Minkowski 3-Uzayında q-çatılı Tzitzeica Eğrileri Üzerine

Gamze Nur Şen

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik - Bilgisayar Anabilim Dalı

Eylül 2022

On The Tzitzeica Curves with q-frame in Minkowski 3-Space

Gamze Nur Şen

MASTER OF SCIENCE

Deparment of Mathematics - Computer

September 2022

Minkowski 3-Uzayında q-çatılı Tzitzeica Eğrileri Üzerine

Gamze Nur Şen

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik - Bilgisayar Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. Cumali Ekici

Eylül 2022

ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Prof. Dr. Cumali Ekici danışmanlığında hazırlamış olduğum “Minkowski 3-Uzayında q-çatılı Tzitzeica Eğrileri Üzerine” başlıklı tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim. 21/09/2022

Gamze Nur ŞEN

ÖZET

Bu tez çalışmasında, q-çatı yardımıyla Tzitzeica eğrileri, küresel eğriler ve küresel Tzitzeica eğrilerinin 3-boyutlu Öklid ve 3-boyutlu Minkowski uzaylarında incelenmesi amaçlanmıştır. Tzitzeica eğrisi, orijinden eğrinin keyfi bir noktasındaki oskülatör düzlemine olan uzaklığının karesi ile eğrinin torsiyonunun oranı, sıfırdan farklı sabit olan bir uzay eğrisidir.

Çalışmamız 5 bölümden oluşmaktadır. İlk iki bölüm olan Giriş ve Literatür Araştırması bölümlerinde, eğriler, Tzitzeica eğrileri ve küresel eğriler ile Bishop, Darboux ve q-çatı üzerine yapılan literatür taramasından bahsedilmiştir. Üçüncü bölümde, Öklidyen 3-uzayda ve Minkowski 3-uzayda yapacağımız hesaplamalarda kullanacağımız temel tanımlar ve teoremlere yer verilmiş, Frenet çatısı ve hesaplamaları yapacağımız q-çatı tanıtılmış ve bu iki çatı arasındaki bağıntılara değinilmiştir. Dördüncü bölümde, Öklidyen 3-uzayda tanımlanan Tzitzeica ve küresel eğriler ile bunlarla ilgili teoremler incelenmiş, q-çatı yardımıyla Öklidyen 3-uzayda Tzitzeica ve küresel eğriler tanımlanarak küresel Tzitzeica eğrileri ile ilgili teoremler ispatlanmıştır. Beşinci bölümde, Minkowski 3-uzayda tanımlanan spacelike ve timelike q-çatılar yardımıyla Tzitzeica ve küresel eğriler tanımlanmış, küresel Tzitzeica eğrileri ile ilgili teoremler ispatlanmış ve Lorentz küresi üzerinde gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Minkowski 3-uzayı, Frenet çatısı, q-çatısı, Tzitzeica eğrisi, Küresel eğri.

SUMMARY

This thesis, it is aimed to examine Tzitzeica, spherical and spherical Tzitzeica curves in 3-dimensional Euclidean and 3-dimensional Minkowski spaces by using q-frame. A Tzitzeica curve is a space curve for which the ratio of its torsion and the square of the distance from the origin to the osculating plane at an arbitrary point of the curve is non-zero constant.

Our study consists of 5 parts. In the Introduction and Literature Review chapters, which are the first and the second chapters, a literature review on curves, Tzitzeica curves and spherical curves and Bishop, Darboux and q-frame are mentioned. In the third chapter, the fundamental definitions and theorems that we will use in our calculations in Euclidean 3-space and Minkowski 3-space are given, the Frenet frame and the q-frame that we will do the calculations are introduced, and the relations between these two frames are explained. In the fourth chapter, Tzitzeica and spherical curves defined in Euclidean 3-space and related theorems are investigated, and defining Tzitzeica and spherical curves in Euclidean 3-space by using q-frame, the theorems related to spherical Tzitzeica curves are proved. In the fifth chapter, Tzitzeica and spherical curves are defined by using spacelike and timelike q-frames defined in Minkowski 3-space, theorems about spherical Tzitzeica curves are proved and shown on Lorentz sphere.

Key Words: Minkowski 3-space, Frenet frame, q-frame, Tzitzeica curve, spherical curve.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİLLER DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Cismi
$\mathbb{R}_1^3$	Üç Boyutlu Minkowski Uzayı
S_1^2	Lorentzian Birim Küre
H_0^2	Hiperbolik Birim Küre
α	Uzay Eğrisi
$\mathbf{t}$	Birim Teğet Vekt ör
$\mathbf{n}$	Birim Normal Vektör
$\mathbf{b}$	Birim Binormal Vektör
$\mathbf{n}_q$	Quasi-Normal Vekt ör
$\mathbf{b}_q$	Quasi-Binormal Vektör
k_1	Birinci q -Eğriliği
k_2	İkinci q-Eğriliği
k_3	Üçünc ü q-Eğriliği
$\|.\|$	Norm Fonksiyonu
$<,>$	Skaler Çarpım Fonksiyonu
d	Uzaklık Fonksiyonu
d_{osc}	Oskülatör Düzlemin Orijine Uzaklığı
d_{tan}	Teğet Düzlemin Orijine Dik Uzaklığı
d_{qos}	q-oskülatör Düzlemin Orijine Uzaklığı
$\wedge$	Vektörel Çarpım Fonksiyonu

1. GİRİŞ VE AMAÇ

Eğriler ve eğriler teorisi, bilindiği üzere diferensiyel geometrinin temel yapı taşlarından biridir. Eğrilerin diferensiyel geometrisi üzerine bilinen ilk çalışma Huygens tarafından yapılmıştır. Eğrinin, düzlem üzerindeki bir t parametresine bağlı olan bir noktanın hareket etmesiyle oluştuğu ise Newton tarafından yapılmıştır.

Eğriler üzerine olan çalışmalarda çatı alanları önemli bir yer kaplamaktadır. Öklidyen 3-uzayda uzay eğrileri üzerine çalışmalar 1847 yılında Frenet ve 1851 yılında Serret tarafından çalışılmıştır. Onlar tarafından bugünkü ismiyle Serret-Frenet çatısı olarak bilinen ortonormal çatı ortaya çıkmıştır. Frenet çatısı dışında bilinen bir diğer çatı ise eğrinin hızı ve yüzeyin normali tarafından oluşturulan Darboux çatısıdır. 2015 yılında Şentürk ve Yüce tarafından, Öklidyen 3-uzayda Darboux çatısıyla regle yüzeylerin karakteristik özellikleri verilmiştir. Frenet ve Darboux çatıları dışında 1975 yılında L.R.Bishop tarafından tanımlan Bishop çatısı da mevcuttur. Bu çatının yeni bir versiyonu Yılmaz ve Turgut tarafından 2010 yılında verilmiştir. Bu çatılar dışında pek çok farklı çatı yapısı bulunmaktadır. Bunlardan biri, çalışmamızda da kullanacağımız çatı olan q-çatıdır. Dede tarafından bir uzay eğrisi boyunca tanımlanan q-çatı üzerinde de önemli çalışmalar bulunmaktadır. Ekici vd. 2019 çalışmasında Minkowski 3-uzayında q-çatıya göre Smarandache eğrileri üzerine çalışmalar yapılmıştır.

Son yıllarda bazı özel eğrilere ve bu eğrilerin özellikleri üzerine çalışmalar yapılmaya başlanmıştır. Bu özel eğrilerden biri de çalışmamızda adı geçen Tzitzeica eğrileridir. Bu eğriler, Roman matematikçi Gheorgha Tzitzeica tarafından tanımlanmıştır. Karacan ve Bükcü tarafından 2009 yılında 3-boyutlu Minkowski uzayında, bir harmonik denklemin çözümü ile bulunan eliptik silindirik Tzitzeica eğrileri verilmiştir. 2012 yılında, Bila tarafından 3-boyutlu Öklid uzayında Tzitzeica eğri denklemi, doğrusal olmayan bir diferensiyel denklem şeklinde alınmış ve Tzitzeica eğrileri bu yapı ile tekrar incelenmiştir. Bayram vd. 2018 de 3-boyutlu Öklid uzayında Tzitzeica eğrileri tanımlanmış ve küresel Tzitzeica eğrileri incelenmiştir. Bunlar doğrultusunda çalışmamızda hem Öklidyen 3-uzayda hem de Minkowski 3-uzayında küresel Tzitzeica eğrileri üzerine incelemeler yapılıp bu incelemeler q-çatı üzerinde devam ettirilip q-çatı için küresel ve Tzitzeica eğrilerinin tanımlanması ve küresel Tzitzeica eğrisi olması durumunun incelenmesi amaçlanmıştır.

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

Eğriler teorisi , diferensiyel geometrinin önemli çalışma alanlarındandır. Eğrilere olan ilgi, matematiksel çalışmalardan çok daha önce sanatta, dekoratif kullanımlarda, tarih öncesi çağlardaki pek çok örnekte görülebilir. Sezgisel olarak bir eğri, hareketli bir noktanın bıraktığı iz olarak düşünülebilir. Bu tanım, Öklid'in Elements kitabında 2000 yıldan uzun bir süre önce ortaya çıkmıştır. Eğriler teorisindeki önemli gelişmeler, Descartes tarafından 17. yüzyılda analitik geometrinin tanıtılmasıyla başlamıştır. Eğri tanımının, düzlem üzerindeki bir noktanın hareketi ile bir t parametresine bağlı olarak yapılması Newton sayesinde olmuştur.

Diferensiyel geometride, eğriler ve yüzeyler üzerine çalışma yaparken çatı alanları önemli bir yer kaplamaktadır. 3-boyutlu Öklid uzayında uzay eğrileri ve bu eğrilerin diferensiyel geometrisi üzerine çalışmalar 1847 yılında Frenet tarafından başlamış ve ondan habersiz olarak 1851 yılında Serret tarafından da çalışılmaya devam edilmiştir. Onlar tarafından bir uzay eğrisi, bir yay parametresine bağlı olarak tanımlanmış ve buradan yola çıkılarak bugünkü adıyla Serret-Frenet çatısı olarak bilinen ortonormal çatı elde edilmiştir. En bilinen ve üzerinde bir çok çalışmaya sahip olan bu çatı dışında bilinen bir diğer çatı ise Darboux çatısıdır. Bu çatı, eğrinin hızı ve yüzeyin normali tarafından oluşturulmuştur. Çatıya ismi, Fransız matematikçi Jean Gaston Darboux'nun 1887 ve 1896 yılları arasında yayınlanan 4 ciltlik koleksiyonundaki çalışmalarının ardından verilmiştir. O zamandan beri Darboux çatı üzerine pek çok çalışma yapılmıştır. Bunlardan biri 2015 yılında Şentürk ve Yüce tarafından yapılan, Öklidyen 3-uzayda Darboux çatısıyla regle yüzeylerin karakteristik özelliklerinin verildiği çalışmadır. Bir diğeri ise yine Öklidyen 3-uzayda Darboux çatısıyla paralel regle yüzeylerin karakteristik özelliklerinin incelendiği çalışmadır. Bu çalışmalar gibi daha pek çok çalışmada Darboux çatıya yer verilmiştir. Frenet ve Darboux çatıları dışında bilinen bir diğer çatı ise Bishop çatısıdır. Bu çatı, eğrilerin alternatif ya da paralel çatısı olarak bilinmektedir. Bishop çatısı, paralel vektör alanları yardımıyla 1975 yılında L.R.Bishop tarafından tanımlanmıştır. Bu çatı üzerine de çalışmalar mevcuttur. Yılmaz ve Turgut tarafından 2010 yılında Bishop çatısının yeni bir versiyonu verilmiş ve küresel resimlere bir uygulamasından bahsedilmiştir. Yine 2010 yılında Yılmaz tarafından Minkowski 3-uzayında Bishop çatısına göre bazı özel spacelike eğrilerin konum vektörleri incelenmiştir. Bu 3 çatı dışında, çalışmamızda da kullanacağımız çatı olan q-çatı olarak bilinen bir çatı daha vardır. Coquillart tarafından 1987 senesinde tanımlanan quasi-normal vektörü yardımıyla q-çatı elde edilmiştir. Bu çatının altında yatan ana fikir, quasi-normal vektörü olarak adlandırılan vektörün, izdüşüm vektörü ile teğet vektörün vektörel çarpımıyla hesaplanmasıdır. Dede vd. tarafından 2015 yılında bir uzay eğrisi boyunca quasi-normal vektörü kullanılarak tanımlanan q-çatı, Frenet çatısına göre bazı avantajlar sağlamaktadır. Bu avantajlardan ilki bu çatının, eğrinin ikinci türevinin tanımsız olduğu durumda da tanımlanabilmesi ve ikincisi de teğet etrafında gereksiz bükülmenin önüne geçmesidir. Bu avantajlar kullanılarak bu çatı üzerinde de önemli çalışmalar yapılmıştır. Ekici vd. 2019 da Minkowski 3-uzayında q-çatıya göre Smarandache eğrileri üzerine çalışmalar yapılmıştır. Ekici vd. 2021 yılında Öklidyen 3-uzayda q-çatı vektörlerine göre regle yüzeyler çalışılmıştır.

Küresel eğriler ve özellikleri, eğriler teorisinde önemli bir yere sahiptir. Bu tür eğriler üzerine bir çok çalışma yapılmıştır. 1998 yılında Bektaş vd. tarafından 3-boyutlu Minkowski uzayında timelike küresel eğrilerin karakterizasyonu verilmiştir. 1999 yılında Pekmen vd. tarafından Lorentzian küresel spacelike eğrilerin karakterizasyonu verilmiştir. 2000 yılında ise Petrovic-Torgasev vd. tarafından spacelike küresel eğrilerin timelike ve null asli normali kullanılarak elde edilen bazı karakterizasyonları verilmiştir. Chen'in 2003 yılında yayınlanan makalesinde, 3-boyutlu Öklid uzayında konum vektörü normal düzleminde bulunan eğrilerin küresel eğriler olduğu söylenmiştir.

Salkowski tarafından 1909 yılında Salkowski ve anti-Salkowski eğrileri olarak tanımlanan eğriler, kısaca eğriliklerin sabit olup olmama durumlarına göre isimlendirilmektdir. Salkowski ve anti-Salkowski eğrileri üzerine de birçok çalışma mevcuttur. 2009 yılında Monterde tarafından yapılan çalışmada sabit eğrilikli ancak sabit olmayan torsiyona sahip eğrilerin bir ailesinden bahsedilmiştir. Yine 2009 yılında Ali tarafından yapılan çalışmada ise spacelike Salkowski ve anti-Salkowski eğrileri spacelike asli normal ile Minkowski 3-uzayında incelenmiştir.

Son yıllarda yukarıda bahsedilen eğrilerden farklı olarak bazı özel eğri türleri üzerine çalışmalar yapılmıştır. Bunlardan bizim için en önemli olanı Tzitzeica eğrileridir. Tzitzeica eğrileri olarak adlandırılan eğrilerin bir sınıfı Roman matematikçi Gheorgha Tzitzeica (1872-1939) tarafından 1911 yılında tanımlanmıştır. Bir eğrinin Tzitzeica eğrisi olması için, orijinden eğrinin keyfi bir noktasındaki oskülatör düzlemine olan uzaklığının karesi ile eğrinin torsiyonunun oranının sıfırdan farklı bir sabit olması gerektiği şartı gösterilmiştir. Benzer hesaplamalar ve asimptotik çizgi yapısı diğer çalışmasında verilmiştir (Tzitzeica, 1925). Crasmareanu tarafından 2002 yılında bir Öklidyen uzayda, Tzitzeica şartını sağlayan eliptik ve hiperbolik silindirik eğrileri belirlenmiştir. Karacan vd. tarafından 2008 yılında Minkowski 3-uzayında hiperbolik silindirik Tzitzeica eğrileri çalışılmıştır. Yine Karacan vd. tarafından 2009 yılında 3-boyutlu Minkowski uzayında eliptik silindirik Tzitzeica eğrileri, bir harmonik denklemin çözümüne bağlı olarak elde edilmiştir. Ayrıca bir eğrinin spacelike, timelike veya null eliptik silindirik Tzitzeica eğrisi olması için gereken koşullar verilmiştir. Bobe vd. tarafından 2012'de 3-boyutlu Öklid ve Minkowski uzaylarında Tzitzeica eğri ve yüzeyleri, merkez afin değişmezleri tarafından incelenmiştir. 2012 yılında, Bila tarafından 3-boyutlu Öklid uzayında Tzitzeica eğri denklemi, lineer olmayan bir diferensiyel denklem olarak ele alınmış ve Tzitzeica eğrileri yeniden incelenmiştir. Yine 2012 yılında Bobe vd. tarafından, Minkowski uzaylarında Tzitzeica eğrileri ve yüzeyleri 3 merkez afin değişmez fonksiyonu ile yeniden tanımlanmıştır. Bayram vd. 2018 de 3-boyutlu Öklid uzayında Tzitzeica eğrileri tanımlanmış ve küresel Tzitzeica eğrileri incelenmiştir. Yine 2018 yılında, Özerdem tarafından 3-boyutlu Minkowski uzayında null olmayan, null ve pseudo-null Tzitzeica eğrileri üzerine çalışılmıştır. 2021 yılında Tunç tarafından Tzitzeica eğrilerinin ve yüzeylerinin bir karakterizasyonu verilmiş ve 4-boyutlu Öklid uzayında hiperyüzeyler için Tzitzeica şartı üzerine incelemeler yapılmıştır. Eren vd. tarafından 2021 yılında Bishop çatıları kullanılarak Tzitzeica eğrilerinin karakterizasyonları verilmiştir. Bayram vd. tarafından 2021 yılında Öklidyen 3-uzayda Tzitzeica yüzeyleri üzerine bir çalışma yapılmıştır. Sarıaydın ve Yazla tarafından 2022 yılında, k izdüşüm vektörü $(0, 0, 1)$ alınarak q-çatı için Tzitzeica eğrilerinin bazı karakterizasyonları verilmiş ve Tzitzeica eğrisinin harmonik tanjant, normal ve binormal olup olmadığı incelenmiştir.

Bu tez çalışmasının amacı, 3-boyutlu Öklid uzayında quasi-normal vektörü yardımıyla elde edilen q-çatı ve 3-boyutlu Minkowski uzayında var olan q-çatılar yardımıyla Tzitzeica eğrilerini ve küresel eğrileri tanımlayıp küresel Tzitzeica eğrileri üzerine inceleme yapmaktır. Yapılan incelemeler, 3-boyutlu Öklid uzayında küre üzerinde ve 3-boyutlu Minkowski uzayında ise Lorentzian küresi üzerinde gösterilmiş ve bazı örneklere yer verilmiştir.

3. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, çalışma boyunca kullanılacak tanımlar ile teoremler ele alınmıştır.

3.1 Eğriler ile Frenet Çatısı

Diferensiyel geometri ile ilgili bazı alanlarda Frenet üçyüzlüsü kullanılır. Genel olarak Frenet çatısı (üçyüzlüsü) klasik eğriler üzerine konuların incelenmesinde ve küresel eğriler üzerine çalışılan alanlarda kullanılır. Bu kısımda bir uzay eğrisi üzerinde en fazla ele alınan Frenet çatısı hakkında bilgi aktarılmıştır.

Tanım 3.1: $\mathbb{R}^3$ vektör uzayında $\mathbf{x} = (a_1, a_2, a_3)$ ile $\mathbf{y} = (b_1, b_2, b_3)$ iki vektör olmak üzere

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \quad = \quad \sum_{i=1}^{3} a_i b_i$$

şeklinde Öklid iç çarpımı tanımlanır. Bu durumda $\mathbb{R}^3$ Afin uzayı 3-boyutlu Öklid uzayı adını alır. Bu ise $\mathbb{E}^3$ sembolü ile temsil edilir (Hacısalioğlu, 1998).

Tanım 3.2: Uzayda bir P noktasının bir düzleme uzaklığı diye P nin düzlem üzerine dik izdüşümünün ayağı S olmak üzere $\overrightarrow{PS}$ vektörünün uzunluğuna denir, burada A noktası düzlem üzerinde bir nokta ve $\overrightarrow{n}$ düzlemin normali olmak üzere

$$l = d(P, S) = || \overrightarrow{PS} || = \frac{| < \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{n} > |}{|| \overrightarrow{n} ||}$$

şeklindedir (Yüce, 2017).

Tanım 3.3: Bir açık aralık $I \subseteq \mathbb{R}$ iken (I, α) koordinat komşuluğu ile $\alpha : I \to E^n,\ I \subseteq \mathbb{R}$ için $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), ..., \alpha_n(t))$ parametrik olarak verilir. Uzay eğrisi diye $M = \alpha(I) \subset E^n$ kümesine denir. Eğri için α sembolü kullanılacaktır. (Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 3.4: M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\forall s \in I$ için, $\|\alpha'(s)\| = 1$ ise M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğuna göre birim hızlı eğri adını alır. Bu durumda s, yay-parametresi olarak adlandırılır (Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 3.5: $M = \alpha(I) \subset E^3$ eğrisi birim hızlı eğri olmak üzere $\mathbf{V}_1 = \mathbf{t}$ birim teğet, $\mathbf{V}_2 = \mathbf{n}$ birim normal, $\mathbf{V}_3 = \mathbf{b}$ binormal vektörleri için $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ kümesine Frenet çatısı (3-ayaklısı) denir. Bu durumda

$$\mathbf{t}(s) = \alpha'(s), \quad \mathbf{n}(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|} \text{ ve } \quad \mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}(s) \tag{3.1}$$

şeklinde yazılır. Dolayısıyla

$$\mathbf{b}(s) = \frac{\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}$$

bulunur (Sabuncuoğlu, 2010).

Tanım 3.6: $M \subset E^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verildiğinde $s \in I$ değeri için $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet r-ayaklısı $\{\mathbf{V}_1(\mathbf{s}), ..., \mathbf{V}_r(\mathbf{s})\}$ olmak üzere $1 \leq i < r$ değerlerine karşılık

$$\begin{aligned} k_i: \quad & I \rightarrow \mathbb{R} \\ & s \rightarrow k_i(s) = \langle \mathbf{V}_i'(s), \mathbf{V}_{i+1}(s) \rangle \end{aligned} \tag{3.2}$$

biçiminde verilen k_i fonksiyonuna $\alpha(I) \subset E^n$ eğrisinin i-yinci eğrilik fonksiyonu adı verilir (Hacısalihoğlu, 1998).

Teorem 3.1: $M = \alpha(I) \subset E^n$ eğrisi $s \in I$ yay-parametresi ile verilsin. $k_i(s)$ eğrilik fonksiyonları ile $\{\mathbf{V}_1(\mathbf{s}), ..., \mathbf{V}_r(\mathbf{s})\}$ Frenet r-ayaklısı için türev denklemleri, sırasıyla, $\mathbf{V}_1'(s) = k_1(s)\mathbf{V}_2(s)$, $\mathbf{V}_i'(s) = -k_{i-1}(s)\mathbf{V}_{i-1}(s) + k_i(s)\mathbf{V}_{i+1}(s) \quad 1 < i < r$ ve $\mathbf{V}_r'(s) = -k_{r-1}(s)\mathbf{V}_{r-1}(s)$ şeklindedir (Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 3.7: $M = \alpha(I) \subset E^3$ eğrisi birim hızlı eğri olmak üzere eğrinin $\alpha(s)$ deki $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ Frenet 3-ayaklısı için

$$\begin{aligned} \mathbf{t}'(s) &= k_1(s)\mathbf{n}(s) \\ \mathbf{n}'(s) &= -k_1(s)\mathbf{t}(s) + k_2(s)\mathbf{b}(s) \\ \mathbf{b}'(s) &= -k_2(s)\mathbf{n}(s) \end{aligned} \tag{3.3}$$

eşitliklerine Frenet formülleri adı verilir. $\kappa = k_1$ eğrilik ile $\tau = k_2$ burulma şeklinde sembolize de edilir. Burada türev denklemleri

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}' \\ \mathbf{b}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

biçiminde yazılır (Hacısalihoğlu, 1998).

Sonuç 3.1: $M = \alpha(I) \subset \mathbb{R}^3$ eğrisi birim hızlı eğri olmak üzere eğrinin eğriliği $k_1(s) = \|\alpha''(s)\|$ değeridir (Do Carmo, 1976).

Tanım 3.8: $M = \alpha(I) \subset E^3$ eğrisi birim hızlı eğri olmak üzere $k_i(s)$ i-yinci eğriliği ile $\{\mathbf{V}_1(s), \mathbf{V}_2(s), ..., \mathbf{V}_p(s)\}$ Frenet p-ayaklısı

$$F_i(s) = \alpha^{(i)}(s) - \sum_{k<i} \left\langle \alpha^{(i)}(s), \mathbf{V}_k(s) \right\rangle \mathbf{V}_k(s), \ 1 \leq i \leq p$$

için

$$k_i(s) = \frac{\|F_{i+1}(s)\|}{\|F_i(s)\|}, \ \ 1 \leq i \leq p$$

biçimindedir (Hacısalihoğlu, 2000).

Sonuç 3.2: Birim hızlı olmayan $M = \alpha(I) \subset E^3$ eğrisi için eğrilik ve torsiyon, sırasıyla

$$\kappa = \frac{\|\alpha' \wedge \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} \quad \text{ve} \quad \tau = \frac{\det(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|^2}$$

ayrıca $v = \|\alpha'(s)\|$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}' \\ \mathbf{b}' \end{bmatrix} = v \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

türev denklemleri verilir (Hacısalihoğlu, 2000).

Örnek 3.9: $M = \alpha(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^3$ eğrisi $\alpha(s) = \left(1 + \frac{4}{5}s, \sin(\frac{3s}{5}), \cos(\frac{3s}{5})\right)$ parametrik olarak verilsin. Buna göre Frenet elemanlarını bulalım.

Öncelikle eğrinin türevi hesaplanırsa

$$\alpha'(s) = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\cos(\frac{3s}{5}), -\frac{3}{5}\sin(\frac{3s}{5})\right)$$

bulunur. Her $s \in I$ değerine karşılık $\|\alpha'(s)\| = 1$ bulunduğundan s yay-parametresidir. **t** birim teğet vektörü, $\mathbf{t}(s) = \alpha'(s)$ olur. Yani

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(s) &= \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\cos(\frac{3s}{5}), -\frac{3}{5}\sin(\frac{3s}{5})\right) \\ \mathbf{t}'(s) &= \left(0, -\frac{9}{25}\sin(\frac{3s}{5}), -\frac{9}{25}\cos(\frac{3s}{5})\right) \end{aligned}$$

elde edilir. O halde $\kappa(s) = \|\mathbf{t}'(s)\|$ eğrilik tanımlanması olan Sonuç 3.1 ifadesi kullanılırsa

$$\begin{aligned} \kappa(s) &= \sqrt{\langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{t}'(s) \rangle} \\ &= \sqrt{\left\langle \left(0, -\frac{9}{25}\sin(\frac{3s}{5}), -\frac{9}{25}\cos(\frac{3s}{5})\right), \left(0, -\frac{9}{25}\sin(\frac{3s}{5}), -\frac{9}{25}\cos(\frac{3s}{5})\right) \right\rangle} \\ &= \frac{9}{25} \end{aligned}$$

olur. Birim normal vektör alanı ise

$$\begin{aligned}\mathbf{n}(s) = \frac{\mathbf{t}'(s)}{\|\mathbf{t}'(s)\|} &= \frac{\left(0, -\frac{9}{25}\sin(\frac{3s}{5}), -\frac{9}{25}\cos(\frac{3s}{5})\right)}{\frac{9}{25}} \\ &= \left(0, -\sin(\frac{3s}{5}), -\cos(\frac{3s}{5})\right)\end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}\mathbf{b}(s) &= \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}(s) \\ &= \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\cos(\frac{3s}{5}), -\frac{3}{5}\sin(\frac{3s}{5})\right) \wedge \left(0, -\sin(\frac{3s}{5}), -\cos(\frac{3s}{5})\right) \\ &= \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\cos(\frac{3s}{5}), -\frac{4}{5}\sin(\frac{3s}{5})\right)\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\mathbf{b}'(s) = \left(0, -\frac{12}{25}\sin(\frac{3s}{5}), -\frac{12}{25}\cos(\frac{3s}{5})\right)$$

olduğundan torsiyon ise

$$\begin{aligned}\tau(s) &= -\left\langle \left(0, -\frac{12}{25}\sin(\frac{3s}{5}), -\frac{12}{25}\cos(\frac{3s}{5})\right), \left(0, -\sin(\frac{3s}{5}), -\cos(\frac{3s}{5})\right)\right\rangle \\ &= -\frac{12}{25}\end{aligned}$$

olarak ifade edilir.

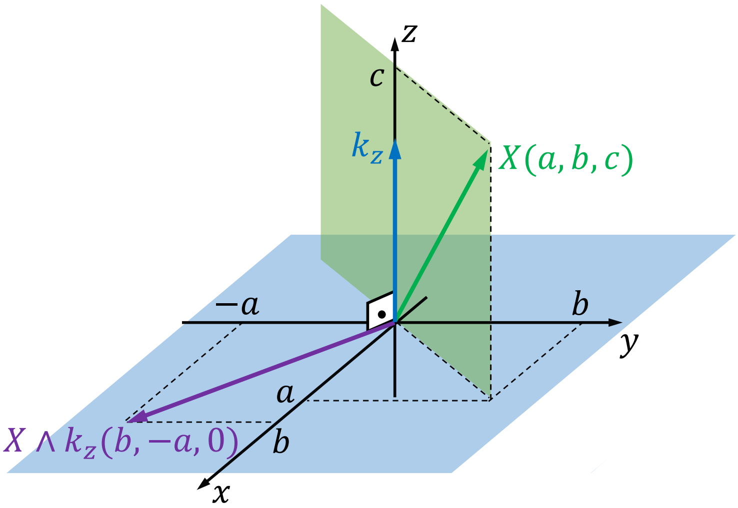
3.2 Uzay Eğrisi Boyunca q-Çatı

Bu kısımda, bir uzay eğrisi için q-çatı ile q-eğrilik tanımları verilmiştir. Bir uzay eğrisinin her bir noktasındaki q-çatının nasıl hesaplanacağını tanımlayan Dede vd. bu çatının Frenet çatısı ile arasındaki farkları da ifade etmiştir. Bu farklardan biri, bir eğri için ikinci türev tanımsız olsa dahi çatının hesaplanabilir olması ve bir diğeri ise eğri boyunca çatı vektörlerinin gereksiz bükülmesini önlemesidir. Bir doğrunun eğriliği her zaman sıfır olup, bu durumda dahi q-çatı hesaplanmaktadır. $\mathbf{k}_z = (0,0,1)$ ile $\mathbf{X} = (a,b,c)$ alınırsa

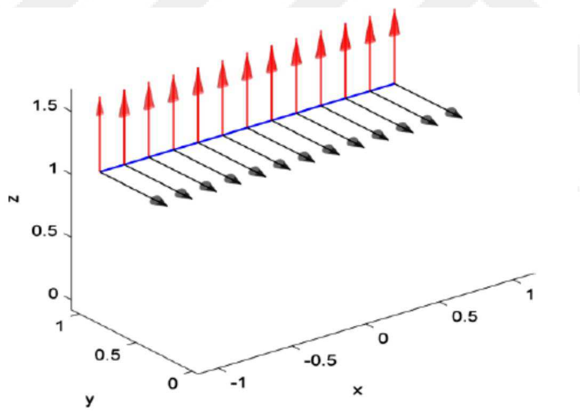
$$\mathbf{X} \wedge \mathbf{k}_z = (a,b,c) \wedge (0,0,1) = (b,-a,0)$$

bulunur. Bunun anlamı ise $\mathbf{X}$ vektörüne dik olan ve xy-düzleminde bulunan bir vektör olmasıdır. Yani $\mathbf{X} \wedge \mathbf{k}_z$ vektörü, $\mathbf{X}$ vektörünün izdüşüm vektörüdür. Burada $\mathbf{k}$ izdüşüm vektörünün, koordinatlar boyunca alınan birim vektör olduğuna dikkat edelim. Burada, eğri için $\mathbf{t}$ teğet vektörü ve $\mathbf{k}$ izdüşüm vektörü paralel olduğunda $\mathbf{t} \wedge \mathbf{k} = 0$ olacaktır.

x-ekseni, y-ekseni ile z-ekseni yönlerindeki q-çatılar, sıra ile $\{\mathbf{t}, \mathbf{n_q}, \mathbf{b_q}, \mathbf{k}_x\}$, $\{\mathbf{t}, \mathbf{n_q}, \mathbf{b_q}, \mathbf{k}_y\}$ ve $\{\mathbf{t}, \mathbf{n_q}, \mathbf{b_q}, \mathbf{k}_z\}$ şeklindedir. Şekil 3.1 üzerinde gösterilen y-ekseni



Şekil 3.1 İzdüşüm vektörü



Şekil 3.2 Doğru boyunca q-çatı gösterimi

doğrultusundaki q-çatının sırasıyla $\mathbf{k}_x$, $\mathbf{k}_y$ ve $\mathbf{k}_z$ izdüşüm vektörleri $\mathbf{k}_x = (1,0,0)$, $\mathbf{k}_y = (0,1,0)$ ve $\mathbf{k}_z = (0,0,1)$ şeklindedir (Dede vd., 2015).

Tanım 3.10: Uzay eğrisi için q-çatı

$$\mathbf{t} = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}, \quad \mathbf{n_q} = \frac{\mathbf{t} \wedge \mathbf{k}}{\|\mathbf{t} \wedge \mathbf{k}\|} \quad \text{ve} \quad \mathbf{b_q} = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}_q \tag{3.6}$$

biçimindedir. **k** izdüşüm vektörü olmak üzere **t** birim teğet, $\mathbf{n}_q$ birim quasi-normal ve $\mathbf{b}_q$ ise birim quasi-binormal şeklinde isimlendirilir (Dede vd., 2015).

Teorem 3.2: Uzay eğrisi için quasi çatısının türev formülleri

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}_\mathbf{q}' \\ \mathbf{b}_\mathbf{q}' \end{bmatrix} = \|\alpha'\| \begin{bmatrix} 0 & k_1 & k_2 \\ -k_1 & 0 & k_3 \\ -k_2 & -k_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n}_\mathbf{q} \\ \mathbf{b}_\mathbf{q} \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

biçimindedir. Tıpkı Frenet formüllerine benzer varyasyon denklemleridir. q-eğrilikler

$$k_1 = \frac{\langle \mathbf{t}', \mathbf{n}_\mathbf{q} \rangle}{\|\alpha'\|}, \quad k_2 = \frac{\langle \mathbf{t}', \mathbf{b}_\mathbf{q} \rangle}{\|\alpha'\|} \quad \text{ve } k_3 = \frac{\langle \mathbf{n}_\mathbf{q}', \mathbf{b}_\mathbf{q} \rangle}{\|\alpha'\|}$$

şeklinde yazılır (Dede vd., 2015).

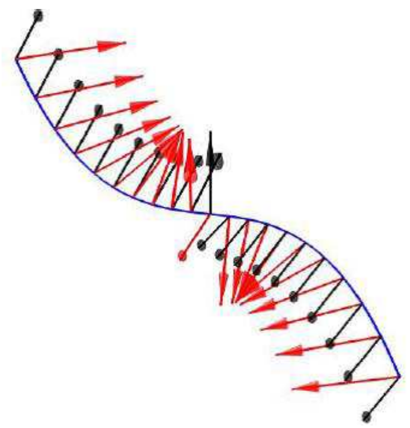
Örnek 3.11: $\alpha(t) = (\sin t, \cos t, t^3)$ eğrisi için $\mathbf{k}_z = (0, 0, 1)$ şeklinde izdüşüm vektörüyle verilen, z ekseni doğrultusundaki q-çatı

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= \frac{1}{\sqrt{1+9t^4}}(\cos t, -\sin t, 3t^2) \\ \mathbf{n}_\mathbf{q} &= (-\sin t, -\cos t, 0) \\ \mathbf{b}_\mathbf{q} &= \frac{1}{\sqrt{1+9t^4}}(3t^2 \cos t, -3t^2 \sin t, -\sqrt{1+9t^4}) \end{aligned}$$

ve q-eğrilikleri ise

$$k_1 = \frac{1}{\sqrt{1+9t^4}}, \quad k_2 = -\frac{6t}{1+9t^4} \text{ ve } \quad k_3 = -\frac{3t^2}{\sqrt{1+9t^4}}$$

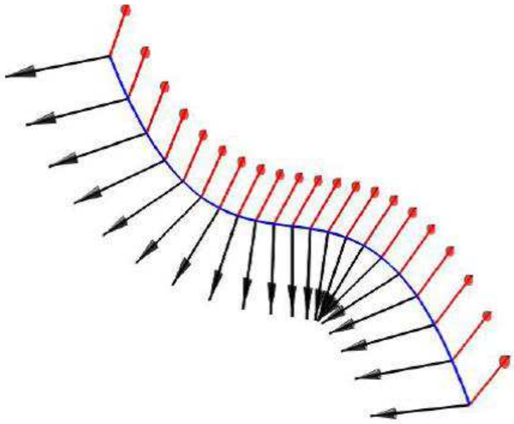
şeklinde bulunur (Dede vd.,2015).



Şekil 3.3 Frenet çatısı için normal düzlem vektörleri

Şekil 3.3 ile α eğrisi için Frenet çatısı ile normal düzlem vektörleri verilmiştir.

Benzer olarak, Şekil 3.4 ile de α eğrisi için z-ekseni doğrultusundaki q-çatı ile normal düzlem vektörleri gösterilmiştir.



Şekil 3.4 q-çatısı için normal düzlem vektörleri

Teorem 3.3: $\alpha(t)$ Öklid uzayında düzgün bir eğri olup, $\alpha(t)$ eğrisinin türevleri cinsinden q-eğrilikleri

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{\det\left[\alpha'', \alpha', \mathbf{k}\right]}{\|\alpha' \wedge \mathbf{k}\| \, \|\alpha'\|^2} \\ k_2 &= \frac{\langle \alpha', \mathbf{k}\rangle \langle \alpha'', \alpha'\rangle - \|\alpha'\|^2 \langle \alpha'', \mathbf{k}\rangle}{\|\alpha'\|^3 \, \|\alpha' \wedge \mathbf{k}\|} \\ k_3 &= \frac{\langle \alpha', \mathbf{k}\rangle \det\left[\alpha', \alpha'', \ \mathbf{k}\right]}{\|\alpha' \wedge \mathbf{k}\|^2 \, \|\alpha'\|^2} \end{aligned}$$

biçiminde yazılmaktadır (Dede vd., 2015).

Sonuç 3.3: Bir eğri için k_1, k_2, k_3 ile verilen q-eğrilikleri **k** izdüşüm vektörüne bağlıdır (Dede vd., 2015).

