T.C.
İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÇOKLU ZAMAN GECİKMELİ HOPFİELD YAPAY SİNİR AĞLARININ ROBUST KARARLILIK ANALİZİ

Ezgi AKTAŞ

Matematik Anabilim Dalı

Matematik Programı

DANIŞMAN
Doç. Dr. Özlem FAYDASIÇOK

Ocak, 2023

İSTANBUL

Bu çalışma 09.01.2023 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi

Doç. Dr. Özlem FAYDASIÇOK (Danışman)
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Dr. Öğr. Üyesi Cemal ÇİÇEK
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Prof.Dr. Rüya ŞAMLI
İstanbul Üniversitesi-Cerrahpaşa
Mühendislik Fakültesi

- **İntihal Programı Beyanı**

20.04.2016 tarihli resmi gazetede yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; Bu Lisansüstü teze, İstanbul Üniversitesi'nin abonesi olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü'nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.

- **Proje Destekleri**

Bu çalışma İstanbul Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Yürütücü Sekreterliğinin . . . . numaralı projesi ile desteklenmiştir. Bu tez . . . . numaralı proje ile . . . . tarafından desteklenmiştir.

- **Tezden Üretilmiş Yayınların Künye Bilgileri**

[]

ÖNSÖZ

Yüksek lisans öğrenim sürecim ve tez çalışmaları boyunca gösterdiği sabır, katkı ve anlayışından dolayı çok kıymetli danışmanım Doç. Dr. Özlem FAYDASIÇOK'a en içten dileklerimi sunar, teşekkür ederim.

Bu tez çalışmasında katkılarıyla yanımızda olan Prof. Dr. Sabri ARIK'a teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca tez çalışmalarım süresince her zaman ve her koşulda yanımda olan, bana destek veren aileme, arkadaşlarıma çok teşekkür ederim.

Ocak, 2023 Ezgi AKTAŞ

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ

Simgeler	**Açıklama**
$D=(d_{ij})_{n\times n}$	: $n\times n$ boyutlu kare matris
D^T	: D matris transpozu
D^{-1}	: D matrisi tersi
$\|D\|$	: D matrisinin mutlak değeri
$\|\|D\|\|_1$	: D matrisinin birinci normu
$\|\|D\|\|_2$	: D matrisinin ikinci (Öklid) normu
$\|\|D\|\|_\infty$	: D matrisinin sonsuz normu
m,k,x	: Vektörler
$\|x\|$	: x vektörünün mutlak değeri
$\lambda_m(D)$	: D matrisinin en küçük özdeğeri
$\lambda_M(D)$	: D matrisinin en büyük özdeğeri
$\dot{V}(x)$	: $V(x)$ fonksiyonunun türevi
$D>0$	: Pozitif tanımlı matris
$D\geq 0$	: Simetrik ve yarı pozitif tanımlı matris
$D<0$	: Negatif tanımlı matris
$D\leq 0$	: Simetrik ve yarı negatif tanımlı matris
$H=diag(h_i)$	: i elemanlı diagonal bir H matrisi
$\mathbb{R}^n$	: n noyutlu reel sayılar kümesi
C^0	: Sürekli fonksiyonlar kümesi

Kısaltmalar	**Açıklama**
LMI	: Linear Matrix Inequality

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÇOKLU ZAMAN GECİKMELİ HOPFİELD YAPAY SİNİR AĞLARININ ROBUST KARARLILIK ANALİZİ

Ezgi AKTAŞ

İstanbul Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Özlem FAYDASIÇOK

Bu tez çalışmasında sistem denklemlerinin çoklu zaman gecikmeleri içerdiği ve sistem matrislerinin normlarının sınırlı olduğu Hopfield yapay sinir ağı modellerinin robust kararlılık analizi gerçekleştirilecektir. Bu tezin ana amacı, belirsizlik içeren sistem matrislerinin normları için alternatif yöntemler kullanılarak Hopfield yapay sinir ağı modellerinin robust kararlılık analizinde yeni yeterli koşullar elde etmektir. Bu tez çalışmasında elde edilecek kararlılık koşulları iki aşamada gerçeklenecektir. Birinci aşamada, Homomorfizm teoremleri kullanılarak çoklu zaman gecikmeli Hopfield yapay sinir ağlarının denge noktasının varlığı ve tekliğini, gecikme parametrelerinden bağımsız olarak sağlayan yeni yeterli koşullar elde edilecektir. İkinci aşamada ise, Lyapunov kararlılık teoremleri yardımıyla, denge noktasının varlığını ve tekliğini sağlayan koşulların aynı zamanda sistemin denge noktasının global asimptotik kararlılığını da sağladığı gösterilecektir. Bu tez kapsamında, çoklu zaman gecikmeli Hopfield yapay sinir ağları için elde edilecek olan global robust kararlılık koşulları, sayısal örnekler kullanılarak daha önce literatürde yayınlanmış olan benzer kararlılık sonuçları ile karşılaştırılacaktır.

Ocak 2023, IX+65 sayfa.

Anahtar kelimeler: Zaman Gecikmeli Yapay Sinir Ağları, Robust Kararlılık Analizi, Lyapunov Teoremleri, Matris Teorisi, Lipschitz Fonsiyonları

SUMMARY

M.Sc. THESIS

ROBUST STABILITY ANALYSIS OF HOPFIELD NEURAL NETWORKS WITH MULTIPLE TIME DELAYS

Ezgi AKTAŞ

İstanbul University

Institute of Graduate Studies in Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Doç.Dr. Özlem FAYDASIÇOK

In this thesis, robust stability analysis of Hopfield artificial neural network models will be performed where the system equations with multiple time delays and the norms of the system matrices are bounded. The main purpose of this thesis is to obtain new sufficient conditions for robust stability analysis of Hopfield artificial neural network models by using alternative methods for the norms of system matrices containing uncertainty. The stability conditions to be obtained in this thesis will be realized in two stages. In the first step, by using Homomorphism theorems, new sufficient conditions will be obtained that ensure the existence and uniqueness of the equilibrium point of multiple time-delayed Hopfield artificial neural networks independently of the delay parameters. In the second stage, with the help of Lyapunov stability theorems, it will be shown that the conditions that ensure the existence and uniqueness of the equilibrium point also ensure the global asymptomatic stability of the equilibrium point of the system. In this thesis, global robust stability conditions for multiple time delay Hopfield artificial neural networks will be compared with similar stability results previously published in the literature using numerical examples.

Ocak 2023, IX+65 pages.

Keywords: Time Delayed Neural Networks, Robust Stability Analysis, Lyapunov Theorems, Matrix Theory, Lipschitz Functions.

1. GİRİŞ

Yapay sinir ağları, beynin önemli özelliklerinden olan, öğrenerek yeni bilgilere ulaşabilme ve keşfetme yeteneğine sahip bilgisayar sistemleridir ve biyolojik nöron hücrelerinden etkilenerek geliştirilmiştir. Gerçek hayatta, mühendislikte, tıp alanında ve daha birçok alanda problemlerin çözümünde dinamik yapay sinir ağı sistemleri yaygın olarak kullanılmaktadır. Bir yapay sinir ağı modeli lineer olmayan diferansiyel denklemler yardımıyla bir dinamik sistem olarak ifade edilebilir ve dinamik sistemler, geometrik uzayda bir noktanın zaman değişkenine bağlı durumunu tasvir eder. Yapay sinir ağlarının donanımsal gerçeklenmesi esnasında ya da dış faktörler nedeniyle oluşabilecek sapmalar, yapay sinir ağının dinamik davranışını ve dolayısıyla da kararlılığını doğrudan etkiler. Yapay sinir ağının kullanıldığı alanlarda çoğu zaman kararlı durumda olması istenir, bu nedenle bir yapay sinir ağı için kararlılık önemlidir. Dinamik yapay sinir sisteminin kararlılığı, yörüngelerin matematiksel modellemedeki giriş değerleri ile bu diferansiyel denklemin çözümlerinin gelecekte birbirlerine yakın kalmasını garanti edebilmesidir. Ancak bu dinamik sistemin bir girişe cevabı daimi olarak artıyor ise sistem kararsız olarak adlandırılır. Kararsız durumda olan bir dinamik sistemde doyma olmaz ya da sistemin çalışması durdurulmazsa, sonunda tahrip olabilir.

Yapay sinir ağları, insan beynindeki sinir hücrelerinin ve bu hücrelerin birbirleriyle kurduğu sinaptik bağların elektronik bir modele dönüştürülmesidir. Beyindeki sinir hücreleri farklı biçimlerde birbirleriyle bağlantı kurarak ağlar oluşturur ve bu ağlar öğrenme, hatırlama, genelleme ve alınan verilerden sonuç çıkarabilme yeteneğine sahiptir. Biyolojik nöron hücrelerinde, hücreye gelen sinyaller sinapslar aracılığıyla dentrite gider, dentrite gelen sinyaller, akson kısmında toplanır ve aksonlar aracılığıyla diğer nöronlara uyarı sinyali gönderir. Buna benzer biçimde yapay sinir hücreleri, hücreye gelen verileri bir toplama fonksiyonu aracılığıyla toplar ve daha sonra bu verileri aktivasyon fonksiyonundan geçirerek bir çıktı üretip ağ bağlantıları yoluyla diğer yapay sinir hücrelerine gönderir. Bazı durumlarda kompleks problemlere çözüm bulmak oldukça güç olmaktadır. Bu durumlarda yapay sinir ağları insanın öğrenme, gözlemleme ve sonuç çıkarma gibi doğal yeteneklerini kullanarak problemlere çözüm üretir.

Yapay sinir ağları, sınıflandırma, örüntü tanıma, boyut indirgeme, yapılandırılmış tahmin, makine çevirisi, anomali tespiti, görselleştirme ve benzeri gibi problemlerin çözümünde çok popüler ve kullanışlı bir araç haline gelmiştir. Bu yeteneklere sahip olması, yapay sinir ağlarının birçok alanda kullanılmasını mümkün kılmaktadır. Teknolojinin gelişmesi ve ihtiyacın artması, yapay sinir ağı modellerinin gelişip ve çeşitlenmesine sebep olmuştur. Bunlardan bazıları Cohen-Grossberg, Hücresel, Nötral ve Hopfield yapay sinir ağı modelleridir. Bu modeller, içerdikleri zaman gecikmelerinin çeşitleri, nöronlar arasındaki bağlantı biçimi ve katman sayısı gibi mimari farklılıklarına göre ayrıca yakınsama hızını ayarlamak için kullanılan kuvvetlendirici fonksiyon ve farklı davranış fonksiyonu tercihlerine göre de birbirlerinden ayrılmaktadır. Bu ayrışımdan dolayı, farklı dinamik sinir ağı modellerinin denge noktalarının varlık, teklik analizi ve aynı zamanda kararlılık analizi de farklı olmaktadır. Yapay sinir ağının göstereceği dinamik davranış, kullanılanacağı problem yapısına göre değişiklik göstermetedir. Örnek olarak, optimizasyon ve çağrışımlı bellek problemlerini göz önünde bulundurduğumuzda, optimizasyon problemlerinin çözümünde kullanılacak yapay sinir ağının, denge noktasının tek bir değere yakınsıyor olması istenir, fakat çağrışımlı bellek problemlerinin çözümünde kullanılacak yapay sinir ağının, daha çok veri saklama olanağına sahip olması için birden çok denge noktasının olması istenir.

İnsan beyninin çalışma şekli ve yetenekleri uzun yıllar boyunca araştırmalara konu olmuştur ve teknolojinin gelişmesiyle kompleks problemlere çözümler üretebilecek sistemler oluşturma ihtiyacı artmıştır. Beyinle iligili yapılan çalışmaların bilimsel eserleri ilk defa 1890 yıllarında ortaya konulmuş olsa da mühendislik anlamında değerli çalışmalar 1940'lı yıllardan sonra yapılmıştır. Yapay sinir ağlarının ilk modeli Warren McCulloch ve Walter Pitts tarafından 1943 yılında ortaya atılmıştır. Bu matematiksel model, insan beyninin yapısı ve işleyişinden esinlenerek, beynin biyolojik yapısının elektronik devre şeklinde modellenmesiyle oluşturulmuştur. 1982 yılında John Joseph Hopfield tarafından geliştirilen model ise, yapay sinir ağlarının temel modeli olarak kabul edilir. Hopfield, simetrik bağlantı matrislerinin var olması koşuluna dayanan bu dinamik yapay sinir ağı için pozitif bir Lyapunov fonksiyonu önermiştir ve önerdiği Lyapunov fonksiyonunun zamana göre türevinin negatif değere sahip olduğunu, yani dolayısıyla sistemin global kararlılığını ispatlamıştır. Hopfield yapay sinir ağındakinden farklı olarak, Cohen ve Grossberg'in 1987 yılında yaptığı bir çalışmada, bağlantı matrislerinin simetrik matris olma koşulunu sağlamasının, denge noktasının kararlı olduğu sonucuna ulaşmak için gerek koşul olmadığı gösterilmiştir. Diğer yapay sinir ağı modellerinden farklı olarak, Cohen-Grossberg yapay sinir ağı modelinde ağın denge noktasının yakınsama hızını kontrol etmek amacıyla kullanılan kuvvetlendirici fonksiyon bulunmaktadır. Aynı zamanda, Cohen-Grossberg yapay sinir ağları, sistemin kararlı davranış sergileyen denge noktalarını durum uzayında uygun yerlere konumlandırmamıza yarayan bir davranış fonksiyonu bulundurur. Dolayısıyla, Hopfield yapay sinir ağı modeli, Cohen-Grossberg yapay sinir ağlarının bir özel durumu olarak düşünülebilir. Ancak, özellikle robust anlamda sistemin denge noktasının kararlılık analizi gerçekleştirlirken parametre belirsizlikleri içeren yapay sinir ağı modelinde daha fazla sayıda parametre için kısıtlayıcı aralıklar tanımlanabildiğinden, Hopfield yapay sinir ağı modeli, Cohen-Grossberg yapay sinir ağı modeline göre avantajlar içerebilmektedir. Hücresel sinir ağı modeli ise ilk kez 1988'de, Leon Chua ve Lin Yang tarafından önerilmiştir. Hücresel sinir ağları diğer yapay sinir ağlarına benzer bir paralel bilgi işlem paradigmasıdır, aralarındaki tek fark, hücresel sinir ağlarında yalnızca komşu birimler arasında iletişime izin veriliyor olmasıdır.

Bu tezde ele alacağımız Hopfield yapay sinir ağının literatürde ilk kullanılan modeli zaman gecikmesi içermemektedir. Ancak yapay sinir ağlarında kullanılan nöronlar bir elektronik devre şeklinde modellenebilir ve elektronik devre olarak modellendiği durumda modeldeki kuvvetlendiricilerin sonlu anahtarlama hızından dolayı nöronlar arası etkileşimde zaman gecikmeleri kaçınılmaz hale gelir ve bu zaman gecikmleri ağın kararlılığını etkiler. Oluşan bu zaman gecikmeleri osilasyonlara sebep olarak sistemin kararsızlığına yol açabilir. Bazen, zaman gecikmesinin hesaba katılmadığı bir yapay sinir ağı modeli kararlı olabilirken, zaman gecikmesi eklenen aynı modelin kararsız olduğu sonucunu gözlemleyebiliriz. Dolayısıyla, zaman gecikmesinin yapay sinir ağı modeline eklenmesi ve bu parametreler göz önünde bulundurularak kararlılık analizi yapılması daha doğru sonuçlara ulaşılmasını sağlamaktadır. Hopfiled yapay sinir ağı modeline, ilk olarak, tüm nöronlar arasındaki gecikmenin aynı olduğu kabul edilen, sabit bir zaman gecikmesi eklenmiştir. Fakat nöronların veri alışverişi sırasındaki gecikmelerin tamamının eşit olması pratik olarak mümkün olmadığından bu çok gerçekçi bir yaklaşım olamaz. Bu nedenle tek boyutlu ayrık zaman gecikmesinin eklendiği bir diğer model oluşturulmuştur. Bu modele eklenen zaman gecikmesi, her bir nöron için bir sayı denk gelecek şekilde n elemanı olan bir vektördür. İlk yaklaşıma göre biraz daha gerçekçi bir yaklaşım olsa da en kesin sonuçlara ulaşmak için yeterli değildir. Son olarak her nöron çifti arasındaki gecikmenin farklı olduğu, iki boyutlu zaman gecikmesi içeren çoklu zaman gecikmeli Hopfield yapay sinir ağları elde edilmiştir. Burada gecikme $n \times n$ boyutlu bir matris olarak ifade edilmiştir ve yapay sinir ağlarının donanımsal yapısına en uygun yaklaşımdır.

Bir yapay sinir ağı ne kadar fazla gecikme parametresi içeriyorsa, sinir ağının sahip olduğu matematiksel model o kadar karmaşıktır. Sabit ve ayrık zaman gecikmeli sinir ağlarında, sinir ağlarının kararlılık analizinde lineer matris eşitsizliği (LMI) yöntemi kullanılabilir. Dinamik sinir ağlarının LMI tabanlı kararlılık analizi, literatürde en yaygın olarak kullanılan yöntemlerden biridir. Bununla birlikte, çoklu zaman gecikmeli bir sinir ağı kullanıldığı durumda, lineer matris eşitsizliği (LMI) yöntemi genellikle sinir ağlarının kararlılığı için yeterli koşulları türetemez. Dolayısıyla bu sorunun üstesinden gelebilmek için bazı alternatif kararlılık analizi yöntemleri ve teknikleri geliştirmemiz gerekir. Ancak bu teknik ve yöntemler çok karmaşık matematiksel manipülasyonlar içerdiğinden literatürde çoklu zaman gecikmesi içeren yapay sinir ağı modellerinin kararlılık analizi üzerine çok fazla çalışma bulunmamaktadır. Bu tez kapsamında çoklu zaman gecikmesi içeren Hopfield yapay sinir ağlarının robust kararlılık analizi gerçekleştirilmiş, literatüre önemli bir katkı sağlanması hedeflenmiştir.

Bir yapay sinir ağı elektronik devre ile modellenirken, sistemin denge noktasının kararlılık analizinin gerçekleştirilmesi için zaman gecikmeleri ile birlikte gürültü gibi dış faktörler sebebi ile oluşabilecek parametre belirsizliklerinin de göz önünde bulundurulması gerekir. Dolayısıyla, ara bağlantı matrisleri için alt ve üst sınır matris kısıtları konularak sistemin denge noktası için daha dayanıklı bir kararlılık analizi gerçekleştirilebilir. Ağ parametreleri üzerine getirilen bu kısıtlamalar kullanılarak gerçekleştirilen kararlılık analizi robust kararlılık analizi olarak adlandırılır. Bu nedenle, dinamik sinir ağlarının bu tür bozulmalara karşı robust kararlılığı dikkate alınmalıdır. Parametre belirsizlikleri altında sinir ağlarını modellemek için farklı yaklaşımlar vardır. Bu belirsizlikleri, sinir sistemleri denklemlerine yansıtmak için en yaygın olarak kullanılan yöntem, sınırlı ağ parametrelerinin belirli bir aralıkta değiştiğini varsayarak oluşturduğumuz aralık belirsizliğidir. Bu bağlamda, sinir sistemlerinin sınırlandırılmış ara bağlantı matrislerinin bazı üst sınır normlarını bilmek önemlidir. Bu tezde, sistem parametreleri için yeni bir üst sınır normu tanımlanırken yeni ve modifiye edilmiş bir Lyapunov fonksiyonu yardımıyla Hopfield yapay sinir ağı modelinin denge noktası için robust kararlılık analizi gerçekleştirilmiştir.

2. GENEL KISIMLAR

Bu tezde, çoklu zaman gecikmeli Hopfield tipindeki yapay sinir ağı modelinin denge noktası için Lipschitz koşullarını sağlayan aktivasyon fonksiyonları kullanılarak robust kararlılık analizi gerçekleştirilmiştir. Sinir ağlarının robust kararlılığının analizindeki temel problem, sistemin sınırlandırılmış ara bağlantı matrisleri için üst sınır normunu bulmaktır. Geçmiş literatürde, sınırlandırılmış ara bağlantı matrisleri için dört üst sınır normu bulunmuş ve bunlar, zaman gecikmeli sinir ağlarının robust kararlılığı için yeni yeterli koşulları türetmek üzere başarıyla uygulanmıştır. Bu tezin ana katkılarından biri, sinir ağlarının parametre belirsizliği belli bir aralıkta tanımlanmış ara bağlantı matrislerinin normu için yeni bir üst sınırın türetilmesi ve modifiye edilmiş, yeni Lyapunov fonksiyonu tanımlanması olacaktır. Tanımlanan yeni Lyapunov fonksiyonu ve yeni üst sınır normu kullanılarak, Lyapunov kararlılık teoremi ve homeomorfizm teoremi yardımıyla, çoklu zaman gecikmesi içeren Hopfield yapay sinir ağının denge noktasının varlık, teklik analizi ve global robust asimptotik kararlılığı için esnek ve yeni yeterli koşullar elde edilecektir.

Daha sonra, çoklu zaman gecikmeli Hopfield sinir ağı modeli için önerilen robust kararlılık koşullarının bazı basit değiştirilmiş versiyonlarının, çoklu zaman gecikmesi içeren Cohen-Grossberg yapay sinir ağının robust anlamda kararlı olma koşullarını doğrudan verdiği gösterilecektir. Ayrıca, temel olarak tekil olmayan M-matris veya cebirsel eşitsizlik formlarında olan, çoklu zaman gecikme terimleri içeren yapay sinir ağı modelinde ve Lipschitz aktivasyon fonksiyonları üzerinde daha önce yayınlanmış robust kararlılık araştırma sonuçlarının kapsamlı bir incelemesini yapılacaktır. Özellikle, bu tezde elde edilen robust kararlılık sonuçlarının, bu zaman gecikmeli sinir ağları için daha önce bildirilen hemen hemen tüm robust kararlılık koşullarını genelleştirdiği kanıtlanmıştır.

3. MALZEME VE YÖNTEM

Kullanacağımız Hopfield yapay sinir ağı modelinin kararlılık analizinde vektör ve matris bilgisi büyük bir önem taşımaktadır. Yapay sinir ağının kararlılık analizi aktivasyon fonksiyonlarına ve ara bağlantı matrislerine bazı kısıtlar uygulanmasına dayanmaktadır. Dolayısıyla bu bölümde, öncelikle sıkça kullanacağımız matris ve vektör normları, aktivasyon fonksiyonu sınıfları ve ihtiyacımız olabilecek bazı önemli matris sınıfları tanımlanacak ayrıca bu matris sınıflarına ilişkin özellikler verilecektir. Daha sonra denge noktasının ve kararlılığın tanımı yapılacak ve yapay sinir ağlarının denge noktasının kararlılık analizi gerçekleştirilirken sıklıkla kullanılan bazı kararlılık teoremleri verilecektir.

