T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

NÜMERİK SEMİGRUPLAR VE TAMSAYI PARÇALANIŞLARI

Nihal GÜMÜŞBAŞ ÖZTÜRK

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

OCAK 2023

ANTALYA

T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

NÜMERİK SEMİGRUPLAR VE TAMSAYI PARÇALANIŞLARI

Nihal GÜMÜŞBAŞ ÖZTÜRK

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

OCAK 2023

ANTALYA

T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NÜMERİK SEMİGRUPLAR VE TAMSAYI PARÇALANIŞLARI

Nihal GÜMÜŞBAŞ ÖZTÜRK

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

Bu tez 10/01/2023 tarihinde jüri tarafından oybirliği/oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Nesrin TUTAŞ (Danışman)

Prof. Dr. Mustafa ALKAN

Doç. Dr. Sevda SEZER

Dr. Öğr. Üyesi Zafer ŞANLI

Dr. Öğr. Üyesi Rahime DERE

ÖZET

NÜMERİK SEMİGRUPLAR VE TAMSAYI PARÇALANIŞLARI

Nihal GÜMÜŞBAŞ ÖZTÜRK

Doktora Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Nesrin TUTAŞ

Ocak 2023; 67 sayfa

Nümerik semigrupların ve tamsayı parçalanışlarının cebirsel geometri ve kodlama teorisi gibi matematiğin bir çok dalında uygulama alanı vardır. Arf nümerik semigruplar, nümerik semigruplar teorisinde önemli bir ailedir. Arf nümerik semigrup kavramı ilk olarak Cahit Arf (1948) tarafından tanıtılmıştır. Bu konu üzerine bir çok araştırma olmasına rağmen, Arf nümerik semigruplar ve tamsayı parçalanışları arasındaki ilişkileri inceleyen çalışmalar çok yenidir. Young diyagramları, Arf nümerik semigruplar ve tamsayı parçalanışları arasındaki eşlemeler yardımıyla, Arf parçalanışları kavramı ilk olarak Tutaş vd. (2019) tarafından tanımlanmıştır.

Bu tezde, Arf nümerik semigrup ailesinin farklı alt aileleri oluşturulup, bu ailelerin tamsayı parçalanışları dilinde ifadeleri ve sahip oldukları özellikler incelenmiştir. Özel durumlarda, bu parçalanışların sayıları formülize edilmiştir. Ayrıca, katlılığı 6 dan küçük olan Arf nümerik semigruplar için minimal temsiller araştırılmıştır.

ANAHTAR KELİMELER: Arf nümerik semigrup, Arf parçalanışları, minimal temsil, nümerik semigrup, tamsayı parçalanışları, Young diyagramı.

JÜRİ: Prof. Dr. Nesrin TUTAŞ

Prof. Dr. Mustafa ALKAN

Doç. Dr. Sevda SEZER

Dr. Öğr. Üyesi Zafer ŞANLI

Dr. Öğr. Üyesi Rahime DERE

ABSTRACT

NUMERICAL SEMIGROUPS AND INTEGER PARTITIONS

Nihal GÜMÜŞBAŞ ÖZTÜRK

PhD Thesis in Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Nesrin TUTAŞ

January 2023; 67 pages

Numerical semigroups and integer partitions have applications in many branches of mathematics, such as algebraic geometry and coding theory. Arf numerical semigroups are an important class in the theory of numerical semigroups. The concept of Arf numerical semigroup was first introduced by Cahit Arf (1948). Although there is a lot of research on this subject, so far, studies examining the relations between Arf numerical semigroups and integer partitions are very recent. With the help of Young diagrams, correspondences between Arf numerical semigroups and integer partitions, the concept of Arf partition was defined by Tutaş et al. (2019) at first.

In this thesis, different subfamilies of the Arf numerical semigroups are formed. Their expressions and properties in the language of integer partitions are examined. In special cases, the numbers of these partitions have been formulated. In addition, the minimal presentations of Arf numerical semigroups with multiplicity less than 6 are investigated.

KEY WORDS: Arf numerical semigroup, Arf partitions, integer partitions, minimal presentation, numerical semigroup, Young table.

COMMITTEE: Prof. Dr. Nesrin TUTAŞ

Prof. Dr. Mustafa ALKAN

Assoc. Prof. Dr. Sevda SEZER

Asst. Prof. Dr. Zafer ŞANLI

Asst. Prof. Dr. Rahime DERE

ÖNSÖZ

Bu tez esas olarak dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, nümerik semigrupların tarihsel gelişimi hakkında bilgi verilmiştir. Ayrıca, Arf nümerik semigrup kavramının ortaya çıkışından günümüze ulaşıncaya kadar bu konu ile ilgili yapılmış temel çalışmalar özet olarak yine bu bölümde ifade edilmiştir.

İkinci bölümde, nümerik semigruplar ve tamsayı parçalanışları teorilerinin temel kavramları, tez boyunca kullanacağımız yapılar ve bunlara ait gösterimler "Kaynak Taraması" başlığı altında tanıtılmıştır.

Kullanacağımız yöntemler ve materyaller üçüncü bölümde tanıtılmıştır. Young diyagramlarının yapısı ve genel özellikleri verilmiş, nümerik semigruplar, Young diyagramları ve tamsayı parçalanışları arasındaki eşleşme ilişkileri derlenerek, bu ilişkilerin özellikle Arf nümerik semigruplar üzerindeki etkileri ve sonuçları incelenmiştir.

Dördüncü bölümde ise bu tez çalışması boyunca elde edilen sonuçlar "Bulgular ve Tartışma" başlığı altında sunulmuştur. Bölüm 4.1, Arf nümerik semigrupların ilkel semigruplar cinsinden ifadesine ayrılmıştır. Arf nümerik semigrup ailesinin bazı alt aileleri oluşturulduktan sonra bu ailelerin tamsayı parçalanışları dilinde ifadeleri Bölüm 4.2 ve 4.3 içinde verilmiştir. Bu bölümde, özellikle ASA-parçalanışları ve Arf C-parçalanışlarının yapısı verilip, bu parçalanışların belirleme yöntemleri incelenmiştir. Önerme 3.12 yardımıyla, Bölüm 4.4 de 4 uzunluklu Arf parçalanışların yapısı belirlenip, bu parçalanışların sayısı için formüller sunulmuştur. Karakaş (2018) da verilen Arf nümerik semigrupların parametrizeleri yardımıyla katlılığı 6 dan küçük Arf nümerik semigrupların minimal temsilleri Bölüm 4.5 de belirlenmiştir.

Bölüm 4.2 de elde edilen sonuçlar Akdeniz Üniversitesi FBA-2020-5393 nolu projesi kapsamında desteklenmiştir.

Akademik hayatımın ilk basamaklarında sağlam bir altyapı oluşturmamı sağlayan, bilgi ve desteğini esirgemeyen değerli danışmanım Prof. Dr. Nesrin TUTAŞ'a her zaman beni aydınlattığı ve ufkumu genişlettiği için gönülden teşekkür ederim.

Bu günlere ulaşmamda büyük emeği olan, her kararımı destekleyen sevgili annem Cemile GÜMÜŞBAŞ, babam Şaban GÜMÜŞBAŞ ve kardeşim Betül ŞAHİN'e çok teşekkür ederim. Her aşamada bana yardımcı olan sevgili eşim Bilal Çağlar ÖZTÜRK'e ve oğlum Kartal Mete ÖZTÜRK'e içten teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

AKADEMİK BEYAN

Doktora Tezi olarak sunduğum "Nümerik Semigruplar ve Tamsayı Parçalanışları" adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak bulunduğunu belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

10/01/2023
Nihal GÜMÜŞBAŞ ÖZTÜRK

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

$\mathbb{N}$	: Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{N}_0$	: $\mathbb{N} \cup \{0\}$
$F(S)$	: S nin Frobenius sayısı
$c(S)$	: S nin önderi
$G(S)$	: S nin boşlukları kümesi
$g(S)$	: S nin boşluk sayısı
$Ap(S,n)$	: S nin n ye göre Apéry kümesi
$m(S)$	: S nin katlılığı
$e(S)$	: S nin gömülüş boyutu
$PF(S)$	: S nin pseudo-Frobenius sayılarının kümesi
$t(S)$	: S nin tipi
$Arf(S)$	: S nin Arf kapanışı
Y_S	: S ye karşılık gelen Young diyagram
λ_S	: S ye karşılık gelen tamsayı parçalanışı
$N(S)$	: S nin birinci tip boşluklar kümesi
$L(S)$	: S nin ikinci tip boşluklar kümesi
$r(S)$	: S nin oranı
AS	: Hemen hemen simetrik nümerik semigrup
ASA	: Hemen hemen simetrik Arf nümerik semigrup
$n_{ASA}(S,g)$	: S nin cinsi g olan ASA-semigrupların sayısı
$n_{AS}(N)$	: N tamsayısının AS-parçalanışlarının sayısı
$n_{ASA}(N)$	: N tamsayısının ASA-parçalanışlarının sayısı
$n_A(N)$	: N tamsayısının Arf parçalanışlarının sayısı
$n_d(N)$	: N tamsayısının farklı parçalanışlarının sayısı
$n_{ASA\ C}(N)$	: N tamsayısının ASA C-parçalanışlarının sayısı
$n_{N\ AS\ A\ C}(N)$	: N tamsayısının AS olmayan Arf C-parçalanışlarının sayısı

$n_{A\ C}(N)$	: N tamsayısının Arf C-parçalanışlarının sayısı
$n_A(N,n)$	: N tamsayısının uzunluğu n olan Arf parçalanışlarının sayısı
$n_{A\ C-sg.}(m)$	: S nin katlılığı m olan Arf C-semigruplarının sayısı
T_n	: n-inci üçgensel sayı
ρ	: S nin minimal temsili

ÇİZELGELER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Sylvester (1884), bir pozitif N tamsayının aralarında asal olan iki pozitif tamsayının pozitif katları cinsinden yazılabildiği iddiasını ortaya atmış ve bu problemi çözmüştür. Frobenius, bu iddiayı genelleştirip, aralarında asal olan pozitif tamsayıların pozitif katları cinsinden yazılamayan en büyük pozitif tamsayıyı bulma problemini ifade etmiştir. Bu sayı için bir formül araştırıp, bu şekilde yazılamayan sayıların sayısını bulmaya çalışmıştır. Bu ise literatürde Frobenius problemi olarak adlandırılmaktadır. Nümerik semigruplar, bu problemle ilgili çalışmalarla ortaya çıkmış ve geliştirilmiştir.

Analitik olarak dallanmamış tek boyutlu yerel Noetherian bölgelerinin değerleri (valuation), belirli koşullar altında nümerik semigruplardır ve bu halkaların birçok özelliği, ilgili nümerik semigruplar ile karakterize edilebilir. Du Val, bir cebirsel eğrinin tekilliklerini sınıflandırmak için eğrinin patlatmalarında (blow-up) katlılık dizilerinin geometrik olarak nasıl kullanılabileceğini göstermiştir. Du Val'in sonuçlarının cebirsel karşılıkları Cahit Arf (1948) tarafından ifade edilmiştir. Arf'in çalışmasında Arf halkaları, Arf kapanışları kavramları yer almıştır. Arf'in amacı, bir eğrinin koordinat halkasının Arf halkası kapanışını ve ardından onun değerler (valuation) semigrubunu hesaplamaktı. Bu çalışma ile hesaplanan değer semigrubu Arf nümerik semigrup olarak adlandırılmıştır. Lipman (1971) ilk defa Arf halkası adlandırmasını yapmıştır. Lipman (1971) bir boyutlu doymuş (saturated) yerel halkalar ile Arf halkaları arasındaki bağlantıları incelemiştir. Ayrıca, Arf halkası olmaya denk koşullar ile stable idealler arasındaki ilişkiler Lipman (1971) ın çalışmasında yer almaktadır.

Noetherian yerel bir boyutlu analitik indirgenemez tamlık bölgelerini, özellikle Gorenstein, maksimal gömülüş (embedding) boyutlu bölgeler, Arf, Kunz, Cohen-Macaulay bölgelerini halka teorisi ve semigrup teorisi yaklaşımları ile Barucci vd. (1997) incelemiştir. Semigrup teorisi yaklaşımıyla, Arf halkalarında "tip" ve " gömülüş boyutu" kavramlarının halkaların karakterizasyonunda önemli yeri olduğunu göstermiştir. Bir S semigrubunun I ideali için Lipman semigrubu ve I nın patlatması (blow-up) ile elde edilen semigrup tanımlanarak, Lipman dizileri, patlatma (blow-up) dizileri Barucci vd. (1997) tarafından oluşturulmuş ve Arf nümerik semigruplar için bu dizilerin çakıştığı gösterilmiştir. Barucci vd. (1997) çalışmasında Arf nümerik semigruplar için tanıma denk 15 koşul ortaya koymuştur. İlhan ve Karakaş (2017) bir nümerik semigrubun Arf kapanışı ile bu nümerik semigrubun Lipman semigrubu arasındaki ilişkiyi incelemişlerdir. Matthews (2004), genelleşmiş aritmetik diziler ile üretilen semigrupları karakterize etmiş, simetrik, pseudo-simetrik ve Arf olmak gibi semigrup koşullarını bu diziler için araştırmıştır. Lipman ve patlatma (blow-up) dizilerinin kapsama bağıntılarını incelemiştir.

Nümerik semigruplar teorisi matematiğin cebirsel geometri ve kodlama teorisi gibi bir çok alanına uygulanabilmektedir. Arf nümerik semigruplar kodlama teorisinde daha iyi parametrelere sahip kodlara ulaşılmasını mümkün kıldıkları için bir çok matematikçinin ilgi alanı olmuştur. Campillo vd. (2000) bir Q noktasının Weierstrass semigrubu Arf nümerik semigrup olduğunda bir noktalı cebirsel geometrik kodların minimum mesafesini hesaplamışlardır. Farran vd. (2018) ise, bir Arf nümerik semigrup içinde önderden büyük veya eşit elemanlar için genelleştirilmiş Feng-Rao mesafesi tanımlayarak, tek noktalı cebirsel geometrik kodlar için genelleştirilmiş Hamming ağırlığının bir alt sınırını elde etmişlerdir.

Nümerik semigrupların $n \geq 1$ için $\mathbb{N}^n$ ye genellemeleri yapılmıştır ve özel bir sınıf olan iyi (good) semigruplar bu alanda dikkat çekmektedir. D'Anna vd. (1998) iyi semigrupların üreteçlerini belirlemiş, minimal üreteç sisteminin tek olduğunu göstermiştir. Ayrıca, $n = 2$ durumunda iyi semigrupların Arf kapanışını hesaplamak için yöntem vermiştir.

Nümerik semigruplar ve kombinatorik karşılıkları ile ilgili ilk çalışmalara Bras-Amoros ve De-Mier (2007); Constantin vd. (2015); Keith ve Nath (2011) örnek verilebilir. Herhangi bir positif tamsayının bir parçalanışın çengel kümesi, bakınız altbölüm 3.1, a sayısını içermezse bu parçalanış a-çekirdek (core) parçalanış olarak, hem a hem de b sayısını içermezse, eş zamanlı (a, b)-çekirdek parçalanış olarak bilinir. Constantin vd. (2015) de bir politopun tamsayı noktaları ve eş zamanlı core parçalanışlar arasındaki 1-1 ve örten fonksiyon sayesinde nümerik kümeler ve tamsayı parçalanışları arasındaki eşleme incelenmiştir. Bu karşılık gelme ile çekirdek parçalanışları hakkında daha fazla sonuç elde edilmesine olanak sağlamıştır. (a, b)-çekirdek parçalanışları sayısı için formül verilmiş ve nümerik semigruplarda karşılıkları çalışılmıştır. Bir parçalanışın çengel sayıları üzerinde belirli kısıtlamalar altında kombinatorik özellikleri ve bu özelliklerin nümerik semigruplarla bağlantıları Keith ve Nath (2011) de incelenmiştir. Ayrıca, elde edilen sonuçlar eş zamanlı çekirdek parçalanışlara uygulanmıştır.

Arf nümerik semigruplar ailesinin kombinatorik incelenişi ile ilgili ilk araştırma, Tutaş vd. (2019) tarafından yapılmıştır. Arf nümerik semigruplar ile tamsayı parçalanışları arasında Young diagramı kavramı kullanılarak eşleme kurulmuş, Arf parçalanışı tanımı verilmiş ve bir nümerik kümenin Arf kapanışı hesabı için kombinatorik olarak bir algoritma verilmiştir.

Bu tez çalışmasında Arf nümerik semigrupların kombinatorik özellikleri araştırılarak geliştirilmiştir. Arf nümerik semigrupların ASA, Arf C alt aileleri ve karşılık gelen ASA-parçalanışları, Arf C-parçalanışları aileleri tanımlanmış, bir N pozitif tamsayısının ASA-parçalanışları, Arf C-parçalanışları, ASA C-parçalanışları sayısı formülize edilmiştir.

2. KAYNAK TARAMASI

Nümerik semigrupların cebirsel geometri ve kodlama teorisi gibi matematiğin bir çok dalında uygulaması vardır. Bu bölümde, semigrup yapısının temel kavramları kısaca incelenerek özel bir aile olan Arf nümerik semigrupların tanımı ve genel özellikleri verilecektir. Detaylı bilgi için Arf (1948); Barucci vd. (1997); Barucci ve Fröberg (1997); Garcia-Sánchez vd. (2017); İlhan ve Karakaş (2017); Lipman (1971); Rosales ve Garcia-Sanchez (2009); Rosales vd. (2004); Rosales ve Garcia-Sanchez (2009) referans olarak verilebilir. Ayrıca, tamsayı parçalanışları kavramı üzerinde durularak tamsayı parçalanışlarının üreteç fonksiyonu ifade edilecektir.

Bu çalışma boyunca $\mathbb{N}$ ile pozitif tamsayılar kümesini, $\mathbb{N}_0$ ile $\mathbb{N} \cup \{0\}$ kümesini göstereceğiz.

Tanım 2.1. *S bir küme, “ $*$ ”, S üzerinde bir ikili işlem ve S, bu işlem ile birleşme özelliğine sahip ise S ye bir semigrup denir. S semigrubu “ $*$ ” işlemine göre birimli ise S ye bir monoid denir.*

$\mathbb{N}_0$ ın “ $+$ ” işlemi ile bir monoid olduğu kolayca görülebilir.

Tanım 2.2. *$S \subseteq \mathbb{N}_0$ olmak üzere, $0 \in S$ ve S nin tümleyeni sonlu ise S ye nümerik küme denir. $S \neq \mathbb{N}_0$ ise S ye has (proper) nümerik küme denir. $S \subseteq \mathbb{N}_0$ bir monoid ve $\mathbb{N}_0 \backslash S$ sonlu küme ise S ye nümerik semigrup denir. S nümerik semigrubunun boştan farklı bir altkümesi aynı işlem ile birlikte bir nümerik semigrup ise bu alt kümeye S nin bir alt nümerik semigrubu denir.*

$\mathbb{N}_0$, aşikar nümerik semigruptur.

Tanım 2.3. *S bir nümerik semigrup olsun.*

1. *S ye ait olmayan en büyük tamsayıya S nin Frobenius sayısı denir ve $F(S)$ ile gösterilir.*
2. *Her $n \in \mathbb{N}_0$ için $x + n \in S$ olacak şekilde en küçük x tamsayısına S nin önderi (conductor) denir ve $c(S)$ ile gösterilir.*
3. *$G(S) := \mathbb{N}_0 \backslash S$ kümesine S nin boşluk kümesi, elemanlarına S nin boşlukları, bu kümenin eleman sayısına S nin cinsi denir. S nin cinsi $g(S)$ ile gösterilir.*
4. *Herhangi bir S semigrubunun $c(S)$ den küçük elemanlarına S nin küçük elemanları denir.*

Aksi belirtilmedikçe, bundan sonra “$|.|$” sembolü, kümenin eleman sayısını gösterecektir.

Tanımdan kolayca görüleceği gibi $F(S) = c(S) - 1$ ve $g(S) = |\mathbb{N}_0 \backslash S|$ dir.

Bir S nümerik semigrubu için $s : \mathbb{N}_0 \to S$, $i \to s(i) = s_i$ ile belirlenen dönüşüm sayma dönüşümü olarak adlandırılır, birebir ve örtendir. Bu durumda,

$$S = \{s_0 = 0, s_1, ..., s_r, \rightarrow\}$$

nümerik semigrubu, s sayma dönüşümü ile belirlenen nümerik semigrup olarak adlandırılır. S nin önderi $c(S) = s_r$ ise $g(S) = c(S) - r$ dir.

Tanım 2.4. *S bir nümerik semigrup ve A, S nin boştan farklı bir altkümesi olsun. S içinde A yı kapsayan nümerik semigrupların kesişimine S içinde A tarafından üretilen nümerik altsemigrup denir ve $\langle A\rangle$ ile gösterilir.*

Bir S nümerik semigrubunda A tarafından üretilen altsemigrubun

$$\langle A\rangle = \{\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n \mid n \in \mathbb{N}_0,\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{N}_0,\ a_1, \ldots, a_n \in A\}$$

olduğu gösterilebilir.

Tanım 2.5. *S bir nümerik semigrup, $A \subseteq S$ olmak üzere $\langle A\rangle = S$ ise S ye A tarafından üretilen nümerik semigrup, A kümesine S nin bir üreteç sistemi denir. A, S nin bir üreteç sistemi ve A nın hiçbir özalt kümesi S için bir üreteç sistemi değilse, A ya S nin minimal üreteç sistemi denir.*

Örnek 2.6. *S, minimal üreteç sistemi $\{3, 7, 11\}$ olan bir nümerik semigrup olsun. Bu durumda,*

$$S =< 3, 7, 11 >= \{0, 3, 6, 7, 9, \rightarrow\}$$

dir. $F(S) = 8$, $G(S) = \{1, 2, 4, 5, 8\}$ ve $g = g(S) = 5$ dir.

Teorem 2.7. *A bir küme ve S bir nümerik semigrup olmak üzere,*

1. *$\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{N}$ için $< A >$ nın bir nümerik semigrup olması için gerek ve yeter koşul $obeb(A) = 1$ olmasıdır.*
2. *$\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{N}_0$ aşikar olmayan alt monoid ise A, $\mathbb{N}_0$ ın bir nümerik alt semigrubuna izomorftur.*
3. *$S \subseteq \mathbb{N}_0$ alt monoid ve $S^* := S\backslash\{0\}$ olmak üzere*

$$S^* + S^* := \{s_i + s_j \mid s_i, s_j \in S^*\}$$

tanımlayalım. Bu durumda, $S^*\backslash(S^* + S^*)$, S nin bir üreteç sistemidir.

İspat. Ayrıntılı ispat için referansımız Rosales ve Garcia-Sanchez (2009) dir. □

Tanım 2.8. *S bir nümerik semigrup ve $0 \neq n \in S$ olsun. Bu durumda*

$$Ap(S, n) = \{s \in S \mid s - n \notin S\}$$

kümesine S de n nin Apéry kümesi denir.

Önerme 2.9. *Her $i \in \{0, 1, ..., n-1\}$ için $w(i) \equiv i \pmod{n}$ olacak şekilde S nin en küçük elemanı $w(i)$ olmak üzere $Ap(S,n) = \{0 = w(0), w(1), ..., w(n-1)\}$ dir.*

İspat. Ayrıntılı ispat için referansımız Rosales ve Garcia-Sanchez (2009) dir. □

Kolayca görülebilir ki, $|Ap(S,n)| = n$ dir.

Önerme 2.10. *S bir nümerik semigrup ve $0 \neq n \in S$ olsun. Bu durumda,*

1. $F(S) = (maksAp(S,n)) - n$ *dir.*
2. $g(S) = \frac{1}{n}\left(\sum_{w \in Ap(S,n)} w\right) - \frac{n-1}{2}$ *dir.*

İspat. Ayrıntılı ispat için referansımız Rosales ve Garcia-Sanchez (2009) dir. □

Önerme 2.11. *S bir nümerik semigrup olsun. Her $s \in S$ için $s = kn + w$ olacak şekilde tek türlü belirli $(k,w) \in \mathbb{N} \times Ap(S,n)$ vardır.*

İspat. Varlığı görmek kolaydır. Bu ispatta tekliği göstermek yeterlidir. $s \in S$ nin $s = k_1 n + w_1 = k_2 n + w_2$ şeklinde yazıldığını varsayalım. $(k_2 - k_1)n = w_2 - w_1$ olur. Buradan $n \mid w_2 - w_1$ ve $w_1 \equiv w_2 \pmod{n}$ elde edilir. $w(i)$, S nin $\pmod{n}$ e göre i kalanını veren en küçük elemanı olduğundan $w_2 = w_1$ ve $k_2 = k_1$ dir. □

Teorem 2.12. *Her nümerik semigrup tek türlü belirli minimal üreteç sistemine sahiptir ve bu sistem sonludur.*

İspat. S bir nümerik semigrup olsun. $S^* \backslash (S^* + S^*)$ kümesi S nin bir minimal üreteç sistemidir. $K := Ap(S,n) \cup \{n\}$ kümesi ele alınırsa $S = < K >$ olur ve K, S için bir üreteç sistemidir. $S^* \backslash (S^* + S^*) \subseteq K$ dır ve K sonlu bir küme olduğundan $S^* \backslash (S^* + S^*)$ da sonludur. □

Tanım 2.13. *S bir nümerik semigrup ve $\{n_1 < n_2 < ... < n_r\}$, S nin minimal üreteç sistemi olsun. n_1 sayısına, S nin katlılığı (multiplicity), minimal üreteç sisteminin kardinalitesi olan r sayısına S nin gömülüş boyutu (embedding dimension) denir ve sırasıyla $m(S)$ ve $e(S)$ ile gösterilir.*

Önerme 2.14. *S bir nümerik semigrup olsun. Bu durumda,*

1. $m(S) = \min(S \backslash \{0\})$ *dır.*
2. $e(S) \leq m(S)$ *dir.*

İspat. 1. S deki en küçük pozitif tamsayının S nin katlılığı olduğu açıktır.

2. $\{Ap(S, m(S)) \setminus \{0\}\} \cup \{m(S)\}$, S nin $m(S)$ elemanlı bir üreteç sistemidir ve minimal üreteç sisteminin eleman sayısı olan $e(S)$ den daha büyük veya eşittir.

$\square$

Örnek 2.15. *$S =< 3, 7, 11 >= \{0, 3, 6, 7, 9, \rightarrow\}$ nümerik semigrubu için $Ap(S, 3) = \{0, 7, 11\}$, $e(S) = 3$ ve $m(S) = 3$ tür.*

Tanım 2.16. *S bir nümerik semigrup olsun. Bu durumda,*

1. *S nin minimal üreteç sisteminin katlılıktan büyük en küçük elemanına S nin oranı (ratio) denir ve $r(S)$ ile gösterilir.*
2. *$e(S) = m(S)$ ise S nümerik semigrubuna maksimal gömülüş boyutuna sahiptir denir.*
3. *$F(S) < 2s_1$ ise S ye bir ilkel (primitive) nümerik semigrup denir.*

$e(S) = 1$ olması için gerekli ve yeterli koşul $S = \mathbb{N}_0$ olmasıdır. $S = \{0, n, \rightarrow\}$, n katlılığına sahip bir nümerik semigruptur.

Bir semigrup ile ilişkili bir çok semigrup bulunabilir. Şöyle ki,

$$S = \{0 = s_0, s_1, ..., s_n, \rightarrow\}$$

verilen semigrup olsun. Her $i \geq 0$ için

$$S_i := \{s \in S \mid s \geq s_i\}$$

$$S(i) := S - S_i = \{z \in \mathbb{N}_0 \mid z + S_i \subseteq S\}$$

kümeleri tanımlansın. $S(i)$ nin nümerik semigrup olduğu açıktır. Böylece,

$$S_n \subset S_{n-1} \subset ... \subset S_1 \subset S \subset S(1) \subset ... \subset S(n) = \mathbb{N}_0$$

zinciri elde edilir. $t_1(S) := |S(1) \setminus S|$ ye S nin tipi denir. Benzer şekilde, $i \geq 1$ için $T(i) := S(i) \setminus S(i-1)$ ve $t_i = |T(i)|$ tanımlanır. Bu durumda, $((t_i) \mid i \geq 1)$ dizisi S nin tip dizisi olarak adlandırılır. Ayrıntılı olarak S nin patlamaları (blow-up) ve Lipman semigrupları Barucci vd. (1997) de incelenebilir.

Tanım 2.17. *S nümerik semigrup olmak üzere*

$$PF(S) := \{x \in \mathbb{Z} \setminus S \mid x + S \setminus \{0\} \subseteq S\}$$

kümesine pseudo-Frobenius sayılar kümesi denir.

Bu tanıma denk olarak, $PF(S) = S(1) \setminus S = T_1(S)$ ve $|PF(S)| = t_1$ dir.

Tanım 2.18. *Bir S nümerik kümesi verildiğinde,*

$$N(S) = \{x \in G(S) \mid F(S) - x \in S\}$$

ye birinci tip boşluklar kümesi ve

$$L(S) = \{x \in G(S) \mid F(S) - x \notin S\}$$

ye ikinci tip boşluklar kümesi denir.

Tanım 2.19. *Kendisini kapsayan herhangi iki semigrubun kesişimi olarak yazılamayan S semigrubuna indirgenemez nümerik semigrup denir. İndirgenemez ve Frobenius sayısı tek tamsayı (çift tamsayı, sırasıyla) olan nümerik semigruba simetrik (pseudo-simetrik, sırasıyla) semigrup denir.*

S simetrik (pseudo-simetrik, sırasıyla) semigrup ise $L(S) = \emptyset$ ($L(S) = \{F(S)/2\}$, sırasıyla) dir. $S = \{0, 4, 6, 7, 8, 10, \to\}$ simetrik semigrup, $S = \{0, 3, \to\}$ pseudo-simetrik semigruba örnektir.

Önerme 2.20. *S bir nümerik semigrup olsun.*

1. *S nin simetrik nümerik semigrup olması için gerek ve yeter koşul $F(S)$ nin tek tamsayı ve $x \in \mathbb{Z} \backslash S$ için $F(S) - x \in S$ olmasıdır.*
2. *S nin pseudo-simetrik nümerik semigrup olması için gerek ve yeter koşul $F(S)$ nin çift tamsayı ve $x \in \mathbb{Z} \backslash S$ için $F(S) - x \in S$ veya $x = \frac{F(S)}{2}$ olmasıdır.*

İspat. Ayrıntılı ispat için referansımız Rosales ve Garcia-Sanchez (2009) dir. □

Aşağıdaki sonuçların ispatı için referansımız Rosales ve Garcia-Sanchez (2009) dir.

