

**T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MODÜLLER ÜZERİNDEKİ ZİNCİR KOŞULARININ S- VERSİYONLARI

DOKTORA TEZİ

Osama A.A. NAJİ

Enstitü Anabilim Dalı	: MATEMATİK
Enstitü Bilim Dalı	: CEBİR VE SAYILAR TEORİSİ
Tez Danışmanı	: Prof. Dr. Mehmet ÖZEN
Ortak Danışmanı	: Prof. Dr. Ünsal TEKİR

Ekim 2022

**T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MODÜLLER ÜZERİNDEKİ ZİNCİR KOŞULARININ S-
VERSİYONLARI**

DOKTORA TEZİ

Osama A.A. NAJİ

Enstitü Anabilim Dalı

:

MATEMATİK

Bu tez 26/10/2022 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği / oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim

Osama A.A. NAJI

26.10.2022

TEŞEKKÜR

Öncelikle bütün eğitim hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen, sonsuz moral ve ilham kaynağı olan sevgili aileme çok teşekkür ederim.

Doktora çalışmam sırasında çok değerli tavsiyeleri, sürekli destekleri ve sabırları için saygıdeğer danışman hocamlarım Prof. Dr. Mehmet ÖZEN'e ve eş danışman hocam Prof. Dr. Ünsal TEKİR'e son derece minnettarım. Onların engin bilgileri ve bol deneyimleri, akademik araştırmalarım ve günlük yaşamımda beni her zaman cesaretlendirdi. Anlayışlı geri bildiriminiz beni düşüncemi keskinleştirmeye itti ve çalışmamı daha yüksek bir seviyeye getirdi.

Verdiği ipuçlar ve yaptığı yorumlarla daha derin düşünmemizi sağlayan, bu çalışma boyunca yardımlarını ve zamanını bizden esirgemeyen Dr. Suat KOÇ'a teşekkür ederim.

Tez savunmamda yer alan ve her zaman örnek aldığım, eleştirileriyle tezime katkıda bulunan saygıdeğer hocalarıma çok teşekkür ederim.

Son olarak, bilimin ve bilim insanının destekçisi olan ve doktora eğitimim süresince maddi destek gördüğüm Yurtdışı Türkler ve Akraba Topluluklar Başkanlığı (YTB)'e teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR.....	i
İÇİNDEKİLER	ii
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ	iv
ÖZET.....	v
SUMMARY	vi
BÖLÜM 1.	
ÖN BİLGİLER.....	1
1.1. Halkalar ve İdealler.....	1
1.2. Modüller ve Alt Modüller.....	6
1.3. Yerelleştirme ve Aşıkart Genişleme	10
1.4. Noetherian ve Artinian Modüller	12
BÖLÜM 2.	
KUVVETLİ $dccr^*$ MODÜLLER.....	14
2.1. Kuvvetli $dccr^*$ Modüllerin Karakterizasyonları	15
2.2. Esas Olarak Eş Üretilmiş Modüller	24
2.3. Kuvvetli Özel Modüller	26
2.4. Kuvvetli $dccr^*$ ve Nakayama'nın Lemması	30
BÖLÜM 3.	
S -ARTİNİAN MODÜLLER.....	33
3.1. S -Artinian Modüllerin Temel Özellikleri	34
3.2. S -Artinian Modüllerin Karakterizasyonları	39
3.3. Sonlu S -Eş Üretilmiş Modüller	45

BÖLÜM 4.

S -NOETHERIAN SPEKTRUM KOŞULUNUN SAĞLAYAN MODÜLLER . 54

4.1. Tanım ve Temel Özellikler 55

4.2. S -Noetherian Spektrum Koşulunun Karakterizasyonları 58

BÖLÜM 5.

$S - dcr$ KOŞULUNU SAĞLAYAN MODÜLLER..... 72

5.1. $S - dcr$ ($S - dcr^*$) Koşulunu Sağlayan Modüllerin

Karakterizasyonu 72

5.2. $S - dcr$ ve Nakayama'nın Lemması..... 89

BÖLÜM 6.

TARTIŞMA VE SONUÇ 93

KAYNAKLAR 94

ÖZGEÇMİŞ 98

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\in$	: Elemanıdır
$\notin$	: Elemanı değildir
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel sayılar kümesi
$\subseteq$	: Alt küme
$\subsetneq$	: Has alt küme
$\cong$	: İzomorfizma
$\leq$	: Sıralama bağıntısı
$\Leftrightarrow$	: Gerek ve yeter şart (ancak ve ancak)
$\Leftarrow$	: Yeterlilik
$\Rightarrow$	: Gereklilik
A	: Birimli ve değişmeli bir halka
X	: A -modül
$S^{-1}A$	: Kesir halkası
A / I	: Bölüm halkası
$\sqrt{I}$	: I nın radikali
$Max(A)$	: Maksimal ideallerin kümesi
$Spec(A)$	: Asal ideallerin kümesi
$J(A)$	: Jacobson radikali
$Ker(f)$	: f homomorfizmasının çekirdeği
$(a_1, a_2, \dots, a_n)$	: $a_1, a_2, \dots, a_n$ ile üretilmiş ideal
$u(A)$	: A halkasının birim grubu
$V(J)$	: J yi kapsayan tüm asal ideallerin kümesi
$A \propto X$	: Aşık genişleme

ÖZET

Anahtar kelimeler: kuvvetli $dccr^*$ modüller, S-Artinian, S-Noetherian spektrum koşulu, S- $dccr$ koşulu, sonlu S-eş üretilmiş modüller, mükemmel halkalar, esas olarak eş üretilmiş modüller, kuvvetli özel modüller, Nakayama'nın Lemması.

Bu tezin amacı, artan ve azalan zincir koşullarının çeşitli genellemelerini tanımlamak ve tanıtmaktır. Bu genellemeleri kullanarak tez, birçok halka ve modül için geniş bir karakterizasyon yelpazesi sunar.

Tezin 2. bölümünde kuvvetli $dccr^*$ modüller kavramı tanıtılmıştır ve incelenmiştir. Kuvvetli $dccr^*$ koşulu Artinian modüllerinin sınıfını genelleştirir ve $dccr^*$ koşulundan daha güçlüdür. Konsept, mükemmel halkalar ve esas olarak eş üretilmiş modüller açısından tamamen karakterize edilmiştir. Daha sonra, kuvvetli $dccr^*$ kavramı ve kuvvetli özel modüller arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Ayrıca, Birleşim Teoremi ve Nakayama'nın Lemmasının versiyonları, kuvvetli $dccr^*$ kavramının ışığında verilmiştir.

Tezin 3. bölümünde S, çarpımsal kapalı küme olmak üzere tez, S-Artinian modüllerin sınıfını tanımlar. S-Artinian kavramı, Artinian modüller kavramından daha geniştir. Ayrıca, sonlu S-eş üretilmiş modüller kavramı tanımlanmıştır. Bu iki kavram arasındaki ilişki incelenmiş ve S-Artinian'ın birçok karakterizasyonu çeşitli modüller ve halkalar cinsinden verilmiştir.

Tezin 4. bölümünde S-Noetherian spektrum koşulu tanıtılmıştır. S-Noetherian spektrum koşulunun birçok özelliği ve karakterizasyonu incelenmiştir. Ayrıca, S-Noetherian spektrum koşulunu sağlayan modüller için Cohen teoreminin bir versiyonu kanıtlanmıştır. Daha sonra, Noetherian spektruma sahip modüller, S-Noetherian spektrum koşulunu karşılayan modüller açısından karakterize edilmiştir.

Tezin son bölümünde S- $dccr$ (S- $dccr^*$) koşulunu sağlayan modüllerin sınıfı tanıtılmıştır. S- $dccr$ (S- $dccr^*$) koşulu, S-Artinian modüllerin bir genellemesidir. Bu bölüm Artinian, S-Artinian ve $dccr$ modüllerinin birçok özelliğini ve karakterizasyonunu S- $dccr$ durumuna genişletmiştir. Ayrıca, S- $dccr$ kavramı ışığında Birleşim Teoreminin ve Nakayama'nın Lemmasının S-versiyonları verilmiştir.

ON S-VERSIONS OF CHAIN CONDITIONS OVER MODULES

SUMMARY

Keywords: Strongly $dccr^*$ modules, S-Artinian, S-Noetherian Spectrum Condition, S- $dccr$ condition, finitely S-cogenerated modules, perfect rings, principally cogenerated modules, strongly special modules, Nakayama's lemma.

The aim of this study is to define and introduce various generalizations of ascending and descending chain conditions. Using these generalizations, the thesis provides a wide range of characterizations for many rings and modules.

In Section 2, the concept of strongly $dccr^*$ modules is introduced and studied. Strongly $dccr^*$ condition generalizes the class of Artinian modules and it is stronger than $dccr^*$ condition. The concept is fully characterized in terms of perfect rings and in terms of principally cogenerated modules. Also, the relationships between the concept and strongly special modules are examined. Moreover, versions of Union Theorem and Nakayama's Lemma are given in light of strongly $dccr^*$ concept.

In Section 3, the thesis defines the class of S-Artinian modules, where S is a multiplicatively closed set. S-Artinian notion is broader than the notion of Artinian modules. Furthermore, the concept of finitely S-cogenerated modules is defined. The relationship between these two concepts is studied, and many characterizations of S-Artinian are given in terms of several modules and rings.

In Section 4, S-Noetherian Spectrum condition is introduced. Many properties and characterizations of S-Noetherian spectrum condition are examined. Moreover, an analogous result to Cohen's theorem for modules satisfying S-Noetherian spectrum condition is proven. Furthermore, modules having Noetherian spectrum are characterized in terms of modules satisfying the S-Noetherian spectrum condition.

In the last part of the thesis, the class of modules satisfying S- $dccr$ (S- $dccr^*$) condition is introduced. S- $dccr$ (S- $dccr^*$) condition is a generalization of S-Artinian modules. This section extends many properties and characterizations of Artinian, S-Artinian and $dccr$ modules to S- $dccr$ condition. Furthermore, S-versions of Union Theorem and Nakayama's Lemma are given in light of S- $dccr$ concept.

BÖLÜM 1. ÖN BİLGİLER

Esas uğraşımıza başlamadan önce, sonraki bölümlerde kullanılacak ve ihtiyaç duyulacak bazı temel cebirsel tanımlar ve teoremler verilecektir. Bu teoremler iyi bilindiği için ispatsız verilecektir.

1.1. Halkalar ve İdealler

Tanım 1.1.1. A boştan farklı bir küme ve $(A, +, \cdot)$ iki işlemli cebirsel bir yapı verilsin. Her $x, y, z \in A$ için,

- a. $x + y = y + x$,
- b. $(x + y) + z = x + (y + z)$,
- c. Her $x \in A$ için, $x + 0 = x$ olacak şekilde bir $0 \in A$ var,
- d. Her $x \in A$ için, $x + (-x) = 0$ olacak şekilde bir $-x \in A$ var,
- e. $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$,
- f. $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ ve $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$

koşulları sağlanıyorsa A ye bir halka denir [1].

Notlar 1.1.1. [1]

- a. Bundan sonra, A halkasında her $x, y \in A$ için, $x \cdot y$ yerine xy yazılacak.
- b. A halkasında “ $\cdot$ ” işleminin değişme özelliği varsa, yani her $x, y \in A$ için, $xy = yx$ ise A ya değişmeli halka denir.
- c. A halkasında “ $\cdot$ ” işleminin birim elemanı varsa, yani her $x \in A$ için, $x1_A = 1_A x = x$ olacak şekilde $1_A = 1 \in A$ varsa, A ya birimli halka denir.

- d. A halkasında “.” işlemine göre tersi mevcut elemanlara birimsel elemanlar denir.

Tez boyunca aksi ifade edilmedikçe söz konusu tüm halkalar birimli ve değişmeli olarak göz önüne alınacaktır.

Tanım 1.1.2. A bir halka, $\emptyset \neq T \subseteq A$ olsun. Eğer T , A deki işlemlere göre bir halka ise T ye A nın bir althalkası denir [1].

Tanım 1.1.3. A halkasında $0 \neq x \in A$ elemanı için, $xy = 0$ (veya $yx = 0$) olacak şekilde $0 \neq y \in A$ bulunabilirse x elemanına halkanın sıfır böleni, böyle bir y yoksa sıfır böleni değildir denir [2].

Tanım 1.1.4. A halkasında tersi mevcut elemanlara birimsel elemanlar denir. Bu elemanların oluşturduğu gruba halkanın birim grubu denir ve $u(A)$ ile gösterilir [3].

Tanım 1.1.5. Birimli, değişmeli ve sıfır bölensiz halkaya bir tamlık bölgesi denir [2].

Tanım 1.1.6. A bir halka olsun. A da sıfırdan farklı her elemanın çarpımsal tersi varsa A halkasına cisim denir [4].

Tanım 1.1.7. A halkasında sıfır olmayan bir $x \in A$ ve $k \in \mathbb{N}$ için $x^k = 0$ koşulu sağlanıyorsa x elemanına nilpotent eleman denir [5].

Tanım 1.1.8. J , A nın bir alt halkası olmak üzere her $a \in A$ ve her $x \in J$ için $xa \in J$ ve $ax \in J$ ise J ya A nın bir ideali denir. Üstelik $J \neq A$ ise J ye has ideal denir [2].

Önerme 1.1.1. [2] A bir halka ve J , A nın boş olmayan bir alt kümesi olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanırsa J kümesi A nın bir idealidir.

- Her $x, y \in J$ için $x - y \in J$
- Her $x \in J$ ve her $a \in A$ için $xa \in J$

Tanım 1.1.9. J , A halkasının bir ideali olsun. Her $x, y \in A$ için,

$$x \equiv y \pmod{J} \Leftrightarrow x - y \in J$$

denklik bağıntısına göre oluşan bütün denklik sınıflarının kümesi A / J ile gösterilirse, A / J ,

$$\begin{aligned} (x + J) + (y + J) &= (x + y) + J, \\ (x + J) \cdot (y + J) &= (xy) + J \end{aligned}$$

işlemleri ile bir halka oluşturur. Bu halkaya, J ye göre bölüm halkası denir [1].

Tanım 1.1.10. A birimli ve değişmeli bir halka ve I , A nın bir has ideali olsun. Her $x, y \in A$ için $xy \in I$ olması $x \in I$ veya $y \in I$ olmasını gerektiriyorsa I ya A nın asal ideali denir. A halkasının tüm asal ideallerinin kümesi $Spec(A)$ ile gösterilir [5].

Tanım 1.1.11. A bir halka ve I , A nın bir ideali olsun. I idealini kapsayan bütün asal ideallerinin kümesini

$$V(I) = \{J \in Spec(A) : I \subseteq J\}$$

ile gösterilir [4].

Tanım 1.1.12. A birimli ve değişmeli bir halka ve $\mathcal{M}$, A nın bir has ideali olsun. A nın, $\mathcal{M}$ yi kapsayan $\mathcal{M}$ den başka hiçbir has ideali yoksa $\mathcal{M}$ ye bir maksimal ideal denir. A halkasının tüm maksimal ideallerinin kümesi $Max(A)$ ile gösterilir [5].

Önerme 1.1.2. [5]

- a. A bir halka olsun. I nın A halkasının asal ideali olması için gerek ve yeter koşul A / I halkasının tamlık bölgesi olmasıdır.
- b. A bir halka olsun. $\mathcal{M}$ nin A halkasının maksimal ideali olması için gerek ve yeter koşul $A / \mathcal{M}$ halkasının cisim olmasıdır.

c. Her maksimal ideal asaldir.

Tanım 1.1.13. A halkasının tam bir tane maksimal ideali varsa A ya yerel halka denir [4].

Tanım 1.1.14. A halkasının sonlu sayıda maksimal ideali varsa A ya yarı yerel halka denir [4].

Tanım 1.1.15. A bir halka olsun. A nın tüm maksimal ideallerinin arakesitine Jacobson radikali denir ve $J(A)$ ile gösterilir [5].

$$J(A) = \bigcap_{\mathcal{M} \in \text{Max}(A)} \mathcal{M}$$

Tanım 1.1.16. A birimli ve değişmeli bir halka ve J , A nın bir ideali olsun.

$$\sqrt{J} = \{a \in A : \text{bir } n \in \mathbb{N} \text{ için, } a^n \in J\}$$

kümesi A halkasının J yi kapsayan bir idealidir. Bu ideale J idealinin radikali denir. Halkanın tüm nilpotent elemanlarından oluşan ideale nil radikal veya asal radikal denir. Ayrıca, A halkasının bir J idealinin her elemanı nilpotent ise bu ideale nil ideal denir [5].

Önerme 1.1.3. A bir halka ve I ideali olsun. I idealinin radikali, I yi kapsayan tüm asal ideallerin kesişimidir [5].

$$\sqrt{I} = \bigcap_{P \in V(I)} P$$

Tanım 1.1.17. Bir halkanın nil radikali sıfır ise, yani $\sqrt{0} = 0$ ise, halkaya indirgenmiş halka denir [6].

Tanım 1.1.18. A birimli ve değişmeli bir halka olsun. S , A nın alt kümesi için, $1 \in S$ ve her $t, s \in S$ için, $ts \in S$ ise A nın S alt kümesine bir çarpımsal kapalı alt küme denir [5].

Örnek 1.1.1. [5]

- a. A bir halka ve $x \in A$ olsun. $S = \{x^n : n \geq 0\}$ kümesi bir çarpımsal kapalı kümedir.
- b. A bir halka ve P , A halkasının asal ideali olsun. $S = A - P$ bir çarpımsal kapalı kümedir.

Tanım 1.1.19. S , A halkasının bir çarpımsal kapalı alt kümesi olsun. Her $ts \in S$ ($t, s \in A$) için, $t \in S$ ve $s \in S$ ise S ye bir doymuş çarpımsal kapalı alt küme denir [5].

Tanım 1.1.20. A halkasının herhangi bir alt kümesi B olsun. B kümesini kapsayan tüm ideallerin kesişimine B nin ürettiği ideal denir ve (B) ile gösterilir. Ayrıca $B \subseteq A$ alt kümesi için

$$(B) = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i b_i : a_i \in A, b_i \in B \text{ ve } n \in \mathbb{N} \right\} \text{ dir.}$$

$B = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ sonlu kümesi için

$$(B) = \left\{ \sum_{i=1}^k a_i b_i : a_i \in A \text{ ve } b_i \in B \right\} \text{ dir.}$$

Bu durumda, (B) ye B nin ürettiği sonlu üretilmiş ideal denir. Tek elemanlı $B = \{b\}$ kümesi için,

$$(B) = (b) = Ab = \{ab : a \in A\} \text{ dir.}$$

(B) ye b elemanın ürettiği temel veya principal ideal denir [5].

Tanım 1.1.21. Her ideal bir temel ideal olan halkaya, bir temel ideal halkası denir. Eğer halka bir tamlık bölgesi ise bu taktirde, temel ideal bölgesi (TİB) denir [5].

Tanım 1.1.22. I ve J , A halkasının iki ideali ise

$$IJ = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i y_i : x_i \in I, y_i \in J \text{ ve } n \in \mathbb{N} \right\}$$

kümesi A halkasının bir idealidir. Bu ideale I ve J ideallerinin çarpımı denir [7].

Tanım 1.1.23. Sıralı bir kümede, kendisinden kesin olarak büyük hiçbir eleman yoksa, bu elemana maksimal eleman denir. Ayrıca, Sıralı bir kümede, kendisinden kesin olarak küçük hiçbir eleman yoksa, bu elemana minimal eleman denir [5].

1.2. Modüller ve Alt Modüller

Tanım 1.2.1 A bir halka ve $(X, +)$ bir değişmeli grup olsun. $A \times X \rightarrow X$ skaler çarpım fonksiyonu

- a. Her $a \in A$ ve her $x, y \in X$ için $a(x + y) = ax + ay$,
- b. Her $a, b \in A$ ve her $x \in X$ için $(a + b)x = ax + bx$,
- c. Her $a, b \in A$ ve her $x \in X$ için $(ab)x = a(bx)$,
- d. Her $x \in X$ için $1_A x = x$

özelliklerini sağlıyorsa X e A -modül denir [5].

Tanım 1.2.2. A bir halka, X bir A -modül ve $Y \subseteq X$ boştan farklı bir alt küme olsun. Y kendi başına bir A -modül ise Y ye, X modülünün bir alt modülü veya A -alt modülü denir [5].

Önerme 1.2.1. X bir A -modül ve $Y \subseteq X$ boş kümeden farklı bir alt kümesi olsun. Y , X modülünün bir alt grubu ve her $a \in A$, $y \in Y$ için $ay \in Y$ oluyorsa Y ye X in bir alt modülü denir [7].

Notlar 1.2.1.

- a. Her A halkası A -modül olarak düşünülebilir. A halkasının alt modülleri A nın idealleridir [7].
- b. K bir cisim olsun. V , K üzerinde bir vektör uzayı olsun. Bu taktirde V bir K -modül ve V nin tüm alt uzayları da bir K -alt modüldür [5].

Tanım 1.2.3. X bir A -modül ve $T \subseteq X$ bir alt küme olsun. T alt kümesini kapsayan, tüm alt modüllerin arakesitine T nin ürettiği alt modül denir ve (T) ile gösterilir. (T) , T alt kümesini kapsayan en küçük A -alt modüldür [5].

Önerme 1.2.2. X bir A -modül ve $T \subseteq X$ bir alt küme olsun.

- a. Eğer $T = \emptyset$ ise $(T) = \{0_X\}$ dir [5].
- b. Eğer $T \neq \emptyset$ ise

$$(T) = \{\sum_{i=1}^n a_i x_i : a_i \in A, x_i \in T \text{ ve } n \in \mathbb{N}\} \text{ dir [5].}$$

- c. Eğer $T = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ sonlu bir küme ise

$$(T) = \{\sum_{i=1}^k a_i x_i : a_i \in A \text{ ve } x_i \in T\} \text{ dir [5].}$$

Tanım 1.2.4. X bir A -modül ve $x \in X$ olsun. $\{x\}$ in ürettiği alt modül

$$(x) = Ax = \{ax : a \in A\}$$

kümesine x ile üretilmiş alt modül denir. Eğer $X = (x)$ olacak şekilde bir $x \in X$ bulunabilirse, X ye devirli modül denir. $T \subseteq X$ sonlu bir alt küme olmak üzere, $X = (T)$ ise, X e sonlu üretilmiş modül denir [5].

Önerme 1.2.3. A bir halka, J bir ideal ve X bir A -modül olsun.

$$JX = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i x_i : a_i \in J, x_i \in X \text{ ve } n \in \mathbb{N} \right\}$$

ile gösterilsin. Şu halde, JX , X in bir A -alt modülüdür [5].

Teorem 1.2.1. (Nakayama Lemması) A bir halka ve X sonlu üretilmiş bir A -modül olsun. J , A nın Jacobson radikalinde kapsanan, $J \subseteq J(A)$ bir ideali ve $X = JX$ ise $X = 0$ dır [5].

Tanım 1.2.5. A bir halka, X bir A -modül ve Y de X in bir alt modülü olsun.

$$(0 :_A Y) = \{a \in A : aY = 0\}$$

ideali Y alt modülünün sıfırlayıcısıdır ve $\text{ann}_A(Y)$ ile gösterilir [3]. Eğer $\text{ann}_A(X) = 0$ ise X modülüne sadık modül denir. Ayrıca

$$(X :_A Y) = \{a \in A : aY \subseteq X\}$$

şeklinde tanımlanır [5].

Tanım 1.2.6. A bir halka ve B bir alt kümesi, X bir A -modül ve K de bir alt modülü ise,

$$(K :_X B) = \{x \in X : \text{her } b \in B \text{ için, } xb \in K\}$$

kümesine, X de B nin K daki sıfırlayıcısı denir. $(K:_X B)$ kümesi, X in bir alt modülüdür.

B alt kümesi ile (B) idealinin sıfırlayıcılarının eşit olduğu gösterilebilir. Yani

$$(K:_X B) = (K:_X (B)) \text{ dir [5].}$$

Önerme 1.2.4. A bir halka, X bir A -modül ve Y de X in bir alt modülü olsun. $(X:_A Y)$ kümesi A nın bir idealidir [5].

Tanım 1.2.7. A bir halka ve X bir A -modül olsun. X in her Y alt modülü için $Y = JX$ olacak şekilde, A halkasının bir J ideali varsa, X e bir çarpımsal modül denir [5].

Önerme 1.2.5. A bir halka, X bir çarpımsal A -modül ve Y , X in bir alt modülü ise $Y = (Y:_A X)X$ dir [5].

Tanım 1.2.8. A bir halka, X bir A -modül ve Y , X in bir has alt modülü olsun. Her $a \in A$ ve $x \in X$ için $ax \in Y$ olması $x \in Y$ veya $a \in (Y:_A X)$ olmasını gerektiriyorsa Y ye A -modül X in bir asal alt modülü denir [8].

Önerme 1.2.6. Y , A -modül X in asal alt modülü ise, $(Y:_A X)$, A halkasının asal idealidir [8].

Tanım 1.2.9. K , bir X modülünün has bir alt modülü olsun. X in, K yı kapsayan K dan başka hiçbir alt modülü yoksa K ya bir maksimal alt modül denir [5].

Tanım 1.2.10. A bir halka ve X ve Y iki A -modül olsun. $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu her $x_1, x_2 \in X$ için $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$, ve her $a \in A$, her $x \in X$ için $f(ax) = af(x)$ özelliklerini sağlıyorsa f fonksiyonuna A -modül homomorfizması denir. Eğer bu homomorfizma örten ise epimorfizma, birebir ise monomorfizma, hem örten hem birebir ise izomorfizma olarak adlandırılır [5].

Tanım 1.2.11. $f: X \rightarrow Y$ bir modül homomorfizması olsun.

$$\text{Ker} f = \{x \in X: f(x) = 0_Y\}$$

kümesi f nin çekirdeği olarak adlandırılır. $\text{Ker} f$, X in bir alt modülüdür [5].

Teorem 1.2.2. (1. izomorfizma teoremi) f , X modülünden Y modülüne bir epimorfizma olsun. Bu durumda $X / \text{Ker} f \cong Y$ dir [6].

Teorem 1.2.3. (2. izomorfizma teoremi) Y ve K bir X modülünün iki alt modülü olsun. Bu takdirde $Y/(Y \cap K) \cong (Y + K) / K$ dir [6].

Tanım 1.2.12. A bir tamlık bölgesi ve X bir A -modül olsun. $x \in X$ elemanı için $ax = 0$ olacak şekilde bir $0 \neq a \in A$ varsa, $x \in X$ in bir burulmalı elemanı ve

$$T(X) = \{x \in X: ax = 0 \text{ olacak şekilde bir } 0 \neq a \in A \text{ var}\}$$

alt modülüne de X in burulmalı alt modülü denir. Eğer $T(X) = X$ ise X e burulmalı modül, eğer $T(X) = 0$ ise X e serbest burulmalı modül denir [5].

Tanım 1.2.13. A bir halka, X bir A -modül ve Y de X in bir alt modülü olsun.

$$A \times X / Y \rightarrow X / Y$$

skaler çarpımını $(a, x + Y) \rightarrow ax + Y$ ile tanımlayarak, X / Y toplamsal bölüm grubu, bir A -modül yapılabilir. X / Y ye bölüm modülü denir [5].

1.3. Yerelleştirme ve Aşık Genişleme

Tanım 1.3.1. S , A halkasının bir çarpımsal kapalı alt kümesi ve X de bir A -modül olsun. $X \times S$ de $\sim$ bağıntısını aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$(x, s) \sim (x', s') \Leftrightarrow \text{bir } u \in S \text{ için, } u(xs' - x's) = 0$$

S çarpımsal kapalı alt kümesine göre, yukarıdaki tanımlanan $\sim$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. $(x, s) \in X \times S$ nin bu bağıntıya göre belirttiği denklik sınıfına bir kesir denir ve $\frac{x}{s}$ ile gösterilir. Tüm kesirler kümesi $S^{-1}X$ ile gösterilir. Aynı şekilde, A halkası için $S^{-1}A$ tanımlanabilir [9].

Not 1.3.1. Eğer $0 \in S$ ise, $X \times S$ deki her çift birbirine denk olacağından, $S^{-1}X = 0$ dan ibarettir. Bu nedenle, bundan sonra $0 \notin S$ kabul edilsin [5].

Tanım 1.3.2. A bir halka, X bir A -modül ve S, A nın çarpımsal kapalı bir alt kümesi olsun. $S^{-1}X$ de toplama ve skalerle çarpma işlemlerini; her $a \in A, s, t \in S$ ve $x, y \in X$ için,

$$\frac{x}{s} + \frac{y}{t} = \frac{tx + sy}{st}, \quad \frac{a}{s} \frac{x}{t} = \frac{ax}{st}$$

ile tanımlansın [9].

Önerme 1.3.1. Yukarıdaki tanımlanan işlemlere göre, $S^{-1}X$ bir $S^{-1}A$ -modüldür. $S^{-1}X$ modülünün sıfırı $0_{S^{-1}X} = \frac{0_X}{1}$ dir. Ayrıca,

$$\pi: X \rightarrow S^{-1}X, \quad \pi(x) = \frac{x}{1}$$

ile tanımlı π fonksiyonu bir A -modül homomorfizmasıdır. π ye doğal homomorfizma denir [5].

Önerme 1.3.2. [5] A bir halka, S bir çarpımsal kapalı alt kümesi, $a \in A$ ve Y ile K da bir A -modül X in alt modülleri iseler, aşağıdaki ifadeler sağlanır:

$$\text{a. } S^{-1}(aX) = \frac{a}{1} S^{-1}X.$$

- b. $S^{-1}(Y + K) = (S^{-1}Y) + (S^{-1}K).$
- c. $S^{-1}(Y \cap K) = (S^{-1}Y) \cap (S^{-1}K).$

Tanım 1.3.2. X bir A -modül ise $A \ltimes X = A \times X$ kümesi aşağıdaki işlemlerle birlikte birimli ve değişmeli bir halkadır: her $a, b \in A; x, y \in X$ için,

$$(a, x) + (b, y) = (a + b, x + y)$$

$$(a, x)(b, y) = (ab, ay + bx)$$

Özel olarak, $A \ltimes X$ e A -modül X in Aşık genleşmesi denir [10].

Teorem 1.3.1. [11] X bir A -modül olsun.

- a. $A \ltimes X$ in asal idealleri P , A nın asal ideali olmak üzere $P \ltimes X$ şeklindedir.
- b. $J \subseteq A$ bir ideal, $Y \subseteq X$ bir alt modül ise $J \ltimes Y \subseteq A \ltimes X$ in ideal olması için gerek ve yeter şart $JX \subseteq Y$ dir. Bu durumda $J \ltimes Y$ ye homojen ideal denir.
- c. $J \subseteq A$ bir ideal, $Y \subseteq X$ bir alt modül ve $JX \subseteq Y$ ise $\sqrt{J \ltimes Y} = \sqrt{J} \ltimes X$ dir.

1.4. Noetherian ve Artinian Modüller

Tanım 1.4.1. A bir halka ve X bir A -modül olsun. X in alt modüllerinin her artan

$$Y_1 \subseteq Y_2 \subseteq Y_3 \subseteq \dots \subseteq Y_n \subseteq \dots$$

zinciri sonlu bir adımda durursa X e Noetherian modül denir. Bu özelliğe, kısaca Artan Zincir Koşulu da denir [5].

Önerme 1.4.1. [12] A bir halka ve X bir A -modül olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

- a. X Noetherian modüldür.
- b. X in her alt modülü sonlu üretilmiştir.

- c. X in alt modüllerinin, herhangi bir boştan farklı ailesinin bir maksimal elemanı vardır.

Tanım 1.4.2. A bir halka ve X bir A -modül olsun. X in alt modüllerinin her azalan

$$Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq Y_3 \supseteq \dots \supseteq Y_n \supseteq \dots$$

zinciri sonlu bir adımda durursa X e Artinian modül denir [5].

Önerme 1.4.2. [5] A bir halka ve X bir A -modül olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

- a. X Artinian modüldür.
- b. X in alt modüllerinin, herhangi bir boştan farklı ailesinin bir minimal elemanı vardır.

Tanım 1.4.3. A -modül X in alt modüllerinin, $\bigcap_{i \in \Delta} Y_i = 0$ özelliğini sağlayan herhangi bir $\{Y_i\}_{i \in \Delta}$ ailesi, bazı sonlu $\Delta' \subseteq \Delta$ alt kümesi için $\bigcap_{i \in \Delta'} Y_i = 0$ özelliğini sağlarsa, X e sonlu eş üretilmiş (finitely cogenerated) denir [13].

Önerme 1.4.3. [13] A bir halka ve X bir A -modül olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

- a. X Artinian modüldür.
- b. X in her bir alt modülü Y için, X/Y sonlu eş üretilmiştir.

Önerme 1.4.4. Her Artinian halka Noetheriandır [5].

BÖLÜM 2. KUVVETLİ $dccr^*$ MODÜLLER¹

Zincir koşulları, alanla ilgili çeşitli kavramların karakterizasyonu üzerindeki önemli etkisinden dolayı değişmeli cebirde her zaman çok dikkat çekmiştir. Bu nedenle, birçok araştırmacı, onları diğer kavramlarla daha fazla bağlantıya sahip olacak şekilde genelleştirmeye ve genişletmeye çalıştı. Örneğin (Bkz. [14, 15, 16, 17]). Zincir koşullarını genelleştirmeye yönelik en eski girişimlerden biri, [18] de Lu tarafından tanıtıldı. X in her alt modülü Y ve A nın her sonlu üretilmiş (ya da temel) ideali I için, X in alt modüllerinin artan zinciri $(Y :_X I) \subseteq (Y :_X I^2) \subseteq \dots \subseteq (Y :_X I^n) \subseteq \dots$ durursa, A -modül X i $accr$ (ya da $accr^*$) koşulunu sağlayacak şekilde tanımladı. $accr$ kavramı geniş çapta incelenmiştir, (Bkz. [19, 20]). Daha sonra, Visweswaran, $accr$ koşulundan daha güçlü bir durum üzerinde çalıştı ve onu (C) özelliği ile adlandırdı. X in her alt modülü Y ve A nın elemanlarının her dizisi (a_i) için, X in alt modüllerinin artan zinciri $(Y :_X a_1) \subseteq (Y :_X a_1 a_2) \subseteq \dots \subseteq (Y :_X a_1 a_2 \dots a_n) \subseteq \dots$ durursa, bir A -modül X e (C) özelliğini sağlıyor denir [21].

