ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

77097

Hüseyin Rızkullah YERLİ

İKİ VE ÜÇ BOYUTLU DİNAMİK YAPI-ZEMİN ETKİLEŞİMİ PROBLEMLERİNİN SONLU VE SONSUZ ELEMANLAR KULLANILARAK ANALİZİ

77091

İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

ADANA, 1998

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİ VE ÜÇ BOYUTLU DİNAMİK YAPI-ZEMİN ETKİLEŞİMİ PROBLEMLERİNİN SONLU VE SONSUZ ELEMANLAR KULLANILARAK ANALİZİ

Hüseyin Rızkullah YERLİ

DOKTORA TEZİ

İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

Bu tez 23 / 01 / 1998 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Üyeleri Tarafından Oybirliği İle Kabul Edilmiştir.

Prof. Dr. Erhan KIRAL	**Prof. Dr. Yalçın MENGİ**	**Prof. Dr. Doğan TURHAN**
DANIŞMAN	**ÜYE**	**ÜYE**
Prof. Dr. Orhan AKSOĞAN	**Doç. Dr. A. Kamil TANRIKULU**	
ÜYE	**ÜYE**	

Bu tez Enstitümüz İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalında hazırlanmıştır.

Kod No: 422

T.C. ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ 1973

Prof. Dr. Aziz ERTUNÇ
Enstitü Müdürü

Bu Çalışma Çukurova Üniversitesi Araştırma Fonu Tarafından Desteklenmiştir.
Proje No: FBE.96.111

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

İÇİNDEKİLER **SAYFA**

ÖZ V

ABSTRACT VI

TEŞEKKÜR VII

SİMGELER VE KISALTMALAR VIII

ÇİZELGELER DİZİNİ XI

ŞEKİLLER DİZİNİ XII

1. GİRİŞ 1

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR 4

3. DIŞ YÜKLEMEYE MARUZ İKİ BOYUTLU SİSTEMLERİN YAPI-ZEMİN ETKİLEŞİM ANALİZİ 6

3.1. Giriş 6

3.2. Düzlem Elastisitede Hareket Denklemleri ve Sonlu Eleman Yaklaşımı 6

3.2.1. Ağırlıklı Artıklar Yöntemiyle İntegral Forma Geçiş 9

3.2.2. Sonlu Eleman Formülasyonu 10

3.2.3. Sonlu Eleman Seçimi 14

3.2.4. Düzlem Elastisite Hali İçin Eleman Rijitlik ve Kütle Matrislerinin Hesabı 16

3.2.5. Eksenel Simetrik Hal İçin Eleman Rijitlik ve Kütle Matrislerinin Hesabı 20

3.3. Yapı-Zemin Etkileşim Analizi 23

3.3.1. Elastik Dalgalar 24

3.3.2. Harmonik Yükleme Durumu 27

3.3.2.1. Tek Dalga Tipini İçeren Sonsuz Eleman 28

3.3.2.1.(1). α Azaltma Parametresinin Seçimi 31

3.3.2.1.(2). Newton-Cotes İntegrasyon Yöntemi 32

3.3.2.2. İki Dalga Tipini İçeren Sonsuz Eleman 35

3.3.2.3. Üç Dalga Tipini İçeren Sonsuz Eleman 39
3.3.2.4. Harmonik Yükleme Durumunda Sayısal Uygulamalar 45
3.3.2.4.(1). Harmonik Şerit Yüklü Viskoelastik Zemin 45
3.3.2.4.(2). Harmonik İç Basınca Maruz Küresel Oyuk 50
3.3.2.4.(3). Yarı Sonsuz Düzlem İçinde Gömülü Harmonik Tekil Yük 52
3.3.2.4.(4). Titreşim İzolasyonu 54
3.3.3. Zamanla Keyfi Değişen (Transient) Yükleme Durumu 60
3.3.3.1. Direkt ve Ters Laplace Dönüşümü 61
3.3.3.1.(1). Sayısal Direkt Laplace Dönüşümü 62
3.3.3.1.(2). Sayısal Ters Laplace Dönüşümü 64
3.3.3.2. Tek Dalga Tipini İçeren Sonsuz Eleman 66
3.3.3.3. İki Dalga Tipini İçeren Sonsuz Eleman 67
3.3.3.4. Üç Dalga Tipini İçeren Sonsuz Eleman 68
3.3.3.5. Keyfi Dinamik Yükleme Durumunda Sayısal Uygulamalar 70
3.3.3.5.(1). Ortasında Kare Delik Bulunan Sonsuz Levha 70
3.3.3.5.(2). Trapez Şerit Yük Etkisinde Yarı Sonsuz Zemin 72
3.3.3.5.(3). Elastik Yarı Sonsuz Zeminde Çukur Problemi 77
3.3.3.5.(4). Viskoelastik Yarı Sonsuz Zemin İçinde Tünel ... 83
3.3.3.5.(5). Elastik Yarı Sonsuz Zemin ve Elastik Zemin Tabakası 85

4. DIŞ YÜKLEMEYE MARUZ ÜÇ BOYUTLU SİSTEMLERİN YAPI-ZEMİN ETKİLEŞİM ANALİZİ 90

4.1. Giriş 90
4.2. Elastodinamikte Hareket Denklemleri ve Sonlu Eleman Yaklaşımı 90
4.2.1. Ağırlıklı Artıklar Yöntemiyle İntegral Forma Geçiş 92
4.2.2. Sonlu Eleman Formülasyonu 94
4.3. Sonlu Eleman Seçimi 97
4.3.1. Sekiz Düğümlü Lineer Üç Boyutlu Sonlu Eleman (Brick Eleman) 98

4.3.2. Üç Boyutlu Prizmatik Çubuk Eleman 104
4.3.3. Dönme Serbestlik Derecesine Sahip Geçiş Elemanı (Rotational Brick) 110
4.4. Yapı-Zemin Etkileşim Analizi 116
4.4.1. Harmonik Yükleme Durumu 116
4.4.1.1. Tek Dalga Tipini İçeren Sonsuz Eleman 117
4.4.1.2. İki Dalga Tipini İçeren Sonsuz Eleman 121
4.4.1.3. Üç Dalga Tipini İçeren Sonsuz Eleman 123
4.4.1.4. Harmonik Yükleme Durumunda Sayısal Uygulamalar 125
4.4.1.4.(1). Yarı Sonsuz Düzlem İçinde Gömülü Harmonik Tekil Yük 126
4.4.1.4.(2). Elastik Yarı Sonsuz Zemin Üzerinde Rijit Kare Temel 127
4.4.1.4.(3). Rijit Tabana Oturan Zemin Tabakası Üzerinde Rijit Kare Temel 131
4.4.1.4.(4). Yarı Sonsuz Elastik Zemin Üzerinde Tek Katlı Çerçeve 137
4.4.1.4.(5). Zemin Üzerindeki Tekil Yükten Dolayı Yapı-Zemin Etkileşimi 142
4.4.2. Zamanla Keyfi Değişen (Transient) Yükleme Durumu 145
4.4.2.1. Tek Dalga Tipini İçeren Sonsuz Eleman 145
4.4.2.2. İki Dalga Tipini İçeren Sonsuz Eleman 146
4.4.2.3. Üç Dalga Tipini İçeren Sonsuz Eleman 147
4.4.2.4. Keyfi Dinamik Yükleme Durumunda Sayısal Uygulamalar 149
4.4.2.4.(1). Elastik Yarı Sonsuz Zemin Üzerinde Tekil Yük 149
4.4.2.4.(2). Elastik Zemin Üzerinde Rijit, Kütlesiz Kare Temel 150
4.4.2.4.(3). Yarı Sonsuz Zemin Üzerinde Esnek Kare Temel 152
4.4.2.4.(4). Yarı Sonsuz Zemin Üzerinde Çerçeve Sistem .. 154
4.4.2.4.(5). Zemine Etkiyen İmpulsif Yükten Dolayı Yapı-Zemin Etkileşimi 157

5. YER HAREKETİ (DEPREM) ETKİSİNDEKİ SİSTEMLERİN YAPI-ZEMİN ETKİLEŞİM ANALİZİ 163

5.1. Giriş 163

5.2. İki Boyutlu Yapı-Zemin Etkileşim Analizi 163

5.2.1. Hareket Denklemlerinin Elde Edilmesi 164

5.2.2. Eleman Yük Vektörünün Hesabı 167

5.2.3. Sonlu ve Sonsuz Eleman Seçimi 169

5.2.4. Sayısal Uygulamalar 169

5.2.4.1. Yer Hareketine Maruz Elastik Tabaka 170

5.2.4.2. Elastik Zemin Tabakası Üzerinde İstinat Duvarı 175

5.3. Üç Boyutlu Yapı-Zemin Etkileşim Analizi 178

5.3.1. Hareket Denkleminin Elde Edilmesi 179

5.3.2. Sayısal Uygulama 183

6. BULGULAR VE TARTIŞMA 188

7. SONUÇLAR VE ÖNERİLER 190

KAYNAKLAR 192

ÖZGEÇMİŞ 197

EKLER 198

EK-A. İKİ DALGA TİPİNİ İÇEREN, İKİ BOYUTLU SONSUZ ELEMAN MATRİSLERİ 199

EK-B. ÜÇ DALGA TİPİNİ İÇEREN, İKİ BOYUTLU SONSUZ ELEMAN MATRİSLERİ 207

EK-C. ÜÇ BOYUTLU PRİZMATİK ÇUBUK ELEMANIN TRANSFORMASYON MATRİSİ 217

EK-D. DÖNME SERBESTLİK DERECESİNE SAHİP, ÜÇ BOYUTLU GEÇİŞ ELEMANI FORMÜLASYONU 227

EK-E. İKİ DALGA TİPİNİ İÇEREN, ÜÇ BOYUTLU SONSUZ ELEMAN MATRİSLERİ 238

ÖZ

DOKTORA TEZİ

İKİ VE ÜÇ BOYUTLU DİNAMİK YAPI-ZEMİN ETKİLEŞİMİ PROBLEMLERİNİN SONLU VE SONSUZ ELEMANLAR KULLANILARAK ANALİZİ

Hüseyin Rızkullah YERLİ

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

Danışman: Prof. Dr. Erhan KIRAL

Yıl: 1998, **Sayfa:** 244

Jüri : Prof. Dr. Erhan KIRAL
: Prof. Dr. Yalçın MENGİ
: Prof. Dr. Doğan TURHAN
: Prof. Dr. Orhan AKSOĞAN
: Doç. Dr. A. Kamil TANRIKULU

Bu çalışmada, iki ve üç boyutlu elastodinamik yapı-zemin etkileşimi problemleri için, sonlu elemanlar yöntemine dayanan bir model önerilmektedir. Bu yöntem ile, kaynağa yakın bölgeler sonlu elemanlar, sonsuza uzanan bölgeler ise birden fazla dalga tipini içerebilen sonsuz elemanlar kullanılarak analiz yapılmaktadır. Dıştan etkiyen yüklemenin, harmonik veya zamanla keyfi değişen yük olması durumları ayrı ayrı ele alınmaktadır. Keyfi yükleme durumunda, analiz Laplace dönüşüm uzayında yapılmakta ve uygun bir sayısal ters dönüşüm yöntemiyle zaman uzayına geçilmektedir. Yer hareketi etkisinde iki boyutlu problemler, yine sonlu ve sonsuz elemanlarla ele alınırken, üç boyutlu halde alt yapılara ayırma metodu kullanılmaktadır. Bu çalışmada hazırlanan bilgisayar programları ile çözülen örneklerin, analitik veya literatürde mevcut çözümlerle uyumlu oldukları gösterilmektedir.

Anahtar kelimeler : 2 ve 3 boyutlu elastodinamik problemler, Direkt ve ters Laplace dönüşüm, Dinamik yapı-zemin etkileşimi, Sonlu eleman, Sonsuz eleman.

ABSTRACT

Ph. D. THESIS

ANALYSIS OF TWO AND THREE DIMENSIONAL DYNAMIC SOIL-STRUCTURE INTERACTION PROBLEMS USING FINITE AND INFINITE ELEMENTS

Hüseyin Rızkullah YERLİ

DEPARTMENT OF CIVIL ENGINEERING
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
UNIVERSITY OF ÇUKUROVA

Supervisor: Prof. Dr. Erhan KIRAL

Year: 1998, **Pages:** 244

Jury : Prof. Dr. Erhan KIRAL
: Prof. Dr. Yalçın MENGİ
: Prof. Dr. Doğan TURHAN
: Prof. Dr. Orhan AKSOĞAN
: Assoc. Prof. Dr. A. Kamil TANRIKULU

In this study, a model based on finite element method is proposed for the solution of two and three dimensional elastodynamic soil-structure interaction problems. By this method, problems are analyzed by discretizing the near field with finite elements and the far field extending to infinity with several multi-wave infinite elements. Harmonic or arbitrary transient loadings are considered separately. In the case of arbitrary transient loading, the formulation is performed in the Laplace transform domain, and the solution is then obtained in the time domain by an appropriate numerical inverse Laplace transform technique. In the case of ground motion, two dimensional problems are also considered directly by using finite and infinite elements, while three dimensional systems are analyzed by Substructure method. The results of several sample problems obtained by the programs prepared in this study are in good agreement with those available in the literature.

Key Words : 2 and 3 dimensional elastodynamic problems, Direct and inverse Laplace transform, Dynamic soil-structure interaction, Finite Elements, Infinite Elements.

TEŞEKKÜR

Doktora tez programımın yürütülmesi esnasında, çalışmalarımı sabır ve ilgiyle izleyip yön veren, değerli bilgi ve yardımlarını esirgemeyerek bana her türlü desteği sağlayan danışman hocam, sayın Prof. Dr. B. Erhan KIRAL'a en içten teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca, doktora programım sırasında açtığı derslerle bu konuyu öğrenmemde emeği geçen ve tez çalışmalarım boyunca ilgisini esirgemeyen sayın Prof. Dr. Yalçın MENGİ'ye teşekkür ederim.

Doktora çalışmalarımı maddi olarak destekleyen, Çukurova Üniversitesi Araştırma Fonu ile Türkiye Bilimsel ve Teknik Araştırma Kurumu, Bilim Adamı Yetiştirme Grubu (TÜBİTAK-BAYG)'na teşekkür ederim.

SİMGELER VE KISALTMALAR

a_{gx} , a_{gy} : Yer ivmeleri

a_0 : Boyutsuz frekans

[B] : Şekil değiştirme matrisi

$[B^d]$: Düzlem elastisite halinde sonlu eleman şekil değiştirme matrisi

$[B^{Sd}]$: Düzlem elastisite halinde sonsuz eleman şekil değiştirme matrisi

$[B^e]$: Eksenel simetrik halde sonlu eleman şekil değiştirme matrisi

$[B^{Se}]$: Eksenel simetrik halde sonsuz eleman şekil değiştirme matrisi

c_P , c_S , c_R : Elastik dalga hızları

[D] : Malzeme matrisi

E : Elastisite modülü

f_x , f_y , f_z : Hacim kuvvetleri

{f} : Hacim kuvvetlerinin oluşturduğu eleman yük vektörü

g : Viskoz sönüm oranı

G : Kayma modülü

I_y, I_z, I_p, J : Çubuk eleman atalet momentleri

[J] : Jacobian matrisi

[k] : Eleman rijitlik matrisi

$[k^d]$: Düzlem elastisite halinde sonlu eleman rijitlik matrisi

$[k^{Sd}]$: Düzlem elastisite halinde sonsuz eleman rijitlik matrisi

$[k^e]$: Eksenel simetrik halde sonlu eleman rijitlik matrisi

$[k^{Se}]$: Eksenel simetrik halde sonsuz eleman rijitlik matrisi

$[k^b]$: Üç boyutlu brick eleman rijitlik matrisi

$[k^c]$: Üç boyutlu çubuk eleman rijitlik matrisi

$[k^{rb}]$: Üç boyutlu geçiş (rotational brick) elemanı rijitlik matrisi

$[k^S]$: Üç boyutlu sonsuz eleman rijitlik matrisi

[K] : Sistem rijitlik matrisi

[L] : Diferansiyel operatör matrisi

m : Tekil kütle

$[m]$: Eleman kütle matrisi

$[m^d]$: Düzlem elastisite halinde sonlu eleman kütle matrisi

$[m^{Sd}]$: Düzlem elastisite halinde sonsuz eleman kütle matrisi

$[m^e]$: Eksenel simetrik halde sonlu eleman kütle matrisi

$[m^{Se}]$: Eksenel simetrik halde sonsuz eleman kütle matrisi

$[m^b]$: Üç boyutlu brick eleman kütle matrisi

$[m^c]$: Üç boyutlu çubuk eleman kütle matrisi

$[m^{rb}]$: Üç boyutlu geçiş (rotational brick) elemanı kütle matrisi

$[m^S]$: Üç boyutlu sonsuz eleman kütle matrisi

$[M]$: Sistem kütle matrisi

M_i : Geometrik şekil fonksiyonları

n_x , n_y , n_z : Doğrultman kosinüsleri

N_i : İnterpolasyon şekil fonksiyonları

$[N]$: İnterpolasyon şekil fonksiyonları matrisi

$P(\xi,s)$: Transient sonsuz elemanlar için deplasman yayılma fonksiyonu

$P(\xi,\omega)$: Harmonik sonsuz elemanlar için deplasman yayılma fonksiyonu

$\{q\}$: Yer hareketinden dolayı oluşan eleman yük vektörü

s : Laplace dönüşüm parametresi

t_x , t_y , t_z : Yüzey gerilmeleri

$\{t\}$: Yüzey gerilmelerinin oluşturduğu eleman yük vektörü

$[T]$: Çubuk eleman transformasyon matrisi

u , v , w : Deplasman bileşenleri

u_g , v_g , x_g : Yer deplasmanları

u_r , v_r : Relatif deplasmanlar

$\{u\}$: Eleman deplasman vektörü

$\{u_d\}$: Eleman düğüm deplasmanları vektörü

$\{U_d\}$: Sistem düğüm deplasmanları vektörü

x , y , z : Kartezyen koordinatlar

z : Histeretik sönüm oranı

α : Deplasman azaltma parametresi

β : Dalga sayısı

γ_{xy} , γ_{xz} , γ_{yz} , γ_{rz} : Açısal şekil değiştirmeler

δ : Varyasyon operatörü

δ_{ij} : Kronecker delta ($i=j \Rightarrow \delta_{ij}=1$, $i \neq j \Rightarrow \delta_{ij}=0$)