Sonuç 2.21. *S bir nümerik semigrup olsun.*

1. *S nin simetrik nümerik semigrup olması için gerek ve yeter koşul $g(S) = \frac{F(S)+1}{2}$ dir.*
2. *S nin pseudo-simetrik nümerik semigrup olması için gerek ve yeter koşul $g(S) = \frac{F(S)+2}{2}$ dir.*

Sonuç 2.22. *S bir nümerik semigrup olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.*

1. *S simetrik nümerik semigruptur.*
2. *$PF(S) = \{F(S)\}$ dir.*
3. *$t(S) = 1$ dir.*

Sonuç 2.23. *S bir nümerik semigrup olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.*

1. *S pseudo-simetrik nümerik semigruptur.*
2. *$PF(S) = \left\{F(S), \frac{F(S)}{2}\right\}$ dir.*

2.1. Arf Nümerik Semigrup

Bu bölümde, Arf nümerik semigrup tanımı ve genel özellikleri verilecektir. Bu bölümde temel referanslarımız Arf (1948) ve Rosales ve Garcia-Sanchez (2009) dir.

Tanım 2.24. *$i \geq j \geq k$ olan her $i, j, k \in \mathbb{N}$ ve $s_i, s_j, s_k \in S$ için $s_i + s_j - s_k \in S$ ise S nümerik semigrubuna bir Arf nümerik semigrup denir.*

Örnek 2.25.
1. *$\mathbb{N}_0$ bir Arf nümerik semigruptur.*
2. *n pozitif tamsayısı için $S = \{0, n, \rightarrow\}$ bir Arf nümerik semigruptur ve S nin minimal üreteç kümesi $\{n, n+1, n+2, ..., 2n-1\}$ dir.*

Önerme 2.26. *S_1,S_2,...,S_n Arf nümerik semigruplar ise $S = S_1 \cap S_2 \cap ... \cap S_n$ de bir Arf nümerik semigruptur.*

İspat. Her $t \in \{1, 2, ..., n\}$ için $i \geq j \geq k$ olmak üzere $s_i, s_j, s_k \in S_t$ ve $s_i \geq s_j \geq s_k$ dır. S_t Arf nümerik semigrup olduğundan $s_i + s_j - s_k \in S_t$ ve $s_i + s_j - s_k \in S$ dir. Buradan, S bir Arf nümerik semigruptur. □

Tanım 2.27. *S nümerik semigrup olsun. S yı içeren tüm Arf nümerik semigrupların kesişimine S nin Arf kapanışı denir ve $Arf(S)$ ile gösterilir.*

Lemma 2.28. *$S \subseteq \mathbb{N}_0$ bir altmonoid olsun. Bu durumda,*

$$S' = \{s_i + s_j - s_k \mid s_i, s_j, s_k \in S,\ s_i \geq s_j \geq s_k\},$$

$\mathbb{N}$ nin bir altmonoidi olur ve $S \subseteq S'$ dür.

İspat. Her $s \in S$ için $s = s + s - s \in S'$ olduğundan $S \subseteq S'$ dir. Ayrıca, S' nin alt monoid olduğu açıktır. □

Bir önceki lemmadan yola çıkarak $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} S^0 &= S, \\ S^{n+1} &= (S^n)', n \geq 1 \end{aligned}$$

olacak şekilde bir nümerik semigrup dizisi tanımlanabilir.

Lemma 2.29. *S bir nümerik semigrup ise $S^k = Arf(S)$ olacak şekilde $k \in \mathbb{N}$ vardır.*

İspat. Ayrıntılı ispat için referansımız Rosales ve Garcia-Sanchez (2009) dir. □

Lemma 2.30. *S bir Arf nümerik semigrup ve $m \in S$ olsun. Bu durumda, $(m+S) \cup \{0\}$ da Arf nümerik semigruptur.*

İspat. Ayrıntılı ispat için referansımız Rosales ve Garcia-Sanchez (2009) dir. □

$X \subseteq \mathbb{N}$ ve $obeb\,(X) = 1$ olmak üzere $\mathbb{N}$ nin bir alt kümeler dizisini

$$\begin{aligned} A_1 &= X, \\ A_{n+1} &= (\{x - \min A_n \mid x \in A_n\} - \{0\}) \cup \{\min A_n\}, \quad n > 1 \end{aligned}$$

ile tanımlansın. Açıktır ki, Öklid algoritması ile $q = \min \{k \in \mathbb{N} \mid 1 \in A_k\}$ olacak şekilde negatif olmayan q tamsayısı vardır.

Önerme 2.31. *Yukarıdaki gösterimler ile birlikte*

$$Arf\,(X) = \{0, \min A_1, \min A_1 + \min A_2, ..., \min A_1 + ... + \min A_{q-1}, \rightarrow\}$$

dir.

İspat. Ayrıntılı ispat için referansımız Rosales ve Garcia-Sanchez (2009) dir. □

Örnek 2.32. *$Arf\,(7, 24, 33)$ kümesinin elemanlarını yukarıdaki algortitmaya göre hesaplayalım. $X = \{7, 24, 33\}$ tür.*

$A_1 = X$, $\min A_1 = 7$,

$A_2 = (\{x - \min A_1 \mid x \in A_1\} - \{0\}) \cup \{\min A_1\} = \{7, 17, 26\}$, $\min A_2 = 7$,

$A_3 = (\{x - \min A_2 \mid x \in A_2\} - \{0\}) \cup \{\min A_2\} = \{7, 10, 19\}$, $\min A_3 = 7$,

$A_4 = (\{x - \min A_3 \mid x \in A_3\} - \{0\}) \cup \{\min A_3\} = \{7, 3, 12\}$, $\min A_4 = 3$,

$A_5 = (\{x - \min A_4 \mid x \in A_4\} - \{0\}) \cup \{\min A_4\} = \{3, 4, 9\}$, $\min A_5 = 3$,

$A_6 = (\{x - \min A_5 \mid x \in A_5\} - \{0\}) \cup \{\min A_5\} = \{1, 3, 6\}$

elde edilir. Burada $q = 6$ ve $Arf\,(X) = \{0, 7, 14, 21, 24, 27, \rightarrow\}$ dir.

2.2. Nümerik Semigrupların Minimal Temsili

Her nümerik semigrup sonlu üretilmiş kısaltılabilir monoid olduğundan sonlu temsil edilebilir. Bir nümerik semigrubun minimal temsilini karakterize etmek o semigrubun yapısını daha iyi anlamak için önemlidir. Öncelikle, temsil kavramı için gerekli altyapı ve gösterimler aşağıdaki gibi oluşturulabilir, detaylı bilgi Rosales ve Garcia-Sanchez (2009) de bulunabilir.

M bir monoid olsun. Her $a, b, c \in M$ için $a + c = b + c$ eşitliği $a = b$ olarak yazılabiliyor ise M bir kısaltılabilir (cancellative) monoiddir.

Tanım 2.33. *σ, M monoidi üzerinde bir bağıntı olsun. Her $x, y, z \in M$, $(x, y) \in \sigma$ için $(x + z, y + z) \in \sigma$ ve σ bir denklik bağıntısı ise σ ya M üzerinde bir denklik (congruence) denir.*

M_1 ve M_2 monoid olsun. $f : M_1 \to M_2$ bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in M_1$ için $f(x + y) = f(x) + f(y)$ ve $f(0) = 0$ ise f bir monoid homomorfizmi,

$$\text{çek}\,(f) = \{(x, y) \in M_1 \times M_1 |\; f\,(x) = f\,(y)\}$$

kümesi f nin bir çekirdek denkliğidir. f birebir, örten bir monoid homomorfizmi ise M_1 ve M_2 izomorf monoidlerdir ve $M_1 \cong M_2$ ile gösterilir.

$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \neq \emptyset$ üzerinde tanımlanan

$$Ser(x_1, x_2, \ldots, x_k) := \{\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k \mid k \in \mathbb{N}_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{N}_0\}$$

kümesi

$$(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k) + (\beta_1 x_1 + \ldots + \beta_k x_k) = (\lambda_1 + \beta_1)x_1 + \ldots + (\lambda_k + \beta_k)x_k$$

işlemiyle bir monoid olur, bu monoide X üzerinde bir serbest monoid denir.

Tanım 2.34. *ρ, $Ser(x_1, x_2, \ldots, x_k) \times Ser(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ nin bir alt kümesi ve $Ser(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ içinde ρ yu içeren tüm denkliklerin kesişimi σ olsun. Bu durumda, σ ya ρ tarafından üretilen denklik denir ve $\sigma = Cong(\rho)$ ile gösterilir, ρ ya σ nın üreteç sistemi denir. Bir σ denkliği sonlu üreteç sistemine sahip ise σ ya bir sonlu üretilmiş denklik denir.*

Tanım 2.35. *Bir $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ kümesi için $M \cong Ser\,(x_1, x_2, \ldots, x_k)\,/Cong\,(\rho)$ olacak biçimde $Ser\,(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ üzerinde bir denkliğe, sonlu üretilmiş bir M monoidinin temsili denir. ρ sonlu ise M ye sonlu temsil edilmiş monoid denir.*

Tanım 2.36. *S, minimal üreteç kümesi $\{n_1, n_2, \ldots, n_e\}$ olan bir nümerik semigrup ve $i \neq j$ için $x_i \neq x_j$ olmak üzere $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_e\}$ olsun.*

$$\varphi : Ser\,(x_1, x_2, \ldots, x_e) \to S$$

fonksiyonu $\varphi\,(a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_ex_e) = a_1n_1 + \ldots + a_en_e$ ile tanımlansın, burada $a_1, \ldots, a_e \in \mathbb{N}_0$ dır. çek$(\varphi) = Cong(\rho)$ ve ρ nun eleman sayısı çek(φ) nin tüm üreteçlerinin mümkün olan en küçük eleman sayısı ise ρ ya S nin bir minimal temsili denir.

Bir nümerik semigrubun minimal temsilini hesaplamak için bir yöntem Graf Teori kullanmaktır.

S nümerik semigrubu, $\{n_1, \ldots, n_e\}$ kümesi ile üretilmiş olsun. Her $n \in S$ için S

de n nin bir grafını $G_n = (V_n, E_n)$ ile tanımlayalım, burada

$$V_n = \{n_i \mid n - n_i \in S\}$$

köşelerin kümesi ve

$$E_n = \{\overline{n_i n_j} = (n_i, n_j) \mid n - (n_i + n_j) \in S,\ i \neq j\}$$

kenarların kümesidir. Burada, sırası önemli olmayan her (n_i, n_j) ikilisi $\overline{n_i n_j}$ ile gösterilir. G_n nin x, y köşeleri için $v_0 = x$ ve $v_n = y$ iken $\overline{v_0 v_1}, \overline{v_1 v_2}, \ldots, \overline{v_{n-1} v_n}$ olacak şekilde farklı köşeler dizisi var ise x ile y arasındaki bu diziye bir patika denir. G_n grafının herhangi iki köşesi arasında bir patika var ise G ye bağlantılı graf denir.

$Ser\,(x_1, \ldots, x_e)$ üzerinde bir R bağıntısı şu şekilde tanımlanır:
ya $\alpha = \beta = 0$ ya da $n \in S$ için öyle $z_1, \ldots, z_l \in \varphi^{-1}(n)$ vardır ki $z_1 = \alpha$, $z_l = \beta$ ve her $i \in \{1, \ldots, l-1\}$ için $z_i . z_{i+1} \neq 0$ (iç çarpım) ise $(\alpha, \beta) \in R$ dir. Bu bağıntı bir denklik bağıntısıdır $Ser\,(x_1, \ldots, x_e)/R$, R-sınıflarının kümesidir.

Verilen bir $n \in \mathbb{N}$ için

$$\varphi^{-1}(n) = \{a_1 x_1 + \ldots + a_e x_e \mid a_1 n_1 + \ldots + a_e n_e = n\}$$

kümesini dikkate alalım. $\varphi^{-1}(n)$ nin R-sınıfları $Y_1, \ldots, Y_r$ ise her $i \in \{1, \ldots, r\}$ için $K_i := \{x_j \mid n_j \leq x \text{ uygun } x \in Y_i \text{ için}\}$ kümesini tanımlayalım. Rosales ve Garcia-Sanchez (2009) deki Teorem 8.17 den G_n nin farklı bağlantılı bileşenlerinin köşelerinin kümesi $K_1, K_2, \ldots, K_r$ dir.

Bir S nümerik semigrubunun minimal temsilini belirlemek için S nin içinde bağlantılı olmayan grafları belirlemek yeterlidir. G_n bağlantılı ise $\rho_n = \emptyset$ dir. Bu durumda, G_n bağlantılı olmayacak şekilde $n \in S$ arıyoruz. $i \in \{1, \ldots, r\}$ için $Y_i = [u_i]_R$ ve $\rho_n := \{(u_2, u_1), \ldots, (u_r, u_1)\}$ ise ρ_n ile ilişkili graf $G_{\rho_n} = (V, E)$ ile tanımlanır, burada, $V = \{Y_1, \ldots, Y_r\}$ ve $i \neq j$ için $\overline{[u_i]_R [u_j]_R} \in E$ dir. $(x, y) \in \rho_n \cup \rho_n^{-1}$ olacak şekilde $x \in [u_i]_R$, $y \in [u_j]_R$ vardır. Böylece, Rosales ve Garcia-Sanchez (2009) deki Sonuç 8.11 den $\rho = \bigcup_{n \in S} \rho_n$, S nin bir minimal temsilidir. Bir S nümerik semigrubunun farklı bir çok minimal temsili vardır ancak bu minimal temsillerin her biri sonludur ve bu temsillerin eleman sayıları eşittir.

Teorem 2.37. *S bir nümerik semigrup ve ρ, S nin bir minimal temsili olsun. Bu durumda,*

1. $|\rho| \geq e\,(S) - 1$ *dir.*
2. $|\rho| \leq \frac{m(S)(m(S)-1)}{2}$ *dir.*
3. $m(S) = e(S)$ *ise* $|\rho| = \frac{m(S)(m(S)-1)}{2}$ *dir.*

İspat. Ayrıntılı ispat için referansımız Rosales ve Garcia-Sanchez (2009) dir. □

2.3. Tamsayı Parçalanışları

Bu bölümde, tamsayı parçalanışları tanımı verilecektir. Tamsayı parçalanışları hakkında ayrıntılı bilgi için Andrews ve Eriksson (2004) ve Keith ve Nath (2011) referans olarak verilebilir.

Tanım 2.38. *Pozitif N tamsayısının $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n]$ parçalanışı, toplamı N ve uzunluğu n olan $\lambda_n \leq \lambda_{n-1} \leq ... \leq \lambda_1$ şeklinde artmayan pozitif tamsayı dizisine denir ve $\lambda \vdash N$ ile gösterilir. Her $i = 1, 2, \ldots, n$ için λ_i sayısına λ nın bir parçası denir. $\lambda_i \neq \lambda_{i+1}$ ise λ ya kesin baskın (strict dominant) parçalanış denir, burada $i = 1, 2, \ldots, n-1$ dir.*

$\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]$ kesin baskın ise $n \leq \lambda_1$ olur. $[\lambda_1, \lambda_1 - 1, \ldots, 1]$ parçalanışı basamak parçalanış olarak bilinir.

N bir pozitif tamsayı olsun. N sayısının pozitif tamsayıların toplamı şeklinde yazılabilme (veya N nin parçalanışı) sayısı $p(N)$ ile gösterilirse, $p(N)$ bir aritmetik fonksiyondur, bu fonsiyona parçalanış fonksiyonu denir. $p(N \mid \text{d})$ ile N nin d koşulunu sağlayan parçalanış sayısı gösterilecektir.

Örneğin, $p(1) = 1$, $p(2) = 2$, $p(3) = 3$ tür.

$p(N)$ fonksiyonunun üreteç fonksiyonu Euler (1748) tarafından

$$\sum_{N=0}^{\infty} p(N)\, q^N = \frac{1}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^k)\ldots}$$

olarak verilmiştir. Bu eşitliğe Euler bağıntısı denir.

N pozitif tamsayısının farklı parçalanışlarının sayısı $p_F(N)$ olsun. Bu durumda, Andrews ve Eriksson (2004) dan $p_F(N)$ nin üreteç fonksiyonu

$$\sum p_F(N) q^N = (1+q)\left(1+q^2\right)\left(1+q^3\right)\ldots$$

dir. Ayrıca, bir pozitif N tamsayısının farklı parçalanışlarının sayısı, tek tam sayılardan oluşan parçalanışlarının sayısına eşittir (Euler 1748). Bu eşitlik literatürde "Euler Parçalanış Özdeşliği" olarak bilinmektedir.

$p(N \mid \text{farklı parça., uzunluk çift}) - p(N \mid \text{farklı parça., uzunluk tek}) = e(N)$ "Euler Beşgen Sayı Teoremi" olarak bilinir, burada, $N = j\,(3j \pm 1/2)$ ise $e(N) = (-1)^j$, aksi halde $e(N) = 0$ dır.

3. MATERYAL VE METOD

Bu bölümde, Young diyagramı tanımı verilip, tamsayı parçalanışları ve Young diyagramlarının semigruplar ile ilişkileri incelenecektir.

3.1. Young Diyagramları

Young diyagramları için Bras-Amoros ve De-Mier (2007); Fulton (1997); Keith ve Nath (2011) ve Tutaş vd. (2019) referans olarak verilebilir.

Bu bölümde, n uzunluğunda bir satır ile kastedilen n tane kutunun yanyana gelmesi ile oluşan bir satırdır.

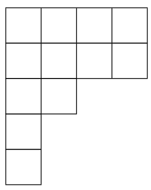
Tanım 3.1. $\{u_1, \ldots, u_n\}$ *pozitif tamsayıların sonlu bir dizisi olmak üzere, önce* u_n *tane* n *uzunluğunda satır, sonra* u_{n-1} *tane* $n-1$ *uzunluğunda satır,* $\ldots$*, en son* u_1 *tane* 1 *uzunluğunda satır, sol üstten, altalta yazılarak elde edilen diyagrama bir Young diyagramı denir ve* $Y = 1^{u_1}2^{u_2}, \ldots, n^{u_n}$ *şeklinde gösterilir.* $\{u_1, \ldots, u_n\}$ *dizisine de Young dizisi denir.*

Tamsayı parçalanışları ile Young diyagramları arasında birebir eşleşme vardır. $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n]$ olsun. λ nın Young diyagramı Y_λ şu şekilde oluşturulur: Alt alta λ_1 tane kutunun sağ üst kısmı yanına, alt alta λ_2 tane kutu ilave edilir. Böyle devam edilerek, n-inci adımda λ_n tane kutu eklenir.

Her $1 \leq i \leq n$ için $u_i = \lambda_i - \lambda_{i-1}$ şeklindedir. Buradan, $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n]$ parçalanışı $1^{u_1}2^{u_2}...n^{u_n}$ formunda yazılabilir. Bu yazımda j^{u_j}, uzunluğu j olan bir satırın u_j defa tekrar edilmesi demektir. λ parçalanışına karşılık gelen N sayısı ise $N = \sum_{j=1}^{n} u_j.j$ ile hesaplanır.

Bir Young diagramında her kutu için çengel uzunluğu denilen bir sayı belirlenir. Diyagramda verilen bir kutunun kendisi, bu kutunun altında kalan ve sağında kalan kutular ile birlikte bir çengel oluşturur, buradaki toplam kutu sayısı bu kutuya ait çengel uzunluğu olarak tanımlanır.

Örnek 3.2. $\lambda = [5, 3, 2, 2]$ *parçalanışına karşılık gelen Young diyagramı aşağıdaki formdadır:*



8	5	3	2
7	4	2	1
4	1		
2			
1			

ve $\lambda \vdash 12$ *dir. Sağdaki diyagramda her kutunun çengel uzunluğu belirtilmiştir.*

Constantin vd. (2015); Karakaş ve Tutaş (2020); Tutaş (2019); Tutaş vd. (2019) den her Young diagramın, bir nümerik kümeye karşılık geldiği bilinmektedir.

$\mathbb{P}$: Pozitif tamsayıların parçalanışları kümesi, $\mathbb{Y}$: Young diyagramları kümesi ve $\mathbb{S}$: Has nümerik kümelerin kümesi olsun. Bu durumda,

$\alpha : \mathbb{P} \to \mathbb{Y}$ olmak üzere $\alpha(\lambda) = Y_\lambda$ ile tanımlanan fonksiyon birebir ve örtendir.

$\beta : \mathbb{S} \to \mathbb{Y}$ olmak üzere $\beta(S) = Y_S$ ile tanımlanan fonksiyon birebir ve örtendir.

S nümerik semigrubu için bir Young diyagramı oluşturulabilir. $\mathbb{N}_0^2$ içinde alt sol köşe orjinden başlayan bir yol olarak şöyle oluşturulur:

- $x = 0$ ile başlayalım.
- $x \in S$ ise bir birim sağa bir çizgi,
- $x \notin S$ ise bir birim yukarı bir çizgi çekilir.
- $x + 1$ için aynı işlem tekrarlanır.

Bu işlem, S nin önderine kadar tekrarlanır. S nin önderinden büyük elemanları için sağa bir doğru çizilir. Bu düz çizginin altında, $x = 0$ doğrusu ve bu yol arasında kalan bölge bir Young diyagramıdır, bu diyagrama S nin Young diyagramı denir ve Y_S ile gösterilir. Bu diyagrama karşılık gelen parçalanışa S nin parçalanışıdır denir.

Tamsayı parçalanışları ve nümerik kümeler arasındaki ilişki şu şekilde verilebilir: $S = \{s_0 = 0, s_1, s_2, \ldots, s_n, \rightarrow\}$ nümerik kümesine karşılık gelen tamsayı parçalanışı her $1 \leq i \leq n$ için $\lambda_i = s_n - s_{i-1} - (n - i + 1)$ dir.

$\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]$ tamsayı parçalanışına karşılık gelen nümerik kümenin küçük elemanları ise $s_0 = 0$ olmak üzere $1 \leq i \leq n$ için $s_i = \lambda_1 - \lambda_{i+1} + i$ dir.

S bir nümerik semigrup Y_S onun Young diyagramı olsun. Her $j \geq 0$ için Y_S nin j-inci sütunu G_j ile gösterelim. G_j sütunu ile bu sütundaki her bir kutunun çengel uzunlukları kümesini özdeşleyelim. Böylece, 0-ıncı sütun olan G_0 ın S nin boşluklarının kümesi olduğu kolaylıkla görülebilir. Ek olarak, S nin nümerik semigrup olması için gerek ve yeter şart her $i = 0, 1, \ldots, n-1$ için $G_i(S) \subseteq G(S)$ olmasıdır (Tutaş vd. (2019)).

S bir nümerik semigrup, $Y_S = 1^{u_1} 2^{u_2} ... n^{u_n}$ de onun Young diyagramı ise $1 \leq i \leq n$ için $\lambda_i = \sum_{j=i}^{n} u_j$ dir ve $Y_S = \lambda = [\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n]$ olarak yazılabilir.

Örnek 3.3. *$S =< 3, 7, 11 >= \{0, 3, 6, 7, 9, \rightarrow\}$ bir semigrup olsun. S ye karşılık gelen Young tablo ve bu tabloya ait bir çengel, çengel uzunlukları ile birlikte, sırasıyla, aşağıda ifade edilmiştir.*

8	5	2	1
5	2		
4	1		
2			
1			

5	1
3	
2	
1	

Bu durumda, $Y_S = 1^2 2^2 4^1$ *ve* $\lambda = [5,3,1,1]$ *dir.*

$Y = 1^{u_1} 2^{u_2} ... n^{u_n}$ diyagramı verilmiş olsun. Bu durumda, karşılık gelen S nümerik kümesi şöyle belirlenir: S nin s_1 den küçük u_1 tane boşluğu vardır ve $s_1 = u_1 + 1$ dir. s_1 ve s_2 arasında u_2 tane boşluk vardır ve $s_2 = u_1 + u_2 + 2$ dir. Benzer şekilde, her $j = 1, \ldots, n$ için s_{j-1} ile s_j arasında u_j tane boşluk vardır ve $s_j = u_1 + \ldots + u_j + j$ dir. Aynı zamanda, $j = 1, \ldots, n$ için $u_j = s_j - s_{j-1} - 1$ dir. Böylece, Lemma 3.4 ün ilk iki durumunun ispatı elde edilir.

$S \subseteq \mathbb{N}_0$ bir nümerik semigrup olsun. Her $i \geq 0$ ve $s_i \in S$ için $S_i = \{s \in S \mid s \geq s_i\}$ ve $S - s_i = \{s - s_i \in \mathbb{N}_0 \mid s \in S\}$ kümelerini hatırlayalım.

Lemma 3.4. *(Tutaş vd. (2019)) S, Young dizisi* $\{u_1, \ldots, u_n\}$ *olan bir has (proper) nümerik küme olsun. Bu durumda,*

1. $S = \{0, u_1 + 1, u_1 + u_2 + 2, \ldots, u_1 + u_2 + \ldots + u_n + n, \rightarrow\}$ *dir.*
2. *Her* $j = 0, \ldots, n-1$ *için*

$$-s_j + S_j = \{0, u_{j+1} + 1, u_{j+1} + u_{j+2} + 2, \ldots, u_{j+1} + \ldots + u_n + n - j, \rightarrow\}$$

   dir.
3. *Her* $j = 0, \ldots, n-1$ *için* $G_j(S) = G(-s_j + S_j)$ *dir.*
4. *Her* $j = 0, \ldots, n-1$ *için* $-s_j + S_j = \mathbb{N}_0 \backslash G_j(S)$ *dir.*

Sonuç 3.5. *(Tutaş vd. (2019))* $S = \{s_0 = 0, s_1, \ldots, s_n = c(S), \rightarrow\}$, *Young diyagramı* $Y_S = 1^{u_1} \ldots n^{u_n}$ *ve parçalanışı* $\lambda_S = [\lambda_1, \ldots, \lambda_n] \vdash N$ *olan bir has (proper) nümerik küme olsun. Bu durumda,*

1. $G_0(S) = G(S)$ *dir.*
2. *Her* $j = 0, \ldots, n-1$ *için* $G_j(S)$ *nin en büyük elemanı* $F(S) - s_j$ *dir.*
3. *Her* $j = 0, \ldots, n-1$ *için* $G_j(S)$ *nin en küçük elemanı*

$$\min\{b \in G(S) \mid b > s_j\} - s_j$$

   dir.
4. *Her* $j = 0, \ldots, n-1$ *için* $c(S) = \lambda_1 + n$, $\lambda_j = g(S) - s_{j-1} + (j-1)$ *ve*

$$N = n.g(S) + \frac{n(n-1)}{2} - \sum_{j=0}^{n-1} s_j$$

   dir.

Bir S nümerik kümesi ile ilişkili nümerik kümeler Young diyagramı üzerinde Lemma 3.6 ve Lemma 3.7 de olduğu gibi ifade edilebilir.

Lemma 3.6. *(Tutaş vd. (2019))* $S = \{s_0 = 0, s_1, \ldots, s_n = c(S), \rightarrow\}$, *Young diyagramı*

Y_S olan bir has (proper) nümerik küme olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

1. *S bir nümerik semigruptur.*
2. *Her $x, y \in S$ için $x + y \notin G_0(S)$ dir.*
3. *Her $j = 0, \ldots, n-1$ için $G_j(S) \subset G_0(S)$ dir.*

Lemma 3.7. *(Tutaş vd. (2019)) $S = \{s_0 = 0, s_1, \ldots, s_n = c(S), \rightarrow\}$, Young diyagramı Y_S olan bir has (proper) nümerik semigrup olsun. Bu durumda,*

1. *Her $1 \le i \le n-1$ için $S(i) = \cap_{j=i}^{n-1}(-s_j + S_j) = \mathbb{N}_0 \setminus \cup_{j=i}^{n-1} G_j(S)$ dir.*
2. *$T_n(S) = G_{n-1}(S)$ ve $1 \le i \le n-1$ için $T_i(S) = G_{i-1}(S) \setminus \cup_{j=i}^{n-1} G_j(S)$ dir.*

İspat. 1. Her $1 \le i \le n-1$ için

$$\begin{aligned} S(i) &= \{z \in \mathbb{N}_0 \mid \text{her } j = i, \ldots, n-1 \text{ için } z + s_j \in S\} \\ &= \{z \in \mathbb{N}_0 \mid \text{her } j = i, \ldots, n-1 \text{ için } z \in -s_j + S\} \\ &= \cap_{j=i}^{n-1}(-s_j + S) = \cap_{j=i}^{n-1}(\mathbb{N}_0 \setminus G_j(S)) = \mathbb{N}_0 \setminus \cup_{j=i}^{n-1} G_j(S) \end{aligned}$$

dir.

2. $S(i) = \mathbb{N}_0 \setminus \cup_{j=i}^{n-1} G_j(S)$ ve $S(i-1) = \mathbb{N}_0 \setminus \cup_{j=i-1}^{n-1} G_j(S)$ olduğundan her $i = 1, \ldots, n-1$ için

$$\begin{aligned} T_i(S) &= \left(\mathbb{N}_0 \setminus \cup_{j=i}^{n-1} G_j(S)\right) \setminus \left(\mathbb{N}_0 \setminus \cup_{j=i-1}^{n-1} G_j(S)\right) \\ &= G_{i-1}(S) \setminus \cup_{j=i}^{n-1} G_j(S) \end{aligned}$$

elde edilir ve $T_n(S) = S(n) \setminus S(n-1) = \mathbb{N}_0 \setminus S(n-1) = G_{n-1}(S)$ dir.

□

Sonuç 3.8. *(D'Anna (1998); Tutaş vd. (2019)) S, Young diyagramı $Y_S = 1^{u_1} \ldots n^{u_n}$ ve tip dizisinin n-inci terimi olan t_n olan bir has (proper) nümerik semigrup olsun. Bu durumda, aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

1. $t_n = u_n$.
2. $t_{n-1} = \begin{cases} u_{n-1} + 1, & u_{n-1} < u_n \\ u_{n-1}, & u_{n-1} \ge u_n. \end{cases}$

Lemma 3.9. *(Tutaş vd. (2019)) S bir nümerik küme ve $a \in S$ olsun. Bu durumda, S nin bir Arf nümerik semigrup olması için gerek ve yeter koşul $(a + S) \cup \{0\}$ ın bir Arf nümerik semigrup olmasıdır.*

İspat. $(:\Rightarrow)$ S, bir Arf nümerik semigrup ve $a \in S$ olsun. $x \ge y \ge z$ olacak biçimde $x, y, z \in a + S$ alalım. $\alpha, \beta, \gamma \in S$ ve $\alpha \ge \beta \ge \gamma$ iken $x = a + \alpha$, $y = a + \beta$, $z = a + \gamma$ şeklindedir. Arf koşulundan, $\alpha + \beta - \gamma \in S$ dir. Buradan

$$x + y - z = (a + \alpha) + (a + \beta) - (a + \gamma) = a + (\alpha + \beta - \gamma) \in a + S$$

elde edilir.