3.3 q-Çatısı ile Frenet Çatısı Arasındaki Bağıntılar

$\mathbb{R}^3$, 3-uzayda birim hızlı olmayan bir β eğrisi boyunca Frenet vektörleri

$$\mathbf{t} = \frac{\beta'(t)}{\|\beta'(t)\|}, \quad \mathbf{b} = \frac{\beta'(t) \wedge \beta''(t)}{\|\beta'(t) \wedge \beta''(t)\|} \text{ ve } \quad \mathbf{n} = \mathbf{b} \wedge \mathbf{t} \tag{3.8}$$

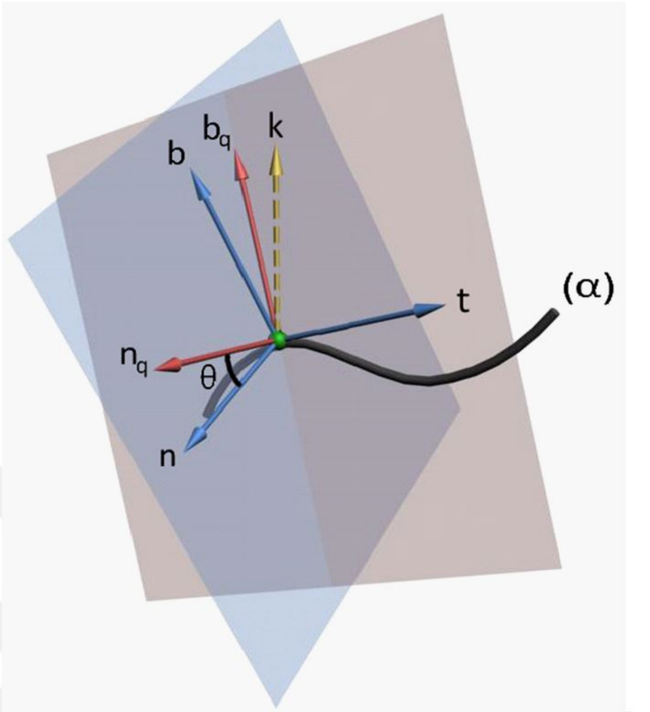
şeklindedir. Bu eğrinin κ eğriliği ile τ burulması için

$$\kappa = \frac{\|\beta'(t) \wedge \beta''(t)\|}{\|\beta'(t)\|^3} \quad \text{ve} \quad \tau = \frac{\det(\beta'(t), \beta''(t), \beta'''(t))}{\|\beta'(t) \wedge \beta''(t)\|^2} \tag{3.9}$$

olarak hesaplanır (Sabuncuoğlu, 2010). Frenet çatısı ve q-çatısı arasındaki bağıntı

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n_q} \\ \mathbf{b_q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

olup, Şekil 3.5 de gösterilmiştir (Dede vd., 2015).



Şekil 3.5 q-çatısı ve Frenet çatısı

Teorem 3.4: Birim hızlı $\alpha(s)$ eğrisi ve (3.8) ile (3.9) ifadeleri göz önünde bulundurulursa

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n_q}' \\ \mathbf{b_q}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & k_2 \\ -k_1 & 0 & k_3 \\ -k_2 & -k_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n_q} \\ \mathbf{b_q} \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

eşitliği geçerlidir. Burada k_1, k_2 ve k_3 quasi eğrilikleri

$$k_1 =< \mathbf{t}', \mathbf{n_q} >, \quad k_2 =< \mathbf{t}', \mathbf{b_q} > \text{ ve } \quad k_3 =< \mathbf{n_q}', \mathbf{b_q} > \tag{3.12}$$

olarak verilir (Dede ve Ekici, 2015).

Teorem 3.5: Birim hızlı bir uzay eğrisi $\alpha(s)$ olsun. θ açısı, **n** ile $\mathbf{n_q}$ vektörü arasında verildiğinde eğrinin q-eğrilikleri ve Frenet eğrilikleri arasıdaki bağıntılar

$$\begin{aligned} k_1 &= \kappa \cos\theta \\ k_2 &= -\kappa \sin\theta \\ k_3 &= d\theta + \tau \end{aligned} \tag{3.13}$$

biçimindedir (Dede ve Ekici, 2015).

3.4 E_1^3 Minkowski Uzayı

Hermann Minkowski tarafından 1907 yılında ortaya çıkarılan bu uzay, matematik ve fizikte Einstein'ın izafiyet teorisini formüle ederken kullanılmıştır. Minkowski uzayı, spacetime kavramını ifade etmekte yararlanılmış ve yaşadığımız uzayın üç boyutu ile bir de zaman boyutu harmanlanmıştır. Bu şekilde, 4 boyutlu bir manifold yapısı oluşturulmuştur. Albert Einstein tarafından ortaya atılan izafiyet teorisiyle Herman Minkowski, uzay ve zamanı aynı yapıda incelemiştir. Spacetime için özel bir çeşit olarak gezegenlerin güneş etrafındaki hareketi tanımlanabilir.

Uzayda Ay gezegeninin hareketi çembere benzer şeklinde olmasına rağmen Minkowski uzayı göz önüne alındığında bir eğilim çizgisi biçimindedir.

Minkowski 3-uzayı düşünüldüğünde 3 farklı metrik karşımıza çıkmaktadır. Bunlar $(+,+,-)$, $(+,-,+)$ ve $(-,+,+)$ işaretlemesiyle gösterilmektedir. Bizim çalışmamızda kullanacağımız metrik ise $(+,+,-)$ şeklindedir.

Tanım 3.12: V bir reel vektör uzayı ve bunun üzerinde $g : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ simetrik ve iki lineer olursa g dönüşümüne V üzerinde simetrik bilineer form denir. Bu dönüşüm, nondejenere ise g dönüşümüne V üzerinde bir skaler çarpım, o zaman V uzayına da bir skaler çarpım uzayı adı verilir (O'Neill, 1983).

Diğer taraftan $\forall \overrightarrow{\mathbf{x}} \in V$ için $\overrightarrow{\mathbf{x}} \neq 0$ iken $g(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{x}}) > 0$ ise g dönüşümüne pozitif tanımlı, $g(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{x}}) < 0$ ise g dönüşümüne negatif tanımlı, $g(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{x}}) \geq 0$ ise g dönüşümüne yarı-pozitif tanımlı, $g(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{x}}) \leq 0$ ise g dönüşümüne yarı-negatif tanımlıdır adı verilir (O'Neill, 1983).

Ayrıca g dönüşümü nondejeneredir ancak ve ancak $g(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}) = 0$ ve $\forall \overrightarrow{\mathbf{y}} \in V$ iken $\mathbf{x} = 0$ olmalıdır. g dönüşümü dejeneredir ancak ve ancak $g(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}) = 0$ ve $\forall \overrightarrow{\mathbf{y}} \in V$ iken $\mathbf{x} \neq 0$ olmalıdır (O'Neill, 1983).

Tanım 3.13: V skaler çarpım uzayının negatif tanımlı en büyük boyutlu bir W alt uzayı olsun. W uzayının boyutuna g skaler çarpımının indeksi denir (O'Neill, 1983).

g skaler çarpımının indeksi v ise $0 \leq v \leq boyV$ aralığındadır. Bu indeks aynı zamanda V skaler çarpım uzayının indeksidir (O'Neill, 1983).

$v = 1$ ve $boyV \geq 2$ ise V skaler çarpım uzayına bir Lorentz uzayı adını alır (O'Neill, 1983).

Tanım 3.14: V bir Lorentz uzayı için $\mathbf{x} \in V$ olmak üzere

$i)$ $\mathbf{x}$ vektörüne spacelike vektör denir eğer $g(\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0$ veya $\mathbf{x} = 0$ ise,

$ii)$ $\mathbf{x}$ vektörüne timelike vektör denir eğer $g(\mathbf{x}, \mathbf{x}) < 0$ ise,

$iii)$ $\mathbf{x}$ vektörüne null (lightlike) vektör denir eğer $g(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ ve $\mathbf{x} \neq 0$ ise.

$\mathbf{x}$ vektörünün normu ise $\|\mathbf{x}\| = |g(\mathbf{x}, \mathbf{x})|^{1/2}$ reel sayısıdır. V Lorentz uzayında bütün timelike vektörlerin kümesi Γ olmak üzere bir $u \in \Gamma$ alındığında

$$C(\mathbf{u}) = \{\mathbf{x} \in \Gamma \mid g(\mathbf{x}, \mathbf{u}) < 0\}$$

kümesine bu $\mathbf{u}$ timelike vektörünü içinde bulunduran V Lorentz uzayının bir timekonisi adını alır (O Neill, 1983).

Teorem 3.6: V vektör uzayı bir Lorentz uzay ve $\mathbf{x}$ ile $\mathbf{y}$ iki timelike vektör olmak üzere $|g(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \geq \|\mathbf{x}\| . \|\mathbf{y}\|$ eşitsizliği mevcuttur. Bu eşitsizlikte eşitlik olması için çift gerektirme koşulu $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ vektörlerinin birbirinin katı olmasıdır. $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ timelike vektörleri aynı timekonide ise $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\|\mathbf{x}\| . \|\mathbf{y}\| \cosh \varphi$ biçimde bir tek $\varphi \geq 0$ sayısı vardır ve bu sayıya, $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ timelike vektörleri arasındaki hiperbolik açı denir (O Neill, 1983).

$\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ vektörleri aynı timekonide olmazlarsa bu durumda $|g(\mathbf{x}, \mathbf{y})| = \|\mathbf{x}\| . \|\mathbf{y}\| \cosh \varphi$ yazılır. V Lorentz uzayında, $\mathbf{x}$ ile $\mathbf{y}$ vektörleri spacelike vektörler ise

$$\cos \theta = \frac{g(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\| . \|\mathbf{y}\|}$$

biçiminde bir tek $0 \leq \theta \leq \pi$ sayısı mevcuttur ve $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ spacelike vektörler arasındaki açı adını alır. $\mathbf{x}$ ile $\mathbf{y}$ spacelike vektörleri için $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \|\mathbf{x}\| . \|\mathbf{y}\|$ eşitsizliği mevcuttur.

Tanım 3.15: $\mathbb{R}_1^3$ uzayında birim hızlı $M \subset \mathbb{R}_1^3$ eğrisi (I, α) yardımıyla ifade edilsin. Bu durumda, $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet üçyüzlüsü $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ ve $\kappa : I \to \mathbb{R}$ olmak üzere $\kappa(s) = \left\langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{n}(s) \right\rangle$ fonksiyonuna (I, α) koordinat komşuluğuna göre verilen eğrinin eğrilik fonksiyonu ve $s \in I$ için $\kappa(s)$ değerine de eğrinin eğriliği adı verilir (Kobayashi, 1983).

Ayrıca $\tau : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere $\tau(s) = \left\langle \mathbf{n}'(s), \mathbf{b}(s) \right\rangle$ biçimindeki τ fonksiyonu ise $M \subset \mathbb{R}_1^3$ eğrisinin burulma fonksiyonu adını alır (Kobayashi, 1983).

Tanım 3.16: Minkowski uzayı $\mathbb{R}_1^3$ ve bunun iki vektörü $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ile $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ olmak üzere $(x_3y_2 - x_2y_3, x_1y_3 - x_3y_1, x_1y_2 - x_2y_1)$ olarak elde edilen yeni vektöre **x** ve **y** vektörlerinin vektörel çarpımı (veya dış çarpımı) adı verilir. Bu vektör $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ veya $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$ olarak yazılır (Akutagawa ve Nishikawa, 1990).

Minkowski $\mathbb{R}_1^3$ uzayında baz vektörleri $e_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3})$ olmak üzere

$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = -\det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}$$

veya

$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = \det \begin{bmatrix} -e_1 & -e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Buna göre

$$e_2 \wedge e_3 = -e_1,\ e_1 \wedge e_2 = e_3,\ e_3 \wedge e_1 = -e_2$$

şeklindedir. Pozitif yön için saat yönünün tersi tercih edilmiştir. Negatif yön ise saat yönü olarak tercih edilirse

$$e_2 \wedge e_3 = e_1,\ e_1 \wedge e_2 = -e_3,\ e_3 \wedge e_1 = e_2$$

yazılır. Buradan

$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}$$

şeklinde alınır (Turgut, 1997).

Teorem 3.7: 3-boyutlu $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayındaki $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ile $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ vektörleri için

$$\begin{array}{llcl} i) & \langle \mathbf{u} \wedge \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle & = & -\det(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ ii) & \langle \mathbf{u} \wedge \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle & = & 0 \text{ ve } \langle \mathbf{u} \wedge \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \\ iii) & \langle \mathbf{u} \wedge \mathbf{x}, \mathbf{u} \wedge \mathbf{x} \rangle & = & -\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + (\langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle)^2 \\ iv) & (\mathbf{u} \wedge \mathbf{x}) \wedge \mathbf{y} & = & -\langle \mathbf{u}, \mathbf{y} \rangle \mathbf{x} + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \mathbf{u} \end{array}$$

eşitlikleri geçerlidir (Turgut, 1998).

Teorem 3.8: 3-boyutlu $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayındaki $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ve $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ vektörleri için

i) $\mathbf{u} \wedge \mathbf{x}$ spacelike vektördür $\Leftrightarrow$ $\mathbf{u}$ spacelike ve $\mathbf{x}$ timelike vektör olmalıdır.

ii) $\mathbf{u} \wedge \mathbf{x}$ null vektördür $\Leftrightarrow$ $\mathbf{u}$ spacelike ve $\mathbf{x}$ null vektör olmak üzere $< \mathbf{u}, \mathbf{x} >= 0$ olmalıdır.

iii) $\mathbf{u} \wedge \mathbf{x}$ spacelike vektördür $\Leftrightarrow$ $\mathbf{u}$ spacelike ve $\mathbf{x}$ null vektör olmak üzere $< \mathbf{u}, \mathbf{x} >\neq 0$ olmalıdır.

iv) $\mathbf{u} \wedge \mathbf{x}$ timelike vektördür $\Leftrightarrow$ $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{x}$ spacelike vektördür.

v) $\mathbf{u} \wedge \mathbf{x}$ spacelike vektördür $\Leftrightarrow$ $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{x}$ null vektördür.

vi) $\mathbf{u} \wedge \mathbf{x}$ spacelike vektördür $\Leftrightarrow$ $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{x}$ timelike vektördür.

vii) $\mathbf{u} \wedge \mathbf{x}$ spacelike vektördür $\Leftrightarrow$ $\mathbf{u}$ timelike ve $\mathbf{x}$ null vektördür (Turgut, 1997).

Tanım 3.17: Lorentziyen birim çember, $\mathbb{R}_1^2$ Lorentz düzleminde

$$S_1^1 = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}_1^2 \big| \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 1\}$$

kümesi ile verilir. Bu Lorentz çemberinin teğet vektörleri her zaman timelike tiptendir. Bunun yanı sıra, hiperbolik birim çember $\mathbb{R}_1^2$ Lorentz düzleminde

$$H_0^1 = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}_1^2 \big| \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = -1\}$$

kümesi ile verilir. Bu hiperbolik birim çemberin teğet vektörleri her zaman spacelike tiptendir (Uğurlu, 2012).

Tanım 3.18: Lorentziyen ve hiperbolik çemberlerin tanımlarına benzer olarak, Minkowski uzayı $\mathbb{R}_1^3$ de merkezil hiperbolik ile Lorentziyen birim küreleri

$$H_0^2 = \{a \in \mathbb{R}_1^3 \big| \langle a, a \rangle = -1\}$$

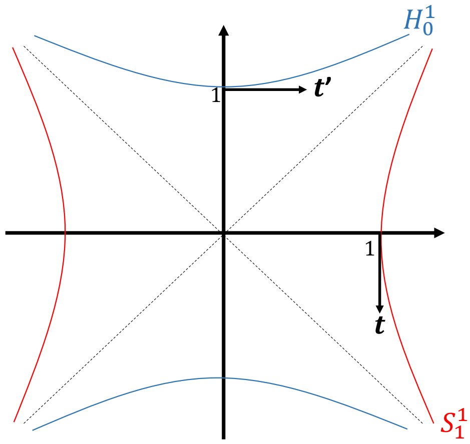
ve

$$S_1^2 = \{a \in \mathbb{R}_1^3 \big| \langle a, a \rangle = 1\}$$

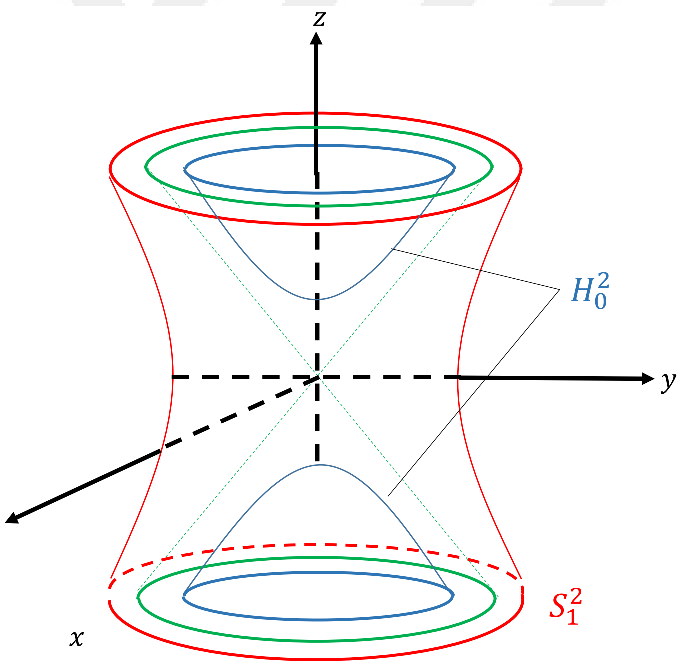
şeklinde tanımlanır (Uğurlu, 2012).

Null eğriler

Teorem 3.9: $\mathbb{E}_1^3$ uzayında Lorentziyen küresi üzerinde yatan hiçbir $\alpha(s)$ null eğrisi yoktur, burada κ eğriliğinin alabileceği iki değer vardır. Eğri bir düz null eğri iken $\kappa = 0$ ve diğer durumlarda $\kappa = 1$ şeklindedir (Petrović-Torgašev ve Šućurović, 2001).



Şekil 3.6 Lorentziyen ve hiperbolik birim çemberler



Şekil 3.7 Lorentziyen ve hiperbolik birim küreler

İspat Kabul edelim ki $\alpha(s)$, merkezi $a \in \mathbb{E}_1^3$ ve yarıçapı $r \in \mathbb{R}^+$ olan Lorentz küresi üzerinde yatan bir null eğri olsun. Buradan, $\forall s \in I \subset \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} r &= \|\overrightarrow{a\alpha}\| \\ &= \|\alpha - a\| \\ &= \sqrt{g(\alpha - a, \alpha - a)} \end{aligned}$$

ve buradan

$$g(\alpha - a, \alpha - a) = r^2 \tag{3.14}$$

olur. $x, y \in \mathbb{E}_1^3$ için α, $\alpha(s) = x + sy$ denklemiyle bir düz null eğri ise, (3.14) ifadesinin s parametresine göre türevi alınırsa

$$g(\alpha^{'}, \alpha - a) + g(\alpha - a, \alpha^{'}) = 0$$

olup iç çarpımın simetrik olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} 2g(\alpha - a, \alpha^{'}) &= 0 \\ g(\alpha - a, \alpha^{'}) &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Burada $\alpha(s) = x + sy$ ve $\alpha^{'} = y$ değerleri yerine yazılırsa

$$g(x + sy - a, y) = 0$$

elde edilir. İç çarpım lineer olduğundan

$$g(x, y) + sg(y, y) - g(a, y) = 0 \tag{3.15}$$

bulunur. Burada α eğrisi, bir null eğri olduğundan

$$\begin{aligned} g(\alpha^{'}, \alpha^{'}) &= 0 \\ g(y, y) &= 0 \end{aligned}$$

şeklindedir. Bulunan bu ifade, (3.15) eşitliğinde kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(x, y) - g(a, y) &= 0 \\ g(x, y) &= g(a, y) = sbt \end{aligned}$$

olur. Buradan $x = a$ bulunur ve böylece

$$\begin{aligned} \alpha &= x + sy \\ \alpha - x &= sy \end{aligned}$$

yazılabilir ve buradan

$$g(\alpha - a, \alpha - a) = g(sy, sy)$$

ve iç çarpım lineer olduğundan

$$g(\alpha - a, \alpha - a) = s^2 \underbrace{g(y, y)}_{0}$$

şeklinde bulunup böylece $g(\alpha - a, \alpha - a) = 0$ olur. Bu da eğrinin, küresel eğri olmasından yani $g(\alpha - a, \alpha - a) = r^2$ eşitliğindeki yarıçap değerinin $r \in \mathbb{R}^+$ şeklinde tanımlı olmasından dolayı kabulümüz ile bir çelişki meydana gelir.

Diğer taraftan, α bir düz null eğri değilse, (3.14) ifadesinin s parametresine göre türevi alınırsa

$$g(\alpha^{'}, \alpha - a) = 0$$

olup Frenet türev formüllerinden $\mathbf{t} = \alpha^{'}$ olduğu kullanılırsa

$$g(\mathbf{t}, \alpha - a) = 0 \tag{3.16}$$

bulunur. Bu ifadenin de s parametresine göre türevi alınırsa

$$g(\mathbf{t}^{'}, \alpha - a) + g(\mathbf{t}, \alpha^{'}) = 0$$

olup burada Frenet türev fomüllerinden $\mathbf{t} = \alpha^{'}$ ve $\mathbf{t}^{'} = \kappa\mathbf{n}$ değerleri yerlerine yazılırsa

$$g(\kappa\mathbf{n}, \alpha - a) + g(\mathbf{t}, \mathbf{t}) = 0$$

biçiminde elde edilen eşitlikte iç çarpımın lineerliği ve eğrinin null olmasından dolayı $g(\mathbf{t}, \mathbf{t}) = 0$ olduğu kullanılırsa

$$\kappa g(\mathbf{n}, \alpha - a) = 0$$

ve burada $\forall s \in I \subset \mathbb{R}$ için $\kappa = 1$ olduğu kullanılırsa

$$g(\mathbf{n}, \alpha - a) = 0 \tag{3.17}$$

bulunur. Bu ifadenin türevi alınırsa

$$g(\mathbf{n}^{'}, \alpha - a) + g(\mathbf{n}, \alpha^{'}) = 0$$

olup burada Frenet türev fomüllerinden $\mathbf{t} = \alpha^{'}$ ve $\mathbf{n}^{'} = \tau\mathbf{t} - \kappa\mathbf{b}$ değerleri yerlerine yazılır ve $\mathbf{t}$ ile $\mathbf{n}$ vektörlerinin ortogonal olduğu yani $g(\mathbf{n}, \alpha^{'}) = g(\mathbf{n}, \mathbf{t}) = 0$ olduğu kullanılırsa

$$g(\tau\mathbf{t} - \kappa\mathbf{b}, \alpha - a) = 0$$

ve iç çarpımın lineerliğinden

$$\tau g(\mathbf{t}, \alpha - a) - \kappa g(\mathbf{b}, \alpha - a) = 0$$

bulunur. (3.16) ifadesi kullanılırsa

$$-\kappa g(\mathbf{b}, \alpha - a) = 0$$

ve burada $\forall s \in I \subset \mathbb{R}$ için $\kappa = 1$ olduğu kullanılır ve eşitlik düzenlenirse

$$g(\mathbf{b}, \alpha - a) = 0 \tag{3.18}$$

olur. $\alpha - a$ vektörü, $k = k(s)$, $l = l(s)$ ve $m = m(s)$ keyfi fonksiyonlar olmak üzere

$$\alpha - a = k\mathbf{t} + l\mathbf{n} + m\mathbf{b} \tag{3.19}$$

olarak **t**, **n** ve **b** vektörlerinin lineer toplamı şeklinde yazılabilir. Bu ifadenin sırasıyla **t**, **n** ve **b** vektörleriyle iç çarpımları hesaplanırsa

$$g(\mathbf{t},\alpha - a) = k, \qquad g(\mathbf{n},\alpha - a) = l, \qquad g(\mathbf{b},\alpha - a) = m$$

ve burada (3.16), (3.17) ve (3.18) ifadeleri kullanılırsa

$$k = l = m = 0$$

bulunur. Bulunan bu değerler, (3.19) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \alpha - a &= 0 \\ \alpha &= a \end{aligned}$$

olup burada da kabulümüz olan α eğrisi, sabit ya da düz bir doğru olmadığı için bir çelişki bulunmaktadır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.9 ifadesinden dolayı çalışmamızda spacelike ve timelike eğriler incelenecektir.

4. ÖKLİD 3-UZAYINDA Q-ÇATILI TZITZEICA EĞRİLERİ

Bu bölümde, Öklidyen 3-uzayda hem Frenet çatısı hem de q-çatısı kullanılarak Tzitzeica eğrileri (Tz-eğrileri) göz önüne alınacak ve bu tür eğriler, onların eğriliklerine göre karakterize edilecektir. Sabit eğrilikler (W-eğrileri) ile Tzitzeica eğrileri olmadığı gösterilecektir. Bunun yanı sıra küresel Tzitzeica eğrileri ele alınacaktır. Ayrıca Salkowski ve anti-Salkowski eğrileri de incelenecektir.

Tanım 4.1: $M \subset E^n$ eğrisinin $\alpha(s) \in M$ noktasındaki Frenet r-ayaklısı $\{V_1(s), V_2(s), ..., V_r(s)\}$ olsun. Bu durumda, $\alpha(s)$ seçilmiş bir nokta olmak üzere E^n uzayının

$$S_p\{V_1(s), V_2(s), ..., V_p(s)\},\ p \leq r$$

vektör uzayı ile birleşen afin altuzayına, $\alpha(s)$ noktasında M eğrisinin p-yinci oskülatör hiperdüzlemi denir. $n = 3$ özel halinde, p oskülatör hiperdüzlemler sırasıyla, $p = 1$ için ”teğet doğru”, $p = 2$ için ”oskülatör düzlem” adını alır. $p = 3$ için 3-üncü oskülatör hiperdüzlem E^3 ile çakışacağından aynı ad verilmez.

$n = 3$ için, $\mathbf{t}(s)$, $\mathbf{n}(s)$ ve $\mathbf{b}(s)$ Frenet vektörleri alındığında vektör uzayı ile birleşen

$$S_p\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s)\}$$

afin altuzaya $\alpha(s)$ noktasındaki oskülatör düzlem,

$$S_p\{\mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$$

afin altuzaya $\alpha(s)$ noktasındaki normal düzlem,

$$S_p\{\mathbf{t}(s), \mathbf{b}(s)\}$$

afin altuzaya $\alpha(s)$ noktasındaki rektifiyan düzlem adı verilir (Hacısalihoğlu, 1998).

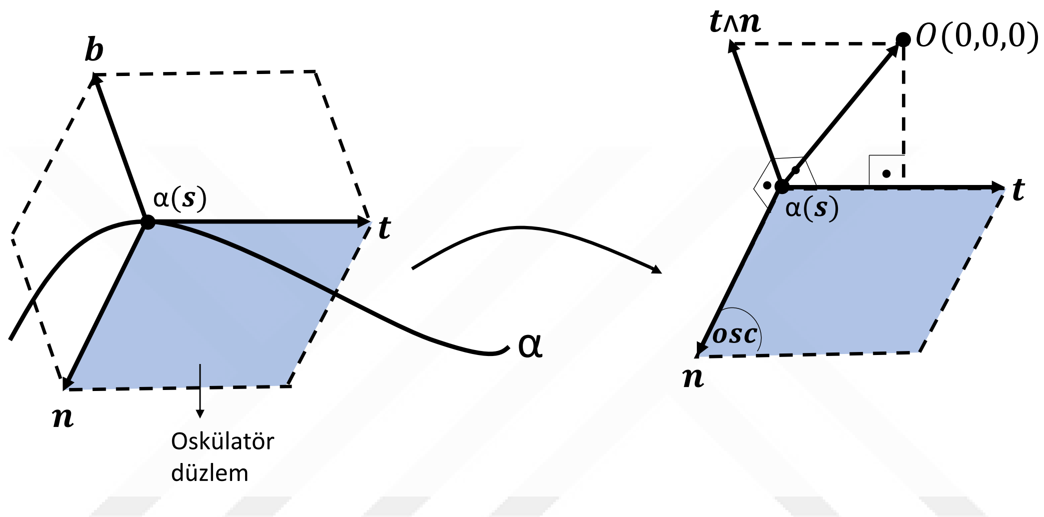
Tanım 4.2: Bir regüler eğri $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow E^3$ verilsin. α eğrisi için sabit k_1 eğriliği ancak sabit olmayan k_2 eğriliği mevcutsa Salkowski eğrisi adı verilir (Salkowski, 1909).

Tanım 4.3: Bir regüler eğri $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow E^3$ verilsin. α eğrisi için sabit k_2 eğriliği ancak sabit olmayan k_1 eğriliği mevcutsa anti-Salkowski eğrisi adı verilir (Salkowski, 1909).

Tanım 4.4: E^3 uzayında bir Tzitzeica eğrisi, bir $\alpha = \alpha(s)$ uzaysal eğrisidir öyle ki orijinden, eğrinin keyfi bir $\alpha(s)$ noktasındaki oskülatör düzlemine olan d_{osc} uzaklığının karesi ile eğrinin torsiyonu olan k_2 nin oranı sabittir

$$\frac{k_2}{d_{\text{osc}}^2} = a, \tag{4.1}$$

burada $d_{\text{osc}} = \langle \mathbf{b}, \alpha \rangle$ ve $a \neq 0$ bir reel sabit, **b** ise α eğrisinin binormal vektörüdür (Tzitzeica, 1911). Bir düzlemin bir noktaya uzaklığını veren Tanım 3.2 kullanılırsa



Şekil 4.1 Oskülatör düzlemin orijine olan d_{osc} uzaklığı

$$\begin{aligned} d(O, osc) &= d_{\text{osc}} \\ &= \left| \frac{\langle \alpha(s), \mathbf{t} \times \mathbf{n} \rangle}{\|\mathbf{t} \times \mathbf{n}\|} \right| \end{aligned}$$

olup burada $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$ binormal vektörü yerine yazılırsa

$$d_{\text{osc}} = \left| \frac{\langle \alpha(s), \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{b}\|} \right|$$

bulunur. **b** birim binormal vektör olduğundan

$$d_{\text{osc}} = |\langle \mathbf{b}, \alpha \rangle|$$

şeklinde, oskülatör düzlemin orijine olan uzaklığı bulunmuş olur.

Tanım 4.5: E^3 uzayında bir Tzitzeica yüzeyi, $X(u, v)$ parametresiyle verilen bir uzaysal M yüzeyidir öyle ki onun K Gauss eğriliğinin, orijinden yüzeyin herhangi bir keyfi noktasındaki $d_{\tan}$ ile gösterilen tanjant düzlemine olan uzaklığına oranı sabittir;

$$\frac{K}{d_{\tan}^4} = a_1, \tag{4.2}$$

burada a_1, sabittir. Orijinden teğet düzleme olan dik uzaklık,

$$d_{\tan} = \left\langle \overrightarrow{X}, \overrightarrow{U} \right\rangle \tag{4.3}$$

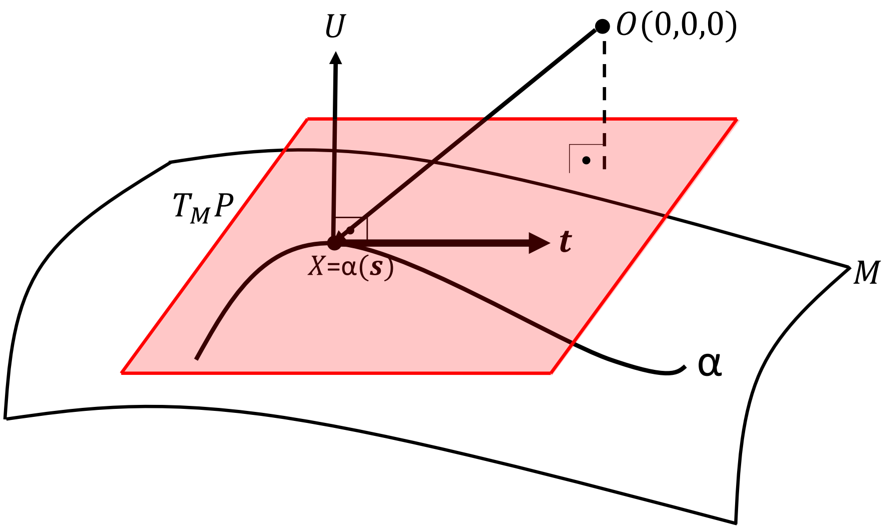
ile tanımlıdır, burada X, yüzeyin konum(yer) vektörü ve $\overrightarrow{U}$, yüzeyin birim normal vektörüdür (Tzitzeica, 1911).

$$\begin{aligned} d(O, T_M P) &= d_{\tan} \\ &= \frac{\left\langle \overrightarrow{OX}, \overrightarrow{U} \right\rangle}{\left\| \overrightarrow{U} \right\|} \end{aligned}$$

olup burada $\overrightarrow{U}$, yüzeyin birim normal vektörü olduğundan

$$d_{\tan} = \left\langle \overrightarrow{X}, \overrightarrow{U} \right\rangle$$

şeklindedir.



Şekil 4.2 Tzitzeica yüzeyi

Teorem 4.1: Negatif Gauss eğrilikli bir Tzitzeica yüzeyinin asimptotik çizgileri, Tzitzeica eğrileridir (Craşmareanu, 2002).

Tanım 4.6: α eğrisi, bir dönme (screw) çizgisi veya helis olarak adlandırılır ancak ve ancak eğrinin Frenet eğriliği $k_1(s)$ ve torsiyonu $k_2(s)$ sabittir (Gray, 1993). Bu eğriler, Öklidyen dönüşümlerin gruplarının 1-parametreli ailesinin izleri olduğu için F.Klein ve S.Lie, onları W-eğrileri olarak adlandırmışlardır (Klein vd., 1871). $\dfrac{k_2(s)}{k_1(s)}$ oranı, sıfır olmayan bir sabit iken E^3 uzayında α eğrisinin, genel helis (eğilim eğrisi) şeklinde adlandırıldığı bilinir (Öztürk vd., 2008).

Tanım 4.7 Bir $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow E^3$ uzay eğrisi için, α konum vektörü, α eğrisinin rektifiyan düzleminde yatarsa $\alpha(s)$ rektifiyan eğri olarak adlandırılır (Chen, 2002 b). Benzer olarak, α konum vektörü daima oskülatör düzlemde yatan eğri oskülatör eğri olarak adlandırılır. Son olarak, α konum vektörü, onun normal düzleminde yatıyorsa normal eğri olarak adlandırılır.

Rektifiyan eğriler,

$$\alpha(s) = \lambda(s)\mathbf{t}(s) + \mu(s)\mathbf{b}(s) \tag{4.4}$$

basit denklemi ile karakterize edilir, burada $\lambda(s)$ ve $\mu(s)$, smooth(diferensiyellenebilir, düz) fonksiyonlar ve $\mathbf{t}(s)$ ve $\mathbf{b}(s)$, sırasıyla α konum vektörünün teğet ve binormal vektör alanlarıdır (Chen, 2002 b, 2003).

Tanım 4.8 Bir α regüler eğrisi için, α konum vektörü her noktada

$$\alpha = \alpha^T + \alpha^N \tag{4.5}$$

şeklinde onun teğet ve normal bileşenlerine ayrılabilir.

Eğrinin α konum vektörünün α^N normal bileşeni sabit uzunlukta ise E^3de bir eğri **N-sabit eğri** olarak adlandırılır (Chen, 2002 a; Gürpınar vd., 2015). Bilinir ki, E^3 de bir eğri, bir N-sabit eğri ile uyumludur ancak ve ancak $\dfrac{k_2}{k_1}$ oranı, bir s yay uzunluğu fonksiyonunun sabit olmayan bir lineer fonksiyonudur, öyle ki bazı $c_1 \neq 0$ ve c_2 sabitleri için $\dfrac{k_2}{k_1}(s) = c_1 s + c_2$ dir (Chen, 2002a). Dahası, eğer $\left\|\alpha^N\right\| = 0$ ise bir N-sabit eğrisi **1.tür** olarak adlandırılır, aksi durumda **2.tür** olur (Gürpınar vd., 2015).

4.1 E^3 Öklid 3-uzayında Tzitzeica Eğrileri

Bu bölümde, eğrilikleri bakımından Tzitzeica eğrilerini tanımlayacağız. Dahası, E^3 Öklid 3-uzayında yer vektörü $\alpha = \alpha(s)$ olan

$$\alpha(s) = s_1(s)\mathbf{t}(s) + s_2(s)\mathbf{n}(s) + s_3(s)\mathbf{b}(s)$$

parametrik denklemiyle verilen bir Tzitzeica eğrisini, bazı diferensiyellenebilir $1 \leq i \leq 3$, $s_i(s)$ fonksiyonları için inceleyeceğiz, burada $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$, α eğrisinin Frenet çatısıdır.

Tanım 4.9: $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow E^3$, $k_1(s) > 0$ ve $k_2(s) \neq 0$ eğrilikleri ile bir birim hızlı eğri olsun. Bazı a reel sabiti için, α eğrisinin torsiyonu

$$k_2(s) = a.d_{\text{osc}}^2 \tag{4.6}$$

şartını sağlarsa α, Tzitzeica eğrisi(Tz-eğrisi) olarak adlandırılır, burada

$$d_{\text{osc}} = \langle \mathbf{b}, \alpha \rangle \tag{4.7}$$

orijinden α eğrisinin oskülatör düzlemine olan dik uzaklıktır (Tzitzeica, 1911).

Teorem 4.2: $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow E^3$, E^3 uzayında bir birim hızlı eğri olsun. α bir Tzitzeica eğrisi ise

$$k_2' \langle \alpha, \mathbf{b} \rangle + 2k_2^2 \langle \alpha, \mathbf{n} \rangle = 0 \tag{4.8}$$

denklemi geçerlidir (Bayram vd., 2018).