ε_x , ε_y , ε_z , ε_r , ε_z , ε_θ : Uzama oranları

$\{\varepsilon\}$: Şekil değiştirme vektörü

ν : Poisson oranı

ξ , η , ζ : Referans elemanı koordinatları

ρ : Kütlesel yoğunluk (birim hacmin kütlesi)

σ_x , σ_y , σ_z : Normal gerilmeler

$\{\sigma\}$: Gerilme vektörü

τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yz} : Kayma gerilmeleri

ω : Açısal frekans

BEM : Sınır Eleman Metodu (Boundary Element Method)

FFT : Fast Fourier Transform

Re : Kompleks bir sayının reel kısmı

İm : Kompleks bir sayının imajiner kısmı

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 3.1. a_0=0.5 boyutsuz frekansı için yatay ve düşey kompleyanslar 48
Çizelge 3.2. a_0=1.0 boyutsuz frekansı için yatay ve düşey kompleyanslar 49
Çizelge 3.3. Bazı fonksiyonların kapalı Laplace dönüşümleri 63
Çizelge 4.1. Çerçevenin serbest titreşim frekansları 140
Çizelge D.1. u deplasmanına ait baz fonksiyonları 236
Çizelge D.2. v deplasmanına ait baz fonksiyonları 236
Çizelge D.3. w deplasmanına ait baz fonksiyonları 237

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1. Sınır şartları 8

Şekil 3.2. Tipik bir sonlu eleman 11

Şekil 3.3. 8 düğümlü izoparametrik, kuadratik sonlu eleman
(a) Gerçek eleman **(b)** Referans elemanı 14

Şekil 3.4. Eksenel simetrik sonlu eleman 20

Şekil 3.5. 8 düğümlü, kuadratik sonlu eleman 21

Şekil 3.6. Yapı-zemin etkileşim modeli 24

Şekil 3.7. Yüzeye dik gelen elastik dalgalar 25

Şekil 3.8. 5 düğümlü sonsuz eleman
(a) Gerçek eleman **(b)** Referans elemanı 29

Şekil 3.9. Newton-Cotes ağırlık değerleri için program listesi 35

Şekil 3.10. 7 düğümlü sonsuz eleman
(a) Gerçek eleman **(b)** Referans elemanı 40

Şekil 3.11. Harmonik şerit yüklü viskoelastik zemine ait
sonlu-sonsuz eleman ağı 46

Şekil 3.12. İçerisinde küresel oyuk bulunan sonsuz zemin
(a) Yükleme **(b)** Sonlu-sonsuz eleman ağı 50

Şekil 3.13. Radyal kompleyansın boyutsuz frekansla değişimi 51

Şekil 3.14. Gömülü tekil yüklemeye maruz yarı sonsuz zemin 52

Şekil 3.15. Düşey kompleyansın reel kısmı 53

Şekil 3.16. Düşey kompleyansın imajiner kısmı 53

Şekil 3.17. Boyutsuz düşey kompleyansın boyutsuz frekansla değişimi 54

Şekil 3.18. Aktif izolasyon problemi 55

Şekil 3.19. Aktif izolasyonda çukur boş iken genlik azalma oranları 56

Şekil 3.20. Aktif izolasyonda çukur beton dolu iken genlik azalma oranları 57

Şekil 3.21. Pasif izolasyon problemi 58

Şekil 3.22. Pasif izolasyonda çukur boş iken genlik azalma oranları 59

Şekil 3.23. Pasif izolasyonda çukur beton dolu iken genlik azalma oranları 59

Şekil 3.24. Ortasında kare delik bulunan sonsuz levha 71

Şekil 3.25. A noktasındaki yatay deplasmanın zamanla değişimi 71
Şekil 3.26. Trapez yüklemeye maruz yarı sonsuz zemin 72
Şekil 3.27. Trapez yükleme altındaki yarı sonsuz zeminin sonlu-sonsuz eleman ağı 73
Şekil 3.28. B noktasındaki düşey gerilmenin zamanla değişimi 74
Şekil 3.29. C noktasındaki düşey gerilmenin zamanla değişimi 75
Şekil 3.30. E noktasındaki düşey deplasmanın zamanla değişimi 75
Şekil 3.31. F noktasındaki düşey deplasmanın zamanla değişimi 76
Şekil 3.32. G noktasındaki düşey deplasmanın zamanla değişimi 76
Şekil 3.33. Yarı sonsuz zeminde çukur problemi, geometri ve yükleme durumu 77
Şekil 3.34. A noktasının (çukurun gerisinde) düşey deplasmanı 78
Şekil 3.35. B noktasının (çukurun ötesinde) düşey deplasmanı 79
Şekil 3.36. A noktası için titreşim izolasyonu 80
Şekil 3.37. B noktası için titreşim izolasyonu 80
Şekil 3.38. Çeşitli dolgu malzemeleri için A noktasının deplasmanı 81
Şekil 3.39. Çeşitli dolgu malzemeleri için B noktasının deplasmanı 82
Şekil 3.40. Yarı sonsuz zemin içinde tünel, geometrisi ve yüklemesi 83
Şekil 3.41. Düşey deplasmanların zamanla değişimi 84
Şekil 3.42. Ricker Wavelet yüklemesi 86
Şekil 3.43. **(a)** Elastik yarı sonsuz zemin **(b)** Elastik zemin tabakası 86
Şekil 3.44. Düşey yükten dolayı düşey deplasman 87
Şekil 3.45. Düşey yükten dolayı yatay deplasman 87
Şekil 3.46. Yatay yükten dolayı yatay deplasman 88
Şekil 4.1. Üç boyutlu sonlu eleman (Brick eleman) **(a)** Gerçek eleman **(b)** Referans elemanı 99
Şekil 4.2. Üç boyutlu prizmatik çubuk eleman 104
Şekil 4.3. Dairesel kesitli çubuk 108
Şekil 4.4. Dikdörtgen kesitli çubuk 109
Şekil 4.5. Üç boyutlu geçiş elemanı (Rotational brick) 111
Şekil 4.6. 8 düğümlü sonsuz eleman **(a)** Gerçek eleman **(b)** Referans elemanı 117

Şekil 4.7. 12 düğümlü sonsuz eleman
(a) Gerçek eleman (b) Referans elemanı 123
Şekil 4.8. Düşey kompleyansın frekansla değişimi 127
Şekil 4.9. Elastik zemin üzerinde kare temel (1/4 bölge) 128
Şekil 4.10. Boyutsuz düşey kompleyansın frekans ile değişimi 129
Şekil 4.11. Boyutsuz yatay kompleyansın frekans ile değişimi 130
Şekil 4.12. Boyutsuz dönme kompleyansının frekans ile değişimi 130
Şekil 4.13. Elastik zemin tabakası üzerinde kare temel (karşıdan görünüş) 131
Şekil 4.14. Boyutsuz düşey kompleyansın frekansla değişimi 132
Şekil 4.15. Boyutsuz düşey kompleyansın karşılaştırılması 133
Şekil 4.16. Boyutsuz düşey impedansın karşılaştırılması 133
Şekil 4.17. k ve c değerlerinin frekansla değişimi 134
Şekil 4.18. Düşey kompleyansın reel kısmının Poisson oranı ile değişimi 135
Şekil 4.19. Düşey kompleyansın imajiner kısmının Poisson oranı ile değişimi 136
Şekil 4.20. Düşey kompleyansın reel kısmının sönüm ile değişimi 136
Şekil 4.21. Düşey kompleyansın imajiner kısmının sönüm ile değişimi 137
Şekil 4.22. Elastik zemin üzerinde tek katlı çerçeve 138
Şekil 4.23. Deplasman transfer fonksiyonu 139
Şekil 4.24. Kesme kuvveti transfer fonksiyonu 139
Şekil 4.25. Eğilme momenti transfer fonksiyonu 140
Şekil 4.26. Deplasman transfer fonksiyonunun zemin rijitliğiyle değişimi 141
Şekil 4.27. Kesme kuvveti transfer fonksiyonunun zemin rijitliğiyle değişimi 141
Şekil 4.28. Eğilme momenti transfer fonksiyonunun zemin rijitliğiyle değişimi ... 142
Şekil 4.29. Elastik zemin üzerinde tek katlı çerçeve (karşıdan görünüş) 143
Şekil 4.30. Yatay deplasmanın frekansla değişimi 143
Şekil 4.31. Kesme kuvvetinin frekansla değişimi 144
Şekil 4.32. Eğilme Momentinin frekansla değişimi 144
Şekil 4.33. A noktasının yatay ve düşey deplasmanı 150
Şekil 4.34. Yarı sonsuz zemin üzerindeki temelin geometri ve yüklemesi 151
Şekil 4.35. Temelin altındaki deplasmanın zamanla değişimi 151
Şekil 4.36. Sinüzoidal yükten dolayı düşey deplasmanın zamanla değişimi 152

Şekil 4.37. Esnek kare temelin geometrisi ve yüklemesi 153
Şekil 4.38. A, B ve C noktalarının düşey deplasmanları 154
Şekil 4.39. Adım tipi yüklemeye maruz çerçeve 155
Şekil 4.40. Yatay deplasmanın zamanla değişimi 156
Şekil 4.41. Kesme kuvvetinin zamanla değişimi 156
Şekil 4.42. Eğilme momentinin zamanla değişimi 157
Şekil 4.43. Elastik zemin üzerinde çerçeve (karşıdan görünüş) ve yüklemesi 158
Şekil 4.44. Yatay deplasmanın kütle ile değişimi 159
Şekil 4.45. Kesme kuvvetinin kütle ile değişimi 159
Şekil 4.46. Eğilme momentinin kütle ile değişimi 160
Şekil 4.47. Yatay deplasmanın zemin rijitliği ile değişimi 161
Şekil 4.48. Kesme kuvvetinin zemin rijitliği ile değişimi 161
Şekil 4.49. Eğilme momentinin zemin rijitliği ile değişimi 162
Şekil 5.1. Elemanter düzlem elemanı serbest cisim diyagramı 164
Şekil 5.2. Zemin tabakasında dalga yayılması 170
Şekil 5.3. Yer hareketine maruz zemin tabakası 172
Şekil 5.4. Zemin tabanına etkiyen ivmenin zamanla değişimi 173
Şekil 5.5. Zemin tabanına etkiyen deplasmanın zamanla değişimi 174
Şekil 5.6. Zeminin üst noktasındaki deplasmanın zamanla değişimi 174
Şekil 5.7. Elastik zemin tabakası üzerinde istinat duvarı 175
Şekil 5.8. İvmenin zamanla değişimi 176
Şekil 5.9. B noktasındaki deplasmanın zamanla değişimi 177
Şekil 5.10. A noktasındaki yatay gerilmenin zamanla değişimi 177
Şekil 5.11. A noktasındaki düşey gerilmenin zamanla değişimi 178
Şekil 5.12. Deprem etkisinde N katlı kesme tipi bina 180
Şekil 5.13. 5 katlı kesme tipi bina 184
Şekil 5.14. PACOIMA depremi ivme kaydı 184
Şekil 5.15. Değişik impedanslarla bulunan deplasmanın karşılaştırılması 185
Şekil 5.16. Yatay deplasmanın zeminin rijitliği ile değişimi 186
Şekil 5.17. 5. katın çeşitli zeminler için transfer fonksiyonu 187
Şekil C.1. Üç boyutlu çubuğun eksenlerinin döndürülmesi 218

Şekil C.2. Üç boyutlu çubuğun x_m ekseni etrafındaki dönmesi 221
Şekil C.3. Düşey konumdaki çubuk elemanın transformasyonu 223
Şekil C.4. z_m // z durumu 224
Şekil C.5. z_m // y durumu 225
Şekil C.6. z_m // x durumu 226
Şekil D.1. Üç boyutlu geçiş elemanı ve düğüm deplasmanları 227
Şekil D.2. Lineer deplasman fonksiyonu 228
Şekil D.3. Kiriş dönme fonksiyonu 228
Şekil D.4. Kiriş deplasman fonksiyonu 229
Şekil D.5. θ_x dönmesi durumu 230
Şekil D.6. θ_y dönmesi durumu 231
Şekil D.7. θ_z dönmesi durumu 231
Şekil D.8. u (v, w) deplasmanının yüzey boyunca değişimi 232
Şekil D.9. θ_x dönmesinden dolayı deplasmanların yüzey boyunca değişimi 233
Şekil D.10. θ_y dönmesinden dolayı deplasmanların yüzey boyunca değişimi 234
Şekil D.11. θ_z dönmesinden dolayı deplasmanların yüzey boyunca değişimi 235

BÖLÜM 1
GİRİŞ

Sayısal çözüm teknikleri kullanılarak yarı sonsuz ortamların modellenmesi, dinamik yapı-zemin etkileşimi problemlerinde önemli bir yer tutmaktadır. Bina, liman yapıları, barajlar ve özellikle nükleer santral temellerinin zeminle olan etkileşimi örnek olarak verilebilir. Yarı sonsuz zemin üzerinde bulunan yapılar, trafik ve rüzgar yükleri ile yeryüzünde meydana gelen titreşim, zemin içinde yayılan çeşitli tipte dalgalar meydana getirmektedir. Titreşim kaynağı yakınında büyük değerlere sahip olan genlikler, geometri ve malzemenin sahip olduğu sönüm nedeniyle kaynaktan uzaklaştıkça azalmaktadırlar. Yeraltı iletişim hatları, tüneller, kanalizasyonlar, hassas cihazların yerleştirildiği kanallar, nükleer artıkların depolanması gibi sebeplerle, yeraltında bazı yapılar inşaa edilmektedir. Yeryüzünde oluşan titreşimden dolayı, yeraltında bulunan bu yapıların ne ölçüde etkilendiğinin hesaplanması gerekmektedir. Benzer olarak, yeraltında meydana gelen patlamalar veya deprem gibi yer hareketlerinden dolayı, yeryüzünde mevcut bulunan yapılar etkilenmektedirler. Deprem mühendisliği açısından, yapı ile zemin arasındaki etkileşim önemli bir konuyu teşkil etmektedir. Sonsuz ortamın dışından veya içinden etkimekte olan dinamik yüklere ve sismik dalgalara karşı, yapıların emniyetli bir şekilde tasarlanarak inşaa edilmeleri gerekmektedir.

Yapı-zemin problemlerinde esas olarak iki önemli bileşen bulunmaktadır. Bunlar, sonlu bir boyuta sahip olan yapı ve yarı sonsuz zemindir. Bu tip sistemler sonlu elemanlar metodu kullanılarak ele alınabilmektedir. Bu metodla, homojen ve/veya heterojen ortamlar ile lineer veya nonlineer problemler ele alınabilmektedir. Sonsuza uzanan ortamlar için, sistemin sonlu bir bölgesi ele alınmakta ve zemin ortamı içinde yayılan dalgalar bu sonlu bölgeye hapsedilmekte idi. Bu nedenle, gerçekçi olmayan sonuçlar elde edilmektedir. Bu olumsuzluğu gidermek için, ortamın dinamik davranışına uyum sağlayan geçirgen yapay sınırlar kullanıla

gelmektedir. Bu yapay sınırlar, dalga geçirimliliği bakımından mükemmel olmamakla birlikte, belirli durumlarda yeterli bir çözüm sağlayabilmektedir. Geçirgen yapay sınırların kullanıldığı durumlarda, yapay sınırların kaynaktan uzakta seçilmesiyle bulunan sonuçların, doğru sonuca gittikçe yaklaştığı görülmektedir. Fakat bu durumda, sistemdeki bilinmeyen sayısı oldukça artmakta ve özellikle üç boyutlu sistemler için bilgisayar hafızası bakımından sorunlar ortaya çıkmaktadır. Bu gibi durumlarda ise, alt yapılara ayırma (Substructure) metodu kullanılarak bu durum önlenebilmektedir. Bu metod ile, yapı ile zemin arasındaki impedans ilişkisi yardımıyla etkileşim kuvvetleri bulunarak, sadece sonlu boyuttaki üst yapı çözülmektedir. Bununla birlikte, alt yapılara ayırma yönteminin kullanılabilmesi için sonsuza uzanan zemine ait impedans değerlerinin bilinmesi gerekmektedir.