($\Leftarrow$:) $(a+S)\cup\{0\}$, bir Arf nümerik semigrup ve $x,y,z\in S$ için $x\geq y\geq z$ olduğunu kabul edelim.

$$a+(x+y-z)=(a+x)+(a+y)-(a+z)\in a+S$$

dir ve buradan, $x+y-z\in S$ dir. Bu ise S nin bir Arf nümerik semigrup olduğunu ispatlar. □

Barucci (1997) Arf nümerik semigrup tanımına denk 15 tane koşul vermiştir. Teorem 3.10 bu koşulların bir kısmını içermektedir.

Teorem 3.10. *(Tutaş vd. (2019)) $S=\{s_0=0,s_1,\ldots,s_n=c(S),\rightarrow\}$, Young diyagramı $Y_S=1^{u_1}\ldots n^{u_n}$ olan bir has (proper) nümerik küme olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.*

1. *S bir Arf nümerik semigruptur.*
2. *Her $j=0,\ldots,n-1$ için $-s_j+S_j$ bir nümerik semigruptur.*
3. *Her $j=0,\ldots,n$ için $-s_j+S_j=S(j)$ dir.*
4. *Her $j=0,\ldots,n$ için $G_j(S)=G(S_j)$ dir.*
5. *Her $j=1,\ldots,n$ için $G_j(S)\subset G_{j-1}(S)$ dir.*
6. *Her $j=1,\ldots,n-1$ için $u_j+1\in -s_j+S_j$ dir.*

Tanım 3.11. *β ve α yukarıda tanımlanan fonksiyonlar ve λ bir pozitif tamsayının parçalanışı olsun. $\beta^{-1}\alpha(\lambda)$ bir Arf nümerik semigrup ise λ ya bir Arf parçalanışı denir.*

Önerme 3.12. *(Tutaş vd. (2019)) $\lambda=[\lambda_1,\ldots,\lambda_n]$ nın bir Arf parçalanışı olması için gerek ve yeter koşul her $j\in\{1,\ldots,n-1\}$ için*

$$\lambda_j-\lambda_{j+1}+1\in\{\lambda_{j+1}-\lambda_{j+2}+1,\lambda_{j+1}-\lambda_{j+3}+2,\ldots,$$
$$\lambda_{j+1}-\lambda_n-j-1,\lambda_{j+1}+n-j,\rightarrow\}$$

olmasıdır.

İspat. $\{u_1,\ldots,u_n\}$, $\beta^{-1}\alpha(\lambda)$ nın Young dizisi olsun. Teorem 3.10 (6) dan, λ nın Arf parçalanışı olması için gerek ve yeter koşul her $j=1,\ldots,n-1$ için

$$u_j+1\in\{u_{j+1}+1,u_{j+1}+u_{j+2}+2,\ldots,u_{j+1}+\ldots+u_n+n-j,\rightarrow\}$$

olmasıdır. $\lambda_j-\lambda_{j+1}=u_j$ olduğundan her $j=1,\ldots,n-1$ ve $k=2,\ldots,n-j$ için

$$\lambda_{j+1}-\lambda_{j+k}=u_{j+1}+u_{j+2}+\ldots+u_{j+k-1}$$

olduğundan ispat tamamlanmış olur.

□

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde, bir Arf parçalanışının bir ayrışımı (decomposition) yapılarak bir Arf semigrubun ilkel (primitive) semigruplar cinsinden ifadesi verilecektir. Ayrıca, Karakaş (2018) da verilen parametreleme yöntemiyle katlılığı 6 dan küçük Arf nümerik semigrupların minimal temsilleri elde edilecektir. Arf parçalanışlarının alt aileleri olan ASA-parçalanışlar, Arf C-parçalanışlar tanımlanıp, özellikleri yine bu bölümde incelenecektir. Uzunluğu 4 olan üçgensel sayılar için Arf parçalanışları belirlenecektir.

4.1. Arf Semigrubun İlkel Semigruplara Ayrışımı

Nümerik kümelerin ilkel semigruplar cinsinden ayrışımı Karakaş ve Tutaş (2020) da incelenmiştir. Gümüşbaş ve Tutaş (2020) da ise Arf nümerik semigruplar ilkel semigrupların ayrışımı olarak ifade edilmiştir. Young diyagramların özel bir altkümesi üzerinde çalışılmıştır. u, bir çengelin ayağının kutu sayısı ve $\mathbf{x}-1$ ise bu çengelin kolundaki kutu sayısı olarak adlandırılırsa çengel, $\mathbf{1}^u\mathbf{x}$ olarak temsil edilmiş olur.

Bir pozitif tamsayının Arf parçalanışlarını belirlemek Arf nümerik semigrupları belirlemek demektir. Bir tamsayı parçalanışı sonlu sayıda çengelden oluşur. Bu nedenle, Arf parçalanışları çengeller cinsinden ifade edilebilir.

Tanım 4.1. $K = \{\mathbf{1}^u\mathbf{x} \mid u \geq 0,\ \mathbf{x} \geq 2$ *veya* $\mathbf{x} = 0\ \}$ *çengellerin kümesi olsun. Bu durumda,* $\Gamma_1 = \mathbf{1}^{u_1}\mathbf{x}_1$*,* $\Gamma_2 = \mathbf{1}^{u_2}\mathbf{x}_2$ *ve* $u_1 > u_2$*,* $\mathbf{x}_1 - 1 \geq \mathbf{x}_2$ *olmak üzere* K *üzerinde iki çengelin içiçe geçmesi* $\Gamma_1 \odot \Gamma_2$ *ile gösterilir ve*

$$\Gamma_1 \odot \Gamma_2 = \mathbf{1}^{u_1-(u_2+1)}\mathbf{2}^{u_2}(\mathbf{x}_2+1)\mathbf{x}_1$$

ile tanımlanır.

Çengel kümeleri üzerinde $\Gamma_1 = \mathbf{1}^{u_1}\mathbf{x}_1$, $\Gamma_2 = \mathbf{1}^{u_2}\mathbf{x}_2$ olmak üzere

$$\Gamma_1 \succeq \Gamma_2 \Leftrightarrow u_1 > u_2,\ \mathbf{x}_1 - 1 \geq \mathbf{x}_2$$

ile bir $\succeq$ sıralaması tanımlanabilir.

Bir λ parçalanışın izi (trace), $tr(\lambda) := max\{i \mid \lambda_i \geq i\}$ ile tanımlanır.

Lemma 4.2. *(Gümüşbaş ve Tutaş (2020))* λ *bir tamsayı parçalanışı ve* $t = tr\,(\lambda)$ *ise*

$$\lambda = \Gamma_1 \odot \Gamma_2 \odot \ldots \odot \Gamma_t = \mathbf{1}^{v_1}\mathbf{2}^{v_2}\mathbf{3}^{v_3}\ldots(\mathbf{t}-\mathbf{1})^{v_{t-1}}\mathbf{t}^{v_t}\mathbf{y}_t\mathbf{y}_{t-1}\ldots\mathbf{y}_2\mathbf{y}_1$$

şeklinde yazılabilir. Burada, $\Gamma_i = \mathbf{1}^{u_i}\mathbf{x}_i$*,* $1 \leq i \leq t$*,* $v_i = u_i - (u_{i+1}+1)$*,* $1 \leq i \leq t-1$*,* $v_t = u_t$ *ve* $\mathbf{y}_j = \mathbf{x}_j + (j-1)$*,* $1 \leq i \leq t$ *dir.*

İspat. Ayrıntılı ispat için referansımız Gümüşbaş ve Tutaş (2020) tır. □

Örnek 4.3. *$\lambda = [6,4,3,1]$ parçalanışının ayrışımı $1^2 2^1 3^2 4^1 = 1^5 4^1 \odot 1^6 3^1 \odot 1^3$ tür, diğer bir ifadeyle $\lambda = [6,1,1,1] \odot [3,1,1] \odot [1]$ dir.*

$$
\begin{array}{cccc}
9 & 6 & 4 & 1 \\
7 & 4 & 2 & \\
6 & 3 & 1 & \\
4 & 1 & & \\
2 & & & \\
1 & & &
\end{array}
\;=\;
\begin{array}{cccc}
9 & 3 & 2 & 1 \\
5 & & & \\
4 & & & \\
3 & & & \\
2 & & & \\
1 & & &
\end{array}
\odot
\begin{array}{cc}
4 & 1 \\
2 & \\
1 &
\end{array}
\odot
\begin{array}{c}
1
\end{array}
$$

Lemma 4.4. *(Gümüşbaş ve Tutaş (2020)) $K = \{\mathbf{1}^u\mathbf{x} \mid u \geq 0,\ \mathbf{x} \geq 2$ veya $\mathbf{x} = 0\}$ olsun. Bu durumda,*

1. *$K_1 = \{\mathbf{1}^u\mathbf{x} \in K \mid u \geq 1,\ 2 \leq \mathbf{x} \leq u+1$ veya $\mathbf{x} = 0\}$ ise her $\Gamma \in K_1$ bir nümerik semigrubun parçalanışıdır.*
2. *λ bir nümerik semigrubun parçalanışı ise λ, K nın elemanları yardımı ile bir ayrışıma sahiptir, ancak tersi her zaman doğru değildir.*

İspat.

1. $\Gamma = \mathbf{1}^u\mathbf{x} \in K_1$ olsun. $\mathbf{x} = 0$ ise karşılık gelen nümerik semigrup $S = \{0, u+1, \rightarrow\}$ dir. Diğer taraftan, $S = \{0, u+1, u+2, \ldots, u+\mathbf{x}-1, u+\mathbf{x}+1, \rightarrow\}$ dir.
2. İspat bir nümerik semigruba karşılık gelen parçalanış tanımından görülür.

□

Teorem 4.5. *S bir Arf nümerik semigrup ise bir ilkel semigrup ayrışımına sahiptir ve bu ayrışımın uzunluğu S nin Arf parçalanışının izidir.*

İspat. S bir Arf nümerik semigrup ve λ onun bir parçalanışı olsun. λ, bir kesin baskın Arf parçalanışıdır. Tutaş vd. (2019) den $1 \leq i \leq n$ ve $0 \leq j \leq \lambda_1$ için $[\lambda_i - j, \ldots, \lambda_n - j]$ de bir Arf parçalanışıdır. Diğer bir ifadeyle, bir Arf parçalanışı son satır ile ilk sütun birlikte ayrılırsa iki tane parçalanış elde edilir. Bunlardan biri Arf parçalanışıdır, diğeri ise K_1 kümesinin elemanıdır ve λ Arf parçalanış olduğundan her iki parçalanışta bir semigrubun parçalanışıdır. $1 \leq i \leq t$, $v_i = u_i - (u_{i+1}+1)$, $1 \leq i \leq t = tr(\lambda)$, $v_t = u_t$ ve $\mathbf{y}_j = \mathbf{x}_j + (j-1)$, $1 \leq i \leq t$ için $\lambda = \mathbf{1}^{v_1}\mathbf{2}^{v_2}\mathbf{3}^{v_3}\ldots(\mathbf{t}-\mathbf{1})^{v_{t-1}}\mathbf{t}^{v_t}\mathbf{y}_t\mathbf{y}_{t-1}\ldots\mathbf{y}_2\mathbf{y}_1$ dir. $\tilde{S}_i$, $\mathbf{1}^{u_i}\mathbf{x}_i$ parçalanışının semigrubu olacak şekilde alınırsa $S = \tilde{S}_1 \odot \tilde{S}_2 \odot \ldots \odot \tilde{S}_t$ şeklinde ayrışımlarına göre yazılabilir ve her $\tilde{S}_i$ bir ilkel nümerik semigruptur. □

4.2. Hemen Hemen Simetrik Semigruplar

Bu bölümde, hemen hemen simetrik semigrup tanımı yardımıyla hemen hemen simetrik Arf semigruplar ve karşılık gelen parçalanışların yapısı incelenecektir. Bölüm 4.2

de ifade edilen sonuçlar Akdeniz Üniversitesi FBA-2020-5393 nolu projesi kapsamında desteklenmiştir.

Bilindiği gibi Frobenius sayısı ile nümerik semigrubun sıfırdan başka elemanlarının toplamı her zaman nümerik semigrubun elemanıdır. Bu özelliğe sahip başka sayılar varsa bu sayılara da pseudo-Frobenius sayıları denir.

Tanım 4.6. *S nümerik semigrubu verildiğinde, $L(S) \subseteq PF(S)$ ise S ye hemen hemen (almost) simetrik semigrup (kısaca, AS-semigrup) denir.*

Branco vd. (2018) de, AS-semigrup kavramına denk koşullar belirtilmiştir. Verilen bir S nümerik semigrubu için aşağıdaki denk koşullar bu tez çalışmasında önemli yer turmaktadır.

Önerme 4.8 de, boşluk kümeleri ve $PF(S)$ kümesi Young diyagramına göre belirlenmektedir.

Önerme 4.7. *S bir nümerik semigrup olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir.*

1. *S bir AS-semigruptur.*
2. *$PF(S) = L(S) \bigcup \{F(S)\}$ dir.*
3. *$2g(S) = F(S) + t_1$ dir.*

İspat. Tanımlardan kolayca elde edilmektedir. □

Önerme 4.8. *$S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n, \rightarrow\}$ bir nümerik semigrup olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir.*

1. *$PF(S) = G(S) \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} G(-s_j + S_j)$ dir.*
2. *$L(S) = G(S) \setminus \bigcup_{j=0}^{n-1} \{F(S) - s_j\}$ dir.*
3. *$|N(S)| = n,\ |L(S)| = g(S) - n$ dir.*

İspat. $PF(S)$, $N(S)$ ve $L(S)$ tanımlarından,

1. $PF(S) = \{x \in \mathbb{Z} \backslash S \mid x + S \backslash \{0\} \subseteq S\} = \{x \in \mathbb{Z} \backslash S \mid x \in -s_j + S, j \geq 1\}$
$= \{x \in \mathbb{Z} \backslash S \mid x \notin G(-s_j + S), j \geq 1\} = G(S) \setminus \cup_{j=1}^{n-1} G_j.$
2. $L(S) = \{x \in G(S) \mid x \notin N(S)\} = G(S) \setminus \cup_{i=0}^{n-1} \{F(S) - s_i\}.$
3. Açıktır.

□

Branco vd. (2018) de, verilen bir Frobenius sayısı ve tipine karşılık gelen bütün AS-semigrupları hesaplamak için iki algoritma geliştirilmiştir. Barucci ve Fröberg (1997); Branco vd. (2018); Garcia-Sanchez ve Ojeda (2019); Nari (2013) de bir semigrubun AS-semigrup olması için kriterler verilmiştir.

Önerme 4.9. *S katlılığı $m(S) = m$ olan bir nümerik semigrup ve $Ap(S, m)$, $m(S)$ ye göre S nin Apéry kümesi olmak üzere aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

1. *$Ap(S, m) \setminus \{0\} = (\mathbb{N} \setminus G(S)) \cap \{b + m \mid b \in G(S)\}$ dir.*
2. *$Ap(S, m) \setminus \{0\} = (m + G(S)) \setminus \cup_{i=0}^{n-1} G_i$ dir.*
3. *S bir Arf nümerik semigrup ise $Ap(S, m)$, $(m + S) \cup \{0\}$ ın tip kümesidir.*

İspat. S, katlılığı m olan bir semigrup olsun.

1. $Ap(S, m) = \{s \in S \mid s - m \notin S\}$ olduğundan $s \in Ap(S, m)$ için $s - m \in G(S)$ ve $s - m = b$ olacak şekilde $b \in G(S)$ vardır. Buradan, $s = b + m$ ve $Ap(S, m) \setminus \{0\} = (\mathbb{N} \setminus G(S)) \cap \{b + m \mid b \in G_0\}$ dır.
2. 1. den benzer şekilde görülür.
3. Tanımdan açıkça görülür.

□

4.2.1. Hemen Hemen Simetrik Arf Semigrupları ve Parçalanışları

Bu bölümde, hemen hemen simetrik Arf parçalanışlarının yapısı belirlenip, bir N pozitif tamsayısı için hemen hemen simetrik Arf parçalanışlarının sayısı ve cinsi g olan hemen hemen simetrik Arf semigruplarının sayısı verilecektir. Ayrıntılı bilgi için Gümüşbaş vd. (2020) ne bakılması önerilir.

S bir nümerik semigrup olsun. S nin simetrik nümerik semigrup olması için gerek ve yeter koşul Y_S nin simetrik olmasıdır. $S =< 2, c(S) + 1 >= \{0, 2, 4, ..., c(S), \rightarrow\}$ simetrik Arf semigruptur. Simetrik Arf parçalanışları $[c(S) - 1, c(S) - 2, ..., 2, 1]$ formundadır. Pseudo-simetrik Arf semigrupları sadece $< 3, 4, 5 >$ ve $< 3, 5, 7 >$ dir. Pseudo-simetrik Arf parçalanışları ise [2] ve $[3, 1]$ dir.

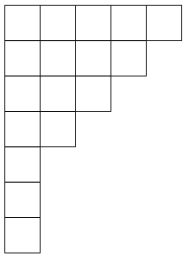
Örnek 4.10. *$S =< 2, 11 >= \{0, 2, 4, 6, 8, 10, \rightarrow\}$ bir simetrik Arf semigrup ve parçalanışı $\lambda = [5, 4, 3, 2, 1]$ dir.*

9	7	5	3	1
7	5	3	1	
5	3	1		
3	1			
1				

Tanım 4.11. *Bir S nümerik semigrubu hem Arf hem de AS-semigrup ise S ye bir hemen hemen simetrik Arf semigrup, kısaca bir ASA-semigrup denir.*

$\mathbb{N}_0$ bir ASA-semigruptur.

Örnek 4.12. *$S = \{0, 4, 6, 8, 10, 12, \rightarrow\}$ bir ASA-semigruptur.*



$$\Rightarrow \lambda = [7, 4, 3, 2, 1], PF(S) = L(S) = \{2, 9, 11\}\ dir.$$

$\mathbb{P}$: Parçalanışlar kümesi, $\mathbb{Y}$: Young diyagramların kümesi ve $\mathbb{S}$: Has nümerik kümelerin kümesi olmak üzere $\alpha : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{Y}$, , $\alpha(\lambda) = Y_\lambda$ ve $\beta : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{Y}$, $\beta(S) = Y_S$ ile tanımlanan fonksiyonlar olduğunu hatırlayalım. Parçalanışlar ve semigruplar arasındaki bu eşlemeler, AS ve ASA-parçalanışları tanımlamamıza olanak sağlamaktadır.

Tanım 4.13. *$\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]$ parçalanışı için,*

1. *$\beta^{-1}\alpha(\lambda)$ bir AS-semigrup ise λ ya hemen hemen simetrik parçalanış denir ve kısaca AS-parçalanış şeklinde gösterilir.*
2. *$\beta^{-1}\alpha(\lambda)$ bir ASA-semigrup ise λ ya hemen hemen simetrik Arf parçalanış denir ve kısaca ASA-parçalanış şeklinde gösterilir.*

Teorem 4.14. *λ herhangi bir ASA-parçalanış ise $k \in \{1, 3, 5, \ldots, 2j-1, 2j, \rightarrow\}$ olmak üzere ya $\lambda = [j+k, j, j-1, \ldots, 1]$ ya da $\lambda = [j]$, $j \in \mathbb{N}$ dir.*

İspat. λ bir ASA-parçalanıştır ancak ve ancak öyle bir S ASA-semigrubu vardır ki $\lambda = \alpha^{-1}\beta(S)$ dir. Önerme 4.8 den, $i = 1, \ldots, n$ için $G_i \subset G$ ve $l(\lambda) = n$ iken $PF(S) = G \setminus \cup_{i=1}^{n-1} G_i$ elde edilir. $N(S) = \{F - s_i \mid 0 \leq i \leq n-1\}$ ve

$$S \text{ bir } AS\text{-semigrup} \Longleftrightarrow PF(S) = (G(S) \setminus N(S)) \cup \{F(S)\}$$

dir. $N(S) = \{F(S)\}$ ise $PF(S) = G(S)$ dir ve λ nın uzunluğu 1 dir. Yani, her $a \in \mathbb{N}$ için $\lambda = [a]$ dır.

Şimdi, λ nın uzunluğu $j + 1 \geq 2$ olduğunu kabul edelim.

$$\begin{aligned} S \text{ bir } AS - \text{semigrup} &\Longleftrightarrow PF(S) = G \setminus \{F - s_i \mid 1 \leq i \leq j\} = G \setminus \cup_{i=1}^{j} G_i \\ &\Longleftrightarrow \cup_{i=1}^{j} G_i = \{F - s_i \mid 1 \leq i \leq j\}. \end{aligned}$$

Diğer taraftan,

$$S \text{ bir Arf nümerik semigrup} \Longleftrightarrow G_i \subset G_{i-1},\ \ i = 1, \ldots, j{+}1 \Longleftrightarrow \cup_{i=1}^{j} G_i = G_1$$

ve $\lambda_2 = |\{F - s_i \mid 1 \leq i \leq j\}| = |G_1| = j$ elde edilir. S Arf olduğundan, λ kesin artan ve $[\lambda_2,\lambda_3,\ldots,\lambda_{j+1}]$ bir simetrik parçalanıştır. Yani, $[j,j-1,\ldots,1]$ dir. Önerme 3.12 den, $\lambda=[j+k,j,\ldots,1]$ dir ve $0\leq i\leq j-2$ için $j+k=2j-(j-1-i)+i$ veya $u_{j-1}\geq j-1$ için $j+k=2j+u_{j-1}$ elde edilir. □

Önerme 4.15. *S bir ASA-semigrup olsun. Her $j\geq 1$ ve $k\in\{1,3,5,\ldots,2j-1,\rightarrow\}$ olmak üzere $S=\{0,k+1,k+3,\ldots,2j+k+1,\rightarrow\}$ semigrubu için*

$$m(S)=k+1,\quad F(S)=2j+k,\quad c(S)=k+2j+1,$$

$$t_1=k,\qquad g(S)=j+k,\qquad r(S)=\begin{cases}2j+3, & k=1\\ k+3, & \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

dir. $S=\{0,k+1,\rightarrow\}$ semigrubu ise

$$m(S)=c(S)=k+1,\qquad g(S)=F(S)=t_1=k,\qquad r(S)=k+2$$

dir.

İspat. Ayrıntılı ispat için referansımız Gümüşbaş vd. (2020) dir. □

Örnek 4.16.

9	5	3	1
7	3	1	
5	1		
3			
2			
1			

$\lambda=[6,3,2,1]$ bir ASA-parçalanıştır ve $k=3$, $j=3$ tür. Karşılık gelen ASA-semigrup ise $S=\{0,4,6,8,10,\rightarrow\}$ dir ve $G(S)=\{1,2,3,5,7,9,\}$, $m(S)=4, F(S)=9, c(S)=10, g(S)=6, r(S)=6, PF(S)=\{2,7,9\}, t_1=3$ tür.

Önerme 4.17. *İki ASA-semigrubun arakesiti de bir ASA-semigruptur.*

İspat. S_1 ve S_2 ASA-semigruplarını alalım. İlk olarak, $G(S_1\cap S_2)=G(S_1)\cup G(S_2)$ olduğunu gözlemleyelim.

$$k_0=\min\{s\mid 0\neq s\in S_1\cap S_2\}$$

olarak tanımlanırsa, Önerme 4.15 den aşağıdaki durumlar söz konusudur.

$a)$ $i=1,2$ için $k_i\in\{1,3,\ldots,2j_i-1,\rightarrow\}$ ve $j_i>0$ iken

$S_i=\{0,k_i+1,\ldots,k_i+2j_i+1,\rightarrow\}$

olsun. $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$ olduğu açıktır. Her $l < k_0$ için $l \in G(S_1) \cup G(S_2)$ ve $m(S_1 \cap S_2) = k_0$ dır. $i = 1, 2$ için $c(S_i) = k_i + 2j_i + 1$ olduğundan iki durum elde edilir.

1. $k_0 = c(S_1) = c(S_2)$ ise $S_1 \cap S_2 = \{0, k_0 = c(S_1) = c(S_2), \rightarrow\}$ dir.
2. Diğer durumda,

$$S_1 \cap S_2 = \{0, k_0, k_0 + 2, \ldots, \max\{c(S_1), c(S_2)\}, \rightarrow\}$$

dir.

$b)$ $i = 1, 2$ için $k_i > 0$ iken $S_i = \{0, k_i + 1, \rightarrow\}$ ise

$$S_1 \cap S_2 = \{0, \max\{k_1 + 1, k_2 + 1\}, \rightarrow\}$$

dir.

$c)$ $k_1 \in \{1, 3, \ldots, 2j_1 - 1, \rightarrow\}$, $j_1 > 0$, $S_1 = \{0, k_1 + 1, \ldots, k_1 + 2j_1 + 1, \rightarrow\}$ ve $S_2 = \{0, k_2 + 1, \rightarrow\}$ ise

$$S_1 \cap S_2 = \begin{cases} S_1, & c(S_2) \leq k_1 + 1 \\ \{0, k_0, k_0 + 2, \ldots, c(S_1), \rightarrow\}, & k_1 + 1 < c(S_2) < c(S_1) \\ S_2, & c(S_2) \geq c(S_1) \end{cases}$$

dir. $(a) - (c)$ durumlarının her biri için $S_1 \cap S_2$ bir ASA-semigruptur. □

Önerme 4.18. *S, $j \in \mathbb{N}_0$ için küçük eleman sayısı $j + 1$ olan bir ASA-semigrup ise*

1. *Her $i = 1, 2, \ldots, j + 1$ için, $S(i)$ bir ASA-semigruptur.*
2. *Her $i = 1, 2, \ldots, j$ için, $\alpha^{-1}\beta(S(i)) = [j-i+1, j-i, \ldots, 1]$ bir ASA-parçalanıştır.*

İspat. Teorem 4.14 ve Önerme 4.15 den ispat elde edilir. □

Önerme 4.19. *S bir ASA-semigrup ve t_i de S nin tip dizisinin i-inci terimi olmak üzere $\lambda = \alpha^{-1}\beta(S) = [j + k, j, j - 1, \ldots, 2, 1]$ ve $k \in \{1, 3, 5, \ldots, 2j - 1, \rightarrow\}$ ise $t_1 = k$ ve her $i = 2, \ldots, j + 1$ için $t_i = 1$ dir.*

İspat. S, Arf nümerik semigrup olduğundan Tutaş vd. (2019) den S nin tip dizisi S nin Young dizisi ile belirlenir. Buradan, $t_1 = j + k - j = k$, $i = 2, \ldots, j$ için $t_i = \lambda_i - \lambda_{i+1} = j - i + 1 - (j - i) = 1$ ve $t_{j+1} = \lambda_{j+1} = 1$ elde edilir. □

S nümerik semigrubu için $m(S) = m$ de S nin Apéry kümesi

$$Ap(S, m) = \{0 = w(0), w(1), \ldots, w(m - 1)\}$$

dir ve burada her $i = 1, \ldots, m - 1$ için $w(i)$, S nin m modülüne göre i kalanını veren en küçük elemanıdır. Her $i = 1, \ldots, m-1$ için öyle tek türlü belirli $k_i \in \mathbb{N}$ vardır ki $w(i) = k_i m + i$ olduğu biliniyor. Buradaki k_i pozitif sayısına S nin i-inci Kunz koordinatı denir ve $K = (k_1, \ldots, k_{m-1})$ ye S nin Kunz vektörü denir.

Önerme 4.20. *S katlılığı $m(S) = m$ olan ASA-semigrup ve S nin Kunz koordinatları $K = (k_1, k_2, \ldots, k_{m-1})$ olsun. Bu durumda,*

(i) $n(S) = 1$ ise $i = 1, \ldots, m-1$ için $k_i = 1$ dir.

(ii) $n(S) > 1$ olsun. m çift ise $c(S) \in \left\{mb + 2s \mid 0 \leq s \leq \frac{m-2}{2},\ b \in \mathbb{N}\right\}$ ve

$$k_i = \begin{cases} 1, & 2 \mid i \\ b, & 2 \nmid i,\ 2s+1 \leq i \leq m+2s-1 \\ b+1, & 2 \nmid i,\ 1 \leq i \leq 2s-1 \end{cases}$$

dir, burada, $i = 1, \ldots, m-1$ dir.

m tek ise $c(S) \in \left\{m + 2s \mid 0 \leq s \leq \frac{m-1}{2}\right\}$ ve

$$k_i = \begin{cases} 1, & 2 \mid i \\ 1, & 2 \nmid i, 2s+1 \leq i \leq m+2s-1 \\ 2, & 2 \nmid i, 1 \leq i \leq 2s-1 \end{cases}$$

dir, burada, $i = 1, \ldots, m-1$ dir. Ayrıca, bu durumda sonlu sayıda ASA-semigrup vardır ve $\frac{m+1}{2}$ tanedir.

İspat. (i) $n(S) = 1$ ise $S = < m, m+1, \ldots, 2m-1 > = \{0, m, \rightarrow\}$ ve $i = 1, \ldots, m-1$ için $k_i = 1$ dir.

(ii) S, katlılığı $m(S) = m$ olan bir ASA-semigrup ise $j \geq 0$ için

$$S = \{0, m, m+2, \ldots, m+2j, \rightarrow\}$$

dir. Burada iki durum söz konusudur.

1. m çift ise $c(S) = m + 2j$ de çifttir. Bölme algoritmasından öyle $b \in \mathbb{N}$ bulunabilir ki $c(S) = mb + 2s$ yazılabilir, burada $0 \leq s \leq \frac{m-2}{2}$ dir.
   Apéry kümesinde çift kalana sahip elemanlar için $m + 2 \leq w(i) \leq 2m - 2$ eşitsizliği sağlanır ve bu nedenle çift kalanlı elemanlar için Kunz koordinatları $k_i = 1$ dir.
   Şimdi, Apéry kümesindeki tek kalanlı elemanları inceleyelim. Tüm tek kalanlı elemanlar S nin önderinden büyük olmalıdır, ayrıca,

$$F(S) = c(S) - 1 = mb + 2s - 1 \leq w(i) \leq m(b+1) + 2s - 1$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan, $2s+1 \leq i \leq m+2s-1$ dir. Dolayısıyla, $2s+1 \leq i \leq m+2s-1$ aralığındaki i tek sayıları için Kunz koordinatları $k_i = b$ dir. $1 \leq i \leq 2s-1$ ve i tek ise S nin Kunz koordinatları $k_i = b+1$ dir.