Taherizadeh, azalan zincirlerde $accr$ dualı tanıttı ve geliştirdi. [22] de, X in her alt modülü Y ve A nın her sonlu üretilmiş (ya da temel) ideali I için, X in alt modüllerinin azalan zinciri $IY \supseteq I^2 Y \supseteq \dots \supseteq I^n Y \supseteq \dots$ bazı adımlardan sonra durursa, bir A -modül X e $dccr$ (ya da $dccr^*$) modül denir. Bundan sonra, $dccr$ koşulları kapsamlı bir şekilde incelenmiştir, (Bkz. [23, 24, 25]). Bu bölümdeki amacımız, (C) özelliğinin bir dualı olan, $dccr^*$ den daha güçlü bir durumu tanıtmak ve araştırmaktır, buna

¹ Bu bölüm aşağıdaki gibi yayınlanmıştır:

Naji, O.A., Özen, M. and Tekir U., "On Strongly $Dccr^*$ Modules", Journal of Algebra and Its Applications, (2021), DOI: 10.1142/S021949882250195X

*kuvvetli dcr** denilecek. *Kuvvetli dcr** , Artinian kavramını genelleştirir ve *dcr** koşulundan daha güçlüdür.

2.1. Kuvvetli *dcr** Modüllerin Karakterizasyonları

Tanım 2.1.1. A bir halka, X bir A -modül olsun. Y , X in bir alt modülü ve (a_i) , A nın elemanlarının bir dizisi olsun. $a_1Y \supseteq a_1a_2Y \supseteq a_1a_2a_3Y \supseteq \dots \supseteq a_1a_2 \dots a_nY \supseteq \dots$ azalan zincirine bir $k \in \mathbb{N}$, her $n \geq k$ için $a_1a_2 \dots a_kY \subseteq a_1a_2 \dots a_nY$ koşulu sağlanacak şekilde bulunabilirse durağan denir.

Tanım 2.1.2. A nın elemanlarının her dizisi (a_i) ve X in her alt modülü Y için $a_1Y \supseteq a_1a_2Y \supseteq a_1a_2a_3Y \supseteq \dots \supseteq a_1a_2 \dots a_nY \supseteq \dots$ azalan zinciri durağan ise A -modül X ye *kuvvetli dcr** koşulunu sağlar denir.

Örnek 2.1.1. Her Artinian modül *kuvvetli dcr** koşulunu sağlar.

Önerme 2.1.1. Her vektör uzayı *kuvvetli dcr** koşulunu sağlar.

İspat. V nin bir K cismi üzerinde bir vektör uzayı olduğu varsayalım. Y , V nin bir alt uzayı ve $a \in K$ olsun. $a = 0$ ise $aY = 0$ ve $a \neq 0$ ise $aY = Y$ olduğuna dikkat edilsin. (a_i) , K nın elemanlarının herhangi bir dizisi olmak üzere ve $a_1Y \supseteq a_1a_2Y \supseteq a_1a_2a_3Y \supseteq \dots \supseteq a_1a_2 \dots a_nY \supseteq \dots$ bir azalan zinciri göz önünde bulundurulsun. Bazı $k \in \mathbb{N}$ için $a_k = 0$ ise, her $n \geq k$ için $a_1a_2 \dots a_kY = a_1a_2 \dots a_nY$ olur. Tüm $i \in \mathbb{N}$ için $a_i \neq 0$ ise, her $n \geq 1$ için $a_1Y = a_1a_2 \dots a_nY$ elde edilir. Bu, V nin *kuvvetli dcr** koşulunu sağladığını gösterir.

Örnek 2.1.1 in tersi genel olarak doğru olmayabilir. Aşağıdaki örnek bunu göstermektedir.

Örnek 2.1.2. W sonsuz boyutlu bir vektör uzayı olsun. O zaman Önerme 2.1.1 e göre, W *kuvvetli dcr** koşulunu sağlar, ancak bir Artinian modül değildir.

Örnek 2.1.3. *Kuvvetli dcr** modülün aynı zamanda *dcr** özelliğini sağlayan bir modül olduğu Tanım 2.1.1 den açıktır. Ancak bunun tersi doğru olmayabilir. p_i bir asal sayı olmak üzere, $X = \prod_{i \in \mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p_i \mathbb{Z}$ bir $\mathbb{Z}$ -modül olsun. $p_1 p_2 \dots p_n X \cong \prod_{i=n+1}^{\infty} p_1 p_2 \dots p_n \mathbb{Z}/p_i \mathbb{Z}$ olduğuna dikkat edilsin. O halde, X in alt modülleri $p_1 X \supseteq p_1 p_2 X \supseteq \dots \supseteq p_1 p_2 \dots p_n X \supseteq \dots$ zinciri, kesin olarak azalan sonsuz bir zincirdir. Bu nedenle, X *kuvvetli dcr** koşulunu sağlamaz. Öte yandan X , *dcr** özelliğini sağlar, (Bkz. [23] Açıklama 1.10).

Örnek 2.1.4. F bir cisim ve tüm $i \neq j$ ve $k \geq 4$ için $x_i x_j = 0$ ve $x_1^3 = x_2^3 = x_3^3 = x_k^2$ olmak üzere A , $\{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ üreteçlerinin olduğu F -cebiri olsun. O halde A , $\mathcal{M} = \bigoplus_{i=1}^{\infty} A x_i$ maksimal idealine sahip olan Artinian olmayan bir yerel halkadır. $\mathcal{M}^3 = 0$ olduğundan A , *kuvvetli dcr** koşulunu sağlayan bir halkadır (çünkü tüm azalan zincirler en fazla 3 adımdan sonra durur).

Her Artinian halkanın Noetherian olduğu iyi bilinmektedir. Örnek 2.1.4, Artinian halkanın genellemesi olarak *kuvvetli dcr** koşulunun Noetherian olmadığını göstermektedir.

Önerme 2.1.2. A bir halka, X bir A -modül olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

- a. X *kuvvetli dcr** koşulunu sağlar.
- b. X in her alt modülü Y ve A nın elemanlarının her dizisi (a_i) olmak üzere, her $n > k$ için $Y = (0 :_Y a_1 a_2 \dots a_k) + a_{k+1} a_{k+2} \dots a_n Y$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{N}$ vardır.

İspat.(a) $\Rightarrow$ (b): Y , X in bir alt modülü ve (a_i) , A nın elemanlarının bir dizisi olsun. X *kuvvetli dcr** olduğundan, her $n \geq k + 1$ için $a_1 a_2 \dots a_k Y = a_1 a_2 \dots a_n Y$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{N}$ vardır. Şimdi, $x \in Y$ olsun. Bazı $y \in Y$ için $a_1 a_2 \dots a_k x = a_1 a_2 \dots a_n y$ olur. Bu durumda, $a_1 a_2 \dots a_k [x - a_{k+1} a_{k+2} \dots a_n y] = 0$ ve böylece $x - a_{k+1} a_{k+2} \dots a_n y \in (0 :_Y a_1 a_2 \dots a_k)$ olur. Her $n \geq k + 1$ için $x \in (0 :_Y a_1 a_2 \dots a_k) + a_{k+1} a_{k+2} \dots a_n Y$ yi verir. Diğer içerme açıktır.

(b) $\Rightarrow$ (a): Y, X in bir alt modülü ve (a_i) , A nın elemanlarının bir dizisi olsun. O zaman varsayımdan, her $n \geq k + 1$ için $Y = (0 :_Y a_1 a_2 \dots a_k) + a_{k+1} a_{k+2} \dots a_n Y$ olacak şekilde $k \in \mathbb{N}$ vardır. Her iki tarafı $a_1 a_2 \dots a_k$ ile çarparak her $n \geq k + 1$ için $a_1 a_2 \dots a_k Y = a_1 a_2 \dots a_n Y$ elde edilir.

Önerme 2.1.3. A bir kuvvetli $dccr^*$ koşulunu sağlayan tamlık bölgesidir ancak ve ancak A bir cisimdir.

İspat. ($\Rightarrow$) a , A nın sıfır olmayan bir elemanı olsun. Böylece varsayımla, azalan zinciri $a\langle a \rangle \supseteq aa\langle a \rangle \supseteq aaa\langle a \rangle \supseteq \dots$ durağındır. Dolayısıyla, tüm $n \geq k$ için $a^k \langle a \rangle = a^n \langle a \rangle$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{N}$ vardır. Bazı $r \in R$ için $a^k a = a^{k+1} r a$ olduğunu gösterir ve böylece $a^{k+1} (1 - r a) = 0$ olur. A tamlık bölgesi ve $a \neq 0$ olduğundan, $r a = 1$ elde edilir.

($\Leftarrow$) Açıktır.

Bir A halkasının E alt kümesine, E nin elemanlarının her $x_1, x_2, x_3, \dots$ dizisi için $x_1 x_2 \dots x_k = 0$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{N}$ varsa, T-nilpotent denir olduğu hatırlansın.

Önerme 2.1.4. A bir kuvvetli $dccr^*$ halka olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır.

- A nın Jacobson radikali T-nilpotenttir.
- A nın Jacobson radikali ve nilradikali eşittir.

İspat.(a): $J(A)$, kuvvetli $dccr^*$ halka A nın Jacobson radikali ve (a_i) , $J(A)$ nın elemanlarının bir dizisi olsun. O zaman Önerme 2.1.2 ye göre, $A = (0 :_A a_1 a_2 \dots a_k) + a_{k+1} A$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{N}$ vardır. Bazı $x \in A$ ve $r \in (0 :_A a_1 a_2 \dots a_k)$ için $1 = r + a_{k+1} x$ ve dolayısıyla $r = 1 - a_{k+1} x$ olur. $a_{k+1} \in J(A)$ olduğundan, r bir birimdir ve dolayısıyla bazı $c \in A$ için $r c = 1$ dir. Bu nedenle, $a_1 a_2 \dots a_k = a_1 a_2 \dots a_k r c = 0$. $c = 0$ dir.

(b): a , A nın Jacobson radikali $J(A)$ nın bir elemanı olsun ve $aA \supseteq a^2A \supseteq \dots \supseteq a^nA \supseteq \dots$, A nın ideallerinin bir azalan zinciri olduğu varsayalım. O zaman $Aa^k = Aa^{k+1}$ olacak şekilde $k \in \mathbb{N}$ vardır. Dolayısıyla, bazı $r \in A$ için $a^k[1 - ra] = 0$ olur. Ancak $a \in J(A)$, yani $1 - ra$ birimseldir. Böylece $a^k = 0$ ve bundan a nın, A nın nilradikalinin bir elemanı olduğu sonucu çıkar.

Sonuç 2.1.1. Aşağıdaki ifadeler sağlanır.

- a. *Kuvvetli dcr** halkanın Jacobson radikali nildir.
- b. *Kuvvetli dcr** indirgenmiş halkanın Jacobson radikali sıfırdır.

İspat. Önerme 2.1.4 ten çıkar.

Önerme 2.1.5. Aşağıdaki ifadeler sağlanır.

- a. A , bir yerel halka ve $\mathcal{M}$, A nın bir tek maksimal ideali olsun. Eğer $\mathcal{M}$ T-nilpotent ise, her A -modül X *kuvvetli dcr** dır.
- b. Eğer A tek bir asal ideal P ye sahip bir halkaysa, bu taktirde her A -modül X , *dcr** koşulunu sağlar.

İspat. (a): X bir A -modül, Y , X in bir alt modülü ve (a_i) , A nın elemanlarının bir dizisi olsun. X in alt modüllerinin bir azalan $a_1Y \supseteq a_1a_2Y \supseteq a_1a_2a_3Y \supseteq \dots \supseteq a_1a_2 \dots a_nY \supseteq \dots$ zinciri göz önüne alınsın. Burada iki durum var. İlk durum, tüm $i \geq k$ için a_i , A da bir birim olacak şekilde $k \in \mathbb{N}$ vardır. Dolayısıyla, her $n \geq k$ için $a_1a_2 \dots a_kY = a_1a_2 \dots a_nY$ olur. Diğer durumda, a_{i_n} , $\mathcal{M}$ nin bir elemanı olmak üzere, (a_i) nin bir alt dizisi (a_{i_n}) vardır. $\mathcal{M}$, T-nilpotent olduğundan, $a_{i_1}a_{i_2} \dots a_{i_k} = 0$ olacak şekilde $k \in \mathbb{N}$ vardır. Yani, tüm $n \geq i_k$ için $a_1a_2 \dots a_nN = 0$ anlamına gelir. Böylece, X bir *kuvvetli dcr** modüldür.

(b): Bunu doğrudan, A nın sıfır olmayan herhangi bir elemanının ya bir birimsel ya da bir nilpotent olduğu gerçeğini kullanarak çıkar.

Lemma 2.1.1. (Çinlilerin Kalan Teoremi) $I + J = A$ olmak üzere, I ve J , A halkasının idealleri olsun. O zaman $A/(I \cap J) \cong A/I \times A/J$ izomorfturlar [5].

Önerme 2.1.6. $f : X \rightarrow X'$ bir A -epimorfizma olsun. X bir *kuvvetli dccr** modül ise, X' da *kuvvetli dccr** modüldür.

İspat. X bir *kuvvetli dccr** modül ve $f : X \rightarrow X'$ bir A -epimorfizma olsun. Y' , X' in bir alt modülü ve (a_i) , A nın elemanlarının bir dizisi olmak üzere, X' modülünün alt modüllerinin bir azalan, $a_1 Y' \supseteq a_1 a_2 Y' \supseteq a_1 a_2 a_3 Y' \supseteq \dots \supseteq a_1 a_2 \dots a_n Y' \supseteq \dots$ zinciri göz önüne alınsın. Şu halde, $a_1 f^{-1}(Y') \supseteq a_1 a_2 f^{-1}(Y') \supseteq a_1 a_2 a_3 f^{-1}(Y') \supseteq \dots \supseteq a_1 a_2 \dots a_n f^{-1}(Y') \supseteq \dots$ de X in alt modüllerinin azalan bir zinciri olur. X *kuvvetli dccr** olduğundan, her $n \geq k$ için, $a_1 a_2 \dots a_k f^{-1}(Y') = a_1 a_2 \dots a_n f^{-1}(Y')$ olacak şekilde bir k tam sayısı vardır. f bir epimorfizma olduğundan, her $n \geq k$ için, $f(a_1 a_2 \dots a_k f^{-1}(Y')) = a_1 a_2 \dots a_k f(f^{-1}(Y')) = a_1 a_2 \dots a_k Y' = f(a_1 a_2 \dots a_n f^{-1}(Y')) = a_1 a_2 \dots a_n Y'$ dir. Yani X' bir *kuvvetli dccr** modüldür.

Teorem 2.1.1. Her $i = 1, 2, \dots, n$ için, X_i bir A_i -modül olsun. $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ ve $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ olduğu varsayılınsın. Aşağıdaki ifadeler denktir.

- a. X *kuvvetli dccr** koşulunu sağlar.
- b. Her $i = 1, 2, \dots, n$ için, X_i *kuvvetli dccr** koşulunu sağlar.

İspat.(a) $\Rightarrow$ (b): X bir *kuvvetli dccr** A -modül olduğu varsayılınsın. $\pi_i : X \rightarrow X_i$, $\pi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_i$ ile tanımlanan bir epimorfizma olsun. Şu halde, Önerme 2.1.6 e göre, her $i = 1, 2, \dots, n$ için X_i bir *kuvvetli dccr** A_i -modüldür.

(b) $\Rightarrow$ (a) : Her $i = 1, 2, \dots, n$ için, X_i bir *kuvvetli dccr** A_i -modül olduğu varsayılınsın. Y_i , X_i nin bir alt modülü ve $a_{ji} \in A_i$ olmak üzere, $Y = Y_1 \times Y_2 \times \dots \times Y_n$, X in bir alt modülü ve $(a_j) = (a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jn})$, A nın elemanlarının bir dizisi olsun. X in alt modüllerinin azalan $a_1 Y \supseteq a_1 a_2 Y \supseteq \dots \supseteq a_1 a_2 \dots a_m Y \supseteq \dots$ zincirinin

durağan olduğu gösterilecek. Yukarıdaki zincirden, $a_{1i}Y_i \supseteq a_{1i}a_{2i}Y_i \supseteq \dots \supseteq a_{1i}a_{2i} \dots a_{mi}Y_i \supseteq \dots$, X_i nin alt modüllerinin azalan bir zinciridir. Yani, her $m \geq k_i$ için, $a_{1i}a_{2i} \dots a_{k_i}Y_i = a_{1i}a_{2i} \dots a_{mi}Y_i$ olacak şekilde $k_i \in \mathbb{N}$ vardır. $k = \max\{k_i : i = 1, 2, \dots, n\}$ olsun. Şimdi, her $m \geq k$ için,

$$\begin{aligned} a_1a_2 \dots a_k Y &= a_{11}a_{21} \dots a_{k1}Y_1 \times a_{12}a_{22} \dots a_{k2}Y_2 \times \dots \times a_{1n}a_{2n} \dots a_{kn}Y_n \\ &\subseteq a_{11}a_{21} \dots a_{k_11}Y_1 \times a_{12}a_{22} \dots a_{k_22}Y_2 \times \dots \times a_{1n}a_{2n} \dots a_{k_nn}Y_n \\ &= a_{11}a_{21} \dots a_{m1}Y_1 \times a_{12}a_{22} \dots a_{m2}Y_2 \times \dots \times a_{1n}a_{2n} \dots a_{mn}Y_n \\ &= a_1a_2 \dots a_m Y \text{ olur.} \end{aligned}$$

Böylece, X bir kuvvetli $dccr^*$ modüldür.

Bir yerel idempotent'in aAa yerel bir halka olacak şekilde bir idempotent $a^2 = a$ olduğu hatırlansın.

Lemma 2.1.2. A bir mükemmel halka olsun. O zaman yerel ortogonal idempotentler e_i için $A = Ae_1 \oplus Ae_2 \oplus \dots \oplus Ae_k$ ve her Ae_i bir birim eleman e_i yi içerir [27].

Lemma 2.1.3. e_1 ve e_2 yerel ortogonal idempotent elemanlar olmak üzere, $A = Ae_1 \oplus Ae_2$ bir halka olsun. Standart çarpma ile her sol A -modül X , $X_1 \oplus X_2$ formuna sahiptir, burada her X_i bir sol Ae_i -modüldür.

İspat. A iki ortogonal idempotent e_1 ve e_2 elemanlarına sahip olduğuna dikkat edilsin ve $e_1 + e_2 = 1$ dir. Dolayısıyla, X bir A -modül ise, her e_iX bir Ae_i -modül olmak üzere, $X = e_1X \oplus e_2X$ dir. $X_i = e_iX$ yazılabilir.

X bir A -modül ve P , A nın bir asal ideali olsun. O zaman $S = A - P$, A nın çarpımsal kapalı bir alt kümesidir. Bir sonraki teorem, X modülü ile yerelleştirmeleri arasındaki kuvvetli $dccr^*$ özelliğini açıklığa kavuşturur.

Teorem 2.1.2. A bir yarı yerel halka ve X bir A -modül olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler denktir:

- a. X kuvvetli $dccr^*$ dır.
- b. $S = A - \mathcal{M}$ ve $\mathcal{M} \in \text{Max}(A)$ olmak üzere, $S^{-1}A$ -modülü $S^{-1}X$,
kuvvetli $dccr^*$ dır.

İspat. (a) $\Rightarrow$ (b): S , A halkasının çarpımsal kapalı bir kümesi ve X bir A -modül olduğu varsayalım. Y , X in bir alt modülü olmak üzere, $S^{-1}Y$, $S^{-1}X$ in bir alt modülü ve $\left(\frac{a_i}{s_i}\right)$, $S^{-1}A$ nın elemanlarının bir dizisi olsun. $S^{-1}X$ modülünün alt modüllerinin bir azalan, $\frac{a_1}{s_1}S^{-1}Y \supseteq \frac{a_1 a_2}{s_1 s_2}S^{-1}Y \supseteq \dots \supseteq \frac{a_1 a_2}{s_1 s_2} \dots \frac{a_n}{s_n}S^{-1}Y \supseteq \dots$ zinciri göz önüne alalım. $a_1Y \supseteq a_1 a_2 Y \supseteq a_1 a_2 a_3 Y \supseteq \dots \supseteq a_1 a_2 \dots a_n Y \supseteq \dots$ zinciri X de durağan olduğundan, her $n \geq k$ için, $a_1 a_2 \dots a_k Y = a_1 a_2 \dots a_n Y$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{N}$ vardır. Her $n \geq k$ için, $\frac{a_1 a_2}{s_1 s_2} \dots \frac{a_k}{s_k} S^{-1}Y = \frac{a_1 a_2}{s_1 s_2} \dots \frac{a_n}{s_n} S^{-1}Y$ olduğu gösterilecek. $\frac{x}{t} \in \frac{a_1 a_2}{s_1 s_2} \dots \frac{a_k}{s_k} S^{-1}Y$ olsun. Şu halde, bazı $y \in Y$ ve $u \in S$ için, $\frac{x}{t} = \frac{a_1 a_2}{s_1 s_2} \dots \frac{a_k}{s_k} \frac{y}{u}$ olur. Dolayısıyla $vus_1 s_2 \dots s_k x = vta_1 a_2 \dots a_k y \in a_1 a_2 \dots a_k Y$ olacak şekilde $v \in S$ vardır. Bu, her $n \geq k$ için, $vus_1 s_2 \dots s_k x \in a_1 a_2 \dots a_n Y$ anlamına gelir. Böylece, her $n \geq k$ için, $\frac{x}{t} = \frac{vus_1 s_2 \dots s_k x}{vus_1 s_2 \dots s_k t} \in S^{-1}(a_1 a_2 \dots a_n Y) = \frac{a_1 a_2}{1 \ 1} \dots \frac{a_n}{1} S^{-1}Y \subseteq \frac{a_1 a_2}{s_1 s_2} \dots \frac{a_n}{s_n} S^{-1}Y$ olur. Bu nedenle, $S^{-1}X$ kuvvetli $dccr^*$ dır.

(b) $\Rightarrow$ (a): Y , X in bir alt modülü ve (a_i) , A in elemanlarının bir dizisi olsun. X modülünün alt modüllerinin bir azalan, $a_1 Y \supseteq a_1 a_2 Y \supseteq a_1 a_2 a_3 Y \supseteq \dots \supseteq a_1 a_2 \dots a_n Y \supseteq \dots$ zinciri ele alalım. $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \dots, \mathcal{M}_t$, A nın tüm maksimal idealleri olsun. Her $i \in \{1, 2, \dots, t\}$ ve $S_i = A - \mathcal{M}_i$ için, $S_i^{-1}X$ in alt modüllerinin azalan $\frac{a_1}{1} S_i^{-1}Y \supseteq \frac{a_1 a_2}{1 \ 1} S_i^{-1}Y \supseteq \dots \supseteq \frac{a_1 a_2}{1 \ 1} \dots \frac{a_n}{1} S_i^{-1}Y \supseteq \dots$ zinciri durağandır. Her $n \geq k_i$ için, $\frac{a_1 a_2}{1 \ 1} \dots \frac{a_{k_i}}{1} S_i^{-1}Y = \frac{a_1 a_2}{1 \ 1} \dots \frac{a_n}{1} S_i^{-1}Y$ olacak şekilde bir $k_i \in \mathbb{N}$ vardır. $k = \{k_1, k_2, \dots, k_t\}$ olsun. Her $n \geq k$ ve $i = 1, 2, \dots, t$ için, $\frac{a_1 a_2}{1 \ 1} \dots \frac{a_k}{1} S_i^{-1}Y = \frac{a_1 a_2}{1 \ 1} \dots \frac{a_n}{1} S_i^{-1}Y$ ve $S_i^{-1}(a_1 a_2 \dots a_k Y) = S_i^{-1}(a_1 a_2 \dots a_n Y)$ olur. [12] (Sonuç, Sayfa 164) ile, her $n \geq k$ için, $a_1 a_2 \dots a_k Y = a_1 a_2 \dots a_n Y$ elde edilir.

[15] ten hatırlansın ki, A nın elemanlarının her dizisi (a_i) için, X in alt modüllerinin artan zinciri $Ann(a_1) \subseteq Ann(a_1 a_2) \subseteq \dots \subseteq Ann(a_1 a_2 \dots a_n) \subseteq \dots$ durağan ise, bir A -modül X e d-sıfırlayıcılar üzerinde ACC yi sağlıyor denir. Şimdi, X bir kuvvetli $dccr^*$ A -modül ise, $A/Ann_A(Y)$ halkası, X in her sıfır olmayan alt modülü Y için d-sıfırlayıcılar üzerinde ACC ye sahip olduğu gösterilecek.

Önerme 2.1.7. A bir halka ve X bir kuvvetli $dccr^*$ A -modül olsun. X in her alt modülü Y ve A nın elemanlarının her dizisi (a_i) için, A nın ideallerinin artan zinciri $Ann_A(a_1 Y) \subseteq Ann_A(a_1 a_2 Y) \subseteq \dots \subseteq Ann_A(a_1 a_2 \dots a_n Y) \subseteq \dots$ durağandır.

İspat. $Ann_A(a_1 Y) \subseteq Ann_A(a_1 a_2 Y) \subseteq \dots \subseteq Ann_A(a_1 a_2 \dots a_n Y) \subseteq \dots$ zinciri göz önüne alınsın. X kuvvetli $dccr^*$ olduğundan, her $n \geq k$ için $a_1 a_2 \dots a_k Y = a_1 a_2 \dots a_n Y$ olacak şekilde $k \in \mathbb{N}$ vardır. Bu, her $n \geq k$ için hemen $Ann_A(a_1 a_2 \dots a_k Y) = Ann_A(a_1 a_2 \dots a_n Y)$ verir.

Sonuç 2.1.2. X bir kuvvetli $dccr^*$ A -modül ve Y , X in sıfır olmayan bir alt modülü olsun. $A/Ann_A(Y)$ halkası d-sıfırlayıcılar üzerinde ACC ye sahiptir.

İspat. (a_i) , A nın elemanlarının bir dizisi olsun. $A/Ann_A(Y)$ nin ideallerinin artan $Ann(a_1 + Ann_A(Y)) \subseteq Ann(a_1 a_2 + Ann_A(Y)) \subseteq \dots \subseteq Ann(a_1 a_2 \dots a_n + Ann_A(Y)) \subseteq \dots$ zinciri ele alınsın. $Ann(a + Ann_A(Y)) = \{r + Ann_A(Y) : r + Ann_A(Y) \in A/Ann_A(Y) \text{ and } r \in Ann_A(aY)\}$ olduğuna dikkat edilsin. Dolayısıyla, $Ann_A(a_1 Y) \subseteq Ann_A(a_1 a_2 Y) \subseteq \dots \subseteq Ann_A(a_1 a_2 \dots a_n Y) \subseteq \dots$ zinciri durursa yukarıdaki zincir durur. Böylece Önerme 2.1.7 ile ispat tamamlanır.

Önerme 2.1.8. X bir kuvvetli $dccr^*$ A -modül ve $f: X \rightarrow X$ skaler çarpma ile elde edilen bir A -endomorfizma olsun. f nin bir izomorfizma olması için gerek ve yeter koşul f nin bire-bir olmasıdır.

İspat. $(\Rightarrow)$: Açıktır.

($\Leftarrow$): $a \in A$ olmak üzere, $f(x) = ax$ ile tanımlanan bir $f: X \rightarrow X$ A -endomorfizması olsun. X in alt modüllerinin aşağıdaki azalan $f(X) \supseteq f^2(X) \supseteq f^3(X) \supseteq \dots \supseteq f^n(X) \supseteq \dots$ zinciri göz önünde bulundursun. Son zincir $aX \supseteq a^2X \supseteq a^3X \supseteq \dots \supseteq a^nX \supseteq \dots$ ye denktir. Dolayısıyla, $a^kX = a^{k+1}X$ olacak şekilde $k \in \mathbb{N}$ vardır. Bu, $f^k(X) = a^kX = a^{k+1}X = f^{k+1}(X) = f^k(f(X))$ anlamına gelir. Böylece, $X = f(X)$ olur.

Teorem 2.1.3. Y , A -modül X in bir alt modülü olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

- a. X kuvvetli $dccr^*$ dır.
- b. Y ve X/Y kuvvetli $dccr^*$ dır.

İspat. (a) $\Rightarrow$ (b): Önerme 2.1.6 den çıkar.

(b) $\Rightarrow$ (a): Y ve X/Y nin kuvvetli $dccr^*$ olduğu varsayalım. K , X in bir alt modülü ve (a_i) , A nın elemanlarının bir dizisi olsun. X in alt modüllerinin azalan $a_1K \supseteq a_1a_2K \supseteq \dots \supseteq a_1a_2 \dots a_nK \supseteq \dots$ zinciri ele alınsın. Bazı $k \in \mathbb{N}$ ve her $n \geq k$ için $a_1a_2 \dots a_kK = a_1a_2 \dots a_nK$ olduğu gösterilecek. $a_1(K \cap Y) \supseteq a_1a_2(K \cap Y) \supseteq \dots \supseteq a_1a_2 \dots a_n(K \cap Y) \supseteq \dots$, Y nin azalan alt modüllerinin bir zinciri olduğundan, tüm $n \geq k_1$ için $a_1a_2 \dots a_{k_1}(K \cap Y) = a_1a_2 \dots a_n(K \cap Y)$ olacak şekilde $k_1 \in \mathbb{N}$ vardır. Öte yandan, $a_{k_1+1}[(K+Y)/Y] \supseteq a_{k_1+1}a_{k_1+2}[(K+Y)/Y] \supseteq \dots$, X/Y nin alt modüllerinin azalan bir zinciridir. Yani, tüm $n \geq k_1 + k_2$ için $a_{k_1+1}a_{k_1+2} \dots a_{k_1+k_2}[(K+Y)/Y] = a_{k_1+1}a_{k_1+2} \dots a_n[(K+Y)/Y]$ olacak şekilde $k_2 \in \mathbb{N}$ vardır. Bu, tüm $n \geq k_1 + k_2$ için $a_{k_1+1}a_{k_1+2} \dots a_{k_1+k_2}K + Y = a_{k_1+1}a_{k_1+2} \dots a_nK + Y$ verir. $x \in K$ ve $n \geq k = k_1 + k_2$ olsun. $a_{k_1+1}a_{k_1+2} \dots a_{k_1+k_2}x \in a_{k_1+1}a_{k_1+2} \dots a_{k_1+k_2}K + Y = a_{k_1+1}a_{k_1+2} \dots a_nK + Y$ dir. Dolayısıyla, bazı $y \in K$ ve $m \in Y$ için $a_{k_1+1}a_{k_1+2} \dots a_{k_1+k_2}x = a_{k_1+1}a_{k_1+2} \dots a_ny + m$ olur. $x, y \in K$ olduğundan, $m \in K$ ve $m \in K \cap Y$ elde edilir. Şu halde, $a_1a_2 \dots a_{k_1}m = a_1a_2 \dots a_nm'$ olacak şekilde $m' \in Y$ vardır. Böylece, $a_1a_2 \dots a_{k_1+k_2}x = a_1a_2 \dots a_ny + a_1a_2 \dots a_{k_1}m = a_1a_2 \dots a_ny + a_1a_2 \dots a_nm' \in a_1a_2 \dots a_nK$ olur. Bu nedenle, X kuvvetli $dccr^*$ dır.

Sonuç 2.1.3. A bir halka ve $0 \rightarrow X' \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} X'' \rightarrow 0$, A -modüllerin bir kısa tam dizisi olsun. X modülünün *kuvvetli dcr** olması için gerek ve yeter koşul X' modülü ve X'' modülünün *kuvvetli dcr** olmasıdır.

Sonuç 2.1.4. X bir A -modül ve $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ de X modülünün *kuvvetli dcr** alt modülleri olsunlar. Bu taktirde, $Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$ de *kuvvetli dcr** dır.

İspat. Y_1 ve Y_2 *kuvvetli dcr** olduğu varsayalım. Şu halde Teorem 2.1.3 e göre, $Y_1 / (Y_1 \cap Y_2)$ bir *kuvvetli dcr** dır. Ancak İkinci İzomorfizma Teoremi ile $(Y_1 + Y_2) / Y_2 \cong Y_1 / (Y_1 \cap Y_2)$ elde edilir. Böylece, $(Y_1 + Y_2) / Y_2$ *kuvvetli dcr** dır. Bu nedenle, yine Teorem 2.1.3 e göre, $Y_1 + Y_2$ *kuvvetli dcr** dır. Dolayısıyla, n ye tümevarım uygulayarak, $Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$ nin *kuvvetli dcr** olduğu elde edilir.

2.2. Esas Olarak Eş Üretilmiş Modüller

Tanım 2.2.1. A bir halka ve X bir A -modül olsun. $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} a_1 a_2 \dots a_n Y = 0$ özelliğini sağlayan X in her alt modülü Y ve A nın elemanlarının bir dizisi, bir $k \in \mathbb{N}$ için $a_1 a_2 \dots a_k Y = 0$ özelliğini sağlarsa, A -modül X e esas olarak eş üretilmiş denir.

Bir sonraki teoremdede, *kuvvetli dcr** modüller esas olarak eş üretilmiş modüller açısından karakterize edilecek.

Teorem 2.2.1. A bir halka ve X bir A -modül olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

- X bir *kuvvetli dcr** modüldür.
- Y , X in alt modülü ve (a_i) , A nın elemanlarının dizisi olmak üzere, her boş olmayan $\mathfrak{S} = \{a_1 a_2 \dots a_i Y : i \in \mathbb{N}\}$ ailesi minimal bir elemana sahiptir.
- Her X/Y bölüm modülü esas olarak eş üretilmiş A -modüldür.

İspat. (a) $\Rightarrow$ (b): X bir kuvvetli $dccr^*$ A -modül olsun. Y, X in bir alt modülü ve $(a_i), A$ nın elemanlarının bir dizisi olmak üzere, $\mathfrak{S} = \{a_1 a_2 \dots a_i Y : i \in \mathbb{N}\}$ olsun. $\mathfrak{S}, X$ de azalan bir dizi olduğundan, her $n \geq k$ için $a_1 a_2 \dots a_k Y = a_1 a_2 \dots a_n Y$ olacak şekilde $k \in \mathbb{N}$ vardır. Dolayısıyla, tüm $i \in \mathbb{N}$ için $a_1 a_2 \dots a_k Y \subseteq a_1 a_2 \dots a_i Y$ dir. Böylece, $a_1 a_2 \dots a_i Y$ bir minimal elemandır.