İspat α, E^3 uzayında bir birim hızlı eğri olsun, (4.6) ve (4.7) eşitlikleri kullanılarak

$$\frac{k_2(s)}{\langle \mathbf{b}, \alpha \rangle^2} = a \neq 0 \tag{4.9}$$

elde edilir. Bu ifadenin türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{k_2'(s) \langle \mathbf{b}, \alpha \rangle^2 - k_2(s)(\langle \mathbf{b}, \alpha \rangle^2)'}{\langle \mathbf{b}, \alpha \rangle^4} &= 0 \\ \frac{k_2'(s) \langle \mathbf{b}, \alpha \rangle^2 - k_2(s)(2 \langle \mathbf{b}, \alpha \rangle (\langle \mathbf{b}', \alpha \rangle + \langle \mathbf{b}, \alpha' \rangle))}{\langle \mathbf{b}, \alpha \rangle^4} &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Burada $\alpha' = \mathbf{t}$ ve dolayısıyla $\langle \mathbf{b}, \alpha' \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{t} \rangle$ olup $\mathbf{t}$ ve $\mathbf{b}$ vektörleri ortogonal olduğundan $\langle \mathbf{b}, \mathbf{t} \rangle = 0$ dır. Böylece

$$\frac{k_2'(s) \langle \mathbf{b}, \alpha \rangle^2 - k_2(s)(2 \langle \mathbf{b}, \alpha \rangle \langle \mathbf{b}', \alpha \rangle)}{\langle \mathbf{b}, \alpha \rangle^4} = 0$$

olup Frenet türev formülleri uygulanırsa

$$\frac{k_2'(s) \langle \mathbf{b}, \alpha \rangle^2 - k_2(s)(2 \langle \mathbf{b}, \alpha \rangle \langle -k_2\mathbf{n}, \alpha \rangle)}{\langle \mathbf{b}, \alpha \rangle^4} = 0$$

elde edilir. İç çarpımın lineer olduğu kullanılır ve eşitlik düzenlenirse

$$\frac{k_2'(s) \langle \mathbf{b}, \alpha \rangle^2 + 2k_2^2(s) \langle \mathbf{b}, \alpha \rangle \langle \mathbf{n}, \alpha \rangle}{\langle \mathbf{b}, \alpha \rangle^4} = 0$$

bulunur. Pay kısmı $\langle \mathbf{b}, \alpha \rangle$ parantezine alınırsa

$$\frac{\langle \mathbf{b}, \alpha \rangle \left(k_2'(s) \langle \mathbf{b}, \alpha \rangle + 2k_2^2(s) \langle \mathbf{n}, \alpha \rangle\right)}{\langle \mathbf{b}, \alpha \rangle^4} = 0$$

ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\frac{k_2'(s) \langle \mathbf{b}, \alpha \rangle + 2k_2^2(s) \langle \mathbf{n}, \alpha \rangle}{\langle \mathbf{b}, \alpha \rangle^3} = 0$$

olarak bulunur. Buradan

$$k_2'(s) \langle \mathbf{b}, \alpha \rangle + 2k_2^2(s) \langle \mathbf{n}, \alpha \rangle = 0$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Tanım 4.10: Bir küre üzerine çizilmiş eğrilere küresel eğriler denilir. Küre üzerine çizilmiş eğrinin her noktasındaki oskülatör küresi, eğrinin üzerine çizilmiş olduğu küredir. Kolaylık olsun diye koordinatlar başlangıcı, küre merkezinden alınır (Şenatalar, 1977).

Tanım 4.11: $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow E^3$ eğrisi ile onun bir noktasında sonsuz yakın dört noktası ortak olan küreye oskülatör küre adı verilir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 4.12: $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow E^3$, $k_1(s) > 0$ ve $k_2(s) \neq 0$ eğrilikleri ile bir birim hızlı eğri olsun. α bir küresel eğridir ancak ve ancak

$$\frac{k_2(s)}{k_1(s)} = \left(\frac{k_1'(s)}{k_2(s)k_1^2(s)}\right)' \tag{4.10}$$

şeklindedir (Hacısalihoğlu, 1998).

Küre üzerindeki bir eğri için Frenet çatısı yardımıyla bileşenlerini yazalım. Yani Frenet çatısı için küresel eğri

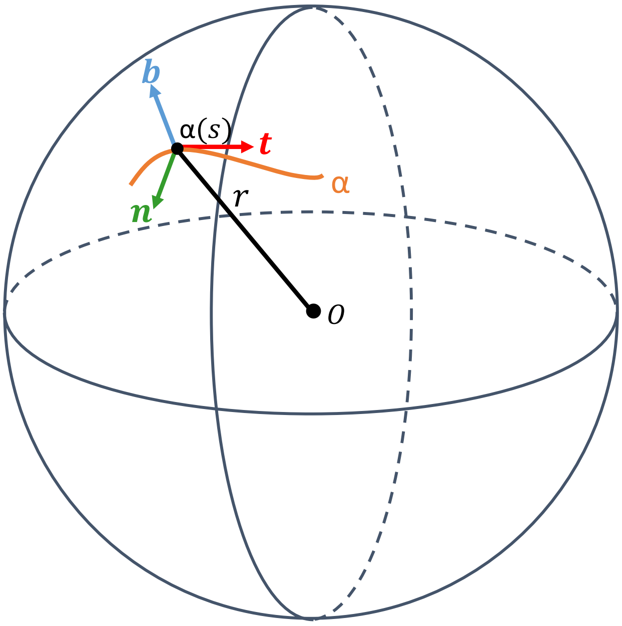
$$\alpha(s) = s_1\mathbf{t}(s) + s_2\mathbf{n}(s) + s_3\mathbf{b}(s)$$

olmak üzere buradaki s_1, s_2 ve s_3 katsayılarını bulalım.

$$\begin{aligned} d(O, \alpha(s)) &= r \\ \left\| \overrightarrow{O\alpha(s)} \right\| &= r \end{aligned}$$

olduğundan burada norm tanımı kullanılırsa

$$\begin{aligned} \sqrt{\left\langle \overrightarrow{O\alpha(s)}, \overrightarrow{O\alpha(s)} \right\rangle} &= r \\ \left\langle \overrightarrow{O\alpha(s)}, \overrightarrow{O\alpha(s)} \right\rangle &= r^2 \end{aligned}$$



Şekil 4.3 Öklidyen 3-uzayda Frenet çatısı için küresel eğri

olup türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \langle \alpha'(s), \alpha(s) \rangle + \langle \alpha(s), \alpha'(s) \rangle &= 0 \\ 2 \langle \alpha'(s), \alpha(s) \rangle &= 0 \\ \langle \alpha'(s), \alpha(s) \rangle &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$s_1 = \langle \mathbf{t}(s), \alpha(s) \rangle = 0 \tag{4.11}$$

elde edilir. Bu ifadenin türevi alınır ve Frenet türev formülleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{t}'(s), \alpha(s) \rangle + \langle \mathbf{t}(s), \alpha'(s) \rangle &= 0 \\ \langle k_1(s)\mathbf{n}(s), \alpha(s) \rangle + \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{t}(s) \rangle &= 0 \end{aligned}$$

olup burada **t**, birim teğet vektör olduğundan

$$k_1(s) \langle \mathbf{n}(s), \alpha(s) \rangle + 1 = 0$$

ve böylece

$$\langle \mathbf{n}(s), \alpha(s) \rangle = -\frac{1}{k_1(s)}$$

olarak elde edilir.Burada $\frac{1}{k_1(s)} = s_2$ ile gösterilir.

$$\langle \mathbf{n}(s), \alpha(s) \rangle = -\frac{1}{k_1(s)}$$

ifadesinin türevi alınırsa

$$\langle \mathbf{n}'(s), \alpha(s)\rangle + \langle \mathbf{n}(s), \alpha'(s)\rangle = -s_2'$$

ve Frenet türev formülleri uygulanırsa

$$\langle -k_1(s)\mathbf{t}(s) + k_2(s)\mathbf{b}(s), \alpha(s)\rangle + \langle \mathbf{n}(s), \mathbf{t}(s)\rangle = -s_2'$$

olup $\mathbf{n}(s)$ ve $\mathbf{t}(s)$ vektörleri ortogonal olduğundan $\langle \mathbf{n}(s), \mathbf{t}(s)\rangle = 0$ dır. Böylece eşitlik

$$-k_1(s)\,\langle \mathbf{t}(s), \alpha(s)\rangle + k_2(s)\,\langle \mathbf{b}(s), \alpha(s)\rangle = -s_2'$$

şeklindedir. Burada (4.11) ifadesinden dolayı $\langle \mathbf{t}(s), \alpha(s)\rangle = 0$ olduğu kullanılırsa

$$k_2(s)\,\langle \mathbf{b}(s), \alpha(s)\rangle = -s_2' \tag{4.12}$$

olur ve buradan

$$\langle \mathbf{b}(s), \alpha(s)\rangle = -\frac{s_2'}{k_2(s)} = -s_3 \tag{4.13}$$

olarak bulunur.

Teorem 4.3: $M \subset E^3$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ yay parametresi olmak üzere $k_2(s) \neq 0, m_3(s) \neq 0$ ise, M bir küresel eğridir$\Longleftrightarrow m_3' + m_2 k_2 = 0$ (Hacısalihoğlu, 1998).

Teorem ifadesi düzenlenirse

$$\begin{aligned} m_3' + m_2 k_2(s) &= 0 \\ (\frac{m_2'}{k_2(s)})' + \frac{1}{k_1(s)}k_2(s) &= 0 \\ ((\frac{1}{k_1(s)})'\frac{1}{k_2(s)})' + \frac{k_2(s)}{k_1(s)} &= 0 \\ (-\frac{k_1'(s)}{k_1(s)}\frac{1}{k_2(s)})' + \frac{k_2(s)}{k_1(s)} &= 0 \end{aligned}$$

bulunur ve böylece

$$\frac{k_2(s)}{k_1(s)} = (\frac{k_1'(s)}{k_1(s)k_2(s)})'$$

elde edilir (Gray, 1993).

Teorem 4.4: $M \subset E^3$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ parametresine karşılık gelen $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ olmak üzere, M ile sonsuz yakın üç ortak noktası olan kürelerin merkezlerinin geometrik yeri

$$a(s) = \alpha(s) + s_2(s)\mathbf{n}(s) + \lambda\mathbf{b}(s) \tag{4.14}$$

şeklindedir. Burada, $s_2 : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $s_2(s) : 1/k_1(s)$ ve $\lambda = s_3(s) \in \mathbb{R}$ biçimindedir (Hacısalihoğlu, 1998).

Teorem 4.5: M eğrisi küresel eğridir $\Longleftrightarrow$ $\forall s \in I$ için $\alpha(s)$ noktasındaki oskülatör kürelerin merkezleri $a(s)$, sabittir (Hacısalihoğlu, 1998).

Teorem 4.6: (I, α) koordinat komşuluğu ile $M \subset E^3$ eğri olsun. Buradan $s_3 \neq 0$, $k_2 \neq 0$ alındığında $\forall s \in I$ değerine karşılık gelen $\alpha(s)$ deki oskülatör küresi sabit yarıçaplıdır $\Longleftrightarrow$ oskülatör kürelerin merkezleri aynıdır (Hacısalihoğlu, 1998).

İspat Öncelikle $\alpha(s) \in M$ noktasındaki oskülatör kürenin yarıçapı r ve oskülatör küre merkezi (4.14) ifadesinden

$$a(s) = \alpha(s) + s_2(s)\mathbf{n}(s) + s_3(s)\mathbf{b}(s)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} r &= \|\overrightarrow{\alpha a}\| \\ &= \|a - \alpha(s)\| \\ &= \|\alpha(s) + s_2(s)\mathbf{n}(s) + s_3(s)\mathbf{b}(s) - \alpha(s)\| \\ &= \sqrt{\langle s_2(s)\mathbf{n}(s) + s_3(s)\mathbf{b}(s), s_2(s)\mathbf{n}(s) + s_3(s)\mathbf{b}(s)\rangle} \\ &= \sqrt{\begin{array}{l} \langle s_2(s)\mathbf{n}(s), s_2(s)\mathbf{n}(s)\rangle + \langle s_2(s)\mathbf{n}(s), s_3(s)\mathbf{b}(s)\rangle \\ + \langle s_3(s)\mathbf{b}(s), s_2(s)\mathbf{n}(s)\rangle + \langle s_3(s)\mathbf{b}(s), s_3(s)\mathbf{b}(s)\rangle \end{array}} \end{aligned}$$

bulunur ve burada iç çarpımın lineer ve simetrik olma özellikleri kullanılırsa

$$r = \sqrt{s_2^2(s)\,\langle \mathbf{n}(s), \mathbf{n}(s)\rangle + 2s_2(s)s_3(s)\,\langle \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\rangle + s_3^2(s)\,\langle \mathbf{b}(s), \mathbf{b}(s)\rangle}$$

olup $\mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)$ vektörleri birim ve $\mathbf{n}(s)$ ile $\mathbf{b}(s)$ ortogonal olduğundan $\langle \mathbf{n}(s), \mathbf{n}(s)\rangle = \langle \mathbf{b}(s), \mathbf{b}(s)\rangle = 1$ ve $\langle \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\rangle = 0$ dır. Böylece

$$r = \sqrt{s_2^2(s) + s_3^2(s)}$$

ve buradan

$$r^2 = s_2^2(s) + s_3^2(s)$$

bulunur. $r = sbt$ ise yukarıdaki ifadenin türevi alınırsa

$$\begin{aligned} 2m_2(s)m_2'(s) + 2m_3(s)m_3'(s) &= 0 \\ 2(m_2(s)m_2'(s) + m_3(s)m_3'(s)) &= 0 \\ m_2(s)m_2'(s) + m_3(s)m_3'(s) &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $s_3(s) = \dfrac{s_2'(s)}{k_2(s)}$ değeri yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} s_2(s)s_2'(s) + \frac{s_2'(s)}{k_2(s)}s_3'(s) &= 0 \\ \frac{k_2(s)s_2(s)s_2'(s) + s_2'(s)s_3'(s)}{k_2(s)} &= 0 \\ k_2(s)s_2(s)s_2'(s) + s_2'(s)s_3'(s) &= 0 \\ s_2'(s)(k_2(s)s_2(s) + s_3'(s)) &= 0 \end{aligned}$$

olup teorem ifadesinde $s_3 \neq 0$ ve dolayısıyla $s_2'(s) \neq 0$ olacağından

$$k_2(s)s_2(s) + s_3'(s) = 0 \tag{4.15}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$a(s) = \alpha(s) + s_2(s)\mathbf{n}(s) + s_3(s)\mathbf{b}(s)$$

olduğundan

$$D_{\dot\alpha} a(s) = \alpha'(s) + s_2'(s)\mathbf{n}(s) + s_2(s)\mathbf{n}'(s) + s_3'(s)\mathbf{b}(s) + s_3(s)\mathbf{b}'(s)$$

olup burada Frenet türev formülleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} D_{\dot\alpha} a(s) &= \mathbf{t}(s) + s_2'(s)\mathbf{n}(s) + s_2(s)(-k_1(s)\mathbf{t}(s) + k_2(s)\mathbf{b}(s)) \\ &\quad + s_3'(s)\mathbf{b}(s) - s_3(s)k_2(s)\mathbf{n}(s) \end{aligned}$$

olup bu ifade düzenlenirse

$$\begin{aligned} D_{\dot\alpha} a(s) &= \mathbf{t}(s) + s_2'(s)\mathbf{n}(s) - s_2(s)k_1(s)\mathbf{t}(s) + s(s)k_2(s)\mathbf{b}(s) \\ &\quad + s_3'(s)\mathbf{b}(s) - s_3(s)k_2(s)\mathbf{n}(s) \end{aligned}$$

burada (4.13) eşitliğinden $-\dfrac{s_2'(s)}{k_2(s)} = -s_3(s) \Longrightarrow s_2'(s) = s_3(s)k_2(s)$ ifadesi yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} D_{\dot\alpha} a(s) &= \mathbf{t}(s) + s_3(s)k_2(s)\mathbf{n}(s) - s_2(s)k_1(s)\mathbf{t}(s) + s_2(s)k_2(s)\mathbf{b}(s) \\ &\quad + s_3'(s)\mathbf{b}(s) - s_3(s)k_2(s)\mathbf{n}(s) \end{aligned}$$

bulunup bu ifade düzenlenirse

$$D_{\dot\alpha} a(s) = \mathbf{t}(s) - k_1(s)s_2(s)\mathbf{t}(s) + k_2(s)s_2(s)\mathbf{b}(s) + s_3'(s)\mathbf{b}(s)$$

olur. Burada $s_2(s) = \dfrac{1}{k_1(s)}$ ifadesi yerine yazılırsa

$$D_{\dot\alpha} a(s) = \mathbf{t}(s) - k_1(s)\frac{1}{k_1(s)}\mathbf{t}(s) + k_2(s)s_2(s)\mathbf{b}(s) + s_3'(s)\mathbf{b}(s)$$

ve düzenlenirse

$$D_{\dot{\alpha}}a(s) = \mathbf{t}(s) - \mathbf{t}(s) + k_2(s)s_2(s)\mathbf{b}(s) + s_3'(s)\mathbf{b}(s)$$

yazılır. Buradan

$$D_{\dot{\alpha}}a(s) = s_2(s)k_2(s)\mathbf{b}(s) + s_3'(s)\mathbf{b}(s)$$

bulunur. Eşitliğin sağ tarafı $\mathbf{b}(s)$ parantezine alınırsa

$$D_{\dot{\alpha}}a(s) = \mathbf{b}(s)(s_2(s)k_2(s) + s_3'(s))$$

ve (4.15) ifadesi kullanılırsa

$$D_{\dot{\alpha}}a(s) = 0$$

bulunur. Böylece $\forall s \in I$ için $a(s) = sabit$ bulunur.

Teorem 4.7: (I, α) koordinat komşuluğu ile birim hızlı $M \subset E^3$ eğri olsun. Bu durumda $k_2 \neq 0$, $s_3 \neq 0$ olduğunda M küresel eğridir $\Longleftrightarrow$ $s_3' + s_2k_2 = 0$ olmalıdır (Hacısalihoğlu, 1998).

İspat ($\Longrightarrow$) M eğrisi, küresel eğri olsun. Teorem 4.5 gereğince oskülatör kürelerin $a(s)$ merkezi $\forall s \in I$ için sabittir.

$$\begin{aligned} a(s) = sabit \quad &\Longrightarrow \quad D_{\dot{\alpha}}a(s) &&= 0 \\ &\Longrightarrow \quad (s_2(s)k_2(s) + s_3'(s))\mathbf{b}(s) &&= 0 \\ &\Longrightarrow \quad s_2(s)k_2(s) + s_3'(s) &&= 0 \end{aligned}$$

($\Longleftarrow$)$s_2(s)k_2(s) + s_3'(s) = 0$ olsun. Bu durumda

$$s_2(s)k_2(s) + s_3'(s) = D_{\dot{\alpha}}a(s) = 0$$

olup $\forall s \in I$ için $a(s) = sabit$ bulunur. Teorem 4.5 gereğince M eğrisi, küreseldir.

Teorem 4.8: $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow E^3$, E^3 uzayında bir birim hızlı küresel eğri olsun. α bir Tzitzeica eğrisi ise α eğrisinin eğrilikleri arasında

$$\frac{k_2'(s)}{2k_2^3(s)} = \frac{k_1(s)}{k_1'(s)} \tag{4.16}$$

denklemi geçerlidir (Bayram vd., 2018).

İspat E^3 uzayında α, bir birim hızlı küresel eğri olsun. Kürenin yarıçapı r iken

$$r = \|\alpha(s)\| = \sqrt{\langle \alpha(s), \alpha(s) \rangle} \tag{4.17}$$

şeklindedir.

(4.17) eşitliğinin s parametresine göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left\langle \alpha(s),\alpha(s)\right\rangle^{-1/2}\left\langle \alpha(s),\alpha(s)\right\rangle' &= 0\\
\frac{1}{2}\frac{\left\langle \alpha(s)',\alpha(s)\right\rangle+\left\langle \alpha(s),\alpha(s)'\right\rangle}{\sqrt{\left\langle \alpha,\alpha\right\rangle}} &= 0\\
\frac{1}{2}\frac{2\left\langle \alpha(s),\alpha(s)'\right\rangle}{\sqrt{\left\langle \alpha(s),\alpha(s)\right\rangle}} &= 0\\
\frac{\left\langle \alpha(s),\alpha^{(s)'}\right\rangle}{\sqrt{\left\langle \alpha(s),\alpha(s)\right\rangle}} &= 0\\
\left\langle \alpha(s),\alpha(s)'\right\rangle &= 0
\end{aligned}$$

olup

$$\left\langle \alpha(s),\mathbf{t}(s)\right\rangle = 0 \tag{4.18}$$

bulunur.

Dahası, (4.18) ifadesinin türevi alınırsa

$$\left\langle \alpha(s)',\mathbf{t}(s)\right\rangle + \left\langle \alpha(s),\mathbf{t}(s)'\right\rangle = 0$$

ve Frenet türev formülleri kullanılırsa

$$\left\langle \mathbf{t}(s),\mathbf{t}(s)\right\rangle + \left\langle \alpha(s),k_1(s)\mathbf{n}(s)\right\rangle = 0$$

bulunur. **t**, birim teğet vektör olduğu ve iç çarpımın lineerliği kullanılırsa

$$1 + k_1(s)\left\langle \alpha(s),\mathbf{n}(s)\right\rangle = 0$$

ve buradan

$$\left\langle \alpha(s),\mathbf{n}(s)\right\rangle = -\frac{1}{k_1(s)} \tag{4.19}$$

elde edilir. (4.19) eşitliğinin her iki tarafının türevi alınırsa

$$\left\langle \alpha(s)',\mathbf{n}(s)\right\rangle + \left\langle \alpha(s),\mathbf{n}(s)'\right\rangle = \frac{k_1'(s)}{k_1^2(s)}$$

ve Frenet türev formülleri kullanılırsa

$$\left\langle \mathbf{t}(s),\mathbf{n}(s)\right\rangle + \left\langle \alpha(s),-k_1(s)\mathbf{t}(\mathbf{s})+k_2(s)\mathbf{b}(s)\right\rangle = \frac{k_1'(s)}{k_1^2(s)}$$

olup burada **t** ve **n** vektörleri ortogonal olduğundan $\left\langle \mathbf{t}(s),\mathbf{n}(s)\right\rangle = 0$ dır. İç çarpımın lineer olduğu kullanılırsa

$$-k_1(s)\left\langle \alpha(s),\mathbf{t}(s)\right\rangle + k_2(s)\left\langle \alpha(s),\mathbf{b}(s)\right\rangle = \frac{k_1'(s)}{k_1^2(s)}$$

bulunur. Bulunan bu son ifadede (4.18) eşitliği kullanılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\langle \alpha(s), \mathbf{b}(s) \rangle = \frac{k_1'(s)}{k_2 k_1^2(s)} \tag{4.20}$$

olarak bulunur. Sonunda, (4.19) ve (4.20) ifadeleri (4.8) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} k_2'(s) \langle \alpha(s), \mathbf{b}(s) \rangle + 2k_2^2(s) \langle \alpha(s), \mathbf{n}(s) \rangle &= 0 \\ k_2'(s) \frac{k_1'(s)}{k_2 k_1^2(s)} + 2k_2^2(s)(-\frac{1}{k_1(s)}) &= 0 \\ \frac{k_1'(s) k_2'(s)}{k_2 k_1^2(s)} - \frac{2k_2^2(s)}{k_1(s)} &= 0 \end{aligned}$$

ve paydalar eşitlenip taraflar düzenlenirse

$$\frac{k_1'(s)k_2'(s) - 2k_1(s)k_2^3(s)}{k_2(s)k_1^2(s)} = 0$$

olup buradan

$$k_1'(s)k_2'(s) = 2k_1(s)k_2^3(s)$$

elde edilir. Her iki taraf, $k_1(s)k_2'(s)$ ifadesine bölünürse

$$\frac{k_1'(s)k_2'(s)}{k_1(s)k_2'(s)} = \frac{2k_1(s)k_2^3(s)}{k_1(s)k_2'(s)}$$

ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\frac{k_1'(s)}{k_1(s)} = \frac{2k_2^3(s)}{k_2'(s)}$$

olup bulunan bu son eşitlik ters çevrilirse

$$\frac{k_1(s)}{k_1'(s)} = \frac{k_2'(s)}{2k_2^3(s)}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.1: $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow E^3$, E^3 uzayında bir birim hızlı küresel Tzitzeica eğrisi olsun. α eğrisinin torsiyonu

$$k_2(s) = \sqrt{\frac{k_1''(s)k_1(s) - 2(k_1'(s))^2}{3k_1^2(s)}} \tag{4.21}$$

şeklindedir (Bayram vd., 2018).

İspat (4.10) ifadesinde

$$\frac{k_2(s)}{k_1(s)} = (\frac{k_1'(s)}{k_2(s)k_1^2(s)})'$$

eşitliğin sağ tarafındaki türev hesaplanır ve düzenlenirse

$$\begin{aligned}
\frac{k_2(s)}{k_1(s)} &= \frac{k_1''(s)k_2(s)k_1^2(s) - k_1'(s)(k_2'(s)k_1^2(s) + 2k_1(s)k_1'(s)k_2(s))}{k_2^2(s)k_1^4(s)} \\
&= \frac{k_1''(s)k_2(s)k_1^2(s) - k_1'(s)k_2'(s)k_1^2(s) - 2k_1(s)(k_1'(s))^2k_2(s)}{k_2^2(s)k_1^4(s)} \\
&= \frac{k_1''(s)k_2(s)k_1^2(s) - k_1'(s)k_2'(s)k_1^2(s) - 2k_1(s)(k_1'(s))^2k_2(s)}{k_2^2(s)k_1^4(s)}
\end{aligned}$$

olur. (4.16) ifadesinin

$$\frac{k_2'(s)}{2k_2^3(s)} = \frac{k_1(s)}{k_1'(s)} \Longrightarrow k_2'(s) = \frac{2k_2^3(s)k_1(s)}{k_1'(s)}$$

şeklinde düzenlenmesiyle bulunan $k_2'(s)$ ifadesi, (4.10) ifadesinde yerine yazlır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{k_2(s)}{k_1(s)} &= \frac{k_1''(s)k_2(s)k_1^2(s) - k_1'(s)(\dfrac{2k_2^3(s)k_1(s)}{k_1'(s)})k_1^2(s) - 2k_1(s)(k_1'(s))^2k_2(s)}{k_2^2(s)k_1^4(s)} \\
&= \frac{k_1''(s)k_2(s)k_1^2(s) - 2k_2^3(s)k_1^3(s) - 2k_1(s)(k_1'(s))^2k_2(s)}{k_2^2(s)k_1^4(s)} \\
&= \frac{k_2(s)k_1(s)(k_1''(s)k_1(s) - 2k_2^2(s)k_1^2(s) - 2(k_1'(s))^2)}{k_2^2(s)k_1^4(s)} \\
&= \frac{k_1''(s)k_1(s) - 2k_2^2(s)k_1^2(s) - 2(k_1'(s))^2}{k_2(s)k_1^3(s)} \\
&= \frac{k_1''(s)k_1(s)}{k_2(s)k_1^3(s)} - \frac{2k_2^2(s)k_1^2(s)}{k_2(s)k_1^3(s)} - \frac{2(k_1'(s))^2}{k_2(s)k_1^3(s)} \\
&= \frac{k_1''(s)k_1(s)}{k_2(s)k_1^3(s)} - \frac{2k_2(s)}{k_1(s)} - \frac{2(k_1'(s))^2}{k_2(s)k_1^3(s)}
\end{aligned}$$

olup $-\dfrac{2k_2(s)}{k_1(s)}$ ifadesi eşitliğin diğer tarafına taşınır ve düzenlenirse

$$\begin{aligned}
\frac{k_2(s)}{k_1(s)} + \frac{2k_2(s)}{k_1(s)} &= \frac{k_1''(s)k_1(s)}{k_2(s)k_1^3(s)} - \frac{2(k_1'(s))^2}{k_2(s)k_1^3(s)} \\
\frac{3k_2(s)}{k_1(s)} &= \frac{k_1''(s)k_1(s) - 2(k_1'(s))^2}{k_2(s)k_1^3(s)} \\
3k_2(s) &= \frac{k_1(s)(k_1''(s)k_1(s) - 2(k_1'(s))^2)}{k_2(s)k_1^3(s)} \\
3k_2(s) &= \frac{k_1''(s)k_1(s) - 2(k_1'(s))^2}{k_2(s)k_1^2(s)} \\
k_2^2(s) &= \frac{k_1''(s)k_1(s) - 2(k_1'(s))^2}{3k_1^2(s)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$k_2(s) = \sqrt{\frac{k_1''(s)k_1(s) - 2(k_1'(s))^2}{3k_1^2(s)}}$$

bulunup ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.9: $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow E^3$, konum vektörü

$$\alpha(s) = s_1(s)\mathbf{t}(s) + s_2(s)\mathbf{n}(s) + s_3(s)\mathbf{b}(s) \tag{4.22}$$

parametrik denklemiyle verilen bir birim hızlı eğri olsun. Burada $1 \leq i \leq 3$ için $s_i(s)$ diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. α bir Tzitzeica eğrisi ise

$$\begin{aligned} s_1'(s) - k_1(s)s_2(s) &= 1 \\ s_2'(s) + k_1(s)s_1(s) - k_2(s)s_3(s) &= 0 \\ s_3'(s) + k_2(s)s_2(s) &= 0 \\ k_2'(s)s_3(s) + 2k_2^2(s)s_2(s) &= 0 \end{aligned} \tag{4.23}$$

şeklindedir (Bayram vd., 2018).

İspat $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow E^3$, E^3 uzayında bir birim hızlı eğri olsun. (4.22) ifadesinin s parametresine göre türevi alınırsa

$$\alpha'(s) = s_1'(s)\mathbf{t}(s) + s_1(s)\mathbf{t}'(s) + s_2'(s)\mathbf{n}(s) + s_2(s)\mathbf{n}'(s) + s_3'(s)\mathbf{b}(s) + s_3(s)\mathbf{b}'(s)$$

ve Frenet türev formülleri uygulanırsa

$$\begin{aligned} \alpha'(s) &= s_1'(s)\mathbf{t}(s) + s_1(s)k_1(s)\,\mathbf{n}(s) + s_2'(s)\mathbf{n}(s) + s_2(s)(-k_1(s)\mathbf{t}(s) + k_2(s)\mathbf{b}(s)) \\ &\quad + s_3'(s)\mathbf{b}(s) - s_3(s)k_2(s)\mathbf{n}(s) \end{aligned}$$

olup düzenlenirse

$$\begin{aligned} \alpha'(s) &= (s_1'(s) - m_1(s)k_1(s))\mathbf{t}(s) \\ &\quad + (s_1(s)k_1(s) + s_2'(s) - s_3(s)k_2(s))\mathbf{n}(s) \\ &\quad + (s_2(s)k_2(s) + s_3'(s))\mathbf{b}(s) \end{aligned} \tag{4.24}$$

bulunur. $\alpha'(s) = \mathbf{t}(s)$ yani $\alpha'(s) = 1.\mathbf{t}(s) + 0.\mathbf{n}(s) + 0.\mathbf{b}(s)$ olduğundan

$$s_1'(s) - k_1(s)s_2(s) = 1 \tag{4.25}$$

$$s_2'(s) + k_1(s)s_1(s) - k_2(s)s_3(s) = 0 \tag{4.26}$$

$$s_3'(s) + k_2(s)s_2(s) = 0 \tag{4.27}$$

elde edilir. (4.8) ifadesi

$$k_2'(s)\left<\alpha(s), \mathbf{b}(\mathbf{s})\right> + 2k_2^2(s)\left<\alpha(s), \mathbf{n}(\mathbf{s})\right> = 0$$

şeklinde olup burada $\left<\alpha(s), \mathbf{b}(\mathbf{s})\right> = s_3(s)$ ve $\left<\alpha(s), \mathbf{n}(\mathbf{s})\right> = s_2(s)$ olduğu kullanılırsa

$$k_2'(s)s_3(s) + 2k_2^2(s)s_2(s) = 0 \tag{4.28}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.10: $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow E^3$, E^3 uzayında $k_1 > 0$ ve $k_2 \neq 0$ eğrilikleri ve (4.22) parametrik denklemiyle verilen bir birim hızlı anti-Salkowski Tzitzeica eğrisi olsun. $\alpha(s)$ eğrisi

$$\alpha(s) = (s + c_1)\mathbf{t}(s) + c_2\mathbf{b}(s) \tag{4.29}$$

parametrelemesiyle verilen bir rektifiyan eğrisiyle uyumludur, burada c_1 ve c_2, integral sabitleridir (Bayram vd., 2018).

İspat $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow E^3$, bir birim hızlı anti-Salkowski Tzitzeica eğrisi olduğundan α eğrisinin k_2 torsiyonu sabittir. Dolayısıyla $k_2' = 0$ olur. Böylece (4.23) eşitliğinden

$$s_2 = 0$$

bulunur. Buna göre (4.23) eşitlikleri düzenlenirse

$$\begin{aligned} s_1' &= 1 \\ s_3' &= 0 \end{aligned}$$

olup integralleri hesaplanırsa $s_1 = s + c_1$ ve $s_3 = c_2$ bulunur. Bulunan bu değerler (4.22) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\alpha(s) = (s + c_1)\mathbf{t}(s) + c_2\mathbf{b}(s)$$

elde edilir. Burada (4.4) ifadesi dikkate alınırsa eğrinin rektifiyan eğri olduğu gözükmektedir.

Sonuç 4.2: $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow E^3$, E^3 uzayında $k_1 > 0$ ve $k_2 \neq 0$ eğrilikleri ve (4.22) parametrik denklemiyle verilen bir birim hızlı anti-Salkowski Tzitzeica eğrisi olsun. Bu durumda α eğrisi, N-sabit eğrisinin 2.türü ile uyumludur. Eğri rektifiyan eğri olduğundan eğrinin normal bileşeninin normu sıfırdan farklı bir sabittir (Bayram vd., 2018).

Sonuç 4.3: $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow E^3$, E^3 uzayında $k_1 > 0$ ve $k_2 \neq 0$ eğrilikleri ve (4.22) parametrik denklemiyle verilen bir birim hızlı Salkowski Tzitzeica eğrisi olsun. Bu durumda

$$s_2''(s) + (k_1^2(s) + 3k_2^2(s))s_2(s) + k_1(s) = 0$$

şeklindedir, burada α eğrisi Salkowski eğrisi olduğundan bu eğrinin k_1 eğriliği, bir reel sabittir (Bayram vd., 2018).

İspat (4.23) eşitliğinin türevi alınırsa

$$s_2''(s) + k_1'(s)s_1(s) + k_1(s)s_1'(s) - k_2'(s)s_3(s) - k_2(s)s_3'(s) = 0$$

olup $k_1 = sbt$ olduğundan $k_1' = 0$ bulunur. Ayrıca (4.23) ifadesinden $s_1'(s) = 1 + k_1(s)s_2(s)$ eşitliği yerine yazılırsa

$$s_2''(s) + k_1(s)(1 + k_1(s)s_2(s)) - k_2'(s)s_3(s) - k_2(s)s_3'(s) = 0$$

ve (4.23) eşitliğinden $s_3'(s) = -k_2(s)s_2(s)$ ifadesi yerine yazılırsa

$$s_2''(s) + k_1(s)(1 + k_1(s)s_2(s)) - k_2'(s)s_3(s) - k_2(s)(-k_2(s)s_2(s)) = 0$$

olur. Son olarak, (4.23) eşitliğinden $-k_2'(s)s_3(s) = 2k_2^2(s)s_2(s)$ ifadesi yerine yazılırsa

$$s_2''(s) + k_1(s)(1 + k_1(s)s_2(s)) + 2k_2^2(s)s_2(s) + k_2(s)(k_2(s)s_2(s)) = 0$$

ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$s_2''(s) + k_1(s) + k_1^2(s)s_2(s) + 2k_2^2(s)s_2(s) + k_2^2(s)s_2(s) = 0$$

bulunur. Buradan eşitlik s_2 parantezine alınırsa

$$s_2''(s) + (k_1^2(s) + 3k_2^2(s))s_2(s) + k_1(s) = 0$$

elde edilir.

4.2 E^3 Öklid 3-uzayında q-çatılı Tzitzeica Eğrileri

Tanım 4.13: $n = 3$ özel halinde, $\mathbf{t}(s)$, $\mathbf{n_q}(s)$ ve $\mathbf{b_q}(s)$ q-vektörlerini ele alalım

$$S_p\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n_q}(s)\}$$

vektör uzayı ile birleşen $\alpha(s)$ deki afin altuzaya q-oskülatör düzlem,

$$S_p\{\mathbf{n_q}(s), \mathbf{b_q}(s)\}$$

vektör uzayı ile birleşen, $\alpha(s)$ deki afin altuzaya q-normal düzlem,

$$S_p\{\mathbf{t}(s), \mathbf{b_q}(s)\}$$

vektör uzayı ile birleşen, $\alpha(s)$ deki afin altuzaya q-rektifiyan düzlem denir. Bu durumda oskülatör; yapışan ya da değen, normal; dik ve rektifiyan; tamamlayan anlamına gelmektedir.

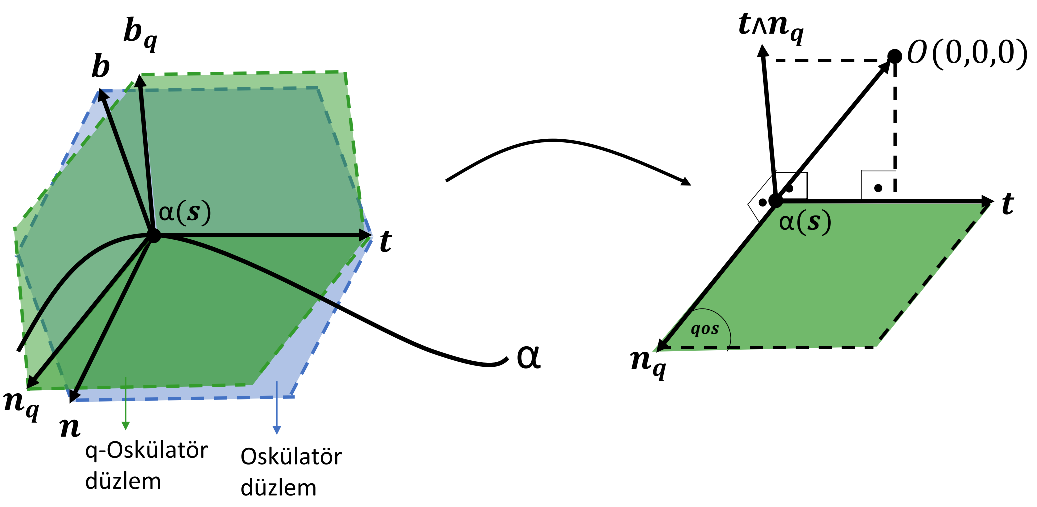
Tanım 4.14: Regüler eğri $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow E^3$ verilsin. α eğrisi için sabit k_1 eğriliği ancak sabit olmayan k_3 eğriliği varsa eğriye q-Salkowski eğrisi adı verilir.

Tanım 4.15: Regüler eğri $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow E^3$ verilsin. α eğrisi için sabit k_3 eğriliği ancak sabit olmayan k_1 eğriliği varsa eğriye anti q-Salkowski eğrisi adı verilir.