2. m tek ise $c(S) = m+2j$ de tek sayıdır. $j = s$ yazalım. S nin semigrup olması için $c(S) = m+2s < 2m$ olmalıdır. Buradan, $0 \leq s \leq \frac{m-1}{2}$ dir. Apéry kümesinde çift kalana sahip elemanlar için $w(i) \leq m+2s$ veya $w(i) \geq m+2s$ dir. Her iki durumda da $w(i) < 2m$ olduğundan S nin çift Kunz koordinatları $k_i = 1$ dir.
Şimdi, Apery kümesindeki tek kalanlı elemanları inceleyelim. Tüm tek kalanlı elemanlar S nin önderinden büyük olmalıdır, ayrıca,

$$c(S) + 1 = m + 2s + 1 \leq w(i) \leq 2m + 2s - 1$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan, $2s+1 \leq i \leq m+2s-1$ dir. Dolayısıyla, $2s+1 \leq i \leq m+2s-1$ aralığındaki tek i sayıları için Kunz koordinatları $k_i = 1$ dir. Diğer taraftan, $1 \leq i \leq 2s-1$ ve i tek ise S nin Kunz koordinatları $k_i = 2$ dir.
Verilen m tek sayısı için katlılığı m olan sonlu sayıda ASA-semigrubu vardır. $0 \leq s \leq \frac{m-1}{2}$ olduğundan bu sayı $\frac{m+1}{2}$ dir.

□

Örnek 4.21. $\lambda = [7, 4, 3, 2, 1]$ *olsun. Açıkça görülebilir ki,* λ *bir* ASA*-parçalanış ve* $S = \{0, 4, 6, 8, 10, 12 \rightarrow\}$ *dir.*

$$Ap(S, 4) = \{0 = w(0), w(1) = 13, w(2) = 6, w(3) = 15\}$$

$c(S) = 3.4 = 12$ *olduğundan* $b = 3$ *ve* $K = (3, 1, 3)$ *tür.*

Teorem 4.22. $n_{ASA}(N)$*, bir* N *pozitif tamsayısının* ASA*-parçalanışlarının sayısı olsun.* $\frac{(j+1)(j+2)}{2} \leq N < \frac{(j+2)(j+3)}{2}$ *olacak şekilde bir* $j \in \mathbb{N}_0$ *ve* $t := N - \frac{(j+1)(j+2)}{2}$ *olsun. Bu durumda,*

$$n_{ASA}(N) = \begin{cases} j+1, & ((2|t) \wedge ((2 \nmid j) \vee (t \geq j-5))) \vee (t \geq 2j-2) \\ j-1, & (2 \nmid t) \wedge (2 \nmid j) \wedge (t < j-5) \\ j, & \textit{diğer durumlarda} \end{cases}$$

dir.

İspat. Verilen bir pozitif N tamsayısı için öyle bir $j \in \mathbb{N}_0$ vardır ki

$$\frac{(j+1)(j+2)}{2} \leq N < \frac{(j+2)(j+3)}{2}$$

dir. Biliyoruz ki, $[j+1, j, j-1, \ldots, 2, 1]$, $N_0 = \frac{(j+1)(j+2)}{2}$ nin bir ASA-parçalanışıdır. Bu parçalanış N_0 ın tüm Arf parçalanışları arasında maksimum uzunluğa sahiptir. λ, N nin bir ASA-parçalanışı olsun. Bu durumda, $l(\lambda) \leq j+1$ dir. Teorem 4.14 den $\lambda = [N]$ veya λ, $k \in \{1, 3, 5, \ldots, 2n-3, \rightarrow\}$, $2 \leq n \leq j+1$ için $\lambda^n := [n-1+k, n-$

$1,\ldots,1]$ formundadır. λ_i^n, λ^n nin i-inci parçası olsun. Tutaş vd. (2019) deki Önerme 17 den, $0 \leq i \leq n-3$ için $\lambda_1^n = 2(n-1)-(n-2-i)+i$ veya $k_{n-2} \geq n-2$ için $\lambda_1^n = 2(n-1)+k_{n-2}$ elde edilir. $k \in \{1,3,5,\ldots,2j-1,\rightarrow\}$ ve uygun $j > 0$ için $\lambda = \lambda^{j+1} = [j+k, j, j-1,\ldots,2,1]$ ise λ,

$$[j+1, j, j-1,\ldots,2,1]+[k-1, 0\ldots,0]$$

şeklinde yazılabilir. Burada, $t = N - N_0 = k-1$ dir. Toplamın ikinci kısmı olan $[k-1, 0,\ldots,0]$, $[k-1]$ parçalanışının uzunluğu $j+1$ olan bir genişlemesidir.

$$n = j+1 \quad \Rightarrow \lambda_1^{j+1} = j+1+2i \text{ veya } \lambda_1^{j+1} \geq 3j-1.$$

$$\Rightarrow\ t = 2i,\ 0 \leq i \leq j-\ 2 \text{ veya } t \geq 2j-2.$$

$\lambda^j = [j+1+t+j,\ j-1,\ldots,2,1]$, N nin uzunluğu j olan bir parçalanışı olsun.

$$n = j \quad \Rightarrow \lambda_1^j = 2j+1+t = j+2i,\ 0 \leq i \leq j-3 \text{ veya } \lambda_1^j \geq 3j-4.$$
$$\Rightarrow\ j+t \text{ tek veya } t \geq j-5.$$

Böylece, uzunluğu hem j hem de $j+1$ olan ASA-parçalanışları

$$t \geq 2j-2 \text{ veya } ((2|t \text{ ve } 2 \nmid j) \text{ veya } (2|t \text{ ve } t \geq j-5))$$

durumlarında elde edilir. Uzunluğu ne j ne de $j+1$ olan ASA-parçalanışları ise

$$t < j-5,\ 2 \nmid t \text{ ve } \ 2 \nmid j$$

durumunda vardır.

$\lambda^{j-1} = [j-1+j+j+1+t,\ j-2,\ldots,2,1]$, N nin uzunluğu $j-1$ olan bir parçalanışı olsun.

$$n = j-1 \quad \Rightarrow\ \lambda_1^{j-1} = 3j+t = j-1+2i, 0 \leq i \leq j-4 \text{ veya } \lambda_1^{j-1} \geq 3j-7$$

$$\Rightarrow\ 2j+1+t = 2i,\ 0 \leq i \leq j-4 \text{ veya } 3j+t \geq 3j-7.$$

$$\Rightarrow\ 2 \nmid t \text{ veya } \ t \geq -7.$$

Burada, $0 \leq 2j+1+t \leq 2j-8$ ile $t \geq 0$ durumu çelişir.

$$t_{j-(z+1)} := (j-z)+(j-(z-1))+\cdots+j+(j+1)+t,\ 1 \leq z \leq j-2,$$

şeklinde tanımlanırsa

$$\left[t_{j-(z+1)}, (j-(z\ +1)), (j-(z\ +2)),\ldots,2,1\right]$$

parçalanışı elde edilir. Arf koşulundan, $k_{j-(z+2)} \geq j-(z+2)$ için

$$2(j-(z+1))+k_{j-(z+2)}=t_{j-(z+1)}=(z+2)j-\frac{z(z+1)}{2}+1+t,$$

$$\frac{(z+1)(z-4)}{2}-(z-1)(j+1)-4 \leq t \Rightarrow \frac{(z-1)}{2}(z-2j-4)-7<0<t$$

dir.

Buradan, $1 \leq z \leq j-2$ olduğundan N, uzunluğu $j-z$ olan bir ASA-parçalanışına sahiptir. $[N]$ uzunluğu 1 olan bir ASA-parçalanıştır.

Sonuç olarak,

$$n_{ASA}(N)=\begin{cases} j+1, & ((2|t)\wedge((2\nmid j)\vee(t\geq j-5)))\vee(t\geq 2j-2)\\ j-1, & (2\nmid t)\wedge(2\nmid j)\wedge(t<j-5)\\ j, & \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

elde edilir. □

Örnek 4.23. *$N=16$ ve $N=17$ alalım. $n_{ASA}(16)$ ve $n_{ASA}(17)$ yi hesaplayalım.*

$$\frac{n(n+1)}{2}=\frac{5.6}{2}=15<16<17<\frac{(n+1)(n+2)}{2}=\frac{6.7}{2}=21,$$

olduğundan 16 ve 17 nin ASA-parçalanışının uzunluğu maksimum $n=5$ olabilir.

$2\nmid(16-\frac{n(n+1)}{2})=16-15=1$ *olduğundan* $n_{ASA}(16)=n-1=5-1=4$ *tür.* 16 *nın tüm ASA-parçalanışlarının kümesi* $\{[16],[15,1],[13,2,1],[10,3,2,1]\}$ *dir.* $2\mid(17-\frac{n(n+1)}{2})=17-15=2$ *olduğundan* $n_{ASA}(17)=n=5$ *tir.* 17 *nin tüm ASA-parçalanışlarının kümesi* $\{[17],[16,1],[14,2,1],[11,3,2,1],[7,4,3,2,1]\}$ *dir.*

Örnek 4.24. *$N=58$ olsun. $\frac{10.11}{2}<58<\frac{11.12}{2}$ olduğundan $n_{ASA}(58)=8$ dir. 58 in tüm ASA-parçalanışlarının listesi:* [58], [57, 1], [55, 2, 1], [52, 3, 2, 1], [48, 4, 3, 2, 1], [43, 5, 4, 3, 2, 1], [37, 6, 5, 4, 3, 2, 1], [30, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1] *dir.*

Teorem 4.25. *$g\in\mathbb{N}_0$ için, cinsi g olan ASA-semigruplarının sayısı $\left\lfloor\frac{2g+3}{3}\right\rfloor$ dir.*

İspat. $n_{ASA}(S,g)$, cinsi g olan tüm ASA-semigruplarının sayısı olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} n_{ASA}(S,g) &= |\{S\mid S \text{ cinsi g olan bir } ASA\text{-semigrup}\}|\\ &= |\{\lambda\mid\lambda=[g,j,j-1,\ldots,1] \text{ Arf parçalanış veya } \lambda=[g]\}|\\ &= 1+|\{j\mid\lambda=[g,j,j-1,\ldots,1] \text{ bir Arf parçalanış }\}|\end{aligned}$$

dir. $T := \{j \mid g = 2j + k_{j-1},\ k_{j-1} \geq j-1\}$ ve $K := \{j \mid g = 2i + j + 1,\ 0 \leq i \leq j-2\}$.
Buradan, $T \cap K = \emptyset$ dir.

Böylece,

$$
\begin{aligned}
n_{ASA}(S,g) &= 1 + |T| + |K| \\
&= 1 + |\{j \mid g \geq 3j-1\}| \\
&+ |\left\{k \mid k \text{ tek } g-1 \geq g-k \geq \lceil \tfrac{g+3}{3} \rceil = \lceil \tfrac{g}{3} \rceil + 1\right\}| \\
&= 1 + |\left\{j \mid 1 \leq j \leq \lfloor \tfrac{g+1}{3} \rfloor\right\}| \\
&+ |\left\{k \mid k \text{ tek } 1 \leq k \leq g - \lceil \tfrac{g}{3} \rceil - 1\right\}|
\end{aligned}
$$

olur. Buradan,

$$
|T| = \left\lfloor \frac{g+1}{3} \right\rfloor = \begin{cases} u, & g = 3u+i,\ u \in \mathbb{N},\ i \in \{0,1\} \\ u+1, & g = 3u+2,\ u \in \mathbb{N}, \end{cases}
$$

$$
g - \left\lceil \frac{g}{3} \right\rceil - 1 = \begin{cases} 2u-1, & g = 3u+i,\ u \in \mathbb{N},\ i \in \{0,1\} \\ 2u, & g = 3u+2,\ u \in \mathbb{N} \end{cases}
$$

dir. Böylece, $|K| = u$ ve

$$
n_{ASA}(S,g) = \begin{cases} 2u+1, & g = 3u+i,\ u \in \mathbb{N},\ i \in \{0,1\} \\ 2u+2, & g = 3u+2,\ u \in \mathbb{N} \end{cases}
$$

elde edilir ve $n_{ASA}(S,g) = \left\lfloor \frac{2g+3}{3} \right\rfloor$ dir. □

Örnek 4.26. *Cinsi* 7 *olan* ASA*-semigruplarının sayısı* $\left\lfloor \frac{2g+3}{3} \right\rfloor = 5$ *dir. Bu semigruplar,* $\{0, 8, \rightarrow\}$, $\{0, 7, 9, \rightarrow\}$, $\{0, 6, 8, 10, \rightarrow\}$, $\{0, 4, 6, 8, 10, 12 \rightarrow\}$, $\{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 \rightarrow\}$ *tür.*

$N \leq 80$ pozitif tamsayısının ASA-parçalanışlarının sayısı çizelge olarak verilmiştir. **Çizelge 4.1** de n_d, N nin farklı parçalanışlarının sayısını; n_A, N nin Arf parçalanışlarının sayısını; n_{AS}, N nin AS-parçalanışlarının sayısını ve n_{ASA} ise N nin ASA-parçalanışlarının sayısını göstermektedir.

Çizelge 4.1. $N \leq 80$ pozitif tamsayısının ASA-parçalanışlarının sayısı.

N	n_d	n_A	n_{AS}	n_{ASA}	N	n_d	n_A	n_{AS}	n_{ASA}
1	1	1	1	1	41	44583	100	901	7
2	2	1	1	1	42	53174	122	1092	8
3	3	2	2	2	43	63261	117	1169	7
4	5	2	2	2	44	75175	124	1379	8
5	7	2	3	2	45	89134	150	1521	8
6	11	4	4	3	46	105558	146	1784	8
7	15	3	4	2	47	124754	144	1935	8
8	22	4	6	3	48	147273	174	2280	8
9	30	6	6	3	49	173525	171	2473	9
10	42	6	10	4	50	204226	177	2917	8
11	56	6	9	3	51	239943	209	3181	9
12	77	10	12	4	52	281589	210	3671	8
13	101	7	13	3	53	329931	208	4025	9
14	135	9	19	4	54	386155	240	4675	8
15	176	14	21	5	55	451276	239	5117	10
16	231	13	26	4	56	526823	249	5885	8
17	297	13	27	5	57	614154	288	6465	10
18	385	18	35	4	58	715220	287	7424	8
19	490	17	38	5	59	831820	286	8133	10
20	627	17	50	4	60	966467	339	9385	9
21	792	26	53	6	61	1121505	326	10240	10
22	1002	24	67	5	62	1300156	325	11726	9
23	1255	26	69	6	63	1505499	391	12849	10
24	1575	30	92	5	64	1741630	383	14626	9
25	1958	32	102	6	65	2012558	398	16073	10
26	2436	31	122	5	66	2323520	448	18346	10
27	3010	42	133	6	67	2679689	440	20083	10
28	3718	42	161	6	68	3087735	442	22764	10
29	4565	42	171	6	69	3554345	510	24999	10
30	5604	53	226	7	70	4087968	515	28366	10
31	6842	51	233	6	71	4697205	518	31038	10
32	8349	52	286	7	72	5392783	593	35184	11
33	10143	67	315	6	73	6185689	575	38540	10
34	12310	65	374	7	74	7089500	593	43498	11
35	14883	68	412	6	75	8118264	668	47742	10
36	17977	80	494	8	76	9289091	659	53736	11
37	21637	80	534	6	77	10619863	680	58922	10
38	26015	83	634	8	78	12132164	764	66326	12
39	31185	101	702	7	79	13848650	746	72712	10
40	37338	101	839	8	80	15796476	763	81652	12

4.3. Arf C-parçalanışlar ve Arf C-semigrupları

C-semigruplar ilk olarak Rosales ve Branco (2021) tarafından tanımlanmıştır. C-semigrupların tanımında, nümerik semigrubun pozitif bölenleri dikkate alınır. Bu bölümde, verilen C-semigruplar tanımı geliştirilerek Arf koşulu ile birlikte Arf C-semigrupları ve Arf C-parçalanışları tanımlanacaktır. Böylece Arf parçalanışları içinde yeni bir sınıf oluşturulacaktır. Bu tanımlar kullanılarak 50 den küçük veya eşit her N pozitif tamsayısının Arf C-parçalanışları, ASA C-parçalanışları ve Arf C-parçalanışları sayıları bir çizelge halinde verilecektir.

Verilen bir n pozitif tamsayısı için

$D(n) := \{d \in \mathbb{N} \mid d \mid n \text{ ve } d \neq 1\}$,

$P(n) := \{p \in \mathbb{N} \mid p \mid n \text{ ve } p \text{ asal}\}$
kümelerini tanımlayalım.

Tanım 4.27. *S, bir nümerik semigrup olsun. Her $s \in S \setminus \{0\}$ için $\{s\} + D(s) \subseteq S$ ise S nümerik semigrubuna bölenleri üzerinde toplamsal kapalıdır denir. S nin bütün elemanları bu koşulu sağlarsa S ye bir C-semigrup denir, $S = \beta^{-1}\alpha(\lambda)$ ise λ parçalanışına bir C-parçalanış denir.*

Örnek 4.28. *$S = \{0, 6, 8, 9, 10 \rightarrow\}$ semigrubunu alalım. 6 nın 1 den farklı pozitif bölenleri $2, 3, 6$ dır ve $2 + 6 = 8$, $3 + 6 = 9$ ve $6 + 6 = 12$, S nin elemanıdır. $8, 9, 10$ sayıları için de benzer yöntem uygulanabilir. Böylece, S bir C-semigruptur ve $\lambda = [8, 3, 2, 2, 2, 1]$ ise bu semigruba karşılık gelen bir C-parçalanıştır.*

Lemma 4.29. *Her $s \in S \setminus \{0\}$ için S, $\{s\} + P(s) \subseteq S$ koşulunu sağlayan bir nümerik semigrup olsun. $s \in S \setminus \{0\}$ ve $p \in P(s)$ ise her $k \in \mathbb{N}$ için $s + kp \in S$ dir.*

İspat. k üzerinde tümevarım kullanarak ispatlayalım. $k = 0$ ise $s + 0.p \in S$ ve $k = 1$ ise $s + p \in S$ olduğu açıktır. $k \in \mathbb{N}$ için $s + kp \in S$ olduğunu kabul edelim. $p \in P(S)$ ise $p \in P(s + kp)$ dir. $s + kp + p = (s + kp) + p \in S$ elde edilir. Buradan $s + (k + 1)p \in S$ dir. □

Önerme 4.30. *S bir nümerik semigrup olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir.*

1. *S bir C-semigruptur.*
2. *Her $s \in S \setminus \{0\}$ için $\{s\} + P(s) \subseteq S$ dir.*

İspat. $(1 :\Rightarrow 2)$ Açıktır.

$(2 :\Rightarrow 1)$ $s \in S \setminus \{0\}$ ve $d \in D(s)$ olduğunu kabul edelim. p bir asal sayı ve $d = pk$, $k \in \mathbb{N}$ olsun. Lemma 4.29 dan $s + d = s + kp \in S$ olduğu görülür ve böylece S bir C-semigruptur. □

Tanım 4.31. *Bir S nümerik semigrubu hem Arf hem de C-semigrup ise S ye bir Arf C-semigrup ve bu semigruba karşılık gelen parçalanışa ise Arf C-parçalanış denir.*

Bir S semigrubunun Arf C-semigrup olup olmadığını belirlemek için S nin sıfırdan farklı küçük elemanlarına bakmak yeterlidir.

Örnek 4.32. *$S = \{0, 6, 8, \rightarrow\}$ bir Arf C-semigruptur ve $\lambda = [6, 1]$ ise bu semigruba karşılık gelen bir Arf C-parçalanıştır.*

4.3.1. ASA C-parçalanışlar

Bu bölümde ASA-parçalanışlarının aynı zamanda C-parçalanışları olmaları için gerekli olan koşullar belirlenip herhangi bir N doğal sayısının ASA C-parçalanışlarının sayısı için bir formül verilecektir.

$m \geq 2$ için $\{0, m, \rightarrow\}$ semigrubunun ASA-semigrup ve aynı zamanda C-semigrup olduğu bilinmektedir, bakınız Rosales ve Branco (2021). Bu semigruba karşılık gelen $\lambda = [m-1]$ parçalanışı hemen hemen simetrik Arf C-parçalanışıdır. $\lambda = [\lambda_1, \lambda_1 - 1, \ldots, 1]$ bir basamak ASA-parçalanışıdır.

Lemma 4.33. *$\lambda = [\lambda_1, \lambda_1 - 1, \ldots, 1]$ basamak ASA-parçalanışının bir ASA C-parçalanışı olması için gerek ve yeter koşul $\lambda_1 \leq 4$ olmasıdır.*

İspat. λ bir basamak parçalanış olduğundan bu parçalanışa karşılık gelen semigrup $S = \{0, 2, 4, \ldots, 2\lambda_1, \rightarrow\}$ dir. $s_1 = 2$ ve $s_2 = 4$ elemanlarının asal böleni sadece 2 dir ve bu iki eleman S nin C-semigrup olması koşulunu sağlar. $s_3 = 6$ nın asal bölenleri ise 2 ve 3 tür. S bir C-semigrup olduğundan $6 + 3 \geq c(S) + 1 = 2\lambda_1 + 1$ olmalıdır. Buradan $\lambda_1 \leq 4$ tür.

Diğer taraftan, $\lambda_1 \leq 4$ ise basamak parçalanışlar, $[1]$, $[2, 1]$, $[3, 2, 1]$ ve $[4, 3, 2, 1]$ dir ve bu parçalanışlara karşılık gelen semigruplar, $S_1 = \{0, 2, \rightarrow\}$, $S_2 = \{0, 2, 4, \rightarrow\}$, $S_3 = \{0, 2, 4, 6, \rightarrow\}$ ve $S_4 = \{0, 2, 4, 6, 8, \rightarrow\}$ dir. Kolaylıkla görülebilir ki, S_1, S_2, S_3, S_4 ün her biri ASA C-semigruplardır. Dolayısıyla, bu semigruplara karşılık gelen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ parçalanışları da ASA C-parçalanışlardır. □

Lemma 4.33 yardımıyla kolayca görülebileceği gibi bir λ basamak ASA C-parçalanışının uzunluğu maksimum 4 tür.

Teorem 4.34. *$j \in \mathbb{N}$ ve $k \in \{1, 3, \ldots, 2j-1, \rightarrow\}$ için $\lambda = [j + k, j, j-1, \ldots, 1]$, bir ASA-parçalanışı olsun. Bu durumda, $i = 1, 3, \ldots, 2j-1$ olmak üzere her $k + i$ yi bölen her p asalı için $p \geq 2j + 2 - i$ ise λ bir ASA C-parçalanıştır.*

İspat. λ bir ASA-parçalanış ise λ ya karşılık gelen ASA-semigrup

$$S = \{0, k+1, k+3, \ldots, k+2j+1, \rightarrow\}$$

dir. Her tek $i = 1, \ldots, 2j+1$ için $k+i$ çift ise S nin küçük elemanları çift olduğundan $k+i+2 \in S$ dir. Her asal $2 \neq p \mid k+i$ için $k+i+p$ tektir ve S nin bir ASA C-semigrup olması için $k+i+p \geq c(S)+1 = k+2j+2$ olmalıdır. Buradan, $p \geq 2j+2-i$ dir.

$k+i$ tek ama asal değilse S nin küçük elemanları da tektir. Her asal $3 \leq p \mid k+i$ için S nin ASA C-semigrup olması ancak $k+i+p$ nin $c(S)+1 = k+2j+2$ den büyük veya eşit olduğunda sağlanır. Buradan, $p \geq 2j+2-i$ dir.

$k+i$ tek asal ise S nin küçük elemanları da tektir. $2k+2 \geq k+2j+2$ di. Her $i = 3, \ldots, 2j-1$ için $k+i$ asal olsun veya olmasın $p \geq 2j+2-i$ dir. □

Kolayca gözlemlenebilir ki, bir ASA-parçalanışın C-parçalanış olması parçalanışın uzunluğu ile ilgilidir. $\lambda = [j+k, j, j-1, \ldots, 1]$, ASA-parçalanışını alalım. $k+1$, $k+3$ ve $k+5$ ardışık tek veya ardışık çift sayılar olduğundan 3 bu sayılardan birini mutlaka böler. $3 \mid k+1$ ise λ nın maksimum uzunluğu 1 veya 2; $3 \mid k+3$ ise λ nın maksimum uzunluğu 2 veya 3; $3 \mid k+5$ ise λ nın maksimum uzunluğu 3 veya 4 tür.

Önerme 4.35. *$N \geq 7$ ve $n_{ASA\,C}(N)$, N tamsayısının tüm ASA C- parçalanışlarının sayısı olsun. Bu durumda,*

$$n_{ASA\,C}(N) = \begin{cases} 2, & N = 7 \\ 2, & N \equiv 13 \pmod{30} \text{ ve } N \equiv 28 \pmod{30} \\ 3, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. Herhangi bir N sayısının $[N]$ ve $[N-1, 1]$ parçalanışları ASA C-parçalanışlardır. ASA C-parçalanışlarının maksimum uzunluğu 4 olduğundan herhangi bir N doğal sayısı için $[N-3, 2, 1]$ ve $[N-6, 3, 2, 1]$ ASA-parçalanışlarının C-parçalanış olup olmadığı kontrol edilmelidir.

$N = 7$ nin ASA-parçalanışları $[7]$ ve $[6, 1]$ olduğundan $n_{ASA\,C}(7) = 2$ dir.

$[N-6, 3, 2, 1]$ ve $[N-3, 2, 1]$ parçalanışlarının aynı anda Arf C- parçalanış olmaması durumunu inceleyelim. O halde,

$$\begin{cases} N \equiv 1 \pmod 2 \\ N \equiv 1 \pmod 3 \\ N \equiv 3 \pmod 5 \end{cases} \text{ ve } \begin{cases} N \equiv 0 \pmod 2 \\ N \equiv 1 \pmod 3 \\ N \equiv 3 \pmod 5 \end{cases}$$

sistemlerinin çözüm kümesi araştırılmalıdır. Çin Kalan Teoremine göre, ilk sistemin çözümleri $N \equiv 13 \pmod{30}$ ve ikinci sistemde ise $N \equiv 28 \pmod{30}$ koşulunu sağlayan tamsayılardır.

$N \equiv 13 \pmod{30}$ olsun. $k \in \mathbb{N}_0$ için $N = 13 + 30k$ alalım. $[N-3, 2, 1] =$

$[10+30k, 2, 1]$ parçalanışına karşılık gelen semigrup $\{0, 9+30k, 11+30k, 13+30k, \rightarrow\}$ ve $3 \mid 9+30k$ olduğundan parçalanışın C-parçalanış olması için $12+30k$ bu semigrubun elemanı olması gerekir. Bu durumda, $[N-3, 2, 1] = [10+30k, 2, 1]$ parçalanışı bir C-parçalanış değildir. $[N-6, 3, 2, 1] = [7+30k, 3, 2, 1]$ parçalanışına karşılık gelen semigrup

$$\{0, 5+30k, 7+30k, 9+30k, 11+30k, \rightarrow\}$$

ve $5 \mid 5+30k$ olduğundan parçalanışın C-parçalanış olması için $10+30k$ bu semigrubun elemanı olması gerekir. Bu durumda, $[N-6, 3, 2, 1] = [7+30k, 3, 2, 1]$ parçalanışı bir C-parçalanış değildir. Bu durumda, $N \equiv 13 \pmod{30}$ ise $n_{ASA\,C}(N) = 2$ dir.

$t \in \mathbb{N}_0$ için $N = 28+30t$ alalım. $[N-3, 2, 1] = [25+30t, 2, 1]$ parçalanışına karşılık gelen semigrup $\{0, 24+30t, 26+30t, 28+30t, \rightarrow\}$ ve $3 \mid 24+30t$ olduğundan parçalanışın C-parçalanış olması için $27+30t$ bu semigrubun elemanı olması gerekir. Bu durumda, $[N-3, 2, 1] = [25+30t, 2, 1]$ parçalanışı bir C-parçalanış değildir. $[N-6, 3, 2, 1] = [22+30t, 3, 2, 1]$ parçalanışına karşılık gelen semigrup

$$\{0, 20+30t, 22+30t, 24+30t, 26+30t, \rightarrow\}$$

ve $5 \mid 20+30t$ olduğundan parçalanışın C-parçalanış olması için $25+30t$ bu semigrubun elemanı olması gerekir. Bu durumda, $[N-6, 3, 2, 1] = [7+30t, 3, 2, 1]$ parçalanışı bir C-parçalanış değildir. Bu durumda, $N \equiv 28 \pmod{30}$ ise $n_{ASA\,C}(N) = 2$ dir.

Diğer durumlarda ise $[N-3, 2, 1]$ ve $[N-6, 3, 2, 1]$ parçalanışlarından sadece bir tanesi C-parçalanıştır. Hangi parçalanışın C-parçalanış olduğunu belirlemek için bu parçalanışlara karşılık gelen semigrupların sıfırdan farklı ilk elemanına bakmak yeterlidir. $[N-3, 2, 1]$ e karşılık gelen semigrup $S_1 = \{0, N-4, N-2, N, \rightarrow\}$ ve $[N-6, 3, 2, 1]$ parçalanışına karşılık gelen semigrup $S_2 = \{0, N-8, N-6, N-4, N-2, \rightarrow\}$ dir. Bu ilk elemanlar için $3 \mid (N-8)$ ise $N \equiv 2 \pmod 3$ ve $(N-5) \notin S_2$ olduğundan S_2, Arf C-semigrup değildir. Diğer yandan, $N-4 \equiv 1 \pmod 3$, $3 \mid (N-2)$ ve $N+1 \in S_1$ olduğundan S_1 bir Arf C-semigruptur. Eğer $5 \mid (N-8)$ ise $N \equiv 3 \pmod 5$ ve $(N-3) \notin S_2$ olduğundan S_2, Arf C-semigrup değildir. $5 \nmid N-4$ ve $3 \nmid N-4$ olduğundan S_1, Arf C-semigruptur. Benzer şekilde, $7 \mid (N-8)$ durumunda ispat yapılır. Bu durumda, $n_{ASA\,C}(N) = 3$ tür. □

Örnek 4.36. 73 *ve* 74 *sayılarını alalım.* 73 *ün tüm* ASA *C-parçalanışları* $[73]$, $[72, 1]$ *dir.* 74 *sayısının tüm* ASA *C-parçalanışları ise* $[74]$, $[73, 1]$ *ve* $[71, 2, 1]$ *dir.*

4.3.2. Arf C-parçalanışlar

Bu bölümde, λ yı bir Arf C-parçalanış olarak kabul edeceğiz.