(b) $\Rightarrow$ (c): $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} a_1 a_2 \dots a_i L / Y = 0_{X/Y}$ olacak şekilde $L/Y, X/Y$ nin bir alt modülü ve $(a_i), A$ nın elemanlarının bir dizisi olsun. $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} a_1 a_2 \dots a_i L = Y$ olur.

$\mathcal{T} = \{\bigcap_{i=1}^k a_1 a_2 \dots a_i L : k \in \mathbb{N}\} = \{a_1 a_2 \dots a_i L : i \in \mathbb{N}\}$ olsun. Yani hipoteze göre, bazı $k \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{T}$, minimal bir $a_1 a_2 \dots a_k L$ elemanına sahiptir. $r \geq k$ olsun. $a_1 a_2 \dots a_k L \cap a_1 a_2 \dots a_r L = a_1 a_2 \dots a_r L \in \mathcal{T}$ olduğuna dikkat edilsin. Dolayısıyla $a_1 a_2 \dots a_k L$ nin minimalliği ile $a_1 a_2 \dots a_k L = a_1 a_2 \dots a_r L$ elde edilir. $a_1 a_2 \dots a_k L = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} a_1 a_2 \dots a_i L = Y$ yi verir. Böylece, $a_1 a_2 \dots a_i L / Y = 0_{X/Y}$ dır.

(c) $\Rightarrow$ (a): Her X/Y bölüm modülü esas olarak eş üretilmiş A -modül olduğu varsayalım. Y, X in bir alt modülü ve $(a_i), A$ nın elemanlarının bir dizisi olmak üzere, X in alt modüllerinin azalan $a_1 Y \supseteq a_1 a_2 Y \supseteq \dots \supseteq a_1 a_2 \dots a_n Y \supseteq \dots$ zinciri göz önüne alınsın. $K = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} a_1 a_2 \dots a_i Y$ olsun. Varsayım ile, X/K principally eş üretilmiş A -modüldür ve $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} a_1 a_2 \dots a_i (Y/K) = 0_{X/K}$ dır. Yani, $a_1 a_2 \dots a_k Y / K = 0_{X/K}$ olacak şekilde $k \in \mathbb{N}$ vardır. Dolayısıyla tüm $n \geq k$ için, $a_1 a_2 \dots a_k Y = K = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} a_1 a_2 \dots a_i Y \subseteq a_1 a_2 \dots a_n Y$ ve $a_1 a_2 \dots a_k Y = a_1 a_2 \dots a_n Y$ olur. Bu nedenle, X kuvvetli $dccr^*$ dır.

Y, A -modül X in bir alt modülü ve $(a_i), A$ nın elemanlarının bir dizisi olsun. Eğer X esas olarak eş üretilmiş ve tüm $i \in \mathbb{N}$ için $a_1 a_2 \dots a_i Y \neq 0$ ise, şu halde, $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} a_1 a_2 \dots a_i Y \neq 0$ olur. Y nin, X in sıfır olmayan her bir alt modülüyle kesişimi sıfırdan farklıysa, Y ye esaslı denir olduğu hatırlansın. Bir sonraki önermede, eğer bir A -modül X esaslı esas olarak eş üretilmiş bir alt modülüne sahip ise, X in kendisi esas olarak eş üretilmiş olduğu gösterilecek.

Önerme 2.2.1. A bir halka ve Y, X in bir A -alt modülü olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır:

- a. X esas olarak eş üretilmiş ise, Y de öyledir.
- b. Y esaslı esas olarak eş üretilmiş ise, X esas olarak eş üretilmiştir.

İspat.(a): Açıktır.

(b): L, X in bir alt modülü ve (a_i) , A nın bir elemanlarının dizisi olsun. Tüm $i \in \mathbb{N}$ ve $K = L \cap Y$ için $a_1 a_2 \dots a_i L \neq 0$ olduğu varsayalım. Y esaslı olduğundan, her i için $a_1 a_2 \dots a_i K = a_1 a_2 \dots a_i (L \cap Y) \subseteq a_1 a_2 \dots a_i L \cap Y \neq 0$ olur. Dolayısıyla, $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} a_1 a_2 \dots a_i K \neq 0$ elde ederiz. Böylece özellikle, $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} a_1 a_2 \dots a_i L \neq 0$ olur. Bu nedenle, X esas olarak eş üretilmiştir.

2.3. Kuvvetli Özel Modüller

Tanım 2.3.1. A bir halka, X bir A -modül olsun. X in her x elemanı ve A nın herhangi bir J maksimal idealinin elemanlarının herhangi bir dizisi (a_i) için, $ca_1 a_2 \dots a_n x = 0$ olacak şekilde $n \in \mathbb{N}$ ve $c \in A - J$ varsa, bir A -modül X ye bir kuvvetli özel modül denir.

Önerme 2.3.1. A bir halka ve X bir kuvvetli özel A -modül olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır:

- a. X in her alt modülü ve homomorfik görüntüsü kuvvetli özeldir.
- b. Kuvvetli özel modüllerin direkt toplamı da kuvvetli özeldir.
- c. A -modül A kuvvetli özel ise, A sıfır boyutludur.

İspat.(a): Açıktır.

(b): $\mathcal{M}$, A nın bir maksimal ideali ve $X = \bigoplus_{i \in \Delta} X_i$, kuvvetli özel alt modüller X_i nin direkt toplamı olduğu varsayalım. $x \in X$ ve (a_i) , $\mathcal{M}$ nin elemanlarının bir dizisi olsun. $i \in \Delta'$ olmak üzere, bazı sonlu alt küme $\Delta' \subseteq \Delta$ ve $x_i \in X_i$ elemanları için, $x =$

$\sum_{i \in \Delta'} x_i$ olur. Her $i \in \Delta'$ için, $c_i a_1 a_2 \dots a_{n_i} x_i = 0$ olacak şekilde $n_i \in \mathbb{N}$ ve $c_i \in A - \mathcal{M}$ vardır. $n = \sum_{i \in \Delta'} n_i \in \mathbb{N}$ ve $c = \prod_{i \in \Delta'} c_i \in A - \mathcal{M}$ olsun. $c a_1 a_2 \dots a_n x = \sum_{i \in \Delta'} c a_1 a_2 \dots a_n x_i = 0$ olur. Böylece istenen elde edilmiş olur.

(c): A nın sıfır boyutlu bir halka olmadığı varsayalım. O halde, $P \subsetneq \mathcal{M}$ olacak şekilde bir asal ideal P ve bir maksimal ideal $\mathcal{M}$ vardır. (a_i) , $\mathcal{M} - P$ nin elemanlarının bir dizisi olsun. A -modül A kuvvetli özel olduğundan, $c a_1 a_2 \dots a_n 1 = 0$ olacak şekilde $n \in \mathbb{N}$ ve $c \in A - \mathcal{M}$ vardır. Dolayısıyla, $c a_1 a_2 \dots a_n \in P$ ve, bazı j için $a_j \in P$ yi verir. Çelişkidir. Bu nedenle, A sıfır boyutludur.

Önerme 2.3.2. A bir halka ve X bir A -modül olsun. Her $0 \leq i < r$ için X_{i+1}/X_i kuvvetli özel olacak şekilde X in alt modüllerinin bir artan

$$0 = X_0 \subseteq X_1 \subseteq \dots \subseteq X_t \subseteq \dots \subseteq X_r = X$$

zinciri varsa, bu taktirde, X bir kuvvetli özel modüldür.

İspat. X in kuvvetli özel olmadığı varsayalım. Her $n \in \mathbb{N}$ ve her $c \in A - \mathcal{M}$ için, $c a_1 a_2 \dots a_n x \neq 0$ olacak şekilde bir $x \in X$ ve maksimal ideal $\mathcal{M}$ nin elemanlarının bir dizisi (a_i) vardır. X_t , böyle bir x elemanını içeren zincirdeki en küçük alt modül olduğu varsayalım. X_t/X_{t-1} kuvvetli özel olduğundan, $c_1 a_1 a_2 \dots a_{n_1} (x + X_{t-1}) = X_{t-1}$ olacak şekilde $n_1 \in \mathbb{N}$ ve $c_1 \in A - \mathcal{M}$ vardır. $c_1 a_1 a_2 \dots a_{n_1} x \in X_{t-1}$ olur. Dolayısıyla, $c_2 a_{n_1+1} a_{n_1+2} \dots a_{n_1+n_2} [c_1 a_1 a_2 \dots a_{n_1} x] = 0$ olacak şekilde $n_2 \in \mathbb{N}$ ve $c_2 \in A - \mathcal{M}$ vardır. $n = n_1 + n_2 \in \mathbb{N}$ ve $c = c_1 c_2 \in A - \mathcal{M}$ olsun. Şu halde, $c a_1 a_2 \dots a_n x = 0$ olur, bir çelişkidir. Bu nedenle, X kuvvetli özeldir.

Ordinal sayılarını kullanırsak, Önerme 2.3.2 nin geçerli kalacağına dikkat edilsin. Her $0 \leq \alpha < r$ için $X_{\alpha+1}/X_\alpha$ nın özel olduğunu ve α nın bir limit ordinal olduğunu varsayarak, $X_\alpha = \bigcup_{0 \leq \beta < \alpha} X_\beta$ olarak ve Önerme 2.3.2 deki aynı argümanı kullanarak sonuç çıkar.

Teorem 2.3.1. A bir halka ve X bir A -modül olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

- a. X kuvvetli özeldir.
- b. X in devirli alt modülleri kuvvetli özeldir.
- c. X in sıfırdan farklı her homomorfik görüntüsü, sıfırdan farklı, bir kuvvetli özel alt modüle sahiptir.

İspat. (a) $\Leftrightarrow$ (b): Açıktır.

(a) $\Rightarrow$ (c): Önerme 2.3.1 den çıkar.

(c) $\Rightarrow$ (a): (c) ün geçerli olduğu varsayalım. Bu nedenle, X sıfırdan farklı bir kuvvetli özel alt modül X_1 i içerir. Eğer $X = X_1$ ise işimiz bitti. $X \neq X_1$ olduğu varsayalım. O halde, X_2 , X in X_1 i has olarak içeren bir alt modülü olmak üzere, X/X_1 , bir sıfırdan farklı kuvvetli özel alt modül X_2/X_1 i içeren sıfırdan farklı bir modüldür. Yine $X_2 = X$ veya X_2 yi has olarak içeren bazı alt modül X_3 için X_3/X_2 kuvvetli özeldir. Bu şekilde devam ederek, X in alt modüllerinin artan bir $0 = X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \dots \subsetneq X_\alpha \subsetneq \dots$ zinciri elde edilir. Ayrıca, her ordinal α için, $X_{\alpha+1}/X_\alpha$ kuvvetli özeldir ve α bir limit ordinal olmak üzere, $X_\alpha = \bigcup_{0 \leq \beta < \alpha} X_\beta$ tanımlansın. Bazı ordinal $r \geq 0$ için $X = X_r$ olduğu açıktır. Böylece Önerme 2.3.2 ile X in kuvvetli özel olduğu elde edilir.

Önerme 2.3.3. Bir *kuvvetli dcr** modül kuvvetli özeldir.

İspat. $x \in X$ ve (a_i) , A nın $\mathcal{M}$ maksimal idealinin elemanlarının bir dizisi olsun. X in alt modüllerinin aşağıdaki azalan $a_1(Ax) \supseteq a_1a_2(Ax) \supseteq a_1a_2a_3(Ax) \supseteq \dots \supseteq a_1a_2 \dots a_n(Ax) \supseteq \dots$ zinciri elde edilir. $a_1a_2 \dots a_k(Ax) = a_1a_2 \dots a_{k+1}(Ax)$ olacak şekilde $k \in \mathbb{N}$ vardır. Dolayısıyla, bazı $r \in A$ için $a_1a_2 \dots a_k[1 - ra_{k+1}]x = 0$ dır. $a_{k+1} \in \mathcal{M}$ olduğundan, $c = 1 - ra_{k+1} \in A - \mathcal{M}$ olur. Böylece istenen elde edilmiş olur.

Sonuç 2.3.1. Bir *kuvvetli dcr** halka sıfır boyutludur.

İspat. Önerme 2.3.1(c) ve Önerme 2.3.3 ten çıkar.

Sonuç 2.3.2. Bir Noetherian ve *kuvvetli dcr** halka Artiniandır.

İspat. A halkası Artiniandır ancak ve ancak o Noetherian ve Krull boyutu sıfırdır kullanılarak ve Sonuç 2.3.1 den çıkar.

Cisim olmayan bir tek üreteçli ideal tamlık bölgesinin bir (Krull) boyuta sahip olduğuna dikkat edilsin ve bu nedenle bir *kuvvetli dcr** değildir. Bir yerel Artinian tek üreteçli ideal halkaya bir özel halka dendiği hatırlansın. Sonraki sonuç, tek üreteçli ideal halka üzerinde *kuvvetli dcr** kavramının bir karakterizasyonu verilecek.

Sonuç 2.3.3. Bir tek üreteçli ideal halka *kuvvetli dcr** dır ancak ve ancak o özel halkaların sonlu direkt çarpımıdır.

İspat. Bir tek üreteçli ideal halkanın, tek üreteçli ideal tamlık bölgesinin ve özel halkanın sonlu direkt çarpımı olarak yazılabileceğini belirtmek yeterlidir [28]. Sonuç 2.3.2, Teorem 2.1.1 ve bu sonucun üzerindeki notu uygulayarak sonuç çıkar.

Önerme 2.3.4. Bir yerel halka üzerinde bir kuvvetli özel Noetherian modül *kuvvetli dcr** dır.

İspat. $\mathcal{M}$, A nın tek maksimal ideali olmak üzere, A bir yerel halka, Y , A -modül X in bir alt modülü ve (a_i) , A nın elemanlarının bir dizisi olsun. X in alt modüllerinin azalan $a_1Y \supseteq a_1a_2Y \supseteq \dots \supseteq a_1a_2 \dots a_nY \supseteq \dots$ zinciri ele alınsın. Y Noetherian olduğundan, $Y = Am_1 + Am_2 + \dots + Am_t$ olacak şekilde $m_1, m_2, \dots, m_t \in Y$ vardır. X in kuvvetli özel olduğu varsayımıyla, her m_i için, $c_ia_1a_2 \dots a_{n_i}m_i = 0$ olacak şekilde $n_i \in \mathbb{N}$ ve $c_i \in A - \mathcal{M}$ vardır. A bir yerel halka ve $c_i \notin \mathcal{M}$ olduğundan, her i için c_i birimseldir. $n = \max\{n_i : i = 1, 2, \dots, t\}$ olsun. Her i için $a_1a_2 \dots a_nm_i = 0$ olduğuna dikkat edilsin ve $a_1a_2 \dots a_nY = 0$ olur. Bu nedenle, X *kuvvetli dcr** dır.

Teorem 2.3.2. A bir yerel halka ve X bir Noetherian A -modül olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

- a. X bir kuvvetli $dccr^*$ modüldür.
- b. X bir kuvvetli özel modüldür.

İspat. Doğrudan Önerme 2.3.3 ve Önerme 2.3.4 ten çıkar.

2.4. Kuvvetli $dccr^*$ ve Nakayama'nın Lemması

Bu kısımda, *kuvvetli $dccr^*$* kavramı ışığında Birlik Teoremi ve Nakayama'nın Lemmasının bir versiyonu verilecek. Bunu yapmak için, ilk önce kuvvetli Co-Artin Rees özelliği tanıtılacak.

Tanım 2.4.1. (a_i) , bir A halkasının elemanlarının dizisi ve Y , A -modül X in bir alt modülü olsun. Her $n \geq k$ için $(Y :_X \sum Aa_i) \subseteq (0 :_X a_1 a_2 \dots a_n) + Y$ olacak şekilde bir pozitif k tamsayısı varsa, Y ve (a_i) için kuvvetli Co-Artin Rees özelliğinin geçerli olduğu söylenir.

Önerme 2.4.1. A bir halka ve X bir kuvvetli $dccr^*$ A -modül olsun. Bu taktirde, X in her alt modülü Y ve A nın elemanlarının her dizisi (a_i) için kuvvetli Co-Artin Rees özelliği geçerlidir.

İspat. Y , X in bir alt modülü ve (a_i) , A nın elemanlarının bir dizisi olsun. X kuvvetli $dccr^*$ olduğundan, Önerme 2.1.2 kullanılarak tüm $n > k$ için

$$(Y :_X \sum Aa_i) = (0 :_X a_1 a_2 \dots a_k) + a_{k+1} a_{k+2} \dots a_n (Y :_X \sum Aa_i)$$

olacak şekilde $k \in \mathbb{N}$ vardır. Her i için $a_i(Y :_X \sum Aa_i) \subseteq Y$ olduğundan, tüm $n \geq k + 1$ için $(Y :_X \sum Aa_i) \subseteq (0 :_X a_1 a_2 \dots a_n) + Y$ elde edilir.

Önerme 2.4.2. (a_i) , A halkasının elemanlarının bir dizisi ve Y , kuvvetli $dccr^*$ A -modül X in bir alt modülü olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır:

- a. $Y, \bigcup_{n=1}^{\infty} (0 :_X \prod_{i=1}^n Aa_i)$ yi içeriyorsa, şu halde $Y, (Y :_X \sum Aa_i)$ yi de içerir.
- b. Her i için $(Y :_X Aa_i) \subseteq Y$ ise, $\bigcup_{n=1}^{\infty} (0 :_X \prod_{i=1}^n Aa_i) \subseteq Y$ dir.

İspat.(a): $\bigcup_{n=1}^{\infty} (0 :_X \prod_{i=1}^n Aa_i) \subseteq Y$ olsun. O halde Önerme 2.4.1 ile, tüm $n \geq k$ için $(Y :_X \sum Aa_i) \subseteq (0 :_X a_1 a_2 \dots a_n) + Y$ olacak şekilde $k \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece istenen elde edilmiş olur.

(b): Her i için $(Y :_X Aa_i) \subseteq Y$ olsun. Tümevarımla, her $n \in \mathbb{N}$ için $(0 :_X \prod_{i=1}^n Aa_i) \subseteq Y$ olduğunu gösteriyoruz. Gerçekten, $(0 :_X Aa_1) \subseteq (Y :_X Aa_1) \subseteq Y$ olduğundan, $n = 1$ için ifade doğrudur. İfadenin n için doğru olduğu varsayalım. $x \in (0 :_X \prod_{i=1}^{n+1} Aa_i)$ olsun. Şu halde, $a_1 a_2 \dots a_{n+1} x = 0$ ve $a_{n+1} x \in (0 :_X a_1 a_2 \dots a_n) \subseteq Y$ olur. Bu da $x \in (Y :_X Aa_{n+1}) \subseteq Y$ anlamına gelir. Böylece, $\bigcup_{n=1}^{\infty} (0 :_X \prod_{i=1}^n Aa_i) \subseteq Y$ dir.

Önerme 2.4.3. (Birleşim Teoremi) A bir halka ve (a_i) , A nın elemanlarının bir dizisi olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır:

- a. $\sum Aa_i$, A nın Jacobson $J(A)$ radikalinde bulunuyorsa, bu taktirde, her kuvvetli $dccr^*$ A -modül X için, $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} (0 :_X \prod_{i=1}^n Aa_i)$ dir.
- b. Tüm A -modül X için $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} (0 :_X \prod_{i=1}^n Aa_i)$ ise, şu halde, $\bigcap_{n=1}^{\infty} Aa_i$, Jacobson radikal $J(A)$ içinde bulunur.

İspat. (a): $\sum Aa_i \subseteq J(A)$ ve X bir kuvvetli $dccr^*$ A -modül olduğu varsayalım. $x \in X$ olsun. $\bigcup_{n=1}^{\infty} (0 :_X \prod_{i=1}^n Aa_i) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (0 :_X \prod_{i=1}^n Aa_i) + \sum Aa_i x$ olduğundan, Önerme 2.4.2(a) ile

$$x \in \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(0 :_X \prod_{i=1}^n Aa_i \right) + \sum Aa_i x :_X \sum Aa_i \right) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(0 :_X \prod_{i=1}^n Aa_i \right) + \sum Aa_i x$$

elde edilir.

Yani, bazı $a \in \sum Aa_i$ ve $m \in \bigcup_{n=1}^{\infty} (0 :_X \prod_{i=1}^n Aa_i)$ için $x = m + ax$ şeklinde yazılabilir. Şu halde, $(1 - a)x = m \in \bigcup_{n=1}^{\infty} (0 :_X \prod_{i=1}^n Aa_i)$ dir. Ancak $\sum Aa_i \subseteq J(A)$, $1 - a$, A nın birimselidir. Böylece, $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} (0 :_X \prod_{i=1}^n Aa_i)$ dir.

(b): $\mathcal{M}$, A nın bir maksimal ideali olsun. Hipoteze göre $A/\mathcal{M} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (0 :_{A/\mathcal{M}} \prod_{i=1}^n Aa_i)$ olur. Bu, bazı $n_0 \in \mathbb{N}$ için $A/\mathcal{M}$ nin birimi $(0 :_{A/\mathcal{M}} \prod_{i=1}^{n_0} Aa_i)$ de olduğu anlamına gelir. Yani, bazı $r + \mathcal{M} \in (0 :_{A/\mathcal{M}} \prod_{i=1}^{n_0} Aa_i)$ için $1 + \mathcal{M} = r + \mathcal{M}$ dir. Dolayısıyla, $\prod_{i=1}^{n_0} Aa_i + \mathcal{M} = r \prod_{i=1}^{n_0} Aa_i + \mathcal{M} = \mathcal{M}$ ve $\prod_{i=1}^{n_0} Aa_i \subseteq \mathcal{M}$ olur. $\mathcal{M}$ bir asal ideal olduğundan, bazı j için $Aa_j \subseteq \mathcal{M}$ elde ederiz. Bu nedenle, $\bigcap_{n=1}^{\infty} Aa_i \subseteq Aa_j \subseteq J(A)$ olur.

Teorem 2.4.1. (Nakayama'nın Lemması) A bir halka ve $\sum Aa_i \subseteq J(A)$ olmak üzere, (a_i) , A nın elemanlarının bir dizisi olsun. Eğer X bir kuvvetli $dccr^*$ A -modül ve her i için $(0 :_X Aa_i) = 0$ ise, $X = 0$ dır.

İspat. X kuvvetli $dccr^*$ A -modül olsun. her i için $(0 :_X Aa_i) = 0$ olduğundan, Önerme 2.4.2(b) kullanılarak $\bigcup_{n=1}^{\infty} (0 :_X \prod_{i=1}^n Aa_i) = 0$ olur. Önerme 2.4.3(a) yi uygulayarak $X = 0$ elde edilir.

Sonuç 2.4.1. A bir kuvvetli $dccr^*$ halka ve X bir A -modül olsun. Bazı $a \in J(A)$ için $(0 :_X a) = 0$ ise, şu halde, $X = 0$ dır.

İspat. A bir kuvvetli $dccr^*$ halka olsun. O halde, Sonuç 2.2.2 e göre, X bir kuvvetli $dccr^*$ A -modüldür. $Aa \subseteq J(A)$ olduğundan, Teorem 2.4.1 kullanılarak sonucu elde edilir.

.

BÖLÜM 3. S-ARTİNİAN MODÜLLER²

David Hilbert, Emmy Noether ve Emil Artin'in eserlerinde zincir koşulları, halkaların ve modüllerin yapısını anlama ve geliştirmede büyük önem kazanmıştır. Bu zamana kadar, halka ve modüllerin üzerindeki zincir koşulları üzerinde yoğun çalışmalar yapılmıştır (Bkz. [29, 30, 31, 32]). X in alt modüllerden oluşturulan her artan zincir $\{Y\}_{i \in \mathbb{N}}$ sonlu bir adımda durursa, A -modül X ye alt modüller üzerindeki artan zincir koşulu (ACC) sağlanır, denir. Yani, X in alt modüllerinin her artan

$$Y_1 \subseteq Y_2 \subseteq \dots \subseteq Y_n \subseteq \dots$$

zinciri ve her $n \geq k$ için $Y_n \subseteq Y_k$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{N}$ vardır. Artan zincir koşulu (ACC) sağlanırsa, A -modül X , Noetherian olarak adlandırılır. A -modül X , bir Noetherian modüldür ancak ve ancak X in her bir alt modülü sonlu üretilmiştir ancak ve ancak X , (MAX) koşulunu sağlar, yani, X in alt modüllerinin, herhangi bir boştan farklı ailesinin bir maksimal elemanı vardır (Maksimal eleman koşulu) [33]. Benzer şekilde, X in alt modüllerden oluşturulan her azalan zincir $\{Y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ sonlu bir adımda durursa A -modül X ye alt modüller üzerindeki azalan zincir koşulu (DCC) sağlanır, denir. Yani, X nin alt modüllerinin her azalan

$$Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq \dots \supseteq Y_n \supseteq \dots$$

² Bu bölüm aşağıdaki gibi yayınlanmıştır:

Özen, M., Naji, O.A., Tekir U. and Shum, K.P., "Characterization Theorems of S-Artinian Modules", Comptes rendus de l'Academie bulgare des Sciences, Vol. 74, No. 4, 496-505, (2021), DOI: 10.7546/CRABS.2021.04.03

zinciri ve her $n \geq k$ için $Y_k \subseteq Y_n$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{N}$ vardır. Azalan zincir koşulu (*DCC*) sağlanırsa, A -modül X , Artinian olarak adlandırılır [13]. Sonlu üretilmiş kavramı, Noetherian modül kavramıyla yakından bağlantılıdır. Aynı zamanda, onun duali, sonlu eş üretilmiş (finitely cogenerated), Artinian modüllerinin tanımlanmasında önemli bir rol oynamaktadır. X in alt modüllerinin, $\bigcap_{i \in \Delta} Y_i = 0$ özelliğini sağlayan herhangi bir $\{Y_i\}_{i \in \Delta}$ ailesi, bazı sonlu $\Delta' \subseteq \Delta$ alt kümesi için $\bigcap_{i \in \Delta'} Y_i = 0$ özelliğini sağlarsa, A -modül X ye sonlu eş üretilmiş (finitely cogenerated) denir [13]. Artinian modülleri, sonlu eş üretilmiş (finitely cogenerated) kavramı ile karakterize edilir. A -modül X , bir Artinian modüldür ancak ve ancak Y, X in her bir alt modülü için X/Y (finitely cogenerated) sonlu eş üretilmiştir ancak ve ancak X , (*MIN*) koşulunu sağlar, yani, X in alt modüllerinin, herhangi bir boştan farklı ailesinin bir minimal elemanı vardır [13] (Önerme 10.10).

$S \subseteq A$ bir çarpımsal kapalı alt küme olsun. [34] te Anderson ve Dumitrescu S -Noetherian halkayı tanımladılar, A nın her I ideali için $sI \subseteq J \subseteq I$ olacak şekilde bir $s \in S$ ve A nın sonlu üretilmiş bir J ideali varsa A ye S -Noetherian denir. Noetherian halkalar üzerinde birçok sonuç S -Noetherian halkalara genişletildi. Daha sonra, Sengelen et al. [35] te Artinian halkaları S -Artinian halkalara genellediler ve birçok sonuç verdiler. A halkasının ideallerinin her azalan $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots \supseteq I_n \supseteq \dots$ zinciri ve $n \geq k$ için, $sI_k \subseteq I_n$ olacak şekilde $s \in S$ ve $k \in \mathbb{N}$ varsa, A ya S -Artinian halka denir. Bu bölümün amacı S -Artinian modül ve sonlu S -eş üretilmiş modülleri incelemektir.

3.1. S -Artinian Modüllerin Temel Özellikleri

Tanım 3.1.1. A bir halka, X bir A -modül ve $S \subseteq A$ çarpımsal kapalı bir küme olsun. X in alt modüllerinin bir azalan $Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq \dots \supseteq Y_n \supseteq \dots$ zinciri olmak üzere, $n \geq k$ için $sY_k \subseteq Y_n$ olacak şekilde $s \in S$ ve $k \in \mathbb{N}$ varsa, $\{Y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ ailesine S -durağan aile denir.

Tanım 3.1.2. A bir halka, X bir A -modül ve $S \subseteq A$ çarpımsal kapalı bir küme olsun. Eğer X in alt modüllerinin azalan zincirinin her ailesi S - durağan ise X ye S -Artinian modül denir.

Örnek 3.1.1. A bir halka ve $S \subseteq A$ çarpımsal kapalı bir küme olsun. A , S -Artinian bir halkadır ancak ve ancak A , S -Artinian bir modüldür.

Örnek 3.1.2. S , A nın çarpımsal kapalı bir altkümesi ve $S \cap \text{ann}_A(X) \neq \emptyset$ olacak şekilde X bir A -modül olsun. X , S -Artinian A -modüldür.

Örnek 3.1.3. S , A nın çarpımsal kapalı bir altkümesi olsun. Her Artinian A -modül S -Artinian A -modüldür.

Örnek 3.1.3 ün tersi her zaman doğru değildir. Aşağıdaki örnekler bunu göstermektedir.

Örnek 3.1.4. $\mathbb{Z}$ -modül $\mathbb{Z}_2[[X]]$ düşünün ve $\mathbb{Z}_2[[X]]$, $\mathbb{Z}_2$ deki katsayıları olan tüm formal kuvvet dizinin kümesini belirtir.

$$(X) \supseteq (X^2) \supseteq \dots \supseteq (X^n) \supseteq \dots$$

kesinlikle $\mathbb{Z}$ -modül $\mathbb{Z}_2[[X]]$ nin alt modüllerinin azalan bir zinciridir. Dolayısıyla $\mathbb{Z}$ -modül $\mathbb{Z}_2[[X]]$ Artinian modül değildir. $S = \text{reg}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z} - \{0\}$ çarpımsal kapalı bir küme ve $s = 2$ olsun. $s \in \text{ann}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_2[[X]]) \cap S$ olur. $\mathbb{Z}$ -modül $\mathbb{Z}_2[[X]]$, Örnek 3.1.2 yi kullanarak bir S -Artinian modüldür.

Örnek 3.1.5. A_1 cisim olmayan bir tamlık bölgesi ve A_2 Artinian bir halka olsun. Böylece A_1 Artinian bir modül değildir. $A = A_1 \times A_2$ ve A , bir A -modül olsun. O zaman A nın tüm alt modülleri tam olarak A halkasının idealleridir. A_1 in Artinian bir halka olmadığı için, A açıkça Artinian bir modül değildir. $U(A_2)$, A_2 halkasının birimsel elemanlarının kümesi olsun, bundan $S = A_1 \times U(A_2)$, çarpımsal kapalı bir

kümesidir. A nın ideallerinin azalan bir $\{I_1^{(i)} \times I_2^{(i)}\}_{i \in \mathbb{N}}$ zinciri ele alınsın. Daha sonra, $\{I_2^{(i)}\}_{i \in \mathbb{N}}$, A_2 nin ideallerinin azalan bir zinciridir. A_2 nin Artinian bir halka olduğu için, $n \geq k$ için $I_2^{(k)} \subseteq I_2^{(n)}$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{N}$ vardır. Şimdi, $s = (0, 1) \in S$ koyulsun. O zaman açıktır ki her $n \geq k$ için $s(I_1^{(k)} \times I_2^{(k)}) = \{0\} \times I_2^{(k)} \subseteq I_1^{(n)} \times I_2^{(n)}$ dir. Bundan dolayı, A , S -Artinian bir modüldür.

[36] ten, herhangi bir çarpımsal kapalı alt küme $S \subseteq A$ için, $S^* = \left\{a \in A: \frac{a}{1}, S^{-1}A \text{ nin birimsel bir elemandır} \right\}$, S nin doyurulmuş kümesini belirtir. Ayrıca, eğer $S = S^*$ ise S ye doymuş küme denir. S^* ın her zaman S yi içeren bir doymuş küme olduğuna dikkat edilsin. X bir A -modül ve $U_X(A) = \{r \in A: rX = X\}$ olsun. $U_X(A)$, A halkasının birimsel elemanlarının kümesini içeren doymuş çarpımsal kapalı bir kümedir.

Lemma 3.1.1. A bir halka, X bir A –modül ve $S \subseteq A$ çarpımsal kapalı bir küme olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır.

- Eğer $S_1 \subseteq S_2$, A nın çarpımsal kapalı alt kümeleri ve X , S_1 -Artinian bir A -modül ise X , S_2 -Artinian bir A -modüldür.
- S^* , S nin doyurulmuş kümesi olsun. X in S -Artinian bir A -modül olması için gerek ve yeter koşul X in S^* -Artinian bir A -modül olmasıdır.
- X , çarpımsal bir A -modül ve $S \subseteq U_X(A)$, A nın çarpımsal kapalı bir alt kümesi olsun. X in Artinian bir A -modül olması için gerek ve yeter koşul X in S -Artinian bir A -modül olmasıdır.
- X , $\text{ann}_A(X) \cap S = \emptyset$ olacak şekilde bir S -Artinian A -modül olsun. $S^{-1}X$, Artinian bir $S^{-1}A$ -modüldür.

İspat. (a) Açıktır.

(b) X bir S -Artinian modül olsun. $S \subseteq S^*$ olduğundan ve (a) yi kullanarak, X açıkça S^* -Artinian bir modüldür. Tersi için, X bir S^* -Artinian modül olsun. $Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq \dots \supseteq$

$Y_n \supseteq \dots, X$ in alt modüllerinin bir azalan zinciri olduğu varsayalım. X bir S^* -Artinian modül olduğundan $n \geq k$ için $sY_k \subseteq Y_n$ olacak şekilde $s \in S^*$ ve $k \in \mathbb{N}$ vardır. $\frac{s}{1}$, $S^{-1}A$ nın birimsel elemanından $\frac{s}{1} \frac{a}{t} = 1$ olacak şekilde $a \in A$ ve $t \in S$ vardır. Sonra, bir $u \in S$ için $(us)a = ut$ dir. Şimdi, $s' = ut$ olsun. Bu demek ki her $n \geq k$ için $s'Y_k = (ua)sY_k \subseteq sY_k \subseteq Y_n$ dir. bundan dolayı, X bir S -Artinian modüldür.