3.1. MATRİS VE VEKTÖR NORMLARI

$m = (m_1, ..., m_n)^T$, R^n'de bir vektördür. Bu vektörün normu $||m||$ şeklinde ifade edilir ve $\forall m, k \in R^n$ ve $\forall \alpha \in R$ skaler değeri için $||m||$ normu aşağıdaki özellikleri sağlar:

- $||m|| > 0$ ve $m = 0 \Rightarrow ||m|| = 0$.

- $||m+k|| \leq ||m|| + ||k||$.

- $||\alpha m|| = |\alpha| ||m||$.

Yukarıdaki bilgiler doğrultusunda, n boyutlu m vektörünün norm fonksiyonlarından biri aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$||m||_p = (|m_1|^p + |m_2|^p + \cdots + |m_n|^p)^{\frac{1}{n}}\ , \qquad 1 \leq p < \infty$$

Bu tezde kararlılık analizi yapılırken sıkça kullanacağımız $||m||_1$, $||m||_2$ ve $||m||_\infty$ vektör normlarını aşağıdaki gibi yazalabiliriz:

$$||m||_1 = \sum_{i=1}^{n} |m_i|$$

$$||m||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |m_i|^2}$$

$$||m||_\infty = \underset{1 \leq i \leq n}{max} |m_i|$$

$$||m||_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{ij}^2}$$

Bir $Q = (q_{ij})_{n \times n}$ matrisi için norm aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$||Q|| = \sup_{m \in R^n, d \neq 0} \frac{||Qm||}{||m||} = \sup_{||d||=1} ||Qm|| = \sup_{||m|| \leq 1} ||Qm||$$

Yukarıdaki genel norm tanımından yola çıkarak $||Q||_1$, $||Q||_2$ ve $||Q||_\infty$ normları şu şekilde yazılabilir:

$$||Q||_1 = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |q_{ji}|$$

$$||Q||_2 = [\lambda_{\max}(Q^T Q)]^{1/2}$$

$$||Q||_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |q_{ij}|$$

3.1.1. Matris sınıfları ve özellikleri

Tanımlama 3.1.1.1

Q matrisi nxn boyuta sahip simetrik bir matris olsun. Q matrisi bütün özdeğerlerinin sıfırdan büyük olma koşulunu sağlıyor ise ($\lambda(Q) > 0$), Q matrisi pozitif tanımlı bir matristir ve $Q > 0$ şeklinde ifade edilir.

Tanımlama 3.1.1.2

Q matrisi nxn boyuta sahip simetrik bir matris olsun. Q matrisi bazı özdeğerlerinin sıfırdan büyük, bazı özdeğerlerinin de sıfıra eşit olma koşulunu sağlıyor ise Q matrisi pozitif yarıtanımlı bir matristir ve $Q \geq 0$ şeklinde ifade edilir.

Tanımlama 3.1.1.3

Q matrisi nxn boyuta sahip simetrik bir matris olsun. Q matrisi bütün özdeğerlerinin reel kısmının sıfırdan büyük olma koşulunu sağlıyor ise Q matrisi pozitif kararlı bir matristir. Ayrıca pozitif kararlı matris olma özelliğine sahip bir Q matrisi, H- kararlı matris olarak adlandırılır ve $Q \in H$ şeklinde ifade edilir.

Tanımlama 3.1.1.4

Q matrisi nxn boyuta sahip bir matris olsun. Q matrisinin bazı özdeğerlerinin reel kısmının sıfırdan büyük, bazı özdeğerlerinin reel kısmının da sıfıra eşit olma koşulunu sağlıyor ise Q matrisi pozitif yarıkararlı bir matristir. Ayrıca pozitif yarıkararlı bir matris olma özelliğine sahip bir Q matrisi H_o- kararlı matristir, aynı zamanda $Q \in H_o$ şeklinde ifade edilir.

Tanımlama 3.1.1.5

$q_{ii} \geq 0$ ve $q_{ij} \leq 0$ herhangi bir $Q = (q_{ij})$ formundaki Q matrisinin elemanları olsun. Bu durumda $Q \in Z_n$ şeklinde ifade edilir.

Tanımlama 3.1.1.6

$Q \in Z_n$ ve aynı zamanda Q pozitif kararlı matris olma koşulunu sağlıyorsa, Q matrisi tekil olmayan M-matristir, $Q \in K$ şeklinde ifade edilir.

Tanımlama 3.1.1.7

$Q \in Z_n$ ve Q pozitif yarıkararlı matris olma koşulunu sağlıyorsa, Q, M-matristir, $Q \in K_0$ şeklinde ifade edilir.

Tanımlama 3.1.1.8

Q matrisi nxn boyuta sahip bir matris olsun. $C = \{c_{ij}\}$ şeklinde ifade edilen matris Q matrisinin kıyas matrisidir ve $c_{ii} = q_{ii},\ c_{ij} = -|q_{ij}|$ olarak tanımlanır.

Tanımlama 3.1.1.9

Diyagonal elemanları $q_{ii} > 0$ şeklinde verilen herhangi bir Q matrisinin kıyas matrisi olan C matrisi, tekil olmayan M-matris olma koşulunu sağlıyorsa, Q matrisi, tekil olmayan H-matristir, $Q \in C$ şeklinde ifade edilir.

Tanımlama 3.1.1.10

Diyagonal elemanları $q_{ii} > 0$ şeklinde verilen herhangi bir Q matrisinin kıyas matrisi olan C matrisi, M-matris olma koşulunu sağlıyor ise, Q matrisi, H-matristir ve $Q \in C_0$ şeklinde ifade edilir.

Tanımlama 3.1.1.11

$n \times n$ boyuta sahip bir Q matrisinin elemanları aşağıdaki eşitsizliği sağlıyorsa, bu durumda Q matrisi, kesin köşegen satır baskın matris olarak adlandırılır.

$$q_{ii} > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |q_{ij}|,\ (i = 1, \ldots, n)$$

Tanımlama 3.1.1.12

$n \times n$ boyuta sahip bir Q matrisinin elemanları aşağıdaki eşitsizliği sağlıyorsa, bu durumda Q matrisi, köşegen satır baskın matris olarak adlandırılır.

$$q_{ii} \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |q_{ij}|,\ (i = 1, \ldots, n)$$

Tanımlama 3.1.1.13

$n \times n$ boyuta sahip bir Q matrisinin elemanları aşağıdaki eşitsizliği sağlıyorsa, bu durumda Q matrisi, kesin köşegen sütun baskın matris olarak adlandırılır.

$$q_{ii} > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |q_{ji}|, \ (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Tanımlama 3.1.1.14

$n \times n$ boyuta sahip bir Q matrisinin elemanları aşağıdaki eşitsizliği sağlıyorsa, bu durumda Q matrisi, köşegen sütun baskın matris olarak adlandırılır.

$$q_{ii} \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |q_{ji}|, \ (i = 1, 2, \ldots, n)$$

3.2. AKTİVASYON FONKSİYONLARI

Bir aktivasyon fonksiyonu, ağın verilerdeki karmaşık kalıpları öğrenmesine yardımcı olmak için yapay sinir ağına eklenen bir fonksiyondur. Beynimizde bulunan nöron temelli bir modelle karşılaştırıldığında, aktivasyon fonksiyonu bir sonraki nörona neyin gönderileceğine karar verir. Bir önceki hücreden gelen çıkış sinyalini alır ve onu bir sonraki hücreye girdi olarak alınabilecek bir forma dönüştürür. Aktivasyon fonksiyonunun en önemli özelliği doğruluğu arttırmak için sonuçlara daha iyi uyması amacıyla sinir ağına doğrusal olmayan ifade yeteneği kazandırmaktır. Farklı aktivasyon fonksiyonlarının farklı sinir ağlarında farklı performansları vardır. Bu bölümde, genel olarak kullanılan aktivasyon fonksiyonları verilecektir.

3.2.1. Sınırlı Aktivasyon Fonksiyonları:

$z_i(x)$ bir aktivasyon fonksiyonu ve β_i, pozitif sabitler olmak üzere, $z_i(x)$ aktivasyon fonksiyonu aşağıdaki koşulu sağlıyor ise,

$$|z_i(x)| \leq \beta_i, \quad i = 1,2,...,n$$

$z_i(x)$ fonksiyonu sınırlıdır ve bu fonksiyonları içeren küme $z \in \mathscr{B}$ şeklinde ifade edilir.

3.2.2. Sürekli Artan, Türevi Sınırlı Aktivasyon Fonksiyonları:

$z_i(x)$ bir aktivasyon fonksiyonu, $\forall x, y \in R$ iken $x \neq y$ ve $\int_i$ pozitif sabitler olmak üzere, $z_i(x)$ aktivasyon fonksiyonu aşağıdaki koşulu sağlıyor ise,

$$0 < \frac{z_i(x) - z_i(y)}{x - y} < \int_i, \quad i = 1,2,...,n,$$

$z_i(x)$ sürekli artan, türevi sınırlı bir aktivasyon fonksiyonudur ve yukarıdaki koşula uyan aktivasyon fonksiyonlarının olduğu küme $z \in \mathscr{S}$ şeklinde ifade edilir. Bu tipteki aktivasyon fonksiyonlarının sürekli artan bir özelliğe sahip olması fazlasıyla sınırlayıcı bir durumdur. Yapay sinir ağlarının kararlılık analizinde kullanılacak aktivasyon fonksiyonlarının kümesini geniş tutmak avantaj sağlamaktadır. Daha geniş bir kümeye sahip olan aktivasyon fonksiyonu bir sonraki tanımda verilecektir.

3.2.3. Azalmayan Türevi Sınırlı Aktivasyon Fonksiyonları:

Burada $\forall x, y \in R$ iken $x \neq y$, μ_i pozitif sabitler ve $z_i(x)$ bir aktivasyon fonksiyonu olmak üzere, bu aktivasyon fonksiyonu aşağıdaki koşulu sağlıyor ise,

$$0 \leq \frac{z_i(x) - z_i(y)}{x - y} < \mu_i, \quad i = 1,2,...,n,$$

$z_i(x)$ azalmayan, türevi sınırlı bir aktivasyon fonksiyonudur ve yukarıdaki koşula uyan aktivasyon fonksiyonlarının olduğu küme $z \in \mathscr{K}$ ile ifade edilir. Burada $\mathscr{K}$ sınıfı, bir önceki tanımda verilen $\mathscr{S}$ sınıfından daha geniş bir kümedir çünkü daha fazla aktivasyon fonksiyonu içermektedir. Fakat buna rağmen $\mathscr{K}$ sınıfı monoton artandır. Bu kümedeki aktivasyon fonksiyonları artıyor olmasının yanında kesin olarak azalmayan fonksiyonlardır, bu da, aktivasyon fonksiyonlarının türevlerinin sıfır ya da pozitif olabileceği anlamına gelmektedir.

3.2.4. Lipschitz Aktivasyon Fonksiyonları

Burada $\forall x, y \in R$ iken $x \neq y$, l_i pozitif sabitler ve $z_i(x)$ bir aktivasyon fonksiyonu olmak üzere, bu aktivasyon fonksiyonu aşağıdaki koşulu sağlıyor ise,

$$|z_i(x) - z_i(y)| \leq l_i|x-y|, \;\; i = 1,2,...,n,$$

$z_i(x)$ Lipschitz aktivasyon fonksiyonudur ve bu fonksiyonların olduğu küme $z \in \mathscr{L}$ şeklinde ifade edilir.

3.3. GENEL KARARLILIK TEOREMLERİ

Kararlılık, denge noktasına yeterince yakın başlangıç değerlerine sahip diferansiyel denklemlerin çözümlerinin gelecekte belirsiz miktarlarda birbirine yakın kalmasını garanti edebilme özelliğidir. Kararlılık teorisindeki ana fikirlerden biri, bir yörüngenin bozulmalar altındaki nitel davranışının, yörüngenin yakınındaki sistemin doğrusallaştırılması kullanılarak analiz edilebilmesidir. Bu tez çalışmasında, lineer olmayan dinamik sistemler olarak modellenebilen yapay sinir ağlarının kararlılık analizinde kullanacağımız bazı kararlılık tanımları ve teoremleri verilecektir.

3.3.1. Denge Noktası

$\dot{x}_i(t)$ lineer olmayan dinamik sistemi aşağıdaki gibi tanımlanıyor ise,

$$\dot{x}_i(t) = z_i(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)), \;\; i = 1,2,...,n$$

$z(x(t))$ fonksiyonu için $z(0) = 0$ ifadesinin sağlandığını varsaydığımız durumda yukarıdaki lineer olmayan dinamik sistem $\dot{x}(t) = z(x(t))$ şeklinde ifade edilebilir. $z(x^*) = 0$ eşitliğini gerçekleyen x^* sabit vektörü yukarıda verilen lineer olmayan dinamik sistem için denge noktasıdır.

3.3.2. Robust Kararlılık

Yapay sinir ağlarında, sistem modeline zaman gecikmelerinin eklenmesi, kararlılık analizi yapılırken daha doğru sonuçlar elde edilmesini garanti eder. Kararlılık analizi yapılırken, yapay sinir ağlarının, zaman gecikmelerinden farklı olarak, sapmalardan, dış etkenlerden ya da modelden kaynaklanan hatalardan etkilenmemesi istenir. Bu sapmalar, kararlı olması istenen ağın dinamik davranış özelliklerini olumsuz yönde etkileyebilir. Dolayısıyla zaman gecikmesi içeren yapay sinir ağlarının robust kararlı olması yani hiçbir sapmadan etkilenmemesi sistem analizi için en iyi sonuçları elde etmemizi sağlar. Yapay sinir ağının ara bağlantı matrislerinin sınırlandırılması ile gerçekleştirilen kararlılık analizi robust kararlılık analizi olarak ifade edilir.

3.3.3. Lyapunov Kararlılık Teoremi

Lyapunov Kararlılık :

1892'de Rus akademisyen Aleksandr Mihayloviç Lyapunov, "A general task about the stability of motion" başlıklı doktora tezinde modern kararlılık teorisini oluşturmuştur. Lyapunov'un teknikleri, uzaydaki hareketin incelenmesi, teknolojik cihazlar, otomatik sistemler, mekanikteki problemler, biyomedikal problemler, çevre çalışmaları, davranış bilimi ve ekonomisi ve diğer alanlarda başarıyla uygulanmıştır. Bu teknikler, herhangi bir doğrusal olmayan veya doğrusal dinamik sistemdeki denge noktalarının veya durumlarının kararlılık analizini elde etmemize yardımcı olmaktadır. Lyapunov yöntemleri, Lyapunov'un dolaylı ve doğrudan yöntemleri olarak ikiye ayrılır. Lyapunov'un dolaylı yöntemi sistem matrislerinin özdeğerlerine bakılarak sistemin kararlılığı hakkında bilgi sahibi olmamızı sağlar yani burada sistemin çözümüne ihtiyaç vardır. Fakat doğrusal olmayan sistemlerin çözümünü bulmak zor olabilir ya da her zaman mümkün olmayabilir. Lyapunov'un doğrudan yönteminde ise doğrusal olmayan sistemlerin kararlılık analizi için, sisteme ait pozitif bir enerji fonksiyonu tanımlanır, bu fonksiyon Lyapunov fonksiyonu olarak adlandırılır ve sistemin denge noktasının kararlılığı ile ilgili bir sonuç çıkarmak için, tanımlanan Lyapunov fonksiyonunun zamana bağlı türevi incelenir. Bu yöntem sisteme ait diferansiyel denklemleri çözmeden sistemin kararlılığı hakkında sonuç elde etmemizi sağlar.

Lyapunov'un Dolaylı Yöntemi :

$\dot{x}(t) = z(x(t))$ sistemine ilişkin $x^* = 0$ denge noktası olmak üzere. Verilen herhangi bir $\varepsilon > 0$ için

$$||x(0)|| < \delta \ \Rightarrow \ ||x(t)|| < \varepsilon, \ \forall t \geq 0$$

eşitsizliğini gerektirecek şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ elde edebiliyorsak $x^* = 0$ denge noktası Lyapunov anlamında kararlıdır.

Eğer Lyapunov anlamında kararlılık sağlanıyorsa ve δ, aşağıdaki eşitsizliği gerektirecek şekilde elde edilebiliyorsa denge noktası asimptotik kararlıdır.

$$||x(0)|| < \delta \ \Rightarrow \ \lim_{t \to \infty} x(t) = 0$$

Ayrıca, $x^* = 0$ denge noktası yukarıdaki iki koşulu da sağlamıyor ise kararsızdır.

Lyapunov'un Doğrudan Yöntemi :

$\dot{x}(t) = z(x(t))$ lineer olmayan dinamik sistemini ele alalım. Bu dinamik sistem için $z(0) = 0$ olduğu durumda $x^* = 0$ denge noktası olsun. $V(x(t)) : R^n \to R$ bağıntısı pozitif, sürekli, türevlenebilir Lyapunov fonksiyonu olarak seçilsin. Lyapunov fonksiyonu olarak adlandırdığımız $V(x(t))$ fonksiyonunun zamana bağlı türevini yazacak olursak aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

$$\dot{V}(x(t)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(x(t))}{\partial x_i(t)} \dot{x}_i(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(x(t))}{\partial x_i(t)} z_i(x(t)) = \frac{\partial V(x(t))}{\partial x(t)} z(x(t))$$

Eğer, yukarıda tanımladığımız Lyapunov fonksiyonu için $V(0) = 0$ ve $\forall x(t) \neq 0$ olduğu durumda $V(x(t))$ fonksiyonu pozitif bir fonksiyon olma koşulunu sağlıyor ise,

- $\forall x(t) \in R^n$ için $\dot{V}(x(t)) \leq 0$ olduğunda, denge noktası kararlıdır.
- $\forall x(t) \neq 0$ için $\dot{V}(x(t)) < 0$ olduğunda, denge noktası asimptotik kararlıdır.
- $\forall x(t) \neq 0$ için $\dot{V}(x(t)) > 0$ olduğunda, denge noktası kararsızdır.
- $\forall x(t) \neq 0$ için $\dot{V}(x(t)) < 0$ durumuna ek olarak, eğer bu Lyapunov fonksiyonu $||x(t)|| \to \infty$ iken $V(x(t)) \to \infty$ koşulunu sağlıyorsa, yani radyal sınırsız ise, denge noktası global asimptotik kararlıdır.

3.3.4. Hurwitz Kararlılık Teoremi

$\dot{x}(t) = z(x(t))$ lineer olmayan dinamik sistemini ele alalım ve $x^* = 0$ bu sistem için bir denge noktası olmak üzere; $x^* = 0$ yakınında, lineer olmayan dinamik sistem $\dot{x}(t) = z(x(t))$'nin lineerleştirilmiş hali aşağıdaki gibi modellenir:

$$A = \left.\frac{\partial z(x)}{\partial x}\right|_{x=0}$$

D matrisi, $\dot{x}(t) = z(x(t))$ olarak verilen sistemin Jacobian matrisi şeklinde adlandırılır.

D matrisinin bütün özdeğerlerinin reel kısmı sıfır ya da negatif olma koşulunu sağlıyorsa, yani matematiksel olarak ifade edersek, $Re(\lambda_i) \leq 0$ olması durumunda $\dot{x}(t) = z(x(t))$ dinamik sistem için denge noktası olan orijin, kararlıdır.

Ek olarak, D matrisinin tüm özdeğerlerinin reel kısmı negatif ise, yani $Re(\lambda_i) < 0$ olması durumunda dinamik sistem $\dot{x}(t) = z(x(t))$ için denge noktası olan orijin, asimptotik kararlıdır.Bu sisteminin denge noktasının asimptotik kararlı olması durumunda, D matrisi kararlılık matrisi ya da Hurwitz matrisi olarak adlandırılır.

D matrisinin, reel kısmı pozitif olan, yani $Re(\lambda_i) > 0$ koşulunu sağlayan en az bir özdeğerinin bulunması durumunda, denge noktası kararsızdır.

Lyapunov'un Doğrudan Yöntemi ve Hurwitz Kararlılık Teoremi denge noktasının asimptotik kararlılığı için aynı sonucunu ifade eder. Verilen iki farklı teorem arasındaki ilişkiyi görmek için bir Lyapunov fonksiyonu seçelim.

$$V(x) = x^T H x$$

Yukarıda verilen H matrisi reel değerli, simetrik ve pozitif tanımlı olsun. Bu durumda $V(x)$ fonksiyonunun türevi aşağıdaki formda verilebilir.

$$V(x) = x^T [HD + D^T H] x = -x^T Q x$$

Simetrik Q matrisinin tanımı aşağıda verildiği gibi yazılabilir.

$$-Q = HD + D^T H$$

Ayrıca, her Q pozitif matris için yukarıdaki denklemi gerçekleyen pozitif H matrisi var ise, burada D matrisine, kararlılık matrisi denir. Q matrisinin pozitif olması durumunda D matrisinin bütün özdeğerlerinin reel kısımları negatiftir ve Lyapunov kararlılık teoreminin ışığında $\dot{x}(t) = g(x(t))$ sisteminin orijininin asimptotik kararlı olduğunu ifade edebiliriz.

LaSalle Değişmezlik İlkesi, Lyapunov kararlılık teoreminin genel bir halidir ve denge noktasının global ve lokal asimptotik kararlılık koşulları ile ilgilenir.

3.3.5. LaSalle Değişmezlik İlkesi

$\dot{x}(t) = z(x(t))$ lineer olmayan dinamik sistemini ele alalım ve $x^* = 0$ bu sistemin denge noktası olmak üzere, $V(x(t)) : \Phi \to R$ bağıntısı orijin yakınındaki Φ kümesi üzerinde tanımlanan pozitif tanımlı ve türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Aynı zamanda Φ kümesinin içerisinde $\dot{V}(x(t)) \leq 0$ ifadesi gerçeklensin. Bu durumda, aşağıdaki gibi bir S kümesi tanımlayalım.

$$S = \{x(t) \in \Phi \mid \dot{V}(x(t)) = 0\}$$

Varsayalım ki, denge noktası haricinde hiçbir çözüm S kümesi içinde sonsuza kadar kalamaz. Bu durumda, orijin, yani denge noktası asimptotik kararlıdır.