Dinamik yapı-zemin problemlerinin ele alınmasında kullanılan bir yöntem de, kaynağa yakın bölgelerde sonlu elemanların, sonsuza uzanan bölgelerde ise sonsuz elemanların kullanılmasıdır. Burada, sonsuz ortamda yayılan ve sonsuzda sönen dalga özelliklerini içeren sonsuz elemanlar kullanılmaktadır. Böylece, standart sonlu eleman formülasyonu uygulanarak, sistem matrislerinin simetri ve bant tipi özellikleri korunmaktadır. Yine sonlu elemanlar yönteminin özelliği sayesinde, yarı sonsuz zemin ile sonlu boyuttaki üst yapı birlikte düşünülerek, yapı-zemin etkileşim analizi direkt olarak gerçekleştirilmektedir.

Son yıllarda, özellikle sonsuza uzanan ortamlar için sınır eleman metodu (BEM) yoğun bir şekilde kullanılmaya başlanmıştır. Sonlu eleman ve sınır eleman yöntemlerinin, belirli konularda birbirlerine göre bazı avantajları bulunmaktadır. Yakın zamanlarda gerçekleştirilen çalışmalarda, bu iki kuvvetli sayısal çözüm yönteminin üstün oldukları özellikleri birlikte kullanılarak, yapı-zemin problemleri etkin bir şekilde ele alınmaktadır. Dinamik yapı-zemin problemleri, gerek sonlu eleman gerekse sınır eleman yöntemleri kullanılarak, zaman uzayında ele alındıkları gibi, genellikle transform teknikleri (Laplace veya Fourier) kullanılarak dönüşmüş uzayda incelenmektedirler.

Yukarıda bahsedilen nedenlerden dolayı, iki ve üç boyutlu yapı-zemin problemleri elastodinamiğin önemli bir çalışma alanını teşkil etmektedir. Fakat bu tip sistemler incelenirken, genellikle harmonik yükleme durumu ele alınarak, impedans

veya kompleyans analizleri yapılmaktadır. Bunun yanında, zamanla değişimi keyfi olan yükleme durumları için de sonlu ve sonsuz eleman ortak kullanımına dayalı bir formülasyonun geliştirilmesi gerekmektedir. Ayrıca, yarı sonsuz ortamda birden fazla çeşitte dalgalar yayıldığından, yapılacak olan formülasyonda bunların hepsinin birden gözönüne alınması gerekmektedir. Burada, iki boyutlu (düzlem elastisite ve eksenel simetrik) ve üç boyutlu elastodinamik yapı-zemin sistemlerinin, direkt olarak analizini yapmaya yönelik bir çalışma gerçekleştirilmiştir.

BÖLÜM 2
ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Yapı-zemin etkileşimi problemleri, 1950'li yıllardan sonra önem kazanmaya başlamış ve dinamik halde ilk olarak analitik yöntemler kullanılmıştır. Harmonik yükleme etkisi altında, yarı sonsuz zemin üzerinde rijit, kütlesiz temel sistemleri ele alınıp, zemine ait impedans (rijitlik) sabitlerinin hesaplanmasına çalışılmıştır (Bycroft, 1956). Bununla beraber, yapı-zemin problemlerinin analitik olarak gözönüne alınmasındaki zorluklar nedeniyle, basit ve düzenli geometriye sahip, homojen ve izotrop ortamlar ele alınabilmiştir. Rijit temel olarak dikdörtgen (Thomson ve Kobori, 1963), dairesel (Luco ve Westman, 1971) ve uzun şerit (Luco ve Westman, 1972) temel tipleri incelenmiştir. Yarı sonsuz zemin malzemesinin, homojen, lineer elastik ve/veya viskoelastik olması (Veletsos ve Verbic, 1973), homojen ve/veya tabakalı olması (Luco, 1974) durumları da ele alınmıştır.

Yapı-zemin sistemlerinin analitik olarak incelenmesindeki zorluk nedeniyle, 1970'li yıllardan itibaren sayısal çözüm yöntemlerinin kullanılmasına başlanmıştır. Sayısal çözüm yöntemleri kullanılırken, yarı sonsuz zemin belirli yerlerden kesilerek geçirgen yapay sınırlar oluşturulmaktadır. Sonlu Farklar Metodu ve geçirgen yapay sınırlar kullanılarak yapı-zemin problemleri incelenmiştir (Tseng ve Robinson, 1975). Sonlu elemanlar yönteminin gelişmesiyle, bu yöntem dinamik yapı-zemin etkileşim problemlerine yine geçirgen yapay sınırlar kullanılarak uygulanmıştır (Lysmer ve Kuhlemeyer, 1969; Murakami, Shioya, Yamada ve Luco, 1981).

Dolgu barajlar ve nükleer santraller gibi büyük kütleli yapılar ile zemin arasındaki etkileşim problemlerinin, yapı ve zeminin birlikte gözönüne alınarak direkt analizinin yapılması zaman alıcıdır. Bu nedenle, büyük hacimli yapı-zemin problemleri için alt yapılara ayırma yöntemi (Substructure method) kullanılmaya başlanmıştır (Gutierrez ve Chopra, 1978).

Sonsuza uzanan zeminlerin davranışına, geçirgen yapay sınırlardan daha gerçekçi bir yaklaşım olarak, sonsuz elemanlar geliştirilmiştir (Bettess, 1977). Daha

sonraları, değişik tipte dinamik sonsuz eleman modelleri de önerilmiştir (Medina ve Penzien, 1982). Sonlu eleman yaklaşımı ve sonsuz elemanlar kullanılarak, iki boyutlu harmonik yükleme problemleri (Chuhan ve Chongbin, 1987) ve üç boyutlu harmonik yükleme problemleri (Chongbin ve Valliappan, 1993) ele alınmıştır. Zamanla değişimi keyfi olan yüklemenin etkisindeki iki boyutlu sistemlerin (düzlem elastisite ve eksenel simetrik), Laplace dönüşüm uzayında formülasyonu ve tek dalga tipini içeren sonsuz eleman modeli ile analizleri yapılmıştır (Temel, 1996).

Diğer bir sayısal çözüm yöntemi olan sınır eleman metodu da, son yıllarda dinamik yapı-zemin problemlerinde yoğun bir şekilde kullanılmaktadır (Mansur, 1983; Karabalis ve Beskos, 1984; Ahmad ve Banerjee, 1988; Israil ve Banerjee, 1990a; Von Estorff, Pais ve Kausel, 1990; Mengi, Tanrıkulu ve Tanrıkulu, 1994). Ayrıca, sınır ve sonlu elemanlar yöntemleri birlikte kullanılarak da yapı-zemin etkileşimi problemleri ele alınmaktadır (Zienkiewicz, Kelly ve Bettess, 1977; Von Estorff ve Kausel, 1989).

BÖLÜM 3
DIŞ YÜKLEMEYE MARUZ İKİ BOYUTLU SİSTEMLERİN YAPI-ZEMİN ETKİLEŞİM ANALİZİ

3.1. Giriş

Bu bölümde iki boyutlu elastodinamik yapı-zemin etkileşimi problemleri incelenecektir. İki boyutlu sistemler olarak düzlem elastisite problemleri (düzlem gerilme ve düzlem şekil değiştirme) ile eksenel simetrik durumlar gözönünde bulundurulacaktır.

Sonsuz veya yarı sonsuz zemin ile sonlu bir boyuta sahip yapıdan oluşan yapı-zemin etkileşimi problemleri incelenirken, yapı ile birlikte kaynağa (yüklemeye) yakın bölgeler standart sonlu elemanlarla modellenirken, kaynaktan uzaktaki bölgeler çeşitli sonsuz elemanlarla modellenmektedir.

3.2. Düzlem Elastisitede Hareket Denklemleri ve Sonlu Eleman Yaklaşımı

Düzlem elastisite problemlerinde olayı idare eden hareket denklemleri, elemanter bir elemana etki eden kuvvetlerin dengesinden yararlanılarak aşağıdaki gibi elde edilmektedir.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$
$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + f_y - \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \qquad (3.1)$$

Burada f_x ve f_y sırasıyla x ve y doğrultularındaki hacim kuvvetlerini göstermektedir. σ_x ve σ_y normal gerilmeleri, τ_{xy} ise kayma gerilmesini temsil etmektedir. ρ, malzemenin kütlesel yoğunluğu olup, u ve v sırasıyla x ve y doğrultularındaki deplasmanları göstermektedir.

Uzama oranları ile deplasmanlar arasında aşağıdaki bağıntılar mevcuttur.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$
$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad (3.2)$$
$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

Bununla beraber, malzemenin lineer elastik veya viskoelastik, homojen ve izotrop olduğu kabul edilmektedir. Cismin içinde herhangi bir noktanın bünye denklemi (gerilmeler ve uzama oranları arasındaki ilişki) aşağıdaki gibidir.

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \qquad (3.3)$$

Düzlem elastisite durumunda gerilme, $\{\sigma\}$, ve şekil değiştirme,$\{\varepsilon\}$, vektörleri ile malzeme matrisi, [D],

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \qquad \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \qquad [D] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{21} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix} \qquad (3.4a)$$

şeklinde tariflenmektedirler. Yukarıdaki bağıntıda görülen D_{ij} malzeme sabitleri düzlem gerilme problemi durumunda,

$$D_{11} = D_{22} = \frac{E}{(1-\nu^2)}$$
$$D_{12} = D_{21} = \frac{\nu E}{(1-\nu^2)} \qquad (3.4b)$$
$$D_{33} = G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

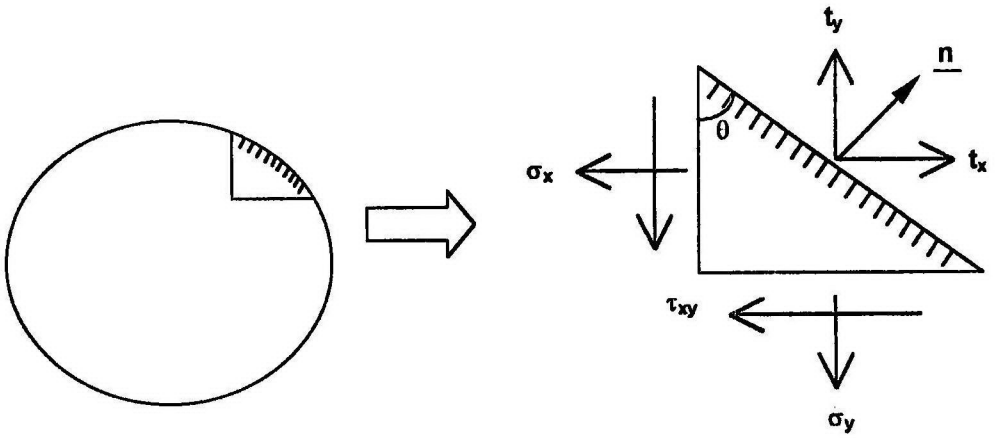
şeklinde iken, düzlem şekil değiştirme halinde ise,

$$D_{11} = D_{22} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$
$$D_{12} = D_{21} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \qquad (3.4c)$$
$$D_{33} = G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

şeklindedir. Burada E ve G sırasıyla elastisite ve kayma modülünü gösterirken, ν Poisson oranını temsil etmektedir. Bununla beraber cismin yüzeyinde bulunan herhangi bir noktadaki sınır şartları, Şekil 3.1 yardımıyla,

$$t_x = \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y$$
$$t_y = \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y \qquad (3.5)$$

şeklinde hesaplanmaktadır. Burada t_x ve t_y sırasıyla x ve y doğrultularındaki yüzey gerilmelerini gösterirken, n_x ve n_y ise doğrultman kosinüsleridir ($n_x=\cos\theta$, $n_y=\sin\theta$).



Şekil 3.1. Sınır şartları

3.2.1. Ağırlıklı Artıklar Yöntemiyle İntegral Forma Geçiş

Ağırlıklı artıklar yönteminde, herhangi bir diferansiyel denklem ψ ağırlık fonksiyonu ile çarpılarak tipik bir eleman üzerinde integralin alınmasıyla, integral forma geçilmektedir. Ayrıca, herhangi bir büyüklüğün zamana göre ikinci türevinin Laplace dönüşümü, başlangıç şartlarının sıfır olduğu kabul edilerek,

$$L\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right] = s^2\bar{F}(s) \tag{3.6}$$

şeklinde yazılabilmektedir (bkz. 3.3.3.1). Bu durumda, yukarıda bahsedilen (3.1) hareket denklemlerinden birincisinin Laplace dönüşümü alınarak ağırlıklı artıklar yöntemi uygulandığında,

$$W_1 = h_e \int_{A_e} \psi_1 \left(\frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial y} + \bar{f}_x - \rho s^2 \bar{u} \right) dA_e = 0 \tag{3.7}$$

elde edilir. Burada üzeri çizgili semboller, ilgili büyüklüklerin Laplace dönüşümünü temsil etmektedir. Ayrıca, A_e ve h_e elemanın alanını ve kalınlığını, s ise Laplace transform parametresini göstermektedir. W_1 ifadesinde, ψ_1 ağırlık fonksiyonu ile tüm terimler çarpılıp kısmi integrasyon uygulanır ve Galerkin metodu kullanılıp ağırlık fonksiyonu olarak deplasmanların varyasyonu ($\delta\bar{u}$) seçilirse, (3.7) ifadesi,

$$\begin{aligned} W_1 = h_e \int_{A_e} \left(-\frac{\partial(\delta\bar{u})}{\partial x}\bar{\sigma}_x - \frac{\partial(\delta\bar{u})}{\partial y}\bar{\tau}_{xy} + (\delta\bar{u})\bar{f}_x - (\delta\bar{u})\rho s^2 \bar{u} \right) dA_e \\ + h_e \oint_{S_e} (\delta\bar{u})\bar{t}_x \, dS_e = 0 \end{aligned} \tag{3.8}$$

haline dönüşür. Benzer işlemler (3.1) hareket denklemlerinin ikincisi içinde yapılırsa,

$$W_2 = h_e \int_{A_e} \left(-\frac{\partial(\delta\bar{v})}{\partial x}\bar{\tau}_{xy} - \frac{\partial(\delta\bar{v})}{\partial y}\bar{\sigma}_y + (\delta\bar{v})\bar{f}_y - (\delta\bar{v})\rho s^2 \bar{v} \right) dA_e + h_e \oint_{s_e} (\delta\bar{v})\bar{t}_y \, dS_e = 0 \tag{3.9}$$

eşitliği bulunur. $W=W_1+W_2$ ifadesi oluşturulup, düzenlemeler yapıldıktan sonra, Laplace dönüşüm uzayında diferansiyel denklemlerin integral formu aşağıdaki gibi elde edilmiş olur.

$$h_e \int_{A_e} \{\delta\bar{\varepsilon}\}^T \{\bar{\sigma}\} dA_e + s^2 h_e \int_{A_e} \rho \begin{Bmatrix} \delta\bar{u} \\ \delta\bar{v} \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{Bmatrix} dA_e = h_e \int_{A_e} \begin{Bmatrix} \delta\bar{u} \\ \delta\bar{v} \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \bar{f}_x \\ \bar{f}_y \end{Bmatrix} dA_e + h_e \oint_{s_e} \begin{Bmatrix} \delta\bar{u} \\ \delta\bar{v} \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \bar{t}_x \\ \bar{t}_y \end{Bmatrix} dS_e \tag{3.10}$$

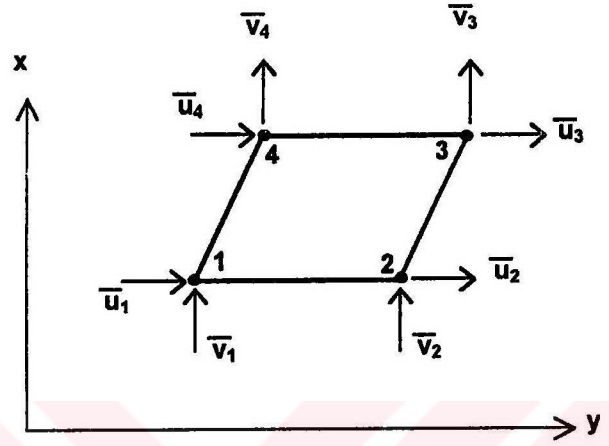
Yukarıdaki (3.10) eşitliği Laplace dönüşüm uzayında virtüel iş ilkesini ifade etmektedir. Eşitliğin sol tarafı iç kuvvetlerin yaptığı virtüel işi, sağ tarafı ise dış kuvvetlerin yaptığı virtüel işi göstermektedir.