(c) Gerek koşul kısmı Örnek 3.1.3 te doğrulanır. Yeter koşul için, $Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq \dots \supseteq Y_n \supseteq \dots, X$ in alt modüllerinin bir azalan zinciri göz önüne alınsın. X bir S -Artinian modül olsun. Yani, $n \geq k$ için $sY_k \subseteq Y_n$ olacak şekilde $s \in S$ ve $k \in \mathbb{N}$ vardır. X çarpımsal bir modül ve $sX = X$ olduğundan,

$$\begin{aligned} Y_k &= (Y_k :_A X)X = (Y_k :_A X)sX \\ &= s(Y_k :_A X)X = sY_k \subseteq Y_n \end{aligned}$$

olur. Bu nedenle X Artinian bir A -modüldür.

(d) X bir S -Artinian modül olsun. Y, X in bir alt modülü olmak üzere, $S^{-1}X$ in tüm alt modülleri $S^{-1}Y$ biçimine sahiptir. Her $i \in \mathbb{N}$ için, Y_i, X in bir alt modülü olmak üzere, $S^{-1}Y_1 \supseteq S^{-1}Y_2 \supseteq \dots \supseteq S^{-1}Y_n \supseteq \dots, S^{-1}X$ in alt modüllerinin herhangi bir azalan zinciridir. $\pi: X \rightarrow S^{-1}X$, her $x \in X$ için, $\pi(x) = \frac{x}{1}$ ile tanımlanan doğal homomorfizma olsun. Yukardaki zincirden, $\pi^{-1}(S^{-1}Y_1) \supseteq \pi^{-1}(S^{-1}Y_2) \supseteq \dots \supseteq \pi^{-1}(S^{-1}Y_n) \supseteq \dots, X$ in alt modüllerinin bir azalan zinciridir. X in bir S -Artinian modül olduğu için, her $n \geq k$ için, $s\pi^{-1}(S^{-1}Y_k) \subseteq \pi^{-1}(S^{-1}Y_n)$ olacak şekilde $s \in S$ ve $k \in \mathbb{N}$ vardır. Yani, $\frac{s}{1}S^{-1}Y_k \subseteq S^{-1}Y_n$ dir. $\frac{s}{1}$, $S^{-1}A$ nın bir birimsel elemanından $S^{-1}Y_k \subseteq S^{-1}Y_n$ olur. Dolayısıyla, $S^{-1}X$ Artinian bir $S^{-1}A$ -modüldür.

Lemma 3.1.1(d) in tersi genel olarak doğru değildir. Aşağıdaki örneğe bakılsın.

Örnek 3.1.6. $\mathbb{Z}$ bir $\mathbb{Z}$ -modül ve $S = \text{reg}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z} - \{0\}$ olsun. $S^{-1}\mathbb{Z} = \mathbb{Q}$ olur ve $\mathbb{Q}$ -modül $\mathbb{Q}$ Artinian bir modüldür. p bir asal sayı olsun ve

$$(p) \supseteq (p^2) \supseteq \dots \supseteq (p^n) \supseteq \dots,$$

$\mathbb{Z}$ nin alt modüllerinin bir azalan zinciridir. Herhangi bir $s \in S$ olsun. $ebob(p, m) = 1$ olmak üzere, $s = p^t m$ olacak şekilde $t \geq 0$ ve $m \in \mathbb{Z}$ vardır. Her $k \in \mathbb{N}$ için, $s(p^k) = (p^{k+t}m) \not\subseteq (p^{k+t+1})$ olur. Bundan dolayı, $\mathbb{Z}$ -modül $\mathbb{Z}$ bir S -Artinian modül değildir.

Önerme 3.1.1. X bir A -modül ve $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ bir sonlu çarpımsal kapalı küme olsun. X in bir S -Artinian modül olması için gerek ve yeter koşul $S^{-1}X$ in bir Artinian $S^{-1}A$ -modül olmasıdır.

İspat. Gerek koşul kısmı Lemma 3.1.1(d) ten doğrulanır. $S^{-1}X$ bir Artinian $S^{-1}A$ -modül olduğu kabul edilsin. $Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq \dots \supseteq Y_n \supseteq \dots$, X in alt modüllerinin bir azalan zinciri olsun. Böylece $\{S^{-1}Y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, $S^{-1}X$ in alt modüllerinin bir Azalan zinciridir. $S^{-1}X$ in bir Artinian $S^{-1}A$ -modül olduğu için, her $n \geq k$ için $S^{-1}Y_k = S^{-1}Y_n$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{N}$ vardır. $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$, A nın bir sonlu çarpımsal kapalı küme olduğundan, $s = s_1 s_2 \dots s_n \in S$ dir. $m \in Y_k$ olsun. Bir $s_i \in S$ için, $\frac{m}{1} \in S^{-1}Y_k = S^{-1}Y_n$ ve $s_i m \in Y_n$ olur. Buradan $sm \in Y_n$ ve $sY_k \subseteq Y_n$ i verir. Sonuç olarak X bir S -Artinian modüldür.

Önerme 3.1.2. A bir halka ve $f: X \rightarrow X'$ bir A -homomorfizma olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır.

- Eğer f bir epimorfizma ve X bir S -Artinian modül ise X' bir S -Artinian modüldür.
- Eğer f bir monomorfizma ve X' bir S -Artinian modül ise X de bir S -Artinian modüldür.

İspat. (a) f bir epimorfizma ve X bir S -Artinian modül olsun. X' bir S -Artinian modül olduğu ispat edilecek. X' nün $Y'_1 \supseteq Y'_2 \supseteq \dots \supseteq Y'_n \supseteq \dots$ olarak şekilde herhangi bir azalan zinciri göz önüne alınsın. Böylece, X in alt modüllerinin $f^{-1}(Y'_1) \supseteq f^{-1}(Y'_2) \supseteq \dots \supseteq f^{-1}(Y'_n) \supseteq \dots$ bir azalan zinciridir. X bir S -Artinian modül

olduğundan, her $n \geq k$ için, $sf^{-1}(Y'_k) \subseteq f^{-1}(Y'_n)$ olacak şekilde $s \in S$ ve $k \in \mathbb{N}$ vardır. f bir epimorfizma olduğunu kullanarak, her $n \geq k$ için, $f(sf^{-1}(Y'_k)) = sf(f^{-1}(Y'_k)) = sY'_k \subseteq f(f^{-1}(Y'_n)) = Y'_n$ dir. Bundan dolayı, X' bir S -Artinian modüldür.

(b) f bir monomorfizma ve X' bir S -Artinian modül olsun. X in alt modüllerinin bir azalan $Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq \dots \supseteq Y_n \supseteq \dots$ zinciri ele alınsın. Şu halde $f(Y_1) \supseteq f(Y_2) \supseteq \dots \supseteq f(Y_n) \supseteq \dots$, X' nın alt modüllerinin bir azalan zinciridir. X' nın bir S -Artinian modül olduğu için, her $n \geq k$ için, $sf(Y_k) = f(sY_k) \subseteq f(Y_n)$ olacak şekilde $s \in S$ ve $k \in \mathbb{N}$ vardır. f bir monomorfizma olduğundan, her $n \geq k$ için, $f^{-1}(f(sY_k)) = sY_k \subseteq f^{-1}(f(Y_n)) = Y_n$ olur. Dolayısıyla, X bir S -Artinian A -modüldür.

Önerme 3.1.2 nin hemen bir sonucu olarak, aşağıdaki açık sonuç verilecek.

Sonuç 3.1.1. X bir S -Artinian A -modül ve Y , X in alt modülü olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır.

- a. X/Y bölüm modülü bir S -Artinian A -modüldür.
- b. Y bir S -Artinian A -modüldür.

3.2. S -Artinian Modüllerin Karakterizasyonları

I , A halkasının bir ideali ve $\pi: A \rightarrow A/I$, her $r \in A$ için, $\pi(a) = a + I$ ile tanımlanan doğal homomorfizma olsun. $S \subseteq A$ bir çarpımsal kapalı alt küme olmak üzere, $\pi(S)$ de A/I nın bir çarpımsal kapalı alt kümedir.

Şimdi, S -Artinian modüller S -Artinian halkalar olarak karakterize edilecek.

Önerme 3.2.1. X bir A -modül ve $S \subseteq A$ bir çarpımsal kapalı alt küme olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır.

- a. X bir çarpımsal A -modül olsun. Eğer $A/\text{ann}_A(X)$ bir $\pi(S)$ -Artinian halka ise X bir S -Artinian A -modüldür.
- b. X bir çarpımsal sonlu üretilmiş A -modül olsun. Eğer X bir S -Artinian modül ise $A/\text{ann}_A(X)$ bir $\pi(S)$ -Artinian halkadır.

İspat. (a) X bir çarpımsal A -modül ve $A/\text{ann}_A(X)$ bir $\pi(S)$ -Artinian halka olsun. X in alt modüllerinin bir azalan $Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq \dots \supseteq Y_n \supseteq \dots$ zinciri göz önünde bulundursun. Yukarıdaki zinciri kullanarak, $A/\text{ann}_A(X)$ halkasının

$$(Y_1 :_A X)/\text{ann}_A(X) \supseteq (Y_2 :_A X)/\text{ann}_A(X) \supseteq \dots \supseteq (Y_n :_A X)/\text{ann}_A(X) \supseteq \dots$$

zinciri elde edilir. $A/\text{ann}_A(X)$ bir $\pi(S)$ -Artinian halka olduğundan, her $n \geq k$ için,

$$(s + \text{ann}_A(X))[(Y_k :_A X)/\text{ann}_A(X)] \subseteq (Y_n :_A X)/\text{ann}_A(X)$$

olacak şekilde $s \in S$ ve $k \in \mathbb{N}$ vardır. Şu halde $s(Y_k :_A X) \subseteq (Y_n :_A X)$ dir. X in çarpımsal A -modül olduğu için, her $n \geq k$ için,

$$sY_k = (Y_k :_A X)X \subseteq (Y_n :_A X)X = X_n$$

olur. Yani, X bir S -Artinian modüldür.

(b) X bir çarpımsal sonlu üretilmiş A -modül olsun. Farz edilsin ki X bir S -Artinian modüldür. $A/\text{ann}_A(X)$ in $J_1 \supseteq J_2 \supseteq \dots \supseteq J_n \supseteq \dots$ olacak şekilde herhangi bir azalan zinciri göz önüne alınsın. I_i , A nın $\text{ann}_A(X)$ i içeren bir ideali vardır öyle ki $I_i/\text{ann}_A(X) = J_i$ dir. Yukarıdaki zincirden, $\{I_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, A nın ideallerinin bir azalan zinciridir. Böylece,

$$I_1X \supseteq I_2X \supseteq \dots \supseteq I_nX \supseteq \dots,$$

X in alt modüllerinin bir azalan zinciridir. X bir S -Artinian modül olduğundan, her $n \geq k$ için, $sI_kX \subseteq I_nX$ olacak şekilde $s \in S$ ve $k \in \mathbb{N}$ vardır. X in bir çarpımsal

sonlu üretilmiş olduğu için ve [37] (Teorem 9 sonucu) nu kullanarak, her $n \geq k$ için, $sI_k \subseteq I_n + \text{ann}_A(X) = I_n$ dir ve böylece $(s + \text{ann}_A(X))J_k \subseteq J_n$ bulunur. Dolayısıyla, $A/\text{ann}_A(X)$ bir S -Artinian modüldür.

Teorem 3.2.1. X bir çarpımsal sonlu üretilmiş A -modül ve $S \subseteq A$ bir çarpımsal kapalı alt küme olsun. Aşağıdaki ifaeler denktir.

- a. X bir S -Artinian modüldür.
- b. $A/\text{ann}_A(X)$ bir $\pi(S)$ -Artinian halkadır.

İspat. Önerme 3.2.1 den direkt olarak bulunur.

Önerme 3.2.2. X bir A -modül ve $S \subseteq A$ bir çarpımsal kapalı alt küme olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

- a. X bir S -Artinian A -modüldür.
- b. Y ve X/Y S -Artinian A -modüldür.

İspat. (a) $\Rightarrow$ (b): Sonuç 3.1.1 den bulunur.

(b) $\Rightarrow$ (a): Y ve X/Y S -Artinian A -modül olsun. X in alt modüllerinin bir azalan $Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq \dots \supseteq Y_n \supseteq \dots$ zinciri göz önüne alınsın. Bu zincirden, iki azalan zincir şu şekilde elde edilebilir.

$$Y_1 \cap Y \supseteq Y_2 \cap Y \supseteq \dots \supseteq Y_n \cap Y \supseteq \dots$$

Y nin bir azalan zinciridir. Ayrıca,

$$(Y_1 + Y)/Y \supseteq (Y_2 + Y)/Y \supseteq \dots \supseteq (Y_n + Y)/Y \supseteq \dots$$

de X/Y nin bir azalan zinciridir. Y ve X/Y S -Artinian A -modül olduğundan, yukarıdaki zincirler sonludur. Yani, her $n \geq k_1$ ve $n \geq k_2$ için, $s(Y_{k_1} \cap Y) \subseteq Y_n \cap Y$

ve $s'[(Y_{k_2} + Y)/Y] \subseteq (Y_n + Y)/Y$ olacak şekilde $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ ve $s, s' \in S$ vardır. $k = \max\{k_1, k_2\}$ ve $t = ss'$ olsun. Her $n \geq k$ için, $t(Y_k \cap Y) \subseteq Y_n \cap Y$ ve $tY_k + Y \subseteq Y_n + Y$ olur. $m_k \in Y_k$ olmak üzere, $t^2m_k \in t^2Y_k$ ele alınsın. Bu durumda öyle $m_n \in Y_n$ ve $x \in Y$ elemanları vardır ki $tm_k \in tY_k + Y \subseteq Y_n + Y$ dir ve o zaman $tm_k = m_n + x$ olur. Her $n \geq k$ için $Y_k \supseteq Y_n$ olduğundan, $x \in Y_k$ dir ve $tx \in t(Y_k \cap Y) \subseteq Y_n \cap Y$ yi verir. Şu halde $t^2m_k = tm_n + tx \in Y_n$ dir. O zaman $t^2 \in S$ olmak üzere, $t^2Y_k \subseteq Y_n$ olur. Buradan dolayı, X bir S -Artinian A -modüldür.

X bir A -modül ve $S \subseteq A$ bir çarpımsal kapalı alt küme olsun. Önerme 3.2.2 den, X in bir S -Artinian modül olması için gerek ve yeter koşul herhangi kısa tam dizi $0 \rightarrow X' \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} X'' \rightarrow 0$ için, X' ve X'' nün S -Artinian A -modüller olması olduğunu görmek kolaydır.

Sonuç 3.2.1. X bir A -modül, $S \subseteq A$ bir çarpımsal kapalı alt küme ve $Y_1, Y_2, \dots, Y_n, X$ in S -Artinian alt modüller olsun. Bu takdirde, $Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$ de S -Artinian alt modüldür.

İspat. Y_1 ve Y_2 nin S -Artinian A -modül olduğu varsayalım. Önerme 3.2.2 den, $Y_1/(Y_1 \cap Y_2)$ bir S -Artinian A -modüldür. 2. İzomorfizma Teoremini kullanarak, $(Y_1 + Y_2)/Y_2 \cong Y_1/(Y_1 \cap Y_2)$ olur. Yani, $(Y_1 + Y_2)/Y_2$ bir S -Artinian modüldür. Y_2 bir S -Artinian modül olduğundan ve Önerme 3.2.2 den, $Y_1 + Y_2$ bir S -Artinian A -modüldür. Şu halde, tümevarımı kullanarak, $Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$ bir S -Artinian A -modül olur.

Önerme 3.2.3. A bir S -Artinian halka ve $S \subseteq A$ bir çarpımsal kapalı alt küme olsun. X sonlu üretilmiş bir A -modül ise X bir S -Artinian A -modüldür.

İspat. A bir S -Artinian halka ve X bir sonlu üretilmiş A -modül olsun. Bazı $x_i \in X$ için, $X = Ax_1 + Ax_2 + \dots + Ax_n$ yazabiliriz. Önce not edilsin ki, her $i = 1, 2, \dots, n$ için, $Ax_i \cong A/\text{ann}_A(Ax_i)$ dir. A bir S -Artinian halka olduğundan $A/\text{ann}_A(Ax_i) \cong Ax_i$ de S -Artinian modüldür. Şu halde, Sonuç 3.2.1 den, $X = Ax_1 + Ax_2 + \dots + Ax_n$ bir S -Artinian A -modüldür.

X bir A -modül ve P , A nın bir asal ideal olsun. Burada not edilsin ki, $S_P = A - P$, A nın bir çarpımsal kapalı alt kümesidir. Eğer X bir S_P -Artinian modül ise X e P -Artinian modül denir. Şimdi, Artinian modüller S -Artinian modüller olarak karakterize edilecek.

Teorem 3.2.2. X bir A -modül olsun. Aşağıdaki ifaeler denktir.

- a. X bir Artinian modüldür.
- b. Her $P \in \text{Spec}(A)$ için, X bir P -Artinian modüldür.
- c. Her $\mathcal{M} \in \text{Max}(A)$ için, X bir $\mathcal{M}$ -Artinian modüldür.

İspat. (a) $\Rightarrow$ (b): Örnek 3.1.3 te ispatı verilmişti.

(b) $\Rightarrow$ (c): Açıktır.

(c) $\Rightarrow$ (a): (c) ün varlığı kabul edilsin. X in $Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq \dots \supseteq Y_n \supseteq \dots$ olacak şekilde herhangi bir azalan zinciri göz önüne alınsın. Her $\mathcal{M} \in \text{Max}(A)$ için, X bir $\mathcal{M}$ -Artinian modül olduğundan, her $n \geq k_m$ için, $r_m Y_{k_m} \subseteq Y_n$ olacak şekilde $r_m \notin \mathcal{M}$ ve $k_m \in \mathbb{N}$ vardır. Şimdi,

$$J = \{r_m : \exists \mathcal{M} \in \text{Max}(A), r_m \notin \mathcal{M}, \exists k_m \in \mathbb{N}, \text{ her } n \geq k_m \text{ için, } r_m Y_{k_m} \subseteq Y_n\}$$

koyulsun. $(J) = A$ olduğunu görmek kolaydır. O zaman, $(r_{m_1}) + (r_{m_2}) + \dots + (r_{m_n}) = A$ olacak şekilde $r_{m_i} \in J - \mathcal{M}_i$ vardır. Her $n \geq k_{m_i}$ için, $r_{m_i} Y_{k_{m_i}} \subseteq Y_n$ olacak şekilde bir $k_{m_i} \in \mathbb{N}$ vardır. Şimdi, $k = \max\{k_{m_i} : i = 1, 2, \dots, n\}$ olsun. Şu halde, her $n \geq k$ için, $Y_k \subseteq r_{m_i} Y_{k_{m_i}} \subseteq Y_n$ olur. Bu durumda, her $n \geq k$ için,

$$\begin{aligned} Y_k &= [(r_{m_1}) + (r_{m_2}) + \dots + (r_{m_n})] Y_k \\ &= \sum_{i=1}^n r_{m_i} Y_{k_{m_i}} \subseteq Y_n \text{ dir.} \end{aligned}$$

Dolayısıyla, X bir Artinian modüldür.

Her $i = 1, 2, \dots, n$ için, X bir A_i -modül olsun. $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ ve $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ koyulsun. Bu durumda, X bir A -modüldür ve her $i = 1, 2, \dots, n$ için, X_i nin bir alt modülü olmak üzere, X in tüm alt modülleri $Y = Y_1 \times Y_2 \times \dots \times Y_n$ biçimine sahiptir. Ayrıca, eğer S_i, A_i nin bir çarpımsal kapalı alt kümesi ise $S = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$, A nın çarpımsal kapalı bir alt kümesidir.

Lemma 3.2.1. Her $i = 1, 2$ için, X_i bir A_i -modül olsun. S_i, A_i nin bir çarpımsal kapalı alt kümesi olmak üzere, $A = A_1 \times A_2$, $S = S_1 \times S_2$ ve $X = X_1 \times X_2$ olduğu varsayılın. Aşağıdaki ifadeler denktir.

- a. X bir S -Artinian A -modüldür.
- b. Her $i = 1, 2$ için, X_i bir S_i -Artinian A_i -modüldür.

İspat. (a) $\Rightarrow$ (b): X bir S -Artinian A -modül olduğu varsayılın. $\pi_i: X \rightarrow X_i$, $\pi_i(x_1, x_2) = x_i$ ile tanımlanan bir epimorfizma olsun. Şu halde, Önerme 3.1.2 den, her $i = 1, 2$ için X_i bir S_i -Artinian A_i -modüldür.

(b) $\Rightarrow$ (a): Her $i = 1, 2$ için, X_i bir S_i -Artinian A_i -modül olsun. X in alt modüllerinin bir azalan

$$L_1 \supseteq L_2 \supseteq \dots \supseteq L_n \supseteq \dots$$

zinciri ele alınsın. Bazı $Y_1^{(k)}, X_1$ in alt modülü ve $Y_2^{(k)}, X_2$ nin alt modülü için, $L_k = Y_1^{(k)} \times Y_2^{(k)}$ olur. Yukarıdaki zincirden, her $i = 1, 2$ için, aşağıdaki X in alt modüllerinin azalan

$$Y_i^{(k)} \supseteq Y_i^{(k)} \supseteq \dots \supseteq Y_i^{(k)} \supseteq \dots$$

zinciri elde edilir. Her $i = 1, 2$ için, X_i bir S_i -Artinian modül olduğundan, her $m \geq k_1$ ve $m \geq k_2$ için

$$s_1 Y_1^{(k_1)} \subseteq Y_1^{(m)} \quad \text{ve} \quad s_2 Y_2^{(k_2)} \subseteq Y_2^{(m)}$$

olacak şekilde $s_1 \in S_1$, $s_2 \in S_2$ ve $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ vardır. Şimdi, $k = \max\{k_1, k_2\}$ ve $s = (s_1, s_2)$ olsun. Şu halde, her $m \geq k$ için

$$\begin{aligned} sL_k &= s \left[Y_1^{(k_1)} \times Y_2^{(k_2)} \right] = s_1 Y_1^{(k)} \times s_2 Y_2^{(k)} \\ &\subseteq s_1 Y_1^{(k_1)} \times s_2 Y_2^{(k_2)} \subseteq Y_1^{(m)} \times Y_2^{(m)} \end{aligned}$$

olur. Yani, X bir S -Artinian A -modüldür.

Teorem 3.2.3. Her $i = 1, 2, \dots, n$ için, X_i bir A_i -modül ve S_i , A_i nin bir çarpımsal kapalı alt kümesi olsun. $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$, $S = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$ ve $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ olduğu varsayalım. Aşağıdaki ifadeler denktir.

- a. X bir S -Artinian A -modüldür.
- b. Her $i = 1, 2, \dots, n$ için, X_i bir S_i -Artinian A_i -modüldür.

İspat. Sunucu ispatlamak için, n üzerinde tümevarım uygulanacak. Önce $n = 1$ olduğunda sonucun net olduğuna dikkat edilsin. $n = 2$ durumunda (a) $\Leftrightarrow$ (b) Lemme 3.2.1 da ispatlanmıştı. Herhangi $k < n$ için, (a) ve (b) denk olduğu varsayalım. $k = n$, $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$, $S = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$ ve $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ olsun ve $A' = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_{n-1}$, $S' = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_{n-1}$ ve $X' = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_{n-1}$ koyulsun. Not edilsin ki, $A = A' \times A_n$, $S = S' \times S_n$ ve $X = X' \times X_n$ dir. Lemma 3.2.1 den, X in bir S -Artinian A -modül olması için gerek ve yeter koşul X' bir S' -Artinian A' -modül ve X_n nin bir S_n -Artinian A_n -modül olmasıdır. Dolayısıyla istenen elde edilir.

3.3. Sonlu S -Eş Üretilmiş Modüller

X bir A -modül olsun. [13] ten, hatırlansın ki, Δ herhangi bir indeks kümesi olmak üzere, X in alt modüllerinin, $\bigcap_{i \in \Delta} Y_i = 0$ özelliğini sağlayan herhangi bir $\{Y_i\}_{i \in \Delta}$

ailesi, bazı sonlu $\Delta' \subseteq \Delta$ alt kümesi için $\bigcap_{i \in \Delta'} Y_i = 0$ özelliğini sağlarsa, A -modül X e sonlu eş üretilmiş denir.

Tanım 3.3.1. S , A halkasının bir çarpımsal kapalı alt kümesi ve X bir A -modül olsun. Δ herhangi bir indeks kümesi olmak üzere, X in alt modüllerinin, $\bigcap_{i \in \Delta} Y_i = 0$ özelliğini sağlayan herhangi bir $\{Y_i\}_{i \in \Delta}$ ailesi, bazı sonlu $\Delta' \subseteq \Delta$ alt kümesi ve $s \in S$ için $s(\bigcap_{i \in \Delta'} Y_i) = 0$ özelliğini sağlarsa, A -modül X e sonlu S -eş üretilmiş denir.

Önerme 3.3.1. S , A halkasının bir çarpımsal kapalı alt kümesi ve X bir A -modül olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır.

- Eğer X bir sonlu eş üretilmiş modül ise X de sonlu S -eş üretilmiş bir modüldür.
- Eğer $S_1 \subseteq S_2$, A nın çarpımsal kapalı alt kümeleri ve X bir sonlu S_1 -eş üretilmiş A -modül ise X de sonlu S_2 -eş üretilmiş bir A -modüldür.
- S^* , S nin doyurulmuş kümesi olmak üzere, X in bir sonlu S - eş üretilmiş A -modül olması için gerek ve yeter koşul X in bir sonlu S^* - eş üretilmiş A -modül olmasıdır.

İspat. (a) ve (b) açıktır.

(c) X bir sonlu S^* - eş üretilmiş A -modül olsun. Δ herhangi bir indeks kümesi olmak üzere, X in alt modüllerinin, $\bigcap_{i \in \Delta} Y_i = 0$ özelliğini sağlayan herhangi bir $\{Y_i\}_{i \in \Delta}$ ailesi olduğu varsayalım. X bir sonlu S^* - eş üretilmiş A -modül olduğundan, $s(Y_{\alpha_1} \cap Y_{\alpha_2} \cap \dots \cap Y_{\alpha_n}) = 0$ olacak şekilde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \Delta$ ve $s \in S^*$ vardır. $s \in S^*$ olduğundan, $\frac{s}{1} \frac{a}{u} = 1$ olacak şekilde $u \in S$ ve $a \in A$ vardır. O zaman, bazı $t \in S$ için, $tas = tu$ dur. $t' = tu \in S$ olmak üzere, $tas(Y_{\alpha_1} \cap Y_{\alpha_2} \cap \dots \cap Y_{\alpha_n}) = tu(Y_{\alpha_1} \cap Y_{\alpha_2} \cap \dots \cap Y_{\alpha_n}) = t'(Y_{\alpha_1} \cap Y_{\alpha_2} \cap \dots \cap Y_{\alpha_n}) = 0$ dır. Bundan dolayı, X bir sonlu S -eş üretilmiş modüldür. Ters, (b) den elde edilir.

Önerme 3.3.2. $S \subseteq A$ bir çarpımsal kapalı alt küme ve $f: X \rightarrow X'$ bir monomorfizma olsun. Eğer X' bir sonlu S -eş üretilmiş modül ise X de sonlu S -eş üretilmiş bir modüldür.

İspat. X' bir sonlu S -eş üretilmiş A -modül ve f bir monomorfizma olsun. Δ herhangi bir indeks kümesi olmak üzere, X in alt modüllerinin, $\bigcap_{i \in \Delta} Y_i = 0$ özelliğini sağlayan herhangi bir $\{Y_i\}_{i \in \Delta}$ ailesi göz önüne alınsın. $\bigcap_{i \in \Delta} f(Y_i) = 0$ olur. Yani, $s(\bigcap_{i \in \Delta'} f(Y_i)) = 0$ olacak şekilde $s \in S$ ve sonlu $\Delta' \subseteq \Delta$ alt kümesi vardır. O zaman, $f^{-1}(s(\bigcap_{i \in \Delta'} f(Y_i))) = f^{-1}f(s \bigcap_{i \in \Delta'} Y_i) = s \bigcap_{i \in \Delta'} Y_i = 0$ dır. Dolayısıyla, X bir sonlu S -eş üretilmiş A -modüldür.

A bir halka olsun. [35] ten hatırlansın ki, A bir sonlu S -eş üretilmiş halka ise Δ herhangi bir indeks kümesi olmak üzere, A nın ideallerinin, $\bigcap_{i \in \Delta} I_i = 0$ özelliğini sağlayan herhangi bir $\{I_i\}_{i \in \Delta}$ ailesi, bazı sonlu $\Delta' \subseteq \Delta$ alt kümesi ve $s \in S$ için $s(\bigcap_{i \in \Delta'} I_i) = 0$ özelliğini sağlar. Not edilsin ki, A nın bir sonlu S -eş üretilmiş halka olması için gerek ve yeter koşul A nın bir sonlu S -eş üretilmiş A -modül olmasıdır.

Tanım 3.3.2. $\mathfrak{S}$, X in alt modüllerinin boş olmayan bir ailesi, S , A halkasının bir çarpımsal kapalı alt kümesi ve $Y \in \mathfrak{S}$ olsun. Her $K \in \mathfrak{S}$ için, $K \subseteq Y$ olması bir $s \in S$ için $sY \subseteq K$ olmasını gerektiriyorsa, Y ye $\mathfrak{S}$ nin S -minimal eleman denir. Özellikle, eğer X in alt modüllerinin her boş olmayan ailesi bir S -minimal elemana sahip ise X e $(S - MIN)$ -koşulunu sağlıyor denir.

Tanım 3.3.3. $\mathfrak{S}$, X in alt modüllerinin boş olmayan bir ailesi ve S , A halkasının bir çarpımsal kapalı alt kümesi olsun. Her $s \in S$, $Y \in \mathfrak{S}$ ve K , X in alt modülü için $sY \subseteq K$ olması $K \in \mathfrak{S}$ olmasını gerektiriyorsa, $\mathfrak{S}$ ye S -eş doymuş aile denir.

[13](Önerme 10.10) da, Artinian modüller, sonlu eş üretilmiş modüller olarak karakterize edilir. X bir Artinian modül ancak ve ancak her X/Y bölüm modülü bir sonlu eş üretilmiş ancak ve ancak X , (MIN) -koşulunu sağlar, yani, X in alt modüllerinin her boş olmayan ailesi bir minimal elemana sahiptir. Şimdi, aşağıdaki teoremden, [13] (Önerme 10.10) un S -versiyonu verilecek.

Teorem 3.3.1. X bir A -modül ve S , A halkasının bir çarpımsal kapalı alt kümesi olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

- a. X bir S -Artinian modüldür.
- b. X in alt modüllerinin her boş olmayan S -eş doymuş ailesi $\mathfrak{S}$, minimal bir elemana sahiptir.
- c. X , $(S - MIN)$ -koşulunu sağlar.
- d. Her X/Y bölüm modülü sonlu S -eş üretilmiş A -modüldür.

İspat. (a) $\Rightarrow$ (b): X bir S -Artinian modül ve $\mathfrak{S}$, X in alt modüllerinin herhangi boş olmayan S -eş doymuş ailesi olsun. Her $Y, K \in \mathfrak{S}$ için, $Y \leq K$ ancak ve ancak $K \subseteq Y$ olduğu varsayalım. $(\mathfrak{S}, \leq)$ sıralı bir kümedir. $\mathfrak{S}$ nin herhangi bir

$$Y_1 \leq Y_2 \leq \dots \leq Y_n \leq \dots$$

zinciri ele alalım. O zaman, $\{Y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ zincirinin supremumunun

$$Y = \bigvee_{i \in \mathbb{N}} Y_i = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} Y_i$$

olduğu açıktır. Şimdi, $Y \in \mathfrak{S}$ olduğunu görmek istenmektedir. Yukarıdaki zincirden, X in alt modüllerinin bir azalan

$$Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq \dots \supseteq Y_n \supseteq \dots$$

zincirini elde edilir. X bir S -Artinian modül olduğundan her $n \geq k$ için, $sY_k \subseteq Y_n$ olacak şekilde $s \in S$ ve $k \in \mathbb{N}$ vardır. Şu halde $sY_k \subseteq Y = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} Y_i$ dir. Böylece, $Y_k \in \mathfrak{S}$ ve $\mathfrak{S}$, X in alt modüllerinin boş olmayan S -eş doymuş bir ailesi kabul edildiği için, $Y_k \in \mathfrak{S}$ elde edilir. O zaman, $\mathfrak{S}$, Zorn'ın Lemmasını kullanarak $\leq$ ye göre maksimal bir $K \in \mathfrak{S}$ elemanına sahiptir. K , $(\mathfrak{S}, \subseteq)$ nin minimal bir elemanı olduğu açıktır.

(b) $\Rightarrow$ (c): X in alt modüllerinin her boş olmayan S -eş doymuş ailesinin minimal bir elemana sahip olduğu varsayalım. $\mathfrak{S}$, X in alt modüllerinin herhangi boş olmayan bir ailesi olsun. $\mathfrak{S}$ nin S -minimal elemana sahip olduğu gösterilecek.

$$\mathfrak{S}^* = \{K: K, X \text{ in bir alt modülü, } sY^* \subseteq K \text{ olacak şekilde } s \in S \text{ ve } Y^* \in \mathfrak{S} \text{ var}\}$$

Ailesi göz önüne alınsın. Önce, $\mathfrak{S}^*$ in, X in alt modüllerinin S -eş doymuş bir ailesi olduğu gösterilecek. $s \in S$ ve $Y \in \mathfrak{S}^*$ olmak üzere, K , $sY \subseteq K$ şeklinde X in bir alt modülü olsun. $s_1 Y^* \subseteq Y$ olacak şekilde $s_1 \in S$ ve $Y^* \in \mathfrak{S}$ vardır. $s' = ss_1 \in S$ koyulsun. Ayrıca, $s'Y^* = s(s_1 Y^*) \subseteq sY \subseteq K$ olduğu açıktır. Şu halde, $K \in \mathfrak{S}^*$ ve $\mathfrak{S}^*$ X in alt modüllerinin S -eş doymuş bir ailesidir. Varsayımla, $\mathfrak{S}^*$ minimal bir $L \in \mathfrak{S}^*$ elemanına sahiptir. Böylece, $s^* Y' \subseteq L$ olacak şekilde $s^* \in S$ ve $Y' \in \mathfrak{S}$ vardır. Şimdi, Y' nin $\mathfrak{S}$ nin S -minimal elemanı olduğu gösterilecek. Bunu görmek için, $K' \subseteq Y'$ bir şekilde $K' \in \mathfrak{S}$ elemanı ele alınsın. O zaman, $s^* K' \subseteq s^* Y'$ ve $s^* K' \subseteq L \cap K'$ dir. Bundan $L \cap K' \in \mathfrak{S}^*$ olur. L nin $\mathfrak{S}^*$ nin minimal elemanı olduğu için, $L \cap K' = L$ elde edilir. Böylece, $L \subseteq K'$ ve $s^* Y' \subseteq L \subseteq K'$ bulunur. Bundan dolayı, Y' , $\mathfrak{S}$ nin S -minimal bir elemanıdır. Yani, X , $(S - MIN)$ -koşulunu sağlar.