Tanım 4.16: $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow E^3$, E^3 uzayında $k_1 > 0$ ve $k_3 \neq 0$ q-eğrilikleri ile bir birim hızlı eğri olsun. α eğrisinin keyfi bir $\alpha(s)$ noktasındaki q-oskülatör düzleminin orijine olan uzaklığı d_{qos} olmak üzere, α eğrisi

$$\frac{k_3}{d_{\text{qos}}^2} = a \tag{4.30}$$

şartını sağlıyorsa α, Tzitzeica eğrisi adını alır. Burada $a \neq 0$ bir reel sabittir.



Şekil 4.4 E^3 de q-oskülatör düzlemin orijine olan d_{qos} uzaklığı

d_{qos} uzaklığı,

$$\begin{aligned} d(O, qos) &= d_{\text{qos}} \\ &= \left| \frac{\langle \alpha(s), \mathbf{t} \times \mathbf{n_q} \rangle}{\|\mathbf{t} \times \mathbf{n_q}\|} \right| \end{aligned}$$

olup burada $\mathbf{b_q} = \mathbf{t} \times \mathbf{n_q}$ quasi-binormal vektörü yerine yazılırsa

$$d_{\text{qos}} = \left| \frac{\langle \alpha(s), \mathbf{b_q} \rangle}{\|\mathbf{b_q}\|} \right|$$

bulunur. $\mathbf{b_q}$ birim binormal vektör olduğundan

$$d_{\text{qos}} = |\langle \mathbf{b_q}, \alpha \rangle| \tag{4.31}$$

şeklinde, q-oskülatör düzlemin orijine olan uzaklığı bulunmuş olur.

Sonuç 4.4: q-vektörler ile Frenet vektörleri arasındaki açı θ olmak üzere,

$$\langle \mathbf{b_q}, \alpha \rangle = \frac{\sin\theta}{k_1} + \cos\theta \langle \mathbf{b}, \alpha \rangle$$

şeklindedir. θ açısının sıfır olması durumunda, oskülatör düzlemin orijine olan uzaklığı d_{osc} ile q-oskülatör düzlemin orijine olan uzaklığı d_{qos} arasında

$$d_{\text{osc}} = d_{\text{qos}}$$

eşitliği vardır.

İspat Frenet çatısı ile q-çatısı arasındaki ilişkiyi veren (3.10) ifadesinden

$$\mathbf{b_q} = -\sin\theta\mathbf{n} + \cos\theta\mathbf{b}$$

eşitliği, $\langle \mathbf{b_q}, \alpha \rangle$ ifadesinde yerine yazılırsa

$$\langle \mathbf{b_q}, \alpha \rangle = \langle -\sin\theta\mathbf{n} + \cos\theta\mathbf{b}, \alpha \rangle$$

ve iç çarpımın lineer olduğu kullanılırsa

$$\langle \mathbf{b_q}, \alpha \rangle = -\sin\theta \langle \mathbf{n}, \alpha \rangle + \cos\theta \langle \mathbf{b}, \alpha \rangle$$

olup (4.19) eşitliğinden

$$\langle \mathbf{b_q}, \alpha \rangle = \frac{\sin\theta}{k_1} + \cos\theta \langle \mathbf{b}, \alpha \rangle$$

bulunur. Burada $\theta = 0$ olması durumunda

$$\langle \mathbf{b}, \alpha \rangle = \langle \mathbf{b_q}, \alpha \rangle$$

ve (4.7) ve (4.31) eşitlikleri kullanılırsa

$$d_{\text{osc}} = d_{\text{qos}}$$

bulunmuş olur.

Teorem 4.11: $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow E^3$, E^3 uzayında birim hızlı bir eğri olsun. α bir Tzitzeica eğrisi ise

$$k_3'(s) \langle \mathbf{b_q}, \alpha \rangle + 2k_2(s)k_3(s) \langle \mathbf{t}, \alpha \rangle + 2k_3^2(s) \langle \mathbf{n_q}, \alpha \rangle = 0 \tag{4.32}$$

denklemi geçerlidir.

İspat α, E^3 uzayında bir birim hızlı eğri olsun, (4.30) ve (4.31) eşitlikleri kullanılarak

$$\frac{k_3(s)}{\langle \mathbf{b_q}, \alpha \rangle^2} = a \neq 0 \tag{4.33}$$

elde edilir. Bu ifadenin türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{k_3'(s)\langle \mathbf{b_q}, \alpha \rangle^2 - k_3(s)(\langle \mathbf{b}_q, \alpha \rangle^2)'}{\langle \mathbf{b}, \alpha \rangle^4} &= 0 \\ \frac{k_3'(s)\langle \mathbf{b_q}, \alpha \rangle^2 - k_3(s)(2\langle \mathbf{b_q}, \alpha \rangle (\langle \mathbf{b_q}', \alpha \rangle + \langle \mathbf{b_q}, \alpha' \rangle))}{\langle \mathbf{b_q}, \alpha \rangle^4} &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Burada α eğrisi birim hızlı olduğundan $\alpha' = \mathbf{t}$ ve dolayısıyla $\langle \mathbf{b_q}, \alpha' \rangle = \langle \mathbf{b_q}, \mathbf{t} \rangle$ olup $\mathbf{t}$ ve $\mathbf{b_q}$ vektörleri ortonormal olduğundan $\langle \mathbf{b_q},\ \mathbf{t} \rangle = 0$ dır. Böylece

$$\frac{k_3'(s)\langle \mathbf{b_q}, \alpha \rangle^2 - k_3(s)(2\langle \mathbf{b_q}, \alpha \rangle \langle \mathbf{b_q}', \alpha \rangle)}{\langle \mathbf{b_q}, \alpha \rangle^4} = 0$$

olup q-çatının Frenet türev formülleri benzeri varyasyonları uygulanırsa

$$\frac{k_3'(s)\langle \mathbf{b_q}, \alpha \rangle^2 - k_3(s)(2\langle \mathbf{b_q}, \alpha \rangle \langle -k_2(s)\mathbf{t} - k_3(s)\mathbf{n_q}, \alpha \rangle)}{\langle \mathbf{b_q}, \alpha \rangle^4} = 0$$

elde edilir. İç çarpımın lineer olduğu kullanılır ve eşitlik düzenlenirse

$$\frac{k_3'(s)\langle \mathbf{b_q}, \alpha \rangle^2 + 2k_2(s)k_3(s)\langle \mathbf{b_q}, \alpha \rangle \langle \mathbf{t}, \alpha \rangle + 2k_3^2(s)\langle \mathbf{b}_q, \alpha \rangle \langle \mathbf{n}_q, \alpha \rangle}{\langle \mathbf{b}_q, \alpha \rangle^4} = 0$$

bulunur. Pay kısmı $\langle \mathbf{b}_q, \alpha \rangle$ parantezine alınırsa

$$\frac{\langle \mathbf{b_q}, \alpha \rangle (k_3'(s)\langle \mathbf{b_q}, \alpha \rangle + 2k_2(s)k_3(s)\langle \mathbf{t}, \alpha \rangle + 2k_3^2(s)\langle \mathbf{nq}, \alpha \rangle)}{\langle \mathbf{b_q}, \alpha \rangle^4} = 0$$

ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\frac{k_3'(s)\langle \mathbf{b_q}, \alpha \rangle + 2k_2(s)k_3(s)\langle \mathbf{t}, \alpha \rangle + 2k_3^2(s)\langle \mathbf{nq}, \alpha \rangle}{\langle \mathbf{b_q}, \alpha \rangle^3} = 0$$

olarak bulunur. Buradan

$$k_3'(s)\langle \mathbf{b_q}, \alpha \rangle + 2k_2(s)k_3(s)\langle \mathbf{t}, \alpha \rangle + 2k_3^2(s)\langle \mathbf{n_q}, \alpha \rangle = 0$$

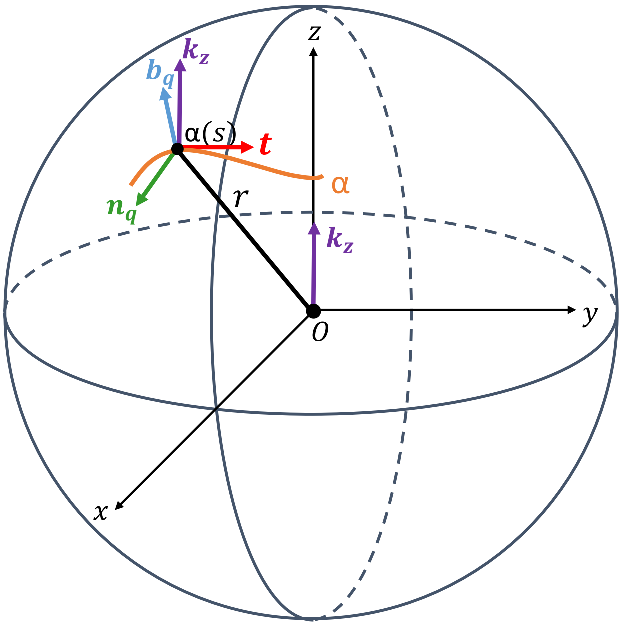
elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.5: 3-boyutlu Öklid uzayda Frenet çatısı yardımıyla yapılan Teorem 4.2 de yer alan ifade ile yine aynı uzayda q-çatı yardımıyla ispatlanan Teorem 4.11 ifadesi incelendiğinde, ifadelerde yer alan eşitlikler arasında q-çatıyla yapılan hesaplamada, Teorem 4.2 deki ifadeye ek olarak eşitliğin sol tarafına $+2k_2k_3\langle\mathbf{t},\alpha\rangle$ ifadesinin geldiği ve Teorem 4.2 deki k_2 eğriliğinin yerini Teorem 4.11 ifadesinde k_3 q-eğriliğinin aldığı görülmektedir. Ayrıca Teorem 4.11 de, Teorem 4.2 de yer alan **n** ve **b** Frenet vektörleri yerine herhangi bir başka değişiklik olmadan (yanına farklı bir katsayı ya da bir değişken almadan) $\mathbf{n_q}$ ve $\mathbf{b_q}$ olarak tanımlanan q-vektörleri gelmiştir. Eğrinin küresel eğri olması durumunda Teorem 4.2 ile olan benzerliğinin daha da artacağı, küresel eğri hesaplamalarından sonra Sonuç 4.6 ifadesinde gösterilmiştir.

Küre üzerindeki bir eğri için q çatı yardımıyla bileşenlerini yazalım. Yani q-çatı için küresel eğri

$$\alpha(s) = s_1\mathbf{t}(s) + s_2\mathbf{n_q}(s) + s_3\mathbf{b_q}(s)$$

olmak üzere s_1, s_2 ve s_3 katsayılarını bulalım. α birim hızlı eğri olmak üzere



Şekil 4.5 q-çatı için küresel eğri

$$\left\|\overrightarrow{O\alpha}\right\| = r$$

olup norm tanımından

$$\begin{aligned}\left\langle\overrightarrow{O\alpha},\overrightarrow{O\alpha}\right\rangle &= r^2\\ \langle\alpha,\alpha\rangle &= r^2\end{aligned}$$

bulunur. Bu ifadenin türevi alınırsa

$$\langle \alpha', \alpha \rangle + \langle \alpha, \alpha' \rangle = 0$$

olup iç çarpımın simetrik olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} 2\langle \alpha', \alpha \rangle &= 0 \\ \langle \alpha', \alpha \rangle &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Burada, α birim hızlı eğri olduğundan $\mathbf{t} = \alpha'$ olup bu ifade yerine yazılırsa

$$s_1 = \langle \mathbf{t},\alpha \rangle = 0 \tag{4.34}$$

olur. Buradan türev alınır

$$\langle \mathbf{t}',\alpha \rangle + \langle \mathbf{t},\alpha' \rangle = 0$$

ve α birim hızlı eğri olduğundan $\mathbf{t} = \alpha'$ olduğu kullanılır ve q-çatının Frenet formülleri benzeri varyasyon denklemi (3.11) den $\mathbf{t}'$ ifadesi yerine yazılırsa

$$\langle k_1\mathbf{n_q} + k_2\mathbf{b_q},\alpha \rangle + \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle = 0$$

olup $\mathbf{t}$ birim teğet vektör olduğundan $\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle = 1$ ve iç çarpımın lineer olduğu kullanılırsa

$$k_1 \langle \mathbf{n_q},\alpha \rangle + k_2 \langle \mathbf{b_q},\alpha \rangle + 1 = 0$$

elde edilir. Böylece

$$k_1 \langle \mathbf{n_q},\alpha \rangle + k_2 \langle \mathbf{b_q},\alpha \rangle = -1 \tag{4.35}$$

bulunur. Bu ifadenin türevi alınırsa

$$\begin{aligned} k_1' \langle \mathbf{n_q},\alpha \rangle + k_1(\langle \mathbf{n_q},\alpha \rangle)' + k_2' \langle \mathbf{b_q},\alpha \rangle + k_2(\langle \mathbf{b_q},\alpha \rangle)' &= 0 \\ k_1' \langle \mathbf{n_q},\alpha \rangle + k_1(\langle \mathbf{n_q}',\alpha \rangle + \langle \mathbf{n_q},\alpha' \rangle) + k_2' \langle \mathbf{b_q},\alpha \rangle + k_2(\langle \mathbf{b_q}',\alpha \rangle + \langle \mathbf{b_q},\alpha' \rangle) &= 0 \end{aligned}$$

olup α birim hızlı eğri olduğundan $\mathbf{t} = \alpha'$ olduğu kullanılır ve q-çatının Frenet formülleri benzeri varyasyon denklemi (3.11) den $\mathbf{n}_q'$ ve $\mathbf{b}_q'$ ifadeleri yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & k_1' \langle \mathbf{n_q},\alpha \rangle + k_1(\langle -k_1\mathbf{t} + k_3\mathbf{b_q},\alpha \rangle + \langle \mathbf{n_q}, \mathbf{t} \rangle) \\ & +k_2' \langle \mathbf{b_q},\alpha \rangle + k_2(\langle -k_2\mathbf{t} - k_3\mathbf{n_q},\alpha \rangle + \langle \mathbf{b_q}, \mathbf{t} \rangle) = 0 \end{aligned}$$

bulunur. Burada, **t, $\mathbf{n_q}$** ve $\mathbf{b_q}$ vektörleri ortogonal vektörler olduğundan $\langle \mathbf{n_q}, \mathbf{t} \rangle = \langle \mathbf{b_q}, \mathbf{t} \rangle = 0$ ve iç çarpımın lineer olması kullanılırsa

$$k_1' \langle \mathbf{n_q},\alpha \rangle + k_1^2 \langle \mathbf{t},\alpha \rangle + k_1k_3 \langle \mathbf{b_q},\alpha \rangle + k_2' \langle \mathbf{b_q},\alpha \rangle - k_2^2 \langle \mathbf{t},\alpha \rangle - k_2k_3 \langle \mathbf{n_q},\alpha \rangle = 0$$

olup (4.34) ifadesi kullanılırsa

$$k_1' \langle \mathbf{n_q},\alpha \rangle + k_1k_3 \langle \mathbf{b_q},\alpha \rangle + k_2' \langle \mathbf{b_q},\alpha \rangle - k_2k_3 \langle \mathbf{n_q},\alpha \rangle = 0$$

ve eşitlik düzelenirse

$$\langle \mathbf{n_q},\alpha\rangle\,(k_1'-k_2k_3)+\langle \mathbf{b_q},\alpha\rangle\,(k_2'+k_1k_3)=0 \tag{4.36}$$

bulunur. Bulunan bu son eşitlik ile (4.35) eşitliği arasında yok etme metodu kullanılırsa yani (4.35) eşitliği $-(k_2'+k_1k_3)$ ifadesi ile (4.36) eşitliği de k_2 ile çarpılır ve bu eşitlikler toplanırsa

$$\begin{aligned}
-(k_2'+k_1k_3)k_1\,\langle \mathbf{n_q},\alpha\rangle+k_2(k_1'-k_2k_3)\,\langle \mathbf{n_q},\alpha\rangle &= k_2'+k_1k_3\\
(-k_1k_2'-k_1^2k_3+k_2k_1'-k_2^2k_3)\,\langle \mathbf{n_q},\alpha\rangle &= k_2'+k_1k_3\\
(-k_1(k_2'+k_1k_3)+k_2(k_1'-k_2k_3))\,\langle \mathbf{n_q},\alpha\rangle &= k_2'+k_1k_3
\end{aligned}$$

olup her iki taraf $k_2'+k_1k_3$ ifadesine bölünürse

$$\begin{aligned}
(-k_1(k_2'+k_1k_3)\,\langle \mathbf{n_q},\alpha\rangle+k_2(k_1'-k_2k_3)\,\langle \mathbf{n_q},\alpha\rangle)\frac{1}{k_2'+k_1k_3} &= \frac{k_2'+k_1k_3}{k_2'+k_1k_3}\\
-k_1\frac{(k_2'+k_1k_3)}{k_2'+k_1k_3}\,\langle \mathbf{n_q},\alpha\rangle+k_2\frac{(k_1'-k_2k_3)}{k_2'+k_1k_3}\,\langle \mathbf{n_q},\alpha\rangle &= 1
\end{aligned}$$

ve bu ifade düzenlenirse

$$\left(-k_1+\frac{k_2(k_1'-k_2k_3)}{k_2'+k_1k_3}\right)\langle \mathbf{n_q},\alpha\rangle=1$$

bulunur. Böylece

$$\langle \mathbf{n_q},\alpha\rangle=\frac{1}{\left(-k_1+\dfrac{k_2(k_1'-k_2k_3)}{k_2'+k_1k_3}\right)}$$

elde edilmiş olur. Bu ifade

$$\langle \mathbf{n_q},\alpha\rangle=-\frac{1}{k_1-\dfrac{k_2(k_1'-k_2k_3)}{k_2'+k_1k_3}}$$

şeklinde düzenlenirse

$$\langle \mathbf{n_q},\alpha\rangle=-s_2 \tag{4.37}$$

olarak bulunur. Şimdi (4.36) eşitliği ile (4.35) eşitliği arasında yok etme metodu kullanılırsa yani (4.35) eşitliği $-(k_1'-k_2k_3)$ ifadesi ile (4.36) eşitliği de k_1 ile çarpılır ve bu eşitlikler toplanırsa

$$\begin{aligned}
(-k_2(k_1'-k_2k_3)+k_1(k_2'+k_1k_3))\,\langle \mathbf{b_q},\alpha\rangle &= k_1'-k_2k_3\\
(-k_2k_1'+k_2^2k_3+k_1k_2'+k_1^2k_3)\,\langle \mathbf{b_q},\alpha\rangle &= k_1'-k_2k_3\\
(-k_2(k_1'-k_2k_3)+k_1(k_2'+k_1k_3))\,\langle \mathbf{b_q},\alpha\rangle &= k_1'-k_2k_3
\end{aligned}$$

olup her iki taraf $k_1'-k_2k_3$ ifadesine bölünürse

$$\begin{aligned}
(-k_2(k_1'-k_2k_3)+k_1(k_2'+k_1k_3))\,\langle \mathbf{b_q},\alpha\rangle)\frac{1}{k_1'-k_2k_3} &= \frac{k_1'-k_2k_3}{k_1'-k_2k_3}\\
-k_2\frac{(k_1'-k_2k_3)}{k_1'-k_2k_3}\,\langle \mathbf{b_q},\alpha\rangle+k_1\frac{(k_2'+k_1k_3)}{k_1'-k_2k_3}\,\langle \mathbf{b_q},\alpha\rangle &= 1
\end{aligned}$$

ve bu ifade düzenlenirse

$$\left(-k_2 + k_1 \frac{(k_2' + k_1 k_3)}{k_1' - k_2 k_3}\right) \langle \mathbf{b_q}, \alpha \rangle = 1$$

bulunur. Böylece

$$\langle \mathbf{b_q}, \alpha \rangle = \frac{1}{\left(-k_2 + k_1 \frac{(k_2' + k_1 k_3)}{k_1' - k_2 k_3}\right)} \tag{4.38}$$

elde edilmiş olur.

Ayrıca (4.37) ifadesi yani $\langle \mathbf{n_q}, \alpha \rangle = -s_2$ ifadesinin türevi alınırsa

$$\left\langle \mathbf{n_q'}, \alpha \right\rangle + \langle \mathbf{n_q}, \alpha' \rangle = -s_2'$$

olup burada α birim hızlı eğri olduğundan $\mathbf{t} = \alpha'$ eşitliği kullanılırsa

$$\left\langle \mathbf{n_q'}, \alpha \right\rangle + \langle \mathbf{n_q}, \mathbf{t} \rangle = -s_2'$$

bulunur. Burada $\mathbf{t}$ ile $\mathbf{n_q}$ vektörleri ortogonal vektörler olduğundan $\langle \mathbf{n_q}, \mathbf{t} \rangle = 0$ ve q-çatının Frenet formülleri benzeri varyasyon denklemi (3.11) den $\mathbf{n_q'}$ ifadesi yerine yazılırsa

$$\langle -k_1 \mathbf{t} + k_3 \mathbf{b_q}, \alpha \rangle = -s_2'$$

ve iç çarpımın lineer olduğu kullanılırsa

$$-k_1 \langle \mathbf{t}, \alpha \rangle + k_3 \langle \mathbf{b_q}, \alpha \rangle = -s_2'$$

olup (4.34) ifadesinden

$$k_3 \langle \mathbf{b_q}, \alpha \rangle = -s_2'$$

ve böylece

$$\langle \mathbf{b_q}, \alpha \rangle = -\frac{s_2'}{k_3} = -s_3$$

bulunmuş olur.

(4.37) ifadesinden

$$s_2 = \frac{1}{k_1 - \frac{k_2(k_1' - k_2 k_3)}{k_2' + k_1 k_3}}$$

olup bu eşitlik düzenlenirse

$$s_2 = \frac{k_2' + k_1 k_3}{k_1 k_2' + k_1^2 k_3 - k_2 k_1' + k_2^2 k_3}$$

bulunur. Her iki tarafın türevi alınırsa

$$\begin{aligned}
s_2' &= \frac{(k_2' + k_1k_3)'(k_1k_2' + k_1^2k_3 - k_2k_1' + k_2^2k_3)}{(k_1k_2' + k_1^2k_3 - k_2k_1' + k_2^2k_3)^2} \\
&\quad - \frac{(k_2' + k_1k_3)(k_1k_2' + k_1^2k_3 - k_2k_1' + k_2^2k_3)'}{(k_1k_2' + k_1^2k_3 - k_2k_1' + k_2^2k_3)^2} \\
&= \frac{(k_2'' + k_1'k_3 + k_1k_3')(k_1k_2' + k_1^2k_3 - k_2k_1' + k_2^2k_3)}{(k_1k_2' + k_1^2k_3 - k_2k_1' + k_2^2k_3)^2} \\
&\quad - \frac{(k_2' + k_1k_3)(k_1'k_2' + k_1k_2'' + 2k_1k_1'k_3 + k_1^2k_3' - k_2'k_1' - k_2k_1'' + 2k_2k_2'k_3 + k_2^2k_3')}{(k_1k_2' + k_1^2k_3 - k_2k_1' + k_2^2k_3)^2}
\end{aligned}$$

olup bu ifadede sadeleştirme yapılırsa

$$\begin{aligned}
s_2' &= \frac{(k_2'' + k_1'k_3 + k_1k_3')(k_1k_2' + k_1^2k_3 - k_2k_1' + k_2^2k_3)}{(k_1k_2' + k_1^2k_3 - k_2k_1' + k_2^2k_3)^2} \\
&\quad - \frac{(k_2' + k_1k_3)(k_1k_2'' + 2k_1k_1'k_3 + k_1^2k_3' - k_2k_1'' + 2k_2k_2'k_3 + k_2^2k_3')}{(k_1k_2' + k_1^2k_3 - k_2k_1' + k_2^2k_3)^2}
\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi, pay kısmındaki parantez içindeki ifadeler dağıtılırsa

$$\begin{aligned}
s_2' &= \frac{1}{(k_1k_2' + k_1^2k_3 - k_2k_1' + k_2^2k_3)^2}[k_2''k_1k_2' + k_2''k_1^2k_3 - k_2''k_2k_1' + k_2''k_2^2k_3 \\
&\quad +k_1'k_3k_1k_2' + k_1'k_3^2k_1^2 - (k_1')^2k_3k_2 + k_1'k_3^2k_2^2 \\
&\quad +k_1^2k_3'k_2' + k_3'k_1^3k_3 - k_1k_3'k_2k_1' + k_1k_3'k_2^2k_3 \\
&\quad -k_2'k_1k_2'' - 2k_2'k_1k_1'k_3 - k_2'k_1^2k_3' + k_2'k_2k_1'' - 2(k_2')^2k_2k_3 - k_2'k_2^2k_3' \\
&\quad -k_1^2k_3k_2'' - 2k_1^2k_3^2k_1' - k_3k_1^3k_3' + k_1k_3k_2k_1'' - 2k_1k_3^2k_2k_2' - k_1k_3k_2^2k_3']
\end{aligned}$$

olup gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
s_2' &= \frac{1}{(k_1k_2' + k_1^2k_3 - k_2k_1' + k_2^2k_3)^2}[-k_2''k_2k_1' + k_2''k_2^2k_3 - k_1'k_3k_1k_2' \\
&\quad -k_1'k_3^2k_1^2 - (k_1')^2k_3k_2 + k_1'k_3^2k_2^2 - k_1k_3'k_2k_1' + k_2'k_2k_1'' - 2(k_2')^2k_2k_3 \\
&\quad -k_2'k_2^2k_3' + k_1k_3k_2k_1'' - 2k_1k_3^2k_2k_2']
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Burada ortak terimler, paranteze alınırsa

$$\begin{aligned}
s_2' &= \frac{1}{(k_1k_2' + k_1^2k_3 - k_2k_1' + k_2^2k_3)^2}[k_1'k_3^2(k_2^2 - k_1^2) - k_1'k_1(k_2'k_3 + k_3'k_2) \\
&\quad -k_1'k_2k_2'' + k_2'k_2(-2k_1k_3^2 + k_1'' - k_2k_3') \\
&\quad -k_2k_3((k_1')^2 + 2(k_2')^2 - k_1''k_1 - k_2''k_2)]
\end{aligned}$$

ve düzenlenirse

$$\begin{aligned} s_2' &= \frac{1}{(k_1k_2' + k_1^2k_3 - k_2k_1' + k_2^2k_3)^2}[k_1'(k_3^2(k_2^2 - k_1^2) - k_1(k_2k_3)' - k_2k_2'') \\ &\quad + k_2'k_2(-2k_1k_3^2 + k_1'' - k_2k_3') \\ &\quad - k_2k_3((k_1')^2 + 2(k_2')^2 - k_1''k_1 - k_2''k_2)] \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bu ifadenin her iki tarafı k_3 ifadesine bölünürse

$$\begin{aligned} \frac{s_2'}{k_3} &= \frac{1}{(k_1k_2' + k_1^2k_3 - k_2k_1' + k_2^2k_3)^2}[k_1'(k_3(k_2^2 - k_1^2) - k_1k_2' \\ &\quad -(k_1k_2k_3')/k_3 - (k_2k_2'')/k_3) + k_2'k_2(-2k_1k_3 + k_1''/k_3 - (k_2k_3')/k_3) \\ &\quad -k_2((k_1')^2 + 2(k_2')^2 - k_1''k_1 - k_2''k_2)] \end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 4.12: $M \subset E^3$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ ya karşılık gelen $\alpha(s)$ noktasındaki q vektörler $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n_q}(s), \mathbf{b_q}(s)\}$ olmak üzere, M ile sonsuz yakın üç ortak noktası olan kürelerin merkezlerinin geometrik yeri

$$a(s) = \alpha(s) + s_2(s)\mathbf{n_q}(s) + \lambda\mathbf{b_q}(s)$$

şeklindedir. Burada $s_2 : I \longrightarrow \mathbb{R}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ dir.

İspat M birim hızlı eğri ve (I, α) koordinat komşuluğu verilmiştir. $\alpha(s) \in M$ için M eğrisi sonsuz yakın üç ortak noktası olan kürenin yarıçapı r ve merkezi a olur. Buradan

$$\begin{aligned} f \; : \; I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ s &\longrightarrow f(s) = \langle a - \alpha(s), a - \alpha(s)\rangle - r^2 \end{aligned}$$

ele alınsın. $a(s)$ noktasında M eğrisinin,

$$S^2 = \{x \mid x \in E^3, \langle x - a, x - a\rangle = r^2\}$$

şeklinde tanımlı küreleri ile sonsuz yakın üç ortak noktasının olması için

$$f(s) = f'(s) = f''(s) = 0$$

verilir. Buna göre, $f(s) = 0$ olması için

$$\langle a - \alpha(s), a - \alpha(s)\rangle = r^2$$

olmalıdır. Bu ifadenin türevi alınırsa, $f'(s) = 0$ olup

$$\langle \alpha'(s), a - \alpha(s)\rangle + \langle a - \alpha(s), \alpha'(s)\rangle = 0$$

iç çarpımın simetrik ve lineer olduğu kullanılırsa

$$2\left\langle \alpha'(s), a-\alpha(s)\right\rangle = 0$$

ve buradan da

$$\left\langle \alpha'(s), a-\alpha(s)\right\rangle = 0$$

olup α birim hızlı eğri olduğundan $\mathbf{t}(s)=\alpha'(s)$ değeri yerine yazılırsa

$$\left\langle \mathbf{t}(s), a-\alpha(s)\right\rangle = 0 \tag{4.39}$$

bulunur. Bu ifadenin türevi alınırsa, $f''(s)=0$ olup

$$\left\langle \mathbf{t}'(s), a-\alpha(s)\right\rangle + \left\langle \mathbf{t}(s), \alpha'(s)\right\rangle = 0$$

olup α birim hızlı eğri olduğundan $\mathbf{t}(s)=\alpha'(s)$ değeri yerine yazılır ve q-çatının Frenet benzeri varyasyon denklemi (3.11) kullanılırsa

$$\left\langle k_1(s)\mathbf{n_q}(s)+k_2(s)\mathbf{b_q}(s), a-\alpha(s)\right\rangle + \left\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{t}(s)\right\rangle = 0$$

burada $\mathbf{t}(s)$, birim teğet vektör olduğundan $\left\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{t}(s)\right\rangle = 1$ ve iç çarpımın lineer olduğu kullanılırsa

$$k_1(s)\left\langle \mathbf{n_q}(s), a-\alpha(s)\right\rangle + k_2(s)\left\langle \mathbf{b_q}(s), a-\alpha(s)\right\rangle + 1 = 0$$

elde edilir. Diğer taraftan, $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n_q}(s), \mathbf{b_q}(s)\}$ bazı için

$$a-\alpha(s) = s_1(s)\mathbf{t}(s) + s_2(s)\mathbf{n_q}(s) + s_3(s)\,\mathbf{b_q}(s) \tag{4.40}$$

yazılabilir, burada $s_i(s)\in\mathbb{R}$ dir. Eşitliğin iki tarafı da $\mathbf{t}(s)$ vektörü ile iç çarpılırsa

$$\left\langle a-\alpha(s), \mathbf{t}(s)\right\rangle = \left\langle s_1(s)\mathbf{t}(s) + s_2(s)\mathbf{n_q}(s) + s_3(s)\mathbf{b_q}(s), \mathbf{t}(s)\right\rangle$$

olup, iç çarpımın lineer olduğu kullanılırsa

$$\left\langle a-\alpha(s), \mathbf{t}(s)\right\rangle = s_1(s)\left\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{t}(s)\right\rangle + s_2(s)\left\langle \mathbf{n_q}(s), \mathbf{t}(s)\right\rangle + s_3(s)\left\langle \mathbf{b_q}(s), \mathbf{t}(s)\right\rangle$$

burada birim teğet vektör olduğundan $\left\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{t}(s)\right\rangle = 1$ ve $\mathbf{t}(s)$, $\mathbf{n_q}(s)$ ve $\mathbf{b_q}(s)$ vektörleri ortonormal vektörler olduğundan $\left\langle \mathbf{n_q}(s), \mathbf{t}(s)\right\rangle = 0$ ve $\left\langle \mathbf{b_q}(s), \mathbf{t}(s)\right\rangle = 0$ olduğu yerine yazılırsa

$$\left\langle a-\alpha(s), \mathbf{t}(s)\right\rangle = s_1(s)$$

olup (4.39) ifadesinden

$$s_1(s) = 0 \tag{4.41}$$

bulunur. (4.40) eşitliğinin her iki tarafı $\mathbf{n_q}(s)$ ile iç çarpılırsa

$$\left\langle a-\alpha(s), \mathbf{n_q}(s)\right\rangle = \left\langle s_1(s)\mathbf{t}(s) + s_2(s)\mathbf{n_q}(s) + s_3(s)\mathbf{b_q}(s), \mathbf{n_q}(s)\right\rangle$$

olup, iç çarpımın lineer olduğu kullanılırsa

$$\langle a-\alpha(s), \mathbf{n_q}(s)\rangle = s_1(s)\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n_q}(s)\rangle + s_2(s)\langle \mathbf{n_q}(s), \mathbf{n_q}(s)\rangle + s_3(s)\langle \mathbf{b_q}(s), \mathbf{n_q}(s)\rangle$$

burada birim quasi-normal vektör olduğundan $\langle \mathbf{n_q}(s), \mathbf{n_q}(s)\rangle = 1$ ve $\mathbf{t}(s)$, $\mathbf{n_q}(s)$ ve $\mathbf{b_q}(s)$ vektörleri ortonormal vektörler olduğundan $\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n_q}(s)\rangle = 0$ ve $\langle \mathbf{b_q}(s), \mathbf{n_q}(s)\rangle = 0$ olduğu yerine yazılırsa

$$\langle a-\alpha(s), \mathbf{n_q}(s)\rangle = s_2(s)$$

bulunur. (4.40) eşitliğinin her iki tarafı $\mathbf{b_q}(s)$ ile iç çarpılırsa

$$\langle a-\alpha(s), \mathbf{b_q}(s)\rangle = \langle s_1(s)\mathbf{t}(s) + s_2(s)\mathbf{n_q}(s) + s_3(s)\mathbf{b_q}(s), \mathbf{b_q}(s)\rangle$$

olup, iç çarpımın lineer olduğu kullanılırsa

$$\langle a-\alpha(s), \mathbf{b_q}(s)\rangle = s_1(s)\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{b_q}(s)\rangle + s_2(s)\langle \mathbf{n_q}(s), \mathbf{b_q}(s)\rangle + s_3(s)\langle \mathbf{b_q}(s), \mathbf{b_q}(s)\rangle$$

burada birim quasi binormal vektör olduğundan $\langle \mathbf{b_q}(s), \mathbf{b_q}(s)\rangle = 1$ ve $\mathbf{t}(s)$, $\mathbf{n_q}(s)$ ve $\mathbf{b_q}(s)$ vektörleri ortonormal vektörler olduğundan $\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{b_q}(s)\rangle = 0$ ve $\langle \mathbf{n_q}(s), \mathbf{b_q}(s)\rangle = 0$ olduğu yerine yazılırsa

$$\langle a-\alpha(s), \mathbf{b_q}(s)\rangle = s_3(s)$$

bulunur.

$$\langle a-\alpha(s), a-\alpha(s)\rangle = r^2$$

eşitliğinde, (4.40) ifadesi kullanılırsa

$$\langle s_1(s)\mathbf{t}(s) + s_2(s)\mathbf{n_q}(s) + s_3(s)\,\mathbf{b_q}(s), s_1(s)\mathbf{t}(s) + s_2(s)\mathbf{n_q}(s) + s_3(s)\mathbf{b_q}(s)\rangle = r^2$$

olup burada iç çarpımın simetrik ve lineer olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} & s_1^2(s)\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{t}(s)\rangle + s_1(s)s_2(s)\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n_q}(s)\rangle + s_1(s)s_3(s)\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{b_q}(s)\rangle \\ & + s_1(s)s_2(s)\langle \mathbf{n_q}(s), \mathbf{t}(s)\rangle + s_2^2(s)\langle \mathbf{n_q}(s), \mathbf{n_q}(s)\rangle + s_2(s)s_3(s)\langle \mathbf{n_q}(s), \mathbf{b_q}(s)\rangle \\ & + s_1(s)s_3(s)\langle \mathbf{b_q}(s), \mathbf{t}(s)\rangle + s_2(s)s_3(s)\langle \mathbf{b_q}(s), \mathbf{n_q}(s)\rangle + s_3^2(s)\langle \mathbf{b_q}(s), \mathbf{b_q}(s)\rangle = r^2 \end{aligned}$$

elde edilir. $\mathbf{t}(s)$, $\mathbf{n_q}(s)$ ve $\mathbf{b_q}(s)$ vektörleri birim vektör olduğundan $\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{t}(s)\rangle = \langle \mathbf{n_q}(s), \mathbf{n_q}(s)\rangle = \langle \mathbf{b_q}(s), \mathbf{b_q}(s)\rangle = 1$ ve bu vektörler ortonormal olduğundan $\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{b_q}(s)\rangle = \langle \mathbf{n_q}(s), \mathbf{b_q}(s)\rangle = \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n_q}(s)\rangle = 0$ olduğu yerine yazılırsa

$$s_1^2(s) + s_2^2(s) + s_3^2(s) = r^2$$

olur. (4.41) ifadesi kullanılırsa

$$s_2^2(s) + s_3^2(s) = r^2$$

ve buradan da

$$s_3^2(s) = r^2 - s_2^2(s)$$

bulunur. (4.37) eşitliğinden s_2 yerine yazılırsa

$$s_3 = \mp\sqrt{r^2 - (\frac{k_2' + k_1k_3}{k_1(k_2' + k_1k_3) - k_2(k_1' - k_2k_3)})^2} \in \mathbb{R}$$

elde edilmiş olur. Bulunan $1 \leq i \leq 3$ için s_i değerleri, (4.40) denkleminde yerlerine yazılırsa

$$a - \alpha(s) = s_2(s)\mathbf{n_q}(s) + \lambda\mathbf{b_q}(s),\ \lambda = s_3(s) \in \mathbb{R}$$

bulunur. Bu ifade düzenlenirse

$$a = \alpha(s) + s_2(s)\mathbf{n_q}(s) + \lambda\mathbf{b_q}(s)$$

şeklinde, kürelerin merkezlerinin geometrik yerinin denklemi elde edilir.

Sonuç 4.6: $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow E^3$, E^3 uzayında birim hızlı bir eğri olsun. α bir küresel Tzitzeica eğrisi ise

$$k_3'(s)\,\langle \mathbf{b_q}, \alpha\rangle + 2k_3^2(s)\,\langle \mathbf{n_q}, \alpha\rangle = 0$$

denklemi geçerlidir.

