014). Pell and Pell-Lucas Numbers with Applications, ISBN: 978-1-4614-8489-9, Springer.
- [27]. Kumar, S. S., Kumar, V. and Ravichandran, V., 2013 “Estimates for the initial coefficients of bi-univalent functions” Tamsui Oxford Journal of Information and Mathematical Sciences 29(4), 487-504.
- [28]. Lewin, M., 1967 “On a coefficient problem for bi-univalent functions” Proc. Amer. Math. Soc. 18, 63-68.
- [29]. Li, X. and Wang, A., 2012 “Two new subclasses of bi-univalent functions” International Mathematical Forum, 7(30), pp. 1495-1504.
- [30]. Magesh, N. and Yamini, J., 2013 “Coefficient Bounds for Certain Subclasses of Bi-Univalent Functions” International Mathematical Forum, 8(27), pp. 1337-1344.
- [31]. Murugusundaramoorthy, G., Magesh, N. and Prameela, V., 2013 “Coefficient Bounds for Certain Subclasses of Bi-Univalent Functions” Abstract and Applied Analysis Vol. 2013, Article ID 573017, (3 Pages).
- [32]. Netanyahu, E., 1969 “The minimal distance of the image boundary from the origin and the second coefficient of a univalent function in $|z| < 1$ ” Arc. Rational Mech. Anal. 32, 100-112.
- [33]. Pommerenke, Ch. 1975 “Univalent Functions”, Vandenhoeck & Ruprecht Company, s-376, Göttingen, Berlin.
- [34]. Ponnusamy, S. and Silverman, H., 2006 “Complex Variables With Applications” Birkhäuser. Boston.

- [35]. Prema, S. and Keerthi, S. B., 2013 “Coefficient bounds for certain subclasses of analytic functions” *J. Math. Anal.* 4(1), 22-27.
- [36]. Srivastava, H. M., Bulut, S., Çağlar, M. and Yağmur N., 2013 “Coefficient Estimates for a General Subclass of Analytic and Bi-Univalent Functions” *Filomat* 27(5), pp. 831-842.
- [37]. Srivastava, H. M., Mishra, A. K. and Gochhayat, P., 2010 “Certain subclasses of analytic and bi-univalent functions” *Appl. Math. Letters*, 23(10), 1188-1192.
- [38]. Srutha, K. and Chinthamani, S., 2013 “Certain coefficient estimates for bi-univalent Sakaguchi type functions” *Aust. J. Math. Anal. Appl.* 10(1), Art. 1, pp. 1-7.
- [39]. Styer, D. and Wright, D.J., 1981 “Results on bi-univalent functions” *Proceedings of the American Mathematical Society*, 82(2), 243-248.
- [40]. Tan, D. L., 1984 “Coefficient estimates for bi-univalent functions” *Chinese Ann. Math. Ser. A* 5 no. 5, 559-568.
- [41]. Tang, H, Deng, G. and Li, S., 2013 “Coefficient estimates for new subclasses of Ma-Minda bi-univalent functions” *J. Inequal. Appl.*, 2013:317, 10 pp.
- [42]. Vajda, S. (1989). “Fibonacci & Lucas Numbers and the golden section. Theory and applications”, John Wiley & Sons, New York, 24-61.
- [43]. Vorob' yev, N. N. (1961) “Fibonacci Numbers”, Blaisdell, New York, 1-176.
- [44]. Xu, Q., Gui, Y. and Srivastava, H.M., 2012 “Coefficient estimates for a certain subclasses of analytic and bi-univalent functions” *Appl. Math. Lett.* 25(6), 990-994.
- [45]. Xu, Q., Xiao, H. and Srivastava, H.M., 2012 “A certain general subclass of analytic and bi-univalent functions and coefficient estimate problems” *Appl. Math. Comput.* 218(23), 11461-11465.
- [46]. Yılmaz, S. (2015). “Lineer İndirgeme Dizilerine Karşılık Gelen Polinomlar ve Periyodik Sistemler”, Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Ankara.