3.2.2. Sonlu Eleman Formülasyonu

Bu kısımda, (3.10) ifadesinden yararlanılarak basitlik olması bakımından düzlem elastisite problemlerinin sonlu eleman formülasyonu özetlenmektedir. Elemanın (sonlu veya sonsuz) herhangi bir noktasının deplasmanlarının birbirinden bağımsız olduğu kabul edilerek, her iki deplasman bileşeni (u, v) için interpolasyon şekil fonksiyonları kullanılarak sonlu eleman yaklaşımı yapılmaktadır.

$$\bar{u} = \sum_{i=1}^{n} \bar{N}_i \bar{u}_i \qquad \bar{v} = \sum_{i=1}^{n} \bar{N}_i \bar{v}_i \tag{3.11}$$

Burada, $\bar{u}$ ve $\bar{v}$ elemanın herhangi bir noktasındaki yatay ve düşey deplasmanları, $\bar{u}_i$ ve $\bar{v}_i$ elemanın düğümlerindeki deplasmanları gösterirken, n ise elemanın düğüm sayısını temsil etmektedir (Şekil 3.2).



Şekil 3.2. Tipik bir sonlu eleman

(3.11) bağıntısı yardımıyla deplasmanlar matris notasyonunda

$$\begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{N}_1 & 0 & \bar{N}_2 & 0 & \cdots & \bar{N}_n & 0 \\ 0 & \bar{N}_1 & 0 & \bar{N}_2 & \cdots & 0 & \bar{N}_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \\ \vdots \\ \bar{u}_n \\ \bar{v}_n \end{Bmatrix} \Rightarrow \{\bar{u}\} = [\bar{N}]\{\bar{u}_d\} \qquad (3.12)$$

şeklinde elde edilir. Düğüm deplasmanlarının varyasyonu ise (3.12) yardımıyla,

$$\{\delta\bar{u}\} = [\bar{N}]\{\delta\bar{u}_d\} \Rightarrow \{\delta\bar{u}\}^T = \{\delta\bar{u}_d\}^T[\bar{N}]^T \qquad (3.13)$$

olarak bulunur. Düzlem elastisite hali için şekil değiştirme vektörü, (3.2) ifadeleri kullanılarak matris notasyonunda,

$$\{\bar{\varepsilon}\}=\begin{Bmatrix}\bar{\varepsilon}_x\\ \bar{\varepsilon}_y\\ \bar{\gamma}_{xy}\end{Bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x}\end{bmatrix}}_{[L]}\begin{Bmatrix}\bar{u}\\ \bar{v}\end{Bmatrix}=[L]\{\bar{u}\} \tag{3.14}$$

şeklindedir. (3.12) ifadesi (3.14) te yazılırsa,

$$\{\bar{\varepsilon}\}=[\bar{B}]\{\bar{u}_d\} \qquad [\bar{B}]=[L][\bar{N}] \tag{3.15}$$

olarak şekil değiştirmeler ile düğüm deplasmanları arasındaki ilişki bulunur. Yukarıdaki ifadede $[\bar{B}]$ matrisi şekil değiştirme matrisi olarak adlandırılmaktadır. (3.15) bağıntısı yardımıyla şekil değiştirme vektörünün varyasyonu bulunur.

$$\{\delta\bar{\varepsilon}\}=[\bar{B}]\{\delta\bar{u}_d\} \Rightarrow \{\delta\bar{\varepsilon}\}^T=\{\delta\bar{u}_d\}^T[\bar{B}]^T \tag{3.16}$$

(3.3) te görülen gerilme ifadesinde, (3.15) tarifi yerine yazılırsa gerilmelerin düğüm deplasmanları cinsinden ifadesi elde edilir.

$$\{\bar{\sigma}\}=[D][\bar{B}]\{\bar{u}_d\} \tag{3.17}$$

Bu hazırlıklardan sonra; deplasman, uzama oranı ve gerilmeler için elde edilen (3.12), (3.13), (3.16) ve (3.17) eşitlikleri (3.10) virtüel iş denkleminde yerlerine yazıldığında,

$$\begin{aligned}&\{\delta\bar{u}_d\}^T\left(h_e\int_{A_e}[\bar{B}]^T[D][\bar{B}]dA_e+s^2h_e\int_{A_e}\rho[\bar{N}]^T[\bar{N}]dA_e\right)\{\bar{u}_d\}\\ &=\{\delta\bar{u}_d\}^T\left(h_e\int_{A_e}[\bar{N}]^T\begin{Bmatrix}\bar{f}_x\\ \bar{f}_y\end{Bmatrix}dA_e+h_e\oint_{S_e}[\bar{N}]^T\begin{Bmatrix}\bar{t}_x\\ \bar{t}_y\end{Bmatrix}dS_e\right)\end{aligned} \tag{3.18}$$

bağıntısı bulunur. Burada eleman rijitlik ve kütle matrisleri ile yük vektörleri,

$$\left[\bar{k}\right]=h_e\int_{A_e}\left[\bar{B}\right]^T[D]\left[\bar{B}\right]dA_e \;;\; \left[\bar{m}\right]=h_e\int_{A_e}\rho\left[\bar{N}\right]^T\left[\bar{N}\right]dA_e \qquad (3.19a)$$

$$\left\{\bar{f}\right\}=h_e\int_{A_e}\left[\bar{N}\right]^T\begin{Bmatrix}\bar{f}_x\\ \bar{f}_y\end{Bmatrix}dA_e \;;\; \left\{\bar{t}\right\}=h_e\int_{S_e}\left[\bar{N}\right]^T\begin{Bmatrix}\bar{t}_x\\ \bar{t}_y\end{Bmatrix}dS_e \qquad (3.19b)$$

olarak tariflenirse, (3.18) ifadesi aşağıdaki şekli alır.

$$\left\{\delta\bar{u}_d\right\}^T\left(\left(\left[\bar{k}\right]+s^2\left[\bar{m}\right]\right)\left\{\bar{u}_d\right\}-\left\{\bar{f}\right\}-\left\{\bar{t}\right\}\right)=0 \qquad (3.20)$$

Sonlu eleman yaklaşımında varyasyonlar keyfi olduğundan yukarıdaki bağıntının geçerli olabilmesi için parantez içindeki ifadenin sıfır olması gerekmektedir. Bu durum gözönüne alındığında,

$$\left(\left[\bar{k}\right]+s^2\left[\bar{m}\right]\right)\left\{\bar{u}_d\right\}=\left\{\bar{f}\right\}+\left\{\bar{t}\right\} \qquad (3.21)$$

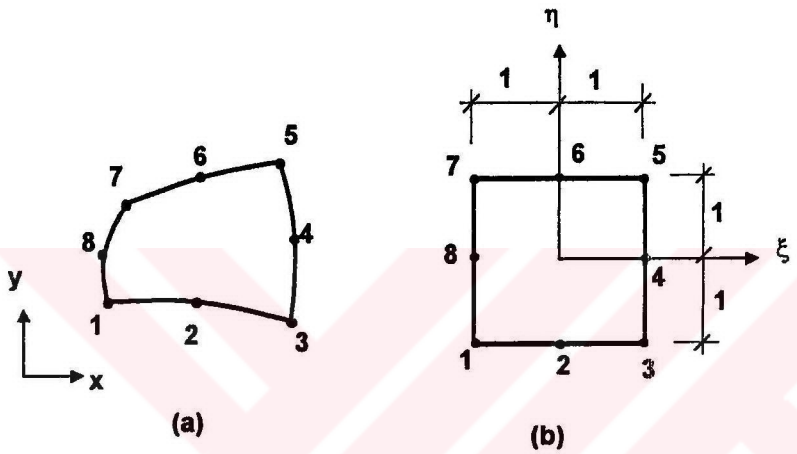
şeklinde, Laplace dönüşüm uzayında eleman hareket denklemi elde edilir. Benzer işlemler tüm elemanlar için yapılıp uygun bir şekilde birleştirildikten sonra (kodlama tekniği veya benzeri bir metodla) sistem hareket denklemi elde edilir.

$$\left(\left[\bar{K}\right]+s^2\left[\bar{M}\right]\right)\left\{\bar{U}_d\right\}=\left\{\bar{P}\right\} \qquad (3.22)$$

Burada, $\left[\bar{K}\right]$ ve $\left[\bar{M}\right]$ sırasıyla sistem rijitlik ve kütle matrislerini, $\left\{\bar{U}_d\right\}$ ve $\left\{\bar{P}\right\}$ ise sırasıyla sistem deplasman ve yük vektörlerini temsil etmektedirler.

3.2.3. Sonlu Eleman Seçimi

Bu tez çalışmasında, iki boyutlu problemlerin (düzlem elastisite ve eksenel simetrik) analizi yapılırken sonlu eleman olarak, standart 8 düğümlü, izoparametrik, kuadratik sonlu eleman kullanılmaktadır (Şekil 3.3).



Şekil 3.3. 8 düğümlü izoparametrik, kuadratik sonlu eleman
(a) Gerçek eleman **(b)** Referans elemanı

Yukarıda görülen 8 düğümlü, izoparametrik sonlu elemanın herhangi bir noktasının koordinatları şekil fonksiyonları kullanılarak,

$$x=\sum_{i=1}^{8} N_i x_i \qquad y=\sum_{i=1}^{8} N_i y_i \tag{3.23}$$

şeklinde bulunmaktadır. Burada x_i ve y_i, i düğümünün koordinatları olup, N_i şekil fonksiyonları aşağıdaki gibidir.

$$N_1=\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-1-\xi-\eta)$$

$$N_2=\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)$$

$$N_3=\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(-1+\xi-\eta) \qquad (3.23a)$$

$$N_4=\frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2)$$

$$N_5=\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(-1+\xi+\eta)$$

$$N_6=\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta)$$

$$N_7=\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-1-\xi+\eta) \qquad (3.23b)$$

$$N_8=\frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)$$

Elemanın herhangi bir noktasındaki yatay ve düşey deplasmanların hesabı için yine şekil fonksiyonları kullanılarak,

$$u=\sum_{i=1}^{8} N_i u_i \qquad v=\sum_{i=1}^{8} N_i v_i \qquad (3.24)$$

şeklinde sonlu eleman yaklaşımı yapılmaktadır. Eleman izoparametrik olduğundan interpolasyon şekil fonksiyonları ile geometrik şekil fonksiyonları birbirlerinin aynısı olarak kullanılmaktadır.

3.2.4. Düzlem Elastisite Hali İçin Eleman Rijitlik ve Kütle Matrislerinin Hesabı

Eleman rijitlik ve kütle matrislerinin tarifleri (3.19a) bağıntısında görülmektedir. Eleman rijitlik matrisinin tarifinde görülen [D] malzeme matrisinin elemanları olarak, problemin tipine göre (3.4b) veya (3.4c) eşitlikleri kullanılmaktadır. Şekil değiştirme matrisi, $[B^d]$, ise kuadratik, 8 düğümlü sonlu eleman için (3.14) ve (3.15) bağıntıları kullanılarak,

$$\left[B^d\right]_{(3\times16)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}_{(3\times2)} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \cdots & N_8 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \cdots & 0 & N_8 \end{bmatrix}_{(2\times16)} \qquad (3.25)$$

$$\left[B^d\right] = \left[\underline{B}_1^d \quad \underline{B}_2^d \quad \cdots \quad \underline{B}_8^d\right]$$

şeklinde elde edilir. Yukarıda görülen tipik bir $\underline{B}_i^d$ alt matrisi ise şu formdadır:

$$\left[B_i^d\right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix}_{(3\times2)} \qquad (3.26)$$

(3.26) ifadesinde şekil fonksiyonlarının x ve y'ye göre kısmi türevleri gözükmektedir. Bunların hesabı için, öncelikle şekil fonksiyonlarının ξ ve η'ya göre türevleri hesaplanırsa,

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta} \qquad (3.27)$$

bulunur ve matris notasyonu ile,

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} \tag{3.28}$$

şeklinde yazılır. Burada [J], Jacobian dönüşüm matrisi olup geometrik şekil fonksiyonları kullanılarak,

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{8} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix} \tag{3.29}$$

şeklinde hesaplanmaktadır. (3.28) bağıntısının her iki tarafı soldan Jacobian matrisinin tersi ile çarpılıp düzenlemeler yapılırsa, şekil fonksiyonlarının x ve y'ye göre kısmi türevleri,

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J^*] \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \tag{3.30}$$

olarak bulunur. Burada $[J^*]$, Jacobian matrisinin tersini temsil etmektedir ($[J^*]=[J]^{-1}$).

$$[J^*] = \begin{bmatrix} J_{11}^* & J_{12}^* \\ J_{21}^* & J_{22}^* \end{bmatrix} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \tag{3.31}$$

(3.30) ifadesinde gözüken, şekil fonksiyonlarının kartezyen koordinatlara göre kısmi türevleri açık yazılacak olursa,

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = J_{11}^* \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + J_{12}^* \frac{\partial N_i}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial y} = J_{21}^* \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + J_{22}^* \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \qquad (3.32)$$

elde edilir. Bu ifadeler (3.26) bağıntısında yerine yazılırsa şekil değiştirme matrisinin elemanları elde edilir.

$$\left[B_i^d\right] = \begin{bmatrix} J_{11}^* & J_{12}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{21}^* & J_{22}^* \\ J_{21}^* & J_{22}^* & J_{11}^* & J_{12}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} \qquad (3.33)$$

Ayrıca, x-y kartezyen koordinatlarındaki elemanter bir alan (dA_e), Jacobian dönüşümü kullanılarak,

$$dA_e = dx\,dy = |J|\,d\xi\,d\eta \qquad (3.34)$$

şeklinde elde edilmektedir.

(3.19a)'da verilen eleman rijitlik matrisi, ξ-η referans koordinatlarında,

$$\left[k^d\right]_{(16\times16)} = h_e \int_{\eta=-1}^{+1} \int_{\xi=-1}^{+1} \left[B^d\right]^T [D] \left[B^d\right] |J|\,d\xi\,d\eta \qquad (3.35)$$

şekline dönüşmektedir. Yukarıdaki integraller, Gauss-Legendre sayısal integrasyon yöntemi ile hesaplanmaktadır. Bu yöntemle tipik eleman,

$$I=\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} F(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta \cong \sum_{m=1}^{L}\sum_{n=1}^{L} W_m\,W_n\,F(\xi_m,\eta_n) \tag{3.36}$$

şeklinde hesaplanmaktadır. Burada, L Gauss integrasyon nokta sayısını, ξ_m ve η_n ise Gauss integrasyon nokta koordinatlarını ve W_m ile W_n ise Gauss integrasyon ağırlık değerlerini temsil etmektedirler.

Benzer olarak eleman kütle matrisi de, referans koordinatlarına,

$$\left[m^d\right]_{(16\times16)} = h_e \int_{\eta=-1}^{+1}\int_{\xi=-1}^{+1} \rho\,[N]^T[N]\,|J|\,d\xi\,d\eta \tag{3.37}$$

şeklinde dönüşmekte ve yine Gauss-Legendre integrasyon metodu ile sayısal olarak hesaplanmaktadır. Elemanın herhangi bir noktasındaki gerilmeler (3.17) ifadesinden yararlanılarak hesaplanabilmektedir. Gerilme ifadesinde gözüken şekil değiştirme matrisi için (3.25) ifadesi kullanılırsa,

$$\{\sigma\}=\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\sum_{i=1}^{8}[D]\left[B_i^d\right]\begin{Bmatrix}u_i\\ v_i\end{Bmatrix} \tag{3.38}$$

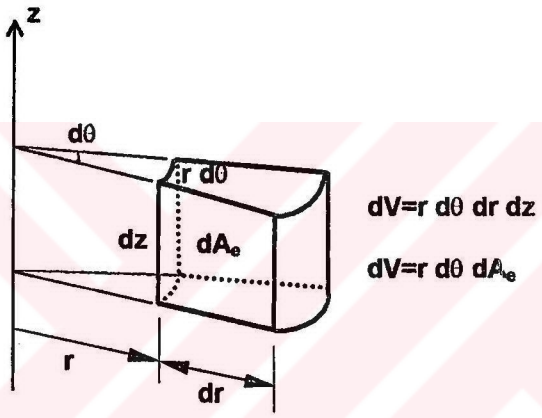
bağıntısı elde edilir. Şekil değiştirme matrisinin (3.33) teki ifadesi kullanılırsa,

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\sum_{i=1}^{8}\left([D]\begin{bmatrix}J_{11}^* & J_{12}^* & 0 & 0\\ 0 & 0 & J_{21}^* & J_{22}^*\\ J_{21}^* & J_{22}^* & J_{11}^* & J_{12}^*\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial N_i}{\partial\xi} & 0\\ \frac{\partial N_i}{\partial\eta} & 0\\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial\xi}\\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial\eta}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_i\\ v_i\end{Bmatrix}\right) \tag{3.39}$$

şeklinde düğüm deplasmanları ve şekil fonksiyonlarına bağlı olarak gerilme vektörü elde edilir. Burada problemin tipine uygun olan malzeme matrisi elemanları (3.4b) veya (3.4c) den alınacaktır.