(c) $\Rightarrow$ (d): X/Y nin alt modüllerinin herhangi bir $\{Y_i/Y\}_{i \in \Delta}$ ailesi için, $\bigcap_{i \in \Delta} Y_i/Y = 0_{X/Y}$ olsun. Şu hâlde, $\bigcap_{i \in \Delta} Y_i = Y$ olur. Şimdi,

$$\mathcal{T} = \left\{ \bigcap_{i \in \Delta'} Y_i : \Delta' \subseteq \Delta \text{ sonlu bir alt kümesi} \right\}$$

olsun. $(S - MIN)$ -koşulunu kullanarak $\mathcal{T}$ nin bir S -minimal elemanı vardır. O eleman, $k_1, k_2, \dots, k_n \in \Delta$ olmak üzere, $Y' = \bigcap_{i=k_1}^{k_n} Y_i$ olsun. $k \in \Delta - \{k_1, k_2, \dots, k_n\}$ ele alınsın. Dikkat edilsin ki $Y' \cap Y_k \subseteq Y'$ dir. Y' S -minimal olduğundan $sY' \subseteq Y' \cap Y_k$ olacak şekilde bir $s \in S$ vardır. Böylece, $sY' \subseteq \bigcap_{i \in \Delta} Y_i = Y$ ve $s\left(\bigcap_{i=k_1}^{k_n} Y_i\right) \subseteq Y$ olur. Yani, $s\left[\bigcap_{i=k_1}^{k_n} (Y_i/Y)\right] = 0_{X/Y}$ ve X/Y sonlu S -eş üretilmiş bir A -modüldür.

(d) $\Rightarrow$ (a): Her X/Y bölüm modülünün sonlu S -eş üretilmiş olduğu varsayalım. X in alt modüllerinin bir azalan

$$Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq \dots \supseteq Y_n \supseteq \dots$$

zinciri göz önünde bulundursun. $Y = \bigcap_{i=1}^{\infty} Y_i$ olsun. $\bigcap_{i=1}^{\infty} (Y_i/Y) = 0_{X/Y}$ ve X/Y sonlu S -eş üretilmiş olduğundan $s\left[\bigcap_{i=k_1}^{k_n} (Y_i/Y)\right] = 0_{X/Y}$ olacak şekilde $k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_n$ ve $s \in S$ vardır. Yani, $s\left[\bigcap_{i=k_1}^{k_n} (Y_i/Y)\right] = s(Y_{k_n}/Y) = 0_{X/Y}$ dir. Bu demek ki her $n \geq k_n$ için, $sY_{k_n} \subseteq Y = \bigcap_{i=1}^{\infty} Y_i \subseteq Y_n$ dir. Böylece, X , S -Artinian bir A -modüldür.

X bir A -modül olsun. Tüm asal alt modüllerin kümesi $\text{Spec}(X)$ ile gösterilir. Herhangi bir çarpımsal X modülünde X in her asal Y alt modülü için, şu özelliğe sahiptir: Bir $1 \leq i \leq n$ olmak üzere, $\bigcap_{i=1}^n Y_i \subseteq Y$ ise $Y_i \subseteq Y$ olur.

Sonlu kesişimi sonsuz kesişime değiştirirsek, biri yukarıdaki bahsedilen özelliğin asal alt modüller için geçerli olup olmadığı sorabilir. Bu soru [38] makalesinde incelenmiştir. Y , X in bir alt modülü olsun. X in alt modüllerinin her $\{Y_i\}_{i \in \Delta}$ ailesi için, $\bigcap_{i \in \Delta} Y_i \subseteq Y$ olması bir $j \in \Delta$ için $Y_j \subseteq Y$ olmasını gerektiriyorsa Y ye A -modül X in bir kuvvetli asal alt modülü denir. Tüm asal alt modüller kuvvetli asal ise, X ye kuvvetli sıfır boyutlu modül denir. [39] da gösterilmiştir ki, sonlu üretilmiş çarpımsal X modülünün kuvvetli sıfır boyutlu olması için gerek ve yeter koşul X in sıfır boyutlu yarı yerel olmasıdır, yani, her asal alt modül maksimaldir ve sadece sonlu sayıda maksimal alt modül vardır.

Şimdi, sonlu S -eş üretilmiş modüller kuvvetli asal alt modüller olarak karakterize edilecek.

Teorem 3.3.2. X bir A -modül, $\text{ann}_A(X)$ A nın bir asal ideali ve $\text{ann}_A(X) \cap S = \emptyset$ olmak üzere, $S \subseteq A$ bir çarpımsal kapalı alt küme olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

- a. X sonlu S -eş üretilmiş bir A -modüldür.
- b. Sıfır alt modülü kuvvetli asaldir.

İspat. (a) $\Rightarrow$ (b): X sonlu S -eş üretilmiş bir A -modül olsun. X in alt modüllerinin, $\bigcap_{i \in \Delta} Y_i = 0$ özelliğini sağlayan herhangi bir $\{Y_i\}_{i \in \Delta}$ ailesi ele alınsın. X sonlu S -eş üretilmiş olduğundan $s(Y_{i_1} \cap Y_{i_2} \cap \dots \cap Y_{i_n}) = 0$ olacak şekilde bir $s \in S$ vardır. O zaman,

$$s[(Y_{i_1} :_A X) \cap (Y_{i_2} :_A X) \cap \dots (Y_{i_n} :_A X)] = s\left(\bigcap_{k=1}^n Y_{i_k} :_A X\right) \subseteq \text{ann}_A(X)$$

dir. $s \notin \text{ann}_A(X)$ ve $\text{ann}_A(X)$ asal olduğundan bir $i_k \in \Delta$ için $(Y_{i_k} :_A X) \subseteq \text{ann}_A(X)$ olur. X çarpımsal olduğu için $Y_{i_k} = 0$ olur ve böylece sıfır alt modülü kuvvetli asaldir.

(a) $\Rightarrow$ (b): X in alt modüllerinin, $\bigcap_{i \in \Delta} Y_i = 0$ özelliğini sağlayan herhangi bir $\{Y_i\}_{i \in \Delta}$ ailesi olsun. $\bigcap_{i \in \Delta} Y_i \subseteq 0$ ve sıfır alt modülü kuvvetli asal olduğundan bir $j \in \Delta$ için, $Y_j = 0$ olur. Şu hâlde, X sonlu eş üretilmiş bir modüldür ve Önerme 3.3.1(a) yi kullanarak X sonlu S -eş üretilmiş bir modül olur.

Lemma 3.3.1. Her $i = 1, 2$ için, X_i bir A_i -modül olsun. S_i, A_i nin bir çarpımsal kapalı alt kümesi olmak üzere, $A = A_1 \times A_2$, $S = S_1 \times S_2$ ve $X = X_1 \times X_2$ olduğu varsayılınsın. Aşağıdaki ifadeler denktir.

- a. X sonlu S -eş üretilmiş bir A -modüldür.
- b. Her $i = 1, 2$ için, X_i sonlu S_i -eş üretilmiş bir A_i -modüldür.

İspat. (a) $\Rightarrow$ (b): X sonlu S -eş üretilmiş bir A -modül olsun. X_1 in alt modüllerinin, $\bigcap_{k \in \Delta} L_k^{(1)} = 0_{X_1}$ özelliğini sağlayan herhangi bir $\{L_k^{(1)}\}_{k \in \Delta}$ ailesi ele alınsın. $Y_k = L_k^{(1)} \times 0_{X_2}$ olsun ve böylece $\bigcap_{k \in \Delta} Y_k = 0_X$ olur. X sonlu S -eş üretilmiş olduğundan

$$s(Y_{k_1} \cap Y_{k_2} \cap \dots \cap Y_{k_n}) = s(L_{k_1}^{(1)} \cap L_{k_2}^{(1)} \cap \dots \cap L_{k_n}^{(1)} \times 0_{X_2}) = 0_X$$

olacak şekilde $s = (s_1, s_2) \in S$ ve $k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece $s_1(L_{k_1}^{(1)} \cap L_{k_2}^{(1)} \cap \dots \cap L_{k_n}^{(1)}) = 0_{X_1}$ olur ve X_1 sonlu S_1 -eş üretilmiş bir A_1 -modüldür. Benzer şekilde, X_2 nin sonlu S_2 -eş üretilmiş bir A_2 -modül olduğu gösterilebilir.

(b) $\Rightarrow$ (a): (b) nin varlığı kabul edilsin. X in alt modülerinin, $\bigcap_{k \in \Delta} L_k = 0_X$ özelliğini sağlayan herhangi bir $\{L_k\}_{k \in \Delta}$ ailesi ele alınsın. $Y_i^{(k)}$, X_i nin bir alt modülü olmak üzere, $L_k = Y_1^{(k)} \times Y_2^{(k)}$ yazılabilir. Şu hâlde,

$$\bigcap_{k \in \Delta} L_k = \bigcap_{k \in \Delta} (Y_1^{(k)} \times Y_2^{(k)}) = \left(\bigcap_{k \in \Delta} Y_1^{(k)} \right) \times \left(\bigcap_{k \in \Delta} Y_2^{(k)} \right) = 0_X$$

Böylece, her $i = 1, 2$ için $\bigcap_{k \in \Delta} Y_i^{(k)} = 0_{X_i}$ olur. X_i sonlu S_i -eş üretilmiş A_i -modül olduğundan $s_i(\bigcap_{k \in \Delta_i} Y_i^{(k)}) = 0_{X_i}$ olacak şekilde $s_1 \in S_1, s_2 \in S_2$ ve sonlu $\Delta_1, \Delta_2 \subseteq \Delta$ kümeleri vardır. $s = (s_1, s_2) \in S$ olsun. $s(\bigcap_{k \in \Delta_1 \cup \Delta_2} L_k) = 0_M$ olur. Bundan dolayı, X sonlu S -eş üretilmiş bir A -modüldür.

Teorem 3.3.3. Her $i = 1, 2, \dots, n$ için, X_i bir A_i -modül ve S_i, A_i nin bir çarpımsal kapalı alt kümesi olsun. $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$, $S = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$ ve $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ olduğu varsayılınsın. Aşağıdaki ifadeler denktir.

- a. X sonlu S -eş üretilmiş bir A -modüldür.
- b. Her $i = 1, 2, \dots, n$ için, X_i sonlu S_i -eş üretilmiş bir A_i -modüldür.

İspat. Teorem 3.2.3 teki benzer argüman ve Lemma 3.3.1 i kullanarak, X in sonlu S -eş üretilmiş bir A -modül olması gerek ve yeter koşul her $i = 1, 2, \dots, n$ için, X_i nin sonlu S_i -eş üretilmiş bir A_i -modül olması gösterilebilir.

X bir A -modül ve P , A nın asal ideali olsun. $S_P = A - P$ koyulsun. Eğer X sonlu S_P -eş üretilmiş bir modül ise, X e sonlu P -eş üretilmiş modül denir. Şimdi, sonlu eş üretilmiş modüller sonlu S -eş üretilmiş modüller olarak karakterize edilecek.

Teorem 3.3.4. X bir A -modül olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

- a. X sonlu eş üretilmiş bir modüldür.
- b. Her $P \in \text{Spec}(A)$ için, X sonlu P -eş üretilmiş bir modüldür.
- c. Her $\mathcal{M} \in \text{Max}(A)$ için, X sonlu $\mathcal{M}$ -eş üretilmiş bir modüldür.

İspat. (a) $\Rightarrow$ (b): Önerme 3.3.1 de ispatı verilmişti.

(b) $\Rightarrow$ (c): Açıktır.

(c) $\Rightarrow$ (a): (c) ün varlığı kabul edilsin. X in alt modüllerinin, $\bigcap_{i \in \Delta} Y_i = 0$ özelliğini sağlayan herhangi bir $\{Y_i\}_{i \in \Delta}$ ailesi olsun. X sonlu $\mathcal{M}$ -eş üretilmiş bir modül olduğundan, $s_m(\bigcap_{k \in \Delta_m} Y_k) = 0$ olacak şekilde $s_m \notin \mathcal{M}$ ve sonlu bir $\Delta_m \subseteq \Delta$ alt kümesi vardır. Şimdi,

$$J = \left\{ s_m : \exists \mathcal{M} \in \text{Max}(A), s_m \notin \mathcal{M} \text{ ve sonlu bir } \Delta' \right. \\ \left. \subseteq \Delta \text{ alt kümesi için } s_m \left(\bigcap_{k \in \Delta'} Y_k \right) = 0 \right\}$$

koyulsun. $(J) = A$ olur. O zaman, $\mathcal{M}_i \in \text{Max}(A)$ olmak üzere, $(s_{m_1}) + (s_{m_2}) + \dots + (s_{m_n}) = A$ olacak şekilde $s_{m_i} \in J - \mathcal{M}_i$ vardır. Böylece, $s_{m_i}(\bigcap_{k \in \Delta_i} Y_k) = 0$ olacak şekilde sonlu $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n \subseteq \Delta$ alt kümeleri vardır. $\Delta^* = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \dots \cup \Delta_n$ olsun ve $(s_{m_i})(\bigcap_{k \in \Delta^*} Y_k) = 0$ olur. Yani, $((s_{m_1}) + (s_{m_2}) + \dots + (s_{m_n}))(\bigcap_{k \in \Delta^*} Y_k) = (\bigcap_{k \in \Delta^*} Y_k) = 0$ dır. Bundan dolayı, X sonlu eş üretilmiş bir modüldür.

.

BÖLÜM 4. S -NOETHERIAN SPEKTRUM KOŞULUNUN SAĞLAYAN MODÜLLER³

Cebirde, halkalar ve modüller üzerindeki çeşitli artan zincir koşulları birçok yazar tarafından geniş çapta incelenmiştir (Bkz. [34, 29, 40, 19]). Bir değişmeli halka A nın, radikal idealler üzerinde artan zincir (ACC) koşulunu sağlıyorsa Noetherian spektruma sahip olduğu hatırlansın. Yani, A nın radikal ideallerinin her artan

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots \subseteq I_n \subseteq \dots$$

zinciri durur [41]. $\sqrt{I}$, I nın radikal ideali olsun. Bir A halkası Noetherian spektruma sahip olması için gerek ve yeter şart A nın her ideali I için $\sqrt{I} = \sqrt{Aa_1 + Aa_2 + \dots + Aa_n}$ olacak şekilde $a_1, a_2, \dots, a_n \in I$ var olmasıdır olduğuna dikkat edilsin [41] (Önerme 2.1). Bu zamana kadar, halkalar ve modüller üzerindeki Noetherian spektrum koşulu dikkat çekmiştir (Bkz. [32, 42, 16, 43, 44]). Son zamanlarda, [45] te H. Ahmed, Noetherian Spectrum kavramını halkalar üzerinde S -Noetherian Spektrum kavramına genelledi. $S \subseteq R$ bir çarpımsal kapalı alt küme olsun. A bir halka ve I , A nın ideali olsun. $sI \subseteq \sqrt{Aa_1 + Aa_2 + \dots + Aa_n}$ olacak şekilde $s \in S$ ve $a_1, a_2, \dots, a_n \in I$ varsa, I ya radikal S -sonlu denir. Özellikle, A nın her idealinin radikal S -sonlu olması durumunda A ya S -Noetherian spektrum koşulunu sağlar denir. Noetherian spektruma sahip bir halka S -Noetherian spektrum koşulunu sağlamaktadır. Eğer $S \subseteq u(A)$ ise tersinin de doğru olduğu açıktır. Buradaki $u(A)$, A daki tüm birim elemanlarının kümesini belirtir. Yazar, [45] te, Noetherian spektruma sahip halkaların

³ Bu bölüm aşağıdaki gibi yayınlanmıştır:

Özen, M., Naji, O.A., Tekir U. and Koç, S., “On Modules Satisfying S -Noetherian Spectrum Condition”, Communications in Mathematics and Statistics, (2021), DOI:10.1007/s40304-021-00268-1

birçok özelliğini, S -Noetherian spektrum koşulunu sağlayan halkalara aktarmaktadır. Özellikle, bir halka A , S -Noetherian spektrum sağlar ancak ve ancak A nın her radikal ideali radikal S -sonludur ancak ve ancak A nın her asal ideali radikal S -sonlu olduğunu gösterir [45] (Teorem 2.2). Bu bölümde amacımız halkalar üzerindeki S -Noetherian spektrum koşulunu modüllere genişletmek ve S -Noetherian spektrum koşulunu sağlayan modüllerin özelliklerini incelemektir.

Asal alt modül kavramı, modülün birçok sınıfının yapısını belirlemede önemli bir role sahiptir. P , X in bir has alt modülü olsun. Her $r \in A$ ve $x \in X$ için, $rx \in P$ olması $x \in P$ veya $r \in (P :_A X)$ olmasını gerektiriyorsa P ye A -modül X in bir asal alt modülü denir [8]. Değişmeli halkada bir idealin radikali kavramına benzer şekilde, P yi kapsayan tüm asal alt modüllerin kesişimine, P alt modülünün radikali denir. Bu radikal, $rad_X(P)$ ile gösterilir. Eğer P yi kapsayan asal alt modül yoksa, $rad_X(P) = X$ olur [46]. Çarpımsal veya sonlu üretilmiş modüllerde, X in her has alt modülü Y için her zaman Y yi kapsayan bir asal alt modül bulunduğu dikkat edilsin. D. Rush, [44] te halkalar üzerindeki Noetherian spektrum kavramını modüllere genişletmiştir. Y , X in bir alt modülü olsun. Y alt modülünü kapsayan tüm asal alt modüllerinin kümesini $V(Y) = \{P \in Spec(X) : Y \subseteq P\}$ ile gösterilsin. $V(Y) = V(F)$ veya buna eş olarak $rad_X(Y) = rad_X(F)$ olacak şekilde Y nin bir sonlu üretilmiş alt modülü F varsa, Y ye radikal sonlu denir [44]. Özellikle, X in tüm alt modülleri radikal sonlu ise, bir A -modül X , Noetherian spektruma sahiptir [44].

4.1. Tanım ve Temel Özellikler

Tanım 4.1.1. A bir halka, Y , A –modül X in bir alt modülü ve $S \subseteq A$ bir çarpımsal kapalı küme olsun. $sY \subseteq rad_X(F)$ olacak şekilde $s \in S$ ve Y nin bir sonlu üretilmiş alt modülü F varsa, Y alt modülüne radikal S -sonlu denir. Ayrıca, eğer X in her alt modülü Y radikal S -sonlu ise, A -modül X e S -Noetherian spektrum koşulunu sağlar denir.

Örnek 4.1.1.

- a. Her radikal sonlu alt modül, radikal S -sonludur. $S \subseteq u(A)$ ise bunun tersi de geçerlidir.
- b. Her çarpımsal kapalı $S \subseteq A$ alt kümesi için Noetherian spektruma sahip her modül, S -Noetherian spektrum koşulunu sağlar.
- c. $S \subseteq u(A)$ olsun. Bir A -modül Noetherian spektruma sahiptir ancak ve ancak S -Noetherian spektrum koşulunu sağlar.

Örnek 4.1.2. S , A nın çarpımsal kapalı bir altkümesi ve $S \cap \text{ann}_A(X) \neq \emptyset$ olacak şekilde X bir A -modül olsun. X , S -Noetherian spektrum koşulunu sağlar.

Önerme 4.1.1. A bir halka, X bir A –modül ve $S \subseteq A$ çarpımsal kapalı bir küme olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır.

- a. Eğer $S_1 \subseteq S_2$, A nın çarpımsal kapalı alt kümeleri ve A -modül X S_1 -Noetherian spektrum koşulunu sağlar ise X de S_2 -Noetherian spektrum koşulunu sağlar.
- b. S^* , S nin doyurulmuş kümesi olsun. A -modül X , S -Noetherian spektrum koşulunu sağlar ancak ve ancak X , S^* -Noetherian spektrum koşulunu sağlar.
- c. X , bir çarpımsal A -modül ve $S \subseteq U_X(A)$, A nın bir çarpımsal kapalı alt kümesi olsun. A -modül X Noetherian spektruma sahiptir ancak ve ancak X S -Noetherian spektrum koşulunu sağlar.
- d. $\text{ann}_A(X) \cap S = \emptyset$ olmak üzere, X , S -Noetherian spektrum koşulunu sağlayan bir A -modül olsun. $S^{-1}A$ -modül $S^{-1}X$ Noetherian spektruma sahiptir.

İspat.

- a. Açıktır.
- b. X , S -Noetherian spektrum koşulunu sağlayan bir A -modül verilsin. $S \subseteq S^*$ olduğundan, (a) kullanılarak X , S^* -Noetherian spektrum koşulunu sağlar.

Bunun tersi için, X in S^* -Noetherian spektrum koşulunu sağladığı varsayalım. Y, X in bir alt modülü olsun. $sY \subseteq \text{rad}_X(F)$ olacak şekilde $s \in S^*$ ve Y nin bir sonlu üretilmiş alt modülü F vardır. $\frac{s}{1}, S^{-1}A$ nin birimsel elemanından $\frac{s}{1} \frac{a}{t} = 1$ olacak şekilde $a \in A$ ve $t \in S$ vardır. Sonra, bazı $u \in S$ için $usa = ut$ elde edilir. $s' = ut \in S$ olsun. $s'Y = (ua)sY \subseteq sY \subseteq \text{rad}_X(F)$ bulunur. Dolayısıyla X, S -Noetherian spektrum koşulunu sağlar.

- c. X , Noetherian spektruma sahip bir A -modül verilsin. $S_1 = \{1\} \subseteq S$ alarak istenen (a) den elde edilir. Y, X in bir alt modülü olsun. X, S -Noetherian spektrum koşulunu sağladığından, $sY \subseteq \text{rad}_X(F)$ olacak şekilde $s \in S$ ve Y nin bir sonlu üretilmiş alt modülü F vardır. X bir çarpımsal modül ve $sX = X$ olduğundan,

$$\begin{aligned} Y &= (Y :_A X)X = (Y :_A X)sX \\ &= s(Y :_A X)X = sY \subseteq \text{rad}_X(F) \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla X , Noetherian spektruma sahiptir.

- d. F, X in bir alt modülü olmak üzere, $S^{-1}(\text{rad}_X(F)) \subseteq \text{rad}_{S^{-1}X}(S^{-1}F)$ olduğunu belirtmek yeterlidir. Ayrıca F, X in bir sonlu üretilmiş alt modülü ise, o halde, $S^{-1}F$ de $S^{-1}X$ in sonlu üretilmiş bir alt modülüdür.

Önerme 4.1.2. X in radikal S -sonlu olmayan alt modüllerinin bir ailesi $\mathcal{A}$ olsun. Eğer $\mathcal{A}$ boş değilse, bu taktirde, $\mathcal{A}$ bir maksimal eleman içerir ve bu gibi herhangi bir maksimal eleman asal bir alt modüldür.

İspat. $\mathcal{A} \neq \emptyset$ olsun. $(\mathcal{A}, \subseteq)$ kısmi sıralı bir kümedir. $\{Y_i\}_{i \in \Delta}, \mathcal{A}$ da artan bir zincir ve $Y = \bigcup_{i \in \Delta} Y_i$ olsun. O halde Y , radikal S -sonlu değildir. Aksi varsayalım. $sY \subseteq \text{rad}_X(F)$ olacak şekilde $s \in S$ ve Y nin bir sonlu üretilmiş alt modülü F vardır. F sonlu üretilmiş olduğundan, $F \subseteq Y_k$ olacak şekilde $k \in \Delta$ vardır ve $sY_k \subseteq sY \subseteq \text{rad}_X(F)$ olur. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla $Y, \mathcal{A}$ da $\{Y_i\}_{i \in \Delta}$ nın bir üst sınırıdır.

Zorn'un Lemması'na göre $\mathcal{A}$, bir maksimal eleman P ye sahiptir. Şimdi, P nin bir asal alt modül olduğu gösterilecek. Aksi kabul edilsin. $ax \in P$ ile $a \notin (P :_A X)$ olacak şekilde $x \in X - P$ ve $a \in A$ var olduğu varsayalım. P maksimal olduğundan, $P + aX$ ve $(P :_X a)$ radikal S -sonludur. $s(P + aX) \subseteq \text{rad}_X(H)$ ve $t(P :_X a) \subseteq \text{rad}_X(F_2)$ olacak şekilde $P + aX$ in bir sonlu üretilmiş alt modülü H , $(P :_X a)$ nın bir sonlu üretilmiş alt modülü F_2 ve $s, t \in S$ vardır. h_i, H nin bir üretici olsun. $x_i \in P$, $m_i \in X$ olmak üzere, her $h_i = x_i + am_i$ şeklinde yazılabilir. F_1, x_i ler tarafından üretilen alt modül olsun. F_1 sonlu üretilmiştir.

$$F_1 \subseteq P, V(F_2) \subseteq V(t(P :_X a)) \text{ ve } V(F_1 + aX) \subseteq V(s(P + aX))$$

elde edilir. $F_1 + aF_2 \subseteq P$ ve $F_1 + aF_2$ sonlu üretilmiş olduğuna dikkat edilsin. Şimdi, $V(F_1 + aF_2) \subseteq V(stP)$ ispatlanarak, $stP \subseteq \text{rad}_X(F_1 + aF_2)$ olduğunu göstermek istenmektedir. $P^* \in V(F_1 + aF_2)$ olsun. O halde, $F_1 + aF_2 \subseteq P^*$ olur. $aF_2 \subseteq P^*$ bulunur ve P^* asal olduğundan $F_2 \subseteq P^*$ ya da $aX \subseteq P^*$ ede edilir. Eğer $F_2 \subseteq P^*$ ise, $stP \subseteq tP \subseteq t(P :_X a) \subseteq P^*$ çıkar. Eğer $aX \subseteq P^*$ ise, $F_1 + aX \subseteq P^*$ ve böylece $stP \subseteq sP \subseteq s(P + aX) \subseteq P^*$ olur. Dolayısıyla $P \in V(stP)$ bulunur. Böylece $V(F_1 + aF_2) \subseteq V(stP)$ ve $stP \subseteq \text{rad}_X(stP) \subseteq \text{rad}_X(F_1 + aF_2)$ elde edilir. Şu halde, P radikal S -sonludur. Bu ise bir çelişkidir. Bu nedenle, P bir asal alt modüldür.

4.2. S-Noetherian Spektrum Koşulunun Karakterizasyonları

Aşağıdaki teorem, S -Noetherian spektrum koşulunu sağlayan modüller için Cohen teoreminin karşılığıdır.

Teorem 4.2.1. S, A halkasının bir çarpımsal kapalı alt kümesi ve X bir A -modül olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

- X S - Noetherian spektrum koşulunu sağlar.
- X in her radikal alt modülü, radikal S -sonludur.
- X in her asal alt modülü, radikal S -sonludur.

İspat. (a) $\Rightarrow$ (b): Açıktır.

(b) $\Rightarrow$ (c): Her asal alt modülün radikal olduğu gerçeğinden elde edilir.

(c) $\Rightarrow$ (a): X in radikal S -sonlu olmayan bir alt modülü olduğu varsayalım. $\mathcal{A}$, X in radikal S -sonlu olmayan alt modüllerinin ailesi olsun. O halde, $\mathcal{A} \neq \emptyset$ dir. Önerme 4.1.2 ye göre, X in radikal S -sonlu olmayan bir asal alt modülü vardır. Bu ise bir çelişkidir.

I , A halkasının bir ideali ve $\pi: A \rightarrow A/I$, her $a \in A$ için, $\pi(a) = a + I$ ile tanımlanan doğal homomorfizma olsun. $S \subseteq A$ bir çarpımsal kapalı alt küme olmak üzere, $\pi(S)$ de A/I nin bir çarpımsal kapalı alt kümesidir. Şimdi, S -Noetherian spektrum koşulunu sağlayan modüller S -Noetherian spektrum koşulunu sağlayan halkalar açısından karakterize edilecek. Sonraki teoremden $\pi: A \rightarrow A/\text{ann}_A(X)$, her $a \in A$ için, $\pi(a) = a + \text{ann}_A(X)$ olarak tanımlanır.

Teorem 4.2.2. X bir çarpımsal sonlu üretilmiş A -modül ve $S \subseteq A$ bir çarpımsal kapalı alt küme olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

- a. X S -Noetherian spektrum koşulunu sağlar.
- b. $A/\text{ann}_A(X)$ $\pi(S)$ -Noetherian spektrum koşulunu sağlar.

İspat. (a) $\Rightarrow$ (b): J , $A/\text{ann}_A(X)$ in bir ideali olsun. $J = I/\text{ann}_A(X)$ olacak şekilde A nın $\text{ann}_A(X)$ içeren bir ideali I vardır. $Y = IX$ olsun. X , S -Noetherian spektrum koşulunu sağladığından, $sY \subseteq \text{rad}_X(F)$ olacak şekilde $s \in S$ ve Y nin bir sonlu üretilmiş alt modülü F vardır. X çarpımsal modül ve F sonlu üretilmiş alt modül olduğundan, A nın bazı sonlu üretilmiş ideali K için $F = KX$ gerçekleşir. X sonlu üretilmiş çarpımsal olduğundan, [47] (Teorem 4) kullanılarak,

$$sY = sIX \subseteq \text{rad}_X(F) = \text{rad}_X(KX) = \sqrt{K}X$$

elde edilir. [37] (Teorem 9 Sonuç) kullanılarak,

$$sI \subseteq \sqrt{K} + \text{ann}_A(X) \subseteq \sqrt{K + \text{ann}_A(X)}$$

bulunur. K sonlu üretilmiş olduğundan bazı $a_i \in K$ için $K = Aa_1 + Aa_2 + \dots + Aa_n$ şeklinde yazılabilir. $\bar{a}_i = a_i + \text{ann}_A(X)$ olmak üzere, $K \subseteq I$ ve

$$\sqrt{K + \text{ann}_A(X)} / \text{ann}_A(X) = \sqrt{K + \text{ann}_A(X) / \text{ann}_A(X)} = \sqrt{(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n)}$$

olduğuna dikkat edilsin.

O halde, bazı $a_i + \text{ann}_A(X) \in J$ için $(s + \text{ann}_A(X))J \subseteq \sqrt{(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n)}$ olur. Böylece J radikal $\pi(S)$ -sonludur. Dolayısıyla, $A/\text{ann}_A(X)$, $\pi(S)$ -Noetherian spektrum koşulunu sağlar.

(b) $\Rightarrow$ (a): Y, X in bir alt modülü olsun. $A/\text{ann}_A(X)$, $\pi(S)$ -Noetherian spektrum koşulunu sağladığından, $\bar{a}_i = a_i + \text{ann}_A(X)$ olmak üzere,

$$(s + \text{ann}_A(X))[(Y :_A X) / \text{ann}_A(X)] \subseteq \sqrt{(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n)}$$

olacak şekilde bir $s \in S$ ve $a_1, a_2, \dots, a_n \in (Y :_A X)$ vardır.

$$\sqrt{(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n)} = \sqrt{Aa_1 + Aa_2 + \dots + Aa_n + \text{ann}_A(X)} / \text{ann}_A(X)$$

olduğuna dikkat edilsin. $s(Y :_A X) \subseteq \sqrt{Aa_1 + Aa_2 + \dots + Aa_n + \text{ann}_A(X)}$ çıkar. X çarpımsal olduğundan, $sY \subseteq \sqrt{Aa_1 + Aa_2 + \dots + Aa_n + \text{ann}_A(X)}X$ olur. X sonlu üretilmiş çarpımsal olduğundan, [47] (Teorem 4) kullanılarak,

$$\begin{aligned} sY &\subseteq \sqrt{Aa_1 + Aa_2 + \dots + Aa_n + \text{ann}_A(X)}X \\ &= \text{rad}_X((Aa_1 + Aa_2 + \dots + Aa_n + \text{ann}_A(X))X) \\ &= \text{rad}_X((Aa_1 + Aa_2 + \dots + Aa_n)X) \end{aligned}$$

elde edilir. X sonlu üretilmiş çarpımsal olduğundan, $(Aa_1 + Aa_2 + \dots + Aa_n)X$ de sonlu üretilmiştir ve $(Aa_1 + Aa_2 + \dots + Aa_n)X \subseteq Y$ dir. Böylece Y radikal S -sonludur. Dolayısıyla X , S -Noetherian spektrum koşulunu sağlar.

Sonuç 4.2.1. X bir çarpımsal sonlu üretilmiş sadık A -modül ve $S \subseteq A$ bir çarpımsal kapalı alt küme olsun. X , S -Noetherian spektrum koşulunu sağlar ancak ve ancak A , S -Noetherian spektrum koşulunu sağlar.

İspat. Doğrudan Teorem 4.2.2 den çıkar.

X bir A -modül ve P , A nın bir asal ideal olsun. Burada not edilsin ki, $S_P = A - P$, A nın bir çarpımsal kapalı alt kümesidir. Eğer X bir S_P -Noetherian spektrum koşulunu sağlar ise X e P -Noetherian spektrum koşulunu sağlayan bir modül denir. Şimdi, Noetherian spektruma sahip modüller S -Noetherian spektrum koşulunu sağlayan modüller açısından karakterize edilecek.

Teorem 4.2.3. X bir A -modül olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

- a. X , Noetherian spektruma sahiptir.
- b. Her $P \in \text{Spec}(A)$ için, X P -Noetherian spektrum koşulunu sağlar.
- c. Her $\mathcal{M} \in \text{Max}(A)$ için, X $\mathcal{M}$ -Noetherian spektrum koşulunu sağlar.