Önerme 4.37. $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2]$ *olmak üzere aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

1. $\lambda_2 = 1$ *ise,* λ *nın bir Arf* C*-parçalanışı olması için gerek ve yeter koşul* $\lambda_1 \geq 2$

olmasıdır.

2. $\lambda_2 \neq 1$ *ise,* λ *nın bir Arf* C*-parçalanış olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki durumlardan bir tanesinin sağlanmasıdır.*
   (a) $\lambda_1 - \lambda_2 + 1$, *tek asal sayı ve* $\lambda_1 \geq 2\lambda_2$ *dir.*
   (b) $p \mid (\lambda_1 - \lambda_2 + 1)$ *koşulunu sağlayan* p *asal sayısı için* $p \geq \lambda_2 + 1$ *ve* $\lambda_1 - \lambda_2 + 1 \neq p$ *dir.*

İspat. $S = \{0, \lambda_1 - \lambda_2 + 1, \lambda_1 + 2, \rightarrow\}$ semigrubu $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2]$ parçalanışına karşılık gelir. $\lambda_2 = 1$ ise iddia Önerme 3.12 den ispatlanabilir. $\lambda_2 \neq 1$ olduğunda S, AS olmayan bir Arf semigruptur.

i) $\lambda_1 - \lambda_2 + 1$ çift tamsayı ise $\lambda_1 - \lambda_2 + 1$ nin bir asal böleni 2 dir. S Arf semigrubunun Arf C-semigrup olması için $\lambda_1 - \lambda_2 + 1 + 2 = \lambda_1 - \lambda_2 + 3 \geq \lambda_1 + 2 = c(S)$ olmalıdır. Bu ise ancak $1 \geq \lambda_2$ olduğunda sağlanır ve $\lambda_2 \neq 1$ olduğundan çelişki elde edilir. Bu durumda, S, AS olmayan Arf C-semigrup değildir.

ii) $\lambda_1 - \lambda_2 + 1$ tek asal sayı olsun. S nin Arf C-semigrup olması için $2(\lambda_1 - \lambda_2 + 1) \geq c(S) = \lambda_1 + 2 \in S$ eşitsizliği sağlanmalıdır. Bu ise ancak $\lambda_1 \geq 2\lambda_2$ olduğunda sağlanır.

iii) $\lambda_1 - \lambda_2 + 1$ asal olmayan tek sayı olsun. S nin Arf C-semigrup olması için her $p \geq 3$ ve $p \mid (\lambda_1 - \lambda_2 + 1)$ koşulunu sağlayan p asal sayıları için $\lambda_1 - \lambda_2 + 1 + p \in S$ olmalıdır. Bu ise ancak $p \geq \lambda_2 + 1$ olduğunda sağlanır.

Diğer taraftan, $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2]$, $\lambda_2 \neq 1$ ve $\lambda_1 - \lambda_2 + 1$, tek asal sayı, $\lambda_1 \geq 2\lambda_2$ olsun. Bu durumda, λ ya karşılık gelen semigrup $\{0, \lambda_1 - \lambda_2 + 1, \lambda_1 + 2, \rightarrow\}$ dir. $\lambda_1 - \lambda_2 + 1$, tek asal sayı ve $\lambda_1 \geq 2\lambda_2$ olduğundan $2(\lambda_1 - \lambda_2 + 1) \geq 2(\lambda_2 + 1) = c(S)$ dir ve λ, bir Arf C-semigruptur. $p \mid (\lambda_1 - \lambda_2 + 1)$ olan bir p asal sayısı var ve $p \geq \lambda_2 + 1$ olsun. $\lambda_1 - \lambda_2 + 1 + p \geq \lambda_1 + 2 = c(S)$ dir ve λ, bir Arf C-semigruptur. □

Önerme 4.37 den aşağıdaki sonuç kolayca görülür.

Sonuç 4.38. $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2]$, *bir Arf parçalanışı olsun. Bu durumda,*

1. $\lambda = [\lambda_1, 2]$ *nin bir Arf* C*-parçalanışı olması için gerek ve yeter koşul* λ_1 *in bir çift tamsayı olmasıdır.*
2. $\lambda = [\lambda_1, 3]$ *ün bir Arf* C*-parçalanışı olması için gerek ve yeter koşul* λ_1 *in bir tek tamsayı olmasıdır.*
3. $\lambda = [2, 1]$ *bir* ASA C*-parçalanıştır.* $\alpha \in \mathbb{N}$ *için* $\alpha\lambda = [2\alpha, \alpha]$ *nın bir Arf* C*-parçalanış olması için gerek ve yeter koşul* $\alpha + 1$ *tek asal sayı veya* α *nın çift sayı olmasıdır.*

Önerme 4.39. $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]$ *bir Arf parçalanışı olsun.* $i = 1, \ldots, n-1$ *için* $\lambda_1 - \lambda_{i+1} + i$ *çift tamsayı ve* $\lambda_{i+1} - \lambda_{i+2} \geq 2$ *ise* λ, ASA C*-parçalanış değildir.*

İspat. $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]$ bir Arf parçalanışı, $i = 1, \ldots, n-1$ için $\lambda_1 - \lambda_{i+1} + i$ çift sayı ve $\lambda_{i+1} - \lambda_{i+2} \geq 2$ olsun. λ ya karşılık gelen semigrubun küçük elemanları

$i = 1, \ldots, n-1$ için $\lambda_1 - \lambda_{i+1} + i$ formundadır. $2 \mid \lambda_1 - \lambda_{i+1} + i$ ise $2 + \lambda_1 - \lambda_{i+1} + i \in S$ olduğunda λ bir AS olmayan Arf C-parçalanışıdır. Bu ise ancak $\lambda_{i+1} - \lambda_{i+2} = 1$ olduğunda sağlanır. $\lambda_{i+1} - \lambda_{i+2} \geq 2$ ise λ hem AS hem de C-parçalanış değildir. $\square$

Örnek 4.40. *$N = 47$ sayısının $\lambda_1 = [45, 2]$ ve $\lambda_2 = [29, 10, 5, 2, 1]$ Arf parçalanışlarını inceleyelim.*

$\lambda_1 = [45, 2]$, 45 çift sayı olmadığı için bir Arf C-parçalanış değildir. $29 - 10 + 1 = 20$ çift sayı ve $10 - 5 > 2$ olduğundan $\lambda_2 = [29, 10, 5, 2, 1]$, bir Arf C-parçalanış değildir.

Sonuç 4.41. *$n_{NAS\,A\,C}(N)$, N tamsayısının tüm AS olmayan Arf C-parçalanışlarının sayısı olsun. Bu durumda,*

$$n_{A\,C}(N) = n_{ASA\,C}(N) + n_{NAS\,A\,C}(N)$$

dir.

Teorem 4.42. *$m \in \mathbb{N}$ çift sayısı için aşağıdaki durumlardan başka katlılığı m olan Arf C-semigrupları yoktur.*

$$\begin{array}{rl} i) & \{0, m, \rightarrow\}, \\ ii) & \{0, m, m+2, \rightarrow\}, \\ iii) & \{0, m, m+2, m+4, \rightarrow\}, \\ iv) & \{0, m, m+2, m+4, m+6, \rightarrow\}. \end{array}$$

Ayrıca, $k \in \mathbb{N}$ sayısı için k ya göre katlılığı m olan mümkün Arf C-semigrupları aşağıda listelenmiştir.

$$\begin{cases} m = 2^k,\ 2 \nmid k, & i), ii), iii), iv) \\ m = 2^k,\ 2 \mid k, & i), ii), iii) \\ m \neq 2^k,\ m \equiv 0 \pmod 3, & i), ii) \\ m \neq 2^k,\ m \equiv 1 \pmod 3, & i), ii), iii) \\ m \neq 2^k,\ m \equiv 2 \pmod 3, & i), ii), iii), iv) \end{cases}$$

dir.

İspat. m çift sayı ise katlılığı m olan tüm Arf C-semigrupları belirleyelim.

$\{0, m, \rightarrow\}$ nin katlılığı m olan bir Arf C-semigrup olduğu bilinmektedir. m çift sayı olduğundan $2 \mid m$ ve $2 + m$ semigrubun elemanı olmalıdır. Bu durumda, $\{0, m, m+2, \rightarrow\}$, bir Arf C-semigruptur. $m + 2$ çift sayı olduğundan $m + 2$ ve $2 + m + 2$ semigrubun elemanı olmalıdır. Bu durumda, $\{0, m, m+2, m+4 \rightarrow\}$, bir Arf C-semigruptur. Bu şekilde devam edilirse, m, $m+2$ ve $m+4$ ardışık çift sayılar olduğundan bu sayılardan biri 3 e tam bölünür. $m+4$, 3 e tam bölünürse ek olarak $\{0, m, m+2, m+4, m+6, \rightarrow\}$, bir Arf C-semigruptur ve başka Arf C-semigrup yoktur.

$k \in \mathbb{N}$ için $m = 2^k$ olsun. k tek sayı ise $m = 2^k \equiv 2 \pmod 3$ tür. $m + 4 \equiv 0 \pmod 3$ tür ve tüm Arf C-semigruplar içinde $c(S)$ si en büyük olan semigrup $\{0, m, m+2, m+4, m+6, \rightarrow\}$ dır.

$k \in \mathbb{N}$ için $m = 2^k$ olsun. k çift sayı ise $m = 2^k \equiv 1 \pmod 3$ tür. $m + 2 \equiv 0 \pmod 3$ tür, Arf C-semigruplar içinde $c(S)$ si en büyük olan $\{0, m, m+2, m+4, \rightarrow\}$ tür.

$k \in \mathbb{N}$ için $m \neq 2^k$ olsun. $m \equiv 0 \pmod 3$ ise tüm Arf C-semigruplar içinde $c(S)$ si en büyük olan semigrup $\{0, m, m+2, \rightarrow\}$ dir.

$m \equiv 1 \pmod 3$ ise tüm Arf C-semigruplar içinde $c(S)$ si en büyük olan semigrup $\{0, m, m+2, m+4, \rightarrow\}$ tür.

$m \equiv 2 \pmod 3$ ise tüm Arf C-semigruplar içinde $c(S)$ si en büyük olan semigrup $\{0, m, m+2, m+4, m+6 \rightarrow\}$ dır. Böylece ispat tamamlanır. □

Aşağıdaki sonuç, Teorem 4.42 den kolayca görülür.

Sonuç 4.43. *$m \in \mathbb{N}$ çift sayı ve $n_{A\,C\text{-sg.}}(m)$, katlılığı m olan tüm Arf C-semigruplarının sayısı olsun. Bu durumda, $k \in \mathbb{N}$ için*

$$n_{A\,C-sg.}(m) = \begin{cases} 4, & (k \text{ tek}, m = 2^k) \text{ veya } (m \equiv 2 \pmod 3),\ m \neq 2^k) \\ 3, & (k \text{ çift}, m = 2^k) \text{ veya } (m \equiv 1 \pmod 3),\ m \neq 2^k) \\ 2, & m \equiv 0 \pmod 3),\ m \neq 2^k \end{cases}$$

dir.

Örnek 4.44. *Katlılığı 28, 30, 32 olan tüm Arf C-semigruplarını belirleyelim.*

$m = 28 \equiv 1 \pmod 3$ olduğundan $\{0, 28, \rightarrow\}$, $\{0, 28, 30, \rightarrow\}$ ve $\{0, 28, 30, 32, \rightarrow\}$ semigrupları katlılığı 28 olan Arf C-semigruplardır. $n_{A\,C}(28) = 3$ tür.

$m = 30 \equiv 0 \pmod 3$ olduğundan $\{0, 30, \rightarrow\}$ ve $\{0, 30, 32, \rightarrow\}$ semigrupları katlılığı 30 olan Arf C-semigruplardır. $n_{A\,C}(30) = 2$ dir.

$m = 32 = 2^5$ olduğundan $\{0, 32, 34, 36, 38, \rightarrow\}$, $\{0, 32, 34, 36, \rightarrow\}$, $\{0, 32, 34 \rightarrow\}$ ve $\{0, 32, \rightarrow\}$ semigrupları katlılığı 32 olan Arf C-semigruplardır. $n_{A\,C}(32) = 4$ tür.

Teorem 4.45. *m bir asal ve tek tamsayı olsun. Bu durumda, aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

1. *$m = 3$ ise $\{0, 3, \rightarrow\}$, $\{0, 3, 6, \rightarrow\}$, $\{0, 3, 6, 8, \rightarrow\}$ ve $\{0, 3, 5, \rightarrow\}$ semigrupları katlılığı 3 olan tüm Arf C-semigruplardır.*
   Katlılığı $m \neq 3$ ve $k \in \mathbb{N}$ için $m + k$ dan sonra küçük elemanlara sahip olan tüm Arf C-semigruplar aşağıdaki formdadır.

$$\begin{array}{rl} i) & \{0, m, \rightarrow\}\,, \\ ii) & \{0, m, m+k, \rightarrow\}\,, \\ iii) & \{0, m, m+k, m+k+2, \rightarrow\}\,, \\ iv) & \{0, m, m+k, m+k+2, m+k+4, \rightarrow\} \\ v) & \{0, m, m+k, m+k+2, m+k+4, m+k+6, \rightarrow\}\,. \end{array}$$

2. *$m \equiv 1 \pmod 3$ ve $3 \leq k \leq m$ tek tamsayı olsun. Bu durumda, k ya göre katlılığı m olan mümkün Arf C-semigrupları aşağıda listelenmiştir.*

$$\begin{cases} i), ii), iii), & k = 3 \\ i), ii), iii), iv), & k \equiv 0 \pmod 3 \\ i), ii), iii), iv), v), & k \equiv 1 \pmod 3 \\ i), ii), iii), & k \equiv 2 \pmod 3 \end{cases}$$

   dir. $2 \leq k \leq m-1$ çift tamsayı olsun. Bu durumda, k ya göre katlılığı m olan mümkün Arf C-semigrupları aşağıda listelenmiştir.

$$\begin{cases} i), \{0, m, 2m-3, \rightarrow\}\,, \{0, m, 2m-3, 2m-1, \rightarrow\}\,, & k = m-3 \\ i), \{0, m, 2m-1, \rightarrow\}\,, & k = m-1 \\ i), ii), iii), iv), & k \equiv 0 \pmod 3 \\ i), ii), iii), iv), v), & k \equiv 1 \pmod 3 \\ i), ii), iii), & k \equiv 2 \pmod 3 \end{cases}$$

   dir.

3. *$m \equiv 2 \pmod 3$ olsun. $3 \leq k \leq m$ tek sayı olsun. Bu durumda, k ya göre katlılığı m olan mümkün Arf C-semigrupları aşağıda listelenmiştir.*

$$\begin{cases} i), ii), iii), & k = 3 \\ i), ii), iii), iv), v), & k \equiv 0 \pmod 3 \\ i), ii), iii), & k \equiv 1 \pmod 3 \\ i), ii), iii), iv), & k \equiv 2 \pmod 3 \end{cases}$$

   dir. $2 \leq k \leq m-1$ çift tamsayı olsun. Bu durumda, k ya göre katlılığı m olan mümkün Arf C-semigrupları aşağıda listelenmiştir.

$$\begin{cases} i), \{0, m, 2m-3, \rightarrow\}, \{0, m, 2m-3, 2m-1, \rightarrow\}, & k = m-3 \\ i), \{0, m, 2m-1, \rightarrow\}, & k = m-1 \\ i), ii), iii), iv), v), & k \equiv 0 \pmod 3 \\ i), ii), iii), & k \equiv 1 \pmod 3 \\ i), ii), iii), iv), & k \equiv 2 \pmod 3 \end{cases}$$

dir.

İspat. m tek asal ise katlılığı m olan tüm Arf C-semigrupları belirleyelim.

1. Açıktır.
   $\{0, m, \rightarrow\}$, katlılığı m olan Arf C- semigrup olduğu bilinmektedir. $m+k$ semigrubun m den sonraki ilk elemanı olsun. Elemanlar ardışık çift veya tek sayılardan oluşacağı için $m+k+2$ semigrubun elemanı olmalıdır. Bu durumda, $\{0, m, m+k, m+k+2, \rightarrow\}$, bir Arf C-semigruptur. Bu şekilde devam edilirse, $m+k$, $m+k+2$ ve $m+k+4$ ardışık çift veya tek sayılar olduğundan bu sayılardan biri 3 e tam bölünür. $m+k+4$, 3 e tam bölünürse ek olarak $\{0, m, m+k, m+k+2, m+k+4, m+k+6, \rightarrow\}$, bir Arf C-semigruptur, başka Arf C-semigrup yoktur.
2. $m \equiv 1 \mod 3$ ve $3 \leq k \leq m$ tek sayı olsun.

   $k = 3$ ise semigrubun Arf olabilmesi için $2(m+3) - m = m+6$ nın semigrubun elemanı olması gerekir. Bu durumda, $k = 3$ için tüm Arf C-semigruplar, $\{0, m, m+3, \rightarrow\}$ ve $\{0, m, m+3, m+5, \rightarrow\}$ tir.

   $k \equiv 0 \pmod 3$ ise $m+k+2$ sayısı 3 e bölünür ve bu durumda, tüm Arf C-semigruplar $ii)$, $iii)$ ve $iv)$ formundadır.

   $k \equiv 1 \pmod 3$ ise $m+k+4$ sayısı 3 e bölünür ve bu durumda, tüm Arf C-semigruplar $ii)$, $iii)$, $iv)$ ve v formundadır.

   $k \equiv 2 \pmod 3$ ise $m+k$ sayısı 3 e bölünür ve bu durumda, tüm Arf C-semigruplar $ii)$ ve $iii)$ formundadır.

   $2 \leq k \leq m-1$ çift sayı olsun. $k = m-3$ ve $k = m-1$ durumları açıktır.

   $k \equiv 0 \pmod 3$ ise $m+k+2$ sayısı 3 e bölünür ve bu durumda, tüm Arf C-semigruplar $ii)$, $iii)$ ve $iv)$ formundadır.

   $k \equiv 1 \pmod 3$ ise $m+k+4$ sayısı 3 e bölünür ve bu durumda, tüm Arf C-semigruplar $ii)$, $iii)$, $iv)$ ve v formundadır.

   $k \equiv 2 \pmod 3$ ise $m+k$ sayısı 3 e bölünür ve bu durumda, tüm Arf C-semigruplar

$ii)$ ve $iii)$ formundadır.
3. $m \equiv 2 \pmod 3$ benzer şekilde görülür.

$\square$

Aşağıdaki sonuç, Teorem 4.45 den elde edilir.

Sonuç 4.46. *$m \in \mathbb{N}$ tek asal sayı ve $n_{A\,C-sg.}(m)$, katlılığı m olan küçük elemanlara sahip tüm Arf C-semigruplarının sayısı olsun. Bu durumda,*

$$n_{A\,C-sg.}(m) = \begin{cases} 4, & m = 3 \\ 3m-7, & m \equiv 1 \pmod 3 \\ 3m-6, & m \equiv 2 \pmod 3 \end{cases}$$

dir.

İspat. $m = 3$ durumu Teorem 4.45 den görülür.

$m \equiv 1 \pmod 3$ ise k için tek ve çift olma durumlarındaki semigruplar hesaplanmalıdır. $3 \le k \le m$ tek sayısı için $m+3$ ile $2m$ arasında $\frac{m-1}{2}$ tane k durumu vardır. k nın 3 e bölümüne göre ise 3 durum olduğundan $m+3$ ile $2m$ arasında $\frac{m-1}{6}$ tane 3 lü grup vardır. Buradan, $\frac{9(m-1)}{6} - 1 = \frac{3m-5}{2}$ tane semigrup vardır. $2 \le k \le m-1$ çift sayısı için $m+2$ ile $2m-7$ arasında $\frac{m-7}{2}$ tane k durumu vardır. k nın 3 e bölümüne göre ise 3 durum olduğundan $m+2$ ile $2m-7$ arasında $\frac{m-7}{6}$ tane 3 lü grup vardır. Buradan, $\frac{9(m-7)}{6} + 5 = \frac{3m-11}{2}$ tane semigrup vardır. Bu durumda, toplamda $\frac{3m-5}{2} + \frac{3m-11}{2} + 1 = 3m-7$ tane semigrup vardır.

$m \equiv 2 \pmod 3$ durumu ise benzer şekilde görülür. $\square$

Önerme 4.47 nin ispatı Teorem 4.45 in ispatındaki yöntem ile benzer şekildedir.

Önerme 4.47. *$m \in \mathbb{N}$ tek sayı ve p, m yi bölen en küçük asal, $n_{A\,C}(m)$, katlılığı m olan Arf C-semigruplarının sayısı olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

1. *$p = 3$ ise $n_{A\,C-sg.}(m) = 4$ tür.*
2. *$p = 5$ ise* $n_{A\,C-sg.}(m) = \begin{cases} 11, & m \equiv 1 \pmod 3 \\ 14, & m \equiv 2 \pmod 3 \end{cases}$
3. *$p = 7$ ise* $n_{A\,C-sg.}(m) = \begin{cases} 21, & m \equiv 1 \pmod 3 \\ 26, & m \equiv 2 \pmod 3 \end{cases}$

Çizelge 4.2 de $N \le 50$ pozitif tamsayısının sırasıyla, $n_{NAS\,A\,C}$ AS olmayan Arf C-parçalanışlarının sayısını, n_{ASA} C-parçalanış olmayan ASA-parçalanışlarının sayısını ve n_A ise AS C-parçalanış olmayan Arf parçalanışlarının sayısını göstermektedir. **Çizelge 4.3** de $n_{Arf\,C-sg.}$ Arf C-semigruplar sayısını göstermektedir.

Çizelge 4.2. $N \leq 50$ pozitif tamsayısının sırasıyla, AS olmayan Arf C-parçalanışlarının sayısı, C-parçalanış olmayan ASA-parçalanışlarının sayısı, AS C-parçalanış olmayan Arf parçalanışlarının sayısı.

N	$n_{NAS\,AC}$	n_{ASA}	n_A	N	$n_{NAS\,AC}$	n_{ASA}	n_A
1	0	0	0	26	6	2	20
2	0	0	0	27	7	3	29
3	0	0	0	28	7	4	29
4	0	0	0	29	7	3	29
5	0	0	0	30	12	4	34
6	1	0	0	31	10	3	35
7	0	0	1	32	10	4	35
8	1	0	0	33	9	3	52
9	1	0	2	34	10	4	48
10	2	1	0	35	12	3	50
11	1	0	2	36	13	5	59
12	3	1	3	37	12	3	62
13	1	1	3	38	11	5	64
14	2	1	3	39	10	4	84
15	3	2	6	40	12	5	81
16	3	1	6	41	10	4	83
17	2	2	6	42	15	5	99
18	5	1	9	43	12	5	98
19	2	2	10	44	12	5	104
20	3	1	10	45	15	5	127
21	4	3	16	46	14	5	124
22	5	2	14	47	13	5	123
23	3	3	17	48	17	5	119
24	6	2	19	49	17	6	145
25	7	3	19	50	18	5	150

Çizelge 4.3. Katlılığı $m(S) \leq 50$ ve cinsi $g(S) \leq 20$ olan Arf C-semigruplar sayısı.

$m(S)$	$n_{Arf\,C-sg.}$	$m(S)$	$n_{Arf\,C-sg.}$
1	1	26	4
2	4	27	4
3	4	28	3
4	3	29	2254
5	14	30	2
6	2	31	2225
7	21	32	4
8	4	33	4
9	4	34	3
10	3	35	14
11	74	36	2
12	2	37	5253
13	99	38	4
14	4	39	4
15	4	40	3
16	3	41	11838
17	192	42	2
18	2	43	11517
19	216	44	4
20	4	45	4
21	4	46	3
22	3	47	17546
23	439	48	2
24	2	49	21
25	11	50	4

$g(S)$	$n_{Arf\,C-sg.}$
1	1
2	2
3	3
4	4
5	4
6	4
7	4
8	6
9	6
10	6
11	7
12	5
13	6
14	7
15	9
16	9
17	12
18	12
19	14
20	15

4.4. Uzunluğu 4 olan Arf Parçalanışları

Bu bölümde, Arf parçalanışı tanımı kullanılarak üçgensel sayıların 4 uzunluklu Arf parçalanışları belirlenmiş ve bir üçgensel sayının 4 uzunluklu Arf parçalanışlarının sayısı için eşitlikler verilmiştir. İlk 20 üçgensel sayının 4 uzunluklu Arf parçalanışlarının sayıları çizelge halinde sunulmuştur.

Bir üçgensel sayı, 1 den n ye kadar olan n doğal sayının toplamıdır. n-inci üçgensel sayının formülü

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\,(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}$$

dir. Tanımdan kolayca görüleceği gibi 1,3,6,10,15 ilk beş üçgensel sayılardır.

Ardışık herhangi iki üçgensel sayının toplamı her zaman tam kare bir sayıya eşittir. Örneğin, birinci ve ikinci üçgensel sayıların toplamı 4 e, ikinci ve üçüncü üçgensel sayıların toplamı ise 9 a eşittir. n-inci ve $(n+1)$-inci üçgensel sayıların toplamı

$$T_n + T_{n+1} = \frac{n\,(n+1)}{2} + \frac{(n+1)\,(n+2)}{2} = (n+1)^2$$

dir.

Önerme 4.48. *T_n, n-inci üçgensel sayı olsun. Bu durumda,*

$$T_n \equiv \begin{cases} 1 \pmod 3), & n \equiv 1 \pmod 3 \\ 0 \pmod 3, & \textit{diğer durumlarda} \end{cases}$$

dir.

İspat. T_n, n-inci üçgensel sayı ise $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$ dir. $n \equiv 1 \pmod 3$ olsun. n sayısının çift veya tek olması durumları dikkate alınırsa, $n = 6k+1$ veya $n = 6k+4$, $k \in \mathbb{N}_0$ şeklindedir. $T_{6k+1} = \frac{(6k+1)(6k+2)}{2} = \frac{36k^2+18k+2}{2} = 18k^2+9k+1$, $T_{6k+4} = \frac{(6k+4)(6k+5)}{2} = \frac{36k^2+54k+20}{2} = 18k^2+27k+10$ dur ve $T_{6k+1} \equiv T_{6k+4} \equiv 1 \pmod 3$ tür.

$n \equiv 0 \pmod 3$ olsun. n sayısının çift veya tek olması durumları dikkate alınırsa, $n = 6k$ veya $n = 6k+3$, $k \in \mathbb{N}_0$ şeklindedir. $T_{6k} = \frac{6k(6k+1)}{2} = \frac{36k^2+6k}{2} = 18k^2+3k$, $T_{6k+3} = \frac{(6k+3)(6k+4)}{2} = \frac{36k^2+42k+6}{2} = 18k^2+21k+3$ tür ve $T_{6k} \equiv T_{6k+3} \equiv 0 \pmod 3$ tür.

$n \equiv 2 \pmod 3$ olsun. n sayısının çift veya tek olması durumları dikkate alınırsa, $n = 6k+2$ veya $n = 6k+5$ $k \in \mathbb{N}_0$ şeklindedir. $T_{6k+2} = \frac{(6k+2)(6k+3)}{2} = \frac{36k^2+30k+6}{2} = 18k^2+15k+3$, $T_{6k+5} = \frac{(6k+5)(6k+6)}{2} = \frac{36k^2+66k+30}{2} = 18k^2+33k+15$ tir ve $T_{6k+2} \equiv T_{6k+5} \equiv 0 \pmod 3$ tür. □

Örnek 4.49. *$T_{10} = 55$ ve $T_{11} = 66$ üçgensel sayılarını alalım. $10 \equiv 1 \pmod 3$ olduğundan $T_{10} = 55 \equiv 1 \pmod 3$ ve $11 \equiv 2 \pmod 3$ olduğundan $T_{11} = 66 \equiv 0 \pmod 3$ tür.*

$N \in \mathbb{N}_0$ için $n_A(N)$, N sayısının Arf parçalanışları sayısı olsun. $\mathbb{N}_0$, Arf nümerik semigrup olduğu için $n_A(0) = 1$ dir.

Önerme 4.50. *$N \in \mathbb{N}_0$ ve $n_A(N,n)$, N sayısının n uzunluklu Arf parçalanışları sayısı olsun. Bu durumda,*

1. *$n_A(N,1) = 1$ dir.*
2. *$N \geq 3$ için $[N-1,1]$,$[N-2,1]$,$\ldots$,$\left[N - \left\lfloor \frac{N}{3} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{N}{3} \right\rfloor\right]$, N sayısının 2 uzunluklu Arf parçalanışlarının listesidir. Buradan, $n_A(N,2) = \left\lfloor \frac{N}{3} \right\rfloor$ dir. Burada, $\lfloor x \rfloor$, x sayısının en büyük tam kısmı olarak adlandırılır.*
3. $$n_A(N,3) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{N}{6} \right\rfloor + \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{N-1}{7} \right\rfloor} \left(\left\lfloor \frac{N-7i-1}{3} \right\rfloor + 1 \right), & 3 \mid N \\ \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{N-1}{7} \right\rfloor} \left(\left\lfloor \frac{N-7i-1}{3} \right\rfloor + 1 \right), & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$
   dir.

İspat. Önerme 3.12 den elde edilir. □

T, bir üçgensel sayı ve $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4]$ ün T nin bir Arf parçalanışı olması için Önerme 3.12 den aşağıdaki çizelge elde edilir, burada, $0 \leq i \leq 2$ için $k_i \geq i$ dir.