Yine dinamik sistem $\dot{x}(t) = z(x(t))$ için $x^* = 0$ denge noktası ve $V(x(t)) : R^n \rightarrow R$ bağıntısı pozitif, sürekli, türevlenebilir aynı zamanda da radyal sınırsız bir fonksiyon olma koşulunu sağlasın. Aynı zamanda, $\dot{V}(x(t)) \leq 0$ koşulu gerçeklensin. Bu durumda, aşağıda verilen S kümesini inceleyelim.

$$S = \{x(t) \in R^n \mid \dot{V}(x(t)) = 0\}$$

Varsayalım ki, denge noktası haricinde hiçbir çözüm S kümesi içerisinde sonsuza dek kalamaz. Bu durum gerçeklendiğinde, orijin, yani denge noktası global asimptotik kararlıdır.

LaSalle Değişmezlik İlkesi'nin Lyapunov teoremi ile farkı, LaSalle İlkesi için $V(x(t))$ fonksiyonunun pozitif tanımlı bir fonksiyon olması gerekliliği yoktur. Ayrıca, pozitif bir fonksiyon için radyal sınırsız olma koşulunu kontrol etmek daha kolay olmaktadır ve her pozitif fonksiyonun radyal sınırsız olduğunu söyleyemeyiz. Aşağıda verilen fonksiyonu örnek gösterirsek,

$$V(x(t)) = (x_1(t) - x_2(t))^2$$

$x_1(t) = x_2(t)$ için $V(x(t)) = 0$ olur. Dolayısıyla $||x(t)|| \rightarrow \infty$ gerçeklenmesine karşın, $V(x(t)) \rightarrow \infty$ sağlanmaz.

3.4. COHEN-GROSSBERG YAPAY SİNİR AĞLARI

Bu tezde Hopfield tarafından geliştirilen yapay sinir ağlarının robust kararlılık analizi yapılacak ve ardından Cohen-Grossberg yapay sinir ağı ile kıyaslanacaktır. Grossberg ile Cohen'in 1983'te geliştirtiği ve günümüzde mühendislik problemlerinin çözümünde sıklıkla kullanılan Cohen-Grossberg yapay sinir ağlarının diferansiyel denklemi aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = b_i(x_i(t))\Big[-c_i(x_i(t)) + \sum_{j=1}^{n} d_{ij} z_j(x_j(t)) + u_i\Big], \; i = 1,2,...,n$$

Burada, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$, i nöronunun durum vektörü, $c_i(x_i(t))$ davranış fonksiyonu ve $b_i(x_i(t))$ kuvvetlendirici fonksiyondur, (d_{ij}) nöronların ağırlık katsayılarından oluşan matris,

$z_j(x_j(t))$ aktivasyon fonksiyonu ve $u = (u_1, ..., u_n)^T$ de giriş vektörüdür. Cohen-Grossberg yapay sinir ağının yukarıda verilen temel modeli zaman gecikmesi içermemektedir. Fakat dinamik sistemin gerçeklenmesi sırasında zaman gecikmeleri oluştuğu bilinmektedir. Dolayısıyla bu temel modele, osilasyonlar ve gecikmeler göz önünde bulundurularak daha doğru kararlılık sonuçları elde etmek için tek boyutlu, vektörel zaman gecikmesi eklenmiştir ve bu modelin diferansiyel denklemi aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = b_i(x_i(t))\Big[-c_i(x_i(t)) + \sum_{j=1}^{n} d_{ij} z_j(x_j(t-\tau_j)) + u_i\Big], \ i = 1, 2, ..., n$$

Yukarıdaki modelde τ_j ifadesi, $j = 1, 2, ..., n$ için vektörel zaman gecikmelerini göstermektedir. Bu modelin geliştirilmiş hali olarak zaman gecikmesinin iki boyutlu bir matris ile temsil edildiği çoklu zaman gecikmesi içeren Cohen-Grossberg yapay sinir ağı modeli oluşturulmuştur ve diferansiyel denklemi aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = b_i(x_i(t))\Big[-c_i(x_i(t)) + \sum_{j=1}^{n} d_{ij} z_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^{n} e_{ij} z_j(x_j(t-\tau_{ij})) + u_i\Big], \ i = 1, 2, ..., n$$

Burada, τ_{ij}, i ve j nöronları arasında meydana gelen gecikmeyi ifade eder.

4. DİNAMİK YAPAY SİNİR AĞLARINDA ROBUST KARARLILIK ANALİZİ

Bu bölümde, tez kapsamında kullanacağımız Hopfield yapay sinir ağı modeli tanımlanacak, parametre belirsizliği belli bir aralıkta tanımlanmış ara bağlantı matrisleri için yeni üst sınır normu türetilecek ve bu yapay sinir ağı modeli için sinir ağının denge noktasının varlık, teklik analizi yapılacaktır. Sonrasında yeni ve modifiye edilmiş bir Lyapunov fonksiyonu tanımlanacak ve türetilen yeni üst sınır normu kullanılarak, çoklu zaman gecikmesi içeren yapay sinir sisteminin denge noktasının global robust kararlılık analizi için yeterli koşullar elde edilecektir.

4.1. HOPFİELD YAPAY SİNİR AĞI MODELİ

John Hopfield tarafından, 1980'lerde ortaya atılan dinamik yapay sinir ağı modeli zamanla gelişmiştir. Özellikle, yapay sinir ağı modellerinin dinamik denklemlerine zaman gecikmeleri dahil edildiğinde, gecikme parametrelerini içeren sinir ağlarının kararlılık analizi önemli ilerlemeler kaydetmiştir. Bu nedenle, zaman gecikmeli sinir ağlarının bazı temel modellerini kısaca gözden geçirmek önemlidir.

Zaman gecikmeli Hopfield yapay sinir ağının matematiksel modeli en basit haliyle aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} d_{ij} f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^{n} e_{ij} f_j(x_j(t-\tau)) + u_i, \; i = 1,2,...,n \tag{4.1}$$

Yukarıda verilen denklem için, n nöron sayısını, $x_i(t)$, t anında i. nöronun durum değişkenini, $f_i(\cdot)$, i. nöronun durumu ve çıktısı arasındaki ilişkiyi tanımlayan lineer olmayan aktivasyon fonksiyonunu, τ sabit gecikme parametresini, d_{ij}, t zamanında ve e_{ij} de $t-\tau$ zamanında j ve i nöronları arasındaki bağlantı katsayısını, $c_i > 0$ değeri i nöronunun yakınsama hızını, u_i ise i. nörona ait sabit girişi ifade etmektedir.

(4.1) yapay sinir sistemi sabit bir sayı olan τ, zaman gecikme parametresine sahiptir. Tek boyutlu τ_j zaman gecikmeli Hopfield yapay sinir ağı ise aşağıdaki matematiksel model ile tanımlanır:

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} d_{ij} f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^{n} e_{ij} f_j(x_j(t-\tau_j)) + u_i, \ i = 1,2,...,n \tag{4.2}$$

Burada τ_j, $(j = 1,\ldots,n)$ sınırlı sabit gecikmelerdir ve diğer gösterimler (4.1) diferansiyel denklemindekilerle aynıdır. Aslında, (4.1) Hopfield sinir ağı modeli, (4.2) modelinin özel bir durumudur. (4.2) sinir sistemi matris-vektör formunda aşağıda verilen şekilde yazılabilir:

$$\dot{x}(t) = -Cx(t) + Df(x(t)) + Ef(x(t-\tau)) + u \tag{4.3}$$

Yukarıda verilen denklem için $x(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))^T \in R^n$ durum vektörü; $C = diag(c_i > 0)_{n\times n}$ diyagonal, pozitif bir matris; $D = (d_{ij})_{n\times n}$ zaman gecikmesi içermeyen matris, $E = (e_{ij})_{n\times n}$ zaman gecikmesi içeren matris, $u = (u_1, u_2, ..., u_n)^T$, sabit bir giriş vektörü ve $f_i(x_i(t))$ aktivasyon fonksiyonlarıdır.

Çoklu gecikme içeren zaman gecikmeli bir Hopfield yapay sinir ağı, aşağıdaki matematiksel model ile tanımlanır:

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} d_{ij} f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^{n} e_{ij} f_j(x_j(t-\tau_{ij})) + u_i, \ i = 1,2,...,n \tag{4.4}$$

Burada ,τ_{ij} matrisi, j ile i nöronları arasındaki zaman gecikmesini ifade eder ve diğer gösterimler (4.1) ve (4.2) ile aynıdır. Açıkça, (4.1), (4.2) ile verilen Hopfield yapay sinir ağ modelleri (4.4) ile numaralandırılan modelin özel durumudur.

Yapay sinir ağlarının gecikmesiz ve gecikmeli ara bağlantı matrislerinin elemanlarının değerlerindeki sapmalara karşı dayanıklı, kararlı bir sinir ağı kullanmak istediğimizde, bu matrisler için kesin parametre aralıklarını bilmemiz gerekir. Bu sorunu formüle etmeye yönelik standart bir yaklaşım, D, E ve $C = diag(c_i > 0)$ sistem matrislerini aralıklandırmaktır.

$$C_I := \{0 \prec \underline{C} \preceq C \preceq \overline{C},\ 0 < \underline{c}_i \leq c_i \leq \overline{c}_i, i = 1,2,...,n\}$$

$$D_I := \{D = (d_{ij}) : \underline{D} \preceq D \preceq \overline{D},\ \underline{d}_{ij} \leq d_{ij} \leq \overline{d}_{ij}, i = 1,2,...,n\} \tag{4.5}$$

$$E_I := \{E = (e_{ij}) : \underline{E} \preceq E \preceq \overline{E},\ \underline{e}_{ij} \leq e_{ij} \leq \overline{e}_{ij}, i = 1,2,...,n\}$$

Gecikmeli sinir ağlarının uygun bir robust kararlılık analizini gerçekleştirmek amacıyla, ya D ve E matrislerinin her elemanı için pozitif üst sınırları ya da D ve E matris normlarının üst sınırlarını belirlememiz gerekir. (4.4) yapay sinir ağı modelinde E matrisine uygulanan kısıtlama koşulları, genellikle D matrisine dayatılan kısıtlama koşullarından daha kısıtlayıcıdır. E matrisinin e_{ij} öğelerine karşılık gelen zaman gecikmeli $f_j(x_j(t-\tau_{ij}))$ aktivasyon fonksiyonları ile çarpılması gerçeğinden dolayı, sistem (4.4) için önerilen robust kararlılık koşullarının, (4.5) ile tanımlanan aralık içinde esas olarak e_{ij}'nin maksimum mutlak değerini içerdiğini gözlemlenir. Bu nedenle, sinir sistemi (4.4)'ün çeşitli alternatif robust kararlılık koşullarını elde etmek amacıyla, sınırlandırılmış D matrisinin normu için yeni ve alternatif üst sınırlar türetmek çok önemlidir. Diskret ya da sabit zaman gecikmesi kullanılan modellerde aynı şekilde E matrisinin normu için de yeni, alternatif üst sınırlar türetmek çok önemli olmaktadır.

Yukarıdaki bilgiler doğrultusunda yapay sinir ağlarında robust kararlılık tanımını aşağıdaki gibi ifade edilebilmektedir:

Tanımlama 4.1.1

(4.4) ile numaralandırılan dinamik sinir sistemi modelinin $x^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)^T$ denge noktası, $D \in D_I$, $E \in E_I$ ve $C \in C_I$ için global asimptotik kararlı bir denge noktası olma koşulunu sağlıyorsa, (4.4) dinamik sinir sistemi global asimptotik robust kararlı denir.

Tanımlama 4.1.2

$H(x) \in C^0$ ve tersi alınabilir bir $H : R^n \to R^n$ tanımlı H operatörünün örten olma koşulunu sağlaması için aşağıdaki koşulun gerçeklenmesi yeterlidir:

$$||x|| \to \infty \quad \text{olduğunda} \quad ||H(x)|| \to \infty$$

Tanımlama 4.1.3

$H : R^n \to R^n$ ile tanımlanmış H operatörü, $H(x) \in C^0$ koşulunu sağlıyorsa ve $\forall x \neq y$ için $H(x) \neq H(y)$ gerçekleniyorsa H'nin tersi vardır ve $H^{-1} \in C^0$'dır.

Tanımlama 4.1.4

$H : R^n \to R^n$ tanımlı $H(x) \in C^0$ olan bir H operatörünün kendi üzerinde homeomorfizm olma koşulunu sağlaması için H operatörünün 1-1 ve örten olması, aynı zamanda tersi olan H^{-1} operatörünün de $H^{-1} \in C^0$ olması gerekir.

Şimdi, $\mathscr{L}$ sınıfına ait aktivasyon fonksiyonlarının sınırsız olabileceğini biliyoruz. Literatürde, sınırsız aktivasyon fonksiyonları için, denge noktasının varlığının ve tekliğinin analizinin esas olarak aşağıdaki tanımda belirtilen homeomorfizm teoremi kullanılarak yapıldığı bilinmektedir:

Tanımlama 4.1.5

Eğer $H(x) \in C^0$ olsun,

(i) $\forall x \neq y$ iken $H(x) \neq H(y)$

(ii) $||x|| \to \infty$ iken $||H(x)|| \to \infty$

koşulları sağlanıyorsa $H(x)$ operatörü, R^n üzerinde homeomorfizmdir.

Şimdi (4.5) ile tanımlanan parametre belirsizlikleri altında $f \in \mathscr{L}$ ile (4.4) sinir sisteminin varlığı, tekliği ve robust kararlılık analizi için ihtiyaç duyduğumuz bilgileri verdik.

4.2. DENGE NOKTASININ VARLIK VE TEKLİK ANALİZİ

Tez kapsamında çalışacağımız Hopfield yapay sinir ağı modeli, Lipschitz koşullarını sağlayan sınırsız aktivasyon fonksiyonları sınıfını kullanacağından, bu yapay sinir ağı modeli için denge noktasının varlığının, tekliğinin ve global asimptotik kararlılığının kanıtını aynı anda sağlamamız gerekiyor. Bu nedenle, bu bölümde (4.4) dinamik yapay sinir sisteminin denge noktasının varlık ve teklik analizini vereceğiz. (4.4) sistemine ait denge noktasını orijine öteleyeceğiz ve benzersiz bir denge noktası olan, eşdeğer bir sinir ağı modeline dönüştüreceğiz. Şimdi $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)^T$, (4.4) sisteminin denge noktası olsun. Buradan, $z_i(t) = x_i(t) - x_i^*$ formülünü kullanarak aşağıdaki sonuçları elde ederiz.

$$\dot{z}_i(t) = -c_i z_i(t) + \sum_{j=1}^{n} d_{ij} g_j(z_j(t)) + \sum_{j=1}^{n} e_{ij} g_j(z_j(t - \tau_{ij})), \forall i \tag{4.6}$$

Burada $g_i(z_i(t)) = f_i(z_i(t) + x_i^*) - f_i(x_i^*)$. Ayrıca $f \in \mathscr{L}$ ifadesinin $g \in \mathscr{L}$ ifadesi anlamına geldiğini görebiliriz, yani, $|g_i(z_i(t))| \leq l_i |z_i(t)|$ ile $g_i(0) = 0, \forall i$.

Denge noktasının varlığı ve tekliği analizini yaparken kullanacağımız bazı tanım ve kurallar da aşağıdaki gibidir.

Tanımlama 4.2.1

D matrisi $[\underline{D}, \overline{D}]$ kümesinin bir elemanı ve E matrisi de $[\underline{E}, \overline{E}]$ kümesinin bir elemanı olsun. Ek olarak E^*, E_* D^* ve D_* olarak ifade edilen matrisler aşağıdaki şekilde verilsin:

$$D^* = \frac{1}{2}(\overline{D} + \underline{D}) \ , \quad D_* = \frac{1}{2}(\overline{D} - \underline{D})$$
$$E^* = \frac{1}{2}(\overline{E} + \underline{E}) \ , \quad E_* = \frac{1}{2}(\overline{E} - \underline{E})$$

Buradan aşağıdaki eşitsizliklere ulaşılabilir:

$$||D||_2 \leq ||D^*||_2 + ||D_*||_2$$
$$||E||_2 \leq ||E^*||_2 + ||E_*||_2$$

Kural 4.2.1 : (*Faydasicok ve Arik, 2013c*) : D matrisi reel değerli bir matris olsun ve (4.5) ile verilen aralıklarda tanımlansın. Ek olarak $D^* = \frac{1}{2}(\overline{D} + \underline{D})$ ve $D_* = \frac{1}{2}(\overline{D} - \underline{D})$ olsun. D matrisi için $\sigma_1(D)$ değeri aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$\sigma_1(D) = \sqrt{|||D^{*T}D^*| + D_*^T D_* + 2|D^{*T}|D_*||_2}$$

Bu durumda, aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$||D||_2 \leq \sigma_1(D)$$

Kural 4.2.2 : (*Cao ve Chen, 2004*) : D matrisi reel değerli bir matris olsun ve (4.5) ile verilen aralıklarda tanımlansın. Ek olarak $D^* = \frac{1}{2}(\overline{D} + \underline{D})$ ve $D_* = \frac{1}{2}(\overline{D} - \underline{D})$ olsun. D matrisi için $\sigma_2(D)$ değeri aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$\sigma_2(D) = ||D^*||_2 + ||D_*||_2$$

Bu durumda aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$||D||_2 \leq \sigma_2(D)$$

Kural 4.2.3 : (*Ensari ve Arik, 2010*): D matrisi reel değerli bir matris olsun ve (4.5) ile verilen aralıklarda tanımlansın. Ek olarak $D^* = \frac{1}{2}(\overline{D} + \underline{D})$ ve $D_* = \frac{1}{2}(\overline{D} - \underline{D})$ olsun. D matrisi için $\sigma_3(D)$ değeri aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\sigma_3(D) = \sqrt{||D^*||_2^2 + ||D_*||_2^2 + 2||D_*^T|D^*|||_2}$$

Bu durumda aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$||D||_2 \leq \sigma_3(D)$$

Kural 4.2.4 : (*Singh, 2007*): D matrisi reel değerli bir matris olsun ve (4.5) ile verilen aralıklarda tanımlansın. D matrisi için $\hat{d}_{ij} = max\{|\underline{d}_{ij}|, |\overline{d}_{ij}|\}$, $(i, j = 1, 2, ..., n)$ olacak şekilde bir $\hat{D} = (\hat{d}_{ij})_{n\times n}$ matrisi ifade edilsin. $\hat{D}$ matrisine bağlı $\sigma_4(D)$ değeri aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\sigma_4(D) = ||\hat{D}||_2$$

Bu durumda aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$||D||_2 \leq \sigma_4(D)$$

Kural 4.2.5 : D matrisi reel değerli bir matris olsun ve (4.5) ile verilen aralıklarda tanımlansın. Ek olarak $D^* = \frac{1}{2}(\overline{D} + \underline{D})$ ve $D_* = \frac{1}{2}(\overline{D} - \underline{D})$ olsun. Bu matris için $\sigma_5(D)$ değeri aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\sigma_5(D) = \sqrt{2|||D^{*T}D^*| + D_*^T D_*||_2}$$

Bu durumda aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$||D||_2 \leq \sigma_5(D)$$

İspat : (4.5) ile verilen $\underline{d}_{ij} \leq d_{ij} \leq \overline{d}_{ij}$ için d_{ij} aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$d_{ij} = \frac{1}{2}(\overline{d}_{ij} + \underline{d}_{ij}) + \frac{1}{2}\rho_{ij}(\overline{d}_{ij} - \underline{d}_{ij}), \quad -1 \leq \rho_{ij} \leq 1, \quad i, j = 1, 2, ..., n$$

Burada $\tilde{d}_{ij} = \frac{1}{2}\rho_{ij}(\overline{d}_{ij} - \underline{d}_{ij})$ ile tanımlanan $\tilde{D} = (\tilde{d}_{ij})$ matrisi aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$D = \frac{1}{2}(\overline{D} + \underline{D}) + \tilde{D} = D^* + \tilde{D}$$

Böylece, reel değerli rastgele vektör $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ için aşağıdakiler yazılabilir.

$$x^T D^T D x = x^T (D^* + \tilde{D})^T (D^* + \tilde{D}) x = x^T (D^{*T} D^* + 2D^{*T}\tilde{D} + \tilde{D}^T\tilde{D}) x \tag{4.7}$$

Buradan,

$$2x^T D^{*T} \tilde{D} x \leq x^T (D^{*T} D^* + \tilde{D}^T \tilde{D}) x \tag{4.8}$$

yukardaki eşitsizlik elde edilebilir. Şimdi (4.6) eşitsizliğinde (4.7) yerine yazılsın.

$$\begin{aligned} x^T D^T D x &\leq 2x^T D^{*T} D^* x + 2x^T \tilde{D}^T \tilde{D} x \\ &\leq 2|x^T||D^{*T} D^*||x| + 2|x^T||\tilde{D}^T||\tilde{D}||x| \end{aligned}$$

Bildiğimiz gibi $|\tilde{d_{ij}}| \leq \frac{1}{2}(\overline{d}_{ij} - \underline{d}_{ij}),\ i,j = 1,2,...,n$ yani $|\tilde{D}| \preceq D_*$. Böylece

$$\begin{aligned} x^T D^T D x &\leq 2|x^T||D^{*T} D^*||x| + 2|x^T|D_*{}^T D_*|x| \\ &= 2|x^T|(|D^{*T} D^*| + D_*{}^T D_*)|x| \\ &\leq 2|||D^{*T} D^*| + D_*{}^T D_*||_2||x||_2^2 \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$||D||_2^2||x||_2^2 \leq 2|||D^{*T} D^*| + D_*{}^T D_*||_2||x||_2^2$$

eşitsizliği elde edilir ve bunun sonucunda aşağıdaki ifadeye ulaşılır

$$||D||_2 \leq \sqrt{2|||D^{*T} D^*| + D_*{}^T D_*||_2}$$

veya $||D||_2 \leq \sigma_5(D)$ olarak yazılabilir. Böylece, Kural 4.2.5'in ispatı tamamlanmış olur. Şimdi, $\sigma_5(D)$'nın, parametre belirsizlikleri (4.5) ile tanımlanan A matrisinin normu için yeni bir üst sınır olduğunu göstermek amacıyla aşağıdaki örneği inceleyeceğiz.

Örnek : $D \in D_I := \{D = (d_{kl})_{4\times 4} : \underline{D} \preceq D \preceq \overline{D}\}$ olduğunu biliyoruz.