3.2.5. Eksenel Simetrik Hal İçin Eleman Rijitlik ve Kütle Matrislerinin Hesabı

Eksenel simetrik geometri ve yüklemeye sahip problemler, iki boyutlu olarak ele alınmaktadır. Bu tip sistemlerde tüm büyüklükler "θ" dönme açısından bağımsız olmakta ve "z" ekseni ise cismin dönel simetri ekseni olmaktadır (Şekil 3.4).



Şekil 3.4. Eksenel simetrik sonlu eleman

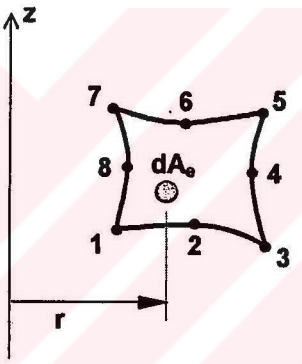
Bu durumda herhangi bir noktanın deplasmanı u=u(r,z) ve v=v(r,z) olmaktadır. Eksenel simetrik hal için uzama oranları ve bunların deplasmanlar ile arasındaki ilişki,

$$\{\varepsilon\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_r\\ \varepsilon_z\\ \varepsilon_\theta\\ \gamma_{rz}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial r}\\ \dfrac{\partial v}{\partial z}\\ \dfrac{u}{r}\\ \dfrac{\partial u}{\partial z}+\dfrac{\partial v}{\partial r}\end{Bmatrix} \tag{3.40}$$

olarak tarif edilmektedir. Uzama oranları ile gerilmeler arasındaki ilişkiyi belirleyen bünye denklemi aşağıdaki gibi tarif edilmektedir.

$$\begin{Bmatrix}\sigma_r\\ \sigma_z\\ \sigma_\theta\\ \tau_{rz}\end{Bmatrix}=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix}(1-\nu) & \nu & \nu & 0\\ \nu & (1-\nu) & \nu & 0\\ \nu & \nu & (1-\nu) & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_r\\ \varepsilon_z\\ \varepsilon_\theta\\ \gamma_{rz}\end{Bmatrix} \qquad (3.41)$$

Eksenel simetrik problemlerde de, düzlem elastisite problemlerinde olduğu gibi 8 düğümlü, kuadratik, izoparametrik sonlu eleman kullanılmaktadır (Şekil 3.5).



Şekil 3.5. 8 düğümlü, kuadratik sonlu eleman

Sonlu eleman yaklaşımı kullanılarak herhangi bir noktanın geometrik ve interpolasyon dönüşümleri aşağıda görüldüğü gibi elde edilmektedir.

$$r=\sum_{i=1}^{8}N_i r_i \qquad z=\sum_{i=1}^{8}N_i z_i$$

$$u=\sum_{i=1}^{8}N_i u_i \qquad v=\sum_{i=1}^{8}N_i v_i \qquad (3.42)$$

Burada, N_i (i=1-8) şekil fonksiyonları (3.23) bağıntılarından alınmaktadır. Şekil değiştirme vektörü, (3.40) ve (3.42) eşitlikleri kullanılarak,

$$\{\varepsilon\}=\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{r} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial r} \end{bmatrix}[N]\{u_d\}=[B^e]\{u_d\} \tag{3.43}$$

tarzında ifade edilmektedir. Bu durumda eleman rijitlik matrisi,

$$[k^e]=\int_{A_e}\left(\int_{\theta=0}^{2\pi}[B^e]^T[D][B^e]\,r\,d\theta\right)dA_e \tag{3.44}$$

olmaktadır. Eleman rijitlik matrisi ifadesinde görülen $[B^e]$ şekil değiştirme matrisi, eksenel simetrik hal için aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır.

$$[B^e]=[\underline{B}_1^e \quad \underline{B}_2^e \quad \cdots \quad \underline{B}_8^e]$$

$$[B_i^e]=\begin{bmatrix} J_{11}^* & J_{12}^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{21}^* & J_{22}^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r} \\ J_{21}^* & J_{22}^* & J_{11}^* & J_{12}^* & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ N_i & 0 \end{bmatrix} \tag{3.45}$$

(3.44) bağıntısı ile verilen eleman rijitlik matrisindeki tüm ifadeler "θ" açısından bağımsız olduğundan, θ üzerinde (0,2π) arasında integralin alınmasıyla, referans koordinatlarında eleman rijitlik matrisi,

$$\left[k^e\right]_{(16\times16)} = 2\pi \int_{\eta=-1}^{+1} \int_{\xi=-1}^{+1} \left[B^e\right]^T [D] \left[B^e\right] r |J| \, d\xi \, d\eta \tag{3.46}$$

formunda elde edilir. Benzer şekilde eleman kütle matrisi de,

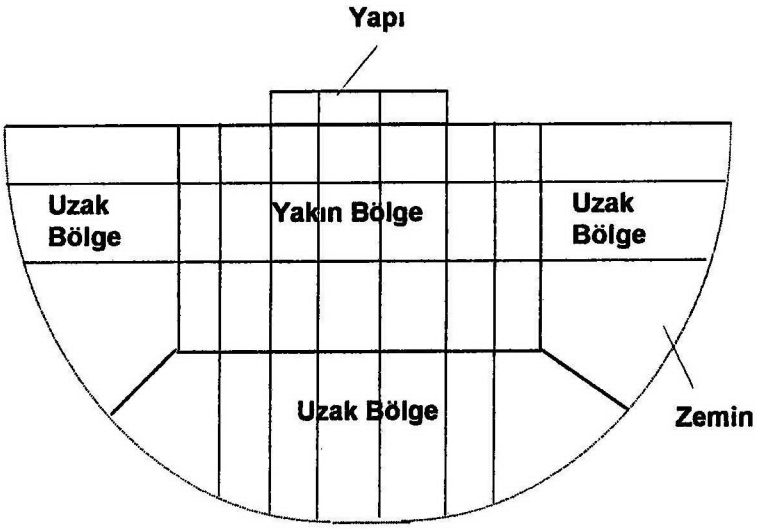
$$\left[m^e\right]_{(16\times16)} = 2\pi \int_{\eta=-1}^{+1} \int_{\xi=-1}^{+1} \rho [N]^T [N] r |J| \, d\xi \, d\eta \tag{3.47}$$

şeklinde bulunur. Yine buradaki integraller Gauss-Legendre sayısal integrasyon yöntemi kullanılarak hesaplanmaktadır.

3.3. Yapı-Zemin Etkileşim Analizi

Bu kısımda, iki boyutlu düzlemsel veya eksenel simetrik geometri ve yüklemeye sahip yapı-zemin etkileşimi problemleri incelenmektedir. Burada gözönünde bulundurulan sistemler elastik ve/veya viskoelastik malzeme olarak ele alınmaktadır. Üst yapı (iki boyutlu problemlerde genellikle temel) standart sonlu elemanlarla temsil edilmektedir. Yarı sonsuz zemin ise, üst yapıya veya kaynağa (yüklemeye) yakın bölgelerde standart sonlu elemanlar ile uzak bölgelerde ise çeşitli tipteki sonsuz elemanlar kullanılarak modellenmektedir (Şekil 3.6). Sonsuz eleman formülasyonu, cismin herhangi bir noktasındaki deplasmanın dalga yayılışı özelliklerini taşıyacak şekilde yapılmaktadır. Bu özellikler, yüzeye yakın bölgelerde R (Rayleigh) dalgası, ortam içinde ise S (Shear) ve P (Dilatational) dalgalarının özellikleridir.

Bu tezde, dinamik yapı-zemin etkileşimi problemleri, harmonik yükleme ve zamanla keyfi değişen (transient) yükleme olarak iki ayrı kısımda incelenmektedir. Formülasyon, harmonik hal için kompleks uzayda, zamanla keyfi değişen yüklemeler için ise Laplace dönüşüm uzayında yapılmaktadır.



Şekil 3.6. Yapı-zemin etkileşim modeli

Bu çalışmada, uzak bölgelerin modellenmesinde üç ayrı tipte, azalan fonksiyonlu sonsuz eleman modeli (bir, iki ve üç dalga tipini birarada gözönüne alabilen sonsuz elemanlar) önerilmektedir. Sonsuz elemanlarda kullanılan şekil fonksiyonları, elemanın sonsuza uzanan yönde genlik azalmasını ve faz gecikmesini sağlayacak deplasman yayılma fonksiyonları kullanılarak formüle edilmektedir.

3.3.1. Elastik Dalgalar

Yarı sonsuz ortamda yapı-zemin etkileşim analizi incelenirken, kaynaktan uzağa konan sonsuz elemanların amaçlarından biride, ortam içinde yayılan dalgaların sonlu elemanların bittiği yerden (sınırdan) geçip sonsuzda sıfır olmasıdır. Bir başka deyişle, dalgaların sınıra çarpıp yansıyarak tekrardan ortama dönmesini engellemektir. Eğer dalgalar sınıra çarpıp dönerse, analiz sonucu bulunan çözüm güvenilir olmamaktadır. Bu sebepten dolayı, dinamik problemler incelenirken sadece sonlu bir bölgeyi gözönüne alıp işlem yapmak sakıncalı olmaktadır. Bu tez çalışmasında önerilen sonsuz elemanlarla, ortamda yayılan elastik dalgaların sınırdan geçip sonsuzda sıfır olması sağlanarak, yansımalar önlenmektedir.

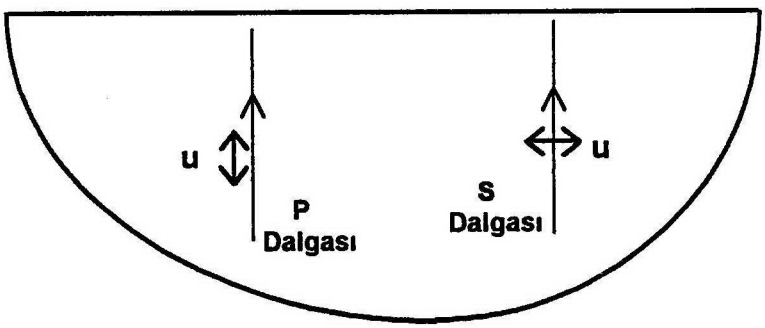
Düzlemsel halde, zaman uzayındaki dalga denklemi aşağıdaki formda verilmektedir.

$$u=f\left(t-\frac{x}{c}\right)+g\left(t+\frac{x}{c}\right) \tag{3.48}$$

Burada "f" ve "g", başlangıç şartlarından yararlanılarak bulunacak olan bazı fonksiyonları temsil etmektedir. Ayrıca, f(t-x/c) sınırdan c hızıyla ilerleyen dalga özelliklerini, g(t+x/c) ise sınıra çarpıp yansıyan dalga özelliklerini göstermektedir. Yarı sonsuz ortamda dalgaların yansıması istenmediğinden dolayı, (3.48) dalga denklemi,

$$u=f\left(t-\frac{x}{c}\right) \tag{3.49}$$

şeklinde olmalıdır. Bu ifade, dalgaların boyuna yayıldığı kabul edilirse (deplasman ile dalga birbirine paralel, Dilatational) P dalgasının ($c=c_P$) özelliklerini taşımakta, dalgaların dikine yayıldığı kabul edilirse (deplasman ile dalga birbirine dik, Shear) S dalgasının ($c=c_S$) özelliklerini taşımaktadır (Şekil 3.7).



Şekil 3.7. Yüzeye dik gelen elastik dalgalar

Yukarıda bahsedilen boyuna dalga (c_P Dilatational wave) ve dikine dalga (c_S Shear wave) hızlarının ifadeleri,

$$c_P = \sqrt{\frac{\lambda+2G}{\rho}} \qquad c_S = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \tag{3.50}$$

şeklinde tariflenmektedirler. Burada, ρ kütlesel yoğunluğu, G kayma modülünü ve λ ise Lamé sabitini göstermekte ve aşağıdaki gibi tarif edilmektedirler.

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \qquad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{2\nu G}{(1-2\nu)} \tag{3.51}$$

Bunlara ilave olarak birde yüzeye yakın bölgelerde yayılan Rayleigh dalgası (c_R) mevcuttur (Fung, 1965). Rayleigh dalga hızı, dikine dalga hızının (c_S) belirli bir katı olarak elde edilmektedir. Bu iki dalga hızı arasındaki oran Poisson oranına (ν) bağlı olarak değişmektedir. Yani her iki dalga hızı arasında,

$$\frac{c_R}{c_S} = A \tag{3.52}$$

gibi bir ilişki mevcuttur. Fung (1965)'da, A katsayısının Poisson oranı ile değişimi grafik olarak verilmektedir. Bununla birlikte (3.51) tarifleri (3.50) eşitliklerinde yerine yazılırsa P ve S dalga hızları arasında,

$$\frac{c_P}{c_S} = \sqrt{\frac{2(1-\nu)}{(1-2\nu)}} \tag{3.53}$$

şeklinde ilişki ortaya çıkmaktadır. Ayrıca dalga hızları arasında,

$$c_P > c_S > c_R \tag{3.54}$$

şeklinde bir ilişkide mevcuttur.

3.3.2. Harmonik Yükleme Durumu

Harmonik yükleme durumunda formülasyonun tamamı kompleks uzayda yapılmaktadır. Elastodinamikten bilindiği üzere, sönümün ihmal edildiği durumlarda sistem hareket denklemi aşağıdaki gibi verilmektedir.

$$[M]\{\ddot{U}\}+[K]\{U\}=\{F(t)\} \tag{3.55}$$

Burada, [K] ve [M] sistem rijitlik ve kütle matrislerini; $\{F(t)\},\{U\}$ ve $\{\ddot{U}\}$ ise sırasıyla sistem yük, deplasman ve ivme vektörlerini temsil etmektedir. Harmonik yükleme durumunda, sistem yük vektörünün,

$$\{F(t)\}=\{F_0\}e^{i\omega t} \tag{3.56}$$

formunda olduğu kabul edilmektedir. Burada $\{F_0\}$ harmonik yüklemenin genlik vektörünü, ω yüklemenin frekansını ve i ise kompleks sayıyı ($\sqrt{-1}$) göstermektedir. Bununla birlikte, sisteme ait deplaşmanların çözümününde aynı frekansla harmonik olduğu kabul edildiğinden,

$$\{U\}=\{U_0\}e^{i\omega t} \tag{3.57}$$

şeklinde elde edilmektedir. $\{U_0\}$ deplasman genlik vektörüdür. Benzer olarak ivme vektörü (3.57) ifadesi kullanılarak,

$$\{\ddot{U}\}=-\omega^2\{U_0\}e^{i\omega t} \tag{3.58}$$

şeklinde elde edilir. (3.56), (3.57) ve (3.58) eşitlikleri (3.55) sistem hareket denkleminde yerlerine konursa

$$\left([K]-\omega^2[M]\right)\{U_0\}=\{F_0\} \tag{3.59}$$

şeklinde, harmonik yükleme durumu için sistem hareket denklemi elde edilir. Görüldüğü gibi sistem denklemi ikinci mertebeden diferansiyel denklem takımı yerine; lineer, cebrik denklem takımına dönüşmektedir. Sistem denklem takımının çözümünden deplasman genlik vektörü bulunup, (3.57) ve (3.58) de yerine konulduğunda sistem deplasman ve ivme vektörleri elde edilmiş olur.

Eğer sistemde sönüm varsa (bu çalışmada harmonik yükleme hali için sadece histeretik sönüm kullanılmaktadır), elastik-viskoelastik anolojisi kullanılarak (3.59) da görülen sistem denklem takımı,

$$\left((1+2iz)[K]-\omega^2[M]\right)\{U_0\}=\{F_0\} \tag{3.60}$$

şeklinde modifiye edilerek kullanılmaktadır. Burada, "z" histeretik sönüm oranını temsil etmektedir. Bundan sonra, yarı sonsuz ortamda kaynaktan uzak bölgelerin modellenmesinde kullanılan sonsuz eleman tipleri anlatılmaktadır.