Çizelge 4.4. 4 uzunluklu bir Arf parçalanışı

$\boldsymbol{\lambda_1}$	$\boldsymbol{\lambda_2}$	$\boldsymbol{\lambda_3}$	$\boldsymbol{\lambda_4}$
$2\lambda_2 - \lambda_3$	$2\lambda_3 - \lambda_4$	$2\lambda_4 + k_0$	λ_4
$2\lambda_2 - \lambda_4 + 1$	$2\lambda_3 - \lambda_4$	$2\lambda_4 + k_0$	λ_4
$2\lambda_2 + k_2$	$2\lambda_3 - \lambda_4$	$2\lambda_4 + k_0$	λ_4
$2\lambda_2 - \lambda_3$	$2\lambda_3 + k_1$	$2\lambda_4 + k_0$	λ_4
$2\lambda_2 - \lambda_4 + 1$	$2\lambda_3 + k_1$	$2\lambda_4 + k_0$	λ_4
$2\lambda_2 + k_2$	$2\lambda_3 + k_1$	$2\lambda_4 + k_0$	λ_4

Önerme 4.51. *$\lambda_4 = 1$ ve $\lambda_3 = 2$ durumunda aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

1. *$[4,3,2,1]$ sadece $T_4 = 10$ sayısı için geçerlidir ve 10, 4 uzunluklu bir Arf parçalanışı olan ilk üçgensel sayıdır.*
2. *$[6,3,2,1]$ bir üçgensel sayının Arf parçalanışı değildir.*
3. *$i \geq 5$ olmak üzere her T_i üçgensel sayısının $[6+k_2,3,2,1]$ formunda bir Arf parçalanışı vardır, burada, $k_2 \geq 2$ dir.*

4. *$i \geq 7$ olmak üzere $T \equiv 1 \pmod 3$ olan üçgensel sayısının $[6+2k_1, 4+k_1, 2, 1]$ formunda bir Arf parçalanışı vardır, burada, $k_1 \geq 1$ dir.*
5. *$i \geq 6$ olmak üzere $T \equiv 0 \pmod 3$ olan üçgensel sayısının $[8+2k_1, 4+k_1, 2, 1]$ formunda bir Arf parçalanışı vardır, burada, $k_1 \geq 1$ dir.*
6. *$i \geq 6$ olmak üzere T_i üçgensel sayısının $\lfloor \frac{T_i-2}{3} \rfloor - 5$ tane $[8+2k_1+k_2, 4+k_1, 2, 1]$ formunda bir Arf parçalanışı vardır, burada, $k_1 \geq 1$ ve $k_2 \geq 2$ dir.*

İspat. İspat için Çizelge 4.4 ü kullanalım.

1. Açıktır.
2. $[6,3,2,1]$ parçalanışı 12 sayısının bir Arf parçalanışıdır ancak 12 bir üçgensel sayı olmadığından $[6,3,2,1]$ üçgensel sayının Arf parçalanışı değildir.
3. $T_5 = 15$ üçgensel sayısı için $[6+k_2, 3, 2, 1]$ parçalanışında $k_2 = 3$ tür. Dolayısıyla, $[6+k_2, 3, 2, 1]$, her $T_i = 12 + k_2$ üçgensel sayısının bir Arf parçalanışıdır.
4. $[6+2k_1, 4+k_1, 2, 1]$ parçalanışı için $T = 13 + 3k_1$ dir ve bu eşitlik sadece $T \equiv 1 \pmod 3$ ise sağlanır.
5. $[8+2k_1, 4+k_1, 2, 1]$ parçalanışı için $T = 15 + 3k_1$ dir ve bu eşitlik sadece $T \equiv 0 \pmod 3$ ise sağlanır.
6. $[8+2k_1+k_2, 4+k_1, 2, 1]$ parçalanışı için $T = 15 + 3k_1 + k_2$ dir ve bu parçalanış ilk olarak $T_6 = 21$ üçgensel sayısında görülür, $21 = 15 + 3k_1 + k_2$ için $k_1 = 1$ ve $k_2 = 3$ tür. $k_1 \geq 1$, $k_2 \geq 2$ olduğundan $k_1 = \tilde{k}_1 + 1$ ve $k_2 = \tilde{k}_2 + 2$ alınırsa $\tilde{k}_1, \tilde{k}_2 \geq 0$ elde edilir. Yerine yazıldığında ise, $T_i = 15 + 3(\tilde{k}_1 + 1) + \tilde{k}_2 + 2$ olur ve $\tilde{k}_1$ üzerinden sayılırsa $i \geq 6$ olmak üzere bir T_i üçgensel sayısının tam $\lfloor \frac{T_i-20}{3} \rfloor + 1 = \lfloor \frac{T_i-2}{3} \rfloor - 5$ tane Arf parçalanışı vardır.

□

Örnek 4.52. *$T_{10} = 55$ ve $T_{11} = 66$ üçgensel sayılarının Önerme 4.51 deki formda olan 4 uzunluklu Arf parçalanışlarının sayısını hesaplayalım.*

$T_{10} = 55 = 12 + k_2$ ise $k_2 = 43$ elde edilir. Bu durumda, $[49,3,2,1]$, $T_{10} = 55$ in 4 uzunluklu bir Arf parçalanışıdır.

$T_{10} = 55 = 13 + 3k_1$ ise $k_1 = 14$ elde edilir. Bu durumda, $[34,18,2,1]$, $T_{10} = 55$ in 4 uzunluklu bir Arf parçalanışıdır.

$T_{10} = 55 = 15 + 3k_1$eşitliğini sağlayan bir k_1 değeri olmadığından $T_{10} = 55$ için bu formda 4 uzunluklu bir Arf parçalanışı yoktur.

$T_{10} = 55 = 15 + 3k_1 + k_2$ nin $\lfloor \frac{T_i-2}{3} \rfloor - 5 = \lfloor \frac{55-2}{3} \rfloor - 5 = 12$ tane 4 uzunluklu Arf parçalanışı vardır.

$T_{11} = 66 = 12 + k_2$ ise $k_2 = 54$ elde edilir. Bu durumda, $[60,3,2,1]$, $T_{11} = 66$ nın 4 uzunluklu bir Arf parçalanışıdır.

$T_{11} = 66 = 13 + 3k_1$ eşitliğini sağlayan bir k_1 değeri olmadığından $T_{11} = 66$ için

bu formda 4 *uzunluklu bir Arf parçalanışı yoktur.*

$T_{11} = 66 = 15 + 3k_1$ *ise* $k_1 = 17$ *elde edilir. Bu durumda,* $[42, 21, 2, 1]$*,* $T_{11} = 66$ *nın* 4 *uzunluklu bir Arf parçalanışıdır.*

$T_{11} = 66 = 15 + 3k_1 + k_2$ *nin* $\left\lfloor \frac{T_{11}-2}{3} \right\rfloor - 5 = \left\lfloor \frac{66-2}{3} \right\rfloor - 5 = 16$ *tane* 4 *uzunluklu Arf parçalanışı vardır.*

Önerme 4.53. $\lambda_4 = 1$*,* $\lambda_3 = 2 + k_0$ *ve* $\lambda_2 = 4 + 2k_0 + k_1$*, burada* $k_0 = k_1 \geq 1$ *ve* $k_2 \geq 2$ *olmak üzere aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

1. $i \geq 7$ *olmak üzere* $T_i \equiv 4 \pmod 6$ *üçgensel sayısının* $[4 + 3k_0, 3 + 2k_0, 2 + k_0, 1]$ *formunda bir Arf parçalanışı vardır, burada* $k_0 \geq 1$ *dir.*
2. $T \equiv 5 \pmod 7$ *üçgensel sayısının* $[6 + 4k_0, 3 + 2k_0, 2 + k_0, 1]$ *formunda bir Arf parçalanışı vardır, burada* $k_0 \geq 1$ *dir.*
3. $i \geq 6$ *olmak üzere* T_i *üçgensel sayısının* $\left\lfloor \frac{T_i}{7} \right\rfloor - 2$ *tane* $[6 + 4k_0 + k_2, 3 + 2k_0, 2 + k_0, 1]$ *formunda Arf parçalanışı vardır, burada* $k_0 \geq 1$ *ve* $k_2 \geq 2$ *dir.*
4. $i \geq 7$ *olmak üzere* $T_i \equiv 1 \pmod 3$ *üçgensel sayısının* $k_0 = k_1 \geq 1$ *olmak üzere* $\left\lfloor \frac{T_i-4}{6} \right\rfloor - 2$ *tane* $[6 + 3k_0 + 2k_1, 4 + 2k_0 + k_1, 2 + k_0, 1]$ *formunda Arf parçalanışı vardır.*
5. T_7 *üçgensel sayısının* 1 *tane ve* $i \geq 9$ *olmak üzere* T_i *üçgensel sayısının*

$$\left\{ 0 \leq k_0 \leq \left\lfloor \frac{T_i - 25}{7} \right\rfloor : 3 \mid (T_i - 25 - 7k_0) \right\}$$

   kümesinin eleman sayısı kadar $[8 + 4k_0 + 2k_1, 4 + 2k_0 + k_1, 2 + k_0, 1]$ *formunda Arf parçalanışı vardır, burada* $k_0 = k_1 \geq 1$ *dir.*
6. $i \geq 7$ *olmak üzere* T_i *üçgensel sayısının* $\sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{T_i-27}{7} \right\rfloor} \left(\left\lfloor \frac{T_i-7j}{3} \right\rfloor - 8 \right)$ *tane* $[8 + 4k_0 + 2k_1 + k_2, 4 + 2k_0 + k_1, 2 + k_0, 1]$ *formunda Arf parçalanışı vardır, burada* $k_0 = k_1 \geq 1$ *ve* $k_2 \geq 2$ *dir.*

İspat. İspat için **Çizelge 4.4** ü kullanalım.

1. $[4 + 3k_0, 3 + 2k_0, 2 + k_0, 1]$ parçalanışı için $T = 10 + 6k_0$ dır ve $i = 7$ için $T_7 = 28 = 10 + 6k_0$ dir ve $k_0 = 3$ tür. $i \geq 7$ için $T_i = 10 + 6k_0$ eşitliğinin sağlanabilmesi için hem $T \equiv 0 \pmod 2$ hem de $T \equiv 1 \pmod 3$ olmalıdır. Bu iki durum düzenlenirse $T \equiv 4 \pmod 6$ elde edilir. Bu formdaki üçgensel sayıların 1 tane Arf parçalanışı vardır.
2. $[6 + 4k_0, 3 + 2k_0, 2 + k_0, 1]$ parçalanışı için $T = 12 + 7k_0$ dır, yani $T \equiv 5 \pmod 7$ olmalıdır.
3. $[6 + 4k_0 + k_2, 3 + 2k_0, 2 + k_0, 1]$ parçalanışı için $T = 12 + 7k_0 + k_2$ dir ve bu parçalanış ilk olarak $T_6 = 21$ üçgensel sayısında görülür, $21 = 12 + 7k_0 + k_2$ için $k_0 = 1$ ve $k_2 = 2$ dir. $k_0 \geq 1$, $k_2 \geq 2$ olduğundan $k_0 = \tilde{k}_0 + 1$ ve $k_2 = \tilde{k}_2 + 2$ alınırsa $\tilde{k}_0, \tilde{k}_2 \geq 0$ elde edilir. Yerine yazıldığında ise $T_i = 12 + 7(\tilde{k}_0 + 1) + \tilde{k}_2 + 2$ olur ve $\tilde{k}_0$ üzerinden sayma işlemi yapılırsa $i \geq 6$ olmak üzere bir T_i üçgensel sayısının tam $\left\lfloor \frac{T_i-21}{7} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{T_i}{7} \right\rfloor - 2$ tane Arf parçalanışı vardır.

4. $[6+3k_0+2k_1, 4+2k_0+k_1, 2+k_0, 1]$ parçalanışı için $T = 13+6k_0+3k_1$ dir ve $i \geq 7$ için $T_i = 13+6k_0+3k_1$ eşitliğinin sağlanabilmesi için $T_i \equiv 1 \pmod 3$ olmalıdır. $k_0 = \tilde{k}_0 + 1$ ve $k_1 = \tilde{k}_1 + 1$ alınırsa $\tilde{k}_0, \tilde{k}_1 \geq 0$ elde edilir. Yerine yazıldığında ise $T_i = 13+6(\tilde{k}_0+1)+3(\tilde{k}_1+1)$ olur ve $\tilde{k}_0$ üzerinden sayma işlemi yapılırsa $i \geq 7$ olmak üzere bir T_i üçgensel sayısının tam $\lfloor \frac{T_i-22}{6} \rfloor + 1 = \lfloor \frac{T_i-4}{6} \rfloor - 2$ tane Arf parçalanışı vardır.
5. $[8+4k_0+2k_1, 4+2k_0+k_1, 2+k_0, 1]$ parçalanışı için $i = 7$ ise $T_7 = 28 = 15+7k_0+3k_1$ ve $k_0 = 1, k_1 = 2$ dir. $i \geq 9$ için $T_i = 15+7k_0+3k_1$ sayısının k_0 üzerinden sayma işlemi yapılırsa tam
$$\left\{0 \leq k_0 \leq \left\lfloor \frac{T_i-25}{7} \right\rfloor : 3 \mid (T_i - 25 - 7k_0)\right\}$$
kümesinin eleman sayısı kadar Arf parçalanışı olduğu görülür.
6. $[8+4k_0+2k_1+k_2, 4+2k_0+k_1, 2+k_0, 1]$ parçalanışı için $T = 15+7k_0+3k_1+k_2$ dir. $k_0 = k_1 \geq 1$ ve $k_2 \geq 2$ olduğundan $k_0 = \tilde{k}_0+1$, $k_1 = \tilde{k}_1+1$ ve $k_2 = \tilde{k}_2+2$ alınırsa $\tilde{k}_0, \tilde{k}_1, \tilde{k}_2 \geq 0$ elde edilir. Yerine yazıldığında ise $T_i = 15+7(\tilde{k}_0+1)+3(\tilde{k}_1+1)+\tilde{k}_2+2$ olur ve $\tilde{k}_0$ üzerinden sayılırsa
$$\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{T_i-27}{7} \rfloor} \left(\left\lfloor \frac{T_i-27-7j}{3} \right\rfloor + 1 \right) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{T_i-27}{7} \rfloor} \left(\left\lfloor \frac{T_i-7j}{3} \right\rfloor - 8 \right)$$
tane Arf parçalanışı vardır.

□

Örnek 4.54. *$T_{10} = 55$ ve $T_{11} = 66$ üçgensel sayılarının Önerme 4.53 deki formda olan 4 uzunluklu Arf parçalanışlarının sayısını hesaplayalım.*

$T_{10} = 55 = 10+6k_0$ eşitliğini sağlayan bir k_0 değeri olmadığından $T_{10} = 55$ için bu formda 4 uzunluklu bir Arf parçalanışı yoktur.

$T_{10} = 55 = 12+7k_0$ eşitliğini sağlayan bir k_0 değeri olmadığından $T_{10} = 55$ için bu formda 4 uzunluklu bir Arf parçalanışı yoktur.

$T_{10} = 55 = 12+7k_0+k_2$ nin $\lfloor \frac{T_{10}}{7} \rfloor - 2 = \lfloor \frac{55}{7} \rfloor - 2 = 5$ tane 4 uzunluklu Arf parçalanışı vardır.

$T_{10} = 55 = 13+6k_0+3k_1$ in $\lfloor \frac{T_{10}-4}{6} \rfloor - 2 = \lfloor \frac{55-4}{6} \rfloor - 2 = 6$ tane 4 uzunluklu Arf parçalanışı vardır.

$T_{10} = 55 = 15+7k_0+3k_1$ in $0 \leq k_0 \leq \lfloor \frac{55-25}{7} \rfloor = 4$ aralığında sadece $k_0 = 0$ ve $k_0 = 3$ değerlerinde çözüm olduğundan tam 2 tane 4 uzunluklu Arf parçalanışı vardır.

$T_{10} = 55 = 15 + 7k_0 + 3k_1 + k_2$ *nin*

$$\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{T_i-27}{7} \rfloor} \left(\left\lfloor \frac{T_i - 7j}{3} \right\rfloor - 8 \right) = \sum_{j=0}^{4} \left(\left\lfloor \frac{55 - 7j}{3} \right\rfloor - 8 \right) = 10 + 8 + 5 + 3 + 1 = 27$$

tane 4 *uzunluklu Arf parçalanışı vardır.*

$T_{11} = 66 = 10 + 6k_0$ *eşitliğini sağlayan bir* k_0 *değeri olmadığından* $T_{11} = 66$ *için bu formda* 4 *uzunluklu bir Arf parçalanışı yoktur.*

$T_{11} = 66 = 12 + 7k_0$ *eşitliğini sağlayan bir* k_0 *değeri olmadığından* $T_{11} = 66$ *için bu formda* 4 *uzunluklu bir Arf parçalanışı yoktur.*

$T_{11} = 66 = 12 + 7k_0 + k_2$ *nin* $\lfloor \frac{T_{11}}{7} \rfloor - 2 = \lfloor \frac{66}{7} \rfloor - 2 = 7$ *tane* 4 *uzunluklu Arf parçalanışı vardır.*

$T_{11} = 66 = 13 + 6k_0 + 3k_1$ *eşitliğini sağlayan* k_0 *ve* k_1 *değerleri olmadığından* $T_{11} = 66$ *için bu formda* 4 *uzunluklu bir Arf parçalanışı yoktur.*

$T_{11} = 66 = 15 + 7k_0 + 3k_1$ *in* $0 \leq k_0 \leq \lfloor \frac{66-25}{7} \rfloor = 5$ *aralığında sadece* $k_0 = 2$ *ve* $k_0 = 5$ *değerlerinde çözüm olduğundan tam* 2 *tane* 4 *uzunluklu Arf parçalanışı vardır.*

$T_{11} = 66 = 15 + 7k_0 + 3k_1 + k_2$ *nin*

$$\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{T_i-27}{7} \rfloor} \left(\left\lfloor \frac{T_i - 7j}{3} \right\rfloor - 8 \right) = \sum_{j=0}^{5} \left(\left\lfloor \frac{66 - 7j}{3} \right\rfloor - 8 \right) = 14+11+9+7+4+2 = 47$$

tane 4 *uzunluklu Arf parçalanışı vardır.*

Önerme 4.55. $\lambda_4 \geq 2$ *durumunda aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

1. $i \geq 8$ *olmak üzere* $T_i \equiv 0 \pmod 2$ *üçgensel sayısının* $\lfloor \frac{T_i-20}{30} \rfloor + 1$ *tane* $[4\lambda_4 + 3k_0, 3\lambda_4 + 2k_0, 2\lambda_4 + k_0, \lambda_4]$ *formunda Arf parçalanışı vardır, burada,* $k_0 \geq 0$ *dır.*
2. $i \geq 9$ *olmak üzere* T_i *üçgensel sayısının* $\left\{0 \leq \lambda_4 \leq \lfloor \frac{T_i-23}{11} \rfloor : 7 \mid (T_i - 23 - 11\lambda_4)\right\}$ *kümesinin eleman sayısı kadar* $[5\lambda_4 + 4k_0 + 1, 3\lambda_4 + 2k_0, 2\lambda_4 + k_0, \lambda_4]$ *formunda Arf parçalanışı vardır, burada* $k_0 \geq 0$ *dır.*
3. $i \geq 7$ *olmak üzere* T_i *üçgensel sayısının* $\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{T_i-26}{12} \rfloor} \left(\lfloor \frac{T_i-12j-5}{7} \rfloor - 2 \right)$ *tane* $[6\lambda_4 + 4k_0 + k_2, 3\lambda_4 + 2k_0, 2\lambda_4 + k_0, \lambda_4]$ *formunda Arf parçalanışı vardır, burada* $k_0 \geq 0$ *ve* $k_2 \geq 2$ *dir.*
4. $i \geq 9$ *olmak üzere* $T_i \equiv 0 \pmod 3$ *üçgensel sayısının* $\lambda_4 \equiv 1 \pmod 3$ *değerle-*

rinde

$$\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{T_i-42}{13} \rfloor} \left(\left\lfloor \frac{T_i-13j}{6} \right\rfloor - 6 \right),$$

$i \geq 10$ *olmak üzere* $T_i \equiv 1 \pmod 3$ *üçgensel sayısının* $\lambda_4 \equiv 2 \pmod 3$ *değerlerinde ise*

$$\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{T_i-55}{13} \rfloor} \left(\left\lfloor \frac{T_i-13j-1}{6} \right\rfloor - 8 \right)$$

tane $[6\lambda_4+3k_0+2k_1, 4\lambda_4+2k_0+k_1, 2\lambda_4+k_0, \lambda_4]$ *formunda Arf parçalanışı vardır, burada* $k_0 \geq 0$ *ve* $k_1 \geq 1$ *dir.*

5. $i \geq 9$ *olmak üzere* T_i *üçgensel sayısının*

$$\left\{ (\lambda_4, k_0) : \begin{array}{l} 0 \leq \lambda_4 \leq \lfloor \frac{T_i-32}{14} \rfloor, \; 0 \leq k_0 \leq \lfloor \frac{T_i-14\lambda_4-32}{7} \rfloor, \\ 3 \mid (T_i - 14\lambda_4 - 7k_0 - 32) \end{array} \right\}$$

kümesinin eleman sayısı kadar $[7\lambda_4+4k_0+2k_1+1, 4\lambda_4+2k_0+k_1, 2\lambda_4+k_0, \lambda_4]$ *formunda Arf parçalanışı vardır, burada* $k_0 \geq 0$ *ve* $k_1 \geq 1$ *dir.*

6. $i \geq 7$ *olmak üzere* T_i *üçgensel sayısının* $\sum_{t=0}^{\lfloor \frac{T_i-35}{15} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{T_i}{7} \rfloor - 5} \left(\lfloor \frac{T_i-7j-35}{3} \rfloor - 5t + 1 \right)$ *tane* $[8\lambda_4+4k_0+2k_1+k_2, 4\lambda_4+2k_0+k_1, 2\lambda_4+k_0, \lambda_4]$ *formunda Arf parçalanışı vardır, burada,* $0 \leq i \leq 2$ *için* $k_i \geq i$ *dir.*

İspat. İspat için Çizelge 4.4 ü kullanalım.

1. $[4\lambda_4+3k_0, 3\lambda_4+2k_0, 2\lambda_4+k_0, \lambda_4]$ parçalanışı için $T = 10\lambda_4+6k_0$ dır ve $i \geq 8$ için $T_i = 10\lambda_4+6k_0$ eşitliğinin sağlanabilmesi için $T_i \equiv 0 \pmod 2$ olmalıdır. $\lambda_4 \geq 2$ olduğundan $\lambda_4 = \tilde{\lambda}_4+2$ alınırsa $\tilde{\lambda}_4 \geq 0$ elde edilir. Yerine yazıldığında ise $T_i = 10(\tilde{\lambda}_4+2)+6k_0$ olur ve $\tilde{\lambda}_4$ üzerinden sayma işlemi yapılırsa $i \geq 8$ olmak üzere bir T_i üçgensel sayısının tam $\left\lfloor \frac{T_i-20}{30} \right\rfloor + 1$ tane Arf parçalanışı vardır.
2. $[5\lambda_4+4k_0+1, 3\lambda_4+2k_0, 2\lambda_4+k_0, \lambda_4]$ parçalanışı için $T = 11\lambda_4+7k_0+1$ dir. $\lambda_4 \geq 2$ olduğundan $\lambda_4 = \tilde{\lambda}_4+2$ alınırsa $\tilde{\lambda}_4 \geq 0$ elde edilir. Yerine yazıldığında ise $T_i = 11(\tilde{\lambda}_4+2)+7k_0+1$ olur ve $i \geq 9$ için $T_i = 11\lambda_4+7k_0+1$ eşitliğini sağlayan elemanların kümesi $\tilde{\lambda}_4$ üzerinden sayılırsa $\left\{0 \leq \tilde{\lambda}_4 \leq \lfloor \frac{T_i-23}{11} \rfloor : 7 \mid T_i - 23 - 11\tilde{\lambda}_4 \right\}$ kümesinin eleman sayısına eşittir.
3. $[6\lambda_4+4k_0+k_2, 3\lambda_4+2k_0, 2\lambda_4+k_0, \lambda_4]$ parçalanışı için $T = 12\lambda_4+7k_0+k_2$ dir. $\lambda_4 \geq 2$, $k_2 \geq 2$ olduğundan $\lambda_4 = \tilde{\lambda}_4+2$ ve $k_2 = \tilde{k}_2+2$ alınırsa $\tilde{\lambda}_4, \tilde{k}_2 \geq 0$ elde edilir. Yerine yazıldığında ise $T_i = 12(\tilde{\lambda}_4+2)+7k_0+\tilde{k}_2+2$ olur ve $\tilde{\lambda}_4$

üzerinden sayma işlemi yapılırsa

$$\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{T_i-26}{12} \rfloor} \left(\left\lfloor \frac{T_i-26-12j}{7} \right\rfloor + 1 \right) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{T_i-26}{12} \rfloor} \left(\left\lfloor \frac{T_i-12j-5}{7} \right\rfloor - 2 \right)$$

tane Arf parçalanışı vardır.

4. $[6\lambda_4+3k_0+2k_1, 4\lambda_4+2k_0+k_1, 2\lambda_4+k_0, \lambda_4]$ parçalanışı için $T = 13\lambda_4+6k_0+3k_1$ dir. $\lambda_4 \geq 2$, $k_1 \geq 1$ olduğundan $\lambda_4 = \tilde{\lambda}_4+2$ ve $k_1 = \tilde{k}_1+1$ alınırsa $\tilde{\lambda}_4, \tilde{k}_1 \geq 0$ elde edilir. Yerine yazıldığında ise $T_i = 13(\tilde{\lambda}_4+2)+6k_0+3(\tilde{k}_1+1)$ olur. Eşitliğin sağlanabilmesi için iki durum söz konusudur:
$T_i \equiv 0 \pmod 3$ ise $\tilde{\lambda}_4 \equiv 1 \pmod 3$ olmalıdır. $\tilde{\lambda}_4$ üzerinden sayma işlemi yapılırsa $i \geq 9$ için bir T_i üçgensel sayısının

$$\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{T_i-42}{13} \rfloor} \left\lfloor \frac{T_i-13j-42}{6} \right\rfloor + 1 = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{T_i-42}{13} \rfloor} \left\lfloor \frac{T_i-13j}{6} \right\rfloor - 6$$

tane Arf parçalanışı vardır.
$T_i \equiv 1 \pmod 3$ ise $\tilde{\lambda}_4 \equiv 2 \pmod 3$ olmalıdır. $\tilde{\lambda}_4$ üzerinden sayma işlemi yapılırsa $i \geq 10$ olmak üzere bir T_i üçgensel sayısının

$$\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{T_i-55}{13} \rfloor} \left\lfloor \frac{T_i-13j-55}{6} \right\rfloor + 1 = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{T_i-55}{13} \rfloor} \left\lfloor \frac{T_i-13j-1}{6} \right\rfloor - 8$$

tane Arf parçalanışı vardır.

5. $[7\lambda_4+4k_0+2k_1+1, 4\lambda_4+2k_0+k_1, 2\lambda_4+k_0, \lambda_4]$ parçalanışı için $T = 14\lambda_4+7k_0+3k_1+1$ dir. $\lambda_4 \geq 2$, $k_1 \geq 1$ olduğundan $\lambda_4 = \tilde{\lambda}_4+2$ ve $k_1 = \tilde{k}_1+1$ alınırsa $\tilde{\lambda}_4, \tilde{k}_1 \geq 0$ elde edilir. Yerine yazıldığında ise $T_i = 14(\tilde{\lambda}_4+2)+7k_0+3(\tilde{k}_1+1)+1$ olur ve $i \geq 9$ için $\tilde{\lambda}_4$ ve $\tilde{k}_0$ üzerinden sayma işlemi yapılırsa

$$\left\{ \left(\tilde{\lambda}_4, \tilde{k}_0\right) : \begin{array}{l} 0 \leq \tilde{\lambda}_4 \leq \lfloor \frac{T_i-32}{14} \rfloor,\ 0 \leq \tilde{k}_0 \leq \lfloor \frac{T_i-14\lambda_4-32}{7} \rfloor, \\ 3 \mid (T_i-14\tilde{\lambda}_4-7\tilde{k}_0-32) \end{array} \right\}$$

kümesinin eleman sayısı kadar Arf parçalanışı olduğu görülür.

6. $[8\lambda_4+4k_0+2k_1+k_2, 4\lambda_4+2k_0+k_1, 2\lambda_4+k_0, \lambda_4]$ parçalanışı için $T = 15\lambda_4+7k_0+3k_1+k_2$ dir. $\lambda_4 \geq 2$, $k_1 \geq 1$, $k_2 \geq 2$ olduğundan $\lambda_4 = \tilde{\lambda}_4+2$, $k_1 = \tilde{k}_1+1$ ve $k_2 = \tilde{k}_2+2$ alınırsa $\tilde{\lambda}_4, \tilde{k}_1, \tilde{k}_2 \geq 0$ elde edilir. Yerine yazıldığında ise $T_i = 15(\tilde{\lambda}_4+2)+7k_0+3(\tilde{k}_1+1)+\tilde{k}_2+2$ olur ve $i \geq 7$ için $\tilde{\lambda}_4$ ve $\tilde{k}_0$ üzerinden sayma işlemi yapılırsa

$$\sum_{t=0}^{\lfloor \frac{T_i-5}{15} \rfloor -2} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{T_i}{7} \rfloor -5} \left(\left\lfloor \frac{T_i-7j-15t-32}{3} \right\rfloor \right)$$

tane Arf parçalanışı olduğu görülür.

□

Örnek 4.56. *$T_{10} = 55$ ve $T_{11} = 66$ üçgensel sayılarının Önerme 4.55 deki formda olan 4 uzunluklu Arf parçalanışlarının sayısını hesaplayalım.*

$T_{10} = 55 = 10\lambda_4 + 6k_0$ eşitliğini sağlayan k_0 değeri olmadığından $T_{10} = 55$ için bu formda 4 uzunluklu bir Arf parçalanışı yoktur.

$T_{10} = 55 = 11\lambda_4 + 7k_0 + 1$ in $0 \leq \lambda_4 \leq \left\lfloor \frac{T_i-23}{11} \right\rfloor = 2$ aralığında sadece $\lambda_4 = 1$ değerinde çözüm olduğundan 1 tane 4 uzunluklu Arf parçalanışı vardır.

$T_{10} = 55 = 12\lambda_4+7k_0+k_2$ nin $\sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{T_i-26}{12} \right\rfloor} \left(\left\lfloor \frac{T_i-12j-5}{7} \right\rfloor - 2 \right) = \sum_{j=0}^{2} \left(\left\lfloor \frac{55-12j-19}{7} \right\rfloor \right) = 5 + 3 + 1 = 9$ tane 4 uzunluklu Arf parçalanışı vardır.

$T_{10} = 55 = 13\lambda_4 + 6k_0 + 3k_1$ eşitliği için $j = 0$ dır. $\left\lfloor \frac{55-1}{6} \right\rfloor - 8 = 1$ tane 4 uzunluklu Arf parçalanışı vardır.