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \overline{D} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Buradan da D_*, D^* ve $\hat{D}$ matrislerini elde ederiz.

$$D^* = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & -2 & 3 \end{bmatrix}, D_* = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \hat{D} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Yukarıda verilen matrisler için, Kural 4.2.1 - 4.2.4'de verdiğimiz üst sınırları hesaplayacağız.

$$\begin{aligned}
\sigma_1(D) &= \sqrt{\| |D^{*T}D^*| + 2|D^{*T}|D_* + D_*^T D_* \|_2} = 7.0885 \\
\sigma_2(D) &= \|D^*\|_2 + \|D_*\|_2 = 6.4327 \\
\sigma_3(D) &= \sqrt{\|D^*\|_2^2 + \|D_*\|_2^2 + 2\|D_*^T|D^*|\|_2} = 7.1344 \\
\sigma_4(D) &= \|\hat{D}\|_2 = 8
\end{aligned}$$

Ve $\sigma_5(D)$ için, aşağıdaki sonucu elde ederiz.

$$\sigma_5(D) = \sqrt{2\| |D^{*T}D^*| + D_*{}^T D_* \|_2} = 6.3713$$

Burada $\sigma_m(D) = min\{\sigma_1(D), \sigma_2(D), \sigma_3(D), \sigma_4(D), \sigma_5(D)\}$ olsun, bu örnek, $\sigma_5(D)$'nın (4.5) ile verilen parametre belirsizliği belli bir aralıkta tanımlanmış D matrisinin normu için yeni bir üst sınır tanımladığını kanıtlamaktadır.

Şimdi denge noktasının varlık ve teklik analizi için aşağıdaki teoremi verelim:

Teorem 4.2.1: (4.6) yapay sinir sisteminde , $g \in \mathscr{L}$ ve ağ parametreleri (4.5) ile verilen parametre belirsizliklerini sağlasın. Aşağıdaki cebirsel kriterler geçerli olacak şekilde ω, π, ς, ε, $\varkappa$, η, p_i ve q_i pozitif reel sabitleri varsa, (4.6) sinir ağının orijini, global asimptotik robust kararlı bir denge noktasıdır:

$$
\begin{aligned}
\mu_i \;=\; & 2\kappa_1 p_i \frac{c_i}{l_i} + 2\kappa_2 q_i \frac{c_i}{l_i} - \omega\kappa_1 p_i^2 - \frac{\kappa_1\xi_1(1+\varsigma\xi_6)}{\omega}\sigma_m^2(D) - \frac{\kappa_1\xi_2(1+\varsigma\xi_6)}{\omega}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\hat{d}_{ki}\hat{d}_{kj} \\
& -\frac{\kappa_1\xi_3}{\omega}(1+\frac{\xi_6}{\varsigma})\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\hat{e}_{jk}\hat{e}_{ji} - \frac{\kappa_1\xi_4}{\omega}(1+\frac{\xi_6}{\varsigma})\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\hat{e}_{jk}^2 - \frac{\kappa_1\xi_5\pi}{\omega}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\hat{d}_{ji}\hat{e}_{jk} \\
& -\frac{\kappa_1\xi_5}{\omega\pi}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\hat{d}_{jk}\hat{e}_{ji} - \kappa_2\xi_7\varepsilon\sum_{j=1}^{n} q_i\hat{d}_{ij} - \frac{\kappa_2\xi_7}{\varepsilon}\sum_{j=1}^{n} q_j\hat{d}_{ji} \\
& -\kappa_2\xi_8\varkappa q_i^2 - \frac{\kappa_2\xi_8}{\varkappa}\sigma_m^2(D) - \kappa_2\eta\sum_{j=1}^{n} q_i\hat{e}_{ij} - \frac{\kappa_2}{\eta}\sum_{j=1}^{n} q_j\hat{e}_{ji} > 0, \forall i
\end{aligned}
$$

burada $0 \leq \xi_m \leq 1, m = 1,\ldots,8,\ \xi_1+\xi_2 = \xi_3+\xi_4 = \xi_5+\xi_6 = \xi_7+\xi_8 = 1$, $\kappa_1+\kappa_2 = 1$, $0 \leq \kappa_1 \leq 1$, $0 \leq \kappa_2 \leq 1$, $\sigma_m(D) = min\{\sigma_1(D),\sigma_2(D),\sigma_3(D),\sigma_4(D),\sigma_5(D)\}$, $\hat{d}_{ij} = max\{|\underline{d}_{ij}|,|\overline{d}_{ij}|\}$ ve $\hat{e}_{ij} = max\{|\underline{e}_{ij}|,|\overline{e}_{ij}|\},\forall i,j$.

İspat : Denge noktasının varlığını ve tekliğini kanıtlamak için, (4.6) ile ilişkili aşağıdaki ifade tanımlanır:

$$H(z) = -Cz + Dg(z) + Eg(z) \tag{4.9}$$

Burada $z = (z_1,z_2,...,z_n)^T$ ve $g(z) = (g_1(z_1),\ldots,g_n(z_n))^T$. $H(z) = 0$'ın her çözümü (4.6) için bir denge noktasıdır. Bu nedenle, Kural (4.1.3)'ten, (4.6) ile tanımlanan sinir sistemi için, eğer $H(z)$ operatörü R^n üzerinde homeomorfizm ise, $z(t) = 0$ orijini benzersiz bir denge noktasıdır. $H(z)$ öperatörünün R^n üzerinde bir homeomorfizm olduğunu kanıtlamak için, $y \neq z$ olacak şekilde başka bir $y = (y_1,y_2,\ldots,y_n)^T$ vektörü seçiyoruz. Daha sonra (4.9)'da verilen $H(z)$ operatörünü aşağıda olduğu gibi ifade edebiliriz:

$$H(z) - H(y) = -C(z-y) + D(g(z)-g(y)) + E(g(z)-g(y)) \tag{4.10}$$

Eğer $g \in \mathscr{L}$ ise, o zaman, $z \neq y$ için, iki farklı durum tanımlayabiliriz: $g(z)-g(y) = 0$ veya $g(z)-g(y) \neq 0$. İlk olarak $z \neq y$ ve $g(z)-g(y) = 0$ olduğu durumda, aşağıdaki gibi ifade ederiz:

$$H(z) - H(y) = -C(z-y)$$

Burada $z \neq y$, $H(z) \neq H(y)$ ifadesinin C matrisi gibi pozitif diyagonal girdilere sahip olmasını sağlar. Şimdi $z \neq y$ ve $g(z)-g(y) \neq 0$ durumunu ele alalım. (4.10) ifadesinin iki tarafını da $2(z-y)^T(\kappa_1 P+\kappa_2 Q)\mathscr{L}$ ifadesiyle çarptığımızda sonuç aşağıda verilen şekildedir,

$$\begin{aligned}
& 2(z-y)^T(\kappa_1 P+\kappa_2 Q)\mathscr{L}(H(z)-H(y)) \\
= \;& 2\kappa_1(z-y)^T P\mathscr{L}(H(z)-H(y))+2\kappa_2(z-y)^T Q\mathscr{L}(H(z)-H(y))
\end{aligned} \tag{4.11}$$

burada $P=diag(p_i>0)$, $Q=diag(q_i>0)$ ve $\mathscr{L}=diag(l_i>0)$ olur.
Aşağıdaki eşitsizlikleri yazabiliriz:

$$\begin{aligned}
& 2(z-y)^T P\mathscr{L}(H(z)-H(y)) \\
= \;& -2(z-y)^T P\mathscr{L}C(z-y)+2(z-y)^T P\mathscr{L}D(g(z)-g(y))+2(z-y)^T P\mathscr{L}E(g(z)-g(y)) \\
= \;& -2\sum_{i=1}^{n} p_i l_i c_i (z_i-y_i)^2+2\sum_{i=1}^{n} p_i l_i (z_i-y_i)\Big(\sum_{j=1}^{n} d_{ij}(g_j(z_j)-g_j(y_j))+\sum_{j=1}^{n} e_{ij}(g_j(z_j)-g_j(y_j))\Big) \\
\leq \;& -2\sum_{i=1}^{n} p_i l_i c_i (z_i-y_i)^2+\omega\sum_{i=1}^{n} p_i^2 l_i^2 (z_i-y_i)^2 \\
& +\frac{1}{\omega}\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} d_{ij}(g_j(z_j)-g_j(y_j))+\sum_{j=1}^{n} e_{ij}(g_j(z_j)-g_j(y_j))\Big)^2 \\
= \;& -2\sum_{i=1}^{n} p_i l_i c_i (z_i-y_i)^2+\omega\sum_{i=1}^{n} p_i^2 l_i^2 (z_i-y_i)^2+\frac{1}{\omega}\Big(\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} d_{ij}(g_j(z_j)-g_j(y_j))\Big)^2 \\
& +\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} e_{ij}(g_j(z_j)-g_j(y_j))\Big)^2 \\
& +2\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} d_{ij}(g_j(z_j)-g_j(y_j))\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} e_{ij}(g_j(z_j)-g_j(y_j))\Big)\Big)
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Buradan,

$$
\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} d_{ij}(g_j(z_j)-g_j(y_j))\right)^2 = (g(z)-g(y))^T D^T D(g(z)-g(y)) \\
= \;& \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} d_{ij}d_{ik}(g_j(z_j)-g_j(y_j))(g_k(z_k)-g_k(y_k)) \\
= \;& \xi_1(g(z)-g(y))^T D^T D(g(z)-g(y)) + \xi_2 \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} d_{ij}d_{ik}(g_j(z_j)-g_j(y_j))(g_k(z_k)-g_k(y_k)) \\
\leq \;& \xi_1 ||D||_2^2 \sum_{i=1}^{n}(g_i(z_i)-g_i(y_i))^2 + \xi_2 \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} |d_{ki}||d_{kj}|(g_i(z_i)-g_i(y_i))^2 \\
\leq \;& \xi_1 ||D||_2^2 \sum_{i=1}^{n} l_i^2(z_i-y_i)^2 + \xi_2 \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} |d_{ki}||d_{kj}| l_i^2(z_i-y_i)^2 \\
\leq \;& \xi_1 \sigma_m^2(D) \sum_{i=1}^{n} l_i^2(z_i-y_i)^2 + \xi_2 \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \hat{d}_{ki}\hat{d}_{kj} l_i^2(z_i-y_i)^2 \qquad (4.13)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} e_{ij}(g_j(z_j)-g_j(y_j))\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} e_{ij}e_{ik}(g_j(z_j)-g_j(y_j))(g_k(z_k)-g_k(y_k)) \\
= \;& \xi_3 \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} e_{ij}e_{ik}(g_j(z_j)-g_j(y_j))(g_k(z_k)-g_k(y_k)) \\
& +\xi_4 \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} e_{ij}e_{ik}(g_j(z_j)-g_j(y_j))(g_k(z_k)-g_k(y_k)) \\
\leq \;& \frac{\xi_3}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(|e_{ij}||e_{ik}|(g_j(z_j)-g_j(y_j))^2 + |e_{ij}||e_{ik}|(g_k(z_k)-g_k(y_k))^2) \\
& +\frac{\xi_4}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(e_{ij}^2(g_k(z_k)-g_k(y_k))^2 + e_{ik}^2(g_j(z_j)-g_j(y_j))^2) \\
= \;& \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_3|e_{kj}||e_{ki}| + \xi_4 e_{jk}^2)(g_i(z_i)-g_i(y_i))^2 \\
\leq \;& \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_3\hat{e}_{kj}\hat{e}_{ki} + \xi_4\hat{e}_{jk}^2) l_i^2(z_i-y_i)^2 \qquad (4.14)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& 2\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} d_{ij}(g_j(z_j)-g_j(y_j))\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} e_{ij}(g_j(z_j)-g_j(y_j))\Big) \\
= \; & 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} d_{ij}e_{ik}(g_j(z_j)-g_j(y_j))(g_k(z_k)-g_k(y_k)) \\
\leq \; & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(\pi|d_{ij}e_{ik}|(g_j(z_j)-g_j(y_j))^2+\frac{1}{\pi}|d_{ij}e_{ik}|(g_k(z_k)-g_k(y_k))^2) \\
= \; & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(\pi|d_{ji}||e_{jk}|+\frac{1}{\pi}|d_{ij}||e_{ki}|)(g_i(z_i)-g_i(y_i))^2 \\
\leq \; & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(\pi\hat{d}_{ji}\hat{e}_{jk}+\frac{1}{\pi}\hat{d}_{ij}\hat{e}_{ki})l_i^2(z_i-y_i)^2 \qquad (4.15)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
& 2\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} d_{ij}(g_j(z_j)-g_j(y_j))\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} e_{ij}(g_j(z_j)-g_j(y_j))\Big) \\
\leq \; & \varsigma\Big(\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} d_{ij}(g_j(z_j)-g_j(y_j))\Big)^2+\frac{1}{\varsigma}\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} e_{ij}(g_j(z_j)-g_j(y_j))\Big)^2 \qquad (4.16)
\end{aligned}
$$

(4.16) ve (4.15) birleştirildiğinde, aşağıdaki ifadeyi elde ederiz

$$
\begin{aligned}
& 2\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} d_{ij}(g_j(z_j)-g_j(y_j))\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} e_{ij}(g_j(z_j)-g_j(y_j))\Big) \\
= \; & 2\xi_5\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} d_{ij}(g_j(z_j)-g_j(y_j))\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} e_{ij}(g_j(z_j)-g_j(y_j))\Big) \\
& +2\xi_6\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} d_{ij}(g_j(z_j)-g_j(y_j))\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} e_{ij}(g_j(z_j)-g_j(y_j))\Big) \\
\leq \; & \xi_5\pi\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\hat{d}_{ji}\hat{e}_{jk}l_i^2(z_i-y_i)^2+\frac{\xi_5}{\pi}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\hat{d}_{ij}\hat{e}_{ki}l_i^2(z_i-y_i)^2 \\
& +\xi_6\varsigma\Big(\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} d_{ij}(g_j(z_j)-g_j(y_j))\Big)^2+\frac{\xi_6}{\varsigma}\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} e_{ij}(g_j(z_j)-g_j(y_j))\Big)^2 \qquad (4.17)
\end{aligned}
$$

(4.17) ifadesinde (4.13) ve (4.14) eşitsizliklerini kullanırsak, aşağıdaki sonuca ulaşırız

$$
\begin{aligned}
& 2\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} d_{ij}(g_j(z_j)-g_j(y_j))\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} e_{ij}(g_j(z_j)-g_j(y_j))\Big) \\
= \;& 2\xi_5\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} d_{ij}(g_j(z_j)-g_j(y_j))\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} e_{ij}(g_j(z_j)-g_j(y_j))\Big) \\
& +2\xi_6\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} d_{ij}(g_j(z_j)-g_j(y_j))\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} e_{ij}(g_j(z_j)-g_j(y_j))\Big) \\
\leq \;& \xi_5\pi\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\hat{d}_{ji}\hat{e}_{jk}l_i^2(z_i-y_i)^2+\frac{\xi_5}{\pi}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\hat{d}_{jk}\hat{e}_{ji}l_i^2(z_i-y_i)^2 \\
& +\varsigma\xi_6\xi_1\sigma_m^2(D)\sum_{i=1}^{n}l_i^2(z_i-y_i)^2+\varsigma\xi_6\xi_2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\hat{d}_{ki}\hat{d}_{kj}l_i^2(z_i-y_i)^2 \\
& +\frac{\xi_6\xi_3}{\varsigma}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\hat{e}_{jk}\hat{e}_{ji}l_i^2(z_i-y_i)^2+\frac{\xi_6\xi_4}{\varsigma}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\hat{e}_{jk}^2l_i^2(z_i-y_i)^2 \qquad (4.18)
\end{aligned}
$$

Diğer yandan eşitsizlikler aşağıda verildiği gibi elde edilebilir,

$$
\begin{aligned}
& 2(z-y)^TQ\mathscr{L}(H(z)-H(y)) \\
= \;& -2(z-y)^TQ\mathscr{L}C(z-y)+2(z-y)^TQ\mathscr{L}D(g(z)-g(y))+2(z-y)^TQ\mathscr{L}E(g(z)-g(y)) \\
= \;& -2\sum_{i=1}^{n}q_il_ic_i(z_i-y_i)^2+2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}q_il_i(z_i-y_i)d_{ij}(g_j(z_j)-g_j(y_j)) \\
& +\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}q_il_i(z_i-y_i)e_{ij}(g_j(z_j)-g_j(y_j)) \qquad (4.19)
\end{aligned}
$$

Buradan,

$$
\begin{aligned}
& 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}q_il_id_{ij}(z_i-y_i)(g_j(z_j)-g_j(y_j)) \\
\leq \;& 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}q_il_i|d_{ij}||z_i-y_i||g_j(z_j)-g_j(y_j)| \\
\leq \;& \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\varepsilon q_i|d_{ij}|l_i^2(z_i-y_i)^2+\frac{1}{\varepsilon}q_i|d_{ij}|(g_j(z_j)-g_j(y_j))^2) \\
\leq \;& \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\varepsilon q_i|d_{ij}|l_i^2(z_i-y_i)^2+\frac{1}{\varepsilon}q_i|d_{ij}|l_j^2(z_j-y_j)^2) \\
= \;& \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\varepsilon q_i|d_{ij}|+\frac{1}{\varepsilon}q_j|d_{ji}|)l_i^2(z_i-y_i)^2 \\
\leq \;& \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\varepsilon q_i\hat{d}_{ij}+\frac{1}{\varepsilon}q_j\hat{d}_{ji})l_i^2(z_i-y_i)^2 \qquad (4.20)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
& 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_i l_i d_{ij}(z_i-y_i)(g_j(z_j)-g_j(y_j)) \\
\leq\ & \varkappa\sum_{i=1}^{n} q_i^2 l_i^2 (z_i-y_i)^2+\frac{1}{\varkappa}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} d_{ij}(g_j(z_j)-g_j(y_j))\right)^2 \\
=\ & \varkappa\sum_{i=1}^{n} q_i^2 l_i^2 (z_i-y_i)^2+\frac{1}{\varkappa}(g(z)-g(y))^T D^T D(g(z)-g(y)) \\
\leq\ & \varkappa\sum_{i=1}^{n} q_i^2 l_i^2 (z_i-y_i)^2+\frac{1}{\varkappa}\sigma_m^2(D)\sum_{i=1}^{n} l_i^2 (z_i-y_i)^2 \qquad (4.21)
\end{aligned}
$$

elde edilir, (4.20) ile (4.21) eşitsizliklerini birleştirdiğimizde, aşağıdaki sonuca varabiliriz

$$
\begin{aligned}
& 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_i l_i d_{ij}(z_i-y_i)(g_j(z_j)-g_j(y_j)) \\
=\ & 2\xi_7\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_i l_i d_{ij}(z_i-y_i)(g_j(z_j)-g_j(y_j))+2\xi_8\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_i l_i d_{ij}(z_i-y_i)(g_j(z_j)-g_j(y_j)) \\
\leq\ & \xi_7\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_i \hat{d}_{ij} l_i^2 (z_i-y_i)^2+\frac{\xi_7}{\varepsilon}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_j \hat{d}_{ji} l_i^2 (z_i-y_i)^2 \\
& +\xi_8\varkappa\sum_{i=1}^{n} q_i^2 l_i^2 (z_i-y_i)^2+\frac{\xi_8}{\varkappa}\sigma_m^2(D)\sum_{i=1}^{n} l_i^2 (z_i-y_i)^2 \qquad (4.22)
\end{aligned}
$$

Ayrıca,

$$
\begin{aligned}
& 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_i e_{ij} l_i (z_i-y_i)(g_j(z_j)-g_j(y_j)) \\
\leq\ & 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_i l_i |e_{ij}||z_i-y_i||g_j(z_j)-g_j(y_j)| \\
\leq\ & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\eta q_i|e_{ij}|l_i^2(z_i-y_i)^2+\frac{1}{\eta}q_i|e_{ij}|(g_j(z_j)-g_j(y_j))^2) \\
\leq\ & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\eta q_i|e_{ij}|l_i^2(z_i-y_i)^2+\frac{1}{\eta}q_i|e_{ij}|l_j^2(z_j-y_j)^2) \\
\leq\ & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\eta q_i|e_{ij}|+\frac{1}{\eta}q_j|e_{ji}|)l_i^2(z_i-y_i)^2 \\
\leq\ & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\eta q_i\hat{e}_{ij}+\frac{1}{\eta}q_j\hat{e}_{ji})l_i^2(z_i-y_i)^2 \qquad (4.23)
\end{aligned}
$$

şeklinde yazabiliriz. Şimdi (4.13), (4.14), (4.18), (4.22) ve (4.23) eşitsizliklerini (4.11)'de kullanırsak aşağıdaki eşitsizliğe ulaşırız:

$$
\begin{aligned}
& 2(z-y)^T(\kappa_1 P+\kappa_2 Q)\mathscr{L}(H(z)-H(y)) \\
\leq \; & -2\kappa_1\sum_{i=1}^{n} p_i l_i \underline{c}_i (z_i-y_i)^2+\kappa_1\omega\sum_{i=1}^{n} p_i^2 l_i^2 (z_i-y_i)^2 \\
& +\frac{\kappa_1\xi_1(1+\xi_6\varsigma)}{\omega}\sigma_m^2(D)\sum_{i=1}^{n} l_i^2(z_i-y_i)^2+\frac{\kappa_1\xi_2(1+\xi_6\varsigma)}{\omega}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\hat{d}_{ki}\hat{d}_{kj} l_i^2(z_i-y_i)^2 \\
& +\frac{\kappa_1\xi_3}{\omega}(1+\frac{\xi_6}{\varsigma})\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\hat{e}_{kj}\hat{e}_{ki} l_i^2(z_i-y_i)^2+\frac{\kappa_1\xi_4}{\omega}(1+\frac{\xi_6}{\varsigma})\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\hat{e}_{jk}^2 l_i^2(z_i-y_i)^2 \\
& +\frac{\kappa_1\xi_5\pi}{\omega}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\hat{d}_{ji}\hat{e}_{jk} l_i^2(z_i-y_i)^2+\frac{\kappa_1\xi_5}{\omega\pi}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\hat{d}_{ij}\hat{e}_{ki} l_i^2(z_i-y_i)^2 \\
& +\kappa_2\eta\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_i\hat{e}_{ij} l_i^2(z_i-y_i)^2+\frac{\kappa_2}{\eta}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_j\hat{e}_{ji} l_i^2(z_i-y_i)^2 \\
& -2\kappa_2\sum_{i=1}^{n} q_i l_i \underline{c}_i(z_i-y_i)^2+\kappa_2\xi_7\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_i\hat{d}_{ij} l_i^2(z_i-y_i)^2+\frac{\kappa_2\xi_7}{\varepsilon}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_j\hat{d}_{ji} l_i^2(z_i-y_i)^2 \\
& +\kappa_2\xi_8\varkappa\sum_{i=1}^{n} q_i^2 l_i^2(z_i-y_i)^2+\frac{\kappa_2\xi_8}{\varkappa}\sigma_m^2(D)\sum_{i=1}^{n} l_i^2(z_i-y_i)^2
\end{aligned}
\tag{4.24}
$$