3.3.2.1. Tek Dalga Tipini İçeren Sonsuz Eleman

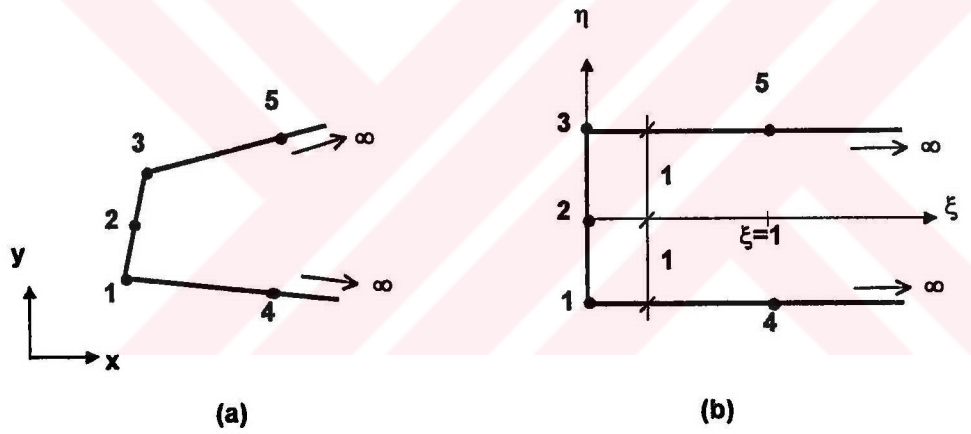
Tek dalga tipini içeren, 5 düğümlü ve azalan fonksiyonlu bir sonsuz eleman referans koordinatlarında yine sonsuz bir bölgeye tasvir edilmektedir (Şekil 3.8). Şekildende görüldüğü gibi bu elemanda bir doğrultu sonsuza giderken (ξ-yönü, $0\le\xi\le\infty$), diğer doğrultu sonlu bir boyuta sahiptir (η-yönü, $-1\le\eta\le+1$). Gerçek eleman ile referans elemanı arasında geometrik dönüşüm,

$$x=\sum_{i=1}^{5} M_i\, x_i \qquad y=\sum_{i=1}^{5} M_i\, y_i \tag{3.61}$$

ile tarif edilmekte ve M_i geometrik şekil fonksiyonları,

$$M_1=\frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta)$$
$$M_2=0$$
$$M_3=\frac{1}{2}(1-\xi)(1+\eta) \qquad (3.62)$$
$$M_4=\frac{1}{2}\xi(1-\eta)$$
$$M_5=\frac{1}{2}\xi(1+\eta)$$

olarak verilmektedir (Chuhan ve Chongbin, 1987).



Şekil 3.8. 5 düğümlü sonsuz eleman
(a) Gerçek eleman **(b)** Referans elemanı

Yukarıdaki şekilde görülen ve tek dalga tipini içeren sonsuz elemanın herhangi bir noktasındaki deplasmanlar,

$$u=\sum_{i=1}^{3}N_i u_i \qquad v=\sum_{i=1}^{3}N_i v_i \qquad (3.63)$$

bağıntısı ile verilmektedir. Burada kullanılan interpolasyon şekil fonksiyonları,

$$N_1(\xi,\eta,\omega) = P(\xi,\omega)\left[\frac{1}{2}\eta(\eta-1)\right]$$
$$N_2(\xi,\eta,\omega) = P(\xi,\omega)\left[1-\eta^2\right] \qquad (3.64)$$
$$N_3(\xi,\eta,\omega) = P(\xi,\omega)\left[\frac{1}{2}\eta(\eta+1)\right]$$

olarak alınmaktadır. Yukarıda görülen $P(\xi,\omega)$ ifadesi, deplasman yayılma fonksiyonu olarak adlandırılmakta ve ξ-doğrultusunda sonsuza uzanan bir elemanda aşağıdaki formda seçilmektedir.

$$P(\xi,\omega) = e^{-(\alpha+\beta)\xi} \qquad \beta = i\beta^* \qquad \beta^* = \frac{\omega}{c}L \qquad (3.65)$$

Bu bağıntıda, "α" ve "β^*" sırasıyla deplasman genlik azaltma parametresi ve dalga sayılarını göstermektedir. "c" ise dalga hızını (c_P, c_S veya c_R) temsil etmektedir. "L" karakteristik boy olup sonsuz elemanın sonsuza uzanan kenarındaki düğümler arasındaki mesafe olarak tanımlanmaktadır.

$$L = \sqrt{(x_4-x_1)^2+(y_4-y_1)^2} \qquad (3.66)$$

Sonsuz elemana ait eleman rijitlik ve kütle matrislerinin hesabı için de yine (3.19) ifadeleri aynen kullanılmaktadır. Bu tarifler ile yukarıda verilen geometrik ve interpolasyon şekil fonksiyonları kullanılarak, tek dalga özelliğini taşıyan sonsuz elemana ait eleman matrisleri referans koordinatlarında, düzlem elastisite hali için,

$$\left[k^{Sd}\right]_{(6\times6)} = h_e \int_{\eta=-1}^{+1}\int_{\xi=0}^{\infty}\left[B^d\right]^T[D]\left[B^d\right]|J|\,d\xi\,d\eta$$
$$\left[m^{Sd}\right]_{(6\times6)} = h_e \int_{\eta=-1}^{+1}\int_{\xi=0}^{\infty}\rho\,[N]^T[N]|J|\,d\xi\,d\eta \qquad (3.67a)$$

şeklinde elde edilirken, eksenel simetrik durum için,

$$\left[k^{Se}\right]_{(6\times6)} = 2\pi \int_{\eta=-1}^{+1} \int_{\xi=0}^{\infty} \left[B^e\right]^T [D] \left[B^e\right] r \,|J|\, d\xi\, d\eta$$

$$\left[m^{Se}\right]_{(6\times6)} = 2\pi \int_{\eta=-1}^{+1} \int_{\xi=0}^{\infty} \rho \left[N\right]^T [N] r \,|J|\, d\xi\, d\eta \qquad (3.67b)$$

şeklinde bulunabilmektedir. Sonsuz elemana ait Jacobian matrisi, (3.62) geometrik şekil fonksiyonları kullanılarak,

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{5} \begin{bmatrix} \frac{\partial M_i}{\partial \xi} x_i & \frac{\partial M_i}{\partial \xi} y_i \\ \frac{\partial M_i}{\partial \eta} x_i & \frac{\partial M_i}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix} \qquad (3.68)$$

şeklinde hesaplanmaktadır. (3.67) bağıntılarından görüleceği gibi eleman matrislerinin sayısal integral hesabı için, sonlu yönde Gauss-Legendre integrasyon yöntemi kullanılırken, sonsuz yöndeki integraller için özel bir metoda ihtiyaç duyulmaktadır. Bu tezde, sonsuz yöndeki integrallerin sayısal hesabı için Newton-Cotes integrasyon yöntemi kullanılmaktadır.

3.3.2.1.(1). α Azaltma Parametresinin Seçimi

α azaltma parametresi, deplasmanlar için çözümün ne şekilde olduğu varsayımına dayalı olarak seçilmektedir (Bettess ve Bettess, 1984). Gerçek davranışın A/x tarzında olduğu kabul edilirse, çözümün esas terimi ise deplasman yayılma fonksiyonunda görülen $Be^{(-\alpha\xi)}$ olmaktadır. Bu durumda sonsuz eleman üzerinde, A/x ve $Be^{(-\alpha\xi)}$ ifadelerinin aynı sonucu vermesi gerekmektedir. Şekil 3.8 yardımıyla, $\xi=0$ için $x=x_1$ ve $\xi=1$ için $x=x_4$ olduğu görülmektedir. Bu durum gözönüne alındığında, yukarıdaki ifadeler aşağıdaki hali almaktadırlar:

$$\xi = 0 \quad \text{için} \quad \frac{A}{x_1} = B$$
$$\xi = 1 \quad \text{için} \quad \frac{A}{x_4} = B\, e^{-\alpha} \tag{3.69}$$

Bu iki bağıntıdan α azaltma parametresi,

$$\alpha = Ln\left(\frac{x_4}{x_1}\right) \tag{3.70}$$

olarak bulunur. Bununla beraber, çözümün uzak bölgedeki davranışı A/x^2 olarak tahmin edilirse, benzer işlemlerden sonra,

$$\alpha = Ln\left(\frac{x_4}{x_1}\right)^2 = 2\, Ln\left(\frac{x_4}{x_1}\right) \tag{3.71}$$

olarak elde edilir. Eğer çözümün başka bir tarzda olduğu kabul edilirse benzer işlemler yapılarak α azaltma parametresi için bir tahmin yapılabilmektedir.

3.3.2.1.(2). Newton-Cotes İntegrasyon Yöntemi

Yukarıda bahsedildiği üzere bu tezde, sonsuz yöndeki integrallerin sayısal hesabı için Newton-Cotes integrasyon yöntemi kullanılmaktadır. Eleman rijitlik ve kütle matrisleri incelenecek olursa, deplasman yayılma fonksiyonunun formundan dolayı sonsuz yöndeki tipik bir integral ifadesi,

$$I = \int_0^{\infty} F(\xi)\, e^{-2(\alpha+\beta)\xi}\, d\xi \qquad \beta = i\,\beta^* \tag{3.72}$$

şeklindedir. Newton-Cotes integrasyon yöntemi uygulanırsa, bu integralin yaklaşık olarak ifadesi,

$$I = \sum_{k=1}^{M} W_k F(\xi_k) = W_1 F(\xi_1) + W_2 F(\xi_2) + \cdots + W_M F(\xi_M) \tag{3.73}$$

şeklinde bulunabilir. Burada, M integrasyon nokta sayısını, W_k ağırlık değerlerini ve ξ_k ise integrasyon absis değerlerini temsil etmektedir. (3.72) ifadesinde görülen $F(\xi)$ fonksiyonunun Lagrangian polinom formu,

$$F(\xi) = F_1 L_1(\xi) + F_2 L_2(\xi) + \cdots + F_M L_M(\xi) = \sum_{k=1}^{M} F_k L_k(\xi) \tag{3.74}$$

olarak tanımlanmaktadır. F_k, $F(\xi)$ nin ξ_k noktasındaki değerini gösterirken, $L_k(\xi)$ ise Lagrangian baz fonksiyonları olup,

$$L_k(\xi) = \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^{M} \frac{\xi - \xi_p}{\xi_k - \xi_p} = A_{k0} + A_{k1}\xi + A_{k2}\xi^2 + A_{k3}\xi^3 + \cdots = \sum_{j=0}^{M-1} A_{kj}\xi^j \tag{3.75}$$

şeklinde tarif edilmektedir. (3.74) ifadesi (3.72) de yerine yazılırsa,

$$I = \int_0^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{M} F_k L_k(\xi) \right) e^{-2(\alpha+\beta)\xi} d\xi = \sum_{k=1}^{M} \left(F_k \int_0^{\infty} L_k(\xi) e^{-2(\alpha+\beta)\xi} d\xi \right) \tag{3.76}$$

bulunur. Bu ifade yeniden düzenlenirse,

$$I = \sum_{k=1}^{M} F_k W_k \qquad W_k = \int_0^{\infty} L_k(\xi)\, e^{-2(\alpha+\beta)\xi} d\xi \tag{3.77}$$

olarak bulunur. (3.75) eşitliği (3.77) de yerine yazılırsa,

$$W_k = \int_0^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{M-1} A_{kj} \xi^j \right) e^{-2(\alpha+\beta)\xi} d\xi \tag{3.78}$$

bulunur.Buradan ağırlık fonksiyonları için,

$$W_k = \sum_{j=0}^{M-1} A_{kj} \underbrace{\left(\int_0^{\infty} \xi^j e^{-2(\alpha+\beta)\xi} d\xi \right)}_{I_j} \tag{3.79}$$

ifadesi elde edilir. Bu bağıntıda görülen I_j sonsuz integrali, Gamma fonksiyonu kullanılarak analitik olarak aşağıdaki gibi hesaplanabilmektedir (Abramowitz ve Stegun, 1968).

$$I_j = \int_0^{\infty} \xi^j e^{-2(\alpha+\beta)\xi} d\xi = (g^{j+1})\, j! \qquad g = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha+\beta} \right) \tag{3.80}$$

Sonuç olarak ağırlık değerleri (W_k) analitik olarak,

$$W_k = \sum_{j=0}^{M-1} A_{kj} (g^{j+1})\, j! \tag{3.81}$$

şeklinde hesaplanır. MATHEMATICA paket programı kullanılarak, Newton-Cotes yöntemi ağırlık değerlerinin hesabı için kısa bir program hazırlanmıştır. Bu program, k=1,2, ... , M olmak üzere ξ_1=0, ξ_2=0.25, ξ_3=0.50, ... , ξ_k=(k-1)/4 absis değerleri için W_k ağırlık değerlerini hesaplamaktadır. Ayrıca uygun değişikliklerle başka absis değerleri içinde ağırlık fonksiyonları hesaplanabilir. MATHEMATICA programının listesi Şekil 3.9'da görülmektedir.

```
m=Input [ " İntegrasyon Nokta Sayısı, M = ? " ]
Do [ xi[k]=(k-1)/4 , {k,1,m} ]
nom [ m_ , k_ ]:=Product [ x - xi[p] , {p,1,m} ] / (x - xi[k])
L [ m_ , k_ ]:=nom[m,k] / (nom[m,k] /.x->xi[k])
Do [  a [k,j]=Coefficient [ L[m,k] , x , j ]  , { j , 0 , m-1} , { k , 1 , m } ]
int [ j_ ]:= int[ j ]= g^( j+1 ) * j!
Do [  W[k] = Sum [ a[k,j] * int[j]  , { j , 0 , m-1 } ] , { k , 1 , m } ]
```

Şekil 3.9. Newton-Cotes ağırlık değerleri için program listesi

3.3.2.2. İki Dalga Tipini İçeren Sonsuz Eleman

Aynı anda iki dalganın mevcudiyetini gözönüne alabilen sonsuz eleman için Şekil 3.8'de görülen eleman kullanılmaktadır. Bu elemanın gerçek koordinatlardan referans koordinatlarına dönüşümü için de (3.61) yaklaşımı ve (3.62) geometrik şekil fonksiyonları kullanılmaktadır. Bununla birlikte sonsuz elemana ait deplasmanların dönüşümü ise,

$$u=\sum_{i=1}^{5} N_i u_i$$
$$v=\sum_{i=1}^{5} N_i v_i \qquad (3.82)$$

şeklinde tarif edilmektedir. Burada kullanılan N_i interpolasyon şekil fonksiyonları, (3.83) bağıntısında verilmektedir.

$$
\begin{aligned}
N_1(\xi,\eta,\omega) &= P_1(\xi,\omega)\left[\frac{1}{2}\eta(\eta-1)\right] \\
N_2(\xi,\eta,\omega) &= P_2(\xi,\omega)\left[1-\eta^2\right] \\
N_3(\xi,\eta,\omega) &= P_3(\xi,\omega)\left[\frac{1}{2}\eta(\eta+1)\right] \\
N_4(\xi,\eta,\omega) &= P_4(\xi,\omega)\left[\frac{1}{2}(1-\eta)\right] \\
N_5(\xi,\eta,\omega) &= P_5(\xi,\omega)\left[\frac{1}{2}(1+\eta)\right]
\end{aligned}
\qquad (3.83)
$$

Yukarıdaki bağıntıda görülen $P_i(\xi,\omega)$ deplasman yayılma fonksiyonları, aynı anda iki dalganın mevcudiyetini içermektedir. Bu fonksiyonlar, düzlem dalgaların süperpozisyonu şeklinde olduğu varsayılarak aşağıdaki formda seçilmektedir.

$$
\begin{aligned}
P(\xi,\omega) &= a\,e^{-(\alpha+\beta_1)\xi} + b\,e^{-(\alpha+\beta_2)\xi} \\
\beta_k &= i\beta_k^* \qquad \beta_k^* = \frac{\omega}{c_k} L
\end{aligned}
\qquad (3.84)
$$

Yukarıdaki bağıntıda görülen a ve b katsayılarının, iki dalganın mevcudiyetini içerecek şekilde bulunması gerekmektedir. (3.82) ifadesinde görülen u (veya v) ifadesi açık yazılacak olursa,

$$u = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 + N_4 u_4 + N_5 u_5 \qquad (3.85)$$

bulunur. Elemanın herhangi bir noktasındaki deplasman, (3.85) bağıntısı yardımıyla düğüm değerleri cinsinden hesaplanabilmektedir. (3.85) bağıntısı aynı zamanda elemanın sınırlarındaki her nokta içinde geçerlidir. Bundan yararlanarak, elemanın düğüm deplasmanları da bu eşitlik kullanılarak hesaplanabilmektedir. Bu özellik kullanılarak a ve b katsayıları bulunabilir. Bu amaçla tipik olarak elemanın sonsuza

uzanan bir kenarı gözönüne alınmaktadır (1 ile 4 düğümlerinin bulunduğu kenar veya 3 ile 5 düğümlerinin bulunduğu kenar). Sonsuz elemanın 1 ve 4 numaralı düğümlere rastlayan kenarı gözönüne alınırsa ($\eta=-1$ kenarı), (3.85) ifadesi,

$$u = P_1(\xi,\omega)\, u_1 + P_4(\xi,\omega)\, u_4 \tag{3.86}$$

şeklini alır. Ayrıca deplasman yayılma fonksiyonu için (3.84) ifadesi yardımıyla,

$$P_i(\xi,\omega) = P(\xi,\omega)\Big|_{\xi=\xi_i} \tag{3.87}$$

tarifi yapılacak olursa,

$$\begin{aligned} P_1(\xi,\omega) &= P(\xi,\omega)\Big|_{\xi=\xi_1} = a + b \\ P_4(\xi,\omega) &= P(\xi,\omega)\Big|_{\xi=\xi_4} = a\, e^{-(\alpha+\beta_1)} + b\, e^{-(\alpha+\beta_2)} \end{aligned} \tag{3.88}$$

ilişkileri elde edilir. Yukarıdaki eşitlikler matris notasyonunda yazılırsa aşağıdaki gibi, iki bilinmeyenli denklem takımı ortaya çıkmaktadır.