İspat Teorem 4.11 ifadesinde (4.34) eşitliği kullanılarak istenilen denklem edilir. Böyle bulunan bu ifade ile Öklid 3-uzayda verilen Teorem 4.2 ifadesi arasındaki benzerliğe dikkat edelim.

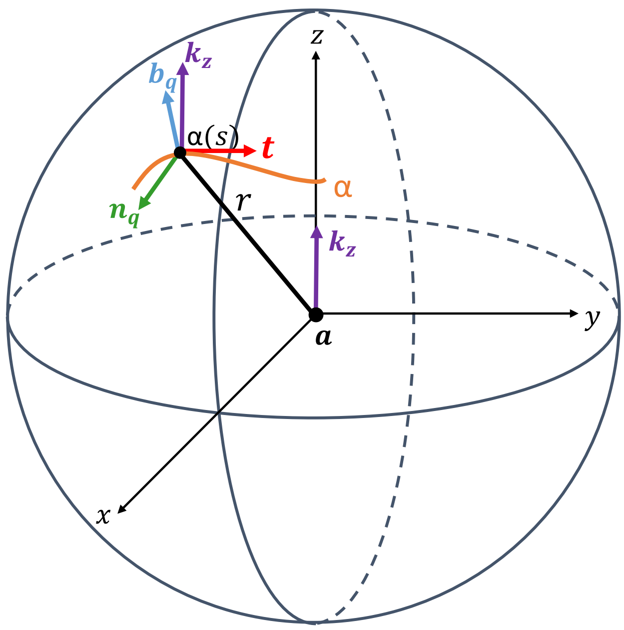
Teorem 4.13: Bir (I, α) koordinat komşuluğu ile $M \subset E^3$ eğrisi verilsin. Buradan da $s_3 \neq 0, k_3 \neq 0$ alındığında $\forall s \in I$ değerine karşılık gelen $\alpha(s)$ deki $k_2 = 0$ iken oskülatör kürenin yarıçapı sabittir $\Longleftrightarrow$ oskülatör kürelerin merkezleri aynıdır.

İspat ($\Longrightarrow$) Öncelikle $\alpha(s) \in M$ noktasındaki oskülatör kürenin yarıçapı r ve oskülatör küre merkezi

$$a(s) = \alpha(s) + s_2(s)\mathbf{n_q}(s) + s_3(s)\mathbf{b_q}(s)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
r &= \|\overrightarrow{\alpha a}\| \\
&= \|a - \alpha(s)\| \\
&= \|\alpha(s) + s_2(s)\mathbf{n_q}(s) + s_3(s)\mathbf{b_q}(s) - \alpha(s)\| \\
&= \sqrt{\langle s_2(s)\mathbf{n_q}(s) + s_3(s)\mathbf{b_q}(s), s_2(s)\mathbf{n_q}(s) + s_3(s)\mathbf{b_q}(s)\rangle} \\
&= \sqrt{\begin{array}{l} \langle s_2(s)\mathbf{n_q}(s), s_2(s)\mathbf{n_q}(s)\rangle + \langle s_2(s)\mathbf{n_q}(s), s_3(s)\mathbf{b_q}(s)\rangle \\ + \langle s_3(s)\mathbf{b_q}(s), s_2(s)\mathbf{n_q}(s)\rangle + \langle s_3(s)\mathbf{b_q}(s), s_3(s)\,\mathbf{b_q}(s)\rangle \end{array}}
\end{aligned}$$



Şekil 4.6 q-çatı için a merkezli küresel eğri

bulunur ve burada iç çarpımın lineer ve simetrik olma özellikleri kullanılırsa

$$r = \sqrt{s_2^2(s)\left\langle \mathbf{n_q}(s), \mathbf{n_q}(s)\right\rangle + 2s_2(s)s_3(s)\left\langle \mathbf{n_q}(s), \mathbf{b_q}(s)\right\rangle + s_3^2(s)\left\langle \mathbf{b_q}(s), \mathbf{b_q}(s)\right\rangle}$$

olup $\mathbf{n_q}(s), \mathbf{b_q}(s)$ vektörleri birim ve $\mathbf{n_q}(s)$ ile $\mathbf{b_q}(s)$ ortonormal olduğundan $\langle \mathbf{n_q}(s), \mathbf{n_q}(s)\rangle = \langle \mathbf{b_q}(s), \mathbf{b_q}(s)\rangle = 1$ ve $\langle \mathbf{n_q}(s), \mathbf{b_q}(s)\rangle = 0$ dır. Böylece

$$r = \sqrt{s_2^2(s) + s_3^2(s)}$$

ve buradan

$$r^2 = s_2^2(s) + s_3^2(s)$$

bulunur. Teoremin bu aşamasından sonra hesapların kısalığı adına (s) parametresi yazımı kullanılmayacaktır.

$r = sbt$ ise türev alınırsa

$$\begin{aligned} 2s_2s_2' + 2s_3s_3' &= 0 \\ 2(s_2s_2' + s_3s_3') &= 0 \\ s_2s_2' + s_3s_3' &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $s_3 = \dfrac{s_2'}{k_3}$ değeri yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} s_2 s_2' + \frac{s_2'}{k_3} s_3' &= 0 \\ \frac{k_3 s_2 s_2' + s_2' s_3'}{k_3} &= 0 \\ k_3 s_2 s_2' + s_2' s_3' &= 0 \\ s_2'(k_3 s_2 + s_3') &= 0 \end{aligned}$$

olup teorem ifadesinde $s_3 \neq 0$ ve dolayısıyla $s_2' \neq 0$ olacağından

$$k_3 s_2 + s_3' = 0 \tag{4.42}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$a = \alpha + s_2 \mathbf{n_q} + s_3 \mathbf{b_q}$$

olduğundan

$$D_{\dot{\alpha}} a(s) = \alpha' + s_2' \mathbf{n_q} + s_2 \mathbf{n_q}' + s_3' \mathbf{b_q} + s_3 \mathbf{b_q}'$$

olup burada α birim hızlı eğri olduğundan $\alpha' = \mathbf{t}$ ve q-çatının Frenet formülleri benzeri varyasyon denklemi (3.11) kullanılırsa

$$\begin{aligned} D_{\dot{\alpha}} a(s) &= \mathbf{t} + s_2' \mathbf{n_q} + s_2(-k_1 \mathbf{t} + k_3 \mathbf{b_q}) + s_3' \mathbf{b_q} \\ &\quad + s_3(-k_2 \mathbf{t} - k_3 \mathbf{n_q}) \end{aligned}$$

olup bu ifade düzenlenirse

$$\begin{aligned} D_{\dot{\alpha}} a(s) &= \mathbf{t} + s_2' \mathbf{n_q} - s_2 k_1 \mathbf{t} + s_2 k_3 \mathbf{b_q} \\ &\quad + s_3' \mathbf{b_q} - s_3 k_2 \mathbf{t} - s_3 k_3 \mathbf{n_q} \end{aligned}$$

burada $s_3 = \dfrac{s_2'}{k_3} \Longrightarrow s_2' = s_3 k_3$ ifadesi yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} D_{\dot{\alpha}} a(s) &= \mathbf{t} + s_3 k_3 \mathbf{n_q} - s_2 k_1 \mathbf{t} + s_2 k_3 \mathbf{b_q} \\ &\quad + s_3' \mathbf{b_q} - s_3 k_2 \mathbf{t} - s_3 k_3 \mathbf{n_q} \end{aligned}$$

bulunup bu ifade düzenlenirse

$$D_{\dot{\alpha}} a(s) = \mathbf{t}(s) - s_2 k_1 \mathbf{t} + s_2 k_3 \mathbf{b_q} + s_3' \mathbf{b_q} - s_3 k_2 \mathbf{t}$$

ve buradan

$$D_{\dot{\alpha}} a(s) = (1 - s_2 k_1 - s_3 k_2) \mathbf{t} + (s_2 k_3 + s_3') \mathbf{b_q}$$

olup $s_2 = \dfrac{k_2' + k_1k_3}{k_1k_2' + k_1^2k_3 - k_2k_1' + k_2^2k_3}$ ifadesini yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} D_{\dot{\alpha}}a(s) &= (1 - \frac{k_2' + k_1k_3}{k_1k_2' + k_1^2k_3 - k_2k_1' + k_2^2k_3}k_1 - s_3k_2)\mathbf{t} \\ &+(s_2k_3 + s_3')\mathbf{b_q} \end{aligned}$$

ve bu ifade düzenlenirse

$$\begin{aligned} D_{\dot{\alpha}}a(s) &= (\frac{k_1k_2' + k_1^2k_3 - k_2k_1' + k_2^2k_3 - k_1k_2' - k_1^2k_3}{k_1k_2' + k_1^2k_3 - k_2k_1' + k_2^2k_3} - s_3k_2)\mathbf{t} \\ &+(s_2k_3 + s_3')\mathbf{b_q} \end{aligned}$$

ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\begin{aligned} D_{\dot{\alpha}}a(s) &= (\frac{-k_2k_1' + k_2^2k_3}{k_1k_2' + k_1^2k_3 - k_2k_1' + k_2^2k_3} - s_3k_2)\mathbf{t} \\ &+(s_2k_3 + s_3')\mathbf{b_q} \end{aligned}$$

olur. $\dfrac{s_2'}{k_3} = s_3$ ifadesi yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} D_{\dot{\alpha}}a(s) &= (\frac{-k_2k_1' + k_2^2k_3}{k_1k_2' + k_1^2k_3 - k_2k_1' + k_2^2k_3} - \frac{s_2'}{k_3}k_2)\mathbf{t} \\ &+(s_2k_3 + s_3')\mathbf{b_q} \end{aligned}$$

bulunur. Şimdi

$$\begin{aligned} s_2' &= \frac{1}{(k_1k_2' + k_1^2k_3 - k_2k_1' + k_2^2k_3)^2}[k_1'(k_3^2(k_2^2 - k_1^2) - k_1(k_2k_3)' - k_2k_2'') \\ &+k_2'k_2(-2k_1k_3^2 + k_1'' - k_2k_3') - k_2k_3((k_1')^2 + 2(k_2')^2 - k_1''k_1 - k_2''k_2)] \end{aligned}$$

ifadesi yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} D_{\dot{\alpha}}a(s) &= (\frac{-k_2k_1'+k_2^2k_3}{k_1k_2'+k_1^2k_3 - k_2k_1'+k_2^2k_3} - \frac{k_2}{k_3}(\frac{1}{(k_1k_2'+k_1^2k_3 - k_2k_1'+k_2^2k_3)^2}[k_1'(k_3^2(k_2^2 - k_1^2) \\ &-k_1(k_2k_3)' - k_2k_2'')+k_2'k_2(-2k_1k_3^2+k_1'' - k_2k_3') - k_2k_3((k_1')^2+2(k_2')^2 - k_1''k_1 \\ &-k_2''k_2)]))\mathbf{t}+(s_2k_3 + s_3')\mathbf{b_q} \end{aligned}$$

olup **t** parantezi içindeki paydalar eşitlenirse

$$
\begin{aligned}
D_{\dot{\alpha}}a(s) \;=\; & \Big(\frac{k_3(k_1k_2' + k_1^2k_3 - k_2k_1' + k_2^2k_3)(-k_2k_1' + k_2^2k_3)}{k_3(k_1k_2' + k_1^2k_3 - k_2k_1' + k_2^2k_3)^2} \\
& + \frac{-k_2(k_1'(k_3^2(k_2^2 - k_1^2) - k_1(k_2k_3)' - k_2k_2'')}{k_3(k_1k_2' + k_1^2k_3 - k_2k_1' + k_2^2k_3)^2} \\
& + \frac{k_2'k_2^2(-2k_1k_3^2 + k_1'' - k_2k_3')}{k_3(k_1k_2' + k_1^2k_3 - k_2k_1' + k_2^2k_3)^2} \\
& + \frac{-k_2^2k_3((k_1')^2 + 2(k_2')^2 - k_1''k_1 - k_2''k_2)}{k_3(k_1k_2' + k_1^2k_3 - k_2k_1' + k_2^2k_3)^2}\Big)\Big)\mathbf{t} \\
& + (s_2k_3 + s_3')\mathbf{b_q}
\end{aligned}
$$

ve buradan

$$
\begin{aligned}
D_{\dot{\alpha}}a(s) \;=\; & \Big(\frac{(k_3k_1k_2' + k_1^2k_3^2 - k_3k_2k_1' + k_2^2k_3^2)(-k_2k_1' + k_2^2k_3)}{k_3(k_1k_2' + k_1^2k_3 - k_2k_1' + k_2^2k_3)^2} \\
& + \frac{-k_2(k_1'k_3^2(k_2^2 - k_1^2) - k_1'k_1(k_2k_3)' - k_1'k_2k_2'')}{k_3(k_1k_2' + k_1^2k_3 - k_2k_1' + k_2^2k_3)^2} \\
& \frac{-2k_2'k_2^2k_1k_3^2 + k_2'k_2^2k_1'' - k_2'k_2^3k_3' - k_2^2k_3(k_1')^2}{k_3(k_1k_2' + k_1^2k_3 - k_2k_1' + k_2^2k_3)^2} \\
& + \frac{2k_2^2k_3(k_2')^2 - k_2^2k_3k_1''k_1 - k_2^3k_3k_2''}{k_3(k_1k_2' + k_1^2k_3 - k_2k_1' + k_2^2k_3)^2}\Big)\Big)\mathbf{t} \\
& + (s_2k_3 + s_3')\mathbf{b_q}
\end{aligned}
$$

olup **t** parantezi içerisindeki pay kısmı düzenlenirse

$$
\begin{aligned}
D_{\dot{\alpha}}a(s) \;=\; & \Big(\frac{-k_1k_1'k_2k_2'k_3 - k_2k_1'k_1^2k_3^2 + k_2^2(k_1')^2k_3 - k_1'k_2^3k_3^2}{k_3(k_1k_2' + k_1^2k_3 - k_2k_1' + k_2^2k_3)^2} \\
& + \frac{k_2^2k_3^2k_1k_2' + k_2^2k_1^2k_3^3 - k_2^3k_3^2k_1' + k_2^4k_3^3}{k_3(k_1k_2' + k_1^2k_3 - k_2k_1' + k_2^2k_3)^2} \\
& + \frac{-k_2(k_1'k_3^2(k_2^2 - k_1^2) - k_1'k_1(k_2k_3)' - k_1'k_2k_2'')}{k_3(k_1k_2' + k_1^2k_3 - k_2k_1' + k_2^2k_3)^2} \\
& + \frac{-2k_2'k_2^2k_1k_3^2 + k_2'k_2^2k_1'' - k_2'k_2^3k_3' - k_2^2k_3(k_1')^2}{k_3(k_1k_2' + k_1^2k_3 - k_2k_1' + k_2^2k_3)^2} \\
& + \frac{2k_2^2k_3(k_2')^2 - k_2^2k_3k_1''k_1 - k_2^3k_3k_2''}{k_3(k_1k_2' + k_1^2k_3 - k_2k_1' + k_2^2k_3)^2}\Big)\mathbf{t} \\
& + (s_2k_3 + s_3')\mathbf{b}_q
\end{aligned}
$$

bulunur. Gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\begin{aligned} D_{\dot{\alpha}}a(s) \;=\; & \frac{1}{k_3(k_1k_2' + k_1^2k_3 - k_2k_1' + k_2^2k_3)^2}(k_2^2k_3^2k_1k_2' + k_2^2k_1^2k_3^3 + k_2^4k_3^3 \\ & -3k_1'k_2^3k_3^2 + k_2^2k_1'k_1k_3' + k_1'k_2^2k_2'' - 2k_2'k_2^2k_1k_3^2 + k_2'k_2^2k_1'' \\ & -k_2'k_2^3k_3' + 2k_2^2k_3(k_2')^2 - k_2^2k_3k_1''k_1 - k_2^3k_3k_2'')\mathbf{t} \\ & +(s_2k_3 + s_3')\mathbf{b_q} \end{aligned}$$

olur. Burada $k_2 = 0$ olduğu kullanılırsa

$$D_{\dot{\alpha}}a(s) = (s_2k_3 + s_3')\mathbf{b_q} \tag{4.43}$$

olup (4.42) denkleminden dolayı $D_{\dot{\alpha}}a(s) = 0$ bulunur. Buradan da $\forall s \in I$ için $a(s) = sabit$ bulunmuş olur.

($\Longleftarrow$) $\forall s \in I$ için $a(s) = sabit$ olsun. $r = \|\overrightarrow{\alpha a}\|$ olduğundan

$$\langle a(s) - \alpha(s), a(s) - \alpha(s)\rangle = r^2(s)$$

ifadesinin s parametresine göre türevi alınırsa

$$\left\langle D_{\dot{\alpha}}a(s), a(s) - \alpha(s)\right\rangle = r(s)\left.\frac{dr}{ds}\right|_s$$

olup $a(s) = sabit$ olduğundan $D_{\dot{\alpha}}a(s) = 0$ bulunur. Böylece

$$r(s)\left.\frac{dr}{ds}\right|_s = 0$$

ve buradan da

$$r(s) = 0 \quad \text{veya} \quad \left.\frac{dr}{ds}\right|_s = 0$$

elde edilir. Eğer $r(s) = 0$ ise

$$r^2 = s_2^2(s) + s_3^2(s) = 0$$

olmalıdır. Bu da

$$s_2^2(s) = s_3^2(s) = 0$$

olması demektir. Ancak bu ifade, teoremin hipotezi ile çelişir. O halde

$$\left.\frac{dr}{ds}\right|_s = 0$$

ve buradan da $\forall s \in I$ için $r(s) = sabit$ bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.7: Teorem 4.13 ifadesi ile Teorem 4.4 ifadesi incelenirse iki teorem arasındaki fark, Teorem 4.13 ifadesinde yer alan $k_2 = 0$ olması şartıdır.

Teorem 4.14: $M \subset E^3$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\forall s \in I$ için $k_3(s) \neq 0$, $k_2 = 0$ ve $s_3 \neq 0$ varsayalım. Bu durumda, M bir küresel eğridir $\Longleftrightarrow \forall s \in I$ için $\alpha(s)$ noktasındaki oskülatör kürelerin merkezleri aynıdır.

İspat $(\Longrightarrow)$: $M \subset S_b^2$ olsun. Burada $\left\|\overrightarrow{O\alpha}\right\| = r$ olduğundan ispat açıktır.

$(\Longleftarrow)$: b sabit bir nokta olmak üzere $\forall s \in I$ için $\alpha(s) \in M$ noktasındaki oskülatör kürelerin merkezleri b ise Teorem 4.5 kullanılırsa oskülatör kürelerin yarıçapları yine r sabitidir. O halde $\forall \alpha(s) \in M$ için

$$d(\alpha(s), b) = r$$

ve buradan da $M \subset S_b^2$ bulunup ispat tamamlanmış olur. Burada $b = a$ olması halinde

$$r = \|\alpha(s) - a\| = d(\alpha(s), b)$$

olur. Teorem 4.5 gereğince $r = sbt$ olduğundan

$$d(\alpha(s), b) = sbt$$

olur.

Bir eğrinin eğrilikleri cinsinden küreselliği için karakterizasyon, aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

Teorem 4.15: $s \in I$ yay-parametresi olmak üzere, $M \subset E^3$ eğrisi (I, α) ile verildiğinde q-eğrilikler $k_3 \neq 0$, $k_2 = 0$ şeklinde ve s_1,s_2 ve s_3 küresel eğri denkleminin katsayılarından $s_3 \neq 0$ iken, M eğrisi küresel eğri olur ancak ve ancak

$$s_3'(s) + s_2(s)k_3(s) = 0 \tag{4.44}$$

eşitliği sağlanır.

İspat $(\Longrightarrow)$: M eğrisi küresel olsun. Teorem 4.5 gereğince oskülatör kürelerin $a(s)$ merkezi $\forall s \in I$ için sabittir. O zaman $a(s)$ ifadesinin türevi alınırsa $\forall s \in I$ için (4.43) gereği

$$(s_3'(s) + s_2(s)k_3(s))\mathbf{b_q}(s) = 0$$

yazılabilir. O halde (4.42) ifadesinden

$$s_3'(s) + s_2(s)k_3(s) = 0$$

bulunur.

$(\Longleftarrow) : s_3'(s) + s_2(s)k_3(s) = 0$ olsun. (4.43) gereğince $\forall s \in I$ için

$$D_{\dot{\alpha}} a(s) = 0 \Longrightarrow a(s) = sabit$$

olur. Teorem 4.5 gereğince M eğrisi küreseldir.

Teorem 4.16: $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow E^3$, E^3 uzayında q-çatılı yay-parametreli küresel eğri olsun. α bir Tzitzeica eğrisi ise α eğrisinin eğrilikleri arasında

$$\frac{k_3'}{2k_3^2} = \frac{k_2' + k_1k_3}{k_1' - k_2k_3} \tag{4.45}$$

denklemi geçerlidir.

İspat E^3 uzayında α, q-çatılı bir birim hızlı küresel eğri olsun. (4.34), (4.37) ve (4.38) ifadelerinden elde edilen

$$\langle \alpha, \mathbf{t} \rangle = 0,\ \langle\ \mathbf{n_q}, \alpha \rangle = -\frac{1}{k_1 - \dfrac{k_2(k_1' - k_2k_3)}{k_2' + k_1k_3}} \text{ ve } \langle \mathbf{b_q}, \alpha \rangle = \frac{1}{\left(-k_2 + k_1\dfrac{(k_2' + k_1k_3)}{k_1' - k_2k_3}\right)}$$

eşitlikleri, (4.32) ifadesinde yerine yazılırsa

$$k_3' \left(\frac{1}{-k_2 + k_1\dfrac{(k_2' + k_1k_3)}{k_1' - k_2k_3}} \right) + 2k_2k_3.0 + 2k_3^2 \left(-\frac{1}{k_1 - \dfrac{k_2(k_1' - k_2k_3)}{k_2' + k_1k_3}} \right) = 0$$

olup bu ifade düzenlenirse

$$\frac{k_3'}{-k_2 + k_1\dfrac{(k_2' + k_1k_3)}{k_1' - k_2k_3}} - \frac{2k_3^2}{k_1 - \dfrac{k_2(k_1' - k_2k_3)}{k_2' + k_1k_3}} = 0$$

bulunur. Buradan

$$\frac{k_3'}{-k_2 + k_1\dfrac{(k_2' + k_1k_3)}{k_1' - k_2k_3}} = \frac{2k_3^2}{k_1 - \dfrac{k_2(k_1' - k_2k_3)}{k_2' + k_1k_3}}$$

olup

$$\frac{k_3'}{2k_3^2} = \frac{-k_2 + k_1\dfrac{(k_2' + k_1k_3)}{k_1' - k_2k_3}}{k_1 - \dfrac{k_2(k_1' - k_2k_3)}{k_2' + k_1k_3}}$$

bulunur. Eşitliğin sağ tarafı düzenlenirse

$$\frac{k_3'}{2k_3^2} = \frac{\dfrac{-k_2(k_1' - k_2k_3) + k_1(k_2' + k_1k_3)}{k_1' - k_2k_3}}{\dfrac{k_1(k_2' + k_1k_3) - k_2(k_1' - k_2k_3)}{k_2' + k_1k_3}}$$

olup gerekli sadeleştirme yapılırsa

$$\frac{k_3'}{2k_3^2} = \frac{k_2' + k_1k_3}{k_1' - k_2k_3}$$

elde edilir. $k_2 = 0$ olması durumda

$$\frac{k_3'}{2k_3^2} = \frac{k_1k_3}{k_1'}$$

ve bu ifade düzenlenirse

$$\frac{k_3'}{2k_3^3} = \frac{k_1}{k_1'}$$

bulunur. Bu ifadenin, Öklid uzayındaki (4.16) ifadesiyle olan benzerliğine dikkat ediniz.

Teorem 4.17: $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow E^3$, E^3 uzayında $k_3 \neq 0,\ k_2 = 0$ ve $s_3 \neq 0$ olmak üzere q-çatılı bir birim hızlı küresel Tzitzeica eğrisi olsun. α eğrisinin k_3 eğriliği

$$k_3 = \sqrt{\frac{k_1'k_3'}{k_1k_3}} \tag{4.46}$$

şeklindedir.

İspat (4.44) ifadesinde

$$s_3'(s) + s_2(s)k_3(s) = 0$$

k_3 yalnız bırakılırsa

$$k_3(s) = -\frac{s_3'(s)}{s_2(s)} \tag{4.47}$$

olur. (4.45) eşitliğinden

$$k_3 = \sqrt{\frac{k_3'(k_1' - k_2k_3)}{2k_2 + k_1k_3}}$$

yazılabilir. Burada $k_2 = 0$ olduğu kullanılırsa

$$k_3 = \sqrt{\frac{k_1'k_3'}{k_1k_3}}$$

bulunur.

5. MINKOWSKI 3-UZAYINDA Q-ÇATILI TZITZEICA EĞRİLERİ

Minkowski 3-uzayındaki uzay eğrisi boyunca quasi-normal vektörü yardımıyla tanımlanan $\{\mathbf{t}, \mathbf{n_q}, \mathbf{b_q}\}$ q-çatısı yardımıyla bazı özel eğriler tanımlanmış, bunlarla ilgili teoremler verilmiş ve bu eğriler üzerinden uygun hesaplamalar yapılmıştır. $\mathbb{R}^3_1$ Minkowski 3-uzayda Tzitzeica eğrileri tanımlanmış ve bu tür eğriler, onların eğriliklerine göre karakterize edilmiştir. Ayrıca küresel eğri tanımlanmış ve küresel Tzitzeica eğrisi olma durumu incelenmiştir. Çalışmamızda, küresel eğriler ve küresel Tzitzeica eğrileri inceleneceğinden dolayı, yaptığımız araştırmalar neticesinde hiperbolik küre üzerinde sadece spacelike eğrilerin varlığına ve Lorentz küresi üzerinde yaptığımız incelemelerde ise spacelike ve timelike eğrilerin varlığına ulaşmamızdan dolayı çalışmamızda genellik olması açısından Lorentz küresi kullanılmıştır. Temel Kavramlar bölümünde de bahsettiğimiz üzere, Lorentz küresi üzerinde yatan hiçbir null eğri olmaması sebebiyle null eğriler incelenmemiştir.

5.1 Minkowski 3-uzayında q-çatılı Spacelike Tzitzeica Eğrileri

Çalışmamızın bu kısmında, izdüşüm vektörü olarak ele aldığımız **k** vektörünün timelike durumunda olması halinde meydana gelen spacelike eğriler için q-çatı kullanılarak Tzitzeica ve küresel eğri tanımlanmış ve küresel Tzitzeica eğrisi olma durumu incelenmiştir. İncelemeler Lorentz küresi üzerinde gösterilmiştir.

Teorem 5.1: **t** spacelike, $\mathbf{k} = (0,0,1)$ timelike, $\mathbf{n_q}$ spacelike ve $\mathbf{b_q}$ timelike olmak üzere verilen spacelike eğrinin q-çatısının türev formülleri

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n_q}' \\ \mathbf{b_q}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & -k_2 \\ -k_1 & 0 & -k_3 \\ -k_2 & -k_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n_q} \\ \mathbf{b_q} \end{bmatrix} \tag{5.1}$$

biçimindedir. Ayrıca

$$k_1 = \kappa \cosh \theta,\ k_2 = \kappa \sinh \theta \text{ ve } k_3 = -d\theta - \tau$$

q-eğrilikleri şeklindedir (Tarım, 2016).

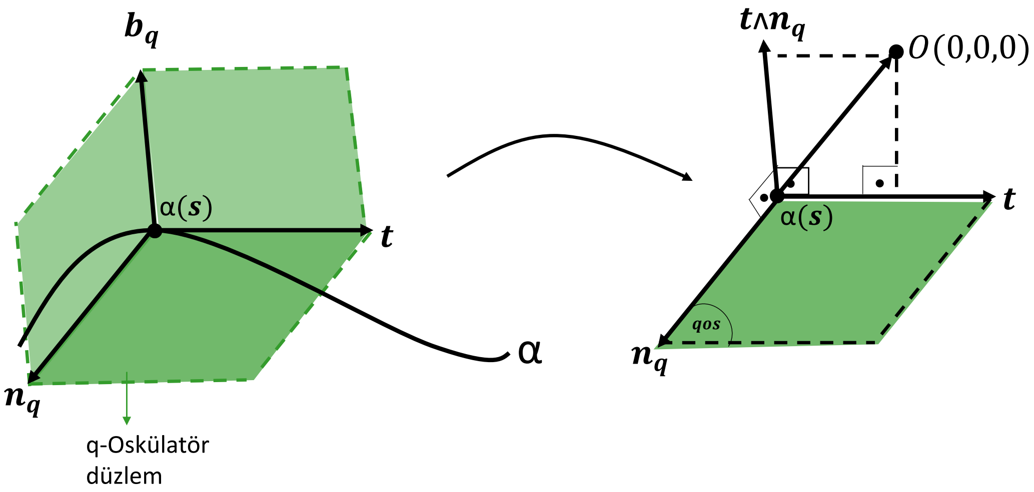
Tanım 5.1: Bir regüler eğri $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3_1$ verilsin. α eğrisi için sabit k_1 eğriliği ancak sabit olmayan k_3 eğriliği varsa buna q-Salkowski eğrisi adı verilir.

Tanım 5.2: Bir regüler eğri $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3_1$ verilsin. α eğrisi için sabit k_3 eğriliği ancak sabit olmayan k_1 eğriliği varsa buna anti q-Salkowski eğrisi adı verilir.

Tanım 5.3: $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3_1$, $\mathbb{R}^3_1$ uzayında $k_1 > 0$ ve $k_3 \neq 0$ q-eğrilikleri ile yay-parametreli spacelike eğrisi verilsin. α eğrisinin keyfi $\alpha(s)$ noktasındaki q-oskülatör düzleminin orijine olan uzaklığı d_{qos} olmak üzere, α eğrisi

$$\frac{k_3}{d^2_{\text{qos}}} = a \tag{5.2}$$

şartını sağlıyorsa α, Tzitzeica eğrisi adını alır. Burada $a \neq 0$ bir reel sabittir.



Şekil 5.1 q-oskülatör düzlemin orijine olan d_{qos} uzaklığı

d_{qos} uzaklığı, Tanım 3.2 ifadesinden

$$\begin{aligned} d(O, qos) &= d_{\text{qos}} \\ &= \left| \frac{\langle \alpha(s), \mathbf{t} \times \mathbf{n_q} \rangle}{\|\mathbf{t} \times \mathbf{n_q}\|} \right| \end{aligned}$$

olup burada $\mathbf{b_q} = \mathbf{t} \times \mathbf{n_q}$ quasi-binormal vektörü yerine yazılırsa

$$d_{\text{qos}} = \left| \frac{\langle \alpha(s), \mathbf{b_q} \rangle}{\|\mathbf{b_q}\|} \right|$$

bulunur. $\mathbf{b_q}$ timelike binormal vektörü birim olduğundan

$$\|\mathbf{b}_q\| = |\langle \mathbf{b_q}, \mathbf{b_q} \rangle|^{1/2} = 1$$

olup buradan

$$d_{\text{qos}} = |\langle \alpha(s), \mathbf{b_q} \rangle| = |\langle \mathbf{b_q}, \alpha(s) \rangle| \tag{5.3}$$

şeklinde, q-oskülatör düzlemin orijine olan uzaklığı bulunmuş olur.

Teorem 5.2: $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_1^3$, $\mathbb{R}_1^3$ uzayında birim hızlı bir spacelike eğri olsun. α bir Tzitzeica eğrisi ise

$$k_3' \langle \mathbf{b_q}, \alpha \rangle + 2k_2k_3 \langle \mathbf{t}, \alpha \rangle + 2k_3^2 \langle \mathbf{n_q}, \alpha \rangle = 0 \tag{5.4}$$

denklemi geçerlidir.

İspat α, $\mathbb{R}_1^3$ uzayında birim hızlı bir spacelike eğri olsun. (5.2) ve (5.3) eşitlikleri kullanılarak

$$\frac{k_3}{\langle \mathbf{b_q}, \alpha \rangle^2} = a \neq 0 \tag{5.5}$$

elde edilir. Bu ifadenin türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{k_3' \langle \mathbf{b_q}, \alpha \rangle^2 - k_3(\langle \mathbf{b_q}, \alpha \rangle^2)'}{\langle \mathbf{b_q}, \alpha \rangle^4} &= 0 \\ \frac{k_3' \langle \mathbf{b_q}, \alpha \rangle^2 - k_3(2 \langle \mathbf{b_q}, \alpha \rangle (\langle \mathbf{b_q'}, \alpha \rangle + \langle \mathbf{b_q}, \alpha' \rangle))}{\langle \mathbf{b_q}, \alpha \rangle^4} &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Burada α eğrisi birim hızlı olduğundan $\alpha' = \mathbf{t}$ ve dolayısıyla $\langle \mathbf{b_q}, \alpha' \rangle = \langle \mathbf{b_q}, \mathbf{t} \rangle$ olup $\mathbf{t}$ ve $\mathbf{b_q}$ vektörleri ortogonal olduğundan $\langle \mathbf{b_q}, \mathbf{t} \rangle = 0$ dır. Böylece

$$\frac{k_3' \langle \mathbf{b_q}, \alpha \rangle^2 - k_3(2 \langle \mathbf{b_q}, \alpha \rangle \langle \mathbf{b_q'}, \alpha \rangle)}{\langle \mathbf{b_q}, \alpha \rangle^4} = 0$$

olup (5.1) ifadesinden $\mathbf{b_q'}$ vektörünün değeri yerine yazılırsa

$$\frac{k_3' \langle \mathbf{b_q}, \alpha \rangle^2 - k_3(2 \langle \mathbf{b_q}, \alpha \rangle \langle -k_2\mathbf{t} - k_3\mathbf{n_q}, \alpha \rangle)}{\langle \mathbf{b_q}, \alpha \rangle^4} = 0$$

elde edilir. İç çarpımın lineer olduğu kullanılır ve eşitlik düzenlenirse

$$\frac{k_3' \langle \mathbf{b_q}, \alpha \rangle^2 + 2k_2k_3 \langle \mathbf{b_q}, \alpha \rangle \langle \mathbf{t}, \alpha \rangle + 2k_3^2 \langle \mathbf{b_q}, \alpha \rangle \langle \mathbf{n_q}, \alpha \rangle}{\langle \mathbf{b_q}, \alpha \rangle^4} = 0$$

bulunur. Pay kısmı $\langle \mathbf{b_q}, \alpha \rangle$ parantezine alınırsa

$$\frac{\langle \mathbf{b_q}, \alpha \rangle (k_3' \langle \mathbf{b_q}, \alpha \rangle + 2k_2k_3 \langle \mathbf{t}, \alpha \rangle + 2k_3^2 \langle \mathbf{n_q}, \alpha \rangle)}{\langle \mathbf{b_q}, \alpha \rangle^4} = 0$$

ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\frac{k_3' \langle \mathbf{b_q}, \alpha \rangle + 2k_2 k_3 \langle \mathbf{t}, \alpha \rangle + 2k_3^2 \langle \mathbf{n_q}, \alpha \rangle}{\langle \mathbf{b_q}, \alpha \rangle^3} = 0$$

olarak bulunur. Buradan

$$k_3' \langle \mathbf{b_q}, \alpha \rangle + 2k_2 k_3 \langle \mathbf{t}, \alpha \rangle + 2k_3^2 \langle \mathbf{n_q}, \alpha \rangle = 0$$

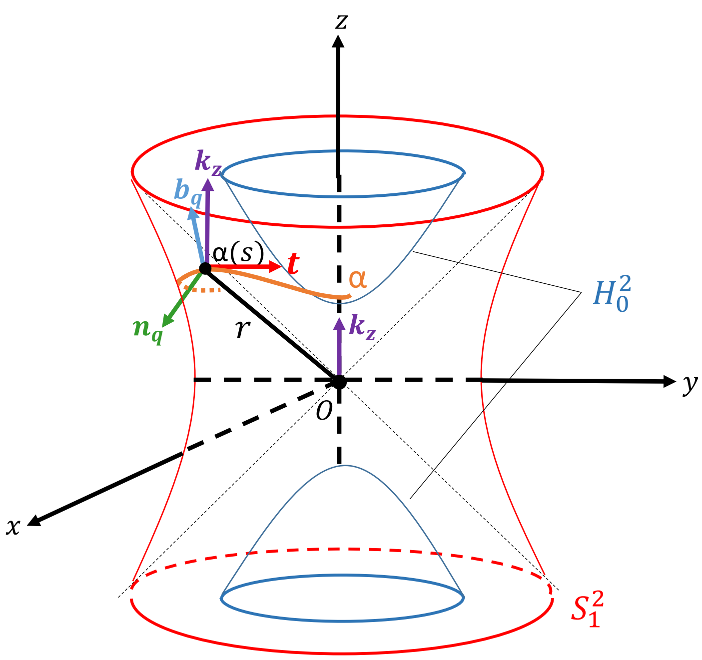
elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 5.1: Teorem 5.2 de bulunan bu ifade, 3-boyutlu Öklid uzayındaki q-çatı yardımıyla elde edilen (4.32) ifadesi ile aynıdır. Ayrıca eğrinin küresel eğri olması durumu da Sonuç 5.2 de incelenecektir. Eğri, küresel eğri değilse ancak k_2 ya da k_3 q-eğriliklerinden en az biri sıfır ise yine (4.8) ifadesi ile oluşan benzerlik görülebilmektedir.

Küre üzerindeki bir spacelike eğri için q-çatı yardımıyla bileşenlerini yazalım. Yani q-çatı için spacelike küresel eğri

$$\alpha(s) = s_1 \mathbf{t}(s) + s_2 \mathbf{n_q}(s) + s_3 \mathbf{b_q}(s)$$

olmak üzere s_1, s_2 ve s_3 katsayılarını bulalım.