(4.24)'ten,

$$
\begin{aligned}
& 2(z-y)^T(\kappa_1 P+\kappa_2 Q)\mathscr{L}(H(z)-H(y)) \\
\leq \; & -\sum_{i=1}^{n} l_i^2\Bigg(2\kappa_1 p_i\frac{c_i}{l_i}+2\kappa_2 q_i\frac{c_i}{l_i}-\omega\kappa_1 p_i^2-\frac{\kappa_1\xi_1(1+\varsigma\xi_6)}{\omega}\sigma_m^2(D) \\
& -\frac{\kappa_1\xi_2(1+\varsigma\xi_6)}{\omega}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\hat{d}_{ki}\hat{d}_{kj}-\frac{\kappa_1\xi_3}{\omega}(1+\frac{\xi_6}{\varsigma})\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\hat{e}_{jk}\hat{e}_{ji} \\
& -\frac{\kappa_1\xi_4}{\omega}(1+\frac{\xi_6}{\varsigma})\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\hat{e}_{jk}^2-\frac{\kappa_1\xi_5\pi}{\omega}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\hat{d}_{ji}\hat{e}_{jk} \\
& -\frac{\kappa_1\xi_5}{\omega\pi}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\hat{d}_{jk}\hat{e}_{ji}-\kappa_2\xi_7\varepsilon\sum_{j=1}^{n} q_i\hat{d}_{ij}-\frac{\kappa_2\xi_7}{\varepsilon}\sum_{j=1}^{n} q_j\hat{d}_{ji} \\
& -\kappa_2\xi_8\varkappa q_i^2-\frac{\kappa_2\xi_8}{\varkappa}\sigma_m^2(D)-\kappa_2\eta\sum_{j=1}^{n} q_i\hat{e}_{ij}-\frac{\kappa_2}{\eta}\sum_{j=1}^{n} q_j\hat{e}_{ji}\Bigg)(z_i-y_i)^2 \\
= \; & -\sum_{i=1}^{n} l_i^2\mu_i(z_i-y_i)^2\leq -l_m^2\mu_m\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)^2 \\
= \; & -l_m^2\mu_m||z-y||^2
\end{aligned}
\tag{4.25}
$$

Burada $l_m = min(l_i)$ ve $\mu_m = min(\mu_i)$. Sıradaki eşitsizlik (4.25)'in direkt sonucudur.

$$|2(z-y)^T(\kappa_1 P + \kappa_2 Q)\mathscr{L}(H(z) - H(y))| \geq \mu_m l_m^2 ||z-y||_2^2 \tag{4.26}$$

$0 \leq \kappa_1 \leq 1$ ve $0 \leq \kappa_2 \leq 1$ olduğundan, (4.26) aşağıdaki gibi yazılır

$$(p_M + q_M) l_M |(z-y)^T||H(z) - H(y)| \geq \mu_m l_m^2 ||z-y||_2^2 \tag{4.27}$$

burada $p_M = max(p_i)$, $q_M = max(q_i)$ ve $l_M = max(l_i)$. (4.27)'den,

$$(p_M + q_M) l_M ||H(z) - H(y)||_1 \geq \mu_m l_m^2 ||z-y||_2 \tag{4.28}$$

(4.28) eşitsizliğinden, Her $z \neq y$ olduğunda doğrudan $H(z) \neq H(y)$ sonucuna varabiliriz .

$y = 0$ olması durumunda, (4.28) aşağıda verilen formu alır:

$$(p_M + q_M) l_M ||H(z) - H(0)||_1 \geq \mu_m l_m^2 ||z||_2 \tag{4.29}$$

$H(0) = 0$ olduğunda, (4.29) aşağıdaki gibidir,

$$(p_M + q_M) l_M ||H(z)||_1 \geq \mu_m l_m^2 ||z||_2 \tag{4.30}$$

Böylece (4.30)'dan, $||z|| \to \infty$ iken $||H(z)|| \to \infty$ olduğu görülür. Dolayısıyla, $H(z) : R^n \to R^n$ operatörünün R^n üzerinde homeomorfizm olduğunu kanıtladık. Şimdi Teorem 4.2.1'in sonuçlarına bakarsak, orijinin, (4.6) sinir ağının tek denge noktası olduğunu veya eşdeğer olarak (4.4) yapay sinir ağı modelinin $\forall u$ girişi için benzersiz bir denge noktasına sahip olduğunu gösterir.

5. ÇOKLU ZAMAN GECİKMELİ YAPAY SİNİR AĞI MODELİNİN KARARLILIK ANALİZİ

Şimdi, önceki kısımda elde edilen varlık, teklik koşullarının, (4.6) yapay sinir ağı modelinin orijininin asimptotik kararlılığını da ima ettiğini göstereceğiz. Bu amaçla, pozitif tanımlı Lyapunov fonksiyoneli $V(t) = V_1(t) + V_2(t)$'yi ele alıyoruz,

$$V_1(t) \quad = \quad \kappa_1 \sum_{i=1}^{n} p_i l_i z_i^2(t) + \kappa_2 \sum_{i=1}^{n} q_i l_i z_i^2(t) \tag{5.1}$$

ve

$$\begin{aligned} V_2(t) \quad = \quad & \frac{\kappa_1 \xi_3}{\omega}(1+\frac{\xi_6}{\varsigma}) \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \hat{e}_{jk} \hat{e}_{ji} l_i^2 \int_{t-\tau_{ji}}^{t} {z_i}^2(\varphi) d\varphi \\ & + \frac{\kappa_1 \xi_4}{\omega}(1+\frac{\xi_6}{\varsigma}) \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \hat{e}_{jk}^2 l_i^2 \int_{t-\tau_{ji}}^{t} {z_i}^2(\varphi) d\varphi \\ & + \frac{\kappa_1 \xi_5}{\omega \pi} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \hat{d}_{jk} \hat{e}_{ji} l_i^2 \int_{t-\tau_{ji}}^{t} {z_i}^2(\varphi) d\varphi + \frac{\kappa_2}{\eta} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} q_j \hat{e}_{ji} l_i^2 \int_{t-\tau_{ji}}^{t} {z_i}^2(\varphi) d\varphi \\ & + \frac{\delta}{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \int_{t-\tau_{ji}}^{t} z_i^2(\varphi) d\varphi \end{aligned} \tag{5.2}$$

burada δ daha sonra belirlenecek pozitif bir sabittir. $V_1(t)$ fonksiyonu için zamana göre türev alırsak aşağıda verilen sonucu elde ederiz:

$$\dot{V}_1(t) \quad = \quad 2\kappa_1 \sum_{i=1}^{n} p_i l_i z_i(t) \dot{z}_i(t) + 2\kappa_2 \sum_{i=1}^{n} q_i l_i z_i(t) \dot{z}_i(t) \tag{5.3}$$

Buradan,

$$
\begin{aligned}
2\sum_{i=1}^{n} p_i l_i z_i(t)\dot{z}_i(t) &= -2\sum_{i=1}^{n} p_i l_i c_i z_i^2(t) + 2\sum_{i=1}^{n} p_i l_i z_i(t)\Big(\sum_{j=1}^{n} d_{ij} g_j(z_j(t)) + \sum_{j=1}^{n} e_{ij} g_j(z_j(t-\tau_{ij})\Big) \\
&\le -2\sum_{i=1}^{n} p_i l_i c_i z_i^2(t) + \omega\sum_{i=1}^{n} p_i^2 l_i^2 z_i^2(t) \\
&\quad + \frac{1}{\omega}\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} d_{ij} g_j(z_j(t)) + \sum_{j=1}^{n} e_{ij} g_j(z_j(t-\tau_{ij})\Big)^2 \\
&= -2\sum_{i=1}^{n} q_i l_i c_i z_i^2(t) + \omega\sum_{i=1}^{n} q_i^2 l_i^2 z_i^2(t) + \frac{1}{\omega}\Big(\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} d_{ij} g_j(z_j(t))\Big)^2 \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} e_{ij} g_j(z_j(t-\tau_{ij})\Big)^2 \\
&\quad + 2\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} d_{ij} g_j(z_j(t))\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} e_{ij} g_j(z_j(t-\tau_{ij})\Big)\Big) \qquad (5.4)
\end{aligned}
$$

eşitsizliklerini elde ederiz ve

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} d_{ij} g_j(z_j(t))\right)^2 = g^T(z(t))D^T D g(z(t)) \\
=\ & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} d_{ij} d_{ik} g_j(z_j(t)) g_k(z_k(t)) \\
=\ & \xi_1 g^T(z(t))D^T D g(z(t)) + \xi_2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} d_{ij} d_{ik} g_j(z_j(t)) g_k(z_k(t)) \\
\le\ & \xi_1 ||D||_2^2 \sum_{i=1}^{n} g_i^2(z_i(t)) + \xi_2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} |d_{ki}||d_{kj}| g_i^2(z_i(t)) \\
\le\ & \xi_1 ||D||_2^2 \sum_{i=1}^{n} l_i^2 z_i^2(t) + \xi_2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} |d_{ki}||d_{kj}| l_i^2 z_i^2(t) \\
\le\ & \xi_1 \sigma_m^2(D)\sum_{i=1}^{n} l_i^2 z_i^2(t) + \xi_2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \hat{d}_{ki}\hat{d}_{kj} l_i^2 z_i^2(t) \qquad (5.5)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} e_{ij}g_j(z_j(t-\tau_{ij})\Big)^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} e_{ij}e_{ik}g_j(z_j(t-\tau_{ij}))g_k(z_k(t-\tau_{ik}))\\
= &\ \xi_3\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} e_{ij}e_{ik}g_j(z_j(t-\tau_{ij}))g_k(z_k(t-\tau_{ik}))\\
&+\xi_4\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} e_{ij}e_{ik}g_j(z_j(t-\tau_{ij}))g_k(z_k(t-\tau_{ik}))\\
\leq &\ \frac{\xi_3}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} |e_{ij}||e_{ik}|g_j^2(z_j(t-\tau_{ij}))+\frac{\xi_3}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} |e_{ij}||e_{ik}|g_k^2(z_k(t-\tau_{ik}))\\
&+\frac{\xi_4}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} e_{ij}^2g_k^2(z_k(t-\tau_{ik}))+\frac{\xi_4}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} e_{ik}^2g_j^2(z_j(t-\tau_{ij}))\\
= &\ \xi_3\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} |e_{jk}||e_{ji}|g_i^2(z_i(t-\tau_{ji}))+\xi_4\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} e_{jk}^2g_i^2(z_i(t-\tau_{ji}))\\
\leq &\ \xi_3\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \hat{e}_{jk}\hat{e}_{ji}l_i^2z_i^2(t-\tau_{ji})+\xi_4\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \hat{e}_{jk}^2l_i^2z_i^2(t-\tau_{ji}) \qquad (5.6)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&2\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} d_{ij}g_j(z_j(t))\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} e_{ij}g_j(z_j(t-\tau_{ij}))\Big)\\
= &\ 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} d_{ij}e_{ik}g_j(z_j(t))g_k(z_k(t-\tau_{ik}))\\
\leq &\ \pi\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} |d_{ij}||e_{ik}|g_j^2(z_j(t))+\frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} |d_{ij}e_{ik}|g_k^2(z_k(t-\tau_{ik}))\\
= &\ \pi\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} |d_{ji}||e_{jk}|g_i^2(z_i(t))+\frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} |d_{jk}||e_{ji}|g_i^2(z_i(t-\tau_{ji}))\\
\leq &\ \pi\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \hat{d}_{ji}\hat{e}_{jk}l_i^2z_i^2(t)+\frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \hat{d}_{jk}\hat{e}_{ji}l_i^2z_i^2(t-\tau_{ji}) \qquad (5.7)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
&2\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} d_{ij}g_j(z_j(t))\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} e_{ij}g_j(z_j(t-\tau_{ij}))\Big)\\
\leq &\ \varsigma\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} d_{ij}g_j(z_j(t))\Big)^2+\frac{1}{\varsigma}\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} e_{ij}g_j(z_j(t-\tau_{ij}))\Big)^2 \qquad (5.8)
\end{aligned}
$$

(5.5)-(5-8) eşitsizliklerinin ışığında, aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz

$$
\begin{aligned}
& 2\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} d_{ij}g_j(z_j(t))\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} e_{ij}g_j(z_j(t-\tau_{ij}))\Big) \\
= \;& 2\xi_5\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} d_{ij}g_j(z_j(t))\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} e_{ij}g_j(z_j(t-\tau_{ij}))\Big) \\
& +2\xi_6\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} d_{ij}g_j(z_j(t))\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} e_{ij}g_j(z_j(t-\tau_{ij}))\Big) \\
\leq \;& \xi_5\pi\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\hat{d}_{ji}\hat{e}_{jk}l_i^2z_i^2(t)+\frac{\xi_5}{\pi}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\hat{d}_{jk}\hat{e}_{ji}l_i^2z_i^2(t-\tau_{ji}) \\
& +\varsigma\xi_6\xi_1\sigma_m^2(D)\sum_{i=1}^{n}l_i^2z_i^2(t)+\varsigma\xi_6\xi_2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\hat{d}_{ki}\hat{d}_{kj}l_i^2z_i^2(t) \\
& +\frac{\xi_6\xi_3}{\varsigma}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\hat{e}_{jk}\hat{e}_{ji}l_i^2z_i^2(t-\tau_{ji})+\frac{\xi_6\xi_4}{\varsigma}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\hat{e}_{jk}^2l_i^2z_i^2(t-\tau_{ji})
\end{aligned} \tag{5.9}
$$

Şimdi (5.5), (5.6) ve (5.9) eşitsizliklerini (5.4)'de kullanırsak aşağıdaki eşitsizliğe ulaşırız:

$$
\begin{aligned}
& 2\kappa_1\sum_{i=1}^{n}p_il_iz_i(t)\dot{z}_i(t) \\
\leq \;& -2\kappa_1\sum_{i=1}^{n}p_il_ic_iz_i^2(t)+\omega\kappa_1\sum_{i=1}^{n}p_i^2l_i^2z_i^2(t) \\
& +\kappa_1\frac{\xi_1(1+\varsigma\xi_6)}{\omega}\sigma_m^2(D)\sum_{i=1}^{n}l_i^2z_i^2(t)+\kappa_1\frac{\xi_2(1+\varsigma\xi_6)}{\omega}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\hat{d}_{ki}\hat{d}_{kj}l_i^2z_i^2(t) \\
& +\kappa_1\frac{\xi_3}{\omega}(1+\frac{\xi_6}{\varsigma})\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\hat{e}_{jk}\hat{e}_{ji}l_i^2z_i^2(t-\tau_{ji})+\kappa_1\frac{\xi_4}{\omega}(1+\frac{\xi_6}{\varsigma})\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\hat{e}_{jk}^2l_i^2z_i^2(t-\tau_{ji}) \\
& +\kappa_1\frac{\xi_5\pi}{\omega}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\hat{d}_{ji}\hat{e}_{jk}l_i^2z_i^2(t)+\kappa_1\frac{\xi_5}{\omega\pi}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\hat{d}_{jk}\hat{e}_{ji}l_i^2z_i^2(t-\tau_{ji})
\end{aligned} \tag{5.10}
$$

Diğer yandan,

$$
\begin{aligned}
2\sum_{i=1}^{n}q_il_iz_i(t)\dot{z}_i(t) \;=\;& -2\sum_{i=1}^{n}q_il_ic_iz_i^2(t)+2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}q_il_iz_i(t)d_{ij}g_j(z_j(t)) \\
& +\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}q_il_iz_i(t)e_{ij}g_j(z_j(t-\tau_{ij}))
\end{aligned} \tag{5.11}
$$

Aşağıdaki eşitsizlikler elde edilebilir

$$\begin{aligned}
2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_i l_i z_i(t) d_{ij} g_j(z_j(t)) &\leq 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_i l_i |d_{ij}||z_i(t)||g_j(z_j(t))| \\
&\leq \varepsilon\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_i|d_{ij}|l_i^2 z_i^2(t) + \frac{1}{\varepsilon}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_i|d_{ij}|g_j^2(z_j(t)) \\
&\leq \varepsilon\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_i|d_{ij}|l_i^2 z_i^2(t) + \frac{1}{\varepsilon}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_i|d_{ij}|l_j^2 z_j^2(t) \\
&= \varepsilon\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_i|d_{ij}|l_i^2 z_i^2(t) + \frac{1}{\varepsilon}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_j|d_{ji}|l_i^2 z_i^2(t) \\
&\leq \varepsilon\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_i\hat{d}_{ij}l_i^2 z_i^2(t) + \frac{1}{\varepsilon}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_j\hat{d}_{ji}l_i^2 z_i^2(t) \qquad (5.12)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_i l_i z_i(t) d_{ij} g_j(z_j(t)) &\leq \varkappa\sum_{i=1}^{n} q_i^2 l_i^2 z_i^2(t) + \frac{1}{\varkappa}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} d_{ij} g_j(z_j(t))\right)^2 \\
&= \varkappa\sum_{i=1}^{n} q_i^2 l_i^2 z_i^2(t) + \frac{1}{\varkappa} g^T(z(t)) D^T D g(z(t)) \\
&\leq \varkappa\sum_{i=1}^{n} q_i^2 l_i^2 z_i^2(t) + \frac{1}{\varkappa}\sigma_m^2(D)\sum_{i=1}^{n} l_i^2 z_i^2(t) \qquad (5.13)
\end{aligned}$$

(5.13) ile (5.12) birleştirildiğinde, sonuç

$$\begin{aligned}
& 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_i l_i d_{ij} z_i(t) g_j(z_j(t)) \\
= \;& 2\xi_7\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_i l_i d_{ij} z_i(t) g_j(z_j(t)) + 2\xi_8\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_i l_i d_{ij} z_i(t) g_j(z_j(t)) \\
\leq \;& \xi_7\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_i\hat{d}_{ij}l_i^2 z_i^2(t) + \frac{\xi_7}{\varepsilon}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_j\hat{d}_{ji}l_i^2 z_i^2(t) \\
& + \xi_8\varkappa\sum_{i=1}^{n} q_i^2 l_i^2 z_i^2(t) + \frac{\xi_8}{\varkappa}\sigma_m^2(D)\sum_{i=1}^{n} l_i^2 z_i^2(t) \qquad (5.14)
\end{aligned}$$

Aşağıdaki eşitsizlik kolayca elde edilebilir

$$\begin{aligned}
2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_i e_{ij} l_i z_i(t) g_j(z_j(t-\tau_{ij})) &\leq 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_i l_i |e_{ij}||z_i(t)||g_j(z_j(t-\tau_{ij}))| \\
&\leq \eta \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_i |e_{ij}| l_i^2 z_i^2(t) + \frac{1}{\eta}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_i |e_{ij}| g_j^2(z_j(t-\tau_{ij})) \\
&\leq \eta \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_i |e_{ij}| l_i^2 z_i^2(t) + \frac{1}{\eta}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_i |e_{ij}| l_j^2 z_j^2(t-\tau_{ij}) \\
&\leq \eta \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_i |e_{ij}| l_i^2 z_i^2(t) + \frac{1}{\eta}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_j |e_{ji}| l_i^2 z_i^2(t-\tau_{ji}) \\
&\leq \eta \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_i \hat{e}_{ij} l_i^2 z_i^2(t) + \frac{1}{\eta}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_j \hat{e}_{ji} l_i^2 z_i^2(t-\tau_{ji}) \quad (5.15)
\end{aligned}$$

(5.11) ifadesinde (5.14) ve (5.15) eşitsizliklerini kullanırsak,

$$\begin{aligned}
2\kappa_2 \sum_{i=1}^{n} q_i l_i z_i(t)\dot{z}_i(t) \leq\; & -2\kappa_2 \sum_{i=1}^{n} q_i l_i c_i z_i^2(t) \\
& +\kappa_2 \xi_7 \varepsilon \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_i \hat{d}_{ij} l_i^2 z_i^2(t) + \kappa_2 \frac{\xi_7}{\varepsilon}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_j \hat{d}_{ji} l_i^2 z_i^2(t) \\
& +\kappa_2 \xi_8 \varepsilon \sum_{i=1}^{n} q_i^2 l_i^2 z_i^2(t) + \kappa_2 \frac{\xi_8}{\varepsilon}\sigma_m^2(D)\sum_{i=1}^{n} l_i^2 z_i^2(t) \\
& +\kappa_2 \eta \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_i \hat{e}_{ij} l_i^2 z_i^2(t) \\
& +\kappa_2 \frac{1}{\eta}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_j \hat{e}_{ji} l_i^2 z_i^2(t-\tau_{ji}) \qquad (5.16)
\end{aligned}$$

$V_2(t)$ fonksiyonunun zamana bağlı türevini aşağıda verildiği gibi yazabiliriz:

$$
\begin{aligned}
\dot{V}_2(t) \;=\;& \kappa_1\frac{\xi_3}{\omega}(1+\frac{\xi_6}{\varsigma})\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\hat{e}_{jk}\hat{e}_{ji}l_i^2{z_i}^2(t) \\
&-\kappa_1\frac{\xi_3}{\omega}(1+\frac{\xi_6}{\varsigma})\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\hat{e}_{jk}\hat{e}_{ji}l_i^2{z_i}^2(t-\tau_{ji}) \\
&+\frac{\xi_4}{\omega}(1+\frac{\xi_6}{\varsigma})\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\hat{e}_{jk}^2l_i^2{z_i}^2(t)-\frac{\xi_4}{\omega}(1+\frac{\xi_6}{\varsigma})\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\hat{e}_{jk}^2l_i^2{z_i}^2(t-\tau_{ji}) \\
&+\kappa_1\frac{\xi_5}{\omega\pi}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\hat{d}_{jk}\hat{e}_{ji}l_i^2{z_i}^2(t)-\kappa_1\frac{\xi_5}{\omega\pi}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\hat{d}_{jk}\hat{e}_{ji}l_i^2{z_i}^2(t-\tau_{ji}) \\
&+\kappa_2\frac{1}{\eta}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}q_j\hat{e}_{ji}l_i^2{z_i}^2(t)-\kappa_2\frac{1}{\eta}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}q_j\hat{e}_{ji}l_i^2{z_i}^2(t-\tau_{ji}) \\
&+\frac{\delta}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}z_i^2(t)-\frac{\delta}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}z_i^2(t-\tau_{ji}) \qquad (5.17)
\end{aligned}
$$