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{-(\alpha+\beta_1)} & e^{-(\alpha+\beta_2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} \tag{3.89}$$

Buradan bilinmeyenler çekilirse,

$$\begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_4 \end{Bmatrix} \qquad [E] = [A]^{-1} \tag{3.90}$$

bulunur. Bilinmeyen a ve b katsayıları aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır.

Durum-1

1 numaralı düğüm için (ξ=0), (3.86) eşitliğinin sağlanabilmesi için P_1=1 ve P_4=0 olmalıdır. Bu durumda (3.90) bağıntısından,

$$\begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a = E_{11} \\ b = E_{21} \end{matrix} \tag{3.91}$$

olarak katsayılar bulunur.

Durum-2

4 numaralı düğüm için (ξ=1), (3.86) eşitliğinin sağlanabilmesi için P_1=0 ve P_4=1 olmalıdır. Bu durumda (3.90) bağıntısından,

$$\begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a = E_{12} \\ b = E_{22} \end{matrix} \tag{3.92}$$

olarak katsayılar bulunur.

Yukarıda açıklandığı gibi, referans uzayında ξ=0 koordinatına sahip düğümler (1, 2 ve 3 düğümleri) için a ve b katsayıları (3.91) bağıntısından, ξ=1 koordinatına sahip düğümler (4 ve 5 düğümleri) için a ve b katsayıları (3.92) bağıntısından alınmaktadır. Sonuç olarak,

$$\begin{aligned} P_k(\xi,\omega) &= E_{11}\, e^{-(\alpha+\beta_1)\xi} + E_{21}\, e^{-(\alpha+\beta_2)\xi} \qquad k=1,2,3 \\ P_k(\xi,\omega) &= E_{12}\, e^{-(\alpha+\beta_1)\xi} + E_{22}\, e^{-(\alpha+\beta_2)\xi} \qquad k=4,5 \end{aligned} \tag{3.93}$$

şeklinde bulunmaktadır. Ayrıca bu hesaplamalar sonucunda,

$$\begin{aligned} P_i(\xi_j,\omega) &= \delta_{ij} \\ N_i(\xi_j,\eta_j) &= \delta_{ij} \end{aligned} \tag{3.94}$$

şartlarıda sağlanmaktadır. Yukarıda gözüken [E] matrisinin elemanları aşağıda görüldüğü gibidir:

$$E_{11} = \frac{e^{-\beta_2}}{e^{-\beta_2} - e^{-\beta_1}} \qquad E_{12} = -\frac{e^{\alpha}}{e^{-\beta_2} - e^{-\beta_1}}$$
$$E_{21} = -\frac{e^{-\beta_1}}{e^{-\beta_2} - e^{-\beta_1}} \qquad E_{22} = \frac{e^{\alpha}}{e^{-\beta_2} - e^{-\beta_1}} \tag{3.95}$$

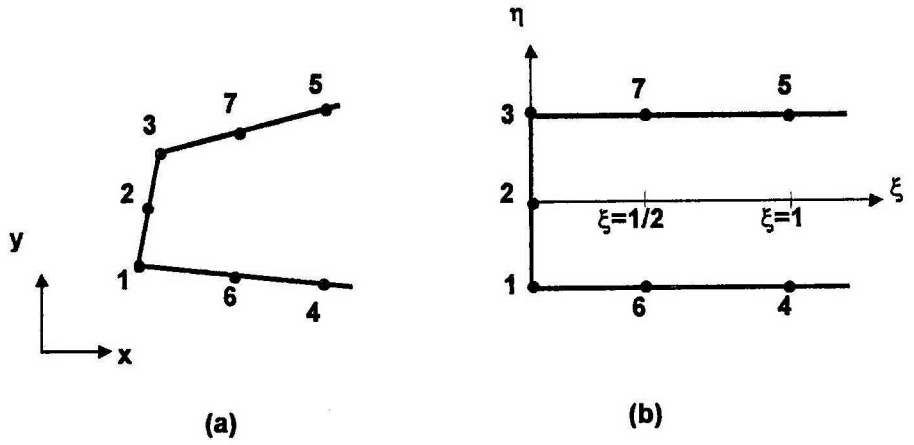
Yukarıda anlatıldığı gibi deplasman yayılma fonksiyonları bulunduktan sonra, eleman rijitlik ve kütle matrisleri, burada verilen interpolasyon şekil fonksiyonları kullanılarak, (3.67) eşitliklerinde görüldüğü formda elde edilmektedir. Bu tip sonsuz eleman için de, sonlu yöndeki integraller Gauss-Legendre integrasyon yöntemiyle hesaplanırken, sonsuz yöndeki integraller Newton-Cotes integrasyon yöntemi kullanılarak hesaplanmaktadır. Yalnız, bu eleman için ortaya çıkan sonsuz integrallerin, Newton-Cotes yöntemi ile hesaplanabilmesine uygun formda elde edilmesi gerekmektedir. Yani tipik olarak bir sonsuz integralin,

$$I = \int_0^{\infty} F(\xi)\, e^{-2\left(\alpha + \frac{\beta_j + \beta_k}{2}\right)\xi}\, d\xi \qquad (j,k=1,2) \tag{3.96}$$

olacak şekilde yeniden düzenlenmesi gerekmektedir. Bu amaçla, (3.67) eşitliğinde görülen eleman rijitlik ve kütle matrislerinin integral içindeki ifadeleri yukarıdaki forma getirilmiş olup, bu konu ile ilgili detaylı hesaplamalar düzlem elastisite ve eksenel simetrik halleri için ayrı ayrı Ek-A' da verilmektedir.

3.3.2.3. Üç Dalga Tipini İçeren Sonsuz Eleman

Aynı anda üç ayrı dalganın (P, S ve R) özelliklerini gözönüne alabilen, Şekil 3.10'da görülen, 7 düğümlü sonsuz eleman modeli kullanılmaktadır.



Şekil 3.10. 7 düğümlü sonsuz eleman
(a) Gerçek eleman **(b)** Referans elemanı

Bu elemanda, gerçek koordinatlardan referans koordinatlarına dönüşüm için, diğer sonsuz elemanlarda olduğu gibi (3.61) bağıntısı ve (3.62) geometrik şekil fonksiyonları kullanılmaktadır. Şekildeki sonsuz elemanda 6 ve 7 numaralı düğümler kenar ortaları olacak şekilde yerleştirilmektedir. Deplasmanların dönüşümü için,

$$u=\sum_{i=1}^{7} N_i u_i \qquad v=\sum_{i=1}^{7} N_i v_i \tag{3.97}$$

yaklaşımı seçilmektedir. Yukarıda görülen N_i interpolasyon şekil fonksiyonları,

$$\begin{aligned}
N_1(\xi,\eta,\omega) &= P_1(\xi,\omega)\left[\frac{1}{2}\eta(\eta-1)\right] \\
N_2(\xi,\eta,\omega) &= P_2(\xi,\omega)\left[1-\eta^2\right] \\
N_3(\xi,\eta,\omega) &= P_3(\xi,\omega)\left[\frac{1}{2}\eta(\eta+1)\right] \\
N_k(\xi,\eta,\omega) &= P_k(\xi,\omega)\left[\frac{1}{2}(1-\eta)\right] \qquad k=4,6 \\
N_k(\xi,\eta,\omega) &= P_k(\xi,\omega)\left[\frac{1}{2}(1+\eta)\right] \qquad k=5,7
\end{aligned} \tag{3.98}$$

olarak seçilmiştir. Yukarıda gözüken $P(\xi,\omega)$ deplasman yayılma fonksiyonu, iki dalgalı sonsuz elemandaki gibi, düzlem dalgaların süperpozisyonu şeklindedir.

$$P(\xi,\omega) = a\,e^{-(\alpha+\beta_1)\xi} + b\,e^{-(\alpha+\beta_2)\xi} + c\,e^{-(\alpha+\beta_3)\xi}$$
$$\beta_k = i\beta_k^* \qquad \beta_k^* = \frac{\omega}{c_k} L \tag{3.99}$$

Bu bağıntıda görülen a, b ve c katsayıları, iki dalga tipini içeren sonsuz elemanda anlatıldığı gibi hesaplanmaktadır. Bunun için (3.97) bağıntısı sonsuza uzanan bir kenar boyunca (1, 4, 6 düğümleri veya 3, 5, 7 düğümleri) yazılmaktadır. 7 düğümlü sonsuz eleman için (3.89) ifadesine benzer olarak,

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_4 \\ P_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ e^{-(\alpha+\beta_1)} & e^{-(\alpha+\beta_2)} & e^{-(\alpha+\beta_3)} \\ e^{-\frac{1}{2}(\alpha+\beta_1)} & e^{-\frac{1}{2}(\alpha+\beta_2)} & e^{-\frac{1}{2}(\alpha+\beta_3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix} \tag{3.100}$$

ilişkisi mevcuttur. Bu ifade düzenlenirse,

$$\begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_4 \\ P_6 \end{Bmatrix} \qquad [E]=[A]^{-1} \tag{3.101}$$

bulunur. Bilinmeyen a, b ve c katsayıları aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır.

Durum-1

1 numaralı düğüm (ξ=0) için, (3.97) eşitliğinin sağlanabilmesi için P_1=1 ve P_4=P_6=0 olmalıdır. Bu durumda (3.101) bağıntısından,

$$\begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a = E_{11} \\ b = E_{21} \\ c = E_{31} \end{matrix} \tag{3.102}$$

olarak katsayılar bulunur.

Durum-2

4 numaralı düğüm ($\xi=1$) için, (3.97) eşitliğinin sağlanabilmesi için $P_4=1$ ve $P_1=P_6=0$ olmalıdır. Bu durumda (3.101) bağıntısından,

$$\begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a = E_{12} \\ b = E_{22} \\ c = E_{32} \end{matrix} \tag{3.103}$$

olarak katsayılar bulunur.

Durum-3

6 numaralı düğüm ($\xi=1/2$) için, (3.97) eşitliğinin sağlanabilmesi için $P_6=1$ ve $P_1=P_4=0$ olmalıdır. Bu durumda (3.101) bağıntısından,

$$\begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a = E_{13} \\ b = E_{23} \\ c = E_{33} \end{matrix} \tag{3.104}$$

olarak katsayılar bulunur.

Sonuç olarak, (3.99), (3.102), (3.103) ve (3.104) bağıntıları kullanılarak, üç dalga tipini içeren sonsuz eleman için deplasman yayılma fonksiyonları aşağıdaki formda elde edilir.

$$P_k(\xi,\omega) = E_{11}e^{-(\alpha+\beta_1)\xi} + E_{21}e^{-(\alpha+\beta_2)\xi} + E_{31}e^{-(\alpha+\beta_3)\xi} \quad k = 1,2,3$$

$$P_k(\xi,\omega) = E_{12}e^{-(\alpha+\beta_1)\xi} + E_{22}e^{-(\alpha+\beta_2)\xi} + E_{32}e^{-(\alpha+\beta_3)\xi} \quad k = 4,5 \qquad (3.105)$$

$$P_k(\xi,\omega) = E_{13}e^{-(\alpha+\beta_1)\xi} + E_{23}e^{-(\alpha+\beta_2)\xi} + E_{33}e^{-(\alpha+\beta_3)\xi} \quad k = 6,7$$

Yukarıdaki deplasman yayılma fonksiyonlarında görülen [E] matrisinin elemanları [A] matrisinin tersi alınarak aşağıdaki gibi hesaplanmıştır.

$$\Delta = e^{-\frac{3\alpha}{2}}\left\{ e^{-\frac{1}{2}(\beta_1+\beta_2)}\left(e^{-\frac{1}{2}\beta_1} - e^{-\frac{1}{2}\beta_2}\right) + e^{-\frac{1}{2}(\beta_2+\beta_3)}\left(e^{-\frac{1}{2}\beta_2} - e^{-\frac{1}{2}\beta_3}\right) + e^{-\frac{1}{2}(\beta_3+\beta_1)}\left(e^{-\frac{1}{2}\beta_3} - e^{-\frac{1}{2}\beta_1}\right)\right\} \qquad (3.106a)$$

olmak şartıyla,

$$E_{11} = \frac{1}{\Delta}e^{-\frac{1}{2}(3\alpha+\beta_2+\beta_3)}\left(e^{-\frac{1}{2}\beta_2} - e^{-\frac{1}{2}\beta_3}\right)$$

$$E_{21} = \frac{1}{\Delta}e^{-\frac{1}{2}(3\alpha+\beta_3+\beta_1)}\left(e^{-\frac{1}{2}\beta_3} - e^{-\frac{1}{2}\beta_1}\right) \qquad (3.106b)$$

$$E_{31} = \frac{1}{\Delta}e^{-\frac{1}{2}(3\alpha+\beta_1+\beta_2)}\left(e^{-\frac{1}{2}\beta_1} - e^{-\frac{1}{2}\beta_2}\right)$$

$$E_{12} = \frac{1}{\Delta}e^{-\frac{\alpha}{2}}\left(e^{-\frac{1}{2}\beta_2} - e^{-\frac{1}{2}\beta_3}\right)$$

$$E_{22} = \frac{1}{\Delta}e^{-\frac{\alpha}{2}}\left(e^{-\frac{1}{2}\beta_3} - e^{-\frac{1}{2}\beta_1}\right) \qquad (3.106c)$$

$$E_{32} = \frac{1}{\Delta}e^{-\frac{\alpha}{2}}\left(e^{-\frac{1}{2}\beta_1} - e^{-\frac{1}{2}\beta_2}\right)$$

$$E_{13} = \frac{1}{\Delta} e^{-\alpha}\left(e^{-\beta_3} - e^{-\beta_2}\right)$$
$$E_{23} = \frac{1}{\Delta} e^{-\alpha}\left(e^{-\beta_1} - e^{-\beta_3}\right) \qquad (3.106d)$$
$$E_{33} = \frac{1}{\Delta} e^{-\alpha}\left(e^{-\beta_2} - e^{-\beta_1}\right)$$

Sonuç olarak, burada önerilen (3.105) deplasman yayılma fonksiyonları ve (3.98) şekil fonksiyonları kullanılarak, (3.67) denklemlerinde görülen eleman rijitlik ve kütle matrisleri hesaplanabilmektedir. Bu tip sonsuz elemanda da sonlu integraller Gauss-Legendre integrasyon yöntemi ile hesaplanırken, sonsuz integraller Newton-Cotes integrasyon yöntemi ile hesaplanmaktadır. İki dalga tipini içeren sonsuz elemanda olduğu gibi bu tip sonsuz elemanda da sonsuz integrallerin Newton-Cotes yöntemi ile hesaplanabilmesi için tipik bir integralin,

$$I = \int_0^{\infty} F(\xi)\, e^{-2\left(\alpha + \frac{\beta_j + \beta_k}{2}\right)\xi}\, d\xi \qquad (j,k=1,2,3) \qquad (3.107)$$

olacak şekilde düzenlenmesi gerekmektedir. Bu sebepten dolayı, (3.67) denklemlerindeki eleman rijitlik ve kütle matrislerinin tarifleri kullanılarak, integralin içindeki ifadeler, düzlem elastisite ve eksenel simetrik problem durumları için ayrı ayrı (3.107)'de görülen formda elde edilmiştir. İntegral içindeki ifadelerin elde edilmesi ile ilgili detaylı hesaplamalar Ek-B'de verilmektedir.