Şekil 5.2 Minkowski 3-uzayda q-çatı için spacelike küresel eğri

α birim hızlı bir spacelike eğri olmak üzere, yarıçapı r olan küre için

$$\left\|\overrightarrow{O\alpha}\right\| = r$$

olup norm tanımından

$$\left\langle \overrightarrow{O\alpha}, \overrightarrow{O\alpha} \right\rangle = r^2$$

yazılabilir. Burada $\alpha(s) \in S_1^2$ olduğundan

$$\langle \alpha, \alpha \rangle = r^2$$

bulunur. Bu ifadenin türevi alınırsa

$$\langle \alpha', \alpha \rangle + \langle \alpha, \alpha' \rangle = 0$$

olup iç çarpımın simetrik olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} 2\langle \alpha', \alpha \rangle &= 0 \\ \langle \alpha', \alpha \rangle &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Burada, α birim hızlı eğri olduğundan $\mathbf{t} = \alpha'$ olup bu ifade yerine yazılırsa

$$s_1 = \langle \mathbf{t}, \alpha \rangle = 0 \tag{5.6}$$

elde edilir. Bu ifadenin türevi alınırsa

$$\langle \mathbf{t}', \alpha \rangle + \langle \mathbf{t}, \alpha' \rangle = 0$$

ve burada α birim hızlı eğri olduğundan $\mathbf{t} = \alpha'$ olduğu kullanılır ve (5.1) ifadesindeki q-çatının Frenet formülleri benzeri varyasyon denkleminden $\mathbf{t}'$ ifadesi yerine yazılırsa

$$\langle k_1 \mathbf{n_q} - k_2 \mathbf{b_q}, \alpha \rangle + \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle = 0$$

olup $\mathbf{t}$ spacelike birim teğet vektör olduğundan $\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle = 1$ ve iç çarpımın lineer olduğu kullanılırsa

$$k_1 \langle \mathbf{n_q}, \alpha \rangle - k_2 \langle \mathbf{b_q}, \alpha \rangle + 1 = 0$$

elde edilir. Böylece

$$k_1 \langle \mathbf{n_q}, \alpha \rangle - k_2 \langle \mathbf{b_q}, \alpha \rangle = -1 \tag{5.7}$$

bulunur. Bu ifadenin türevi alınırsa

$$\begin{aligned} k_1' \langle \mathbf{n_q}, \alpha \rangle + k_1(\langle \mathbf{n_q}, \alpha \rangle)' - k_2' \langle \mathbf{b_q}, \alpha \rangle - k_2(\langle \mathbf{b_q}, \alpha \rangle)' &= 0 \\ k_1' \langle \mathbf{n_q}, \alpha \rangle + k_1(\langle \mathbf{n_q}', \alpha \rangle + \langle \mathbf{n_q}, \alpha' \rangle) - k_2' \langle \mathbf{b_q}, \alpha \rangle - k_2(\langle \mathbf{b_q}', \alpha \rangle + \langle \mathbf{b_q}, \alpha' \rangle) &= 0 \end{aligned}$$

olup α birim hızlı eğri olduğundan $\mathbf{t} = \alpha'$ olduğu kullanılır ve (5.1) ifadesindeki q-çatının Frenet formülleri benzeri varyasyon denkleminden $\mathbf{n}_q'$ ve $\mathbf{b}_q'$ ifadeleri yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} k_1' \langle \mathbf{n_q},\alpha \rangle + k_1(\langle -k_1\mathbf{t} - k_3\mathbf{b_q},\alpha \rangle + \langle \mathbf{n_q}, \mathbf{t} \rangle) & \\ -k_2' \langle \mathbf{b_q},\alpha \rangle - k_2(\langle -k_2\mathbf{t} - k_3\mathbf{n_q},\alpha \rangle + \langle \mathbf{b_q}, \mathbf{t} \rangle) &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Burada, **t, $\mathbf{n_q}$** ve $\mathbf{b_q}$ vektörleri ortonormal vektörler olduğundan $\langle \mathbf{n_q}, \mathbf{t} \rangle = \langle \mathbf{b_q}, \mathbf{t} \rangle = 0$ ve iç çarpımın lineer olması kullanılırsa

$$k_1' \langle \mathbf{n_q},\alpha \rangle - k_1^2 \langle \mathbf{t},\alpha \rangle - k_1k_3 \langle \mathbf{b_q},\alpha \rangle - k_2' \langle \mathbf{b_q},\alpha \rangle + k_2^2 \langle \mathbf{t},\alpha \rangle + k_2k_3 \langle \mathbf{n_q},\alpha \rangle = 0$$

olup (5.6) ifadesi kullanılırsa

$$k_1' \langle \mathbf{n_q},\alpha \rangle - k_1k_3 \langle \mathbf{b_q},\alpha \rangle - k_2' \langle \mathbf{b_q},\alpha \rangle + k_2k_3 \langle \mathbf{n_q},\alpha \rangle = 0$$

ve eşitlik düzelenirse

$$\langle \mathbf{n_q},\alpha \rangle (k_1' + k_2k_3) - \langle \mathbf{b_q},\alpha \rangle (k_2' + k_1k_3) = 0 \tag{5.8}$$

bulunur. Bulunan bu son eşitlik ile (5.7) eşitliği arasında yok etme metodu kullanılırsa yani (5.7) eşitliği $-(k_2' + k_1k_3)$ ifadesi ile (5.8) eşitliği de k_2 ile çarpılır ve bu eşitlikler toplanırsa

$$\begin{aligned} -(k_2' + k_1k_3)k_1 \langle \mathbf{n}_q,\alpha \rangle + k_2(k_1' + k_2k_3) \langle \mathbf{n_q},\alpha \rangle &= k_2' + k_1k_3 \\ (-k_1k_2' - k_1^2k_3 + k_2k_1' + k_2^2k_3) \langle \mathbf{n_q},\alpha \rangle &= k_2' + k_1k_3 \\ (-k_1(k_2' + k_1k_3) + k_2(k_1' + k_2k_3)) \langle \mathbf{n_q},\alpha \rangle &= k_2' + k_1k_3 \end{aligned}$$

olup her iki taraf $k_2' + k_1k_3$ ifadesine bölünürse

$$\begin{aligned} (-k_1(k_2' + k_1k_3) \langle \mathbf{n_q},\alpha \rangle + k_2(k_1' + k_2k_3) \langle \mathbf{n_q},\alpha \rangle)\frac{1}{k_2' + k_1k_3} &= \frac{k_2' + k_1k_3}{k_2' + k_1k_3} \\ -k_1\frac{(k_2' + k_1k_3)}{k_2' + k_1k_3} \langle \mathbf{n_q},\alpha \rangle + k_2\frac{(k_1' + k_2k_3)}{k_2' + k_1k_3} \langle \mathbf{n_q},\alpha \rangle &= 1 \end{aligned}$$

ve bu ifade düzenlenirse

$$\left(-k_1 + \frac{k_2(k_1' + k_2k_3)}{k_2' + k_1k_3}\right) \langle \mathbf{n_q},\alpha \rangle = 1$$

bulunur. Böylece

$$\langle \mathbf{n_q},\alpha \rangle = \frac{1}{\left(-k_1 + \dfrac{k_2(k_1' + k_2k_3)}{k_2' + k_1k_3}\right)}$$

elde edilmiş olur. Bu ifade

$$\langle \mathbf{n}_q,\alpha \rangle = -\frac{1}{k_1 - \dfrac{k_2(k_1' + k_2k_3)}{k_2' + k_1k_3}} \tag{5.9}$$

şeklinde düzenlenirse

$$\langle \mathbf{n_q}, \alpha \rangle = -s_2 \tag{5.10}$$

olarak bulunur. Şimdi (5.8) eşitliği ile (5.7) eşitliği arasında yok etme metodu kullanılırsa yani (5.7) eşitliği $-(k_1' + k_2k_3)$ ifadesi ile (5.8) eşitliği de k_1 ile çarpılır ve bu eşitlikler toplanırsa

$$\begin{aligned}
(k_2(k_1' + k_2k_3) - k_1(k_2' + k_1k_3)) \langle \mathbf{b_q}, \alpha \rangle &= k_1' + k_2k_3 \\
(k_2k_1' + k_2^2k_3 - k_1k_2' - k_1^2k_3) \langle \mathbf{b_q}, \alpha \rangle &= k_1' + k_2k_3 \\
(k_2(k_1' + k_2k_3) - k_1(k_2' + k_1k_3)) \langle \mathbf{b_q}, \alpha \rangle &= k_1' + k_2k_3
\end{aligned}$$

olup her iki taraf $k_1' + k_2k_3$ ifadesine bölünürse

$$\begin{aligned}
(k_2(k_1' + k_2k_3) - k_1(k_2' + k_1k_3)) \langle \mathbf{b_q}, \alpha \rangle) \frac{1}{k_1' + k_2k_3} &= \frac{k_1' + k_2k_3}{k_1' + k_2k_3} \\
k_2 \frac{(k_1' + k_2k_3)}{k_1' + k_2k_3} \langle \mathbf{b_q}, \alpha \rangle - k_1 \frac{(k_2' + k_1k_3)}{k_1' + k_2k_3} \langle \mathbf{b_q}, \alpha \rangle &= 1
\end{aligned}$$

ve bu ifade düzenlenirse

$$\left(k_2 - k_1 \frac{(k_2' + k_1k_3)}{k_1' + k_2k_3} \right) \langle \mathbf{b_q}, \alpha \rangle = 1$$

bulunur. Böylece

$$\langle \mathbf{b_q}, \alpha \rangle = \frac{1}{\left(k_2 - k_1 \frac{(k_2' + k_1k_3)}{k_1' + k_2k_3} \right)} \tag{5.11}$$

elde edilmiş olur.

Ayrıca (5.10) ifadesi yani $\langle \mathbf{n_q}, \alpha \rangle = -s_2$ ifadesinin türevi alınırsa

$$\langle \mathbf{n_q'}, \alpha \rangle + \langle \mathbf{n_q}, \alpha' \rangle = -s_2'$$

olup burada α birim hızlı eğri olduğundan $\mathbf{t} = \alpha'$ eşitliği kullanılırsa

$$\langle \mathbf{n_q'}, \alpha \rangle + \langle \mathbf{n_q}, \mathbf{t} \rangle = -s_2'$$

bulunur. Burada $\mathbf{t}$ ile $\mathbf{n_q}$ vektörleri ortonormal vektörler olduğundan $\langle \mathbf{n_q}, \mathbf{t} \rangle = 0$ ve (5.1) ifadesindeki q-çatının Frenet formülleri benzeri varyasyon denkleminden $\mathbf{n_q'}$ ifadesi yerine yazılırsa

$$\langle -k_1\mathbf{t} - k_3\mathbf{b_q}, \alpha \rangle = -s_2'$$

ve iç çarpımın lineer olduğu kullanılırsa

$$-k_1 \langle \mathbf{t}, \alpha \rangle - k_3 \langle \mathbf{b_q}, \alpha \rangle = -s_2'$$

olup (5.6) ifadesinden

$$k_3 \langle \mathbf{b_q}, \alpha \rangle = s_2'$$

ve böylece

$$\langle \mathbf{b_q}, \alpha \rangle = \frac{s_2'}{k_3} = s_3 \tag{5.12}$$

bulunmuş olur.

(5.9) ve (5.10) ifadelerinden

$$s_2 = \cfrac{1}{k_1 - \cfrac{k_2(k_1' + k_2 k_3)}{k_2' + k_1 k_3}} \tag{5.13}$$

yazılabilir. Bu eşitlik düzenlenirse

$$s_2 = \frac{k_2' + k_1 k_3}{k_1 k_2' + k_1^2 k_3 - k_2 k_1' - k_2^2 k_3} \tag{5.14}$$

bulunur. Her iki tarafın türevi alınırsa

$$\begin{aligned}
s_2' &= \frac{(k_2' + k_1 k_3)'(k_1 k_2' + k_1^2 k_3 - k_2 k_1' - k_2^2 k_3)}{(k_1 k_2' + k_1^2 k_3 - k_2 k_1' - k_2^2 k_3)^2} \\
&\quad - \frac{(k_2' + k_1 k_3)(k_1 k_2' + k_1^2 k_3 - k_2 k_1' - k_2^2 k_3)'}{(k_1 k_2' + k_1^2 k_3 - k_2 k_1' - k_2^2 k_3)^2} \\
&= \frac{(k_2'' + k_1' k_3 + k_1 k_3')(k_1 k_2' + k_1^2 k_3 - k_2 k_1' - k_2^2 k_3)}{(k_1 k_2' + k_1^2 k_3 - k_2 k_1' - k_2^2 k_3)^2} \\
&\quad - \frac{(k_2' + k_1 k_3)(k_1' k_2' + k_1 k_2'' + 2k_1 k_1' k_3 + k_1^2 k_3' - k_2' k_1' - k_2 k_1'' - 2k_2 k_2' k_3 - k_2^2 k_3')}{(k_1 k_2' + k_1^2 k_3 - k_2 k_1' - k_2^2 k_3)^2}
\end{aligned}$$

olup bu ifadede sadeleştirme yapılırsa

$$\begin{aligned}
s_2' &= \frac{(k_2'' + k_1' k_3 + k_1 k_3')(k_1 k_2' + k_1^2 k_3 - k_2 k_1' - k_2^2 k_3)}{(k_1 k_2' + k_1^2 k_3 - k_2 k_1' - k_2^2 k_3)^2} \\
&\quad - \frac{(k_2' + k_1 k_3)(k_1 k_2'' + 2k_1 k_1' k_3 + k_1^2 k_3' - k_2 k_1'' - 2k_2 k_2' k_3 - k_2^2 k_3')}{(k_1 k_2' + k_1^2 k_3 - k_2 k_1' - k_2^2 k_3)^2}
\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi, pay kısmındaki parantez içindeki ifadeler dağıtılırsa

$$\begin{aligned}
s_2' &= \frac{1}{(k_1 k_2' + k_1^2 k_3 - k_2 k_1' - k_2^2 k_3)^2}[k_2'' k_1 k_2' + k_2'' k_1^2 k_3 - k_2'' k_2 k_1' - k_2'' k_2^2 k_3 \\
&\quad + k_1' k_3 k_1 k_2' + k_1' k_3^2 k_1^2 - (k_1')^2 k_3 k_2 - k_1' k_3^2 k_2^2 \\
&\quad + k_1^2 k_3' k_2' + k_3' k_1^3 k_3 - k_1 k_3' k_2 k_1' - k_1 k_3' k_2^2 k_3 \\
&\quad - k_2' k_1 k_2'' - 2k_2' k_1 k_1' k_3 - k_2' k_1^2 k_3' + k_2' k_2 k_1'' + 2(k_2')^2 k_2 k_3 + k_2' k_2^2 k_3' \\
&\quad - k_1^2 k_3 k_2'' - 2k_1^2 k_3^2 k_1' - k_3 k_1^3 k_3' + k_1 k_3 k_2 k_1'' + 2k_1 k_3^2 k_2 k_2' + k_1 k_3 k_2^2 k_3']
\end{aligned}$$

olup gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
s_2' &= \frac{1}{(k_1k_2' + k_1^2k_3 - k_2k_1' - k_2^2k_3)^2}[-k_2''k_2k_1' - k_2''k_2^2k_3 - k_1'k_3k_1k_2' \\
&\quad -k_1'k_3^2k_1^2 - (k_1')^2k_3k_2 - k_1'k_3^2k_2^2 - k_1k_3'k_2k_1' + k_2'k_2k_1'' + 2(k_2')^2k_2k_3 \\
&\quad +k_2'k_2^2k_3' + k_1k_3k_2k_1'' + 2k_1k_3^2k_2k_2']
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Burada ortak terimler, paranteze alınırsa

$$\begin{aligned}
s_2' &= \frac{1}{(k_1k_2' + k_1^2k_3 - k_2k_1' - k_2^2k_3)^2}[-k_1'k_3^2(k_1^2 + k_2^2) - k_1'k_1(k_2'k_3 + k_3'k_2) \\
&\quad -k_1'k_2k_2'' + k_2'k_2(2k_1k_3^2 + k_1'' + k_2k_3') \\
&\quad -k_2k_3((k_1')^2 - 2(k_2')^2 - k_1''k_1 + k_2''k_2)]
\end{aligned}$$

ve düzenlenirse

$$\begin{aligned}
s_2' &= \frac{1}{(k_1k_2' + k_1^2k_3 - k_2k_1' - k_2^2k_3)^2}[-k_1'(k_3^2(k_1^2 + k_2^2) + k_1(k_2k_3)' + k_2k_2'') \\
&\quad +k_2'k_2(2k_1k_3^2 + k_1'' + k_2k_3') \\
&\quad -k_2k_3((k_1')^2 - 2(k_2')^2 - k_1''k_1 + k_2''k_2)]
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bu ifadenin her iki tarafı k_3 ifadesine bölünürse

$$\begin{aligned}
\frac{s_2'}{k_3} &= \frac{1}{(k_1k_2' + k_1^2k_3 - k_2k_1' - k_2^2k_3)^2}[-k_1'(k_3(k_1^2 + k_2^2) + k_1k_2' \\
&\quad +(k_1k_2k_3')/k_3 + (k_2k_2'')/k_3) + k_2'k_2(2k_1k_3 + k_1''/k_3 + (k_2k_3')/k_3) \\
&\quad -k_2((k_1')^2 - 2(k_2')^2 - k_1''k_1 + k_2''k_2)]
\end{aligned}$$

bulunur.

Sonuç 5.2: $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_1^3$, $\mathbb{R}_1^3$ uzayında birim hızlı bir spacelike eğri olsun. α bir küresel Tzitzeica eğrisi ise

$$k_3' \langle \mathbf{b_q}, \alpha \rangle + 2k_3^2 \langle \mathbf{n_q}, \alpha \rangle = 0$$

denklemi geçerlidir.

İspat Teorem 5.2 ifadesinde (5.6) eşitliği kullanılırak ispat tamamlanmış olur. Dikkat edilirse, bulunan bu ifade ile (4.8) eşitliği arasında ciddi bir benzerlik bulunmaktadır.

Teorem 5.3: $M \subset \mathbb{R}_1^3$ spacelike eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ ya karşılık gelen $\alpha(s)$ noktasındaki q-vektörler $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n_q}(s), \mathbf{b_q}(s)\}$ olmak üzere, M ile sonsuz yakın üç ortak noktası olan kürelerin merkezlerinin geometrik yeri

$$a(s) = \alpha(s) + s_2(s)\mathbf{n_q}(s) + \lambda\mathbf{b_q}(s)$$

şeklindedir. Burada $s_2 : I \longrightarrow \mathbb{R}$ katsayıları, küresel eğri denkleminde yer alan katsayılar ve $\lambda \in \mathbb{R}$ dir.

İspat (I, α) koordinat komşuluğu, M için yay-parametresi olarak verilsin. $\alpha(s) \in M$ noktasında, M ile sonsuz yakın üç ortak noktası olan bir kürenin merkezi a ve yarıçapı r olsun. Buna göre,

$$\begin{array}{rcccl} f & : & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & s & \longrightarrow & f(s) = \langle a - \alpha(s)\alpha(s), a - \alpha(s)\rangle - r^2 \end{array}$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. $a(s)$ noktasında M eğrisinin,

$$S_1^2 = \{x \mid x \in \mathbb{R}_1^3, \langle x - a, x - a\rangle = r^2\}$$

şeklinde tanımlı küreleri ile sonsuz yakın üç noktasının ortak olması için

$$f(s) = f'(s) = f''(s) = 0$$

olmalıdır. Buna göre, $f(s) = 0$ olması için

$$\langle a - \alpha(s), a - \alpha(s)\rangle = r^2$$

olmalıdır. Bu ifadenin türevi alınırsa, $f'(s) = 0$ olup

$$\langle \alpha'(s), a - \alpha(s)\rangle + \langle a - \alpha(s), \alpha'(s)\rangle = 0$$

iç çarpımın simetrik ve lineer olduğu kullanılırsa

$$2\,\langle \alpha'(s), a - \alpha(s)\rangle = 0$$

ve buradan da

$$\langle \alpha'(s), a - \alpha(s)\rangle = 0$$

olup α birim hızlı bir spacelike eğri olduğundan $\mathbf{t}(s) = \alpha'(s)$ değeri yerine yazılırsa

$$\langle \mathbf{t}(s), a - \alpha(s)\rangle = 0 \tag{5.15}$$

bulunur. Bu ifadenin türevi alınırsa, $f''(s) = 0$ olup

$$\langle \mathbf{t}'(s), a - \alpha(s)\rangle + \langle \mathbf{t}(s), \alpha'(s)\rangle = 0$$

olup α birim hızlı bir spacelike eğri olduğundan $\mathbf{t}(s) = \alpha'(s)$ değeri yerine yazılır ve (5.1) ifadesindeki q-çatının Frenet benzeri varyasyon denklemi kullanılırsa

$$\langle k_1(s)\mathbf{n_q}(s) - k_2(s)\mathbf{b_q}(s), a - \alpha(s)\rangle + \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{t}(s)\rangle = 0$$

burada $\mathbf{t}(s)$, birim teğet vektörü spacelike olduğundan $\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{t}(s)\rangle = 1$ ve iç çarpımın lineer olduğu kullanılırsa

$$k_1(s)\langle \mathbf{n_q}(s), a-\alpha(s)\rangle - k_2(s)\langle \mathbf{b_q}(s), a-\alpha(s)\rangle + 1 = 0$$

elde edilir. Diğer taraftan, $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}_q(s), \mathbf{b}_q(s)\}$ bazı için

$$a-\alpha(s) = s_1(s)\mathbf{t}(s) + s_2(s)\mathbf{n_q}(s) + s_3(s)\mathbf{b_q}(s) \tag{5.16}$$

yazılabilir, burada $s_i(s) \in \mathbb{R}$ dir. Eşitliğin her iki tarafı $\mathbf{t}(s)$ ile iç çarpılırsa

$$\langle a-\alpha(s), \mathbf{t}(s)\rangle = \langle s_1(s)\mathbf{t}(s) + s_2(s)\mathbf{n_q}(s) + s_3(s)\mathbf{b_q}(s), \mathbf{t}(s)\rangle$$

olup, iç çarpımın lineer olduğu kullanılırsa

$$\langle a-\alpha(s), \mathbf{t}(s)\rangle = s_1(s)\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{t}(s)\rangle + s_2(s)\langle \mathbf{n_q}(s), \mathbf{t}(s)\rangle + s_3(s)\langle \mathbf{b_q}(s), \mathbf{t}(s)\rangle$$

burada $\mathbf{t}(s)$ birim teğet vektörü spacelike olduğundan $\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{t}(s)\rangle = 1$ ve $\mathbf{t}(s)$, $\mathbf{n_q}(s)$ ve $\mathbf{b_q}(s)$ vektörleri ortonormal vektörler olduğundan $\langle \mathbf{n_q}(s), \mathbf{t}(s)\rangle = 0$ ve $\langle \mathbf{b_q}(s), \mathbf{t}(s)\rangle = 0$ olduğu yerine yazılırsa

$$\langle a-\alpha(s), \mathbf{t}(s)\rangle = s_1(s)$$

olup (5.15) ifadesinden

$$s_1(s) = 0 \tag{5.17}$$

bulunur. (5.16) eşitliğinin her iki tarafı $\mathbf{n_q}(s)$ ile iç çarpılırsa

$$\langle a-\alpha(s), \mathbf{n_q}(s)\rangle = \langle s_1(s)\mathbf{t}(s) + s_2(s)\mathbf{n_q}(s) + s_3(s)\mathbf{b_q}(s), \mathbf{n_q}(s)\rangle$$

olup, iç çarpımın lineer olduğu kullanılırsa

$$\langle a-\alpha(s), \mathbf{n_q}(s)\rangle = s_1(s)\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n_q}(s)\rangle + s_2(s)\langle \mathbf{n_q}(s), \mathbf{n_q}(s)\rangle + s_3(s)\langle \mathbf{b_q}(s), \mathbf{n_q}(s)\rangle$$

burada $\mathbf{n_q}(s)$ birim quasi-normal vektörü spacelike olduğundan $\langle \mathbf{n_q}(s), \mathbf{n_q}(s)\rangle = 1$ ve $\mathbf{t}(s)$, $\mathbf{n_q}(s)$ ve $\mathbf{b_q}(s)$ vektörleri ortonormal vektörler olduğundan $\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n_q}(s)\rangle = 0$ ve $\langle \mathbf{b_q}(s), \mathbf{n_q}(s)\rangle = 0$ olduğu yerine yazılırsa

$$\langle a-\alpha(s), \mathbf{n_q}(s)\rangle = s_2(s)$$

bulunur. (5.16) eşitliğinin her iki tarafı $\mathbf{b_q}(s)$ ile iç çarpılırsa

$$\langle a-\alpha(s), \mathbf{b_q}(s)\rangle = \langle s_1(s)\mathbf{t}(s) + s_2(s)\mathbf{n_q}(s) + s_3(s)\mathbf{b_q}(s), \mathbf{b_q}(s)\rangle$$

olup, iç çarpımın lineer olduğu kullanılırsa

$$\langle a-\alpha(s), \mathbf{b_q}(s)\rangle = s_1(s)\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{b_q}(s)\rangle + s_2(s)\langle \mathbf{n_q}(s), \mathbf{b_q}(s)\rangle + s_3(s)\langle \mathbf{b_q}(s), \mathbf{b_q}(s)\rangle$$

burada $\mathbf{b_q}(s)$ birim quasi binormal vektörü timelike olduğundan $\langle \mathbf{b_q}(s), \mathbf{b_q}(s)\rangle = -1$ ve $\mathbf{t}(s)$, $\mathbf{n_q}(s)$ ve $\mathbf{b_q}(s)$ vektörleri ortonormal vektörler olduğundan $\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{b_q}(s)\rangle = 0$ ve $\langle \mathbf{n_q}(s), \mathbf{b_q}(s)\rangle = 0$ olduğu yerine yazılırsa

$$\langle a-\alpha(s), \mathbf{b_q}(s)\rangle = -s_3(s)$$

bulunur.

$$\langle a-\alpha(s), a-\alpha(s)\rangle = r^2$$

eşitliğinde, (5.16) ifadesi kullanılırsa

$$\langle s_1(s)\mathbf{t}(s) + s_2(s)\mathbf{n_q}(s) + s_3(s)\mathbf{b_q}(s), s_1(s)\mathbf{t}(s) + s_2(s)\mathbf{n_q}(s) + s_3(s)\mathbf{b_q}(s)\rangle = r^2$$

olup burada iç çarpımın simetrik ve lineer olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} & s_1^2(s)\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{t}(s)\rangle + s_1(s)s_2(s)\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n_q}(s)\rangle + s_1(s)s_3(s)\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{b_q}(s)\rangle \\ & + s_1(s)s_2(s)\langle \mathbf{n_q}(s), \mathbf{t}(s)\rangle + s_2^2(s)\langle \mathbf{n_q}(s), \mathbf{n_q}(s)\rangle + s_2(s)s_3(s)\langle \mathbf{n_q}(s), \mathbf{b_q}(s)\rangle \\ & + s_1(s)s_3(s)\langle \mathbf{b_q}(s), \mathbf{t}(s)\rangle + s_2(s)s_3(s)\langle \mathbf{b_q}(s), \mathbf{n_q}(s)\rangle + s_3^2(s)\langle \mathbf{b_q}(s), \mathbf{b_q}(s)\rangle = r^2 \end{aligned}$$

elde edilir. $\mathbf{t}(s)$ ve $\mathbf{n_q}(s)$ birim spacelike vektörleri için $\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{t}(s)\rangle = \langle \mathbf{n_q}(s), \mathbf{n_q}(s)\rangle = 1$, $\mathbf{b_q}(s)$ timelike birim vektörü için $\langle \mathbf{b_q}(s), \mathbf{b_q}(s)\rangle = -1$ ve bu vektörler ortonormal olduğundan $\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{b_q}(s)\rangle = \langle \mathbf{n_q}(s), \mathbf{b_q}(s)\rangle = \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n_q}(s)\rangle = 0$ olduğu yerine yazılırsa

$$s_1^2(s) + s_2^2(s) - s_3^2(s) = r^2$$

olur. (5.17) ifadesi kullanılırsa

$$s_2^2(s) - s_3^2(s) = r^2$$

ve buradan da

$$s_3^2(s) = s_2^2(s) - r^2$$

bulunur. (5.13) eşitliğinden s_2 yerine yazılırsa

$$s_3(s) = \mp\sqrt{\left(\frac{k_2' + k_1k_3}{k_1(k_2' + k_1k_3) - k_2(k_1' + k_2k_3)}\right)^2 - r^2}$$

reel değerli ifadesi elde edilmiş olur. $\lambda = s_3(s)$ reel değerli ifadesi ve $1 \leq i \leq 3$ için bulunan s_i değerleri, (5.16) denkleminde yerlerine yazılırsa

$$a - \alpha(s) = s_2(s)\mathbf{n_q}(s) + \lambda\mathbf{b_q}(s)$$

bulunur. Bu ifade düzenlenirse

$$a = \alpha(s) + s_2(s)\mathbf{n_q}(s) + \lambda\mathbf{b_q}(s)$$

şeklinde, kürelerin merkezlerinin geometrik yerinin denklemi elde edilir.

Sonuç 5.3 Teorem 5.3 ifadesi ile Teorem 4.2 ifadeleri şekilsel olarak benzeseler de Teorem 5.3 ifadesinde yer alan küresel eğri denkleminin katsayılarından olan $s_2(s) \in \mathbb{R}$ ile $\lambda \in \mathbb{R}$ katsayılarının içerikleri ile Teorem 4.2 ifadesinde yer alan küresel eğri denkleminin katsayılarından olan $s_2(s) \in \mathbb{R}$ ile $\lambda \in \mathbb{R}$ katsayılarının içerikleri birbirlerinden farklıdır. Her iki teorem ifadesinde $s_2(s) \in \mathbb{R}$ ile $\lambda \in \mathbb{R}$ katsayıları yerine yazıldığında fark daha da belirginleşmektedir.

Teorem 5.4: $M \subset \mathbb{R}_1^3$ spacelike eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s_3 \neq 0$, $k_3 \neq 0$ olmak üzere $\forall s \in I$ için $\alpha(s)$ noktasında $k_2 = 0$ iken oskülatör kürenin yarıçapı sabittir $\Longleftrightarrow$ oskülatör kürelerin merkezleri aynıdır.

İspat ($\Longrightarrow$) Öncelikle $\alpha(s) \in M$ noktasındaki oskülatör kürenin yarıçapı r ve $\lambda = s_3(s)$ olmak üzere oskülatör küre merkezi

$$a(s) = \alpha(s) + s_2(s)\mathbf{n_q}(s) + s_3(s)\mathbf{b_q}(s)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
r &= \|\overrightarrow{\alpha a}\| \\
&= \|a - \alpha(s)\| \\
&= \|\alpha(s) + s_2(s)\mathbf{n_q}(s) + s_3(s)\mathbf{b_q}(s) - \alpha(s)\| \\
&= \sqrt{\langle s_2(s)\mathbf{n_q}(s) + s_3(s)\mathbf{b_q}(s), s_2(s)\mathbf{n_q}(s) + s_3(s)\mathbf{b_q}(s)\rangle} \\
&= \sqrt{\begin{array}{l} \langle s_2(s)\mathbf{n_q}(s), s_2(s)\mathbf{n_q}(s)\rangle + \langle s_2(s)\mathbf{n_q}(s), s_3(s)\mathbf{b_q}(s)\rangle \\ + \langle s_3(s)\mathbf{b_q}(s), s_2(s)\mathbf{n_q}(s)\rangle + \langle s_3(s)\mathbf{b_q}(s), s_3(s)\ \mathbf{b_q}(s)\rangle \end{array}}
\end{aligned}$$

bulunur ve burada iç çarpımın lineer ve simetrik olma özellikleri kullanılırsa

$$r = \sqrt{s_2^2(s)\ \langle \mathbf{n_q}(s), \mathbf{n_q}(s)\rangle + 2s_2(s)s_3(s)\ \langle \mathbf{n_q}(s), \mathbf{b_q}(s)\rangle + s_3^2(s)\ \langle \mathbf{b_q}(s), \mathbf{b_q}(s)\rangle}$$

olup burada $\mathbf{n_q}(s)$ ile $\mathbf{b_q}(s)$ vektörleri ortonormal olduğundan $\langle \mathbf{n_q}(s), \mathbf{b_q}(s)\rangle = 0$, $\mathbf{n_q}(s)$ birim spacelike vektör olup $\langle \mathbf{n_q}(s), \mathbf{n_q}(s)\rangle = 1$ ve $\mathbf{b_q}(s)$ timelike birim vektörü için $\langle \mathbf{b_q}(s), \mathbf{b_q}(s)\rangle = -1$ değerleri yerlerine yazılırsa

$$r = \sqrt{s_2^2(s) - s_3^2(s)}$$

ve buradan

$$r^2 = s_2^2(s) - s_3^2(s)$$

bulunur. $r = sbt$ ise türev alınırsa

$$\begin{aligned}
2s_2(s)s_2'(s) - 2s_3(s)s_3'(s) &= 0 \\
2(s_2(s)s_2'(s) - s_3(s)s_3'(s)) &= 0 \\
s_2(s)s_2'(s) - s_3(s)s_3'(s) &= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada (5.12) ifadesindeki $s_3(s) = \dfrac{s_2'(s)}{k_3(s)}$ değeri yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} s_2(s)s_2'(s) - \frac{s_2'(s)}{k_3(s)}s_3'(s) &= 0 \\ \frac{k_3(s)s_2(s)s_2'(s) - s_2'(s)s_3'(s)}{k_3(s)} &= 0 \\ k_3(s)s_2(s)s_2'(s) - s_2'(s)s_3'(s) &= 0 \\ s_2'(s)(k_3(s)s_2(s) - s_3'(s)) &= 0 \end{aligned}$$

olup teorem ifadesinde $s_3(s) \neq 0$ ve dolayısıyla $s_2'(s) \neq 0$ olacağından

$$k_3(s)s_2(s) - s_3'(s) = 0 \tag{5.18}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$a(s) = \alpha(s) + s_2(s)\mathbf{n_q}(s) + s_3(s)\mathbf{b_q}(s)$$

olduğundan

$$D_{\dot{\alpha}}a(s) = \alpha'(s) + s_2'(s)\mathbf{n_q}(s) + s_2(s)\mathbf{n_q}'(s) + s_3'(s)\mathbf{b_q}(s) + s_3(s)\mathbf{b}_\mathbf{q}'(s)$$

olup burada α birim hızlı bir spacelike eğri olduğundan $\alpha'(s) = \mathbf{t}(s)$ ve (5.1) ifadesindeki q-çatının Frenet formülleri benzeri varyasyon denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned} D_{\dot{\alpha}}a(s) &= \mathbf{t}(s) + s_2'(s)\mathbf{n_q}(s) + s_2(s)(-k_1(s)\mathbf{t}(s) - k_3(s)\mathbf{b_q}(s)) + s_3'(s)\mathbf{b_q}(s) \\ &\quad + s_3(s)(-k_2(s)\mathbf{t}(s) - k_3(s)\mathbf{n_q}(s)) \end{aligned}$$

olup bu ifade düzenlenirse

$$\begin{aligned} D_{\dot{\alpha}}a(s) &= \mathbf{t}(s) + s_2'(s)\mathbf{n_q}(s) - s_2(s)k_1(s)\mathbf{t}(s) - s_2(s)k_3(s)\mathbf{b_q}(s) \\ &\quad + s_3'(s)\mathbf{b_q}(s) - s_3(s)k_2(s)\mathbf{t}(s) - s_3(s)k_3(s)\mathbf{n_q}(s) \end{aligned}$$

burada (5.12) ifadesinden $s_3(s) = \dfrac{s_2'(s)}{k_3(s)} \Longrightarrow s_2'(s) = s_3(s)k_3(s)$ ifadesi yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} D_{\dot{\alpha}}a(s) &= \mathbf{t}(s) + s_3(s)k_3(s)\mathbf{n_q}(s) - s_2(s)k_1(s)\mathbf{t}(s) - s_2(s)k_3(s)\mathbf{b_q}(s) \\ &\quad + s_3'(s)\mathbf{b_q}(s) - s_3(s)k_2(s)\mathbf{t}(s) - s_3(s)k_3(s)\mathbf{n_q}(s) \end{aligned}$$

bulunup bu ifade düzenlenirse

$$D_{\dot{\alpha}}a(s) = \mathbf{t}(s) - s_2(s)k_1(s)\mathbf{t}(s) - s_2(s)k_3(s)\mathbf{b_q}(s) + s_3'(s)\mathbf{b_q}(s) - s_3(s)k_2(s)\mathbf{t}(s)$$

ve buradan

$$D_{\dot{\alpha}}a(s) = (1 - s_2(s)k_1(s) - s_3(s)k_2(s))\mathbf{t}(s) + (-s_2(s)k_3(s) + s_3'(s))\mathbf{b_q}(s)$$

olup (5.14) ifadesinden $s_2(s)$ ifadesini yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} D_{\dot{\alpha}}a(s) &= (1 - \frac{k_2' + k_1k_3}{k_1k_2' + k_1^2k_3 - k_2k_1' - k_2^2k_3}k_1(s) - s_3(s)k_2(s))\mathbf{t}(s) \\ &\quad +(-s_2(s)k_3(s) + s_3'(s))\mathbf{b_q}(s) \end{aligned}$$

ve bu ifade düzenlenirse

$$\begin{aligned} D_{\dot{\alpha}}a(s) &= (\frac{k_1k_2' + k_1^2k_3 - k_2k_1' - k_2^2k_3 - k_1k_2' - k_1^2k_3}{k_1k_2' + k_1^2k_3 - k_2k_1' - k_2^2k_3} - s_3(s)k_2(s))\mathbf{t}(s) \\ &\quad +(-s_2(s)k_3(s) + s_3'(s))\mathbf{b_q}(s) \end{aligned}$$

ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\begin{aligned} D_{\dot{\alpha}}a(s) &= (\frac{-k_2k_1' - k_2^2k_3}{k_1k_2' + k_1^2k_3 - k_2k_1' - k_2^2k_3} - s_3(s)k_2(s))\mathbf{t}(s) \\ &\quad +(-s_2(s)k_3(s) + s_3'(s))\mathbf{b_q}(s) \end{aligned}$$

olur. (5.12) ifadesinden $\frac{s_2'}{k_3} = s_3$ ifadesi yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} D_{\dot{\alpha}}a(s) &= (\frac{-k_2k_1' - k_2^2k_3}{k_1k_2' + k_1^2k_3 - k_2k_1' - k_2^2k_3} - \frac{s_2'}{k_3}k_2(s))\mathbf{t}(s) \\ &\quad +(-s_2(s)k_3(s) + s_3'(s))\mathbf{b_q}(s) \end{aligned}$$

bulunur. Şimdi

$$\begin{aligned} s_2' &= \frac{1}{(k_1k_2' + k_1^2k_3 - k_2k_1' - k_2^2k_3)^2}[-k_1'(k_3^2(k_1^2 + k_2^2) + k_1(k_2k_3)' + k_2k_2'') \\ &\quad +k_2'k_2(2k_1k_3^2 + k_1'' + k_2k_3') - k_2k_3((k_1')^2 - 2(k_2')^2 - k_1''k_1 + k_2''k_2)] \end{aligned}$$

ifadesi yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} D_{\dot{\alpha}}a(s) = &\ (-\frac{k_2}{k_3}(\frac{1}{(k_1k_2'+k_1^2k_3 - k_2k_1' - k_2^2k_3)^2}[-k_1'(k_3^2(k_1^2+k_2^2) + k_1(k_2k_3)' \\ &+k_2k_2'')+k_2'k_2(2k_1k_3^2+k_1''+k_2k_3') - k_2k_3((k_1')^2 - 2(k_2')^2 - k_1''k_1 \\ &+k_2''k_2)]) - \frac{k_2k_1' + k_2^2k_3}{k_1k_2'+k_1^2k_3 - k_2k_1' - k_2^2k_3})\mathbf{t}(s)+(-s_2(s)k_3(s)+s_3'(s))\mathbf{b_q}(s) \end{aligned}$$

olup $\mathbf{t}(s)$ parantez içindeki paydalar eşitlenirse

$$\begin{aligned} D_{\dot{\alpha}}a(s) &= (\frac{k_3(k_1k_2' + k_1^2k_3 - k_2k_1' - k_2^2k_3)(-k_2k_1' - k_2^2k_3)}{k_3(k_1k_2' + k_1^2k_3 - k_2k_1' - k_2^2k_3)^2} \\ &\quad -\frac{k_2(-k_1'(k_3^2(k_1^2+k_2^2) + k_1(k_2k_3)' + k_2k_2'')}{k_3(k_1k_2' + k_1^2k_3 - k_2k_1' - k_2^2k_3)^2} \\ &\quad +\frac{k_2'k_2(2k_1k_3^2 + k_1'' + k_2k_3')}{k_3(k_1k_2' + k_1^2k_3 - k_2k_1' - k_2^2k_3)^2} \\ &\quad +\frac{-k_2k_3((k_1')^2 - 2(k_2')^2 - k_1''k_1 + k_2''k_2)}{k_3(k_1k_2' + k_1^2k_3 - k_2k_1' - k_2^2k_3)^2}))\mathbf{t}(s) \\ &\quad +(-s_2(s)k_3(s) + s_3'(s))\mathbf{b_q}(s) \end{aligned}$$

ve buradan teorem ifadesinde yer alan $k_2 = 0$ değeri yerine yazılırsa

$$D_{\dot{\alpha}}a(s) = (-s_2(s)k_3(s) + s_3'(s))\mathbf{b_q}(s)$$

olup (5.18) denkleminden dolayı $D_{\dot{\alpha}}a(s) = 0$ bulunur. Buradan da $\forall s \in I$ için $a(s) = sabit$ bulunmuş olur.