(5.10), (5.16) ve (5.17) eşitsizliklerinin ışığında aşağıdaki ifadeyi elde edebiliriz:

$$
\begin{aligned}
&\dot{V}_1(t)+\dot{V}_2(t) \\
\leq\;& -\sum_{i=1}^{n}l_i^2\Bigg(2\kappa_1 p_i\frac{c_i}{l_i}-\omega\kappa_1 p_i^2-\kappa_1\frac{\xi_1(1+\varsigma\xi_6)}{\omega}\sigma_m^2(D)-\kappa_1\frac{\xi_2(1+\varsigma\xi_6)}{\omega}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\hat{d}_{ki}\hat{d}_{kj} \\
&-\kappa_1\frac{\xi_3}{\omega}(1+\frac{\xi_6}{\varsigma})\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\hat{e}_{jk}\hat{e}_{ji}-\kappa_1\frac{\xi_4}{\omega}(1+\frac{\xi_6}{\varsigma})\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\hat{e}_{jk}^2-\kappa_1\frac{\xi_5\pi}{\omega}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\hat{d}_{ji}\hat{e}_{jk} \\
&-\kappa_1\frac{\xi_5}{\omega\pi}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\hat{d}_{jk}\hat{e}_{ji}+2\kappa_2 q_i\frac{c_i}{l_i}-\kappa_2\xi_7\varepsilon\sum_{j=1}^{n}q_i\hat{d}_{ij}-\kappa_2\frac{\xi_7}{\varepsilon}\sum_{j=1}^{n}q_j\hat{d}_{ji} \\
&-\kappa_2\xi_8\varkappa q_i^2-\kappa_2\frac{\xi_8}{\varkappa}\sigma_m^2(D)-\kappa_2\eta\sum_{j=1}^{n}q_i\hat{e}_{ij}-\kappa_2\frac{1}{\eta}\sum_{j=1}^{n}q_j\hat{e}_{ji}\Bigg)z_i^2(t) \\
&+\delta\sum_{i=1}^{n}z_i^2(t)-\frac{\delta}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}z_i^2(t-\tau_{ji}) \\
\leq\;& -\sum_{i=1}^{n}l_i^2\mu_i z_i^2(t)+\delta\sum_{i=1}^{n}z_i^2(t)\leq -l_m^2\mu_m\sum_{i=1}^{n}z_i^2(t)+\delta\sum_{i=1}^{n}z_i^2(t) \\
=\;& -l_m^2\mu_m||z(t)||_2^2+\delta||z(t)||_2^2=-(l_m^2\mu_m-\delta)||z(t)||_2^2 \qquad (5.18)
\end{aligned}
$$

Şimdi $\delta < l_m^2\mu_m$ seçelim. O halde (5.18), her $z(t) \neq 0$ olduğunda $\dot{V}(t) < 0$ olduğunu söyler. Şimdi $z(t) = 0$ olmak üzere, (5.17) ifadesinden aşağıdaki sonuca ulaşırız:

$$\begin{aligned}
\dot{V}_2(t) &= -\kappa_1\frac{\xi_3}{\omega}(1+\frac{\xi_6}{\varsigma})\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\hat{e}_{jk}\hat{e}_{ji}l_i^2 {z_i}^2(t-\tau_{ji}) \\
&\quad -\frac{\xi_4}{\omega}(1+\frac{\xi_6}{\varsigma})\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\hat{e}_{jk}^2 l_i^2 {z_i}^2(t-\tau_{ji}) \\
&\quad -\kappa_1\frac{\xi_5}{\omega\pi}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\hat{d}_{jk}\hat{e}_{ji}l_i^2 {z_i}^2(t-\tau_{ji}) - \kappa_2\frac{1}{\eta}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}q_j\hat{e}_{ji}l_i^2 {z_i}^2(t-\tau_{ji}) \\
&\quad -\frac{\delta}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}z_i^2(t-\tau_{ji}) \\
&\leq -\frac{\delta}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}z_i^2(t-\tau_{ji}) \qquad (5.19)
\end{aligned}$$

(5.19) ifadesinde, herhangi bir i ve j çifti için $z_j(t-\tau_{ij}) \neq 0$ ise, $\dot{V}(t) < 0$ olur. Şimdi $z(t) = 0$ ve her i ve j çifti için $z_j(t-\tau_{ij}) = 0$ olduğunu varsayalım (Yani, $\forall i, j$ için $g_j(z_j(t-\tau_{ij})) = 0$ ve $g_i(z_i(t)) = 0$). Bu durumda (5.3) ve (5.17) eşitsizliklerinden $\dot{V}(t) = 0$ olduğu gözlemlenebilir. (5.1) ve (5.2) formundan da $V(t)$ fonksiyonunun radyal sınırsızlığı sağladığı sonucuna varılabilir, yani, $||z(t)|| \to \infty$ iken $V(t) \to \infty$ olur. Bu nedenle, Lyapunov kararlılık teoremlerinden, (4.6) yapay sinir ağı modelinin orijini veya eşdeğeri olan (4.4) modelinin denge noktasının global asimptotik robust kararlı olduğu sonucuna varılabilir.

(4.5) ile verilen parametre belirsizlikleri ile (4.4) yapay sinir sisteminin robust kararlılığının analizi için ispat yöntemleri, (4.4) yapay sinir sisteminin belirsizlikler olmadan yapılan kararlılık analizi için ispat yöntemlerine esasen benzer olduğundan, (4.4) sistemi için, Teorem 4.2.1'de elde edilen robust kararlılık koşulları $\underline{D} = D = \overline{D}$, $\underline{E} = E = \overline{E}$ ve $\underline{C} = C = \overline{C}$ olan sistem matrislerinin tam formlarını kullanarak kolaylıkla özelleştirilebilir. Teorem 4.2.1'de, $\sigma_m(D)$ yerine $||D||_2$, $\hat{d}_{ji}$ yerine $|d_{ji}|$, $\hat{e}_{ji}$ yerine $|e_{ji}|, \forall i, j$ ve $\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\hat{d}_{ki}\hat{d}_{kj}$ yerine $\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{n}d_{ki}d_{kj}\right|, \forall i$ kullanırsak doğrudan aşağıdaki teoremi elde ederiz:

Teorem 5.1: (4.6) ile tanımlanan yapay sinir sistemi için $g \in \mathscr{L}$ olsun. O zaman, aşağıdaki koşullar sağlanacak şekilde ω, π, ς, ε, $\varkappa$, η, p_i ve q_i pozitif sabitleri varsa, (4.6) yapay sinir ağı modelinin orijini global asimptotik kararlı bir denge noktasıdır.

$$\begin{aligned}
\bar{\upsilon}_i \;=\;& 2\kappa_1 p_i \frac{c_i}{l_i} + 2\kappa_2 q_i \frac{c_i}{l_i} - \omega\kappa_1 p_i^2 - \frac{\kappa_1\xi_1(1+\varsigma\xi_6)}{\omega}||D||_2^2 - \frac{\kappa_1\xi_2(1+\varsigma\xi_6)}{\omega}\sum_{j=1}^{n}\Big|\sum_{k=1}^{n} d_{ki}d_{kj}\Big| \\
& - \frac{\kappa_1\xi_3}{\omega}(1+\frac{\xi_6}{\varsigma})\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|e_{jk}||e_{ji}| - \frac{\kappa_1\xi_4}{\omega}(1+\frac{\xi_6}{\varsigma})\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} e_{jk}^2 - \frac{\kappa_1\xi_5\pi}{\omega}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|d_{ji}||e_{jk}| \\
& - \frac{\kappa_1\xi_5}{\omega\pi}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|d_{jk}||e_{ji}| - \kappa_2\xi_7\varepsilon\sum_{j=1}^{n} q_i|d_{ij}| - \frac{\kappa_2\xi_7}{\varepsilon}\sum_{j=1}^{n} q_j|d_{ji}| \\
& - \kappa_2\xi_8\varkappa q_i^2 - \frac{\kappa_2\xi_8}{\varkappa}||D||_2^2 - \kappa_2\eta\sum_{j=1}^{n} q_i|e_{ij}| - \frac{\kappa_2}{\eta}\sum_{j=1}^{n} q_j|e_{ji}| > 0, \forall i
\end{aligned}$$

burada $0 \le \xi_m \le 1, m = 1,\ldots,8$, $\xi_1+\xi_2 = \xi_3+\xi_4 = \xi_5+\xi_6 = \xi_7+\xi_8 = 1$, $\kappa_1+\kappa_2 = 1$, $0 \le \kappa_1 \le 1$ ve $0 \le \kappa_2 \le 1$.

Şimdi, çoklu zaman gecikmeli Hopfield yapay sinir ağı modeli için önerilen robust kararlılık koşullarının bazı basit değiştirilmiş versiyonlarının, çoklu gecikmeli Cohen-Grossberg sinir ağları sınıfının robust kararlılık koşullarını doğrudan sağladığını göstereceğiz.

$$\dot{x}_i(t) = b_i(x_i(t))\Big(-c_i(x_i(t)) + \sum_{j=1}^{n} d_{ij}f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^{n} e_{ij}f_j(x_j(t-\tau_{ij})) + u_i\Big) \qquad (5.20)$$

$i = 1,2,\ldots,n$, burada $c_i(x_i(t))$ davranış fonksiyonu ve $b_i(x_i(t))$ kuvvetlendirici fonksiyondur. Diğer parametreler (4.4)'de verilenlerle aynıdır. (5.20) sisteminde, $b_i(x)$ fonksiyonları için genellikle, $0 < \upsilon_i \le b_i(x) \le \phi_i, \forall x \in R, \forall i$ olacak şekilde υ_i ve ϕ_i reel sayılarının olduğu varsayılır ve $c_i(x)$ fonksiyonları için $0 < \gamma_i(x-y)^2 \le |c_i(x)-c_i(y)||x-y| \le \psi_i(x-y)^2, \forall x,y \in R, x \neq y, \forall i$ olacak şekilde γ_i ve ψ_i reel sayıları vardır. Hopfield yapay sinir ağlarında yaptığımız gibi, (5.20) sistemi için $z_i(t) = x_i(t) - x_i^*$, $\forall i$ kullanarak, (5.20) sisteminin dönüştürülmüş formunu aşağıda verildiği şekilde elde ederiz.

$$\dot{z}_i(t) = \alpha_i(z_i(t))\Big(-\beta_i(z_i(t)) + \sum_{j=1}^{n} d_{ij}g_j(z_j(t)) + \sum_{j=1}^{n} e_{ij}g_j(z_j(t-\tau_{ij}))\Big), \forall i \qquad (5.21)$$

Burada $\beta_i(z_i(t))$, $\alpha_i(z_i(t))$ ve $g_i(z_i(t))$ fonksiyonları, $\beta_i(z_i(t)) = c_i(z_i(t)+x_i^*) - c_i(x_i^*)$,

$\alpha_i(z_i(t)) = b_i(z_i(t)+x_i^*)$ ve $g_i(z_i(t)) = f_i(z_i(t)+x_i^*) - f_i(x_i^*),\ i = 1,2,\ldots,n$ formundadır.

$b_i(x_i(t))$ ve $c_i(x_i(t))$ fonksiyonlarına ilişkin orijinal varsayımlar altında,
$0 < \upsilon_i \leq \alpha_i(z_i(t)) \leq \phi_i$, $\forall i$ koşullarını sağlayan $\alpha_i(z_i(t))$ ve $\gamma_i z_i^2(t) \leq z_i(t)\beta_i(z_i(t)) \leq \psi_i z_i^2(t)$, $\forall i$ koşullarını sağlayan $\beta_i(z_i(t))$ fonksiyonlarına dönüşürler.

Şimdi, (5.21) ile ilişkili aşağıdaki eşlemeyi tanımlayalım:

$$\tilde{H}(z) = -\beta(z) + Dg(z) + Eg(z) \tag{5.22}$$

burada $\beta(z) = (\beta_1(z_1), \beta_2(z_2), ..., \beta_n(z_n))^T . \alpha_i(z_i) > 0, \forall i$ olduğundan, $\tilde{H}(z) = 0$'ın her çözümünün (5.21) ifadesinin bir denge noktası olduğu açıktır. (4.10) ile verilen $H(z) = -Cz + Dg(z) + Eg(z)$ ifadesinde Cz vektörünün $\beta(z)$ vektörü ile değiştirilmesinin (5.22) ile verilen $\tilde{H}(z) = -\beta(z) + Dg(z) + Eg(z)$ sonucunu verdiğini unutmayalım. (4.6) yapay sinir sisteminde $\underline{c}_i z_i^2 \leq c_i z_i^2 \leq \bar{c}_i z_i^2, \forall i$ koşulları ve (5.21) sisteminde $\gamma_i z_i^2 \leq z_i \beta_i(z_i) \leq \psi_i z_i^2, \forall i$ koşulları sağlanır. Bu nedenle, Teorem 4.2.1'de basitçe $\underline{c}_i$ yerine γ_i, $\forall i$ koyarak, (5.21) sisteminin denge noktasının varlığı ve tekliği için koşullar belirlenebilir.

Şimdi (5.21) yapay sinir sisteminin, kararlılık analizi için, bir $W(t) = W_1(t) + W_2(t)$ Lyapunov fonksiyoneli tanımlanabilir, burada

$$W_1(t) = 2\kappa_1 \sum_{i=1}^{n} \int_0^{z_i(t)} p_i l_i \frac{s}{\alpha_i(s)} ds + 2\kappa_2 \sum_{i=1}^{n} \int_0^{z_i(t)} q_i l_i \frac{s}{\alpha_i(s)} ds$$

ve (5.2) ile verilen $W_2(t) = V_2(t)$ olur . $W_1(t)$ fonksiyonunun zamana bağlı türevini aşağıda verilen şekilde yazabiliriz:

$$\begin{aligned}
\dot{W}_1(t) &= 2\kappa_1 \sum_{i=1}^{n} p_i l_i z_i(t) \dot{z}_i(t) \frac{1}{\alpha_i(z_i(t))} + 2\kappa_2 \sum_{i=1}^{n} q_i l_i z_i(t) \dot{z}_i(t) \frac{1}{\alpha_i(z_i(t))} \\
&= -2\kappa_1 \sum_{i=1}^{n} p_i l_i \beta_i(z_i(t)) z_i(t) + 2\kappa_1 \sum_{i=1}^{n} p_i l_i z_i(t) \Big(\sum_{j=1}^{n} d_{ij} g_j(z_j(t)) + \sum_{j=1}^{n} e_{ij} g_j(z_j(t-\tau_{ij})\Big) \\
&\quad -2\kappa_2 \sum_{i=1}^{n} q_i l_i \beta_i(z_i(t)) z_i(t) + 2\kappa_2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} q_i l_i z_i(t) d_{ij} g_j(z_j(t)) \\
&\quad +2\kappa_2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} q_i l_i z_i(t) e_{ij} g_j(z_j(t-\tau_{ij}))
\end{aligned} \tag{5.23}$$

(5.1)'deki $V_1(t)$ fonksiyonunun zamana göre türevinin aşağıdaki gibi olduğunu hatırlayalım:

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1(t) &= 2\kappa_1\sum_{i=1}^{n} p_i l_i z_i(t)\dot{z}_i(t) + 2\kappa_2\sum_{i=1}^{n} q_i l_i z_i(t)\dot{z}_i(t) \\
&= -2\kappa_1\sum_{i=1}^{n} p_i l_i c_i z_i^2(t) \\
&\quad +2\kappa_1\sum_{i=1}^{n} p_i l_i z_i(t)\Big(\sum_{j=1}^{n} d_{ij}g_j(z_j(t)) + \sum_{j=1}^{n} e_{ij}g_j(z_j(t-\tau_{ij})\Big) \\
&\quad -2\kappa_2\sum_{i=1}^{n} q_i l_i c_i z_i^2(t) + 2\kappa_2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_i l_i z_i(t) d_{ij} g_j(z_j(t)) \\
&\quad +2\kappa_2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_i l_i z_i(t) e_{ij} g_j(z_j(t-\tau_{ij}))
\end{aligned} \tag{5.24}$$

(5.23)'deki $\beta_i(z_i(t))z_i(t)$ ifadesini $c_i z_i^2(t)$ ile değiştirirseniz, (5.23) ve (5.24) tamamen aynı olacaktır. (4.6) yapay sinir sisteminde $\underline{c}_i z_i^2 \leq c_i z_i^2(t) \leq \bar{c}_i z_i^2(t), \forall i$ koşulu ve (5.21) yapay sinir sisteminde de $\gamma_i z_i^2(t) \leq z_i\beta_i(z_i(t)) \leq \psi_i z_i^2(t)$, $\forall i$ koşulu sağlanır. Bu nedenle, Teorem 4.2.1'de basitçe $\underline{c}_i$ yerine γ_i, $\forall i$ koyarak, (5.21) sisteminin denge noktasının kararlılığı için koşullar belirlenebilir. Böylece, (5.21) yapay sinir sistemi için aşağıdaki teoremi yazabiliriz:

Teorem 5.2: (5.21) tarafından tanımlanan yapay sinir sistemi için, $g \in \mathscr{L}$ olsun, D ve E matrisleri (4.5) ile verilen aralık belirsizliklerini sağlasın. O halde, aşağıdaki koşullar sağlanacak şekilde ω, π, ς, ε, $\varkappa$, η, p_i ve q_i pozitif sabitleri varsa, (5.21) yapay sinir ağının orijini, global asimptotik robust kararlı bir denge noktasıdır:

$$\begin{aligned}
\iota_i &= 2\kappa_1 p_i\frac{\gamma_i}{l_i} + 2\kappa_2 q_i\frac{\gamma_i}{l_i} - \omega\kappa_1 p_i^2 - \frac{\kappa_1\xi_1(1+\varsigma\xi_6)}{\omega}\sigma_m^2(D) - \frac{\kappa_1\xi_2(1+\varsigma\xi_6)}{\omega}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\hat{d}_{ki}\hat{d}_{kj} \\
&\quad -\frac{\kappa_1\xi_3}{\omega}(1+\frac{\xi_6}{\varsigma})\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\hat{e}_{jk}\hat{e}_{ji} - \frac{\kappa_1\xi_4}{\omega}(1+\frac{\xi_6}{\varsigma})\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\hat{e}_{jk}^2 - \frac{\kappa_1\xi_5\pi}{\omega}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\hat{d}_{ji}\hat{e}_{jk} \\
&\quad -\frac{\kappa_1\xi_5}{\omega\pi}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\hat{d}_{jk}\hat{e}_{ji} - \kappa_2\xi_7\varepsilon\sum_{j=1}^{n} q_i\hat{d}_{ij} - \frac{\kappa_2\xi_7}{\varepsilon}\sum_{j=1}^{n} q_j\hat{d}_{ji} \\
&\quad -\kappa_2\xi_8\varkappa q_i^2 - \frac{\kappa_2\xi_8}{\varkappa}\sigma_m^2(D) - \kappa_2\eta\sum_{j=1}^{n} q_i\hat{e}_{ij} - \frac{\kappa_2}{\eta}\sum_{j=1}^{n} q_j\hat{e}_{ji} > 0, \forall i
\end{aligned}$$

burada $0 \leq \xi_m \leq 1, m = 1,\ldots,8$, $\xi_1+\xi_2 = \xi_3+\xi_4 = \xi_5+\xi_6 = \xi_7+\xi_8 = 1$, $\kappa_1+\kappa_2 = 1$, $0 \leq \kappa_1 \leq 1$, $0 \leq \kappa_2 \leq 1$, $\sigma_m(D) = min\{\sigma_1(D), \sigma_2(D), \sigma_3(D), \sigma_4(D), \sigma_5(D)\}$, $\hat{d}_{ij} = max\{|\underline{d}_{ij}|, |\bar{d}_{ij}|\}$ ve $\hat{e}_{ij} = max\{|\underline{e}_{ij}|, |\bar{e}_{ij}|\}, \forall i, j$.

Teorem 5.1 ve (5.21) yapay sinir sisteminin sistem fonksiyonlarının özellikleri ışığında aşağıdaki teoremi de ifade edebiliriz:

Teorem 5.3: (5.21) sinir sisteminde, $g \in \mathscr{L}$ olsun. O halde, aşağıdaki koşullar sağlanacak şekilde ω, π, ς, ε, $\varkappa$, η, p_i ve q_i pozitif sabitleri varsa, (5.21) yapay sinir ağı modelinin orijini global asimptotik kararlı bir denge noktasıdır:

$$\begin{aligned}\bar{\iota}_i \;=\;& 2\kappa_1 p_i\frac{\gamma_i}{l_i}+2\kappa_2 q_i\frac{\gamma_i}{l_i}-\omega\kappa_1 p_i^2-\frac{\kappa_1\xi_1(1+\varsigma\xi_6)}{\omega}||D||_2^2-\frac{\kappa_1\xi_2(1+\varsigma\xi_6)}{\omega}\sum_{j=1}^{n}\Big|\sum_{k=1}^{n}d_{ki}d_{kj}\Big|\\ &-\frac{\kappa_1\xi_3}{\omega}(1+\frac{\xi_6}{\varsigma})\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|e_{jk}||e_{ji}|-\frac{\kappa_1\xi_4}{\omega}(1+\frac{\xi_6}{\varsigma})\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}b_{jk}^2-\frac{\kappa_1\xi_5\pi}{\omega}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|d_{ji}||e_{jk}|\\ &-\frac{\kappa_1\xi_5}{\omega\pi}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|d_{jk}||e_{ji}|-\kappa_2\xi_7\varepsilon\sum_{j=1}^{n}q_i|d_{ij}|-\frac{\kappa_2\xi_7}{\varepsilon}\sum_{j=1}^{n}q_j|d_{ji}|\\ &-\kappa_2\xi_8\varkappa q_i^2-\frac{\kappa_2\xi_8}{\varkappa}||D||_2^2-\kappa_2\eta\sum_{j=1}^{n}q_i|e_{ij}|-\frac{\kappa_2}{\eta}\sum_{j=1}^{n}q_j|e_{ji}|>0,\forall i\end{aligned}$$

burada $0\le\xi_m\le 1, m=1,\ldots,8$, $\xi_1+\xi_2=\xi_3+\xi_4=\xi_5+\xi_6=\xi_7+\xi_8=1$, $\kappa_1+\kappa_2=1$, $0\le\kappa_1\le 1$ ve $0\le\kappa_2\le 1$.