İspat.

(a) $\Rightarrow$ (b): Örnek 4.1.1(b) den çıkar.

(b) $\Rightarrow$ (c): Her maksimal idealin asal olduğu gerçeğinden çıkar.

(c) $\Rightarrow$ (a): X in her $\mathcal{M} \in \text{Max}(A)$ için $\mathcal{M}$ -Noetherian spektrum koşulunu sağladığı varsayalım. Y , X in bir alt modülü olsun. F , Y nin sonlu üretilmiş bir alt modülü olmak üzere, $V(F) = V(Y)$ olduğunu göstermek istenmektedir. Her $\mathcal{M} \in \text{Max}(A)$ için $r_{\mathcal{M}}Y \subseteq \text{rad}_X(F_{\mathcal{M}})$ olacak şekilde $r_{\mathcal{M}} \notin \mathcal{M}$ ve Y nin bir sonlu üretilmiş $F_{\mathcal{M}}$ alt modülü vardır. $J = \{r_{\mathcal{M}} : r_{\mathcal{M}}Y \subseteq \text{rad}_X(F_{\mathcal{M}}) \text{ olacak şekilde } \exists \mathcal{M} \in \text{Max}(A), r_{\mathcal{M}} \notin \mathcal{M} \text{ ve } Y \text{ nin bir sonlu üretilmiş } F_{\mathcal{M}} \text{ alt modülü vardır} \}$ olsun. $(J) = A$ olduğu kolayca görülür. Böylece $(r_{\mathcal{M}_1}) + (r_{\mathcal{M}_2}) + \dots + (r_{\mathcal{M}_n}) = A$ olacak şekilde $r_{\mathcal{M}_i} \in J - \mathcal{M}_i$

vardır. Her $i = 1, 2, \dots, n$ için $r_{\mathcal{M}_i}Y \subseteq \text{rad}_M(F_{\mathcal{M}_i})$ olacak şekilde Y nin bir sonlu üretilmiş $F_{\mathcal{M}_i}$ alt modülü vardır.

$$Y = AY = [(r_{\mathcal{M}_1}) + (r_{\mathcal{M}_2}) + \dots + (r_{\mathcal{M}_n})]Y \subseteq \sum_{i=1}^n \text{rad}_X(F_{\mathcal{M}_i})$$

elde edilir. $F = \sum_{i=1}^n F_{\mathcal{M}_i}$ olsun. F , Y nin bir sonlu üretilmiş alt modülüdür ve dolayısıyla $V(Y) \subseteq V(F)$ olur. $P \in V(F)$ olsun. O halde, $\sum_{i=1}^n F_{\mathcal{M}_i} \subseteq P$ ve böylece her i için $F_{\mathcal{M}_i} \subseteq P$ bulunur. Yani $\text{rad}_X(F_{\mathcal{M}_i}) \subseteq P$ ve $\sum_{i=1}^n \text{rad}_X(F_{\mathcal{M}_i}) \subseteq P$ dir. Dolayısıyla $Y \subseteq \sum_{i=1}^n \text{rad}_X(F_{\mathcal{M}_i}) \subseteq P$ olur ve $P \in V(Y)$ bulunur. Bu nedenle $V(F) = V(Y)$ ve M , Noetherian spektruma sahiptir.

$f : X \rightarrow X'$ bir A -homomorfizma olsun. X in herhangi bir alt modülü Y için $f(\text{rad}_X(Y)) \subseteq \text{rad}_{X'}(f(Y))$ olduğu açıktır. Bunu görmek için $x' \in f(\text{rad}_X(Y))$ ele alınsın. Böylece $x' = f(x)$ olacak şekilde bir $x \in \text{rad}_X(Y)$ bulunur. Şimdi, X in $f(Y)$ yi içeren bir asal alt modülü P^* ele alınsın. Eğer $f^{-1}(P^*) \neq X$ ise $f^{-1}(P^*)$, X in Y yi içeren bir asal alt modülüdür. Yani $x \in f^{-1}(P^*)$ ve böylece $x' = f(x) \in P^*$ olur. Bu nedenle $f(\text{rad}_X(Y)) \subseteq \text{rad}_{X'}(f(Y))$ elde edilir. Ayrıca, [48] (Sonuç 1.3) te, McCasland ve Moore, f bir örten A -homomorfizma olmak üzere, herhangi alt modüller $\text{Ker}(f) \subseteq Y \subseteq X$ ve $Y' \subseteq X'$ için, $f(\text{rad}_X(Y)) = \text{rad}_{X'}(f(Y))$ ve $f^{-1}(\text{rad}_{X'}(Y')) = \text{rad}_X(f^{-1}(Y'))$ olduğunu ispatladı.

Önerme 4.2.1. (a) $f : X \rightarrow X'$ bir A -epimorfizma ve $S \subseteq A$ bir çarpımsal kapalı altküme olsun. Eğer X S -Noetherian spektrum koşulunu sağlıyorsa, X' da S -Noetherian spektrum koşulunu sağlar.

(b) $S \subseteq A$ bir çarpımsal kapalı altküme ve X , S -Noetherian spektrum koşulunu sağlayan bir A -modül olsun. X in herhangi bir has alt modülü Y için, bölüm A -modülü X/Y , S -Noetherian spektrum koşulunu sağlar.

İspat. (a) Y', X' nin bir alt modülü olsun. Şu halde $f(Y) = Y'$ olacak şekilde X in bir Y alt modülü vardır. X , S -Noetherian spektrum koşulunu sağladığından, $sY \subseteq \text{rad}_X(F)$ olacak şekilde $s \in S$ ve Y nin bir sonlu üretilmiş alt modülü F vardır. Böylece $f(sY) = sf(Y) = sY' \subseteq f(\text{rad}_X(F)) \subseteq \text{rad}_{X'}(f(F))$ olur. $f(F)$, Y' nin sonlu üretilmiş alt modülü olduğundan, Y' radikal S -sonludur. Bu nedenle, X' , S -Noetherian spektrum koşulunu sağlar.

(b) (a) den çıkar.

Her $i = 1, 2, \dots, n$ için, X bir A_i -modül olsun. $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ ve $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ de olsun. Bu durumda, X bir A -modüldür ve her $i = 1, 2, \dots, n$ için, Y_i , X_i nin bir alt modülü olmak üzere, X in tüm alt modülleri $Y = Y_1 \times Y_2 \times \dots \times Y_n$ biçimine sahiptir. Ayrıca, eğer S_i , A_i nin bir çarpımsal kapalı alt kümesi ise $S = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$, A nın çarpımsal kapalı bir alt kümesidir.

Önerme 4.2.2. Her $i = 1, 2$ için, X_i bir A_i -modül ve $A = A_1 \times A_2$ olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

- a. Y , A -modül $X_1 \times X_2$ nin bir asal alt modülüdür.
- b. Y_1, Y_2 sırasıyla X_1 ve X_2 nin asal alt modülleri olmak üzere, $Y = Y_1 \times X_2$ veya $Y = X_1 \times Y_2$ biçimindedir.

İspat. (a) $\Rightarrow$ (b): $Y = Y_1 \times Y_2$, A -modül $X_1 \times X_2$ nin bir asal alt modülü ve $I = 0 \times A_2$ olsun. $I(X_1 \times 0) \subseteq Y$ ve Y asal alt modül olduğundan, $X_1 \times 0 \subseteq Y$ ya da $I \subseteq (Y :_A X_1 \times X_2)$ elde edilir. Böylece $X_1 \times 0 \subseteq Y$ ya da $0 \times X_2 \subseteq Y$ olur. Yani $Y = X_1 \times Y_2$ ya da $Y = Y_1 \times X_2$ dir. Y_1 ve Y_2 sırasıyla X_1 ve X_2 nin asal alt modülleri olduğunu görmek kolaydır.

(b) $\Rightarrow$ (a): Açıktır.

Teorem 4.2.4. Her $i = 1, 2, \dots, n$ için, X_i bir A_i -modül, $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ ve $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

- a. Y , A -modül X in bir asal alt modülüdür.
- b. Y_j, X_j nin bir asal alt modülü olmak üzere, $Y = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_{j-1} \times X_j \times X_{j+1} \dots \times X_n$ biçimindedir.

İspat. Önerme 4.2.2 kullanılarak tümevarımdan istenen bulunur.

Sonuç 4.4.2. Her $i = 1, 2, \dots, n$ için, X_i bir A_i -modül, $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ ve $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ olsun. Y_i, X_i nin bir alt modülü olmak üzere, $Y = Y_1 \times Y_2 \times \dots \times Y_n$ olsun. Bu taktirde, $rad_X(Y) = rad_{X_1}(Y_1) \times rad_{X_2}(Y_2) \times \dots \times rad_{X_n}(Y_n)$ olur.

İspat. $(m_1, m_2, \dots, m_n) \in rad_X(Y)$ olsun. $m_i \in rad_{X_i}(Y_i)$ olduğu gösterilecek. P_i, X_i nin Y_i yi içeren bir asal alt modülü olmak üzere, $P = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_{i-1} \times P_i \times X_{i+1} \dots \times X_n$ olsun. O halde Teorem 4.2.4 e göre P, Y yi içeren bir asal alt modüldür. Yani $(m_1, m_2, \dots, m_n) \in P$ ve $m_i \in P_i$ olur. Böylece $m_i \in rad_{X_i}(Y_i)$ ve $rad_X(Y) \subseteq rad_{X_1}(Y_1) \times rad_{X_2}(Y_2) \times \dots \times rad_{X_n}(Y_n)$ elde edilir. $(m_1, m_2, \dots, m_n) \in rad_{X_1}(Y_1) \times rad_{X_2}(Y_2) \times \dots \times rad_{X_n}(Y_n)$ olsun. Her $k = 1, 2, \dots, n$ için $m_k \in rad_{X_k}(Y_k)$ olur. Y yi içeren X in bir P asal alt modülü ele alınsın. $P = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_{t-1} \times P_t \times X_{t+1} \dots \times X_n$ olacak şekilde X_t nin bir asal alt modülü P_t vardır. $Y \subseteq P$ olduğundan, $Y_t \subseteq P_t$ ve böylece $m_t \in P_t$ olur. O halde $(m_1, m_2, \dots, m_n) \in X_1 \times X_2 \times \dots \times X_{t-1} \times P_t \times X_{t+1} \dots \times X_n = P$ bulunur. Dolayısıyla $(m_1, m_2, \dots, m_n) \in rad_X(Y)$ dir. Bu nedenle $rad_X(Y) = rad_{X_1}(Y_1) \times rad_{X_2}(Y_2) \times \dots \times rad_{X_n}(Y_n)$ olur.

Teorem 4.2.5. Her $i = 1, 2, \dots, n$ için, X_i bir A_i -modül ve S_i, A_i nin bir çarpımsal kapalı alt kümesi olsun. $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$, $S = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$ ve $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

- a. X S -Noetherian spektrum koşulunu sağlar.
- b. Her $i = 1, 2, \dots, n$ için, X_i S_i -Noetherian spektrum koşulunu sağlar.

İspat. (a) $\Rightarrow$ (b): S -Noetherian spektrum koşulunu sağlayan bir A -modül X verilsin. Y_i, X_i nin bir alt modülü olsun. O halde $Y = 0 \times \dots \times 0 \times Y_i \times 0 \times \dots \times 0$, X in bir alt modülüdür. $sY \subseteq \text{rad}_X(F) = \text{rad}_{X_1}(F_1) \times \text{rad}_{X_2}(F_2) \times \dots \times \text{rad}_{X_n}(F_n)$ olacak şekilde $s = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in S$ ve Y nin bir sonlu üretilmiş alt modülü $F = F_1 \times F_2 \times \dots \times F_n$ vardır. Dolayısıyla $s_i Y_i \subseteq \text{rad}_{X_i}(F_i)$ ve F_i, Y_i nin sonlu üretilmiş bir alt modülüdür. Böylece her $i = 1, 2, \dots, n$ için X_i, S_i -Noetherian spektrum koşulunu sağlar.

(b) $\Rightarrow$ (a): Her $i = 1, 2, \dots, n$ için, S_i -Noetherian spektrum koşulunu bir A_i -modül X_i verilsin. Y_i, X_i nin bir alt modülü olmak üzere, $L = Y_1 \times Y_2 \times \dots \times Y_n$, X in bir alt modülü olsun. Her $i = 1, 2, \dots, n$ için, $s_i Y_i \subseteq \text{rad}_{X_i}(F_i)$ olacak şekilde $s_i \in S_i$ ve Y_i nin bir sonlu üretilmiş alt modülü F_i vardır. $s = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in S$ ve $F = F_1 \times F_2 \times \dots \times F_n$ olsun. F, L nin bir sonlu üretilmiş alt modülüdür. Böylece

$$\begin{aligned} sL &= s[Y_1 \times Y_2 \times \dots \times Y_n] = s_1 Y_1 \times s_2 Y_2 \times \dots \times s_n Y_n \\ &\subseteq \text{rad}_{X_1}(F_1) \times \text{rad}_{X_2}(F_2) \times \dots \times \text{rad}_{X_n}(F_n) = \text{rad}_X(F) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu nedenle X, S -Noetherian spektrum koşulunu sağlar.

Tanım 4.2.1. $\mathfrak{S}$, X in alt modüllerinin boş olmayan bir ailesi, S, A halkasının bir çarpımsal kapalı alt kümesi olsun. Her $K \in \mathfrak{S}$, $s \in S$ ve X in radikal alt modülü Y için, $sY \subseteq K$ olması $Y \in \mathfrak{S}$ olmasını gerektiriyorsa, $\mathfrak{S}$ ye radikal S -doymuş aile denir.

Tanım 4.2.2. $\mathfrak{S}$, X in alt modüllerinin boş olmayan bir ailesi, S, A halkasının bir çarpımsal kapalı alt kümesi olsun. Her $Y \in \mathfrak{S}$ için, $K \subseteq Y$ olması sabit bir $s \in S$ için $sY \subseteq K$ olmasını gerektiriyorsa, K ye $\mathfrak{S}$ nin S -maksimal elemanı denir.

X bir çarpımsal sonlu üretilmiş A -modül olsun. [47] (Teorem 4) ün ispatından, X in herhangi bir alt modülü Y için, $(\text{rad}_X(Y) :_A X) = \sqrt{(Y :_A X)}$ dir. Eğer Y bir radikal

alt modül (yani $rad_X(Y) = Y$) ise $\sqrt{(Y :_A X)} = (rad_X(Y) :_A X) = (Y :_A X)$ olur ve şu halde $(Y :_A X)$, A nın radikal bir idealidir.

Teorem 4.2.6. X bir çarpımsal sonlu üretilmiş A -modül ve $S \subseteq A$ bir çarpımsal kapalı alt küme olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

- a. X S -Noetherian spektrum koşulunu sağlar.
- b. X in her radikal alt modülü radikal S -sonludur.
- c. X in her asal alt modülü radikal S -sonludur.
- d. X in radikal alt modüllerinin her boş olmayan radikal S -doymuş ailesi $\mathfrak{S}$, bir maksimal elemana sahiptir.
- e. X in radikal alt modüllerinin her boş olmayan ailesi $\mathfrak{S}$, bir S -maksimal elemana sahiptir.

İspat. (a) $\Leftrightarrow$ (b) $\Leftrightarrow$ (c): Teorem 4.2.1 den çıkar.

(b) $\Rightarrow$ (d): $\mathfrak{S}$, X in radikal alt modüllerinin, boş olmayan, bir radikal S -doymuş ailesi olsun. O halde $(\mathfrak{S}, \subseteq)$ nin kısmi sıralı bir küme olduğu açıktır. Zorn'un Lemması uygulanacak. $\mathfrak{S}$ nin bir $\{Y_i\}_{i \in \Delta}$ zinciri göz önüne alınsın. Şimdi, $Y = \bigcup_{i \in \Delta} Y_i$ X in bir radikal alt modülü olduğu gösterilecek. $m \in rad_X(Y)$ olsun. X çarpımsal sonlu üretilmiş olduğundan, A nın bazı sonlu üretilmiş ideal I için $Am = IX$ dir. X çarpımsal olduğundan, [49] (Teorem 3.1) kullanılarak, bazı $k \in \mathbb{N}$ için $I^k X \subseteq Y$ olur. X ve I sonlu üretilmiş olduğundan, $I^k X$ sonlu üretilmiş bir alt modüldür. Yani, bazı $m_j \in X$ için, $I^k X = Am_1 + Am_2 + \dots + Am_n$ şeklinde yazılabilir. Tüm $j = 1, 2, \dots, n$ için $m_j \in Y = \bigcup_{i \in \Delta} Y_i$ elde edilir. Tüm $j = 1, 2, \dots, n$ için $m_j \in Y_t$ olacak şekilde $t \in \Delta$ vardır. Böylece $I^k X \subseteq Y_t$ bulunur. Y_t bir radikal alt modül olduğundan, $I \subseteq \sqrt{(Y_t :_A X)} = (Y_t :_A X)$ çıkar. O halde, $Am = IX \subseteq Y_t \subseteq Y$ elde edilir. Dolayısıyla Y , X in bir radikal alt modülüdür. O halde (b) ile, Y radikal S -sonludur. $sY \subseteq rad_X(Ax_1 + Ax_2 + \dots + Ax_l)$ olacak şekilde $s \in S$ ve $x_1, x_2, \dots, x_l \in Y$ vardır. $x_1, x_2, \dots, x_l \in Y$ olduğunda, $x_1, x_2, \dots, x_l \in Y_v$ olacak şekilde $v \in \Delta$ vardır ve $sY \subseteq rad_X(Ax_1 + Ax_2 + \dots + Ax_l) \subseteq rad_X(Y_v) = Y_v$ olur. $\mathfrak{S}$

radikal S -doymuş aile ve $Y_v \in \mathfrak{S}$ olduğundan, $Y \in \mathfrak{S}$ bulunur. Yani $\bigvee_{i \in \Delta} Y_i = Y \in \mathfrak{S}$ dir. Zorn'un Lemması'na göre $\mathfrak{S}$ nin bir maksimal elemana sahiptir.

(d) $\Rightarrow$ (e): $\mathfrak{S}$, X in radikal alt modüllerinin, boş olmayan bir ailesi olsun. $\mathfrak{S}^* = \{Y : Y \text{ bir radikal alt modüldür, } sY \subseteq Y' \text{ olacak şekilde } s \in S \text{ ve } Y' \in \mathfrak{S} \text{ vardır}\}$ olarak tanımlansın. Şimdi, $\mathfrak{S}^*$ nin, X in radikal alt modüllerinin radikal S -doymuş bir ailesi olduğu gösterilecek. $sK \subseteq Y^*$ olmak üzere, K, X in radikal bir alt modülü, $s \in S$ ve $Y^* \in \mathfrak{S}^*$ olsun. $Y^* \in \mathfrak{S}^*$ olduğundan, $s_1 Y^* \subseteq K'$ olacak şekilde $s_1 \in S$ ve $K' \in \mathfrak{S}$ vardır. Böylece $ss_1 K \subseteq s_1 Y^* \subseteq K'$ bulunur. Yani $K \in \mathfrak{S}^*$ ve dolayısıyla $\mathfrak{S}^*$ radikal S -doymuştur. Böylece (d) ile, $\mathfrak{S}^*$ bir $L \in \mathfrak{S}^*$ maksimal elemanına sahiptir. O halde, $s^* L \subseteq L'$ olacak şekilde $s^* \in S$ ve bir $L' \in \mathfrak{S}$ alt modülü vardır. Şimdi, L' nin $\mathfrak{S}$ nin bir S -maksimal elemanı olduğu gösterilecek. Bazı $K' \in \mathfrak{S}$ için $L' \subseteq K'$ olsun. $m \in \text{rad}_X(L + K')$ ele alınsın. $Am = IX$ olmak üzere, A nın bazı ideali I ve $n_0 \in \mathbb{N}$ için $I^{n_0} X \subseteq L + K'$ bulunur. Böylece $s^* I^{n_0} X \subseteq s^* L + s^* K' \subseteq K'$ olur. Buradan $s^* I \subseteq \sqrt{(K' :_A X)} = (K' :_A X)$ ve $s^* m \in s^* Am = s^* IX \subseteq K'$ olur. $s^* \text{rad}_X(L + K') \subseteq K'$ elde edilir. $\text{rad}_X(L + K')$, radikal alt modül ve $K' \in \mathfrak{S}$ olduğundan, $\text{rad}_X(L + K') \in \mathfrak{S}^*$ bulunur. $L \subseteq \text{rad}_X(L + K')$ ve L maksimal olduğundan, $K' \subseteq \text{rad}_X(L + K') = L$ ve $s^* K' \subseteq s^* L \subseteq L'$ olur. Dolayısıyla, L' , $\mathfrak{S}$ nin bir S -maksimal elemanıdır.

(e) $\Rightarrow$ (a): Y , X in bir alt modülü olsun. X in radikal alt modüllerinin $\mathfrak{S} = \{\text{rad}_X(Ax_1 + Ax_2 + \dots + Ax_n) : x_1, x_2, \dots, x_n \in Y \text{ ve } n \in \mathbb{N}\}$ ailesi göz önüne alınsın. O halde (e) ile $\mathfrak{S}$, bir S -maksimal eleman $K \in \mathfrak{S}$ ye sahiptir. Yani, öyle bir $s \in S$ vardır ki, bazı $L \in \mathfrak{S}$ için $K \subseteq L$ olduğunda, $sL \subseteq K$ olur. $K \in \mathfrak{S}$ olduğundan, bazı $x_1, x_2, \dots, x_n \in Y$ için $K = \text{rad}_X(Ax_1 + Ax_2 + \dots + Ax_k)$ şeklinde yazılabilir. $m \in Y$ olsun. $K \subseteq \text{rad}_X(Ax_1 + Ax_2 + \dots + Ax_k + Am)$ ve $\text{rad}_X(Ax_1 + Ax_2 + \dots + Ax_k + Am) \in \mathfrak{S}$ olduğundan, $sm \in \text{rad}_X(Ax_1 + Ax_2 + \dots + Ax_k + Am) \subseteq K$ elde edilir. Böylece $sY \subseteq K = \text{rad}_X(Ax_1 + Ax_2 + \dots + Ax_k)$ bulunur. Dolayısıyla, Y radikal S -sonludur ve X , S -Noetherian spektrum koşulunu sağlar.

A bir halka, X bir A –modül ve $S \subseteq A$ çarpımsal kapalı bir küme olsun. X in alt modüllerinin bir artan $Y_1 \subseteq Y_2 \subseteq \dots \subseteq Y_n \subseteq \dots$ zinciri olmak üzere, $n \geq k$ için $sY_n \subseteq Y_k$ olacak şekilde $s \in S$ ve $k \in \mathbb{N}$ varsa, $\{Y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ ailesine S -durağan denir.

Sonuç 4.2.3. X in tüm radikal alt modüllerinin kümesi sayılabilir olmak üzere, X bir çarpımsal sonlu üretilmiş A -modül ve $S \subseteq A$ bir çarpımsal kapalı alt küme olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

- a. X S - Noetherian spektrum koşulunu sağlar.
- b. X in her radikal alt modülü radikal S -sonludur.
- c. X in her asal alt modülü radikal S -sonludur.
- d. X in radikal alt modüllerinin her artan zinciri S -durağandır.
- e. X in radikal alt modüllerinin her boş olmayan radikal S -doymuş ailesi $\mathfrak{S}$, bir maksimal elemana sahiptir.
- f. X in radikal alt modüllerinin her boş olmayan ailesi $\mathfrak{S}$, bir S -maksimal elemana sahiptir.

İspat. (a) $\Leftrightarrow$ (b) $\Leftrightarrow$ (c) $\Leftrightarrow$ (e) $\Leftrightarrow$ (f): Teorem 4.2.6 dan çıkar.

(f) $\Rightarrow$ (d): X in radikal alt modüllerinin artan

$$Y_1 \subseteq Y_2 \subseteq \dots \subseteq Y_n \subseteq \dots$$

zinciri göz önüne alınsın. $\mathfrak{S} = \{Y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ olsun. O halde (f) ile $\mathfrak{S}$, bir S -maksimal eleman $Y_k \in \mathfrak{S}$ ye sahiptir. Her $n \geq k$ için $Y_k \subseteq Y_n$ olduğundan, $sY_n \subseteq Y_k$ olacak şekilde sabit bir $s \in S$ vardır. Bu nedenle, $\{Y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ S -durağandır.

(d) $\Rightarrow$ (e): $\mathfrak{S}$, X in radikal alt modüllerinin, boş olmayan, bir radikal S -doymuş ailesi olsun. O halde $(\mathfrak{S}, \subseteq)$ nin kısmi sıralı bir küme olduğu açıktır. $\mathfrak{S}$ de bir $\mathcal{C}$ zinciri göz önünde bulundursun. Varsayımdan $\mathcal{C}$ sayılabilir ve $\mathcal{C} = \{L_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ şeklinde yazılabilir. $\mathcal{C}$ nin bir üst sınırına sahip olduğu gösterilecek. X in $Y_1 \subseteq Y_2 \subseteq \dots \subseteq Y_k \subseteq \dots$ artan zincirini şu şekilde tanımlansın: $Y_1 = L_1$, eğer $L_k \supsetneq Y_{k-1}$ ise $Y_k = L_k$, ve aksi halde

$Y_k = L_k$ dir. O halde $\{Y_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}$ ve $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} L_i = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} Y_i$ olduğu kolayca görülür. $Y = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} Y_i$ olsun. Önceki teoremin ispatına benzer bir argüman kullanarak, Y nin X in radikal bir alt modülü olduğu gösterilebilir. $Y_1 \subseteq Y_2 \subseteq \dots \subseteq Y_k \subseteq \dots$, radikal alt modüllerin artan bir zincir olduğundan, (d) ile, tüm $n \in \mathbb{N}$ için $sY_n \subseteq Y_m$ olacak şekilde $s \in S$ ve $m \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece $sY \subseteq Y_m$ olur. $Y_m \in \mathfrak{S}$ ve $\mathfrak{S}$ radikal S -doymuş aile olduğundan, $Y \in \mathfrak{S}$ bulunur. Bu nedenle, $\mathcal{C}$ nin $\mathfrak{S}$ de bir üst sınırı Y vardır. Zorn'un Lemması ile $\mathfrak{S}$, bir maksimal elemana sahiptir.

Sonuç 4.2.4. A bir halka ve $S \subseteq A$ bir çarpımsal kapalı alt küme olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

- a. A S -Noetherian spektrum koşulunu sağlar.
- b. A nın her radikal ideali radikal S -sonludur.
- c. A nın her asal ideali radikal S -sonludur.
- d. Radikal ideallerin her boş olmayan ailesi $\mathfrak{S}$, bir S -maksimal elemana sahiptir.

İspat. $X = A$, alarak, istenen, Teorem 4.2.6 dan elde edilir.

Teorem 4.2.7. X bir A -modül ve $S \subseteq A$ bir çarpımsal kapalı alt küme olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

- a. A , S -Noetherian spektrum koşulunu sağlar.
- b. $A \propto X$, $S \propto 0$ - Noetherian spektrum koşulunu sağlar.
- c. $A \propto X$, $S \propto X$ - Noetherian spektrum koşulunu sağlar.

İspat. (a) $\Rightarrow$ (b): A , S -Noetherian spektrum koşulunu sağlayan bir halka verilsin. J , $A \propto X$ in bir asal ideali olsun. O halde, $J = P \propto X$ olacak şekilde A nın bir P asal ideali vardır. A , S -Noetherian spektrum koşulunu sağladığından P , radikal S -sonludur. Yani, $sP \subseteq \sqrt{Ax_1 + Ax_2 + \dots + Ax_n}$ olacak şekilde $s \in S$ ve $x_1, x_2, \dots, x_n \in P$ vardır. Ayrıca $(s, 0) \in S \propto 0$ ve $(s, 0)(P \propto X) = sP \propto sX$ olduğu açıktır. $[A \propto X](x_i, 0) = Ax_i \propto x_i X$ olduğu kolayca görülür. Böylece [11] (Teorem 3.2) kullanılarak,

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n [A \rtimes X](x_i, 0)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n Ax_i \rtimes \sum_{i=1}^n x_i X} = \sqrt{\sum_{i=1}^n Ax_i \rtimes X}$$

elde edilir. Buradan

$$(s, 0)(P \rtimes X) = sP \rtimes sX \subseteq sP \rtimes X$$

$$\subseteq \sqrt{\sum_{i=1}^n Ax_i \rtimes X}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^n [A \rtimes X](x_i, 0)}$$

bulunur. Tüm $i = 1, 2, \dots, n$ için $(x_i, 0) \in P \rtimes X$ olduğundan $P \rtimes X$, radikal $S \rtimes 0$ -sonludur. Sonuç 4.2.4 ile, $A \rtimes X, S \rtimes 0$ -Noetherian spektrum koşulunu sağlar.

(b) $\Rightarrow$ (c): $S \rtimes 0 \subseteq S \rtimes X$ olduğundan ispatın geri kalanı Önerme 4.1.1 den elde edilir.

(c) $\Rightarrow$ (a): $A \rtimes X$ in $S \rtimes X$ -Noetherian spektrum koşulunu sağladığı varsayalım. I, A nın bir ideali olmak üzere, $J = I \rtimes X$ olsun. J radikal $S \rtimes X$ -sonlu olduğundan

$$(s, m)(I \rtimes X) \subseteq \sqrt{\sum_{i=1}^n [A \rtimes X](x_i, m_i)}$$

olacak şekilde $(s, m) \in S \rtimes X$ ve $(x_1, m_1), (x_2, m_2), \dots, (x_n, m_n) \in I \rtimes X$ vardır.

$\sqrt{[A \rtimes X](x_i, m_i)} = \sqrt{Ax_i} \rtimes X$ olduğundan

$$(s, m)(I \rtimes X) \subseteq \sqrt{\sum_{i=1}^n [A \rtimes X](x_i, m_i)}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\sum_{i=1}^n \sqrt{[A \propto X](x_i, m_i)}} \\
&= \sqrt{\sum_{i=1}^n (\sqrt{Ax_i} \propto X)} \\
&= \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n \sqrt{Ax_i}\right) \propto X} \\
&= \sqrt{\sum_{i=1}^n Ax_i} \propto X
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde, $x_1, x_2, \dots, x_n \in I$ için $sI \subseteq \sqrt{\sum_{i=1}^n Ax_i}$ olur. Bu nedenle, A, S -Noetherian spektrum koşulunu sağlar.

Sonuç 4.2.4. X bir A -modül olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

- a. A , Noetherian spektruma sahiptir.
- b. $A \propto X$, Noetherian spektruma sahiptir.

İspat. İstenen $S = \{1\}$ olarak ve Teorem 4.2.7 yi uygulayarak elde edilir.

BÖLÜM 5. $S - dccr$ KOŞULUNU SAĞLAYAN MODÜLLER⁴

$accr$ ve $accr^*$ kavramları Lu tarafından [18] de tanıtılmıştır. Bir A -modül X e A nın her sonlu üretilmiş (temel) ideali I ve X in her alt modülü Y için $(Y :_X I) \subseteq (Y :_X I^2) \subseteq (Y :_X I^3) \subseteq \dots \subseteq (Y :_X I^n) \subseteq \dots$ artan zinciri durağan ise $accr$ ($accr^*$) koşulunu sağlıyor denir [18]. Noetherian halkaların ve modüllerin çeşitli önemli özellikleri bu modül sınıfına genelleştirilmiştir. Öte yandan, Taherizadeh, [22] de $accr$ kavramının duali olan $dccr$ kavramını tanıttı ve geliştirdi. Kavram, belirli alt modüllerde dcc yi sağlayan modüllerin sınıfını inceler. Bir A -modül X e A nın her sonlu üretilmiş (ya da temel) ideali I ve X in her alt modülü Y için $IY \supseteq I^2Y \supseteq I^3Y \supseteq \dots \supseteq I^nY \supseteq \dots$ azalan zinciri durağan oluyorsa $dccr$ (ya da $dccr^*$) koşulunu sağlıyor denir. Taherizadeh, $dccr$ kavramıyla ilgili kısa makalelerin bir dizisini yazmıştır (Bkz. [23], [24] ve [25]). Bu bölümde amacımız $S - dccr$ kavramını tanıtmaktır. $S - dccr$, $dccr$ kavramını artinian, S -artinian ve $dccr$ gibi çeşitli kavramlar için genel bir durum olacak şekilde genelleştirir.

5.1. $S - dccr$ ($S - dccr^*$) Koşulunu Sağlayan Modüllerin Karakterizasyonu

Tanım 5.1.1. A bir halka, X bir A –modül ve $S \subseteq A$ çarpımsal kapalı bir küme olsun. I , A nın bir ideali ve Y de X in bir alt modülü olsun. $IY \supseteq I^2Y \supseteq I^3Y \supseteq \dots \supseteq I^nY \supseteq \dots$ azalan zincirine bir $s \in S$ ve $k \in \mathbb{N}$, her $n \geq k$ için $sI^kY \subseteq I^nY$ koşulu sağlanacak şekilde bulunabilirse S -durağan denir.

⁴ Bu bölüm aşağıdaki gibi yayınlanmıştır:

Özen, M., Naji, O.A., Tekir, Ü. and Koç, S., “On modules satisfying S-dccr condition”, Beitr Algebra Geom (2021), DOI: 10.1007/s13366-021-00609-9

Tanım 5.1.2. Bir A -modül X e A nın her sonlu üretilmiş (ya da temel) ideali I ve X in her alt modülü Y için $IY \supseteq I^2Y \supseteq I^3Y \supseteq \dots \supseteq I^nY \supseteq \dots$ azalan zinciri S -durağan ise $S-dccr$ (ya da $S-dccr^*$) koşulunu sağlıyor denir. Özellikle, A nın A -modül olarak $S-dccr$ ($S-dccr^*$) koşulunu sağlaması durumunda, A halkasının $S-dccr$ ($S-dccr^*$) koşulunu sağladığı söylenir.

Örnek 5.1.1. S , A nın çarpımsal kapalı bir altkümesi ve $S \cap ann_A(X) \neq \emptyset$ olacak şekilde X bir A -modül olsun. Bu durumda X , $S-dccr$ koşulunu sağlar.

Örnek 5.1.2. S , çarpımsal kapalı bir küme olsun. Her S -Artinian modül X , $S-dccr$ koşulunu sağlar.