($\Longleftarrow$) $\forall s \in I$ için $a(s) = sabit$ olsun. $r = \|\overrightarrow{\alpha a}\|$ olduğundan

$$\langle a(s) - \alpha(s), a(s) - \alpha(s)\rangle = r^2(s)$$

ifadesinin s parametresine göre türevi alınırsa

$$\left\langle D_{\dot{\alpha}}a(s), a(s) - \alpha(s)\right\rangle = r(s)\left.\frac{dr}{ds}\right|_s$$

olup $a(s) = sabit$ olduğundan $D_{\dot{\alpha}}a(s) = 0$ bulunur. Böylece

$$r(s)\left.\frac{dr}{ds}\right|_s = 0$$

ve buradan da

$$r(s) = 0 \quad \text{veya} \quad \left.\frac{dr}{ds}\right|_s = 0$$

elde edilir. Eğer $r(s) = 0$ ise

$$r^2 = s_2^2(s) + s_3^2(s) = 0$$

olmalıdır. Bu da

$$s_2^2(s) = s_3^2(s) = 0$$

olması demektir. Ancak bu ifade, teoremin hipotezi ile çelişir. O halde

$$\left.\frac{dr}{ds}\right|_s = 0$$

ve buradan da $\forall s \in I$ için $r(s) = sabit$ bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 5.4 Minkowski 3-uzayında q-çatı yardımıyla ispatlanan Teorem 5.4 de yer alan ifade ile 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısı yardımıyla ispatlanan Teorem 4.6 ifadesi karşılaştırıldığında, iki ifade arasındaki fark, Minkowski 3-uzayda q-çatıyla benzer hesaplamalar yapabilmek için $k_2 = 0$ olması durumuna bakılmasıdır.

5.2 Minkowski 3-uzayında q-çatılı Timelike Tzitzeica Eğrileri

Çalışmamızın bu kısmında spacelike eğriler için yaptığımız hesaplamaları bu sefer timelike eğriler için yapmaya çalışacağız. İzdüşüm vektörü olarak ele aldığımız **k** vektörünün spacelike olması halinde oluşturulan timelike eğriler için q-çatı kullanılarak Tzitzeica ve küresel eğri tanımlanmış ve küresel Tzitzeica eğrisi olma durumu incelenmiştir.

Teorem 5.5: **t** timelike, $\mathbf{k} = (0,1,0)$ spacelike, $\mathbf{n_q}$ spacelike ve $\mathbf{b_q}$ spacelike olmak üzere verilen timelike eğrinin q-çatı için türev formülleri

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}_\mathbf{q}' \\ \mathbf{b}_\mathbf{q}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & k_2 \\ k_1 & 0 & k_3 \\ k_2 & -k_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n_q} \\ \mathbf{b_q} \end{bmatrix} \tag{5.19}$$

biçimindedir. q-eğrilikleri ise

$$k_1 = \kappa \cos\theta, k_2 = -\kappa \sin\theta, k_3 = d\theta + \tau$$

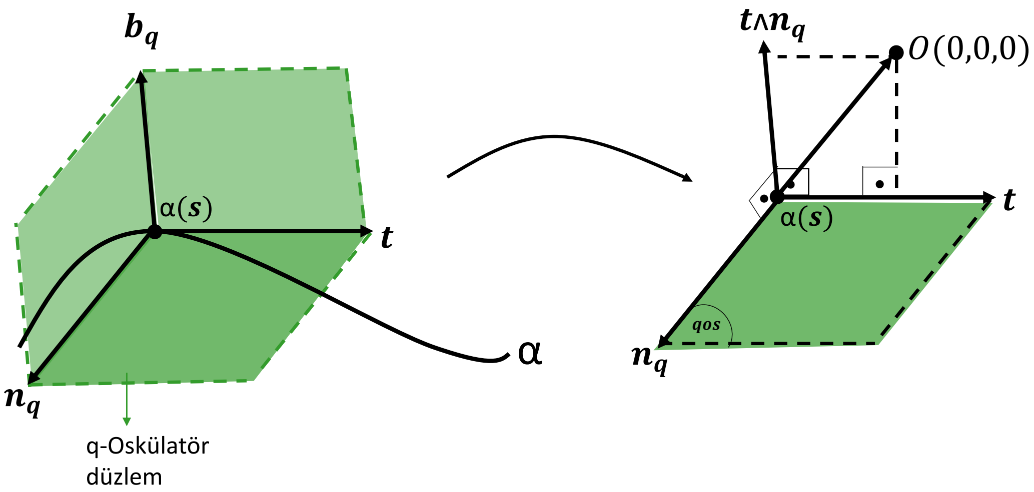
olarak yazılabilir (Tarım, 2016).

Tanım 5.4: $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_1^3$, $\mathbb{R}_1^3$ uzayında $k_1 > 0$ ve $k_3 \neq 0$ q-eğrilikleri ile yay-parametreli timelike eğrisi verilsin. α eğrisinin keyfi $\alpha(s)$ noktasındaki q-oskülatör düzleminin orijine olan uzaklığı d_{qos} olmak üzere, α eğrisi

$$\frac{k_3}{d_{\text{qos}}^2} = a \tag{5.20}$$

şartını sağlıyorsa α, Tzitzeica eğrisi adını alır. Burada $a \neq 0$ bir reel sabittir.
d_{qos} uzaklığı, Tanım 3.2 ifadesi kullanılırsa

$$\begin{aligned} d(O, qos) &= d_{\text{qos}} \\ &= \left| \frac{\langle \alpha(s), \mathbf{t} \times \mathbf{n_q} \rangle}{\|\mathbf{t} \times \mathbf{n_q}\|} \right| \end{aligned}$$



Şekil 5.3 $\mathbb{R}^3_1$ de q-oskülatör düzlemin orijine olan d_{qos} uzaklığı

olup burada $\mathbf{b}_q = \mathbf{t} \times \mathbf{n}_q$ quasi-binormal vektörü yerine yazılırsa

$$d_{\text{qos}} = \left| \frac{\langle \alpha(s), \mathbf{b_q} \rangle}{\|\mathbf{b_q}\|} \right|$$

bulunur. $\mathbf{b}_q$ spacelike binormal vektörü birim olduğundan

$$\|\mathbf{b}_q\| = |\langle \mathbf{b_q}, \mathbf{b_q} \rangle|^{1/2} = 1$$

olup buradan

$$d_{\text{qos}} = |\langle \alpha(s), \mathbf{b_q} \rangle| = |\langle \mathbf{b_q}, \alpha(s) \rangle| \tag{5.21}$$

şeklinde, q-oskülatör düzlemin orijine olan uzaklığı bulunmuş olur.

Teorem 5.6: $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3_1$, $\mathbb{R}^3_1$ uzayında birim hızlı bir timelike eğri olsun. α bir Tzitzeica eğrisi ise

$$k_3' \langle \mathbf{b_q}, \alpha \rangle - 2k_2k_3 \langle \mathbf{t}, \alpha \rangle + 2k_3^2 \langle \mathbf{n_q}, \alpha \rangle = 0 \tag{5.22}$$

denklemi geçerlidir.

İspat α, $\mathbb{R}^3_1$ uzayında birim hızlı bir timelike eğri olsun. (5.20) ve (5.21) eşitlikleri kullanılarak

$$\frac{k_3}{\langle \mathbf{b_q}, \alpha \rangle^2} = a \neq 0 \tag{5.23}$$

elde edilir. Bu ifadenin türevi alınırsa

$$\begin{aligned}\frac{k_3' \langle \mathbf{b_q}, \alpha\rangle^2 - k_3(\langle \mathbf{b_q}, \alpha\rangle^2)'}{\langle \mathbf{b_q}, \alpha\rangle^4} &= 0 \\ \frac{k_3' \langle \mathbf{b_q}, \alpha\rangle^2 - k_3(2\langle \mathbf{b_q}, \alpha\rangle (\langle \mathbf{b_q'}, \alpha\rangle + \langle \mathbf{b_q}, \alpha'\rangle))}{\langle \mathbf{b_q}, \alpha\rangle^4} &= 0\end{aligned}$$

bulunur. Burada α eğrisi birim hızlı olduğundan $\alpha' = \mathbf{t}$ ve dolayısıyla $\langle \mathbf{b_q}, \alpha'\rangle = \langle \mathbf{b_q}, \mathbf{t}\rangle$ olup $\mathbf{t}$ ve $\mathbf{b_q}$ vektörleri ortonormal olduğundan $\langle \mathbf{b_q}, \mathbf{t}\rangle = 0$ dır. Böylece

$$\frac{k_3' \langle \mathbf{b_q}, \alpha\rangle^2 - k_3(2\langle \mathbf{b_q}, \alpha\rangle \langle \mathbf{b_q'}, \alpha\rangle)}{\langle \mathbf{b_q}, \alpha\rangle^4} = 0$$

olup (5.19) ifadesinden $\mathbf{b_q'}$ vektörünün değeri yerine yazılırsa

$$\frac{k_3' \langle \mathbf{b_q}, \alpha\rangle^2 - k_3(2\langle \mathbf{b_q}, \alpha\rangle \langle k_2\mathbf{t} - k_3\mathbf{n_q}, \alpha\rangle)}{\langle \mathbf{b_q}, \alpha\rangle^4} = 0$$

elde edilir. İç çarpımın lineer olduğu kullanılır ve eşitlik düzenlenirse

$$\frac{k_3' \langle \mathbf{b_q}, \alpha\rangle^2 - 2k_2k_3\langle \mathbf{b_q}, \alpha\rangle \langle \mathbf{t}, \alpha\rangle + 2k_3^2\langle \mathbf{b_q}, \alpha\rangle\langle \mathbf{n_q}, \alpha\rangle}{\langle \mathbf{b_q}, \alpha\rangle^4} = 0$$

bulunur. Pay kısmı $\langle \mathbf{b}_q, \alpha\rangle$ parantezine alınırsa

$$\frac{\langle \mathbf{b_q}, \alpha\rangle (k_3'\langle \mathbf{b_q}, \alpha\rangle - 2k_2k_3\langle \mathbf{t}, \alpha\rangle + 2k_3^2\langle \mathbf{n_q}, \alpha\rangle)}{\langle \mathbf{b_q}, \alpha\rangle^4} = 0$$

ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\frac{k_3'\langle \mathbf{b_q}, \alpha\rangle - 2k_2k_3\langle \mathbf{t}, \alpha\rangle + 2k_3^2\langle \mathbf{n_q}, \alpha\rangle}{\langle \mathbf{b_q}, \alpha\rangle^3} = 0$$

olarak bulunur. Buradan

$$k_3'\langle \mathbf{b_q}, \alpha\rangle - 2k_2k_3\langle \mathbf{t}, \alpha\rangle + 2k_3^2\langle \mathbf{n_q}, \alpha\rangle = 0$$

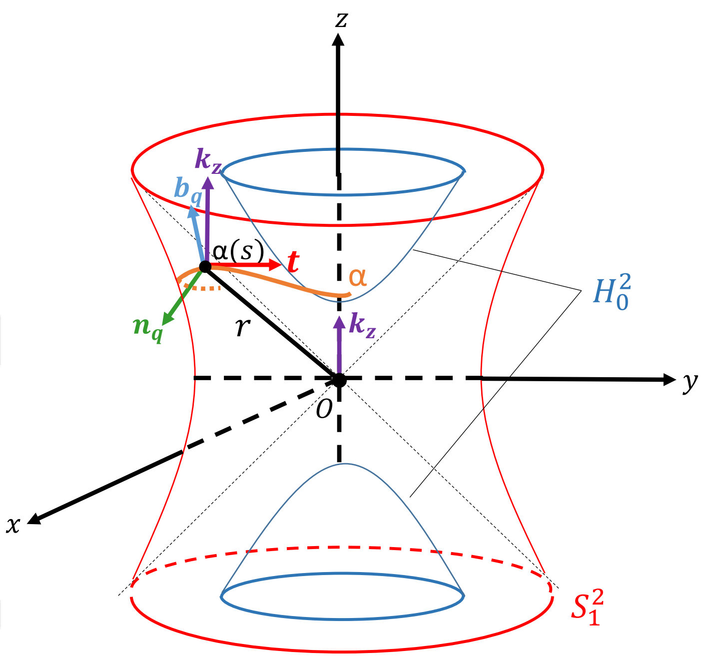
elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 5.5: Bulunan bu ifade, 3-boyutlu Öklid uzayındaki q-çatı ile yapılan hesaplardaki (4.32) ifadesinden ve 3-boyutlu Minkowski uzayında spacelike eğriler için elde edilen (5.4) ifadesinden, $\langle \mathbf{t}, \alpha\rangle$ ifadesinin önündeki işaret bakımından farklıdır. Eğrinin küresel eğri olması durumu, küresel eğri hesaplamalarının ardından Sonuç 5.6 ifadesinde verilecektir. Eğri, küresel eğri olmasa bile k_2 ile k_3 q-eğriliklerinden en az birinin sıfır olması durumunda Öklid uzayındaki Frenet çatı ile yapılan (4.8) ifadesi ile benzerlik göstermektedir.

Küre üzerindeki bir timelike eğri için q çatı yardımıyla bileşenlerini yazalım. Yani q-çatı için timelike küresel eğri

$$\alpha(s) = s_1\mathbf{t}(s) + s_2\mathbf{n_q}(s) + s_3\mathbf{b_q}(s)$$

olmak üzere s_1, s_2 ve s_3 katsayılarını bulalım.



Şekil 5.4 Minkowski 3-uzayda q-çatı için timelike küresel eğri

α birim hızlı bir timelike eğri olmak üzere, yarıçapı r olan küre için

$$\left\|\overrightarrow{O\alpha}\right\| = r$$

olup norm tanımından

$$\left\langle\overrightarrow{O\alpha}, \overrightarrow{O\alpha}\right\rangle = r^2$$

yazılabilir. Burada $\alpha(s) \in S_1^2$ olduğundan

$$\langle\alpha, \alpha\rangle = r^2$$

bulunur. Bu ifadenin türevi alınırsa

$$\langle\alpha', \alpha\rangle + \langle\alpha, \alpha'\rangle = 0$$

olup iç çarpımın simetrik olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} 2\langle\alpha',\alpha\rangle &= 0 \\ \langle\alpha',\alpha\rangle &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Burada, α birim hızlı eğri olduğundan $\mathbf{t}=\alpha'$ olup bu ifade yerine yazılırsa

$$\langle\mathbf{t},\alpha\rangle = 0 \tag{5.24}$$

elde edilir. Bu ifadenin türevi alınırsa

$$\langle\mathbf{t}',\alpha\rangle + \langle\mathbf{t},\alpha'\rangle = 0$$

ve burada α birim hızlı eğri olduğundan $\mathbf{t}=\alpha'$ olduğu kullanılır ve (5.19) ifadesindeki q-çatının Frenet formülleri benzeri varyasyon denkleminden $\mathbf{t}'$ ifadesi yerine yazılırsa

$$\langle k_1\mathbf{n_q} + k_2\mathbf{b_q},\alpha\rangle + \langle\mathbf{t},\mathbf{t}\rangle = 0$$

olup $\mathbf{t}$ timelike birim teğet vektör olduğundan $\langle\mathbf{t},\mathbf{t}\rangle = -1$ ve iç çarpımın lineer olduğu kullanılırsa

$$k_1\langle\mathbf{n_q},\alpha\rangle + k_2\langle\mathbf{b_q},\alpha\rangle - 1 = 0$$

elde edilir. Böylece

$$k_1\langle\mathbf{n_q},\alpha\rangle + k_2\langle\mathbf{b_q},\alpha\rangle = 1 \tag{5.25}$$

bulunur. Bu ifadenin türevi alınırsa

$$\begin{aligned} k_1'\langle\mathbf{n_q},\alpha\rangle + k_1(\langle\mathbf{n_q},\alpha\rangle)' + k_2'\langle\mathbf{b_q},\alpha\rangle + k_2(\langle\mathbf{b_q},\alpha\rangle)' &= 0 \\ k_1'\langle\mathbf{n_q},\alpha\rangle + k_1(\langle\mathbf{n_q}',\alpha\rangle + \langle\mathbf{n_q},\alpha'\rangle) + k_2'\langle\mathbf{b_q},\alpha\rangle + k_2(\langle\mathbf{b_q}',\alpha\rangle + \langle\mathbf{b_q},\alpha'\rangle) &= 0 \end{aligned}$$

olup α birim hızlı eğri olduğundan $\mathbf{t}=\alpha'$ olduğu kullanılır ve (5.19) ifadesindeki q-çatının Frenet formülleri benzeri varyasyon denkleminden $\mathbf{n_q}'$ ve $\mathbf{b_q}'$ ifadeleri yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & k_1'\langle\mathbf{n_q},\alpha\rangle + k_1(\langle k_1\mathbf{t} + k_3\mathbf{b_q},\alpha\rangle + \langle\mathbf{n_q},\mathbf{t}\rangle) \\ & +k_2'\langle\mathbf{b_q},\alpha\rangle + k_2(\langle k_2\mathbf{t} - k_3\mathbf{n_q},\alpha\rangle + \langle\mathbf{b_q},\mathbf{t}\rangle) = 0 \end{aligned}$$

bulunur. Burada, **t,** $\mathbf{n_q}$ ve $\mathbf{b_q}$ vektörleri ortonormal vektörler olduğundan $\langle\mathbf{n_q},\mathbf{t}\rangle = \langle\mathbf{b_q},\mathbf{t}\rangle = 0$ ve iç çarpımın lineer olması kullanılırsa

$$k_1'\langle\mathbf{n_q},\alpha\rangle - k_1^2\langle\mathbf{t},\alpha\rangle - k_1k_3\langle\mathbf{b_q},\alpha\rangle - k_2'\langle\mathbf{b_q},\alpha\rangle + k_2^2\langle\mathbf{t},\alpha\rangle + k_2k_3\langle\mathbf{n_q},\alpha\rangle = 0$$

olup (5.24) ifadesi kullanılırsa

$$k_1'\langle\mathbf{n_q},\alpha\rangle - k_1k_3\langle\mathbf{b_q},\alpha\rangle - k_2'\langle\mathbf{b_q},\alpha\rangle + k_2k_3\langle\mathbf{n_q},\alpha\rangle = 0$$

ve eşitlik düzelenirse

$$\langle \mathbf{n_q},\alpha\rangle\,(k_1' + k_2k_3) - \langle \mathbf{b_q},\alpha\rangle\,(k_2' + k_1k_3) = 0 \tag{5.26}$$

bulunur. Bulunan bu son eşitlik ile (5.25) eşitliği arasında yok etme metodu kullanılırsa yani (5.25) eşitliği $(k_2'+k_1k_3)$ ifadesi ile (5.26) eşitliği de $-k_2$ ile çarpılır ve bu eşitlikler toplanırsa

$$\begin{aligned}
(k_2' + k_1k_3)k_1\,\langle \mathbf{n_q},\alpha\rangle - k_2(k_1' - k_2k_3)\,\langle \mathbf{n_q},\alpha\rangle &= (k_2' + k_1k_3)\\
(k_1k_2' + k_1^2k_3 - k_2k_1' + k_2^2k_3)\,\langle \mathbf{n_q},\alpha\rangle &= (k_2' + k_1k_3)\\
(k_1(k_2' + k_1k_3) + k_2(-k_1' + k_2k_3))\,\langle \mathbf{n_q},\alpha\rangle &= (k_2' + k_1k_3)
\end{aligned}$$

olup her iki taraf $k_2' + k_1k_3$ ifadesine bölünürse

$$\begin{aligned}
((k_1(k_2' + k_1k_3) + k_2(-k_1' + k_2k_3))\,\langle \mathbf{n_q},\alpha\rangle)\frac{1}{k_2' + k_1k_3} &= \frac{(k_2' + k_1k_3)}{(k_2' + k_1k_3)}\\
(\frac{k_1(k_2' + k_1k_3)}{k_2' + k_1k_3} + k_2\frac{(-k_1' + k_2k_3)}{k_2' + k_1k_3})\,\langle \mathbf{n_q},\alpha\rangle &= 1
\end{aligned}$$

ve bu ifade düzenlenirse

$$\langle \mathbf{n_q},\alpha\rangle = \frac{1}{\left(k_1 + k_2\dfrac{(-k_1' + k_2k_3)}{k_2' + k_1k_3}\right)}$$

elde edilir ve

$$\langle \mathbf{n_q},\alpha\rangle = -\frac{1}{\left(-k_1 - k_2\dfrac{(-k_1' + k_2k_3)}{k_2' + k_1k_3}\right)} \tag{5.27}$$

şeklinde düzenlenirse

$$\langle \mathbf{n_q},\alpha\rangle = -s_2 \tag{5.28}$$

olarak bulunur. Şimdi (5.26) eşitliği ile (5.25) eşitliği arasında yok etme metodu kullanılırsa yani (5.25) eşitliği $(k_1' - k_2k_3)$ ifadesi ile (5.26) eşitliği de $-k_1$ ile çarpılır ve bu eşitlikler toplanırsa

$$\begin{aligned}
(k_2(k_1' - k_2k_3) - k_1(k_2' + k_1k_3))\,\langle \mathbf{b_q},\alpha\rangle &= k_1' - k_2k_3\\
(k_2k_1' - k_2^2k_3 - k_1k_2' - k_1^2k_3)\,\langle \mathbf{b_q},\alpha\rangle &= k_1' - k_2k_3\\
(k_2(k_1' - k_2k_3) - k_1(k_2' + k_1k_3))\,\langle \mathbf{b_q},\alpha\rangle &= k_1' - k_2k_3
\end{aligned}$$

olup her iki taraf $k_1' - k_2k_3$ ifadesine bölünürse

$$\begin{aligned}
(k_2(k_1' - k_2k_3) - k_1(k_2' + k_1k_3))\,\langle \mathbf{b_q},\alpha\rangle)\frac{1}{k_1' - k_2k_3} &= \frac{k_1' - k_2k_3}{k_1' - k_2k_3}\\
k_2\frac{(k_1' - k_2k_3)}{k_1' - k_2k_3}\,\langle \mathbf{b_q},\alpha\rangle - k_1\frac{(k_2' + k_1k_3)}{k_1' - k_2k_3}\,\langle \mathbf{b_q},\alpha\rangle &= 1
\end{aligned}$$

ve bu ifade düzenlenirse

$$\left(k_2 - k_1\frac{(k_2' + k_1k_3)}{k_1' - k_2k_3}\right)\langle \mathbf{b_q},\alpha\rangle = 1$$

bulunur. Böylece

$$\langle \mathbf{b_q},\alpha\rangle = \frac{1}{\left(k_2 - k_1\dfrac{(k_2' + k_1k_3)}{k_1' - k_2k_3}\right)} \tag{5.29}$$

elde edilmiş olur.

Ayrıca (5.28) ifadesi yani $\langle \mathbf{n_q},\alpha\rangle = -s_2$ ifadesinin türevi alınırsa

$$\left\langle \mathbf{n_q'},\alpha\right\rangle + \langle \mathbf{n_q},\alpha'\rangle = -s_2'$$

olup burada α birim hızlı eğri olduğundan $\mathbf{t} = \alpha'$ eşitliği kullanılırsa

$$\left\langle \mathbf{n_q'},\alpha\right\rangle + \langle \mathbf{n_q},\mathbf{t}\rangle = -s_2'$$

bulunur. Burada **t** ile $\mathbf{n_q}$ vektörleri ortonormal vektörler olduğundan $\langle \mathbf{n_q},\mathbf{t}\rangle = 0$ ve (5.19) ifadesindeki q-çatının Frenet formülleri benzeri varyasyon denkleminden $\mathbf{n_q'}$ ifadesi yerine yazılırsa

$$\langle k_1\mathbf{t} + k_3\mathbf{b_q},\alpha\rangle = -s_2'$$

ve iç çarpımın lineer olduğu kullanılırsa

$$k_1\langle \mathbf{t},\alpha\rangle + k_3\langle \mathbf{b_q},\alpha\rangle = -s_2'$$

olup (5.24) ifadesinden

$$k_3\langle \mathbf{b_q},\alpha\rangle = -s_2'$$

ve böylece

$$\langle \mathbf{b_q},\alpha\rangle = -\frac{s_2'}{k_3} = -s_3 \tag{5.30}$$

bulunmuş olur.

(5.27) ve (5.28) ifadelerinden

$$s_2 = \frac{1}{-k_1 - \dfrac{k_2(-k_1' + k_2k_3)}{k_2' + k_1k_3}} \tag{5.31}$$

yazılabilir. Bu eşitlik düzenlenirse

$$s_2 = \frac{k_2' + k_1k_3}{-k_1k_2' - k_1^2k_3 + k_2k_1' - k_2^2k_3} \tag{5.32}$$

bulunur. Her iki tarafın türevi alınırsa

$$
\begin{aligned}
s_2' &= \frac{(k_2'+k_1k_3)'(-k_1k_2'-k_1^2k_3+k_2k_1'-k_2^2k_3)}{(-k_1k_2'-k_1^2k_3+k_2k_1'-k_2^2k_3)^2} \\
&\quad - \frac{(k_2'+k_1k_3)(-k_1k_2'-k_1^2k_3+k_2k_1'-k_2^2k_3)'}{(-k_1k_2'-k_1^2k_3+k_2k_1'-k_2^2k_3)^2} \\
&= \frac{(k_2''+k_1'k_3+k_1k_3')(-k_1k_2'-k_1^2k_3+k_2k_1'-k_2^2k_3)}{(-k_1k_2'-k_1^2k_3+k_2k_1'-k_2^2k_3)^2} \\
&\quad - \frac{(k_2'+k_1k_3)(-k_1'k_2'-k_1k_2''-2k_1k_1'k_3-k_1^2k_3'+k_2'k_1'+k_2k_1''-2k_2k_2'k_3-k_2^2k_3')}{(-k_1k_2'-k_1^2k_3+k_2k_1'-k_2^2k_3)^2}
\end{aligned}
$$

olup bu ifadede sadeleştirme yapılırsa

$$
\begin{aligned}
s_2' &= \frac{(k_2''+k_1'k_3+k_1k_3')(-k_1k_2'-k_1^2k_3+k_2k_1'-k_2^2k_3)}{(-k_1k_2'-k_1^2k_3+k_2k_1'-k_2^2k_3)^2} \\
&\quad - \frac{(k_2'+k_1k_3)(k_1k_2''+2k_1k_1'k_3+k_1^2k_3'-k_2k_1''-2k_2k_2'k_3-k_2^2k_3')}{(-k_1k_2'-k_1^2k_3+k_2k_1'-k_2^2k_3)^2}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Şimdi, pay kısmındaki parantez içindeki ifadeler dağıtılırsa

$$
\begin{aligned}
s_2' &= \frac{1}{(-k_1k_2'-k_1^2k_3+k_2k_1'-k_2^2k_3)^2}[-k_2''k_1k_2'-k_2''k_1^2k_3+k_2''k_2k_1'-k_2''k_2^2k_3 \\
&\quad -k_1'k_3k_1k_2'-k_1'k_3^2k_1^2+(k_1')^2k_3k_2-k_1'k_3^2k_2^2 \\
&\quad +k_1^2k_3'k_2'+k_3'k_1^3k_3-k_1k_3'k_2k_1'-k_1k_3'k_2^2k_3 \\
&\quad +k_2'k_1k_2''+2k_2'k_1k_1'k_3+k_2'k_1^2k_3'-k_2'k_2k_1''+2(k_2')^2k_2k_3+k_2'k_2^2k_3' \\
&\quad +k_1^2k_3k_2''+2k_1^2k_3^2k_1'+k_3k_1^3k_3'-k_1k_3k_2k_1''+2k_1k_3^2k_2k_2'+k_1k_3k_2^2k_3']
\end{aligned}
$$

olup gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$
\begin{aligned}
s_2' &= \frac{1}{(-k_1k_2'-k_1^2k_3+k_2k_1'-k_2^2k_3)^2}[k_2''k_2k_1'-k_2''k_2^2k_3+k_1'k_3k_1k_2' \\
&\quad +k_1'k_3^2k_1^2+(k_1')^2k_3k_2-k_1'k_3^2k_2^2+k_1k_3'k_2k_1'-k_2'k_2k_1''+2(k_2')^2k_2k_3 \\
&\quad +k_2'k_2^2k_3'-k_1k_3k_2k_1''+2k_1k_3^2k_2k_2']
\end{aligned}
$$

şeklinde bulunur. Burada ortak terimler, paranteze alınırsa

$$
\begin{aligned}
s_2' &= \frac{1}{(-k_1k_2'-k_1^2k_3+k_2k_1'-k_2^2k_3)^2}[k_1'k_3^2(k_1^2-k_2^2)+k_1'k_1(k_2'k_3+k_3'k_2) \\
&\quad +k_1'k_2k_2''+k_2'k_2(2k_1k_3^2-k_1''+k_2k_3') \\
&\quad -k_2k_3(-(k_1')^2-2(k_2')^2+k_1''k_1+k_2''k_2)]
\end{aligned}
$$

ve düzenlenirse

$$\begin{aligned} s_2' &= \frac{1}{(-k_1k_2' - k_1^2k_3 + k_2k_1' - k_2^2k_3)^2}[k_1'(k_3^2(k_1^2 - k_2^2) + k_1(k_2k_3)' + k_2k_2'') \\ &\quad +k_2'k_2(2k_1k_3^2 - k_1'' + k_2k_3') \\ &\quad -k_2k_3(-(k_1')^2 - 2(k_2')^2 + k_1''k_1 + k_2''k_2)] \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bu ifadenin her iki tarafı k_3 ifadesine bölünürse

$$\begin{aligned} \frac{s_2'}{k_3} &= \frac{1}{(-k_1k_2' - k_1^2k_3 + k_2k_1' - k_2^2k_3)^2}[k_1'(k_3(k_1^2 - k_2^2) + k_1k_2'/k_3 + (k_1k_2k_3{}')/k_3 \\ &\quad (k_2k_2'')/k_3) + k_2'k_2(2k_1k_3 - k_1''/k_3 + (k_2k_3')/k_3) \\ &\quad -k_2(-(k_1')^2 - 2(k_2')^2 + k_1''k_1 + k_2''k_2)] \end{aligned}$$

bulunur.

Sonuç 5.6 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_1^3$, $\mathbb{R}_1^3$ uzayında birim hızlı bir timelike eğri olsun. α bir küresel Tzitzeica eğrisi ise

$$k_3' \langle \mathbf{b_q}, \alpha \rangle + 2k_3^2 \langle \mathbf{n_q}, \alpha \rangle = 0$$

denklemi geçerlidir. Dikkat edilirse, bu ifade Öklid uzayındaki Frenet çatı ile yapılan (4.8) ifadesine benzemektedir.

Teorem 5.7: $M \subset \mathbb{R}_1^3$ timelike eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ ya karşılık gelen $\alpha(s)$ noktasındaki q-vektörler $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n_q}(s), \mathbf{b_q}(s)\}$ olmak üzere, M ile sonsuz yakın üç ortak noktası olan kürelerin merkezlerinin geometrik yeri

$$a(s) = \alpha(s) + s_2(s)\mathbf{n_q}(s) + \lambda \mathbf{b_q}(s)$$

şeklindedir. Burada $s_2 : I \longrightarrow \mathbb{R}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ dir.

İspat (I, α) koordinat komşuluğu, M için yay-parametresi olarak verilsin. $\alpha(s) \in M$ noktasında, M ile sonsuz yakın üç ortak noktası olan bir kürenin merkezi a ve yarıçapı r olsun. Buna göre,

$$\begin{aligned} f \ : \ I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ s &\longrightarrow f(s) = \langle a - \alpha(s), a - \alpha(s) \rangle - r^2 \end{aligned}$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. $a(s)$ noktasında M eğrisinin,

$$S_1^2 = \{x \mid x \in \mathbb{R}_1^3, \langle x - a, x - a \rangle = r^2\}$$

şeklinde tanımlı küreleri ile sonsuz yakın üç noktasının ortak olması için

$$f(s) = f'(s) = f''(s) = 0$$

olmalıdır. Buna göre, $f(s) = 0$ olması için

$$\langle a - \alpha(s), a - \alpha(s) \rangle = r^2$$

olmalıdır. Bu ifadenin türevi alınırsa, $f'(s) = 0$ olup

$$\langle \alpha'(s), a - \alpha(s) \rangle + \langle a - \alpha(s), \alpha'(s) \rangle = 0$$

iç çarpımın simetrik ve lineer olduğu kullanılırsa

$$2 \langle \alpha'(s), a - \alpha(s) \rangle = 0$$

ve buradan da

$$\langle \alpha'(s), a - \alpha(s) \rangle = 0$$

olup α birim hızlı bir timelike eğri olduğundan $\mathbf{t}(s) = \alpha'(s)$ değeri yerine yazılırsa

$$\langle \mathbf{t}(s), a - \alpha(s) \rangle = 0 \tag{5.33}$$

bulunur. Bu ifadenin türevi alınırsa, $f''(s) = 0$ olup

$$\langle \mathbf{t}'(s), a - \alpha(s) \rangle + \langle \mathbf{t}(s), \alpha'(s) \rangle = 0$$

olup $\alpha(s)$ birim hızlı bir timelike eğri olduğundan $\mathbf{t}(s) = \alpha'(s)$ değeri yerine yazılır ve (5.19) ifadesindeki q-çatının Frenet benzeri varyasyon denklemi kullanılırsa

$$\langle k_1(s)\mathbf{n_q}(s) + k_2(s)\mathbf{b_q}(s), a - \alpha(s) \rangle + \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{t}(s) \rangle = 0$$

burada $\mathbf{t}(s)$, birim teğet vektörü timelike olduğundan $\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{t}(s) \rangle = -1$ ve iç çarpımın lineer olduğu kullanılırsa

$$k_1(s) \langle \mathbf{n_q}(s), a - \alpha(s) \rangle - k_2(s) \langle \mathbf{b_q}(s), a - \alpha(s) \rangle - 1 = 0$$

elde edilir. Diğer taraftan, $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n_q}(s), \mathbf{b_q}(s)\}$ bazı için

$$a - \alpha(s) = s_1(s)\mathbf{t}(s) + s_2(s)\mathbf{n_q}(s) + s_3(s)\mathbf{b_q}(s) \tag{5.34}$$

yazılabilir, burada $s_i(s) \in \mathbb{R}$ dir. Eşitliğin her iki tarafı $\mathbf{t}(s)$ ile iç çarpılırsaırsa

$$\langle a - \alpha(s), \mathbf{t}(s) \rangle = \langle s_1(s)\mathbf{t}(s) + s_2(s)\mathbf{n_q}(s) + s_3(s)\mathbf{b_q}(s), \mathbf{t}(s) \rangle$$

olup, iç çarpımın lineer olduğu kullanılırsa

$$\langle a-\alpha(s),\mathbf{t}(s)\rangle = s_1(s)\langle \mathbf{t}(s),\mathbf{t}(s)\rangle + s_2(s)\langle \mathbf{n_q}(s),\mathbf{t}(s)\rangle + s_3(s)\langle \mathbf{b_q}(s),\mathbf{t}(s)\rangle$$

burada $\mathbf{t}(s)$ birim teğet vektörü timelike olduğundan $\langle \mathbf{t}(s),\mathbf{t}(s)\rangle = -1$ ve $\mathbf{t}(s)$, $\mathbf{n_q}(s)$ ve $\mathbf{b_q}(s)$ vektörleri ortonormal vektörler olduğundan $\langle \mathbf{n_q}(s),\mathbf{t}(s)\rangle = 0$ ve $\langle \mathbf{b_q}(s),\mathbf{t}(s)\rangle = 0$ olduğu yerine yazılırsa

$$\langle a-\alpha(s),\mathbf{t}(s)\rangle = -s_1(s)$$

olup (5.33) ifadesinden

$$s_1(s) = 0 \tag{5.35}$$

bulunur. (5.34) eşitliğinin her iki tarafı $\mathbf{n_q}(s)$ ile iç çarpılırsa

$$\langle a-\alpha(s),\mathbf{n_q}(s)\rangle = \langle s_1(s)\mathbf{t}(s) + s_2(s)\mathbf{n_q}(s) + s_3(s)\mathbf{b_q}(s),\mathbf{n_q}(s)\rangle$$

olup, iç çarpımın lineer olduğu kullanılırsa

$$\langle a-\alpha(s),\mathbf{n_q}(s)\rangle = s_1(s)\langle \mathbf{t}(s),\mathbf{n_q}(s)\rangle + s_2(s)\langle \mathbf{n_q}(s),\mathbf{n_q}(s)\rangle + s_3(s)\langle \mathbf{b_q}(s),\mathbf{n_q}(s)\rangle$$

burada $\mathbf{n_q}(s)$ birim quasi-normal vektörü spacelike olduğundan $\langle \mathbf{n_q}(s),\mathbf{n_q}(s)\rangle = 1$ ve $\mathbf{t}(s)$, $\mathbf{n_q}(s)$ ve $\mathbf{b_q}(s)$ vektörleri ortonormal vektörler olduğundan $\langle \mathbf{t}(s),\mathbf{n_q}(s)\rangle = 0$ ve $\langle \mathbf{b_q}(s),\mathbf{n_q}(s)\rangle = 0$ olduğu yerine yazılırsa

$$\langle a-\alpha(s),\mathbf{n_q}(s)\rangle = s_2(s)$$

bulunur. (5.34) eşitliğinin her iki tarafı $\mathbf{b_q}(s)$ ile iç çarpılırsa

$$\langle a-\alpha(s),\mathbf{b_q}(s)\rangle = \langle s_1(s)\mathbf{t}(s) + s_2(s)\mathbf{n_q}(s) + s_3(s)\mathbf{b_q}(s),\mathbf{b_q}(s)\rangle$$

olup, iç çarpımın lineer olduğu kullanılırsa

$$\langle a-\alpha(s),\mathbf{b_q}(s)\rangle = s_1(s)\langle \mathbf{t}(s),\mathbf{b_q}(s)\rangle + s_2(s)\langle \mathbf{n_q}(s),\mathbf{b_q}(s)\rangle + s_3(s)\langle \mathbf{b_q}(s),\mathbf{b_q}(s)\rangle$$

burada $\mathbf{b_q}(s)$ birim quasi binormal vektörü spacelike olduğundan $\langle \mathbf{b_q}(s),\mathbf{b_q}(s)\rangle = 1$ ve $\mathbf{t}(s)$, $\mathbf{n_q}(s)$ ve $\mathbf{b_q}(s)$ vektörleri ortonormal vektörler olduğundan $\langle \mathbf{t}(s),\mathbf{b_q}(s)\rangle = 0$ ve $\langle \mathbf{n_q}(s),\mathbf{b_q}(s)\rangle = 0$ olduğu yerine yazılırsa

$$\langle a-\alpha(s),\mathbf{b_q}(s)\rangle = s_3(s)$$

bulunur.

$$\langle a-\alpha(s), a-\alpha(s)\rangle = r^2$$

eşitliğinde, (5.34) ifadesi kullanılırsa

$$\langle s_1(s)\mathbf{t}(s) + s_2(s)\mathbf{n_q}(s) + s_3(s)\mathbf{b_q}(s), s_1(s)\mathbf{t}(s) + s_2(s)\mathbf{n_q}(s) + s_3(s)\mathbf{b_q}(s)\rangle = r^2$$

olup burada iç çarpımın simetrik ve lineer olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} & s_1^2(s)\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{t}(s)\rangle + s_1(s)s_2(s)\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n_q}(s)\rangle + s_1(s)s_3(s)\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{b_q}(s)\rangle \\ & + s_1(s)s_2(s)\langle \mathbf{n_q}(s), \mathbf{t}(s)\rangle + s_2^2(s)\langle \mathbf{n_q}(s), \mathbf{n_q}(s)\rangle + s_2(s)s_3(s)\langle \mathbf{n_q}(s), \mathbf{b_q}(s)\rangle \\ & + s_1(s)s_3(s)\langle \mathbf{b_q}(s), \mathbf{t}(s)\rangle + s_2(s)s_3(s)\langle \mathbf{b_q}(s), \mathbf{n_q}(s)\rangle + s_3^2(s)\langle \mathbf{b_q}(s), \mathbf{b_q}(s)\rangle = r^2 \end{aligned}$$

elde edilir. $\mathbf{b_q}(s)$ ve $\mathbf{n_q}(s)$ birim spacelike vektörleri için $\langle \mathbf{b_q}(s), \mathbf{b_q}(s)\rangle = \langle \mathbf{n_q}(s), \mathbf{n_q}(s)\rangle = 1$, $\mathbf{t}(s)$ timelike birim vektörü için $\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{t}(s)\rangle = -1$ ve bu vektörler ortonormal olduğundan $\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{b_q}(s)\rangle = \langle \mathbf{n_q}(s), \mathbf{b_q}(s)\rangle = \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n_q}(s)\rangle = 0$ olduğu yerine yazılırsa

$$-s_1^2(s) + s_2^2(s) + s_3^2(s) = r^2$$

olur. (5.35) ifadesi kullanılırsa

$$s_2^2(s) + s_3^2(s) = r^2$$

ve buradan da

$$s_3^2(s) = r^2 - s_2^2(s)$$

bulunur. (5.31) eşitliğinden $s_2(s)$ yerine yazılırsa

$$s_3 = \mp\sqrt{r^2 - \left(\frac{k_2' + k_1k_3}{-k_1(k_2' + k_1k_3) - k_2(-k_1' + k_2k_3)}\right)^2}$$

reel değerli ifadesi elde edilmiş olur. $\lambda = s_3(s)$ reel değerli ifadesi ve $1 \leq i \leq 3$ için bulunan s_i değerleri, (5.34) denkleminde yerlerine yazılırsa

$$a - \alpha(s) = s_2(s)\mathbf{n_q}(s) + \lambda\mathbf{b_q}(s)$$

bulunur. Bu ifade düzenlenirse

$$a = \alpha(s) + s_2(s)\mathbf{n_q}(s) + \lambda\mathbf{b_q}(s)$$

şeklinde, kürelerin merkezlerinin geometrik yerinin denklemi elde edilir.