6. BULGULAR

$f \in \mathscr{L}$ aktivasyon fonksiyonunun kullanıldığı (4.6) ve (5.21) yapay sinir ağı modellerinin Lyapunov kararlılık analizinde, genellikle Lyapunov fonksiyonunun ana terimi olarak ya durum değişkenlerinin mutlak değerleri ya da nöronların durum değişkenlerinin karelerinin lineer kombinasyonları kullanılır. Durum değişkenlerinin mutlak değerlerinin lineer kombinasyonlarının kullanılması durumunda, Lyapunov fonksiyonunun ana terimi $V_1(t)$ aşağıdaki şekilde seçilir:

$$V_1(t) = \sum_{i=1}^{n} q_i |z_i(t)| \tag{6.1}$$

burada q_i pozitif sabitleri ifade eder. $V_1(t)$ foksiyonunun zamana göre türevinin Lyapunov fonksiyonelindeki diğer terimlerin zamana göre türeviyle birlikte incelenmesi, temel olarak (4.6) ve (5.21) sistem ağ parametreleri arasındaki tekil olmayan M-Matris koşulunu oluşturan kararlılık kriterlerini türetmemize yol açar. Geçmiş literatürde, $f \in \mathscr{L}$ göz önüne alındığında, (4.6) ve (5.21) sistemleri için kararlılık koşullarını belirlemek amacıyla $V_1(t)$ Lyapunov fonksiyonelinin çeşitli formlarından yararlanılmıştır. Tüm bu sonuçlar, esas olarak, (4.6) ve (5.21) yapay sinir sistemlerinin global asimptotik kararlılığının, sistem (4.6) için $C\mathscr{L}^{-1} - |D| - |E|$ matrisinin ve (5.21) için $\Gamma\mathscr{L}^{-1} - |D| - |E|$ şeklinde verilen matrisin tekil olmayan M-matris olma koşulunu sağlaması durumunda garanti edilebileceğini göstermiştir. Sistem matrislerine uygulanan tekil olmayan M-matris koşulu, Lyapunov fonksiyonelinin ana terimi olarak nöronların durum değişkenlerinin mutlak değerlerinin bazı lineer kombinasyonları kullanıldığında (4.6) ve (5.21) sistemlerinin global asimptotik kararlılığı için, $f \in \mathscr{L}$ ile, elde edilebilen benzersiz koşuldur. Bu yaklaşım kullanılarak, aşağıdaki robust kararlılık koşulları önerilmiştir.

Teorem 6.1 [53]-[57] :(4.4) yapay sinir sisteminde, $f \in \mathscr{L}$ olsun ve sistem matrisleri (4.5) ile verilen parametre belirsizliklerini sağlasın. Eğer $\underline{C}\mathscr{L}^{-1} - |\hat{D}| - |\hat{E}|$ şeklinde verilen matris tekil olmayan M-matrisse (4.4) yapay sinir sistemi global asimptotik robust kararlıdır, yani, aşağıdaki koşulların geçerli olduğu şekilde q_i pozitif sabitleri vardır.

$$\zeta_i = q_i \frac{\underline{c}_i}{l_i} - \sum_{j=1}^{n} q_j \hat{d}_{ji} - \sum_{j=1}^{n} q_j \hat{e}_{ji} > 0, \forall i$$

Teorem 6.2 [58]-[60]: (5.21) yapay sinir sisteminde, $f \in \mathscr{L}$ olsun ve sistem matrisleri (4.5) ile verilen aralık belirsizliklerini sağlasın. Eğer $\Gamma\mathscr{L}^{-1} - |\hat{D}| - |\hat{E}|$ matrisi tekil olmayan M-matris ise (5.21) yapay sinir sistemi global asimptotik robust kararlıdır, yani, aşağıdaki koşulların geçerli olduğu şekilde q_i pozitif sabitleri vardır.

$$\vartheta_i = q_i \frac{\gamma_i}{l_i} - \sum_{j=1}^{n} q_j \hat{d}_{ji} - \sum_{j=1}^{n} q_j \hat{e}_{ji} > 0, \forall i$$

burada $\Gamma = diag(\gamma_i > 0)$.

Teorem 6.1'de $\underline{c}_i$'nın γ_i ile değiştirilmesinin Teorem 6.2'nin sonuçlarını ifade ettiğini görüyoruz. Bu nedenle, bu tezin geri kalanında sadece (4.4) sinir sistemini ele alacağız. (4.4) sisteminin kararlılık analizinde, (5.1) tarafından verilen Lyapunov fonksiyonellerinin ana terimleri olarak nöronların durum değişkenlerinin karelerinin iki farklı lineer kombinasyonunun toplamını kullandık. Bu durumda, (4.4)'ün global asimptotik kararlılığının, $f \in \mathscr{L}$ ile, sağlanması amacıyla, Lyapunov fonksiyonelinin zamana göre türev analizinde, cebirsel formların birçok farklı sonuç kümesini türetmek için D ve E matrislerinin elemanlarına çeşitli matematiksel manipülasyonlar ve eşitsizlikler uygulamak mümkündür. $\underline{C}\mathscr{L}^{-1} - |\hat{D}| - |\hat{E}|$ matrisinin tekil olmayan M-matrisi koşulu, Teorem 4.2.1'de ulaşılmış olan sonuçlardan doğrudan türetilemez. Ancak, Teorem 4.2.1, [53]-[60]'da önerilen koşullara bazı benzer alternatif robust kararlılık kriterleri türetmemizi sağlar. Aşağıda, sistem (4.4) için bu alternatif robust kararlılık koşullarından bazıları Teorem 4.2.1'in koşullarının özel durumları olarak belirtilmiştir.

Teorem 6.3: (4.4) yapay sinir sisteminde, $f \in \mathscr{L}$ olsun ve sistem matrisleri (4.5) ile verilen aralık belirsizliklerini sağlasın. O zaman aşağıdaki gibi ε, η ve q_i pozitif sabitleri var ise, (4.4) yapay sinir sistemi global asimptotik robust kararlıdır.

$$\hat{\zeta}_i \quad = \quad 2q_i\frac{c_i}{l_i} - \varepsilon\sum_{j=1}^{n} q_i\hat{d}_{ij} - \frac{1}{\varepsilon}\sum_{j=1}^{n} q_j\hat{d}_{ji} - \eta\sum_{j=1}^{n} q_i\hat{e}_{ij} - \frac{1}{\eta}\sum_{j=1}^{n} q_j\hat{e}_{ji} > 0, \forall i$$

Teorem 4.2.1'de, $\kappa_2 = \xi_7 = 1$ olduğu durum doğrudan Teorem 6.3'ün koşullarını ima eder.

Teorem 6.4: (4.4) yapay sinir sisteminde, $f \in \mathscr{L}$ olsun ve sistem matrisleri (4.5) ile verilen aralık belirsizliklerini sağlasın. Aşağıdaki cebirsel kriterler karşılanırsa, (4.4) yapay sinir ağı global asimptotik robust kararlıdır.

$$\bar{\zeta}_i \quad = \quad \frac{c_i^2}{l_i^2} - 2\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \hat{d}_{kj}\hat{d}_{ki} - 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \hat{e}_{jk}\hat{e}_{ji} > 0, \forall i$$

Teorem 4.2.1'de, $\kappa_1 = \xi_2 = \xi_3 = \xi_6 = \omega = \varsigma = 1$ ve $p_i = \frac{c_i}{l_i}, \forall i$ durumu direkt olarak Teorem 6.4'ün koşullarını verir.

Teorem 6.5: (4.4) yapay sinir sisteminde, $f \in \mathscr{L}$ olsun ve sistem matrisleri (4.5) ile verilen aralık belirsizliklerini sağlasın. Aşağıdaki cebirsel kriterler karşılanırsa, (4.4) yapay sinir ağı global asimptotik robust kararlıdır.

$$\bar{\vartheta}_i \quad = \quad 2\frac{c_i^2}{l_i^2} - \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \hat{d}_{ki}\hat{d}_{kj} - \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \hat{e}_{jk}^2 - \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \hat{d}_{ji}\hat{e}_{jk} - \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \hat{d}_{jk}\hat{e}_{ji} > 0, \forall i$$

Teorem 4.2.1'de, $\kappa_1 = \xi_2 = \xi_4 = \xi_5 = \omega = \varsigma = 1$ ve $p_i = \frac{c_i}{l_i}, \forall i$ durumu direkt olarak Teorem 6.5'in koşullarını verir.

$\underline{C}\mathscr{L}^{-1} - |\hat{D}| - |\hat{E}|$ tekil olmayan M-matrisinin, $\hat{D}$ ve $\hat{E}$ matrislerinin elemanları üzerinde aynı operatörü uyguladığını gördük. Bununla birlikte, sistem (4.4) için Lyapunov fonksiyonellerindeki durum değişkenlerinin karelerinin farklı lineer kombinasyonlarının kullanılması durumunda, istenen robust kararlılık koşullarını belirlemek için $\hat{D}$ ve $\hat{E}$ matrislerine farklı operatörler uygulayabiliriz. Daha önce de belirttiğimiz gibi, çoklu zaman gecikmesi içeren ve $f \in \mathscr{L}$ olan bir sinir ağının kararlılığını incelerken, E matrisi söz konusu olduğunda, (4.5) ile tanımlanan aralıktaki e_{ij} elemanlarının maksimum mutlak değerleri kararlılık koşullarının ifadelerinde kilit bir rol oynar. Bu nedenle, E matrisinin elemanları üzerindeki matematiksel manipülasyonların ve eşitsizliklerin işlemleri çok önemlidir. D matrisine gelince, genel yaklaşım D'nin normları için yeni üst sınırlar bulmaktır. Bu tezde, bu iki görev aynı anda başarıyla gerçekleştirmiştir.

Teorem 4.2.1'in koşulları $0 \leq \xi_m \leq 1, m = 1, \ldots, 8$, $\xi_1 + \xi_2 = \xi_3 + \xi_4 = \xi_5 + \xi_6 = \xi_7 + \xi_8 = 1$, $\kappa_1 + \kappa_2 = 1$, $0 \leq \kappa_1 \leq 1$ ve $0 \leq \kappa_2 \leq 1$ negatif olmayan bazı sabitleri içerir. Teorem 4.2.1'in koşullarında bu negatif olmayan sabitlerin bazı uygun değerlerinin seçilmesinin birçok farklı kararlılık kriteriyle sonuçlanacağı açıktır. Ayrıca, bu tez D matrisinin ikinci normu için yeni bir üst sınır sunmaktadır. Bu bağlamda, [61]-[70]'de elde edilen robust kararlılık sonuçlarının özel durumlar olarak doğrudan Teorem 4.2.1'den türetilebileceği kolayca gözlemlenebilir. Aşağıda, bu tezin, Lyapunov fonksiyonellerinde durum değişkenlerinin karelerinin çeşitli lineer kombinasyonlarının kullanıldığı [61]-[70]'de önerilen önceki robust kararlılık sonuçlarının çoğunu genelleştirdiğini göstereceğiz.

Şimdi ilk olarak geçmiş literatür sonuçlarını belirtiyoruz ve ardından bu sonuçların Teorem 4.2.1'in koşullarından türetilebileceğini gösteriyoruz. Teorem 4.2.1'den bazı yeni alternatif sonuçlar da elde edilecektir.

Teorem 6.6 [61]: (4.4) yapay sinir sisteminde, $f \in \mathscr{L}$ olsun ve sistem matrisleri (4.5) ile verilen aralık belirsizliklerini sağlasın. Aşağıdaki cebirsel kriterler karşılanırsa, (4.4) yapay sinir ağı global asimptotik robust kararlıdır.

$$\nu = r - \sigma_2(D) - \sqrt{||\hat{E}||_1 ||\hat{E}||_\infty} > 0$$

Burada $r = min(\frac{c_i}{l_i})$. Theorem 4.2.1'de, $\kappa_2 = \xi_8 = 1$ ve $q_i = 1, \forall i$ olmak üzere, Teorem 4.2.1 aşağıdaki formda yazılabilir:

$$\begin{aligned} \mu_i &= 2\frac{c_i}{l_i} - \varkappa - \frac{1}{\varkappa}\sigma_m^2(D) - \eta \sum_{j=1}^{n} \hat{e}_{ij} - \frac{1}{\eta}\sum_{j=1}^{n} \hat{e}_{ji} \\ &\geq 2r - \varkappa - \frac{1}{\varkappa}\sigma_m^2(D) - \eta ||\hat{E}||_\infty - \frac{1}{\eta}||\hat{E}||_1 > 0, \forall i \end{aligned}$$

$\varkappa = \sigma_m(D)$ ve $\eta = \frac{\sqrt{||\hat{E}||_1}}{\sqrt{||\hat{E}||_\infty}}$ olsun

$$\mu_i = 2(r - \sigma_2(D) - \sqrt{||\hat{E}||_1 ||\hat{E}||_\infty}) > 0, \forall i$$

Böylece Teorem 6.6, Teorem 4.2.1'in özel durumudur. Teorem 6.6'da tanımlanan kararlılık koşuluna alternatif bir koşul aşağıdaki gibi elde edilir:

Teorem 6.7: (4.4) yapay sinir sisteminde, $f \in \mathscr{L}$ olsun ve sistem matrisleri (4.5) ile verilen aralık belirsizliklerini sağlasın. Aşağıdaki cebirsel kriterler karşılanırsa, (4.4) yapay sinir ağı global asimptotik robust kararlı denir.

$$\hat{v} \;=\; r - \sigma_{\mathrm{m}}(D) - ||\hat{E}||_F > 0$$

Teorem 1'de, $\kappa_1 = \xi_1 = \xi_4 = \xi_6 = \omega = 1$ ve $p_i = r, \forall i$ olsun. Bu durumda Teorem 1 aşağıdaki formda yazılabilir:

$$\begin{aligned} \mu_i &= 2p_i\frac{c_i}{l_i} - p_i^2 - (1+\varsigma)\sigma_m^2(D) - (1+\frac{1}{\varsigma})||\hat{E}||_F^2 \\ &\geq r^2 - \sigma_m^2(D) - ||\hat{E}||_F^2 - \varsigma\sigma_m^2(D) - \frac{1}{\varsigma}||\hat{E}||_F^2, \forall i \end{aligned}$$

$\varsigma = \frac{||\hat{E}||_F}{\sigma_m(D)}$ olsun. Böylece,

$$\mu_i \;\geq\; r^2 - \sigma_m^2(D) - ||\hat{E}||_F^2 - 2\sigma_m(D)||\hat{E}||_F = r^2 - (\sigma_m(D) + ||\hat{E}||_F)^2 > 0, \forall i$$

Bu nedenle robust kararlılık koşulu $r > \sigma_m(D) + ||\hat{E}||_F$ şeklinde türetilir.

Teorem 6.8 [62]: (4.4) yapay sinir sisteminde, $f \in \mathscr{L}$ olsun ve sistem matrisleri (4.5) ile verilen parametre belirsizliklerini sağlasın. O halde, ω ve π pozitif sabitleri varsa, (4.4) yapay sinir ağı global asimptotik robust kararlıdır

$$\rho_i = 2r - \omega - \pi - \frac{1}{\pi}\sigma_2^2(D) - \frac{n}{\omega}\sum_{j=1}^{n}\hat{e}_{ji}^2 > 0, \forall i$$

Teorem 6.9 [63]: (4.4) yapay sinir sisteminde, $f \in \mathscr{L}$ olsun ve sistem matrisleri (4.5) ile verilen aralık belirsizliklerini sağlasın. O halde, ω ve π pozitif sabitleri varsa, (4.4) yapay sinir ağı global asimptotik robust kararlıdır

$$\bar{\rho}_i = 2r - \omega - \pi - \frac{1}{\pi}\sigma_1^2(D) - \frac{n}{\omega}\sum_{j=1}^{n}\hat{e}_{ji}^2 > 0, \forall i$$

Teorem 6.10 [64]: (4.4) yapay sinir sisteminde, $f \in \mathscr{L}$ olsun ve sistem matrisleri (4.5) ile verilen parametre belirsizliklerini sağlasın. O halde, aşağıdaki cebirsel kriterler karşılanırsa, (4.4) yapay sinir ağı global asimptotik robust kararlıdır.

$$\hat{\rho}_i = r - min(\sigma_1(D), \sigma_2(D)) - \frac{\sqrt{n}}{2}max(\sum_{j=1}^{n}(\hat{e}_{ji}^2 + \hat{e}_{ij}^2)) > 0, \forall i$$

Teorem 6.11 [65]: (4.4) yapay sinir sisteminde, $f \in \mathscr{L}$ olsun ve sistem matrisleri (4.5) ile verilen aralık belirsizliklerini sağlasın. O halde, aşağıdaki cebirsel kriterler karşılanırsa, (4.4) yapay sinir ağı global asimptotik robust kararlıdır.

$$\tilde{\rho}_i = r - min(\sigma_1(D), \sigma_2(D), \sigma_3(D), \sigma_4(D)) - \frac{\sqrt{n}}{2}max(\sum_{j=1}^{n}(\hat{e}_{ji}^2 + \hat{e}_{ij}^2)) > 0, \forall i$$

Teorem 4.2.1'de, $\kappa_2 = \xi_8 = 1$ ve $q_i = 1, \forall i$ olmak üzere. Teorem 4.2.1 aşağıdaki formu alır:

$$\begin{aligned} \mu_i &= 2\frac{c_i}{l_i} - \varkappa - \frac{1}{\varkappa}\sigma_m^2(D) - \eta\sum_{j=1}^{n}\hat{e}_{ij} - \frac{1}{\eta}\sum_{j=1}^{n}\hat{e}_{ji} \\ &\geq 2r - \varkappa - \frac{1}{\varkappa}\sigma_m^2(D) - \eta\sum_{j=1}^{n}\hat{e}_{ij} - \frac{1}{\eta}\sum_{j=1}^{n}\hat{e}_{ji} > 0, \forall i \end{aligned}$$

Buradan,

$$\sum_{j=1}^{n}\hat{e}_{ij} \leq \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(\hat{\eta} + \frac{1}{\hat{\eta}}\hat{e}_{ij}^2) = \frac{1}{2}(n\hat{\eta} + \frac{1}{\hat{\eta}}\sum_{j=1}^{n}\hat{e}_{ij}^2)$$

ve $\omega = \hat{\eta}n$ olsun. Bu durumda, aşağıdaki ifadeyi elde ederiz

$$\sum_{j=1}^{n}\hat{e}_{ij} \leq \frac{1}{2}(\omega + \frac{n}{\omega}\sum_{j=1}^{n}\hat{e}_{ij}^2)$$

Benzer şekilde

$$\sum_{j=1}^{n}\hat{e}_{ji} \leq \frac{1}{2}(\omega + \frac{n}{\omega}\sum_{j=1}^{n}\hat{e}_{ji}^2)$$

Şimdi aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz

$$\mu_i \geq 2r - \varkappa - \frac{1}{\varkappa}\sigma_m^2(D) - \frac{\eta}{2}(\omega + \frac{n}{\omega}\sum_{j=1}^{n}\hat{e}_{ij}^2) - \frac{1}{2\eta}(\omega + \frac{n}{\omega}\sum_{j=1}^{n}\hat{e}_{ji}^2) > 0, \forall i$$

Böylece, Teorem 6.8-6.11'in sonuçları, bazı uygun η ve $\varkappa$ değerleri seçilerek Teorem 4.2.1'den kolaylıkla türetilebilir. Teorem 6.8-6.11'dekilere alternatif bir koşul aşağıdaki gibi elde edilir:

Teorem 6.12: (4.4) yapay sinir sisteminde, $f \in \mathscr{L}$ olsun ve sistem matrisleri (4.5) ile verilen aralık belirsizliklerini sağlasın. O halde, aşağıdaki cebirsel kriterler karşılanırsa, (4.4) yapay sinir ağı global asimptotik robust kararlıdır.

$$\tilde{\mu}_i = r^2 - (1+\varsigma)\sigma_m^2(D) - (1+\frac{1}{\varsigma})\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\hat{e}_{jk}\hat{e}_{ji} > 0$$

Teorem 4.2.1'de, $\kappa_1 = \xi_1 = \xi_3 = \xi_6 = \omega = 1$ ve $p_i = r, \forall i$ olduğu durumda, doğrudan Teorem 6.12'nin koşullarını ifade eder.

Teorem 6.13 [66]: (4.4) yapay sinir sisteminde, $f \in \mathscr{L}$ olsun ve sistem matrisleri (4.5) ile verilen aralık belirsizliklerini sağlasın. O halde, ω ve η pozitif sabitleri varsa, (4.4) yapay sinir ağı global asimptotik robust kararlıdır

$$\theta_i = 2\frac{c_i}{l_i} - \omega - \frac{1}{\omega}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\hat{d}_{ki}\hat{d}_{kj} - \eta\sum_{j=1}^{n}\hat{e}_{ij} - \frac{1}{\eta}\sum_{j=1}^{n}\hat{e}_{ji} > 0, \forall i$$

Teorem 4.2.1'de, $\kappa_1 = \kappa_2 = \frac{1}{2}$, $\xi_2 = \xi_3 = \xi_6 = \xi_7 = \varsigma = 1$ ve $q_i = p_i = 1, \forall i$ seçilmesiyle aşağıdaki şekilde sonuçlanır

$$\begin{aligned}\mu_i = \; & 2\frac{c_i}{l_i} - \frac{\omega}{2} - \frac{1}{\omega}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\hat{d}_{ki}\hat{d}_{kj} - \frac{\eta}{2}\sum_{j=1}^{n}\hat{e}_{ij} - \frac{1}{2\eta}\sum_{j=1}^{n}\hat{e}_{ji} \\ & - \frac{1}{\omega}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\hat{e}_{jk}\hat{e}_{ji} - \frac{\varepsilon}{2}\sum_{j=1}^{n}\hat{d}_{ij} - \frac{1}{2\varepsilon}\sum_{j=1}^{n}\hat{d}_{ji} > 0, \forall i\end{aligned}$$

Böylece Teorem 6.13'ün sonuçları Teorem 4.2.1'de elde edilen koşulların bazı özel durumları olarak düşünülebilir.