Örnek 5.1.3. S , çarpımsal kapalı bir küme olsun. $dccr^*$ koşulunu sağlayan her modül X , $S-dccr^*$ koşulunu sağlar.

Önceki örneğin tersi genel olarak doğru değildir. Aşağıdaki örneğe bakılsın.

Örnek 5.1.4. p bir asal sayı olmak üzere, $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_p$ ve $S = \mathbb{Z} \times \{\bar{1}\}$, A nın çarpımsal kapalı bir altkümesi olsun. A -modül A göz önüne alınsın. A , $S-dccr^*$ koşulunu sağlar. Bunu görmek için, $a = (a_1, a_2) \in A$ ve $Y = Y_1 \times Y_2$, A nın bir alt modülü olsun. Azalan $\{a^n Y\}_{n \in \mathbb{N}}$ zincirinin S -durağan olduğu gösterilecek. $\{a_2^n Y_2\}_{n \in \mathbb{N}}$ ailesi, $\mathbb{Z}_p$ nin azalan bir zinciridir ve $\mathbb{Z}_p$ sonlu bir cisim olduğundan, $\{a_2^n Y_2\}_{n \in \mathbb{N}}$, $dccr^*$ yi sağlar. Dolayısıyla, tüm $n \geq k$ için $a_2^k Y_2 \subseteq a_2^n Y_2$ olacak şekilde $k \in \mathbb{N}$ vardır. $s = (0, \bar{1}) \in S$ olsun. $sa^k Y = (0, \bar{1})[a_1^k Y_1 \times a_2^k Y_2] = \{0\} \times a_2^k Y_2 \subseteq a_1^n Y_1 \times a_2^n Y_2 = a^n Y$ olduğu dikkat edilsin. Aynı zamanda, A modülü, $dccr^*$ koşulunu sağlamaz. $q \neq r$, $\mathbb{Z}$ nin iki asal sayısı olsun. $Y = (r) \times \{\bar{0}\}$ ve $a = (q, \bar{q})$ olmak üzere, A nın alt modüllerinin azalan $\{a^n Y\}_{n \in \mathbb{N}}$ zinciri göz önüne alınsın. O halde, herhangi bir $k \in \mathbb{N}$ ve $n \geq k$ için $a^k Y = (q^k r) \times \{\bar{0}\} \not\subseteq (q^n r) \times \{\bar{0}\} = a^n[(r) \times \{\bar{0}\}] = a^n Y$ dir.

Lemma 5.1.1. A bir halka, X bir A -modül ve $S \subseteq A$ çarpımsal kapalı bir küme olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır.

- a. Eğer $S_1 \subseteq S_2$, A nın çarpımsal kapalı alt kümeleri ve A -modül X , $S_1 - dcr$ koşulunu sağlar ise X de $S_2 - dcr$ koşulunu sağlar. Özellikle, dcr koşulunu sağlayan her modül aynı zamanda $S - dcr$ koşulunu da sağlar.
- b. S^* , S nin doyurulmuş kümesi olsun. A -modül X , $S - dcr$ koşulunu sağlar ancak ve ancak X , $S^* - dcr$ koşulunu sağlar.
- c. X , çarpımsal bir A -modül ve $S \subseteq U_X(A)$, A nın çarpımsal kapalı bir alt kümesi olsun. A -modül X , dcr koşulunu sağlar ancak ve ancak X , $S - dcr$ koşulunu sağlar.
- d. $S - dcr^*$ koşulunu sağlayan bir A -modül X olsun. Şu halde, $S^{-1}A$ -modül $S^{-1}X$, dcr^* koşulunu sağlar.

İspat.

- a. Açıktır.
- b. X , $S - dcr$ koşulunu sağlayan bir A -modül verilsin. $S \subseteq S^*$ olduğundan, (a) kullanılarak X , $S^* - dcr$ koşulunu sağlar. Bunun tersi için, X in $S^* - dcr$ koşulunu sağladığı varsayalım. Y , X in bir alt modülü ve I , A nın sonlu üretilmiş bir ideali olmak üzere, $IY \supseteq I^2Y \supseteq I^3Y \supseteq \dots \supseteq I^nY \supseteq \dots$, X in alt modüllerinin bir azalan zinciri göz önünde bulundurulsun. Tüm $n \geq k$ için $sI^kY \subseteq I^nY$ olacak şekilde $s \in S^*$ ve $k \in \mathbb{N}$ vardır. $\frac{s}{1}$, $S^{-1}A$ nın birimsel elemanından $\frac{s}{1} \frac{a}{t} = 1$ olacak şekilde $a \in A$ ve $t \in S$ vardır. Bir $u \in S$ için $usa = ut$ elde edilir. $s' = ut \in S$ olsun. Yani, tüm $n \geq k$ için $s'I^kY = (ua)sI^kY \subseteq sI^kY \subseteq I^nY$ olur. Dolayısıyla X , $S - dcr$ koşulunu sağlar.
- c. X , dcr koşulunu sağlayan bir A -modül X verilsin. $S_1 = \{1\} \subseteq S$ olarak istenen (a) den elde edilir. Şimdi, X , $S - dcr$ koşulunu sağlayan bir A -modül X verilsin. Y , X in bir alt modülü ve I , A nın sonlu üretilmiş bir ideali olmak üzere, X in alt modüllerinin bir azalan

$$IY \supseteq I^2Y \supseteq I^3Y \supseteq \dots \supseteq I^nY \supseteq \dots$$

zinciri ele alınsın. $\{I^n Y\}_{n \in \mathbb{N}}$ S -durağan olduğundan, $n \geq k$ için $sI^k Y \subseteq I^n Y$ olacak şekilde $s \in S$ ve $k \in \mathbb{N}$ vardır. X çarpımsal bir modül ve $sX = X$ olduğundan, tüm $n \geq k$ için

$$\begin{aligned} I^k Y &= (I^k Y :_A X)X = (I^k Y :_A X)sX \\ &= s(I^k Y :_A X)X = sI^k Y \subseteq I^n Y \end{aligned}$$

olur. Bu nedenle X , $dccr$ koşulunu sağlar.

- d.** $X, S - dccr^*$ koşulunu sağlayan bir A -modül verilsin. Y, X in bir alt modülü ve $\frac{a}{s} \in S^{-1}A$ olmak üzere, $S^{-1}X$ in alt modüllerinin bir azalan

$$\frac{a}{s}S^{-1}Y \supseteq \frac{a^2}{s^2}S^{-1}Y \supseteq \frac{a^3}{s^3}S^{-1}Y \supseteq \dots \supseteq \frac{a^n}{s^n}S^{-1}Y \supseteq \dots$$

zinciri göz önünde bulundursun. $\{a^i Y\}_{i \in \mathbb{N}}$ S -durağan olduğundan, $n \geq k$ için $s'a^k Y \subseteq a^n Y$ olacak şekilde $s' \in S$ ve $k \in \mathbb{N}$ vardır. Tüm $n \geq k$ için $\frac{a^k}{s^k}S^{-1}Y \subseteq \frac{a^n}{s^n}S^{-1}Y$ olduğunu göstermek istenmektedir. $\frac{y}{t} \in \frac{a^k}{s^k}S^{-1}Y$ olsun. Bir $x \in Y$ ve $u \in S$ için $\frac{y}{t} = \frac{a^k x}{s^k u}$ bulunur. $vus^k y = vta^k x \in a^k Y$ olacak şekilde $v \in S$ vardır. O halde, $n \geq k$ için $vus's^k y \in a^n Y$ olur. Yani, tüm $n \geq k$ için $\frac{y}{t} = \frac{vus's^k y}{vus's^k t} \in S^{-1}(a^n Y) = \frac{a^n}{1}S^{-1}Y \subseteq \frac{a^n}{s^n}S^{-1}Y$ dir. Dolayısıyla $S^{-1}A$ -modül $S^{-1}X$, $dccr^*$ koşulunu sağlar.

$ann_A(X) \cap S = \emptyset$ olduğunda Lemma 5.1.1(d) ün tersinin genel olarak doğru olmadığına dikkat edilsin. Aşağıdaki örneğe bakılsın.

Örnek 5.1.5. $\mathbb{Z}$ bir $\mathbb{Z}$ -modül ve $S = reg(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z} - \{0\}$ olsun. $S^{-1}\mathbb{Z} = \mathbb{Q}$ olur ve böylece $\mathbb{Q}$ -modül $\mathbb{Q}$ $dccr^*$ koşulunu sağlar. Şimdi $\mathbb{Z}$ nin alt modüllerinin aşağıdaki

$$2\mathbb{Z} \supseteq 2^2\mathbb{Z} \supseteq 2^3\mathbb{Z} \supseteq \dots \supseteq 2^n\mathbb{Z} \supseteq \dots$$

azalan zinciri göz önüne alınsın. Herhangi bir $s \in S$ olsun. $ebob(2, m) = 1$ olmak üzere, $s = 2^t m$ olacak şekilde $t \geq 0$ ve $m \in \mathbb{Z}$ vardır. Her $k \in \mathbb{N}$ için, $s2^k \mathbb{Z} = 2^{k+t} m \mathbb{Z} \not\subseteq 2^{k+t+1} \mathbb{Z}$ olur. Bundan dolayı, $\mathbb{Z}$ -modül $\mathbb{Z}$, $S - dccr^*$ koşulunu sağlamaz. Δ bir indeks kümesi ve S, A nın çarpımsal kapalı altkümesi olsun. $i \in \Delta$ olmak üzere, $s_i \in S$ için $(\bigcap_{i \in \Delta} As_i) \cap S \neq \emptyset$ olur ise, S altkümesine, kuvvetli çarpımsal kapalı bir altküme denir olduğu [50] den hatırlansın. A nın birimsel elemanlarının $u(A)$ kümesinin kuvvetli çarpımsal kapalı bir alt küme olduğuna ve ayrıca her sonlu çarpımsal kapalı alt kümenin kuvvetli çarpımsal kapalı bir alt küme olduğuna dikkat edilsin.

Önerme 5.1.1. A bir halka, X bir A -modül ve $S \subseteq A$ kuvvetli çarpımsal kapalı bir küme olsun. A -modül X , $S - dccr^*$ koşulunu sağlar ancak ve ancak $S^{-1}A$ -modül $S^{-1}X$, $dccr^*$ koşulunu sağlar.

İspat. Gerek koşul kısmı Lemma 5.1.1(d) de doğrulanır. Yeter koşul için $S^{-1}A$ -modül $S^{-1}X$ in $dccr^*$ koşulunu sağladığı varsayılınsın. Y, X in bir alt modülü ve $a \in A$ olmak üzere, X in alt modüllerinin bir azalan

$$aY \supseteq a^2Y \supseteq a^3Y \supseteq \dots \supseteq a^nY \supseteq \dots$$

zinciri göz önüne alınsın. O halde $\left\{ \frac{a^i}{1} S^{-1}Y \right\}_{i \in \mathbb{N}}$, $S^{-1}X$ in alt modüllerinin azalan zincirinin bir ailesidir. $S^{-1}X$, $dccr^*$ koşulunu sağladığından, tüm $n \geq k$ için $\frac{a^k}{1} S^{-1}Y \subseteq \frac{a^n}{1} S^{-1}Y$ olacak şekilde $k \in \mathbb{N}$ vardır. $Y = \{y_i\}_{i \in \Delta}$ olsun. Her $i \in \Delta$ ve $y_i \in Y$ için ve $\frac{a^k y_i}{1} \in \frac{a^k}{1} S^{-1}Y \subseteq \frac{a^n}{1} S^{-1}Y$ olduğundan $s_i a^k y_i \in a^n Y$ olacak şekilde $s_i \in S$ vardır. S , kuvvetli çarpımsal kapalı bir küme olduğundan $s \in (\bigcap_{i \in \Delta} As_i) \cap S$ vardır. Böylece $sa^k y_i \in a^n Y$ bulunur ve $sa^k Y \in a^n Y$ olur. Yani, $X, S - dccr^*$ koşulunu sağlar.

Önerme 5.1.2. D bir tamlık bölgesi S, D halkasının doyurulmuş sonlu çarpımsal kapalı bir alt kümesi olsun. Eğer $D, S - dccr^*$ koşulunu sağlıyorsa, bu taktirde $S = D - \{0\}$ dır.

İspat. a, D nin sıfır olmayan bir elemanı ve $I = Aa$ olsun. D nin ideallerinin azalan

$$aI \supseteq a^2I \supseteq a^3I \supseteq \dots \supseteq a^nI \supseteq \dots$$

zinciri göz önüne alınsın. $D, S - dcr^*$ koşulunu sağladığından, tüm $n \geq k$ için $sa^kI \subseteq a^nI$ olacak şekilde $s \in S$ ve $k \in \mathbb{N}$ vardır. Bir $b \in D$ için $sa^{k+1} = a^{k+2}b$ olur. Böylece $a^{k+1}(s - ab) = 0$ ve $ab = s$ bulunur. S doyurulmuş olduğundan $a \in S$ elde edilir.

Sonuç 5.1.1. D bir tamlık bölgesi S, D halkasının doyurulmuş sonlu çarpımsal kapalı bir alt kümesi olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

- a. $D, S - dcr^*$ koşulunu sağlar.
- b. $S = D - \{0\}$.

İspat. Önerme 5.1.1 ve Önerme 5.1.2 den çıkar.

Önerme 5.1.3. $S_1 \subseteq S_2, A$ nin çarpımsal kapalı alt kümeleri olsun. Her $u \in S_2$ için, $uv \in S_1$ olacak şekilde $v \in A$ mevcut olduğu varsayılınsın. Şu halde, A -modül $X, S_1 - dcr$ koşulunu sağlar ancak ve ancak A -modül $X, S_2 - dcr$ koşulunu sağlar.

İspat. $(\Rightarrow)$: Lemma 5.1.1 den çıkar.

$(\Leftarrow)$: Y, X in bir alt modülü ve I, A nin sonlu üretilmiş bir ideali olmak üzere, X in alt modüllerinin bir azalan

$$IY \supseteq I^2Y \supseteq I^3Y \supseteq \dots \supseteq I^nY \supseteq \dots$$

zinciri göz önüne alınsın. $X, S_2 - dcr$ koşulunu sağladığından, tüm $n \geq k$ için $sI^kY \subseteq I^nY$ olacak şekilde $s \in S_2$ ve $k \in \mathbb{N}$ vardır. Varsayımdan $s' = st \in S$ olacak şekilde $t \in A$ vardır. Böylece tüm $n \geq k$ için $s'I^kY \subseteq sI^kY \subseteq I^nY$ bulunur. Bundan dolayı A -modül $X, S_1 - dcr$ koşulunu sağlar.

Sonraki teorem, $S - dcr$ ve $S - dcr^*$ kavramlarının herhangi bir modül için eşdeğer olduğunu gösterir. Bundan önce, aşağıdaki lemma gereklidir.

Lemma 5.1.2. A değişmeli bir halka ve $I = (a_1, a_2, \dots, a_r)$, A nın sonlu üretilmiş bir ideali olsun. $n \geq kr$ olmak üzere, herhangi iki pozitif tamsayı k ve n için $I^n = (a_1^k, a_2^k, \dots, a_r^k)I^{n-k}$ dır [18].

Teorem 5.1.1. Herhangi bir A -modül X ve A nın çarpımsal kapalı alt kümesi S için $S - dcr$ ve $S - dcr^*$ koşulları denktir.

İspat. Tanımdan, $S - dcr$ koşulunun $S - dcr^*$ koşuluna yol açtığı açıktır. Dolayısıyla $S - dcr^*$ koşulunun $S - dcr$ koşulunu verdiğini göstermek yeterlidir. Y, X in bir alt modülü ve $I = (a_1, a_2, \dots, a_r)$, A nın sonlu üretilmiş bir ideali olmak üzere, X in alt modüllerinin bir azalan

$$IY \supseteq I^2Y \supseteq I^3Y \supseteq \dots \supseteq I^nY \supseteq \dots$$

zinciri göz önüne alınsın. $X, S - dcr^*$ koşulunu sağladığından, her a_i için tüm $n \geq k_i$ için $s_i a_i^{k_i} Y \subseteq a_i^n Y$ olacak şekilde $s_i \in S$ ve $k_i \in \mathbb{N}$ vardır. $l = \max\{k_i : i = 1, 2, \dots, r\}$ ve $s = s_1 s_2 \dots s_r \in S$ olsun. Şu halde, her $n \geq l$ için $s(a_1^l, a_2^l, \dots, a_r^l)Y = s a_1^l Y + s a_2^l Y + \dots + s a_r^l Y \subseteq a_1^n Y + a_2^n Y + \dots + a_r^n Y = (a_1^n, a_2^n, \dots, a_r^n)Y$ elde edilir. $k = lr + 1 > lr$ olsun. Lemma 5.1.2 den $sI^k Y = s(a_1^l, a_2^l, \dots, a_r^l)I^{k-l} Y$ ve tüm $n \geq k$ için $sI^k Y \subseteq (a_1^n, a_2^n, \dots, a_r^n)I^{k-l} Y \subseteq I^n Y$ çıkar. Böylece $X, S - dcr$ koşulunu sağlar.

Lemma 5.1.3. A bir halka, X bir A -modül ve $S \subseteq A$ çarpımsal kapalı bir küme olsun. X in herhangi bir Y alt modülü, $a \in A$, $k \in \mathbb{N}$ ve $s \in S$ için aşağıdaki ifadeler denktir:

- Her $n \geq k$ için $s a^k Y \subseteq a^n Y$ dir.
- Her $n \geq 0$ için $s Y \subseteq a^n Y + (0 :_Y a^k)$ dır.

İspat. (a) $\Rightarrow$ (b): Her $n \geq k$ için $sa^kY \subseteq a^nY$ olsun. $x \in Y$ olsun. Bir $y \in Y$ için $sa^kx = a^ny$ olur. Böylece $a^k(sx - a^{n-k}y) = 0$ ve $sx - a^{n-k}y \in (0 :_Y a^k)$ bulunur. Yani $sx \in a^{n-k}Y + (0 :_Y a^k)$ dir. Şu halde, her $n \geq k$ için $sY \subseteq a^{n-k}Y + (0 :_Y a^k)$ verilir. Buradan her $n \geq 0$ için $sY \subseteq a^nY + (0 :_Y a^k)$ elde edilir.

(a) $\Rightarrow$ (b): Her $n \geq 0$ için $sY \subseteq a^nY + (0 :_Y a^k)$ olsun. Her iki tarafı da a^k ile çarparak $sa^kY \subseteq a^{n+k}Y$ elde edilir. Yani her $n \geq k$ için $sa^kY \subseteq a^nY$ dir.

Aşağıdaki teoremden, $S - dccr$ kavramı alt modüller açısından karakterize edilecek.

Teorem 5.1.2. A bir halka, X bir A –modül ve $S \subseteq A$ çarpımsal kapalı bir küme olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

- $X, S - dccr$ koşulunu sağlar.
- $X, S - dccr^*$ koşulunu sağlar.
- A nın her elemanı a ve X in her alt modülü Y için her $n \geq 0$ için $sY \subseteq a^nY + (0 :_Y a^k)$ olacak şekilde $s \in S$ ve $k \in \mathbb{N}$ vardır.
- A nın her sonlu üretilmiş ideali I ve X in her alt modülü Y için her $n \geq 0$ için $sY \subseteq I^nY + (0 :_Y I^k)$ olacak şekilde $s \in S$ ve $k \in \mathbb{N}$ vardır.

İspat. (a) $\Leftrightarrow$ (b): Teorem 5.1.1 den çıkar.

(b) $\Leftrightarrow$ (c): Lemma 5.1.3 ten çıkar.

(d) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (a): Açıktır.

(a) $\Rightarrow$ (d): X in $S - dccr$ koşulunu sağladığı varsayalım. $I = (a_1, a_2, \dots, a_t)$, A nın sonlu üretilmiş bir ideali ve Y, X in bir alt modülü olsun. Şu halde, bazı pozitif tam sayılar $n_1, n_2, \dots, n_t$ ve bazı $s_1, s_2, \dots, s_t$ için her $n \geq n_1$ için $s_1 a_1^{n_1} Y \subseteq a^n Y$; her $i = 2, 3, \dots, t$ için tüm $n \geq n_i$ için $s_i a_i^{n_i} (0 :_Y (a_1^{n_1}, a_2^{n_2}, \dots, a_{i-1}^{n_{i-1}})) \subseteq$

$a_i^n (0 :_Y (a_1^{n_1}, a_2^{n_2}, \dots, a_{i-1}^{n_{i-1}}))$ olur. Her $i = 2, 3, \dots, t$ için $b_i = a_i^{n_i}$ olsun. Lemma 3 ten $s_1 Y \subseteq a_1^{n_1} Y + (0 :_Y b_1)$ ve her $i = 2, 3, \dots, t$ için

$$s_i (0 :_Y (b_1, b_2, \dots, b_{i-1})) \subseteq a_i^n (0 :_Y (b_1, b_2, \dots, b_{i-1})) + (0 :_{(0 :_Y (b_1, b_2, \dots, b_{i-1}))} b_i)$$

elde edilir.

Şimdi tümevarımla bir $u \in S$ ve her $n \geq 0$ için $uY \subseteq (a_1^n, a_2^n, \dots, a_t^n)Y + (0 :_Y (b_1, b_2, \dots, b_t))$ olduğu gösterilecek. İlk olarak, her $n \geq 0$ için $s_1 Y \subseteq a_1^n Y + (0 :_Y b_1)$ olduğuna dikkat edilsin. Şimdi bazı $i \leq t-1$, $s^* \in S$ ve her $n \geq 0$ için $s^* Y \subseteq (a_1^n, a_2^n, \dots, a_i^n)Y + (0 :_Y (b_1, b_2, \dots, b_i))$ olduğu varsayalım. $u = s^* s_{i+1} \in S$ olsun. Böylece

$$\begin{aligned} uY &= s_{i+1} s^* Y \subseteq s_{i+1} (a_1^n, a_2^n, \dots, a_i^n)Y + s_{i+1} (0 :_Y (b_1, b_2, \dots, b_i)) \\ &\subseteq (a_1^n, a_2^n, \dots, a_i^n)Y + a_{i+1}^n (0 :_Y (b_1, b_2, \dots, b_i)) + \\ &\quad (0 :_{(0 :_Y (b_1, b_2, \dots, b_i))} b_{i+1}) \\ &\subseteq (a_1^n, a_2^n, \dots, a_{i+1}^n)Y + (0 :_Y (b_1, b_2, \dots, b_{i+1})) \end{aligned}$$

elde edilir. Yani bir $u^* \in S$ ve her $n \geq 0$ için $u^* Y \subseteq (a_1^n, a_2^n, \dots, a_t^n)Y + (0 :_Y (b_1, b_2, \dots, b_t))$ bulunur. $k = n_1 + n_2 + \dots + n_{t-1} - t + 1$ olsun. Şu halde, $I^k \subseteq (b_1, b_2, \dots, b_t)$ olur ve böylece her $n \geq 0$ için

$$\begin{aligned} u^* Y &\subseteq (a_1^n, a_2^n, \dots, a_t^n)Y + (0 :_Y (b_1, b_2, \dots, b_t)) \\ &\subseteq (a_1^n, a_2^n, \dots, a_t^n)Y + (0 :_Y I^k) \\ &\subseteq I^n Y + (0 :_Y I^k) \end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

X bir A -modül ve P , A nin bir asal ideal olsun. Burada not edilsin ki, $S_P = A - P$, A nin bir çarpımsal kapalı alt kümesidir. $S \subseteq A$ bir çarpımsal kapalı alt küme olmak üzere, $\pi: X \rightarrow S^{-1}X$, her $x \in X$ için, $\pi(x) = \frac{x}{1}$ ile tanımlanan doğal homomorfizma

olsun. Sonraki teorem, X modülü ile onun yerelleştirmesi arasındaki $S - dcr$ özelliğini açıklığa kavuşturur.

Teorem 5.1.3. A yarı yerel bir halka, X bir A -modül ve $S \subseteq A$ çarpımsal kapalı bir küme olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

- a. A nın her maksimal ideali $\mathcal{M}$ için $S_{\mathcal{M}}^{-1}X, \pi(S) - dcr$ koşulunu sağlar.
- b. $X, S - dcr$ koşulunu sağlar.

İspat. (a) $\Rightarrow$ (b): A yarı yerel bir halka ve $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \dots, \mathcal{M}_r, A$ nın maksimal idealleri olsun. Y, X in bir alt modülü ve $a \in A$ olmak üzere, X in alt modüllerinin bir azalan

$$aY \supseteq a^2Y \supseteq a^3Y \supseteq \dots \supseteq a^nY \supseteq \dots$$

zinciri göz önünde bulundurulsun. Her $i = 1, 2, \dots, r$ için $\left\{ \frac{a^n}{1} S_{\mathcal{M}_i}^{-1}Y \right\}_{n \in \mathbb{N}}, S_{\mathcal{M}_i}^{-1}X$ in alt modüllerinin bir azalan zinciridir. $S_{\mathcal{M}_i}^{-1}X, \pi(S) - dcr$ koşulunu sağladığından, tüm $n \geq k_i$ için $\frac{s_i a^{k_i}}{1} S_{\mathcal{M}_i}^{-1}Y \subseteq \frac{a^n}{1} S_{\mathcal{M}_i}^{-1}Y$ olacak şekilde $s_i \in S$ ve $k_i \in \mathbb{N}$ vardır. $k = \max\{k_i : i = 1, 2, \dots, r\}$ ve $s = s_1 s_2 \dots s_r \in S$ olsun. Şu halde, her $n \geq k$ için $\frac{sa^k}{1} S_{\mathcal{M}_i}^{-1}Y \subseteq \frac{a^n}{1} S_{\mathcal{M}_i}^{-1}Y$ olur. Her $i = 1, 2, \dots, r$ ve tüm $n \geq k$ için $S_{\mathcal{M}_i}^{-1}(sa^k Y) \subseteq S_{\mathcal{M}_i}^{-1}(a^n Y)$ bulunur. [12](Corollary, Sayfa 164) kullanarak, tüm $n \geq k$ için $sa^k Y \subseteq a^n Y$ elde edilir. Bu nedenle $X, S - dcr$ koşulunu sağlar.

(b) $\Rightarrow$ (a): Önerme 5.1.1(a), (d) ten çıkar.

P, A nin bir asal ideal olmak üzere, bir A -modül $X, S_P - dcr$ koşulunu sağladığında, X in $P - dcr$ koşulunu sağlıyor söylenir. Şimdi, dcr koşulunu sağlayan modüller, $S - dcr$ koşulunu sağlayan modüller açısından karakterize edilecek.

Teorem 5.1.4. X bir A -modül olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

- a. X, dcr koşulunu sağlar.

- b. Her $P \in \text{Spec}(A)$ için, $X, P - dcr$ koşulunu sağlar.
- c. Her $\mathcal{M} \in \text{Max}(A)$ için, $X, \mathcal{M} - dcr$ koşulunu sağlar.

İspat. (a) $\Rightarrow$ (b): Lemma 5.1.1 den çıkar.

(b) $\Rightarrow$ (c): Açıktır.

(c) $\Rightarrow$ (a): (c) ün varlığı kabul edilsin. Y, X in bir alt modülü ve $a \in A$ olmak üzere, X in alt modüllerinin bir azalan

$$aY \supseteq a^2Y \supseteq a^3Y \supseteq \dots \supseteq a^nY \supseteq \dots$$

zinciri göz önüne alınsın. Her $\mathcal{M} \in \text{Max}(A)$ için, $X, \mathcal{M} - dcr$ koşulunu sağladığından, her $n \geq k_m$ için, $s_m a^{k_m} Y \subseteq a^n Y$ olacak şekilde $s_m \notin \mathcal{M}$ ve $k_m \in \mathbb{N}$ vardır. Şimdi,

$$J = \{s_m : \exists \mathcal{M} \in \text{Max}(R), s_m \notin \mathcal{M}, \exists k_m \in \mathbb{N}, \text{her } n \geq k_m \text{ için } s_m a^{k_m} Y \subseteq a^n Y\}$$

olsun. $(J) = R$ olduğunu görmek kolaydır. O zaman, $(s_{m_1}) + (s_{m_2}) + \dots + (s_{m_n}) = A$ olacak şekilde $s_{m_i} \in J - \mathcal{M}_i$ vardır. Her $n \geq k_{m_i}$ için, $s_{m_i} a^{k_{m_i}} Y \subseteq a^n Y$ olacak şekilde bir $k_{m_i} \in \mathbb{N}$ vardır. Şimdi, $k = \max\{k_{m_i} : i = 1, 2, \dots, n\}$ olsun. Şu halde, her $n \geq k$ için, $s_{m_i} a^k Y \subseteq s_{m_i} a^{k_{m_i}} Y \subseteq a^n Y$ olur. Bu durumda, her $n \geq k$ için,

$$\begin{aligned} a^k Y &= [(s_{m_1}) + (s_{m_2}) + \dots + (s_{m_n})] a^k Y \\ &= \sum_{i=1}^n s_{m_i} a^k Y \subseteq a^n Y \text{ dir.} \end{aligned}$$

Dolayısıyla, X, dcr koşulunu sağlar.

I , A halkasının has bir ideali ve $\pi: A \rightarrow A/I$, her $a \in A$ için, $\pi(a) = a + I$ ile tanımlanan doğal homomorfizma olsun. $S \subseteq A$ bir çarpımsal kapalı alt küme olmak üzere, $\pi(S)$ de A/I nin bir çarpımsal kapalı alt kümesidir. Şimdi $S - dcr$ koşulunu

sağlayan modüller, $S - dccr$ koşulunu sağlayan halkalar açısından karakterize edilecek.

Önerme 5.1.4. X bir A -modül ve $S \subseteq A$ çarpımsal kapalı bir alt küme olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır.

- X çarpımsal bir A -modül olsun. Eğer $A / ann_A(X)$, $\pi(S) - dccr$ koşulunu sağlıyorsa X , $S - dccr$ koşulunu sağlar.
- X çarpımsal sonlu üretilmiş bir A -modül olsun. Eğer X , $S - dccr$ koşulunu sağlıyorsa $A / ann_A(X)$, $\pi(S) - dccr$ koşulunu sağlar.

İspat. (a): X çarpımsal bir A -modül olsun. $A / ann_A(X)$, $\pi(S) - dccr$ koşulunu sağlayan bir halka verilsin. Y , X in bir alt modülü ve $a \in A$ olsun. $(Y :_A X) / ann_A(X)$, $A / ann_A(X)$ in bir ideali olduğundan, Teorem 5.1.2 yi kullanarak,

$$\begin{aligned} (s + ann_A(X))(a + ann_A(X))^k [(Y :_A X) / ann_A(X)] \\ \subseteq (a + ann_A(X))^n [(Y :_A X) / ann_A(X)] \end{aligned}$$

olacak şekilde $s \in S$ ve $k \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece $sa^k(Y :_A X) + ann_A(X) \subseteq a^n(Y :_A X) + ann_A(X)$ olur. X çarpımsal olduğundan, her $n \geq k$ için $sa^k Y \subseteq a^n Y$ elde edilir. Dolayısıyla X , $S - dccr$ koşulunu sağlar.

(b): X çarpımsal sonlu üretilmiş bir A -modül olsun. X , $S - dccr$ koşulunu sağlayan bir A -modül verilsin. $\bar{a} = a + ann_A(X) \in A / ann_A(X)$ ve J , $A / ann_A(X)$ in bir ideali olsun. $J = I / ann_A(X)$ olacak şekilde A nın $ann_A(X)$ içeren bir ideali I vardır. $A / ann_A(X)$ in ideallerinin aşağıdaki azalan

$$\bar{a}J \supseteq \bar{a}^2J \supseteq \bar{a}^3J \supseteq \dots \supseteq \bar{a}^nJ \supseteq \dots$$

zincirinin S -durağan olduğu gösterilecek. $\{a^i IX\}_{i \in \mathbb{N}}$, X te S -durağan azalan zincir olduğundan, her $n \geq k$ için, $sa^k IX \subseteq a^n IX$ olacak şekilde $s \in S$ ve $k \in \mathbb{N}$ vardır.

[37](Teorem 9 Sonuç) kullanılarak, $sa^kI \subseteq a^nI + \text{ann}_A(X)$ bulunur. Böylece $n \geq k$ için

$$\begin{aligned} (s + \text{ann}_A(X))\bar{a}^kI &= [sa^kI + \text{ann}_A(X)]/\text{ann}_A(X) \\ &\subseteq [a^nI + \text{ann}_A(X)]/\text{ann}_A(X) = \bar{a}^nI/\text{ann}_A(X) \\ &= \bar{a}^nI \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla $A / \text{ann}_A(X), \pi(S) - dcr$ koşulunu sağlar.

Teorem 5.1.5. X bir çarpımsal sonlu üretilmiş A -modül ve $S \subseteq A$ bir çarpımsal kapalı alt küme olsun. Aşağıdaki ifaeler denktir.

- a. $X, S - dcr$ koşulunu sağlar.
- b. $A / \text{ann}_A(X), \pi(S) - dcr$ koşulunu sağlar.

İspat. Önerme 5.1.4 ten çıkar.

Sonuç 5.1.2. X bir çarpımsal sonlu üretilmiş sadık A -modül ve $S \subseteq A$ bir çarpımsal kapalı alt küme olsun. $X, S - dcr$ koşulunu sağlar ancak ve ancak $A, S - dcr$ koşulunu sağlar.

İspat. Doğrudan Teorem 5.1.5 ten çıkar.

Önerme 5.1.5. $f : X \rightarrow X'$ bir A -epimorfizma ve $S \subseteq A$ bir çarpımsal kapalı altküme olsun. Eğer $X, S - dcr$ koşulunu sağlıyorsa, X' da $S - dcr$ koşulunu sağlar.

İspat. $f : X \rightarrow X'$ bir A -epimorfizma ve $X, S - dcr$ koşulunu sağlayan bir A -modül verilsin. Y', X' nün bir alt modülü ve $a \in A$ olmak üzere, X' nün alt modüllerinin bir azalan

$$aY' \supseteq a^2Y' \supseteq a^3Y' \supseteq \dots \supseteq a^nY' \supseteq \dots$$

zinciri göz önüne alınsın. $\{a^i f^{-1}(Y')\}_{i \in \mathbb{N}}$, X te S -durağan azalan zincir olduğundan, her $n \geq k$ için, $sa^k f^{-1}(Y') \subseteq a^n f^{-1}(Y')$ olacak şekilde $s \in S$ ve $k \in \mathbb{N}$ vardır. f epimorfizma olduğundan, her $n \geq k$ için, $f(sa^k f^{-1}(Y')) = sa^k f(f^{-1}(Y')) = sa^k Y' \subseteq f(a^n f^{-1}(Y')) = a^n Y'$ elde edilir. Bu nedenle, X' , $S - dccr$ koşulunu sağlar.