Sonuç 5.7 Teorem 5.7 ifadesi ile Teorem 5.3 ve Teorem 4.12 ifadeleri şekilsel olarak benzer gözükseler de Teorem 5.7 ifadesinde yer alan küresel eğri denkleminin katsayılarından olan $s_2(s) \in \mathbb{R}$ ile $\lambda \in \mathbb{R}$ katsayılarının içerikleri ile Teorem 5.3 ve Teorem 4.2 ifadelerinde yer alan küresel eğri denkleminin katsayılarından olan $s_2(s) \in \mathbb{R}$ ile $\lambda \in \mathbb{R}$ katsayılarının içerikleri birbirlerinden farklıdır. Her üç teorem ifadesinde $s_2(s) \in \mathbb{R}$ ile $\lambda \in \mathbb{R}$ katsayıları yerine yazıldığında fark daha da belirginleşmektedir.

Teorem 5.8: $M \subset \mathbb{R}_1^3$ timelike eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s_3 \neq 0$, $k_3 \neq 0$ olmak üzere $\forall s \in I$ için $\alpha(s)$ noktasında $k_2 = 0$ iken oskülatör kürenin yarıçapı sabittir $\Longleftrightarrow$ oskülatör kürelerin merkezleri aynıdır.

İspat ($\Longrightarrow$) Öncelikle $\alpha(s) \in M$ noktasındaki oskülatör kürenin yarıçapı r ve $\lambda = s_3(s)$ olmak üzere oskülatör küre merkezi

$$a(s) = \alpha(s) + s_2(s)\mathbf{n_q}(s) + s_3(s)\mathbf{b_q}(s)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} r &= \|\overrightarrow{\alpha a}\| \\ &= \|a - \alpha(s)\| \\ &= \|\alpha(s) + s_2(s)\mathbf{n_q}(s) + s_3(s)\mathbf{b_q}(s) - \alpha(s)\| \\ &= \sqrt{\langle s_2(s)\mathbf{n_q}(s) + s_3(s)\mathbf{b_q}(s), s_2(s)\mathbf{n_q}(s) + s_3(s)\mathbf{b_q}(s)\rangle} \\ &= \sqrt{\begin{array}{l} \langle s_2(s)\mathbf{n_q}(s), s_2(s)\mathbf{n_q}(s)\rangle + \langle s_2(s)\mathbf{n_q}(s), s_3(s)\mathbf{b_q}(s)\rangle \\ + \langle s_3(s)\mathbf{b_q}(s), s_2(s)\mathbf{n_q}(s)\rangle + \langle s_3(s)\mathbf{b_q}(s), s_3(s)\,\mathbf{b_q}(s)\rangle \end{array}} \end{aligned}$$

bulunur ve burada iç çarpımın lineer ve simetrik olma özellikleri kullanılırsa

$$r = \sqrt{s_2^2(s)\,\langle \mathbf{n}_q(s), \mathbf{n}_q(s)\rangle + 2s_2(s)s_3(s)\,\langle \mathbf{n}_q(s), \mathbf{b}_q(s)\rangle + s_3^2(s)\,\langle \mathbf{b}_q(s), \mathbf{b}_q(s)\rangle}$$

olup burada $\mathbf{n_q}(s)$ ile $\mathbf{b_q}(s)$ vektörleri ortonormal olduğundan $\langle \mathbf{n_q}(s), \mathbf{b_q}(s)\rangle = 0$, $\mathbf{n_q}(s)$ birim spacelike vektör olup $\langle \mathbf{n_q}(s), \mathbf{n_q}(s)\rangle = 1$ ve $\mathbf{b_q}(s)$ spacelike birim vektörü için $\langle \mathbf{b_q}(s), \mathbf{b_q}(s)\rangle = 1$ değerleri yerlerine yazılırsa

$$r = \sqrt{s_2^2(s) + s_3^2(s)}$$

ve buradan

$$r^2 = s_2^2(s) + s_3^2(s)$$

bulunur. $r = sbt$ ise türev alınırsa

$$\begin{aligned} 2s_2(s)s_2'(s) + 2s_3(s)s_3'(s) &= 0 \\ 2(s_2(s)s_2'(s) + s_3(s)s_3'(s)) &= 0 \\ s_2(s)s_2'(s) + s_3(s)s_3'(s) &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Burada (5.30) ifadesindeki $s_3(s) = \dfrac{s_2'(s)}{k_3(s)}$ değeri yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} s_2(s)s_2'(s) + \frac{s_2'(s)}{k_3(s)}s_3'(s) &= 0 \\ \frac{k_3(s)s_2(s)s_2'(s) + s_2'(s)s_3'(s)}{k_3(s)} &= 0 \\ k_3(s)s_2(s)s_2'(s) + s_2'(s)s_3'(s) &= 0 \\ s_2'(s)(k_3(s)s_2(s) + s_3'(s)) &= 0 \end{aligned}$$

olup teorem ifadesinde $s_3(s) \neq 0$ ve dolayısıyla $s_2'(s) \neq 0$ olacağından

$$k_3(s)s_2(s) + s_3'(s) = 0 \tag{5.36}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$a(s) = \alpha(s) + s_2(s)\mathbf{n_q}(s) + s_3(s)\mathbf{b_q}(s)$$

olduğundan

$$D_{\dot{\alpha}}a(s) = \alpha'(s) + s_2'(s)\mathbf{n_q}(s) + s_2(s)\mathbf{n_q}'(s) + s_3'(s)\mathbf{b_q}(s) + s_3(s)\mathbf{b_q}'(s)$$

olup burada α birim hızlı bir timelike eğri olduğundan $\alpha'(s) = \mathbf{t}(s)$ ve (5.19) ifadesindeki q-çatının Frenet formülleri benzeri varyasyon denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned} D_{\dot{\alpha}}a(s) &= \mathbf{t}(s) + s_2'(s)\mathbf{n_q}(s) + s_2(s)(k_1(s)\mathbf{t}(s) + k_3(s)\mathbf{b_q}(s)) + s_3'(s)\mathbf{b_q}(s) \\ &\quad + s_3(s)(k_2(s)\mathbf{t}(s) - k_3(s)\mathbf{n_q}(s)) \end{aligned}$$

olup bu ifade düzenlenirse

$$\begin{aligned} D_{\dot{\alpha}}a(s) &= \mathbf{t}(s) + s_2'(s)\mathbf{n_q}(s) + s_2(s)k_1(s)\mathbf{t}(s) + s_2(s)k_3(s)\mathbf{b_q}(s) \\ &\quad + s_3'(s)\mathbf{b_q}(s) + s_3(s)k_2(s)\mathbf{t}(s) - s_3(s)k_3(s)\mathbf{n_q}(s) \end{aligned}$$

burada (5.30) ifadesinden $s_3(s) = \dfrac{s_2'(s)}{k_3(s)} \Longrightarrow s_2'(s) = s_3(s)k_3(s)$ ifadesi yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} D_{\dot{\alpha}}a(s) &= \mathbf{t}(s) + s_3(s)k_3(s)\mathbf{n_q}(s) + s_2(s)k_1(s)\mathbf{t}(s) + s_2(s)k_3(s)\mathbf{b_q}(s) \\ &\quad + s_3'(s)\mathbf{b_q}(s) + s_3(s)k_2(s)\mathbf{t}(s) - s_3(s)k_3(s)\mathbf{n_q}(s) \end{aligned}$$

bulunup bu ifade düzenlenirse

$$D_{\dot{\alpha}}a(s) = \mathbf{t}(s) + s_2(s)k_1(s)\mathbf{t}(s) + s_2(s)k_3(s)\mathbf{b_q}(s) + s_3'(s)\mathbf{b_q}(s) + s_3(s)k_2(s)\mathbf{t}(s)$$

ve buradan

$$D_{\dot{\alpha}}a(s) = (1 + s_2(s)k_1(s) + s_3(s)k_2(s))\mathbf{t}(s) + (s_2(s)k_3(s) + s_3'(s))\mathbf{b_q}(s)$$

olup (5.32) ifadesinden $s_2(s)$ ifadesini yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} D_{\dot{\alpha}}a(s) &= (1 + \frac{k_2' + k_1k_3}{-k_1k_2' - k_1^2k_3 + k_2k_1' - k_2^2k_3}k_1(s) + s_3(s)k_2(s))\mathbf{t}(s) \\ &\quad + (s_2(s)k_3(s) + s_3'(s))\mathbf{b_q}(s) \end{aligned}$$

ve bu ifade düzenlenirse

$$\begin{aligned} D_{\dot{\alpha}}a(s) &= (\frac{-k_1k_2' - k_1^2k_3 + k_2k_1' - k_2^2k_3 + k_1k_2' + k_1^2k_3}{-k_1k_2' - k_1^2k_3 + k_2k_1' - k_2^2k_3} + s_3(s)k_2(s))\mathbf{t}(s) \\ &\quad + (s_2(s)k_3(s) + s_3'(s))\mathbf{b_q}(s) \end{aligned}$$

ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\begin{aligned} D_{\dot{\alpha}} a(s) &= \Big(\frac{k_2 k_1' - k_2^2 k_3}{-k_1 k_2' - k_1^2 k_3 + k_2 k_1' - k_2^2 k_3} + s_3(s) k_2(s)\Big)\mathbf{t}(s) \\ &\quad + (s_2(s) k_3(s) + s_3'(s))\mathbf{b_q}(s) \end{aligned}$$

olur. (5.30) ifadesinden $\dfrac{s_2'}{k_3} = s_3$ ifadesi yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} D_{\dot{\alpha}} a(s) &= \Big(\frac{k_2 k_1' - k_2^2 k_3}{-k_1 k_2' - k_1^2 k_3 + k_2 k_1' - k_2^2 k_3} + \frac{s_2'}{k_3} k_2(s)\Big)\mathbf{t}(s) \\ &\quad + (s_2(s) k_3(s) + s_3'(s))\mathbf{b_q}(s) \end{aligned}$$

bulunur. Teoremin ifadesinde yer alan $k_2 = 0$ değeri yerine yazılırsa

$$D_{\dot{\alpha}} a(s) = (s_2(s) k_3(s) + s_3'(s))\mathbf{b_q}(s)$$

olup (5.36) denkleminden dolayı $D_{\dot{\alpha}} a(s) = 0$ bulunur. Buradan da $\forall s \in I$ için $a(s) = sabit$ bulunmuş olur.

($\Longleftarrow$) $\forall s \in I$ için $a(s) = sabit$ olsun. $r = \|\overrightarrow{\alpha a}\|$ olduğundan

$$\langle a(s) - \alpha(s), a(s) - \alpha(s) \rangle = r^2(s)$$

ifadesinin s parametresine göre türevi alınırsa

$$\big\langle D_{\dot{\alpha}} a(s), a(s) - \alpha(s) \big\rangle = r(s) \left.\frac{dr}{ds}\right|_s$$

olup $a(s) = sabit$ olduğundan $D_{\dot{\alpha}} a(s) = 0$ bulunur. Böylece

$$r(s) \left.\frac{dr}{ds}\right|_s = 0$$

ve buradan da

$$r(s) = 0 \quad \text{veya} \quad \left.\frac{dr}{ds}\right|_s = 0$$

elde edilir. Eğer $r(s) = 0$ ise

$$r^2 = s_2^2(s) + s_3^2(s) = 0$$

olmalıdır. Bu da

$$s_2^2(s) = s_3^2(s) = 0$$

olması demektir. Ancak bu ifade, teoremin hipotezi ile çelişir. O halde

$$\left.\frac{dr}{ds}\right|_s = 0$$

ve buradan da $\forall s \in I$ için $r(s) = sabit$ bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 5.8: Minkowski 3-uzayında q-çatı yardımıyla ispatlanan teoremler Teorem 5.8 ve Teorem 5.4 de yer alan ifadeler ile 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısı yardımıyla ispatlanan Teorem 4.6 ifadesi karşılaştırıldığında, iki ifade arasındaki fark, Minkowski 3-uzayda q-çatıyla benzer hesaplamalar yapabilmek için $k_2 = 0$ olması durumuna bakılmasıdır.

Örnek 5.1: $\alpha(s) = (s, \cos s, \sin s)$ olmak üzere $\alpha : (-\pi, \pi) \longrightarrow E_1^3$ eğrisinin Tzitzeica eğrisi olup olmadığını inceleyelim.

$\alpha'(s) = (1, -\sin s, \cos s)$ ve buradan

$$\begin{aligned} \langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle &= -1 + (\sin s)^2 + (\cos s)^2 \\ &= -1 + 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

olup $\alpha(s)$ eğrisi bir null eğridir.

$$\alpha''(s) = (0, -\cos s, -\sin s)$$

ve

$$\langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle = (\sin s)^2 + (\cos s)^2 = 1$$

bulunur. $\forall s \in I$ olmak üzere, eğer $\alpha : I \longrightarrow E_1^3$ eğrisi bir null eğri iken $\langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle = 1$ ise α eğrisi pseudo yay uzunluğu parametresine göre verilmiş bir null eğri olarak adlandırılır (Walrave, 1995). Bu durumda α eğrimiz, pseudo yay uzunluğu parametresine göre verilmiş bir null eğridir. Burada Frenet vektörleri

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(s) &= (1, -\sin s, \cos s) \\ \mathbf{n}(s) &= (0, -\cos s, -\sin s) \\ \mathbf{b}(s) &= (1, \sin s, -\cos s) \end{aligned}$$

olarak bulunur. Eğrinin κ eğriliği ise $\kappa(s) = \langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{n}(s) \rangle = 1$ şeklindedir. Bununla birlikte

$$\mathbf{n}'(s) = (0, \sin s, -\cos s)$$

olup eğrinin torsiyonu

$$\tau(s) = \langle \mathbf{n}'(s), \mathbf{b}(s) \rangle = (\sin s)^2 + (\cos s)^2 = 1$$

biçimindedir. Buradan

$$\frac{\tau(s)}{(d_{osc}(s))^2} = \frac{1}{(-s)^2}$$

olduğundan yani sabit olmadığından dolayı α eğrisi bir Tzitzeica eğrisi değildir.

Örnek 5.2: $z = \dfrac{1}{xy}$ yüzeyinin Tzitzeica yüzeyi olup olmadığını inceleyelim.

Yüzeyin I. temel form katsayıları olan E, F ve G katsayıları

$$\begin{aligned} E &= 1 + \frac{1}{x^4y^2} \\ F &= \frac{1}{x^3y^3} \\ G &= 1 + \frac{1}{x^2y^4} \end{aligned}$$

olmak üzere yüzeyin birim normal vektör alanı

$$N = \left(\frac{1}{x^2y\sqrt{1+\frac{1}{x^2y^4}+\frac{1}{x^4y^2}}}, \frac{1}{xy^2\sqrt{1+\frac{1}{x^2y^4}+\frac{1}{x^4y^2}}}, \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2y^4}+\frac{1}{x^4y^2}}}\right)$$

şeklindedir.Yüzeyin şekil operatörünün bileşenleri olan l, m ve n katsayıları

$$\begin{aligned} l &= \frac{2}{x^3y\sqrt{1+\frac{1}{x^2y^4}+\frac{1}{x^4y^2}}} \\ m &= \frac{1}{x^2y^2\sqrt{1+\frac{1}{x^2y^4}+\frac{1}{x^4y^2}}} \\ n &= \frac{1}{xy^3\sqrt{1+\frac{1}{x^2y^4}+\frac{1}{x^4y^2}}} \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Yüzeyin Gauss eğriliği

$$K = \frac{3x^4y^4}{(x^2+y^2+x^4y^4)^2}$$

ve tanjant düzleme olan uzaklığı ise (4.3) denklemi kullanılırsa

$$d_{\text{tan}} = \frac{3}{xy\sqrt{1+\frac{1}{x^2y^4}+\frac{1}{x^4y^2}}}$$

biçiminde bulunur. Buradan (4.2) denklemi için gereken d_{tan}^4 değeri hesaplanırsa

$$d_{\text{tan}}^4 = \frac{81}{x^4y^4\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2y^4}+\frac{1}{x^4y^2}}\right)^4}$$

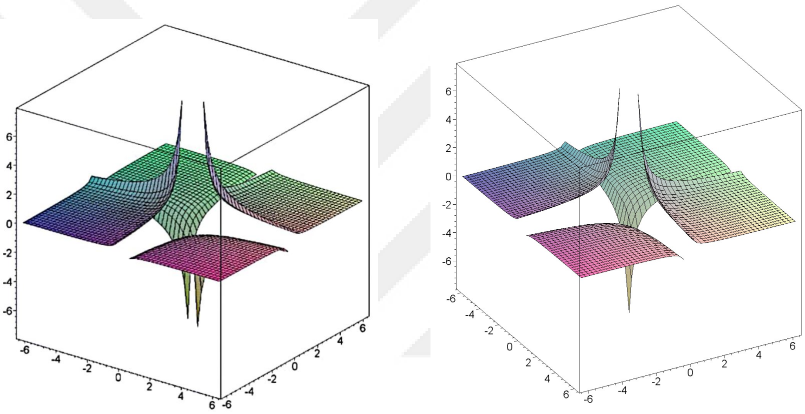
ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$d_{\tan}^4 = \frac{81}{(x^2+y^2+x^4y^4)^2}$$

olup buradan (4.2) denklemi gereğince

$$\frac{K}{d_{\tan}^4} = \frac{1}{27}$$

şeklindedir. Böylece $z = \dfrac{1}{xy}$ yüzeyi bir Tzitzeica yüzeyidir (Agnew vd., 2010). Teorem 4.1 ifadesi göz önüne alınırsa, bu yüzeyin Gauss eğriliği olan $K \geq 0$ olduğundan dolayı bu yüzeyin asimptotik çizgileri bir Tzitzeica eğrisi belirtmemektedir.



Şekil 5.5 $z = \dfrac{1}{xy}$ Tzitzeica yüzeyi

6. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu çalışmada, Dede vd. tarafından 2015 yılında, bir uzay eğrisi boyunca tanımladığı q-çatı yardımıyla bazı özel eğriler ve bu eğrilerin bazı özellikleri incelenmiştir. Bu çatıyı kullanmamızın en önemli sebebi, bu çatının Frenet çatısına göre sağladığı bazı önemli avantajlarının olmasıdır. Bu avantajlardan ilki bu çatının, eğrinin ikinci türevinin tanımsız olduğu durumda da tanımlanabilmesi ve ikincisi de teğet etrafında gereksiz bükülmenin önüne geçmesidir.

Çalışmamızda öncelikle 3-boyutlu Öklid uzayında q-çatı yardımıyla Tzitzeica eğrileri ile küresel eğriler tanımlanmış ve Tzitzeica eğrisi ile küresel eğri olma koşulları verilmiştir. Bununla birlikte küresel Tzitzeica eğrileri için incelemeler yapılmıştır. Sonrasında, 3-boyutlu Minkowski uzayında q-çatı yardımıyla spacelike eğriler için Tzitzeica ve küresel eğri olma koşulları incelenmiştir. Bir eğrinin Tzitzeica eğrisi olması için, orijinden eğrinin keyfi bir noktasındaki oskülatör düzlemine olan uzaklığının karesi ile eğrinin torsiyonunun oranının sıfırdan farklı bir sabit olması gereklidir. Tzitzeica eğrileri olarak adlandırılan eğrilerin bir sınıfı ve Tzitzeica yüzeyleri olarak adlandırılan Öklidyen 3-uzayın yüzeylerinin bir sınıfı, Roman matematikçi Gheorgha Tzitzeica (1872-1939) tarafından tanımlanmıştır. Karacan ve Bükcü tarafından 2009 yılında 3-boyutlu Minkowski uzayında eliptik silindirik Tzitzeica eğrileri, bir harmonik denklemin çözümüne bağlı olarak elde edilmiştir. Ayrıca bir eğrinin spacelike, timelike veya null eliptik silindirik Tzitzeica eğrisi olması için gereken koşullar verilmiştir. Chen'in 2003 yılında yayınlanan makalesinde, 3-boyutlu Öklid uzayında konum vektörü normal düzleminde bulunan eğrilerin küresel eğriler olduğu söylenmiştir. Bobe vd. tarafından 2012'de 3-boyutlu Öklid ve Minkowski uzaylarında Tzitzeica eğri ve yüzeyleri, merkez afin değişmezleri tarafından incelenmiştir. 2012 yılında, Bila tarafından 3-boyutlu Öklid uzayında Tzitzeica eğri denklemi, lineer olmayan bir diferensiyel denklem olarak ele alınmış ve Tzitzeica eğrileri yeniden incelenmiştir. Yine 2012 yılında Bobe vd. tarafından, Minkowski uzaylarında Tzitzeica eğrileri ve yüzeyleri 3 merkez afin değişmez fonksiyonu ile yeniden tanımlanmıştır. Bayram vd. tarafından 2018 yılında 3-boyutlu Öklid uzayında Tzitzeica eğrileri tanımlanmış ve küresel Tzitzeica eğrileri incelenmiştir. Yine 2018 yılında, Özerdem tarafından 3-boyutlu Minkowski uzayında null olmayan, null ve pseudo-null Tzitzeica eğrileri incelenmiştir. Bunlar doğrultusunda çalışmamızda hem Öklidyen 3-uzayda hem de Minkowski 3-uzayında küresel Tzitzeica eğrileri üzerine incelemeler yapılıp bu incelemeler q-çatı üzerinde devam ettirilip q-çatı için küresel eğri, Tzitzeica eğrisi tanımlanmış ve küresel Tzitzeica eğrisi olması durumu incelenmiştir. Bu incelemeler sonucu Frenet çatısı kullanılarak elde edilen sonuçlar ile q-çatı kullanılarak elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır. İki çatı arasındaki yapılan karşılaştırmada, Tzitzeica ve küresel eğrilerle ilgili bulunan sonuçlarda ortaya çıkan hesaplamalar doğrultusunda elde edilen değerlere bakılmış ve bu değerlerin iki çatı için oluşturduğu benzerlikler ve farklılıklar ortaya konulmuştur. Ayrıca gerek Öklidyen 3-uzaydaki küre gerekse Minkowski 3-uzayındaki Lorentz küresi üzerinde incelemeler yapılmış ve bu incelemeler şekiller yardımıyla gösterilmiştir.

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, 3-boyutlu Öklid ve 3-boyutlu Minkowski uzayında temel kavramlar, yapacağımız hesaplamalarda kullanacağımız temel tanımlar ile birlikte teoremlere yer verilmiştir. Öklidyen 3-uzayda ve Minkowski 3-uzayında Frenet çatısı ve hesaplamaları yapacağımız q-çatı tanıtılmış ve bu iki çatı arasındaki ilişki ve bağıntılara değinilmiştir. Üçüncü bölümde verilen bu temel tanımlar ve teoremler yardımıyla dördüncü bölümde hesaplamalarımızın temelini oluşturacak 3-boyutlu Öklid uzayında tanımlanan Tzitzeica, küresel ve küresel Tzitzeica eğrileri tanımları ve bu eğriler için geçerli olan teoremler verilmiş ve devamında 3-boyutlu Öklid uzayında q-çatı için Tzitzeica eğrisi ve küresel eğri tanımlanmış, küresel Tzitzeica eğrileri için incelemeler yapılmıştır. Beşinci bölümde ise Öklidyen 3-uzayda yapılan hesaplamalar Minkowski 3-uzayındaki spacelike ve timelike q-çatı için elde edilmiştir.

Çalışmamızda 3-boyutlu Öklid uzayında q-çatı yardımıyla Tzitzeica eğrileri ile birlikte küresel eğriler ve küresel Tzitzeica eğrileri ve hem de 3-boyutlu Minkowski uzayında spacelike ve timelike q-çatılar yardımıyla spacelike ve timelike Tzitzeica eğrileri ile birlikte küresel eğriler ve küresel Tzitzeica eğrileri incelenirken, 3-boyutlu Minkowski uzayında Lorentz küresi üzerinde yatan hiçbir null eğri olmadığı sonucuna varılmıştır. Bu çalışma, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde Yüksek Lisans Tezi olarak yapılmıştır. Bu çalışmada yapılan hesaplamalara benzer hesaplamalar, 4-boyutlu Öklid ve Minkowski uzayı ya da farklı uzay ve boyutlarda Bishop, Darboux gibi farklı çatılar yardımıyla da yapılabilir, Tzitzeica eğrisi ve küresel eğri tanımlanabilir ve bu eğrilerin bazı özellikleri ile küresel Tzitzeica eğrileri incelenebilir. Ayrıca çalışmamızda yer alan hesaplamalar, 3-boyutlu Minkowski uzayında Lorentz küresi üzerinde yapılmış ve incelenmiştir. Benzer hesaplamalar, 3-boyutlu Minkowski uzayında hiperbolik küre üzerinde de yapılıp incelenebilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Agnew, A.F., Bobe, A., Boskoff, W.G. and Suceava, B.D., 2010, Tzitzeica curves and surfaces, The Mathematica Journal 12, Wolfram Media, Inc., 1-18.

Ali, A. T., 2009, Spacelike Salkowski and anti-Salkowski curves with a spacelike principal normal in Minkowski 3-space. Int. J. Open Problems Compt. Math, 2(3), 451-460.

Akutagawa, K. and Nishikawa, S., 1990, The Gauss map and space-like surfaces with prescribed mean curvature in Minkowski 3-space, Tohouku Mathematic Journal, 42, 67-82.

Aydın, M.E. and Ergüt, M., 2014, Non-null curves of Tzitzeica type in Minkowski 3-space, Romanian J. of Math. Comp. Science, 4(1), 81-90.

Bayram, B., Tunç, E., Arslan, K. and Öztürk, G., 2018, On Tzitzeica curves in Euclidean 3-space E^3, Facta Universitasis, Series, Mathematics and Informatics, 33(3), 409-416.

Bayram, B. and Tunç, E., 2021, On Tzitzeica surfaces in Euclidean 3-space E^3, BAUN Fen Bil. Enst. Dergisi, 23(1),277-290.

Bektaş, M., Ergüt, M. and Soylu, D., 1998, The characterization of the spherical timelike curves in 3-dimensional Lorentzian space, Bull. Malaysian Math. Soc. (Second Series), 21, 117-125.

Bila, N., 2012, Symmetry raductions for the Tzitzeica curve equation, Math. and Comp. Sci. Workin Papers, 16.

Bishop, R. L., 1975, There is more than one way to frame a curve, The American Mathematical Monthly, 82(3), 246-251.

Bobe, A., Boskoff, G. and Ciuca, G., 2012, Tzitzeica type centro-affine invariants in Minkowski space, An. St. Univ. Ovidius Constanta, 20(2), 27-34.

Chen, B.Y., 2002, Geometry of warped products as Riemannian submanifolds and related problems, Soochow J. Math., 28, 125-156.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Chen, B.Y., 2002a, Convolution of Riemannian manifolds and its applications, Bull. Aust. Math. Soc., 66, 177-191.

Chen, B.Y., 2003, When does the position vector of a space curve always lies in its rectifying plane?, Amer. Math. Monthly, 110, 147-152.

Coquillart, S., 1987, Computing offsets of B-spline curves, Computer-Aided Design, 19, 6, 305-309.

Craşmareanu, M., 2002, Cylindrical Tzitzeica curves implies forced harmonic oscillators, Balkan J. of Geom. and Its App., 7(1), 37-42.

Darboux, J.G., 1896, Leçons Sur La Théorie Générale Des Surfaces Et Les Applications Géométriques Du Calcul Infinitésimal, Gauthier-Villars et Fils, Imprimeurs-Libraires, De L'école Polytechnique, Du Burbau des Longitudes, Quai des Grands-Augistins, Paris, 55, p.526.

Dede, M., Ekici, C. and Görgülü, A., 2015, Directional q-frame along a space curve, IJARCSSE, 5(12), 775-780.

Do Carmo, M.P. , 1976, Differential Geometry of Curves and Surfaces. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, p. 503.

Ekici, C., Göksel, M.B. and Dede, M., 2019, Smarandache curves according to q-frame in Minkowski 3-space, Conference Proceedings of Science and Technology, 2(2), 110-118.

Ekici, C., Kaymanlı, G.U. and Okur, S., 2021, A new characterization of ruled surfaces according to q-frame vectors in Euclidean 3-space, International J.Math. Combin., 3, 20-31.

Eren, K. and Ersoy, S., 2021, Characterizations of Tzitzeica curves using Bishop frames, Math Meth Appl Sci., 45(18), 12046-12059.

Frenet, F., 1852, Sur les courbes à double courbure, Thèse, Toulouse, Abstract in Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 17, 437-447.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Gray, A., 1993, Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces, CRS Press, Inc. p. 664.

Gürpınar, S., Arslan, K. and Öztürk, G., 2015, A characterization of constant-ratio curves in Euclidean 3-space E^3, Acta Universitatis Apulensis, 44, 39-51.

Hacısalihoğlu, H.H., 1998, Diferensiyel Geometri, Ankara Üniversitesi, s.269.

Hacısalihoğlu, H.H., 2000, Diferensiyel Geometri, Cilt I, Ankara Üniversitesi, s.272.

Karacan, M.K. and Bükçü, B., 2008, On the hyperbolic cylindrical Tzitzeica curves in Minkowski 3-space, BAÜ FBE Dergisi, 10(1), 46-51.

Karacan, M.K. and Bükçü, B., 2009, On the elliptic cylindrical Tzitzeica curves in Minkowski 3-space, Sci. Manga, 5, 44-48.

Kılıç, B., Arslan, K. and Öztürk, G., 2008, Tangentially cubic curves in Euclidean space, Differential Geometry-Dynamical Systems, 10, 186-196.

Klein, F. and Lie, S., 1871, Uber diejenigen ebenenen kurven welche durch ein geschlossenes system von einfach unendlich vielen vartauschbaren linearen transformationen in sich übergehen, Math. Ann., 4, 50-84.

Kobayashi, O., 1983, Maximal surfaces in the 3-dimensional Minkowski space L^3, Tokyo Journal Mathematics, 6, 297-309.

Kobayashi, S. and Nomizu, K., 1983, Foundations of Differential Geometry, A Wiley-Interscience Publication, New York, p. 329.

Monterde, J., 2009, Salkowski curves revisited: A family of curves with constant curvature and non-constant torsion, Computer Aided Geometric Design, 26, 271-278.

O'Neill, B., 1983, Semi-Riemannian Geometry, Academic Press, New York. p. 488.

Özerdem, Ö. and Erdoğdu, M., 2018, Minkowski 3-uzayında null ve pseudo-null Tzitzeica eğrileri, Kilis 7 Aralık Üniversitesi Fen ve Mühendislik Dergisi, 2, 28-35.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Öztürk, G., Arslan, K. and Hacısalihoğlu, H., 2008, A characterization of ccr-curves in $\mathbb{R}^n$, Proc. Estonian Acad. Sciences, 57, 217-224.

Pekmen, U. and Pasali, S., 1999, Some characterizations of Lorentzian spherical space-like curves, Mathematica Moravica, 3, 31-37.

Petrović-Torgašev, M. and Šućurović, E., 2001, Some characterizations of the Lorentzian spherical timelike and null curves, Matematicki Vesnik, 53, No. 1-2, 21-27.

Salkowski, E., 1909, Zur transformation von raumkurven, Mathematische Annalen, 66(4), 517-557.

Sarıaydın, M.T. and Yazla, A., 2022, On Tzitzeica curves according to q-frame in Euclidean 3-space, The Eurasia Proceedings of Science, Technology, Engineering & Mathematics (EPSTEM), 17, 19-25.

Serret, J.A., 1851, Sur quelques formules relatives à la théorie des courbes à double courbure, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 16, 193-207.

Şenatalar, M., 1977, Diferansiyel Geometri (Eğriler ve Yüzeyler Teorisi), İstanbul Devlet Mühendislik ve Mimarlık Akademisi Yayınları, Sayı:151, s.348.

Şentürk, G. and Yüce, S., 2015, Characteristic properties of the ruled surface with Darboux frame in E-3, Kuwait Journal of Science , 42(2), 14-33.

Tarım, G., 2016, Minkowski uzayında yönlü eğriler üzerine, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, s. 86.

Tunç, E., 2021, Tzitzeica eğrilerinin ve yüzeylerinin bir karakterizasyonu, Balıkesir Üniversitesi, Doktora Tezi, s.108.

Turgut, A. and Hacısalihoğlu, H.H., 1997, Spacelike ruled surfaces in the Minkowski 3-space, Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series A1-46, 83-91.

Turgut, A. and Hacısalihoğlu H.H., 1998, Timelike ruled surfaces in the Minkowski 3-space II, Turkish J. Math., 22, 33-46.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Tzitzeica, G., 1911, Sur certaines courbes gauches, Ann. De I'Ec, Normale Sup., 28, 9-32.

Tzitzeica, G., 1925, Sur certaines courbes gauches, Ann. De I'Ec, Normale Sup., 42, 379-390.

Uğurlu, H.H. ve Çalışkan, A., 2012, Darboux Ani Dönme Vektörleri ile Spacelike ve Timelike Yüzeyler Geometrisi, Celal Bayar Üniversitesi Yayınları, No:0006, s. 170.

Walrave, J., 1995, Curves and surfaces in Minkowski space, K.U. Leuven, Faculteit der Wetenschappen. p. 147.

Yılmaz, S., 2009, Position vector of some special space-like curve according to Bishop frame in Minkowski space,Scientia Magna, Vol 5(1), 51-55.

Yılmaz, S. and Turgut, M., 2010, A new version of Bishop frame and an application to spherical images, J. Math. Anal. Appl., 371, 764-776.

Yüce, S., 2017, Öklid Uzayında Diferansiyel Geometri, Pegem Akademi Yayıncılık, Ankara, s.557.