Teorem 6.14 [67]: (4.4) yapay sinir sisteminde, $f \in \mathscr{L}$ olsun ve sistem matrisleri (4.5) ile verilen parametre belirsizliklerini sağlasın. O halde, ω pozitif sabiti varsa, (4.4) yapay sinir ağı global asimptotik robust kararlıdır

$$\nu_i \;=\; 2\frac{c_i}{l_i} - 2\sigma_1(D) - \omega \sum_{j=1}^{n} \hat{e}_{ij} - \frac{1}{\omega} \sum_{j=1}^{n} \hat{e}_{ji} > 0, \forall i$$

Teorem 4.2.1'de $\kappa_2 = \xi_8 = 1$ ve $q_i = 1, \forall i$ olmak üzere, Teorem 4.2.1 aşağıdaki formu alır:

$$\mu_i \;=\; 2\frac{c_i}{l_i} - \varkappa - \frac{1}{\varkappa}\sigma_m^2(D) - \eta \sum_{j=1}^{n} \hat{e}_{ij} - \frac{1}{\eta} \sum_{j=1}^{n} \hat{e}_{ji} > 0, \forall i$$

$\varkappa = \sigma_m(D)$ olsun.

$$\mu_i \;=\; 2\frac{c_i}{l_i} - 2\sigma_m(D) - \eta \sum_{j=1}^{n} \hat{e}_{ij} - \frac{1}{\eta} \sum_{j=1}^{n} \hat{e}_{ji} > 0, \forall i$$

Böylece, Teorem 6.14, Teorem 4.2.1'in özel durumudur.

Teorem 6.15 [68]: (4.4) yapay sinir sisteminde, $f \in \mathscr{L}$ olsun ve sistem matrisleri (4.5) ile verilen parametre belirsizliklerini sağlasın. O halde, aşağıdaki cebirsel kriterler karşılanırsa, (4.4) yapay sinir ağı global asimptotik robust kararlı olur.

$$\tilde{\nu} \;=\; 2r - 2\sigma_2(D) - ||\hat{E}||_1 - ||\hat{E}||_\infty > 0$$

Teorem 4.2.1'de, $\kappa_2 = \xi_8 = \eta = 1$ ve $q_i = 1, \forall i$ ve $\varkappa = \sigma_m(D)$. Bu durumda, Teorem 4.2.1 aşağıdaki formu alır

$$\mu_i \;=\; 2\frac{c_i}{l_i} - 2\sigma_m(D) - \sum_{j=1}^{n} \hat{e}_{ij} - \sum_{j=1}^{n} \hat{e}_{ji} \geq 2r - 2\sigma_m(D) - ||\hat{E}||_1 - ||\hat{E}||_\infty > 0, \forall i$$

Böylece, Teorem 6.15, Teorem 4.2.1'in özel durumudur.

Teorem 6.16 [69]: (4.4) yapay sinir sisteminde, $f \in \mathscr{L}$ olsun ve sistem matrisleri (4.5) ile verilen parametre belirsizliklerini sağlasın. O halde, aşağıdaki cebirsel kriterler karşılanırsa, (4.4) yapay sinir ağı global asimptotik robust kararlıdır.

$$\hat{\theta}_i = \frac{c_i^2}{l_i^2} - \xi_1 \sigma_m^2(D) - \xi_2 \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \hat{d}_{ki}\hat{d}_{kj} - \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} (\hat{d}_{ji}\hat{e}_{jk} + \hat{d}_{jk}\hat{e}_{ji} + \hat{e}_{jk}\hat{e}_{ji}) > 0, \forall i$$

Teorem 4.2.1'de, $\kappa_1 = \xi_3 = \xi_5 = \omega = \pi = 1$ ve $p_i = \frac{c_i}{l_i}, \forall i$ olmak üzere, Teorem 4.2.1 aşağıdaki formu alır

$$\mu_i \;=\; \frac{c_i^2}{l_i^2} - \xi_1 \sigma_m^2(D) - \xi_2 \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \hat{d}_{ki}\hat{d}_{kj} - \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \hat{e}_{jk}\hat{e}_{ji} - \sum_{k=1}^{n} \hat{d}_{ji}\hat{e}_{jk} - \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \hat{d}_{jk}\hat{e}_{ji} > 0, \forall i$$

Böylece, Teorem 6.16 basitçe, Teorem 4.2.1'in özel durumudur.

Teorem 6.17 [70]: (4.4) yapay sinir sisteminde, $f \in \mathscr{L}$ olsun ve sistem matrisleri (4.5) ile verilen parametre belirsizliklerini sağlasın. O halde, $0 \leq b \leq 1$, ω ve ς pozitif sabitleri varsa, (4.4) yapay sinir ağı global asimptotik robust kararlıdır

$$\rho_i \;=\; 2\frac{c_i}{l_i} - \omega - \frac{1}{\omega} \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \hat{d}_{ki}\hat{d}_{kj} - n\varsigma - \frac{1}{2\varsigma} \sum_{j=1}^{n} (b\hat{e}_{ji}^2 + (1-b)\hat{e}_{ij}^2) > 0, \forall i$$

Teorem 4.2.1'de, $\kappa_1 = \kappa_2 = \frac{1}{2}$, $\xi_2 = \xi_3 = \xi_6 = \xi_7 = \eta = 1$ ve $p_i = q_i = 1, \forall i$ olmak üzere, Teorem 4.2.1 aşağıdaki formu alır

$$\begin{aligned} \mu_i \;=\; & 2\frac{c_i}{l_i} - \frac{\omega}{2} - \frac{1}{\omega} \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \hat{d}_{ki}\hat{d}_{kj} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \hat{e}_{ij} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \hat{e}_{ji} \\ & - \frac{1}{\omega} \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \hat{e}_{jk}\hat{e}_{ji} - \frac{\varepsilon}{2}\sum_{j=1}^{n} \hat{d}_{ij} - \frac{1}{2\varepsilon}\sum_{j=1}^{n} \hat{d}_{ji} > 0, \forall i \end{aligned}$$

Buradan,

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \hat{e}_{ij} \leq \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n} (\varsigma + \frac{1}{\varsigma}\hat{e}_{ij}^2) = \frac{1}{4}(n\varsigma + \frac{1}{\varsigma}\sum_{j=1}^{n} \hat{e}_{ij}^2)$$

olur ve benzer şekilde

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \hat{e}_{ji} \leq \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n} (\varsigma + \frac{1}{\varsigma}\hat{e}_{ji}^2) = \frac{1}{4}(n\varsigma + \frac{1}{\varsigma}\sum_{j=1}^{n} \hat{e}_{ji}^2)$$

yukarıdaki eşitsizliği elde ederiz. Böylece,

$$\begin{aligned}\mu_i &= 2\frac{c_i}{l_i} - \frac{\omega}{2} - \frac{1}{\omega}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\hat{d}_{ki}\hat{d}_{kj} - \frac{n\varsigma}{2} - \frac{1}{4\varsigma}\sum_{j=1}^{n}(\hat{e}_{ij}^2 + \hat{e}_{ji}^2) \\ &\quad - \frac{1}{\omega}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\hat{e}_{jk}\hat{e}_{ji} - \frac{\varepsilon}{2}\sum_{j=1}^{n}\hat{d}_{ij} - \frac{1}{2\varepsilon}\sum_{j=1}^{n}\hat{d}_{ji} > 0, \forall i\end{aligned}$$

olur ve Teorem 6.17'nin sonuçları, Teorem 4.2.1'de elde edilen koşulların bazı özel durumları olarak düşünülebilir.

7. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez, çoklu zaman gecikmeli sürekli zamanlı Hopfield dinamik sinir ağlarının robust kararlılığını incelemiş ve Lipschitz aktivasyon fonksiyonlarının varlığında, tanımladığımız çoklu zaman gecikmeli dinamik sinir ağı modelinin global robust kararlılığı için yeni yeterli koşullar sunmuştur. Tezin en önemli katkılarından biri, robust kararlılık sonuçlarının türetilmesinde kullanılan parametre belirsizliği belli bir aralıkta tanımlanmış ara bağlantı matrisleri için yeni bir üst sınır normu türetmek ve modifiye edilmiş yeni Lyapunov fonksiyonu kullanmaktır. Bu tezin sonuçları ile daha önce yayınlanan çalışmalardaki robust kararlılık sonuçları arasında yapılan ayrıntılı karşılaştırma, bu tezde elde edilen robust kararlılık koşullarının, geçmişte türetilmiş, hemen hemen tüm robust kararlılık sonuçlarını genelleştirdiğini ortaya koymaktadır. Uygun Lyapunov fonksiyonellerinin kullanılması ve ara bağlantı matrisleri için yeni üst sınır normlarının bulunması, çoklu zaman gecikmesi terimleri ve Lipschitz aktivasyon fonksiyonları içeren doğrusal olmayan sinir ağlarının kararlılık analizinde kilit faktörler olduğundan, bu tezde kullanılan analiz teknikleri ve yöntemleri, çoklu zaman gecikmeli doğrusal olmayan dinamik sistemlerin kararlılık teorisi alanında daha fazla araştırma yapılmasına önemli katkılar yapabilecek niteliktedir.

KAYNAKLAR

[1] Hopfield, J.J., 1982, Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities, Proceedings of the National Academy of Sciences, 79, 2554-2558.

[2] Hertz, J., Krogh, A.,Palmer, R.G., 1991, r, Introduction to the Theory of Neural Computation, Redwood City, CA, USA: Addison-Wesley.

[3] Hopfield, J.J., 1984, Neurons with graded response have collective computational properties like those of two-state neurons, Proc. Nat. Acad. Sci. United States Amer., 81, 3088–3092.

[4] Kennedy, M.,Chua, L., 1988, Neural networks for nonlinear programming, IEEE Transactions on Circuits and Systems-I., 35, 554–562.

[5] Pearlmutter, B., 1995, Gradient calculations for dynamic recurrent neural networks: A survey IEEE Transactions on Neural Networks, 6, 1212–1228.

[6] Rodriguez-Vazquez,A., Dominguez-Castro, R., Rueda, A., Sanchez-Sinencio,E.,1990, Non-linear switched capacitor ’neural’ networks for optimization problems, IEEE Transactions on Circuits and Systems-I., 37, 384–398.

[7] Takahashi, Y., 1996, A unified constructive network model for problemsolving, Theoretical Computer Science, 156, 217–261.

[8] Tank, D., Hopfield,j., 1986, Simple ‘neural’ optimization networks: An A/D converter, signal decision circuit and a linear programming circuit, IEEE Transactions on Circuits and Systems-I., 33, 533–541.

[9] Forti, M., Manetti, S., Marini, M., 1992, A condition for global convergence of a class of symmetric neural circuits, IEEE Transactions on Circuits and Systems-I., 39, 480–483.

[10] Vidyasagar, M., 1993, Location and stability of high-gain equilibria of nonlinear neural networks, IEEE Transactions on Neural Networks, 4, 660–672.

[11] Zhang, H., Wang, Z., Liu, D., 1993, A comprehensive review of stability analysis of continuous-time recurrent neural networks, IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 25, 660–672.

[12] Baldi, P., Atiya, A., 1994, How delays affect neural dynamics and learning, IEEE Transactions on Neural Networks, 5, 612–621.

[13] Civalleri, P., Gilli, M., Pabdolfi, L., 1993, On stability of cellular neural networks with delay, Transactions on Circuits and Systems-I., 40, 157–165.

[14] Marcus, C., Westervelt, R., 1989, Stability of analog neural networks with delay, Physal Review A, 39, 347–359.

[15] Roska,T., Wu, C.,Balsi, M., Chua, L., 1992, Stability and dynamics of delay-type general and cellular neural networks, IEEE Transactions on Circuits and Systems-I., 39, 487–490.

[16] Wang, Z., Zhang, H., Liu, D., Feng, J., 2009, "LMI based global asymptotic stability criterion for recurrent neural networks with infinite distributed delays," in Advances in Neural Networks (Lecture Notes in Computer Science), 5551, 463–471.

[17] Roska,T., Wu, C., Chua, L., 1993, Stability of cellular neural networks with dominant nonlinear and delay-type templates, IEEE Transactions on Circuits and Systems-I., 40, 270–272.

[18] Cooke, K., Grossman, Z., 1982, Discrete delay, distributed delay and stability switches, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 86, 592–627.

[19] Wang, L., Zou, X., 2002, Harmless delays in Cohen–Grossberg neural networks, Physica D, Nonlinear Phenomena, 170, 162–173.

[20] Zhang, H., Wang, Z., Liu, D., 2007,"Robust exponential stability of recurrent neural networks with multiple time-varying delays," IEEE Transactions Circuits and Systems-II, 54, 730–734.

[21] Zhang, H., Wang, Z., Liu, D., 2008, Robust stability analysis for interval Cohen–Grossberg neural networks with unknown time varying delays," IEEE Transactions on Neural Networks, 19, 1942–1955.

[22] Zhang, H.,Wang, Z., Liu, D., 2009, "Global asymptotic stability and robust stability of a class of Cohen–Grossberg neural networks with mixed delays," IEEE Transactions on Circuits and Systems-I., 56, 616–629.

[23] Cao, J., Huang, D., Qu, Y., 2014, Global robust stability of delayed recurrent neural networks, Chaos, Solitons and Fractals, 23, 1229–1262.

[24] Arik, S., 2020, New criteria for global robust stability of delayed neural networks with norm-bounded uncertainties, IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 31, 1504-1513.

[25] Cao, J., Huang, D. S., Qu, Y., 2005, Global robust stability of delayed recurrent neural networks, Chaos, Solitons and Fractals, 23, 221-229.

[26] Ensari, T., Arik, S., 2010, New results for robust stability of dynamical neural networks with discrete time delays, Expert Systems with Applications, 37, 5925-5930.

[27] Faydasicok, O., Arik, S., 2013, A new upper bound for the norm of interval matrices with application to robust stability analysis of delayed neural networks, Neural Networks, 44, 64-71.

[28] Singh,V., 2007, Global robust stability of delayed neural networks: Estimating upper limit of norm of delayed connection weight matrix, Chaos, Solitons and Fractals, 32, 259–263.

[29] Ji,C., Zhang, H .G., Wei, Y., 2008, LMI approach for global robust stability of Cohen-Grossberg neural networks with multiple delays, Neurocomputing, 71, 475–485.

[30] Raja, R., Samidurai, R., 2012, New delay dependent robust asymptotic stability for uncertain stochastic recurrent neural networks with multiple time varying delays, Journal of the Franklin Institute, 349, 2108-2123.

[31] Lien, C.-H., 2011, Novel stability conditions for interval delayed neural networks with multiple time-varying delays, International Journal of Innovative Computing, Information and Control, 7, 433-444.

[32] Li, X., Jia, J., 2013, Global robust stability analysis for BAM neural networks with time-varying delays, Neurocomputing, 120, 499–503.

[33] Du, F. F., Lu, J. G., 2021, New criteria on finite-time stability of fractional-order Hopfield neural networks with time delays, IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 32, 3858 - 3866.

[34] Wang, H., Wei, G., Wen, S., Huang, T., 2020, Generalized norm for existence, uniqueness and stability of Hopfield neural networks with discrete and distributed delays, Neural Networks 128, 288-293.

[35] Guo, F., Luo, R., Qin, X., Yi, Y., 2021, A new criterion for exponential stability of a class of Hopfield neural network with time-varying delay based on Gronwall's inequality, Computational Intelligence and Neuroscience, 2021, Article ID 4713450, https://doi.org/10.1155/2021/471345.

[36] Li, X., Liu, X., Zhang, S., 2022, New criteria on the finite-time stability of fractional-order BAM neural networks with time delay, Neural Computing and Applications, 34, 4501–4517.

[37] Bento1, A. J. G., Oliveira, J. J., Silva, C. M., 2017, Nonuniform behavior and stability of Hopfield neural networks with delay, Nonlinearity, 30, 3088–3103.

[38] Wang, H., Yu, Y., Wen, G., Zhang, S., 2015, Stability Analysis of Fractional-Order Neural Networks with Time Delay Neural Processing Letters, 42, 479–500.

[39] Zeng,H. B., He, Y., Wu, M., Xiao, S. P., 2015, Stability analysis of generalized neural networks with time-varying delays via a new integral inequality, Neurocomputing, 161, 148-154.

[40] Ahn, C. K., 2012, Linear matrix inequality optimization approach to exponential robust filtering for switched Hopfield neural networks, Journal of Optimization Theory and Applications, 154, 573–587.

[41] Phat, Vu N., Nam, Phan T., 2010, Exponential stability of delayed Hopfield neural networks with various activation functions and polytopic uncertainties, Physics Letters A, 374, 2527-2533.

[42] Arik, S., 2000, Stability analysis of delayed neural networks, IEEE Transactions on Circuits and Systems-I., 47, 1089 - 1092.

[43] Arik, S., 2004, An analysis of exponential stability of delayed neural networks with time varying delays, Neural Networks, 17, 1027-1031.

[44] Forti, M., Tesi, A., 1995, New conditions for global stability of neural networks with application to linear and quadratic programming problems, IEEE Transactions on Circuits and Systems-I., 42, 354–366.

[45] Cohen, M., Grossberg, S., 1983, Absolute stability of global pattern formation and parallel memory storage by competitive neural networks, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics-B, Cybernetics, 13, 815–826.

[46] Liao, X. X., Wang, J.,2003, Algebraic criteria for global exponential stability of cellular neural networks with multiple time delays, IEEE Transactions on Circuits and Systems I, 50, 268-274.

[47] Zhang, H., Wang, Z., Liu, D., 2008, Global asymptotic stability of recurrent neural networks with multiple time-varying delays, IEEE Transactions on Neural Networks, 19, 855-873.

[48] Zhang, H., Wang, Z., 2007, Global asymptotic stability of delayed cellular neural networks, IEEE Transactions on Neural Networks, 18, 947–950.

[49] Chu, T., Zhang, Z., Wang, Z., 2003, A decomposition approach to analysis of competitive-cooperative neural networks with delay, Physics. Letters A, 312, 339–347.

[50] Yang, Z., Zhou, W., Huang, T., 2014, Exponential input-to-state stability of recurrent neural networks with multiple time-varying delays, Cognitive Neurodynamics, 8, 47-54.

[51] Wang, B., Zhong, S., Liu, X., 2008, Asymptotical stability criterion on neural networks with multiple time-varying delays, Applied Mathematics and Computation, 195, 809–818.

[52] Cao,J., Yuan, K., Li, H. X., 2006, Global asymptotical stability of recurrent neural networks with multiple discrete delays and distributed delays, IEEE Transactions on Neural Networks, 17, 1646-1651.

[53] Liao, X.F., Yu, J., 1998, Robust stability for interval Hopfield neural networks with time delay, IEEE Transactions Neural Networks, 9, 1042–1045.

[54] Sun, C., Feng, C.B., 2003, Global robust exponential stability of interval neural networks with delays, Neural Processing Letters, 17, 107–115.

[55] Liao, X.F., Wong, K.W., Wu, Z., Chen, G., 2001, Novel robust stability for interval delayed Hopfield neural, IEEE Transactions on Circuits and Systems- I, 48, 1355-1359.

[56] Chen, A., Cao, J., Huang, L., 2005, Global robust stability of interval cellular neural networks with time-varying delays, Chaos Solitons and Fractals, 23, 787–799.

[57] Li, X., Cao, J., 2004, Global exponential robust stability of delayed neural networks, International Journal of Bifurcation and Chaos, 14, 2925–2931.

[58] Chen, T. P., Rong, L. B., 2004, Robust global exponential stability of Cohen-Grossberg neural networks with time delays, IEEE Transactions on Neural Networks, 15, 203-206.

[59] Chen,T. P., Rong, L. B., 2006, New Results on the Robust Stability of Cohen–Grossberg Neural Networks with Delays, Neural Processing Letters, 24, 193–202.

[60] Chen, T. P., Rong, L. B., 2003, Delay-independent stability analysis of Cohen–Grossberg neural networks, Physics Letters A, 317, 436–449.

[61] Faydasicok, O., Arik, S., 2012, Further analysis of global robust stability of neural networks with multiple time delays, Journal of the Franklin Institute, 349, 813-825.

[62] Senan, S., Arik, S., Liu, D., 2012, New results for global robust stability of bidirectional associative memory neural networks with multiple time delays, Applied Mathematics and Computation, 218, 11472-11482.

[63] Senan, S., Arik, S., 2007, Global robust stability of bidirectional sssociative memory neural networks with multiple time delays, IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B, 37, 1375 - 1381.

[64] Faydasicok, O., Arik, S., 2013, A new robust stability criterion for dynamical neural networks with multiple time delays, Neurocomputing, 99, 290-297.

[65] Arik, S., 2014, A new condition for robust stability of uncertain neural networks with time delays, Neurocomputing, 128, 476-482.

[66] Arik, S., 2014, An improved robust stability result for uncertain neural networks with multiple time delays, Neural Networks, 54, 1-10.

[67] Senan, S., Arik, S., 2009, New results for global robust stability of bidirectional associative memory neural networks with multiple time delays, Chaos, Solitons and Fractals, 41, 2106-2114.

[68] Ozcan, N., 2011, A new sufficient condition for global robust stability of delayed neural networks, Neural Processing Letters, 34, 305-316.

[69] Arslan, E., 2021, Novel criteria for global robust stability of dynamical neural networks with multiple time delays, Neural Networks, 142, 119-127.

[70] Yucel, E., 2015, An analysis of global robust stability of delayed dynamical neural networks, Neurocomputing, 165, 436-443.

[71] Faydasicok, O., 2020, A Novel Condition for Stability of Cohen-Grossberg Neural Networks of Neutral-Type with Discrete Delays, 2020 International Conference on Electrical, Communication, and Computer Engineering (ICECCE), 1-6, doi: 10.1109/ICECCE49384.2020.9179310.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Ezgi AKTAŞ
Doğum Yeri	
Doğum Tarihi	
Uyruğu	[X] T.C. [ ] Diğer:
Telefon	
E-Posta Adresi	
Web Adresi	

Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Fakülte	Fen Fakültesi
Bölümü	Matematik Bölümü
Mezuniyet Yılı	2020

Yüksek Lisans	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Enstitü Adı	Fen Bilimleri
Anabilim Dalı	Matematik Anabilim Dalı
Programı	Matematik Programı
Mezuniyet Tarihi	2023

Makale ve Bildiriler

Makaleler

Aktas, E., Faydasicok O., ve Arik, S., 2022, Robust Stability of Dynamical Neural Networks with Multiple Time Delays : A Review and New Results, Artificial Intelligence Review (dergisine sunulmuştur)