$T_{10} = 55 = 14\lambda_4 + 7k_0 + 3k_1 + 1$ in $0 \leq \lambda_4 \leq \left\lfloor \frac{55-32}{14} \right\rfloor = 1$ aralığındaki 0 değeri için $0 \leq k_0 \leq \left\lfloor \frac{55-32}{7} \right\rfloor = 3$ ve 1 değeri için $0 \leq k_0 \leq \left\lfloor \frac{55-14-32}{7} \right\rfloor = 1$ elde edilir. λ_4 ve k_0 değerleri yerine yazıldığında 2 tane 4 uzunluklu Arf parçalanışı vardır.

$T_{10} = 55 = 15\lambda_4+7k_0+3k_1+k_2$ nin $\sum_{t=0}^{\left\lfloor \frac{55-5}{15} \right\rfloor -2} \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{55}{7} \right\rfloor -5} \left(\left\lfloor \frac{55-7j-2}{3} \right\rfloor - 5t - 10 \right) = \sum_{t=0}^{1} \sum_{j=0}^{2} \left(\left\lfloor \frac{53-7j}{3} \right\rfloor - 5t - 10 \right) = 7 + 5 + 3 + 2 = 17$ tane 4 uzunluklu Arf parçalanışı vardır.

$T_{11} = 66 = 10\lambda_4+6k_0$ ın $\left\lfloor \frac{66-20}{30} \right\rfloor +1 = 2$ tane 4 uzunluklu Arf parçalanışı vardır.

$T_{11} = 66 = 11\lambda_4 + 7k_0 + 1$ in $0 \leq \lambda_4 \leq \left\lfloor \frac{66-23}{11} \right\rfloor = 3$ aralığında sadece $\lambda_4 = 2$ değerinde çözüm olduğundan 1 tane 4 uzunluklu Arf parçalanışı vardır.

$T_{11} = 66 = 12\lambda_4 + 7k_0 + k_2$ nin $\sum_{j=0}^{3} \left(\left\lfloor \frac{66-12j-5}{7} \right\rfloor - 2 \right) = 6 + 5 + 3 + 1 = 15$ tane 4 uzunluklu Arf parçalanışı vardır.

$T_{11} = 66 = 13\lambda_4 + 6k_0 + 3k_1$ eşitliği için $0 \leq \lambda_4 \leq \left\lfloor \frac{66-42}{13} \right\rfloor = 1$ dir. $T_{11} \equiv 0 \mod 3$ ve $\lambda_4 = 0$ olduğundan $\left\lfloor \frac{66}{6} \right\rfloor - 6 = 5$ tane 4 uzunluklu Arf parçalanışı vardır.

$T_{11} = 66 = 14\lambda_4 + 7k_0 + 3k_1 + 1$ in $0 \leq \lambda_4 \leq \left\lfloor \frac{66-32}{14} \right\rfloor = 2$ aralığındaki 0 değeri için $0 \leq k_0 \leq \left\lfloor \frac{66-32}{7} \right\rfloor = 4$, 1 değeri için $0 \leq k_0 \leq \left\lfloor \frac{66-14-32}{7} \right\rfloor = 2$ ve 2 değeri için $0 \leq k_0 \leq \left\lfloor \frac{66-28-32}{7} \right\rfloor = 0$ elde edilir. λ_4 ve k_0 değerleri yerine yazıldığında 4 tane 4 uzunluklu Arf parçalanışı vardır.

$T_{11} = 66 = 15\lambda_4+7k_0+3k_1+k_2$ nin $\sum_{t=0}^{\left\lfloor \frac{66-5}{15} \right\rfloor -2} \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{66}{7} \right\rfloor -5} \left(\left\lfloor \frac{66-7j-2}{3} \right\rfloor - 5t - 10 \right) = \sum_{t=0}^{2} \sum_{j=0}^{4} \left(\left\lfloor \frac{64-7j}{3} \right\rfloor - 5t - 10 \right) = 11 + 9 + 6 + 4 + 2 + 6 + 4 + 1 + 1 = 44$ tane 4

uzunluklu Arf parçalanışı vardır.

Teorem 4.57 de $i \geq 10$ için yazılan toplam formülü önermelerden elde edilmiştir.

Teorem 4.57. $i \geq 10$ *olmak üzere* T_i *üçgensel sayısının* 4 *uzunluklu Arf parçalanışları sayısı*

$$n_A(T_i,4) = \left\lfloor \frac{T_i-2}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{T_i}{7} \right\rfloor + \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{T_i-27}{7} \right\rfloor} \left(\left\lfloor \frac{T_i-7j-24}{3} \right\rfloor \right)$$

$$+ \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{T_i-26}{12} \right\rfloor} \left(\left\lfloor \frac{T_i-12j-19}{7} \right\rfloor \right)$$

$$+ \sum_{t=0}^{\left\lfloor \frac{T_i-35}{15} \right\rfloor} \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{T_i-35}{7} \right\rfloor} \left(\left\lfloor \frac{T_i-7j-15t-32}{3} \right\rfloor \right)$$

$$+ \left| \left\{ 0 \leq k_0 \leq \left\lfloor \frac{T_i-25}{7} \right\rfloor : 3 \mid (T_i-7k_0-25) \right\} \right|$$

$$+ \left| \left\{ 0 \leq \lambda_4 \leq \left\lfloor \frac{T_i-23}{11} \right\rfloor : 7 \mid (T_i-11\lambda_4-23) \right\} \right|$$

$$+ \left| \left\{ (\lambda_4,k_0) : \begin{array}{c} 0 \leq \lambda_4 \leq \left\lfloor \frac{T_i-32}{14} \right\rfloor, \\ 0 \leq k_0 \leq \left\lfloor \frac{T_i-14\lambda_4-32}{7} \right\rfloor, \\ 3 \mid (T_i-14\lambda_4-7k_0-32) \end{array} \right\} \right| - 6 + L$$

dir.

Burada, $T_i \equiv 0 \pmod 3$ *ise*

$$L = \begin{cases} \left\lfloor \frac{T_i-20}{30} \right\rfloor + \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{T_i-42}{13} \right\rfloor} \left(\left\lfloor \frac{T_i-13j-36}{6} \right\rfloor \right) + 3, & 2 \mid T_i \wedge 7 \mid (T_i-5) \\ \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{T_i-42}{13} \right\rfloor} \left(\left\lfloor \frac{T_i-13j-36}{6} \right\rfloor \right) + 2, & 2 \nmid T_i \wedge 7 \mid (T_i-5) \\ \left\lfloor \frac{T_i-20}{30} \right\rfloor + \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{T_i-42}{13} \right\rfloor} \left(\left\lfloor \frac{T_i-13j-36}{6} \right\rfloor \right) + 2, & 2 \mid T_i \wedge 7 \nmid (T_i-5) \\ \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{T_i-42}{13} \right\rfloor} \left(\left\lfloor \frac{T_i-13j-36}{6} \right\rfloor \right) + 1, & 2 \nmid T_i \wedge 7 \nmid (T_i-5) \end{cases}$$

dir.

$T_i \equiv 1 \pmod 3$ *ise*

$$L = \begin{cases} \left\lfloor \frac{T_i-4}{6} \right\rfloor + \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{T_i-55}{13} \right\rfloor} \left(\left\lfloor \frac{T_i-13j-49}{6} \right\rfloor \right) + \left\lfloor \frac{T_i-20}{30} \right\rfloor + 4, & 6 \mid (T_i-4) \wedge 7 \mid (T_i-5) \\ \left\lfloor \frac{T_i-4}{6} \right\rfloor + \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{T_i-55}{13} \right\rfloor} \left(\left\lfloor \frac{T_i-13j-49}{6} \right\rfloor \right) + 2, & 6 \mid (T_i-4) \wedge 7 \nmid (T_i-5) \\ \left\lfloor \frac{T_i-4}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{T_i-20}{30} \right\rfloor + \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{T_i-55}{13} \right\rfloor} \left(\left\lfloor \frac{T_i-13j-49}{6} \right\rfloor \right) + 3, & 6 \nmid (T_i-4) \wedge 7 \mid (T_i-5) \\ & \wedge 2 \mid T_i \\ \left\lfloor \frac{T_i-4}{6} \right\rfloor + \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{T_i-55}{13} \right\rfloor} \left(\left\lfloor \frac{T_i-13j-49}{6} \right\rfloor \right) + 2, & 6 \nmid (T_i-4) \wedge 7 \mid (T_i-5) \\ & \wedge 2 \nmid T_i \\ \left\lfloor \frac{T_i-4}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{T_i-20}{30} \right\rfloor + \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{T_i-55}{13} \right\rfloor} \left(\left\lfloor \frac{T_i-13j-49}{6} \right\rfloor \right) + 2, & 6 \nmid (T_i-4) \wedge 7 \nmid (T_i-5) \\ & \wedge 2 \mid T_i \\ \left\lfloor \frac{T_i-4}{6} \right\rfloor + \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{T_i-55}{13} \right\rfloor} \left(\left\lfloor \frac{T_i-13j-49}{6} \right\rfloor \right) + 1, & 6 \nmid (T_i-4) \wedge 7 \nmid (T_i-5) \\ & \wedge 2 \nmid T_i \end{cases}$$

dir.

İspat. Önerme 4.51, Önerme 4.53 ve Önerme 4.55 den elde edilir. □

Örnek 4.58. $T_7 = 28$ *sayısının* 4 *uzunluklu Arf parçalanışları,*

$$\begin{array}{lllll} [22,3,2,1], & [20,5,2,1], & [19,6,2,1], & [19,5,3,1], & [18,7,2,1], \\ [17,7,3,1], & [16,9,2,1], & [16,8,3,1], & [16,7,4,1], & [16,6,4,2], \\ [15,9,3,1], & [14,9,4,1], & [13,9,5,1] & & \end{array}$$

dir. Buradan, $n_A(28,4) = 13$ *tür.*

Örnek 4.59. $T_{10} = 55$ *ve* $T_{11} = 66$ *üçgensel sayılarının tüm* 4 *uzunluklu Arf parçalanışlarının sayısı* $n_A(T_{10},4) = n_A(55,4) = 84$ *ve* $n_A(T_{11},4) = n_A(66,4) = 145$ *olarak hesaplanır.*

Çizelge 4.5. $i \leq 20$ olmak üzere $T_i \leq 210$ üçgensel sayılarının sırasıyla, 1, 2, 3, 4 uzunluklu Arf parçalanışlarının ve T_i nin toplam Arf parçalanışlarının sayısı.

T_n	uz.1	uz.2	uz.3	uz.4	Toplam	T_n	uz.1	uz.2	uz.3	uz.4	Toplam
1	1	0	0	0	1	66	1	22	107	145	448
3	1	1	0	0	2	78	1	26	159	225	764
6	1	2	1	0	4	91	1	30	186	381	1219
10	1	3	1	1	6	105	1	35	267	586	2117
15	1	5	6	1	14	120	1	40	350	929	3426
21	1	7	11	4	26	136	1	45	424	1347	5330
28	1	9	15	13	42	153	1	51	564	1885	8720
36	1	12	33	20	80	171	1	57	704	2594	13735
45	1	15	40	43	150	190	1	63	810	3591	20742
55	1	18	64	84	239	210	1	70	1073	4828	32689

4.5. Arf Nümerik Semigrupların Minimal Temsili

Bu bölümde, Karakaş (2018) da verilen Arf semigrupların parametrelenişler yardımı ile katlılığı 6 dan küçük olan Arf nümerik semigrupların mümkün minimal temsilleri verilecektir. Gerekli altyapı ve kullanılan gösterim 2.2 altbölümünde açıklanmıştır.

Aksi belirtilmedikçe S, önderi c olan bir Arf nümerik semigrup kabul edilecektir.

Önerme 4.60. $obeb(2, c+1) = 1$ *iken* $S = \langle 2, c+1 \rangle$ *ise,* S *nin minimal temsili* $\rho = \{((c+1)x_1, 2x_2)\}$ *dir.*

İspat. $(Ap(S,2) \setminus \{0\}) + \{c+1\} = \{2c+2\}$ olduğu açıktır. $V_{2c+2} = \{2, c+1\}$ ve $E_{2c+2} = \emptyset$ olduğundan $\rho = \{(2x_2, (c+1)x_1)\}$ dir. Aslında, $\{((c+1)x_1, 2x_2)\}$ şeklinde de yazılabilir. S nin minimal temsili sıralanış dışında tek türlü belirlidir. □

Önerme 4.61. $S^{(i)} =< 3, 3(k+i)+1, 3k+2 >$, $i = 0, 1$ *ve* $k \in \mathbb{N}$ *olsun. Bu durumda* $S^{(i)}$ *nin minimal temsili*

$$\rho = \{((2k+1+i)x_1, x_2 + x_3), (2x_2, kx_1 + x_3), (2x_3, (k+1+i)x_1 + x_2)\}$$

dir. Bu yazım sıralanış dışında tek türlüdür.

İspat. Katlılığı 3 olan Arf nümerik semigrupların parametrizasyonundan iki durum söz konusudur:

1) $i = 0$ durumunda, $S^{(0)} = \langle 3, 3k+1, 3k+2\rangle$ dir ve burada $c = 3k$ ve $k \geq 1$ dir. G_n, $n \in S^{(0)} \backslash \{0\}$ için bağlantılı değilse Rosales ve Garcia-Sanchez (2009) deki Teorem 8.19 dan

$$n \in (\{Ap(S^{(0)}, 3) \backslash \{0\}\} + \{3k+1, 3k+2\}) = \{6k+2, 6k+3, 6k+4\}$$

dir. $n \in S^{(0)}$ için $\varphi^{-1}(n)$ tek R-sınıfa sahipse $\rho_n = \emptyset$ dir. $n = 6k+2$ olsun. $\varphi^{-1}(6k+2) = \{2x_2, kx_1 + x_3\}$ ve R-sınıfları $Y_1 = [2x_2]_R$, $Y_2 = [kx_1 + x_3]_R$ dir. Böylece, $\rho_{6k+2} = (2x_2, kx_1 + x_3)$ dür. **Çizelge 4.6** da $n \in S^{(0)}$ için G_n ve $\rho_n \neq \emptyset$ listelenmiştir.

Çizelge 4.6. $S^{(0)} = \langle 3, 3k+1, 3k+2\rangle$ semigrubunun minimal temsili

$G_{6k+2} = \left(\{3, 3k+1, 3k+2\}, \{\overline{3(3k+2)}\}\right),$	$\rho_{6k+2} = (2x_2, kx_1 + x_3)$
$G_{6k+3} = \left(\{3, 3k+1, 3k+2\}, \{\overline{(3k+1)(3k+2)}\}\right),$	$\rho_{6k+3} = ((2k+1)x_1, x_2 + x_3)$
$G_{6k+4} = \left(\{3, 3k+1, 3k+2\}, \{\overline{3(3k+1)}\}\right),$	$\rho_{6k+4} = (2x_3, (k+1)x_1 + x_2)$

ρ nun herhangi bir temsili 3 elemanlı olduğundan

$$\rho = \cup_{n \in S^{(0)}} \rho_n = \{((2k+1)x_1, x_2 + x_3), (2x_2, kx_1 + x_3), (2x_3, (k+1)x_1 + x_2)\}$$

dir ve bu yazım sıralanış dışında tek türlüdür.

(2) $i = 1$ durumunda, $S^{(1)} =< 3, 3k+2, 3(k+1)+1 >$ dir ve burada $c = 3k+2$ ve $k \in \mathbb{N}$ dir.

$$(Ap(S^{(1)}, 3) \backslash \{0\}) + \{3k+2, 3k+4\} = \{6k+4, 6k+6, 6k+8\}$$

olduğundan $n \in S^{(1)}$ için $\rho_n \neq \emptyset$ ile **Çizelge 4.7** elde edilir.

Çizelge 4.7. $S^{(1)} = \langle 3, 3k+2, 3(k+1)+1\rangle$ semigrubunun minimal temsili

$G_{6k+4} = \left(\{3, 3k+2, 3k+4\}, \{\overline{3(3k+4)}\}\right),$	$\rho_{6k+4} = (2x_2, kx_1 + x_3)$
$G_{6k+6} = \left(\{3, 3k+2, 3k+4\}, \{\overline{(3k+2)(3k+4)}\}\right),$	$\rho_{6k+6} = ((2k+2)x_1, x_2 + x_3)$
$G_{6k+8} = \left(\{3, 3k+2, 3k+4\}, \{\overline{3(3k+2)}\}\right),$	$\rho_{6k+8} = (2x_3, (k+2)x_1 + x_2)$

Böylece,

$$\rho = \cup_{n \in S^{(1)}} \rho_n = \{((2k+2)x_1, x_2 + x_3), (2x_2, kx_1 + x_3), (2x_3, (k+2)x_1 + x_2)\},$$

dir ve bu yazım sıralanış dışında tek türlüdür. □

Önerme 4.62. $c = 4k + 3,\ k \in \mathbb{N}$ *için* $S = \langle 4, c, c + 2, c + 3\rangle$ *ise* S *nin minimal temsili*

$$\rho = \{(2x_2, x_4 + kx_1), (x_2 + x_3, (2k + 2)x_1), (x_2 + x_4, x_3 + (k + 1)x_1),$$
$$(2x_3, 2x_2 + x_1), (x_3 + x_4, x_2 + (k + 2)x_1), (2x_4, (2k + 3)x_1)\} \text{ dir.}$$

S, yazılış dışında 4 farklı minimal temsile sahiptir ve bunlardan uygun şekilde herhangi biri ***Çizelge 4.8*** *den seçilebilir.*

Çizelge 4.8. $c = 4k+3,\ k \in \mathbb{N}$ için $S = \langle 4, c, c+2, c+3\rangle$ semigrubunun minimal temsili

Graf	Bağlantılı bileşenler	Bağlantılar : ρ_n
G_{8k+6}	$\{4, 4k + 6\}, \{4k + 3\}$	$(2x_2, x_4 + kx_1)$
G_{8k+8}	$\{4\}, \{4k + 3, 4k + 5\}$	$(x_2 + x_3, (2k + 2)x_1)$
G_{8k+9}	$\{4k + 3, 4k + 6\}, \{4, 4k + 5\}$	$(x_2 + x_4, x_3 + (k + 1)x_1)$
G_{8k+10}	$\{4k + 5\}, (\{4, 4k + 3\} \vee \{4, 4k + 6\})$	$(2x_3, 2x_2 + x_1) \vee$ $(2x_3, (k + 1)x_1 + x_4)$
G_{8k+11}	$\{4k + 5, 4k + 6\}, \{4, 4k + 3\}$	$(x_3 + x_4, x_2 + (k + 2)x_1)$
G_{8k+12}	$\{4k + 6\}, (\{4\} \vee \{4, 4k + 3, 4k + 5\})$	$(2x_4, (2k + 3)x_1) \vee$ $(2x_4, x_1 + x_2 + x_3)$

İspat. $c = 4k + 3$ ve $k \in \mathbb{N}$ için $S = \langle 4, 4k + 3, 4k + 5, 4k + 6\rangle$ dır. Rosales ve Garcia-Sanchez (2009) deki Teorem 8.19 dan, $(Ap(S, 4)\setminus \{0\}) + \{4k + 3, 4k + 5, 4k + 6\}$ kümesi

$$\{8k + 6, 8k + 8, 8k + 9, 8k + 10, 8k + 11, 8k + 12\}$$

ye eşittir ve bu kümenin herhangi bir n elemanı için $\varphi^{-1}(n)$ nin R-sınıflarını bulmalıyız. $n = 8k + 10$ alalım. Diğer durumlar benzer şekilde ispatlanır.

$$\varphi^{-1}(8k + 10) = \{(k + 1)x_1 + x_4, 2x_3, 2x_2 + x_1\}$$

dir. Burada $Y_1 = \{(k + 1)x_1 + x_4, 2x_2 + x_1\}, Y_2 = \{2x_3\}$ olmak üzere iki tane R-sınıfı vardır. Böylece, $\rho_{8k+10} = \{(2x_3, 2x_2 + x_1)\}$ veya $\rho_{8k+10} = \{(2x_3, (k + 1)x_1 + x_4)\}$ seçilebilir. □

Önerme 4.63. $k \in \mathbb{N}, i = 0, 1$ *ve* $t \in \{1, \ldots, k\}$ *için* $S^{(i)} = \langle 4, 4t+2, 4(k+i)+1, 4k+3\rangle$ *olsun.* $S^{(i)}$ *nin minimal temsili*

$$\begin{aligned}\rho = \{ \quad & (2x_2, (2t + 1)\, x_1), (x_2 + x_3, tx_1 + x_4), (x_2 + x_4, x_3 + (t + 1)x_1),\\ & (2x_3, x_2 + (2k - t + i)\, x_1), (x_3 + x_4, 2x_2 + (2k - 2t + i)x_1),\\ & (2x_4, (2k - t + 1 + i)x_1 + x_2)\}\end{aligned}$$

*dir. $i = 0$ durumunda, $t = k$ ise $S^{(0)}$ ın minimal temsillerinin sayısı 2, diğer durumlarda ise 4 tür. (Sıralanış dışında) $S^{(0)}$ ın herhangi bir minimal temsili **Çizelge 4.9** dan seçilebilir.*

Çizelge 4.9. $S^{(0)} = \langle 4, 4t+2, 4k+1, 4k+3 \rangle$ semigrubunun minimal temsili

Graf	Bağlantılı bileşenler	Bağlantılar : ρ_n
G_{8t+4}	$\{4t+2\}, \{4\}$	$(2x_2, (2t+1)\,x_1)$
$G_{4t+4k+3}$	$\{4t+2, 4k+1\}, \{4, 4k+3\}$	(x_2+x_3, tx_1+x_4)
$G_{4t+4k+5}$	$\{4t+2, 4k+3\}, \{4, 4k+1\}$	$(x_2+x_4, x_3+(t+1)x_1)$
G_{8k+2}	$\{4k+1\}, \{4, 4t+2\}$	$(2x_3, x_2+(2k-t)\,x_1)$
G_{8k+4}	$\{4k+1, 4k+3\}, (\{4, 4t+2\} \vee \{4\})$	$(x_3+x_4, 2x_2+(2k-2t)x_1) \vee$ $(x_3+x_4, (2k+1)x_1)$
G_{8k+6}	$\{4k+3\}, (\{4, 4t+2\} \vee \{4, 4k+1\})$	$(2x_4, (2k-t+1)x_1+x_2) \vee$ $(2x_4, x_1+2x_3)$

*$i = 1$ durumunda, $S^{(1)}$ in farklı minimal temsilleri sayısı 4 (sıralanış dışında) tür. $S^{(1)}$ ini herhangi bir minimal temsili **Çizelge 4.10** dan seçilebilir.*

Çizelge 4.10. $S^{(1)} = \langle 4, 4t+2, 4k+3, 4k+5 \rangle$ semigrubunun minimal temsili

Graf	Bağlantılı bileşenler	Bağlantılar : ρ_n
G_{8t+4}	$\{4t+2\}, \{4\}$	$(2x_2, (2t+1)\,x_1)$
$G_{4t+4k+5}$	$\{4t+2, 4k+3\}, \{4, 4k+5\}$	(x_2+x_3, tx_1+x_4)
$G_{4t+4k+7}$	$\{4k+2, 4k+5\}, \{4, 4k+3\}$	$(x_2+x_4, x_3+(t+1)\,x_1)$
G_{8k+6}	$\{4k+3\}, \{4, 4t+2\}$	$(2x_3, x_2+(2k-t+1)\,x_1)$
G_{8k+8}	$\{4k+3, 4k+5\}, (\{4, 4t+2\} \vee \{4\})$	$(x_3+x_4, 2x_2+(2k-2t+1)x_1)$ $\vee (x_3+x_4, (2k+2)x_1)$
G_{8k+10}	$\{4k+5\}, (\{4, 4t+2\} \vee \{4, 4k+3\})$	$(2x_4, (2k-t+2)x_1+x_2) \vee$ $(2x_4, x_1+2x_3)$

İspat. $i = 0$ için $S^{(0)} = \langle 4, 4t+2, 4k+1, 4k+3 \rangle$ dir ve burada $c = 4k$, $k \in \mathbb{N}$, $t \in \{1, \ldots, k\}$ dır. $(Ap(S^{(0)}, 4) \setminus \{0\}) + \{4t+2, 4k+1, 4k+3\}$ kümesi

$$\{8t+4, 4t+4k+3, 4t+4k+5, 8k+2, 8k+4, 8k+6\}$$

ya eşittir. R-sınıflarının hesaplanmasından sonra elde edilen bağlantılar **Çizelge 4.9** da verilmiştir. Burada, $t = k$ ise G_{8t+4} ve G_{8k+4} grafları aynıdır. $S^{(0)}$ ın bir minimal temsili

$$\rho = \{(2x_2, (2t+1)\,x_1), (x_2+x_3, tx_1+x_4), (x_2+x_4, x_3+(t+1)x_1),$$

$$(2x_3, x_2+(2k-t)\,x_1), (x_3+x_4, 2x_2+(2k-2t)x_1), (2x_4, (2k-t+1)x_1+x_2)\}$$

dir.

$i = 1$ için $S^{(1)} = \langle 4, 4t{+}2, 4k{+}3, 4k{+}5\rangle$ dir ve burada, $c = 4k{+}2, k \in \mathbb{N}, t \in \{1, \ldots, k\}$ dir. $(Ap(S^{(1)}, 4)\setminus \{0\}) + \{4t + 2, 4k + 3, 4k + 5\}$ kümesi ve

$$\{8t + 4, 4t + 4k + 5, 4t + 4k + 7, 8k + 6, 8k + 8, 8k + 10\}$$

çakışır. R-sınıflarının hesaplanmasından sonra elde edilen bağlantılar **Çizelge 4.10** da verilmiştir. $S^{(1)}$ in bir minimal temsili

$\rho = \{(2x_2, (2t + 1)\, x_1), (x_2 + x_3, tx_1 + x_4), (x_2 + x_4, x_3 + (t + 1)\, x_1), (2x_3, x_2 + (2k - t + 1)\, x_1), (x_3 + x_4, 2x_2 + (2k - 2t + 1)x_1), (2x_4, (2k - t + 2)x_1 + 2x_3)\}$

olur. Böylece, ispat doğrudan elde edilir. □

Buradan sonraki çizelgelerdeki "iki tane seçim" ifadesi verilen temsillerden herhangi iki tanesinin seçilebileceğini ifade etmektedir.

Önerme 4.64. *$c = 5k$, $k \geq 2$ olsun. aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

(i) $S = \langle 5, c - 2, c + 1, c + 2, c + 4\rangle$ ise S nin bir minimal temsili

$\rho = \{(2x_2, (k - 1)\, x_1 + x_3), (x_2 + x_3, (k - 1)x_1 + x_5), (x_2 + x_4, 2kx_1), (2x_3, x_4 + kx_1), (2x_3, x_2 + x_5), (x_3 + x_4, x_2 + (k + 1)x_1), (2x_4, x_1 + x_2 + x_3), (x_3 + x_5, x_1 + x_2 + x_4), (x_4 + x_5, 2(x_1 + x_2)), (2x_5, x_1 + x_3 + x_4)\}$

*tür. S nin sıralanış dışında herhangi bir minimal temsili uygun şekilde **Çizelge 4.11** den seçilebilir.*

(ii) $S = \langle 5, c + 1, c + 2, c + 3, c + 4\rangle$ ise S nin bir minimal temsili

$\rho = \{(2x_2, kx_1 + x_3), (x_2 + x_3, kx_1 + x_4), (2x_3, x_5 + kx_1), (2x_3, x_2 + x_4), ((2k + 1)x_1, x_3 + x_4), ((2k + 1)x_1, x_2 + x_5), (2x_4, (k + 1)x_1 + x_2), (2x_4, x_3 + x_5), (x_4 + x_5, x_1 + 2x_2), (2x_5, x_1 + x_2 + x_3)\}$

*tür. S nin sıralanış dışında herhangi bir minimal temsili **Çizelge 4.12** den seçilebilir.*

İspat. (i) $S = \langle 5, 5k - 2, 5k + 1, 5k + 2, 5k + 4\rangle$ için $L := (Ap(S, 5)\setminus \{0\}) + \{5k - 2, 5k + 1, 5k + 2, 5k + 4\}$ şeklinde tanımlansın. Buradan,

$$L = \{10k - 4, 10k - 1, 10k, 10k + 2, 10k + 3, 10k + 4, 10k + 5, 10k + 6, 10k + 8\}$$

elde edilir.

$n = 10k + 2$ ise $\varphi^{-1}(10k + 2) = \{2x_3, x_4 + kx_1, x_2 + x_5\}$ tir. S nin R-sınıflarının $Y_1 = [2x_3]_R$, $Y_2 = [x_4 + kx_1]_R$, $Y_3 = [x_2 + x_5]_R$ olduğunu görmek kolaydır ve buradan $\rho_{10k+2} = \{(2x_3, x_4 + kx_1), (2x_3, x_2 + x_5), (x_2 + x_5, x_4 + kx_1)\}$ alınır.