Önerme 5.1.6. X bir A -modül ve $S \subseteq A$ bir çarpımsal kapalı alt küme olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

- a. $X, S - dccr$ koşulunu sağlar.
- b. Y ve X/Y $S - dccr$ koşulunu sağlar.

İspat. (a) $\Rightarrow$ (b): Önerme 5.1.5 ten çıkar.

(b) $\Rightarrow$ (a): (a) in varlığı kabul edilsin. L, X in bir alt modülü ve $a \in A$ olsun. X in alt modüllerinin bir azalan

$$aL \supseteq a^2L \supseteq a^3L \supseteq \dots \supseteq a^nL \supseteq \dots$$

zinciri göz önünde bulundursun. Bazı $s \in S$, $k \in \mathbb{N}$ ve her $n \geq k$, $sa^kL \subseteq a^nL$ olduğunu göstermek istenmektedir. $\{a^i(L + Y/Y)\}_{i \in \mathbb{N}}$, X/Y de S -durağan azalan zincir olduğundan, her $n \geq k_1$ için, $s_1 a^{k_1}(L + Y/Y) \subseteq a^n(L + Y/Y)$ olacak şekilde $s_1 \in S$ ve $k_1 \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece her $n \geq k_1$ için, $s_1 a^{k_1}L + Y \subseteq a^nL + Y$ bulunur. Diğer yandan, $\{a^i(L \cap Y)\}_{i \in \mathbb{N}}$, Y de S -durağan azalan zincir olduğundan, her $n \geq k_2$ için, $s_2 a^{k_2}(L \cap Y) \subseteq a^n(L \cap Y)$ olacak şekilde $s_2 \in S$ ve $k_2 \in \mathbb{N}$ vardır. $s = s_1 s_2 \in S$ ve $k = \max\{k_1, k_2\}$ olsun. Şu halde, her $n \geq k$ için, $sa^kL + Y \subseteq a^nL + Y$ ve $sa^k(L \cap Y) \subseteq a^n(L \cap Y)$ olur. Her $n \geq 2k$, $s^2 a^{2k}L \subseteq a^nL$ olduğu gösterilecek. $x \in L$ olmak üzere, $s^2 a^{2k}x \in s^2 a^{2k}L$ olsun. $sa^k x \in sa^kL + Y \subseteq a^nL + Y$ ve $y \in L$ ve $m^* \in Y$ için $sa^k x = a^n y + m^*$ olur. $x, y \in L$ olduğundan,

$m^* \in L$ ve $s^2a^{2k}x - sa^{n+k}y = sa^km^* \in sa^k(L \cap Y)$ bulunur. Her $n \geq k$ için, $sa^k((L \cap Y)) \subseteq a^n((L \cap Y))$ olduğundan, bir $m' \in L \cap Y$ için $sa^km^* = a^nm'$ elde edilir. Bu durumda, $s^2a^{2k}x = sa^{n+k}y + a^nm' \in a^nL$ olur. Buradan her $n \geq 2k \geq k$ için, $s^2a^{2k}L \subseteq a^nL$ elde edilir. Bu nedenle $X, S - dcr$ koşulunu sağlar.

Sonuç 5.1.3. X bir A -modül ve $S \subseteq A$ bir çarpımsal kapalı alt küme olsun. $X, S - dcr$ koşulunu sağlar ancak ve ancak herhangi kısa tam dizi $0 \rightarrow X' \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} X'' \rightarrow 0$ için, X' ve X'' $S - dcr$ koşulunu sağlar.

İspat. Önerme 5.1.6 dan çıkar.

Sonuç 5.1.4. S, A halkasının bir çarpımsal kapalı alt kümesi olsun. $A, S - dcr$ koşulunu sağlar ancak ve ancak her $n \in \mathbb{N}$ için A -modül $A^n, S - dcr$ koşulunu sağlar.

İspat. $A, S - dcr$ koşulunu sağlayan bir halka verilsin. Sonucu n üzerinde tümevarım kullanarak ispat edilecek. Varsayımdan ifade $n = 1$ için doğrudur. A -modül A^n nin $S - dcr$ koşulunu sağladığı varsayalım. $f: A^{n+1} \rightarrow A, f(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_1$ ile tanımlanan bir epimorfizma olsun. Bu durumda, $\text{Ker} f = \{0\} \times A^n \cong A^n$ dir. Dolayısıyla, $\text{Ker} f, S - dcr$ koşulunu sağlar. $A^{n+1}/\text{Ker} f \cong A$ ve $A, S - dcr$ koşulunu sağladığından, Önerme 5.1.6 kullanılarak, $A^{n+1}, S - dcr$ koşulunu sağlar.

Sonuç 5.1.5. X bir A -modül, $S \subseteq A$ bir çarpımsal kapalı alt küme ve $Y_1, Y_2, \dots, Y_n, X$ in $S - dcr$ koşulunu sağlayan alt modülleri olsun. Bu takdirde, $Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$ de $S - dcr$ koşulunu sağlayan bir alt modüldür.

İspat. Y_1 ve $Y_2, S - dcr$ koşulunu sağladığı varsayalım. Şu halde Önerme 5.1.6 ya göre, $Y_1 / (Y_1 \cap Y_2)$ $S - dcr$ koşulunu sağlar. Ancak İkinci İzomorfizm Teoremi ile $(Y_1 + Y_2) / Y_2 \cong Y_1 / (Y_1 \cap Y_2)$ elde edilir. Böylece, $(Y_1 + Y_2) / Y_2$ $S - dcr$ koşulunu sağlar. Bu nedenle, yine Önerme 5.1.6 ya göre, $Y_1 + Y_2, S - dcr$ koşulunu

sağlar. Dolayısıyla, n ye tümevarım uygulayarak, $Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$, $S - dcr$ koşulunu sağlar.

Teorem 5.1.6. $A, S - dcr$ koşulunu sağlayan bir halka ve $S \subseteq A$ bir çarpımsal kapalı alt küme olsun. X sonlu üretilmiş bir A -modül ise $X, S - dcr$ koşulunu sağlar.

İspat. X bir sonlu üretilmiş A -modül olsun ve $A, S - dcr$ koşulunu sağlayan bir halka verilsin. Bazı $x_i \in X$ için, $X = Ax_1 + Ax_2 + \dots + Ax_n$ yazılabilir. Her $i = 1, 2, \dots, n$ için, $Ax_i \cong A/ann_A(Ax_i)$ olduğuna dikkat edilsin. $A, S - dcr$ koşulunu sağladığından $A/ann_A(Ax_i) \cong Ax_i$ de $S - dcr$ koşulunu sağlar. Şu halde, Sonuç 5.1.5 ten, $X = Ax_1 + Ax_2 + \dots + Ax_n, S - dcr$ koşulunu sağlar.

X bir A -modül ve $S \subseteq A$ bir çarpımsal kapalı alt küme olsun. $sX \subseteq Y$ olacak şekilde $s \in S$ ve X in sonlu üretilmiş bir alt modülü Y varsa, X modülüne S -sonlu dendiği hatırlansın [34].

Sonuç 5.1.6. (a) $S \subseteq A$ bir çarpımsal kapalı alt küme olduğunu ve X in $S - dcr$ koşulunu sağladığı varsayalım. Eğer her $s \in S$ için $\{x \in X : sx = 0\} = 0$ ve X S -sonlu bir modül ise $X, S - dcr$ koşulunu sağlar.

(b) $S - dcr$ koşulunu sağlayan bir halka A üzerindeki her serbest burulmalı S -sonlu modül $S - dcr$ koşulunu da sağlar.

İspat. (a): X S -sonlu bir modül olsun. X in sonlu üretilmiş bir alt modülü Y ve bir $s \in S$ için $sX \subseteq Y$ olarak yazılabilir. L, X in bir alt modülü ve $a \in A$ olsun. X in alt modüllerinin bir azalan

$$aL \supseteq a^2L \supseteq a^3L \supseteq \dots \supseteq a^nL \supseteq \dots$$

zinciri göz önüne alınsın. sL, Y nin bir alt modülü olduğundan Teorem 6 dan $\{a^i(sL)\}_{i \in \mathbb{N}}, Y$ de S -durağan azalan bir zincirdir. Yani, her $n \geq k$ için, $ta^k(sL) \subseteq a^n(sL)$ olacak şekilde $t \in S$ ve $k \in \mathbb{N}$ vardır. Şimdi $ta^kL \subseteq a^nL$ olduğu gösterilecek.

$x \in L$ olsun. Böylece $tsa^k x \in a^n sL$ olur. Bundan dolayı, $tsa^k x = a^n s x'$ olacak şekilde $x' \in L$ vardır. Dolayısıyla, $s[ta^k x - a^n x'] = 0$ ve $ta^k x = a^n x' \in a^n L$ verilir. Bu nedenle $X, S - dccr$ koşulunu sağlar.

(b): (a) kısmından çıkar.

Teorem 5.1.7. Her $i = 1, 2, \dots, n$ için, X_i bir A_i -modül ve S_i, A_i nin bir çarpımsal kapalı alt kümesi olsun. $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$, $S = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$ ve $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ olduğu varsayalım. Aşağıdaki ifadeler denktir.

- a. $X, S - dccr$ koşulunu sağlar.
- b. Her $i = 1, 2, \dots, n$ için, $X_i, S_i - dccr$ koşulunu sağlar.

İspat. (a) $\Rightarrow$ (b): $X, S - dccr$ koşulunu sağlayan bir A -modül verilsin. $\pi_i: X \rightarrow X_i$, $\pi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_i$ ile tanımlanan bir epimorfizma olsun. Şu halde, Önerme 5.1.5 ten, her $i = 1, 2, \dots, n$ için $X_i, S_i - dccr$ koşulunu sağlar.

(b) $\Rightarrow$ (a): Her $i = 1, 2, \dots, n$ için, $X_i, S_i - dccr$ koşulunu bir A_i -modül verilsin. Y_i, X_i nin bir alt modülü ve $a_i \in A_i$ olmak üzere, $Y = Y_1 \times Y_2 \times \dots \times Y_n, X$ in bir alt modülü ve $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in A$ olsun. X in alt modüllerinin azalan

$$aY \supseteq a^2Y \supseteq a^3Y \supseteq \dots \supseteq a^nY \supseteq \dots$$

zincirinin S -durağan olduğunu göstermek istenmektedir. Yukarıdaki zincirden, $\{a_i^r Y_i\}_{r \in \mathbb{N}}$, X_i nin alt modüllerinin azalan bir zinciridir. Yani, her $m \geq k_i$ için, $s_i a_i^{k_i} Y_i \subseteq a_i^m Y_i$ olacak şekilde $s_i \in S$ ve $k_i \in \mathbb{N}$ vardır. $s = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in S$ ve $k = \max\{k_i: i = 1, 2, \dots, n\}$ olsun. Böylece her $m \geq k$ için,

$$\begin{aligned} sa^k Y &= s[a_1^k Y_1 \times a_2^k Y_2 \times \dots \times a_n^k Y_n] = s_1 a_1^k Y_1 \times s_2 a_2^k Y_2 \times \dots \times s_n a_n^k Y_n \\ &\subseteq s_1 a_1^{k_1} Y_1 \times s_2 a_2^{k_2} Y_2 \times \dots \times s_n a_n^{k_n} Y_n \subseteq a_1^m Y_1 \times a_2^m Y_2 \times \dots \times a_n^m Y_n \\ &= a^m Y \end{aligned}$$

elde edilir. Bu nedenle X , $dccr$ koşulunu sağlar

5.2. $S - dccr$ ve Nakayama'nın Lemması

Bu bölümde Birleşim Teoreminin ve Nakayama'nın Lemmasının S -versiyonları $S - dccr$ kavramı ışığında verilmektedir. Bunu yapmak için önce S -Co-Artin Rees özelliği tanıtılmaktadır.

Tanım 5.2.1. I , A halkasının bir ideali, Y , A -modül X in bir alt modülü ve $S \subseteq A$ bir çarpımsal kapalı alt küme olsun. Her $n \geq k$ için $s(Y :_X I) \subseteq Y + (0 :_X I^n)$ olacak şekilde bir pozitif tamsayısı k ve $s \in S$ varsa, Y ve I için S -Co-Artin Rees özelliğinin geçerli olduğu söylenir.

Önerme 5.2.1. A bir halka, $S \subseteq A$ çarpımsal kapalı bir küme ve X , $S - dccr$ koşulunu sağlayan bir A -modül olsun. A nın her sonlu üretilmiş ideali I ve X in her alt modülü Y için S -Co-Artin Rees özelliği geçerlidir.

İspat. $Y' = (Y :_X I)$ olsun. Teorem 5.1.2 kullanılarak, her $n \geq 0$ için $sY' \subseteq I^n Y' + (0 :_{Y'} I^n)$ olacak şekilde $k \in \mathbb{N}$ ve $s \in S$ vardır. $IY' \subseteq Y$ olduğundan, her $n \geq k$ için $s(Y :_X I) \subseteq Y + (0 :_X I^n)$ elde edilir.

Önerme 5.2.2. I , A halkasının sonlu üretilmiş bir ideali, $S \subseteq A$ çarpımsal kapalı bir küme, X , $S - dccr$ koşulunu sağlayan bir A -modül ve Y , X in bir alt modülü olsun. Bazı $s_n \in S$ için, $\bigcup_{n=0}^{\infty} s_n (0 :_X I^n) \subseteq Y$ dir ancak ve ancak bir $t \in S$ için, $t(Y :_X I) \subseteq Y$ dir.

İspat. Bazı $s_n \in S$ için, $\bigcup_{n=0}^{\infty} s_n (0 :_X I^n) \subseteq Y$ olsun. Önerme 5.2.1 den her $n \geq k$ için $s'(Y :_X I) \subseteq Y + (0 :_X I^n)$ olacak şekilde bir pozitif tamsayısı k ve $s' \in S$ vardır. $s_{n_0} \in S$ olmak üzere, $n_0 \geq k$ ve $t = s_{n_0} s' \in S$ olsun. Şu halde, $t(Y :_X I) = s_{n_0} s'(Y :_X I) \subseteq s_{n_0} Y + s_{n_0} (0 :_X I^n) \subseteq Y$ bulunur. Şimdi, bir $t \in S$ için, $t(Y :_X I) \subseteq$

Y olsun. Tümevarımla, her $n \in \mathbb{N}$ için $t^n(0 :_X I^n) \subseteq Y$ olduğu gösterilecek. Gerçekten de, $n = 1$ için ifade doğrudur, çünkü $t(0 :_X I) \subseteq t(Y :_X I) \subseteq Y$ dir. Bir $n \in \mathbb{N}$ için $t^n(0 :_X I^n) \subseteq Y$ olduğu kabul edilsin. $x \in (0 :_X I^{n+1})$ olsun. Bundan $I^{n+1}x = I^nIx = 0$ ve $Ix \subseteq (0 :_X I^n)$ olur. Yani, $t^nIx \subseteq Y$ dir ve $t^n x \in (Y :_X I)$ verilir. Böylece $t^{n+1}x \in t(Y :_X I) \subseteq Y$ bulunur. $s_n = t^n$ olsun. Bazı $s_n \in S$ için, $\bigcup_{n=0}^{\infty} s_n(0 :_X I^n) \subseteq Y$ elde edilir.

Sonuç 5.2.1. I , A halkasının sonlu üretilmiş bir ideali, $S \subseteq A$ kuvvetli çarpımsal kapalı bir küme, X , $S - dccr$ koşulunu sağlayan bir A -modül ve Y , X in bir alt modülü olsun. Bir $s \in S$ için, $s \bigcup_{n=0}^{\infty} (0 :_X I^n) \subseteq Y$ dir ancak ve ancak $s(Y :_X I) \subseteq Y$ dir.

İspat. $S = \{s_i\}_{i \in \Delta}$ olsun. $s \in (\bigcap_{i \in \Delta} As_i) \cap S$ seçilsin. $s \bigcup_{n=0}^{\infty} (0 :_X I^n) \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} s(0 :_X I^n) \subseteq Y$ olduğu varsayılın. Önerme 5.2.2 den $s_i(Y :_X I) \subseteq Y$ olacak şekilde bir $s_i \in S$ vardır. Böylece $s(Y :_X I) \subseteq s_i(Y :_X I) \subseteq Y$ olur. $s(Y :_X I) \subseteq Y$ olduğu varsayılın. Önerme 5.2.2 nin ispatında olduğu gibi ve $t_n = s^n$ olmak üzere, $\bigcup_{n=0}^{\infty} t_n(0 :_X I^n) \subseteq Y$ yazılabilir. $t_n = s^n \in S = \{s_i\}_{i \in \Delta}$ olduğundan,

$$\begin{aligned} s \bigcup_{n=0}^{\infty} (0 :_X I^n) &= \bigcup_{n=0}^{\infty} s(0 :_X I^n) \\ &\subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} t_n(0 :_X I^n) \subseteq Y \end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Önerme 5.2.3. (Birleşim Teoremi) A bir halka, $S \subseteq A$ kuvvetli çarpımsal kapalı bir küme, I , A nın sonlu üretilmiş bir ideali olsun. Bir $s \in S$ için, $sI \subseteq J(A)$ ancak ve ancak her $S - dccr$ koşulunu sağlayan A -modül X için, $sX = \bigcup_{n=0}^{\infty} s(0 :_X (s^2 I)^n)$ dir.

İspat. $(\Rightarrow)$: $S = \{s_i\}_{i \in \Delta}$ olsun. $s \in (\bigcap_{i \in \Delta} As_i) \cap S$ seçilsin. $sI \subseteq J(A)$ olduğu ve X nin $S - dccr$ koşulunu sağladığı varsayalım. $x \in X$ olsun. $\bigcup_{n=0}^{\infty} s(0 :_X (s^2I)^n) \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} s(0 :_X (s^2I)^n) + s^2Ix$ olduğundan, Sonuç 5.2.1 kullanılarak

$$\begin{aligned} s \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} s(0 :_X (s^2I)^n) + s^2Ix :_X s^2I \right) &\subseteq t \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} s(0 :_X (s^2I)^n) + s^2Ix :_X s^2I \right) \\ &\subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} s(0 :_X (s^2I)^n) + s^2Ix \end{aligned}$$

olacak şekilde $t \in S$ vardır. Böylece bir $a \in I$ ve $y \in \bigcup_{n=0}^{\infty} s(0 :_X (s^2I)^n)$ için $sx = y + s^2ax$ bulunur. Yani, $s(1 - sa)x = y \in \bigcup_{n=0}^{\infty} s(0 :_X (s^2I)^n)$ dir. $sa \in sI \subseteq J(A)$ olduğundan, $1 - sa$ birimseldir ve $sx \in \bigcup_{n=0}^{\infty} s(0 :_X (s^2I)^n)$ olur. Bu nedenle $sX \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} s(0 :_X (s^2I)^n) \subseteq sX$ dir.

$(\Leftarrow)$: P , A nın bir maksimal ideali olsun. O halde, $s(A/P) = \bigcup_{n=0}^{\infty} s(0 :_{A/P} (s^2I)^n)$ dir. Böylece bir $n_0 \in \mathbb{N}$ için $s(1 + P) = s + P \in s(0 :_{A/P} (s^2I)^{n_0})$ bulunur. Bir $r + P \in s(0 :_{A/P} (s^2I)^{n_0})$ için $s + P = s(r + P) = sr + P$ olur. Bundan $s - sr \in P$ ve $rs^{2n_0}I^{n_0} \subseteq P$ çıkar. P asal bir ideal olduğundan, $srI \subseteq P$ bulunur. $(s - sr)I \subseteq P$ olduğundan, $sI \subseteq P$ olur. Yani $sI \subseteq J(A)$ dir.

Sonuç 5.2.2. A bir halka, $S \subseteq U_X(A)$ kuvvetli çarpımsal kapalı bir küme, I , A nın sonlu üretilmiş bir ideali olsun. Bir $s \in S$ için, $sI \subseteq J(A)$ ancak ve ancak her $S - dccr$ koşulunu sağlayan A -modül X için, $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} s(0 :_X (s^2I)^n)$.

İspat. Önerme 5.2.3 ten çıkar.

Teorem 5.2.1 (Nakayama'nın Lemması) A bir halka, $S \subseteq U_X(A)$ kuvvetli çarpımsal kapalı bir küme ve bir $s \in S \cap (\bigcap_{i \in \Delta} As_i)$ için, $sI \subseteq J(A)$ olmak üzere, I , A nın sonlu üretilmiş bir ideali olsun. Eğer X , $S - dccr$ koşulunu sağlayan bir A -modül ve $(0 :_X s^2I) = 0$ ise bu taktirde $X = 0$ dır.

İspat. $(0 :_X s^2 I) = 0$ olduğundan, her $n \in \mathbb{N}$ için $(0 :_X (s^2 I)^n) = 0$ olur. Şu halde, $\bigcup_{n=0}^{\infty} s(0 :_X (s^2 I)^n) = 0$ dır. Sonuç 5.2.2 uygulanarak $X = 0$ elde edilir



BÖLÜM 6. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezde tartışmalar ve bulgulara tezin 2., 3., 4. ve 5. bölümlerinde yer verilmiştir.

Tezin 2. bölümünde, kuvvetli $dccr^*$ koşulu kavramı verilmiştir. Kuvvetli $dccr^*$ koşulu ile mükemmel halkalar, esas olarak eş üretilmiş modüller, ve kuvvetli özel modüller gibi diğer birçok kavram arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Ayrıca, Nakayama'nın Lemmasının bir versiyonu sunulmuştur.

Tezin 3. bölümünde ise çarpımsal kapalı kümeler kullanılarak, Artinian modüllerin yeni bir genellemesi incelenmiştir. Artinian modüllerinin birçok özelliği S-Artinian modüllere aktarılmıştır. Ayrıca, S-Artinian modüllerin sonlu S-eş üretilmiş modüller açısından bir karakterizasyonu verilmiştir.

Tezin 4. bölümünde modüller üzerinde S-Noetherian spektrum koşulu tanımlanmıştır. Bu kavram, Noetherian spektrum koşulunun bir genellemesidir. S-Noetherian spektrum koşulu için Cohen Teoreminin bir versiyonu kanıtlanmıştır. S-Noetherian spektrum koşulunun birçok karakterizasyonu verilmiştir.

Tezin son bölümünde ise S- $dccr$ koşulunun kavramı tanımlanmıştır. Bu kavram, Artinian, S-Artinian ve $dccr$ koşuu gibi diğer birçok kavram için genel bir durumdur. Birçok sonuç ve karakterizasyon yeni koşula genişletilmiştir. Ayrıca, S- $dccr$ kavramı ışığında Birleşim Teoreminin ve Nakayama'nın Lemmasının bir S-versiyonu verilmiştir.

Bu tezde sunulan konuların devamı olarak zincir koşullarının diğer çeşitli genellemelerini elde etmek mümkündür. Örneğin, 2. ve 5. bölümlere dayanarak, kuvvetli S- $dccr^*$ koşulu tanımlanabilir, ve bu ayrıca 2. bölümde bahsedilen zincir koşulunun genel bir durumu olacaktır.

KAYNAKLAR

- [1] F. Çallıalp, Örneklerle Soyut Cebir, Birsen Yayınevi, 2009.
- [2] T. Hungerford, Algebra, Springer, 2000.
- [3] R. Sharp, Steps in Commutative Algebra, Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
- [4] M. Atiyah ve I. Macdonald, Introduction to Commutative Algebra, Oxford: Addison-Wesley Publishing Company, 1969.
- [5] F. Çallıalp ve Ü. Tekir, Değişmeli Halkalar Ve Modüller, İstanbul: Birsen Yayınevi, 2009.
- [6] F. Wang ve H. Kim, Foundations of Commutative Rings and Their Modules, Springer Singapore, 2016.
- [7] P. Bland, Rings and their Modules, Berlin/New York: Walter de Gruyter GmbH and Co. KG, 2011.
- [8] C. P. Lu, «Prime Submodules of modules,» Commentarii Mathematici Universitatis Sancti Pauli, cilt 33, no. 1, pp. 61-69, 1984.
- [9] P. Cohn, Algebra Vol. 2 (2nd ed.), Chichester: John Wiley & Sons Ltd., 1989.
- [10] J. Huckaba, Commutative Rings with Zero Divisors. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, New York, NY, USA: Marcel Dekker, 1988.
- [11] D. Anderson ve M. Winders, «Idealization of a module,» Journal of Commutative Algebra, cilt 1, pp. 3-56, 2009.
- [12] D. Northcott, Lessons on Rings, Modules, and Multiplicities, Cambridge University Press, 1968.
- [13] D. Anderson ve K. Fuller, Rings and Categories of Modules, cilt 13, Springer Science & Business Media, 2012.

- [14] A. Azizi, «Prime submodules of Artinian modules,» Taiwanese Journal of Mathematics, cilt 13, no. 6B, pp. 2011-2020, 2009.
- [15] D. Frohn, «Modules with n -acc and acc on certain types of annihilators,» Journal of Algebra, cilt 256, pp. 467-483, 2002.
- [16] C. Lu, «Modules with Noetherian spectrum,» Communications in Algebra, cilt 38, no. 3, pp. 807-828, 2010.
- [17] R. McCasland ve P. Smith, «Prime submodules of Noetherian modules,» Rocky Mountain Journal of Mathematics, cilt 23, no. 3, pp. 1041-1062, 1993.
- [18] C. Lu, «Modules satisfying Acc on a certain type of colons,» Pacific Journal of Mathematics, cilt 131, no. 2, pp. 303-318, 1988.
- [19] C. Lu, «Modules and rings satisfying (accr),» Proceedings of the American Mathematical Society, cilt 117, no. 2, pp. 5-10, 1993.
- [20] S. Visweswaran, «Some results on modules satisfying ACCR,» Ramanujan Mathematical Society, cilt 10, no. 1, pp. 79-91, 1995.
- [21] S. Visweswaran, «Some results on modules satisfying (C),» Ramanujan Mathematical Society, cilt 11, no. 2, pp. 161-174, 1996.
- [22] A. Taherizadeh, «Modules satisfying dcc on certain submodules,» Southeast Asian Bulletin of Mathematics, cilt 26, pp. 517-521, 2002.
- [23] A. Taherizadeh, «On modules satisfying DCCR*,» Southeast Asian Bulletin of Mathematics, cilt 32, pp. 321-325, 2008.
- [24] A. Taherizadeh, «A Characterization of Commutative Rings Satisfying Dccr,» Journal of Science Tarbiat Moallem University, cilt 9, pp. 69-72, 2010.
- [25] A. Taherizadeh, «Prime Submodules of Modules Satisfying dccr,» International Journal of Algebra, cilt 5, pp. 977 - 983, 2011.
- [26] H. Bass, «Finitistic dimension and a homological generalization of semiprimary rings,» Transactions of the American Mathematical Society, cilt 95, pp. 466-488, 1960.
- [27] R. Wisbauer, Foundations of Module and Ring Theory: A Handbook for Study and Research, CRC Press, 1991.
- [28] T. Hungerford, «On the structure of principal ideal rings,» Pacific Journal of Mathematics, cilt 25, no. 3, pp. 543-547, 1968.

- [29] D. Eisenbud, «Subrings of Artinian and Noetherian rings,» *Mathematische Annalen*, cilt 185, no. 3, pp. 247-249, 1970.
- [30] E. Formanek, «Faithful Noetherian Modules,» *Proceedings of the American Mathematical Society*, cilt 41, pp. 381-383, 1973.
- [31] O. Karamzadeh ve M. Motamedi, « α -Noetherian and Artinian Modules,» *Communications in Algebra*, cilt 23, no. 10, pp. 3685-3703, 1995.
- [32] R. Gilmer ve W. Heinzer, «The Laskerian condition, power series rings and Noetherian spectra,» *Proceedings of the American Mathematical Society*, cilt 79, no. 1, pp. 13-16, 1980.
- [33] M. Larsen ve P. McCarthy, *Multiplicative theory of ideals*, New York, 1971.
- [34] D. Anderson ve T. Dumitrescu, «S-Noetherian Rings,» *Communications in Algebra*, cilt 30, no. 9, pp. 4407-4416, 2002.
- [35] E. Sengelen, U. Tekir ve S. Koç, «On S-Artinian rings and finitely S-cogenerated rings,» *Journal of Algebra and Its Applications*, cilt 19, no. 3, p. 2050051, 2020.
- [36] R. Gilmer, *Multiplicative Ideal Theory*, *Queen's papers in pure and applied mathematics*, 1968.
- [37] P. Smith, «Some Remarks on Multiplication Modules,» *Archiv der Mathematik*, cilt 50, no. 3, pp. 223-235, 1988.
- [38] K. Oral, N. Özkirisci ve U. Tekir, «Strongly 0-dimensional modules,» *Canadian mathematical bulletin*, cilt 57, no. 1, pp. 159-165, 2014.
- [39] Z. Bilgin, S. Koç ve A. Özkirisci, «Strongly prime submodules and Strongly zero dimensional modules,» *Algebra and Discrete Mathematics*, cilt 28, no. 2, pp. 171-183, 2020.
- [40] W. Heinzer ve J. Ohm, «Locally Noetherian commutative rings,» *Transactions of the American Mathematical Society*, cilt 158, no. 2, pp. 273-284, 1971.
- [41] J. Ohm ve R. Pendleton, «Rings with Noetherian spectrum,» *Duke Mathematical Journal*, cilt 35, no. 3, pp. 631-639, 1968.
- [42] S. Hedayat ve E. Rostami, «A characterization of commutative rings whose maximal ideal spectrum is Noetherian,» *Journal of Algebra and Its Applications*, cilt 17, no. 01, p. 1850003, 2018.

- [43] M. Park, «Noetherian-like properties in polynomial and power series rings,» *Journal of Pure and Applied Algebra*, cilt 23, no. 9, pp. 3980-3988, 2019.
- [44] D. Rush, «Noetherian spectrum on rings and modules,» *Glasgow Mathematical Journal*, cilt 53, no. 3, pp. 707-715, 2011.
- [45] H. Ahmed, «S-Noetherian spectrum condition,» *Communications in Algebra*, cilt 46, no. 8, pp. 3314-3321, 2018.
- [46] M. Moore ve S. Smith, «Prime and radical submodules of modules over commutative rings,» *Communications in Algebra*, cilt 30, no. 10, pp. 5037-5064, 2002.
- [47] R. McCasland ve M. Moore, «On radicals of submodules of finitely generated modules,» *Canadian Mathematical Bulletin*, cilt 29, no. 1, pp. 37-39, 1986.
- [48] R. McCasland ve M. Moore, «On Radicals Of Submodules,» *Communications In Algebra*, cilt 19, no. 5, pp. 1327-1341, 1991.
- [49] R. Ameri, «On the prime submodules of multiplication modules,» *International journal of Mathematics and mathematical Sciences*, cilt 27, pp. 1715-1724, 2003.
- [50] A. Hamed ve A. Malek, «S-prime ideals of a commutative ring,» *Beitrage zur Algebra und Geometrie/Contributions to Algebra and Geometry*, cilt 61, p. 533-542, 2021.
- [51] Z. El-Bast ve P. Smith, «Multiplication modules,» *Communications in Algebra*, cilt 16, no. 4, pp. 755-779, 1988.
- [52] H. Karakas, «On Noetherian modules,» *METU Journal of Pure and Applied Sciences*, cilt 5, no. 2, pp. 165-168, 1972.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Osama A.A. NAJI

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Yılı
Doktora	Sakarya Üniversitesi / Fen Bilimleri Enstitüsü / Matematik	2022
Yüksek Lisans	Islamic Üniversitesi / Fen Bilimleri Enstitüsü / Matematik	2016
Lisans	Al-aqsa Üniversitesi / Fen Bilimleri Enstitüsü / Matematik	2012
Lise	Al-Manfaluti Lisesi	2008

YABANCI DİL

Arapça, İngilizce

ESERLER

1. Naji, O.A., Gündüz, A., Özen, M. and Tekir, Ü., “On Uniformly 1-Absorbing Primary Ideals”, Publicationes Mathematicae Debrecen (2023)(Accepted).
2. Özen, M., Naji, O.A., Tekir, Ü. and Koç, S., “On modules satisfying S-dccr condition”, Beitr Algebra Geom (2021), DOI: 10.1007/s13366-021-00609-9
3. Özen, M., Naji, O.A., Tekir U. and Koç, S., “On Modules Satisfying S-Noetherian Spectrum Condition”, Communications in Mathematics and Statistics, (2021), DOI:10.1007/s40304-021-00268-1.
4. Naji, O.A., Özen, M. and Tekir U., “On Strongly Dccr* Modules”, Journal of Algebra and Its Applications, (2021), DOI: 10.1142/S021949882250195X
5. Özen, M., Naji, O.A., Tekir U. and Shum, K.P., “Characterization Theorems of S-Artinian Modules”, Comptes rendus de l’Academie bulgare des Sciences, Vol. 74, No. 4, 496-505, (2021), DOI: 10.7546/CRABS.2021.04.03
6. Naji, O.A., “On S-2-Absorbing Primary Submodules”, Filomat, Vol. 35, No. 5 (2021), DOI: 10.2298/FIL2105477N

7. Naji, O.A., Özen, M. and Tekir U., “*On Almost S-2-Absorbing Submodules*”, Southeast Asian Bulletin of Mathematics, (2021).
8. Naji, O.A., "On classical S-2-absorbing submodules", Eurasian Bulletin of Mathematics, Vol. 3, No. 1, 12-19, (2020).
9. Naji, O.A., "On classical n-absorbing submodules", Arabian Journal of Mathematics, (2019), DOI 10.1007/s40065-019-0253-9.
10. Ashour, Arwa E., Mohammed M. Al-Ashker, and Naji, O.A. "On Almost 2-Absorbing Primary Sub-modules." IUG Journal of Natural Studies (2017).
11. Ashour, Arwa E., M. AL-Ashker, and Naji, O.A. "Some results on almost 2-absorbing sub-modules." Journal of Al Azhar University-Gaza (Natural Sciences) 18 (2016): 1-13.