Çizelge 4.11. $S = \langle 5, c-2, c+1, c+2, c+4 \rangle$ semigrubunun minimal temsili

Graf	Bağlantılı bileşenler	Bağlantılar : ρ_n
G_{10k-4}	$\{5k-2\}, \{5, 5k+1\}$	$(2x_2, (k-1)\,x_1 + x_3)$
G_{10k-1}	$\{5k-2, 5k+1\}, \{5, 5k+4\}$	$(x_2 + x_3, (k-1)x_1 + x_5)$
G_{10k}	$\{5k-2, 5k+2\}, \{5\}$	$(x_2 + x_4, 2kx_1)$
G_{10k+2}	$\{5k+1\}$, $\{5, 5k+2\}, \{5k-2, 5k+4\}$	iki tane seçim $(2x_3, x_4 + kx_1)$, $(x_4 + kx_1, x_2 + x_5), (2x_3, x_2 + x_5)$
G_{10k+3}	$\{5k+1, 5k+2\}, \{5, 5k-2\}$	$(x_3 + x_4, x_2 + (k+1)x_1)$
G_{10k+4}	$\{5k+2\}$, $(\{5, 5k+4\} \vee \{5, 5k-2, 5k+1\})$	$(2x_4, kx_1 + x_5) \vee$ $(2x_4, x_1 + x_2 + x_3)$
G_{10k+5}	$\{5k+1, 5k+4\}$, $(\{5\} \vee \{5, 5k-2, 5k+2\})$	$(x_3 + x_5, (2k+1)x_1) \vee$ $(x_3 + x_5, x_1 + x_2 + x_4)$
G_{10k+6}	$\{5k+2, 5k+4\}$, $(\{5, 5k+1\} \vee \{5, 5k-2\})$	$(x_4 + x_5, x_3 + (k+1)x_1) \vee$ $(x_4 + x_5, 2\,(x_1 + x_2))$
G_{10k+8}	$\{5k+4\}$, $(\{5, 5k-2\} \vee \{5, 5k+1, 5k+2\})$	$(2x_5, x_2 + (k+2)x_1) \vee$ $(2x_5, x_1 + x_3 + x_4)$

Çizelge 4.12. $S = \langle 5, c+1, c+2, c+3, c+4 \rangle$ semigrubunun minimal temsili

Graf	Bağlantılı bileşenler	Bağlantılar : ρ_n
G_{10k+2}	$\{5k+1\}, \{5, 5k+2\}$	$(2x_2, kx_1 + x_3)$
G_{10k+3}	$\{5k+1, 5k+2\}, \{5, 5k+3\}$	$(x_2 + x_3, kx_1 + x_4)$
G_{10k+4}	$\{5k+2\}, \{5, 5k+4\}, \{5k+1, 5k+3\}$	iki tane seçim $(2x_3, x_5 + kx_1)$, $(x_2 + x_4, x_5 + kx_1)$, $(2x_3, x_2 + x_4)$
G_{10k+5}	$\{5\}, \{5k+2, 5k+3\}, \{5k+1, 5k+4\}$	iki tane seçim $((2k+1)\,x_1, x_3 + x_4)$, $(x_3 + x_4, x_2 + x_5)$, $((2k+1)\,x_1, x_2 + x_5)$
G_{10k+6}	$\{5k+3\}, \{5, 5k+1\}, \{5k+2, 5k+4\}$	iki tane seçim $(2x_4, (k+1)\,x_1 + x_2)$, $((k+1)x_1 + x_2, x_3 + x_5)$, $(2x_4, x_3 + x_5)$
G_{10k+7}	$\{5k+3, 5k+4\}, (\{5, 5k+2\} \vee \{5, 5k+1\})$	$(x_4 + x_5, x_3 + (k+1)x_1)$ $\vee\ (x_4 + x_5, x_1 + 2x_2)$
G_{10k+8}	$\{5k+4\}, (\{5, 5k+3\} \vee \{5, 5k+1, 5k+2\})$	$(2x_5, x_4 + (k+1)x_1) \vee$ $(2x_5, x_1 + x_2 + x_3)$

$$n = 10k+4 \quad \Rightarrow \varphi^{-1}(10k+4) = \{2x_4, kx_1 + x_5,\ x_1 + x_2 + x_3\}$$
$$\Rightarrow Y_1 = [2x_4]_R, Y_2 = [kx_1 + x_5]_R = [x_1 + x_2 + x_3]_R$$
$$\Rightarrow \rho_{10k+4} = \{(2x_4, kx_1 + x_5)\} \text{ veya } \rho_{10k+4} = \{(2x_4, x_1 + x_2 + x_3)\}$$

dir. R-sınıflarının hesaplanmasından sonra bağlantılar **Çizelge 4.11** de verilmiştir. Buradan, ispat direk hesaplamalar ile elde edilmiş olur.

(ii) $S = \langle 5, 5k+1, 5k+2, 5k+3, 5k+4 \rangle$ için

$$(Ap(S,5)\backslash\{0\}) + \{5k+1, 5k+2, 5k+3, 5k+4\} = \{10k+2, 10k+3, 10k+4, 10k+5, 10k+6, 10k+7, 10k+8\}$$

dir. R-sınıflarının hesaplanmasından sonra bağlantılar **Çizelge 4.12** de verilmiştir. Buradan, ispat direk hesaplamalar ile elde edilmiş olur. □

Önerme 4.65. *$c = 5k+3,\ k \in \mathbb{N}$ için $S = \langle 5, c, c+1, c+3, c+4 \rangle$ olsun. S nin minimal temsili*

$\rho = \{(2x_2, kx_1 + x_4), (x_2 + x_3, kx_1 + x_5), (2x_3, (k+1)x_1 + x_2), (x_2 + x_4, (k+1)x_1 + x_3), ((2k+2)x_1, x_2 + x_5), ((2k+2)x_1, x_3 + x_4), (x_3 + x_5, 2x_2 + x_1), (2x_4, x_1 + x_2 + x_3), (x_4 + x_5, 2x_3 + x_1), (2x_5, x_1 + x_2 + x_4)\}$

*tür. S nin sıralanış dışında herhangi bir minimal temsili uygun şekilde **Çizelge 4.13** den seçilebilir.*

Çizelge 4.13. $S = \langle 5, c, c+1, c+3, c+4 \rangle$ semigrubunun minimal temsili

Graf	Bağlantılı bileşenler	Bağlantılar : ρ_n
G_{10k+6}	$\{5k+3\}, \{5, 5k+6\}$	$(2x_2, kx_1 + x_4)$
G_{10k+7}	$\{5k+3, 5k+4\}, \{5, 5k+7\}$	$(x_2 + x_3, kx_1 + x_5)$
G_{10k+8}	$\{5k+4\}, \{5, 5k+3\}$	$(2x_3, (k+1)\,x_1 + x_2)$
G_{10k+9}	$\{5k+3, 5k+6\}, \{5, 5k+4\}$	$(x_2 + x_4, (k+1)\,x_1 + x_3)$
G_{10k+10}	$\{5\}, \{5k+3, 5k+7\}, \{5k+4, 5k+6\}$	iki tane seçim $((2k+2)x_1, x_2 + x_5)$, $(x_2 + x_5, x_3 + x_4)$, $((2k+2)x_1, x_3 + x_4)$
G_{10k+11}	$\{5k+4, 5k+7\}$, $(\{5, 5k+3\} \vee \{5, 5k+6\})$	$(x_3 + x_5, 2x_2 + x_1) \vee$ $(x_3 + x_5, (k+1)\,x_1 + x_4)$
G_{10k+12}	$\{5k+6\}$, $(\{5, 5k+7\} \vee \{5, 5k+3, 5k+4\})$	$(2x_4, (k+1)\,x_1 + x_5) \vee$ $(2x_4, x_1 + x_2 + x_3)$
G_{10k+13}	$\{5k+6, 5k+7\}$, $(\{5, 5k+4\} \vee \{5, 5k+3\})$	$(x_4 + x_5, 2x_3 + x_1) \vee$ $(x_4 + x_5, (k+2)\,x_1 + x_2)$
G_{10k+14}	$\{5k+7\}, (\{5, 5k+4\} \vee$ $\{5, 5k+3, 5k+6\})$	$(2x_5, x_3 + (k+2)x_1) \vee$ $(2x_5, x_1 + x_2 + x_4)$

İspat. $S = \langle 5, 5k+3, 5k+4, 5k+6, 5k+7 \rangle$ nümerik semigrubu için $(Ap(S,5)\backslash\{0\}) + \{5k+3, 5k+4, 5k+6, 5k+7\}$ kümesi $\{10k+6, 10k+7, 10k+8, 10k+9, 10k+$

$10, 10k+11, 10k+12, 10k+13, 10k+14\}$ kümesine eşittir. R-sınıflarının hesaplanmasından sonra bağlantılar **Çizelge 4.13** de verilmiştir. Buradan, ispat doğrudan hesaplamalar ile elde edilmiş olur. □

Önerme 4.66. *$c = 5k+2,\ k \in \mathbb{N}$ için $S = \langle 5, c, c+1, c+2, c+4 \rangle$ olsun. S nin bir minimal temsili*

$\rho = \{(2x_2, kx_1+x_4), (x_2+x_3, (2k+1)x_1), (2x_3, x_5+kx_1), (2x_3, x_2+x_4), (x_3+x_4, x_2+(k+1)x_1), (2x_4, (k+1)x_1+x_3), (2x_4, x_2+x_5), (x_3+x_5, x_1+2x_2), (x_4+x_5, x_1+x_2+x_3), (2x_5, x_1+x_3+x_4)\}$

tür. S nin sıralanış dışında herhangi bir minimal temsili uygun şekilde ***Çizelge 4.14*** *den seçilebilir.*

Çizelge 4.14. $S = \langle 5, c, c+1, c+2, c+4 \rangle$ semigrubunun minimal temsili

Graf	Bağlantılı bileşenler	Bağlantılar : ρ_n
G_{10k+4}	$\{5k+2\}, \{5, 5k+4\}$	$(2x_2, kx_1+x_4)$
G_{10k+5}	$\{5k+2, 5k+3\}, \{5\}$	$(x_2+x_3, (2k+1)x_1)$
G_{10k+6}	$\{5k+3\}, \{5, 5k+6\}, \{5k+2, 5k+4\}$	iki tane seçim $(2x_3, x_5+kx_1)$, (x_2+x_4, x_5+kx_1), $(2x_3, x_2+x_4)$
G_{10k+7}	$\{5k+3, 5k+4\}, \{5, 5k+2\}$	$(x_3+x_4, x_2+(k+1)x_1)$
G_{10k+8}	$\{5k+4\}, \{5, 5k+3\}, \{5k+2, 5k+6\}$	iki tane seçim $(2x_4, (k+1)\,x_1+x_3)$, $((k+1)x_1+x_3, x_2+x_5)$, $(2x_4, x_2+x_5)$
G_{10k+9}	$\{5k+3, 5k+6\}, (\{5, 5k+4\}$ $\vee \{5, 5k+2\})$	$(x_3+x_5, (k+1)x_1+x_4)$ $\vee\ (x_3+x_5, x_1+2x_2)$
G_{10k+10}	$\{5k+4, 5k+6\}, (\{5, 5k+2, 5k+3\}$ $\vee \{5\})$	$(x_4+x_5, x_1+x_2+x_3) \vee$ $(x_4+x_5, (2k+2)\,x_1)$
G_{10k+12}	$\{5k+6\}, (\{5, 5k+2\}$ $\vee \{5, 5k+3, 5k+4\})$	$(2x_5, x_2+(k+2)x_1+x_2)$ $\vee\ (2x_5, x_1+x_3+x_4)$

İspat. $c = 5k+2$ ve $k \in \mathbb{N}$ olsun. $S = \langle 5, 5k+2, 5k+3, 5k+4, 5k+6 \rangle$ dır. $(Ap(S,5) \setminus \{0\}) + \{5k+2, 5k+3, 5k+4, 5k+6\}$ kümesi $\{10k+4, 10k+5, 10k+6, 10k+7, 10k+8, 10k+9, 10k+10, 10k+12\}$

kümesine eşittir. R-sınıflarının hesaplanmasından sonra bağlantılar **Çizelge 4.14** de verilmiştir. Buradan, ispat direk hesaplamalar ile elde edilmiş olur. □

Önerme 4.67. $c = 5k+4, k \in \mathbb{N}$ *olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

(i) $S = \langle 5, c-2, c, c+2, c+4\rangle$ *ise* S *nin minimal temsili*

$\rho = \{(2x_2, kx_1+x_3), (x_2+x_3, kx_1+x_4), (2x_3, x_5+kx_1), (2x_3, x_2+x_4), ((2k+2)x_1, x_2+x_5), ((2k+2)x_1, x_3+x_4), (2x_4, (k+2)x_1+x_2), ((k+2)x_1+x_2, x_3+x_5), (x_4+x_5, 2(x_1+x_2)), (2x_5, 2x_1+x_2+x_3)\}$

tür. S *nin sıralanış dışında herhangi bir minimal temsili uygun şekilde* ***Çizelge 4.15*** *den seçilebilir.*

Çizelge 4.15. $S = \langle 5, c-2, c, c+2, c+4\rangle$ semigrubunun minimal temsili

Graf	Bağlantılı bileşenler	Bağlantılar : ρ_n
G_{10k+4}	$\{5k+2\}, \{5, 5k+4\}$	$(2x_2, kx_1+x_3)$
G_{10k+6}	$\{5k+2, 5k+4\}, \{5, 5k+6\}$	(x_2+x_3, kx_1+x_4)
G_{10k+8}	$\{5k+4\}, \{5, 5k+8\}, \{5k+2, 5k+6\}$	iki tane seçim $(2x_3, x_5+kx_1)$, $(2x_3, x_2+x_4)$, (x_2+x_4, x_5+kx_1),
G_{10k+10}	$\{5\}, \{5k+2, 5k+8\}, \{5k+4, 5k+6\}$	iki tane seçim $((2k+2)\,x_1, x_2+x_5)$, (x_2+x_5, x_3+x_4), $((2k+2)\,x_1, x_3+x_4)$
G_{10k+12}	$\{5k+6\}, \{5, 5k+2\}, \{5k+4, 5k+8\}$	iki tane seçim $(2x_4, (k+2)\,x_1+x_2)$, $(2x_4, x_3+x_5)$, $((k+2)x_1+x_2, x_3+x_5)$,
G_{10k+14}	$\{5k+6, 5k+8\}$, $(\{5, 5k+4\} \vee \{5, 5k+2\})$	$(x_4+x_5, x_3+(k+2)x_1) \vee$ $(x_4+x_5, 2\,(x_1+x_2))$
G_{10k+16}	$\{5k+8\}$, $(\{5, 5k+6\} \vee \{5, 5k+2, 5k+4\})$	$(2x_5, x_4+(k+2)x_1) \vee$ $(2x_5, 2x_1+x_2+x_3)$

(ii) $S = \langle 5, c, c+2, c+3, c+4\rangle$ *ise* S *nin minimal temsili*

$\rho = \{(2x_2, kx_1+x_5), (x_2+x_3, (2k+2)x_1), (x_2+x_4, x_3+(k+1)x_1), (2x_3, x_4+(k+1)x_1), (2x_3, x_2+x_5), (x_3+x_4, 2x_2+x_1), (2x_4, (k+2)x_1+x_2), ((k+2)x_1+x_2, x_3+x_5), (x_4+x_5, x_1+x_2+x_3), (2x_5, x_1+x_2+x_4)\}$ *tür.*

S *nin sıralanış dışında herhangi bir minimal temsili uygun şekilde* ***Çizelge 4.16*** *dan seçilebilir.*

İspat. (i) $S = \langle 5, 5k+2, 5k+4, 5k+6, 5k+8\rangle$ için

$(Ap(S,5)\backslash\{0\}) + \{5k+2, 5k+4, 5k+6, 5k+8\} = \{10k+4, 10k+6, 10k+8, 10k+10, 10k+12, 10k+14, 10k+16\}$ dır.

(ii) $S = \langle 5, 5k+4, 5k+6, 5k+7, 5k+8 \rangle$ için

$(Ap(S,5)\backslash\{0\}) + \{5k+4, 5k+6, 5k+7, 5k+8\} = \{10k+8, 10k+10, 10k+11, 10k+12, 10k+13, 10k+14, 10k+15, 10k+16\}$ dır.

(i) ve (ii) için R-sınıflarının hesaplanmasından sonra bağlantılar sırasıyla **Çizelge 4.15** ve **Çizelge 4.16** da verilmiştir. Buradan, ispat direk hesaplamalar ile elde edilmiş olur. □

Çizelge 4.16. $S = \langle 5, c, c+2, c+3, c+4 \rangle$ semigrubunun minimal temsili

Graf	Bağlantılı bileşenler	Bağlantılar : ρ_n
G_{10k+8}	$\{5k+4\}, \{5, 5k+8\}$	$(2x_2, kx_1 + x_5)$
G_{10k+10}	$\{5k+4, 5k+6\}, \{5\}$	$(x_2 + x_3, (2k+2)x_1)$
G_{10k+11}	$\{5k+4, 5k+7\}, \{5, 5k+6\}$	$(x_2 + x_4, x_3 + (k+1)x_1)$
G_{10k+12}	$\{5k+6\}, \{5, 5k+7\}, \{5k+4, 5k+8\}$	iki tane seçim $(2x_3, x_4 + (k+1)x_1)$, $(x_2 + x_5, x_4 + (k+1)x_1)$, $(2x_3, x_2 + x_5)$
G_{10k+13}	$\{5k+6, 5k+7\}$, $(\{5, 5k+8\} \vee \{5, 5k+4\})$	$(x_3 + x_4, (k+1)\,x_1 + x_5) \vee$ $(x_3 + x_4, 2x_2 + x_1)$
G_{10k+14}	$\{5k+7\}, \{5, 5k+4\}, \{5k+6, 5k+8\}$	iki tane seçim $(2x_4, (k+2)x_1 + x_2)$, $((k+2)x_1 + x_2, x_3 + x_5)$, $(2x_4, x_3 + x_5)$
G_{10k+15}	$\{5k+7, 5k+8\}$, $(\{5, 5k+4, 5k+6\} \vee \{5\})$	$(x_4 + x_5, x_1 + x_2 + x_3) \vee$ $(x_4 + x_5, (2k+3)\,x_1)$
G_{10k+16}	$\{5k+8\}$, $(\{5, 5k+6\} \vee \{5, 5k+4, 5k+7\})$	$(2x_5, (k+2)x_1 + x_3) \vee$ $(2x_5, x_1 + x_2 + x_4)$

5. SONUÇLAR

Literatür taramasında, pozitif tamsayı katsayılı homojen olmayan lineer denklem sistemlerinin negatif olmayan tamsayı çözümlerinin bulunması ve nümerik semigruplar ile ilgili çalışmaların denk olduğu görülmüştür, bu problem sayılar teorisinde önemli bir yer tutmaktadır. Nümerik semigruplar, halka teorisindeki karşılıkları ve kodlama teorisindeki uygulamaları açısından geniş çalışma alanlarına da hitap etmektedir. Diğer yandan, nümerik semigrupların kombinatorik özellikleri ile ilgili çalışmalar oldukça yenidir.

Bu tez çalışmasında, Arf parçalanışının ayrışımı yapılarak bir Arf nümerik semigrubun ilkel semigruplar cinsinden bir ifadesine yer verilmiştir. Ayrıca, Karakaş (2018) da verilen parametreleme yöntemiyle katlılığı 6 dan küçük Arf nümerik semigrupların minimal temsilleri incelenmiştir.

Constantin vd. (2015); Karakaş ve Tutaş (2020); Tutaş (2019); Tutaş vd. (2019) den her Young diagramın, bir nümerik kümeye karşılık geldiği bilinmektedir. $\mathbb{P}$: Parçalanışlar kümesi, $\mathbb{Y}$: Young diyagramları kümesi ve $\mathbb{S}$: Has nümerik kümeler kümesi olmak üzere $\alpha : \mathbb{P} \to \mathbb{Y}$, $\alpha(\lambda) = Y_\lambda$ ve $\beta : \mathbb{S} \to \mathbb{Y}$, $\beta(S) = Y_S$ ile tanımlanan fonksiyonlar birebir örtendir. Bu fonksiyonlar, $\mathbb{P}$ ve has nümerik semigruplar kümesi arasında düşünüldüğünde özel parçalanış ailelerinin tanımlanmasına olanak sağlar. Arf parçalanışlarının alt aileleri bu yöntem kullanılarak incelenmiştir.

Bir λ parçalanışı $\beta^{-1}\alpha(\lambda)$ nın, sırasıyla, bir AS-semigrup, bir ASA-semigrup olması durumlarına göre, sırasıyla, AS-parçalanış, ASA-parçalanış olarak isimlendirilmektedir. Eğer $\beta^{-1}\alpha(\lambda)$, bir Arf $\mathcal{C}$-semigrup ise λ, bir Arf $\mathcal{C}$-parçalanış; $\beta^{-1}\alpha(\lambda)$, hem bir AS-parçalanış hem de bir Arf $\mathcal{C}$-parçalanış ise λ bir ASA $\mathcal{C}$-parçalanış olarak adlandırılmıştır. Arf parçalanışlarının oluşturulan alt ailelerinin özellikleri incelenerek, verilen bir N pozitif tamsayının bu aile sınıflarına ait parçalanışlarının sayısı belirlenmiş ve bu sayılar çizelgeler halinde sunulmuştur.

İlk olarak AS-parçalanış, ASA-parçalanış ve karşılık gelen semigruplara ait sonuçlar ortaya konmuştur. $m \geq 2$ için $\{0, m, \to\}$ semigrubunun ASA-semigrup ve aynı zamanda $\mathcal{C}$-semigrup olduğu bilinmektedir. Bu semigruba karşılık gelen $[m-1]$ bir ASA $\mathcal{C}$-parçalanıştır. $\lambda = [\lambda_1, \lambda_1 - 1, \ldots, 1]$ bir basamak ASA-parçalanıştır, λ nın ASA $\mathcal{C}$-parçalanış olması için gerek ve yeter koşulun $\lambda_1 \leq 4$ olması olduğu görülmüştür. $N \geq 7$ için N tamsayısının ASA C- parçalanışları sayısı $n_{ASA\,C}\,(N)$ formülize edilmiştir.

$\lambda = [\lambda_1, \lambda_2]$ olsun. $\lambda_2 = 1$ için λ nın bir Arf $\mathcal{C}$-parçalanışı olması için gerek ve yeter koşul $\lambda_1 \geq 2$ olmasıdır. $\lambda_2 \neq 1$ durumunda λ nın bir Arf $\mathcal{C}$-parçalanış olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki durumlardan bir tanesinin sağlanmasıdır:

1. $\lambda_1 - \lambda_2 + 1$, tek asal sayı ve $\lambda_1 \geq 2\lambda_2$ dir.
2. $p \mid (\lambda_1 - \lambda_2 + 1)$ koşulunu sağlayan p asal sayısı için $p \geq \lambda_2 + 1$ ve $\lambda_1 - \lambda_2 + 1 \neq p$ dir.

Burada, λ bir Arf parçalanışı ise, $\lambda_2 \in \{2, 3\}$ için λ nın sınıflandırması λ_2 ye göre yapılabilir. $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]$ bir Arf parçalanış olsun. $i = 1, \ldots, n-1$ için $\lambda_1 - \lambda_{i+1} + i$ çift tamsayı ve $\lambda_{i+1} - \lambda_{i+2} \geq 2$ ise λ nın bir $ASA\ \mathcal{C}$-parçalanışı olmadığı görülmüştür.

Verilen bir $m \in \mathbb{N}$ çift tamsayısı için

$$\begin{aligned} i)\ & \{0, m, \rightarrow\}, \\ ii)\ & \{0, m, m+2, \rightarrow\}, \\ iii)\ & \{0, m, m+2, m+4, \rightarrow\}, \\ iv)\ & \{0, m, m+2, m+4, m+6, \rightarrow\}. \end{aligned}$$

durumlarından başka katlılığı m olan Arf C-semigrupların olmadığı görülmüştür.

m bir asal ve tek tamsayı olsun. Katlılığı $m \neq 3$ ve $k \in \mathbb{N}$ için $m+k$ dan sonra küçük elemanlara sahip olan tüm Arf C-semigruplar aşağıdaki formdadır.

$$\begin{aligned} i)\ & \{0, m, \rightarrow\}, \\ ii)\ & \{0, m, m+k, \rightarrow\}, \\ iii)\ & \{0, m, m+k, m+k+2, \rightarrow\}, \\ iv)\ & \{0, m, m+k, m+k+2, m+k+4, \rightarrow\} \\ v)\ & \{0, m, m+k, m+k+2, m+k+4, m+k+6, \rightarrow\}. \end{aligned}$$

m ve k nın durumlarına göre, Arf C-semigrupların hangi formda olduğu ve sayıları elde edilmiştir. Katlılığı $m = 3$ olan tüm Arf C-semigruplar, $\{0, 3, \rightarrow\}$, $\{0, 3, 6, \rightarrow\}$, $\{0, 3, 6, 8, \rightarrow\}$ ve $\{0, 3, 5, \rightarrow\}$ semigruplarından ibarettir.

$m \in \mathbb{N}$ tek sayı ve p, m yi bölen en küçük asal sayı, $n_{A\,C-sg.}(m)$ ise katlılığı m olan Arf C-semigruplarının sayısı olmak üzere

1. $p = 3$ ise $n_{A\,C-sg.}(m) = 4$ tür.
2. $p = 5$ ise $n_{A\,C-sg.}(m) = \begin{cases} 11, & m \equiv 1 \pmod 3 \\ 14, & m \equiv 2 \pmod 3 \end{cases}$
3. $p = 7$ ise $n_{A\,C-sg.}(m) = \begin{cases} 21, & m \equiv 1 \pmod 3 \\ 26, & m \equiv 2 \pmod 3 \end{cases}$

olduğu gösterilmiştir.

n-inci üçgensel sayı T_n, 1 den n ye kadar olan n doğal sayının toplamıdır. Bir tamsayının uzunluğu 3 ve daha küçük parçalarının sayısının bulunması kolaydır. Uzunluk arttıkça bu sayının belirlenmesi zorlaşmaktadır. Bu nedenle, T_n nin dört uzunluklu Arf parçalanışlarının sayısı hesaplanmış ve sınıflandırması yapılmıştır.

Bir N tamsayısının farklı parçalanışları içinde Arf parçalanışlarının küçük bir grubu oluşturduğu aynı zamanda, formülize edilen alt sınıfların Arf parçalanışları sayısının da Arf parçalanışları içinde küçük bir grubu oluşturduğu gözlemlenmiştir.

6. KAYNAKLAR

Andrews, G.E. and Eriksson, K. 2004. Integer Partitions. Cambridge University Press, Cambridge, 76 p.

Arf, C. 1948. Une interpretation algebrique de la suite des ordres de multiplicite d'une branche algebrique. *Proceedings of the London Mathematical Society*, s2-50(1): 256-287.

Barucci, V., Dobbs, D.E. and Fontana, M. 1997. Maximality Properties in Numerical Semigroups and Applications to One-dimensional Analytically Irreducible Local Domains. Memoirs of the American Mathematical Society: 125, 598, Providence, Rhode Island, 77 p.

Barucci, V. and Fröberg, R. 1997. One-dimensional almost Gorenstein rings. *Journal of Algebra*, 188(2): 418-442.

Branco, M.B., Ojeda, I. and Rosales, J.C. 2018. Almost symmetric numerical semigroups with given Frobenius number and type, arXiv:1806.11097v2.

Bras-Amoros, M. and De-Mier, A. 2007. Representation of numerical semigroups by dyck paths. *Semigroup Forum*, 75(3): 676-681.

Campillo, A., Farran, J.I. and Munuera, C. 2000. On the parameters of algebraic-geometry codes related to Arf semigroups. *IEEE Transactions on Information Theory*, 46(7): 2634-2638.

Constantin, H., Houston-Edward, B. and Kaplan, N. 2015. Numerical sets, core partitions and integer points in polytopes. arxiv:1509.06077v1.

D'Anna, M. 1998. Type sequences of numerical semigroups. *Semigroup Forum*, 56: 1-31.

D'Anna, M., Garcia-Sanchez, P.A., Micale, V. and Tozzo, L. 2018. Good subsemigroups of $\mathbb{N}^n$. *Internal Journal of Algebra and Computation*, 28(2), 179-206.

Farran, J.I., Garcia-Sanchez, P.A. and Heredia, B.A. 2018. On the second Feng-Rao distance of algebraic geometry codes related to Arf semigroups. *Designs, Codes and Cryptography*, 86: 2893-2916.

Fulton, W. 1997. Young Tableaux, With Application to Representation Theory and Geometry. Cambridge Univ Press, New York, 212 p.

Garcia-Sanchez, P.A., Heredia, B.A., Karakaş, H.I. and Rosales, J.C. 2017. Parametrizing Arf numerical semigroups, *Journal of Algebra and its Applications*, 16(11).

Garcia-Sanchez, P.A. and Ojeda, I. 2019. Almost symmetric numerical semigroups with high type. *Turkish Journal of Mathematics*, 43(5): 2499-2510.

Gümüşbaş, N. and Tutaş, N. 2020. A decomposition of Arf semigroups. *Filomat*, 34(2): 491-498.

Gümüşbaş, N., Tutaş, N. and Er, N. 2020. Almost symmetric Arf partitions. *Turkish Journal of Mathematics*, 44: 2185-2198.

İlhan, S. and Karakaş, H.I. 2017. Arf numerical semigroups. *Turkish Journal of Mathematics*, 41(6): 1448–1457.

Karakaş, H.I. 2018. Parametrizing numerical semigroups with multiplicity up to 5. *International Journal of Algebra and Computation*, 28(1): 69–95.

Karakaş, H.I. and Tutaş, N. 2020. A decomposition of partitions and numerical sets. *Semigroup Forum*, 101: 704-715.

Keith, W.J. and Nath, R. 2011. Partitions with prescribed hooksets. *Journal of Combinatorics and Number Theory*, 3(1): 39-50.

Lipman, J. 1971. Stable ideals and Arf rings. *American Journal of Mathematics*, 93(3): 649-685.

Marzuola, J. and Miller, A. 2010. Counting numerical sets with no small atoms. *Journal of Combinatorial Theory*, Series A, 117(6): 650–667.

Matthews, G.L. 2004. On numerical semigroups generated by generalized arithmetic sequences. *Communications in Algebra*, 32(9): 3459–3469.

Nari, H. 2013. Symmetries on almost symmetric numerical semigroups. *Semigroup Forum*, 86(1): 140-154.

Rosales, J.C., Garcia-Sanchez, P.A., Garcia-Garcia, J. and Branco, M. 2004. Arf numerical semigroups. *Journal of Algebra*, 276(1): 3–12.

Rosales, J.C. and Garcia-Sanchez, P.A. 2009. Numerical Semigroups. Springer, New York, 181 p.

Rosales, J.C. and Branco, M.B. 2021. Numerical semigroups closed under addition of their divisors. *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing*, 32: 665-680.

Tutaş, N. 2019. On partitions and Arf semigroups. *Open Mathematics*, 17(1): 343–355.

Tutaş, N., Karakaş, H.I. and Gümüşbaş, N. 2019. Young tableaux and Arf partitions. *Turkish Journal of Mathematics*, 43(1): 448–459.

ÖZGEÇMİŞ

Nihal GÜMÜŞBAŞ ÖZTÜRK

ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Doktora 2016-2023	Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Antalya
Yüksek Lisans 2013-2016	Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Antalya
Lisans 2007-2011	Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, İstanbul

MESLEKİ VE İDARİ GÖREVLER

Araştırma Görevlisi 2013-Devam Ediyor	Akdeniz Üniversitesi Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Antalya

ESERLER

1. Tutaş, N., Karakaş H.I. and Gümüşbaş, N. 2019. Young tableaux and Arf partitions. Turkish Journal of Mathematics, 43(1): 448–459.
2. Gümüşbaş, N. and Tutaş, N. 2020. A decomposition of Arf semigroups. Filomat, 34(2): 491-498.
3. Gümüşbaş, N., Tutaş, N. and Er N. 2020. Almost symmetric Arf partitions. Turkish Journal of Mathematics, 44: 2185-2198.