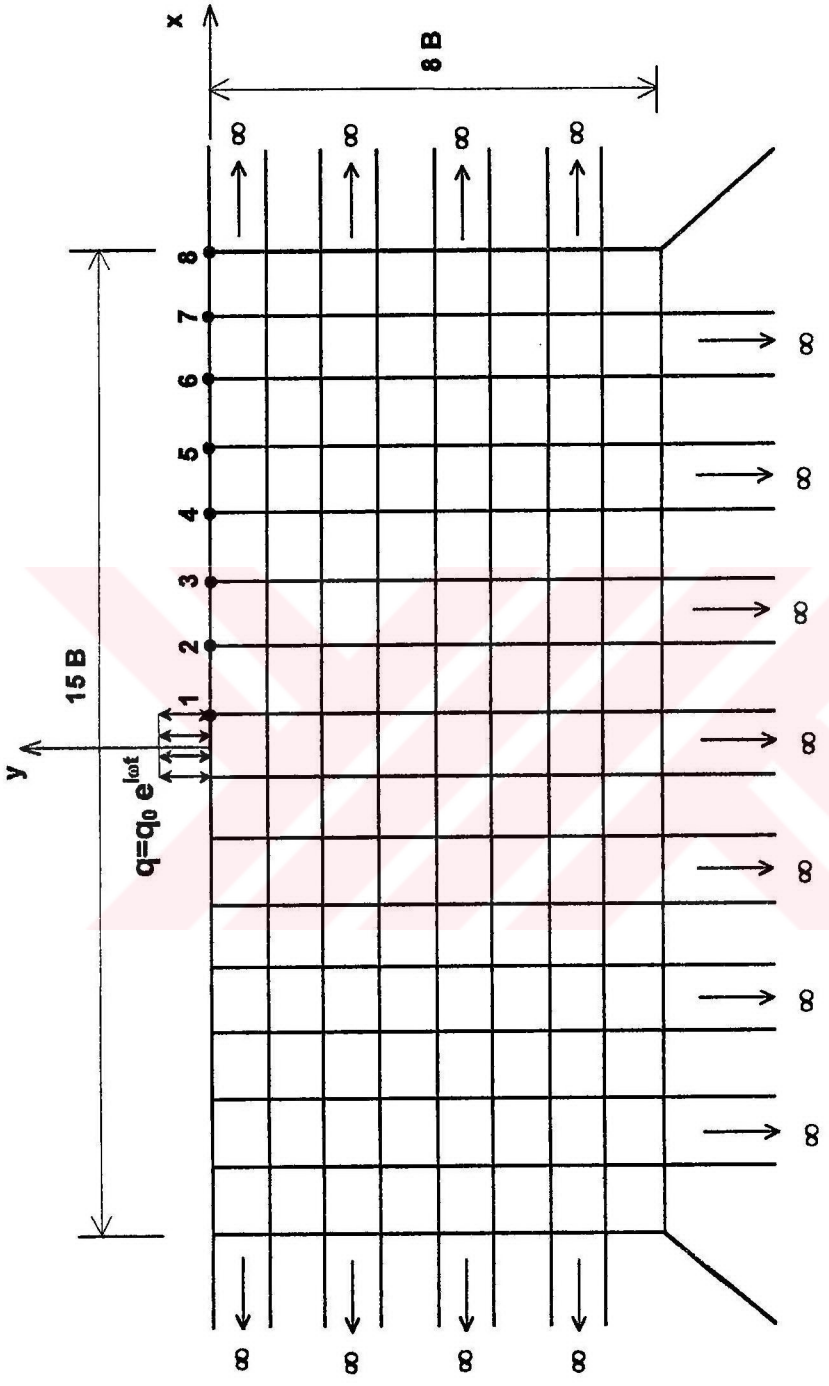
3.3.2.4. Harmonik Yükleme Durumunda Sayısal Uygulamalar

Harmonik yükleme halinde, sonlu eleman olarak sekiz düğümlü, kuadratik, izoparametrik eleman ile çeşitli tipteki (bir dalga, iki dalga veya üç dalga özelliğini içeren) sonsuz elemanlar kullanılarak, FORTRAN77 dilinde kodlanmış bilgisayar programları geliştirilmiştir. Programlarda, düzlem gerilme/şekil değiştirme ve eksenel simetrik yükleme durumları birlikte gözönüne alınmaktadır. Hazırlanan programlarda eleman matrisleri sayısal olarak oluşturulmaktadır. Eleman matrislerinin hesabında, sonlu integraller için 3 noktalı Gauss-Legendre, sonsuz integraller için ise 12 noktalı Newton-Cotes integrasyon yöntemleri kullanılmaktadır. Bu kısımda ele alınan uygulamaların birçoğu daha önceden literatürde çözülmüş veya analitik sonuçları bilinen problemler olup, bu tezde önerilen sonlu-sonsuz eleman modelinin kontrolü amacını taşımaktadır.

3.3.2.4.(1). Harmonik Şerit Yüklü Viskoelastik Zemin

Harmonik üniform şerit yük altında viskoelastik yarı sonsuz bir ortamda kompleyans değerleri aranmaktadır. Problem daha önce Chuhan ve Chongbin (1987) tarafından çözülmüş olup, kesin sonuçlar da ilgili çalışmada sunulmuştur. Probleme ait sonlu-sonsuz eleman ağı ve yükleme durumu aşağıda görülmektedir (Şekil 3.11). Zemine ait malzeme sabitleri olarak, Elastisite modülü $E=2\times10^{10}$ N/m^2, Poisson oranı $\nu=1/3$, kütlesel yoğunluk $\rho=2000$ kg/m^3 ve histeretik sönüm oranı $z=0.125$ olarak verilmektedir. Azaltma parametresi $\alpha=0.69$ olarak seçilmiştir. Burada üniform şerit yük B=1 m genişliği üzerine etkimekte olup genliği $q_0=1$ N/m^2 dir. Bu malzeme sabitleri için dalga hızları $c_P=3872.98$ m/s, $c_S=1936.49$ m/s ve $c_R=0.932c_S=1804.81$ m/s olarak hesaplanmıştır.

Bu uygulamada, $a_0=\omega B/c_S$ olarak tarif edilen boyutsuz frekansın, $a_0=0.5$ ve $a_0=1.0$ değerleri için Şekil 3.11'de gösterilmiş olan, zemin yüzeyindeki 8 adet noktada yatay ve düşey kompleyans değerleri hesaplanmaktadır. Hem kesin hemde Chuhan ve Chongbin (1987)' de verilen sonuçlar ile karşılaştırma yapmak amacıyla, yatay ve düşey kompleyans değerleri aşağıdaki gibi tarif edilmektedirler.



Şekil 3.11. Harmonik şerit yüklü viskoelastik zemine ait sonlu-sonsuz eleman ağı

$$F_m^{xx} = \frac{1}{G}\left[f_m^{xx}(a_0) + i\, g_m^{xx}(a_0)\right]$$
$$F_m^{yy} = \frac{1}{G}\left[f_m^{yy}(a_0) + i\, g_m^{yy}(a_0)\right] \qquad (3.108)$$

Yukarıdaki tarifte, F_m^{xx} ve F_m^{yy}, viskoelastik zeminin yatay ve düşey doğrultudaki kompleyanslarını gösterirken, G zeminin kayma modülünü ve m ise viskoelastik zemin üzerindeki noktaları temsil etmektedir. (3.108) ifadesinde görülen, f_m^{xx}, g_m^{xx}, f_m^{yy} ve g_m^{yy} sembolleri sırasıyla x ve y yönündeki kompleyansların (yatay ve düşey) reel ve imajiner kısımlarını göstermektedir.

Bu problem, tezde önerilen bir, iki ve üç dalga tiplerini içeren sonsuz eleman modelleri ile ayrı ayrı çözülmüştür. Problem ele alınırken, tek dalgalı durumda P dalgası, iki dalgalı durumda ise P ve S dalgaları kullanılmıştır. Ayrıca, karşılaştırma yapmak amacı ile bu problem, Mengi ve ark (1994) tarafından hazırlanan sınır eleman metodu (BEM) formülasyonu ile de çözülmüştür. Bulunan sonuçlar, boyutsuz frekansın a_0=0.5 olması durumu için Çizelge 3.1'de, a_0=1.0 için ise Çizelge 3.2'de sunulmaktadır.

Çizelgelerin incelenmesinden, sonlu-sonsuz eleman ortak kullanımından elde edilen sonuçların, kesin ve diğer yöntemlerle elde edilen sonuçlarla uyumlu olduğu gözlenmektedir.

Çizelge 3.1. a_0=0.5 boyutsuz frekansı için yatay ve düşey kompleyanslar

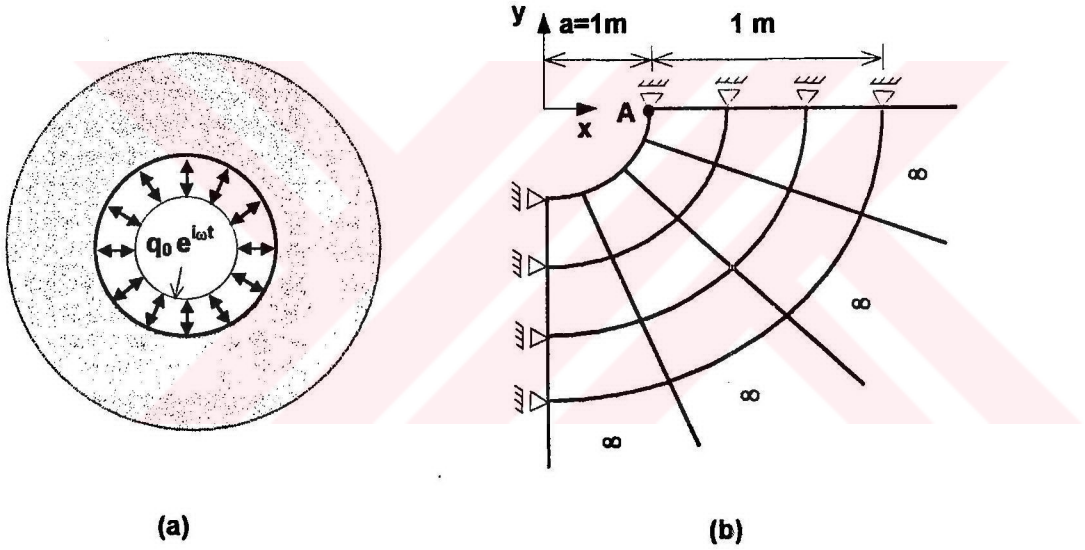
		1	2	3	4	5	6	7	8
f_m^{xx}	CHUHAN	0.3587	0.0628	-0.0318	-0.0792	-0.0954	-0.0923	-0.0801	-0.0698
	BEM	0.3561	0.0764	-0.0263	-0.0768	-0.0959	-0.0957	-0.0854	-0.0720
	P	0.3582	0.0636	-0.0291	-0.0746	-0.0900	-0.0880	-0.0803	-0.0784
	P+S	0.3572	0.0593	-0.0372	-0.0861	-0.1040	-0.1028	-0.0899	-0.0681
	P+S+R	0.3602	0.0660	-0.0261	-0.0705	-0.0836	-0.0768	-0.0579	-0.0348
	KESİN	0.3548	0.0707	-0.0296	-0.0787	-0.0957	-0.0929	-0.0806	-0.0667
g_m^{xx}	CHUHAN	-0.4082	-0.3038	-0.2305	-0.1606	-0.0997	-0.0515	-0.0167	0.0044
	BEM	-0.3858	-0.2873	-0.2152	-0.1489	-0.0927	-0.0503	-0.0224	-0.0069
	P	-0.3846	-0.2811	-0.2098	-0.1430	-0.0861	-0.0432	-0.0154	-0.0022
	P+S	-0.3824	-0.2784	-0.2062	-0.1374	-0.0768	-0.0271	0.0121	0.0393
	P+S+R	-0.3968	-0.2949	-0.2241	-0.1568	-0.0984	-0.0533	-0.0248	-0.0169
	KESİN	-0.3902	-0.2899	-0.2193	-0.1502	-0.0932	-0.0501	-0.0215	-0.0052
f_m^{yy}	CHUHAN	0.2354	-0.0472	-0.1344	-0.1485	-0.1156	-0.0590	0.0010	0.0468
	BEM	0.2375	-0.0431	-0.1292	-0.1428	-0.1106	-0.0543	0.0055	0.0525
	P	0.2397	-0.0443	-0.1336	-0.1496	-0.1174	-0.0593	0.0038	0.0564
	P+S	0.2284	-0.0535	-0.1389	-0.1506	-0.1159	-0.0592	-0.0032	0.0314
	P+S+R	0.2424	-0.0416	-0.1301	-0.1450	-0.1121	-0.0549	0.0059	0.0512
	KESİN	0.2385	-0.0473	-0.1320	-0.1452	-0.1115	-0.0531	0.0085	0.0566
g_m^{yy}	CHUHAN	-0.3666	-0.2385	-0.1264	-0.0250	0.0504	0.0909	0.0966	0.0763
	BEM	-0.3528	-0.2255	-0.1141	-0.0132	0.0616	0.1008	0.1032	0.0765
	P	-0.3437	-0.2173	-0.1087	-0.0122	0.0574	0.0920	0.0922	0.0686
	P+S	-0.3573	-0.2298	-0.1184	-0.0177	0.0567	0.0952	0.0971	0.0703
	P+S+R	-0.3600	-0.2319	-0.1192	-0.0171	0.0583	0.0973	0.0976	0.0650
	KESİN	-0.3553	-0.2259	-0.1142	-0.0129	0.0620	0.1008	0.1029	0.0761

Çizelge 3.2. a_0=1.0 boyutsuz frekansı için yatay ve düşey kompleyanslar

		1	2	3	4	5	6	7	8
f_m^{xx}	CHUHAN	0.2227	-0.0570	-0.0940	-0.0765	-0.0585	-0.0529	-0.0437	-0.0150
	BEM	0.2110	-0.0508	-0.0934	-0.0759	-0.0556	-0.0477	-0.0382	-0.0129
	P	0.2198	-0.0583	-0.0924	-0.0719	-0.0520	-0.0470	-0.0393	-0.0085
	P+S	0.2184	-0.0599	-0.0944	-0.0744	-0.0546	-0.0487	-0.0412	-0.0167
	P+S+R	0.2200	-0.0578	-0.0920	-0.0719	-0.0520	-0.0461	-0.0394	-0.0177
	KESİN	0.2127	-0.0540	-0.0931	-0.0745	-0.0549	-0.0484	-0.0392	-0.0125
g_m^{xx}	CHUHAN	-0.3376	-0.1801	-0.0706	-0.0137	0.0038	0.0139	0.0333	0.0544
	BEM	-0.3363	-0.1848	-0.0744	-0.0149	0.0064	0.0198	0.0405	0.0582
	P	-0.3413	-0.1845	-0.0750	-0.0159	0.0055	0.0189	0.0379	0.0495
	P+S	-0.3409	-0.1823	-0.0713	-0.0126	0.0065	0.0180	0.0383	0.0562
	P+S+R	-0.3401	-0.1815	-0.0705	-0.0116	0.0080	0.0198	0.0395	0.0561
	KESİN	-0.3400	-0.1838	-0.0719	-0.0131	0.0062	0.0184	0.0394	0.0581
f_m^{yy}	CHUHAN	0.0967	-0.1321	-0.0792	0.0327	0.0809	0.0430	-0.0196	-0.0415
	BEM	0.0945	-0.1345	-0.0821	0.0288	0.0768	0.0410	-0.0197	-0.0426
	P	0.0942	-0.1348	-0.0827	0.0281	0.0763	0.0410	-0.0178	-0.0441
	P+S	0.0929	-0.1358	-0.0825	0.0298	0.0781	0.0403	-0.0221	-0.0463
	P+S+R	0.0938	-0.1361	-0.0839	0.0279	0.0762	0.0388	-0.0221	-0.0408
	KESİN	0.0955	-0.1385	-0.0812	0.0317	0.0784	0.0398	-0.0220	-0.0432
g_m^{yy}	CHUHAN	-0.2852	-0.0637	0.0807	0.0902	0.0128	-0.0523	-0.0511	-0.0070
	BEM	-0.2865	-0.0656	0.0778	0.0887	0.0133	-0.0508	-0.0496	-0.0039
	P	-0.2914	-0.0659	0.0827	0.0927	0.0116	-0.0573	-0.0555	-0.0073
	P+S	-0.2882	-0.0665	0.0784	0.0885	0.0116	-0.0530	-0.0513	-0.0055
	P+S+R	-0.2859	-0.0640	0.0807	0.0905	0.0134	-0.0510	-0.0487	-0.0036
	KESİN	-0.2906	-0.0636	0.0811	0.0897	0.0116	-0.0530	-0.0498	-0.0027

3.3.2.4.(2). Harmonik İç Basınca Maruz Küresel Oyuk

Bu problemde, elastik sonsuz ortamda küresel bir oyuk içindeki patlamadan dolayı, oyuk yüzeyinde bir noktanın radyal doğrultudaki kompleyans değerleri aranmaktadır. Ortamın ve yüklemenin özelliği nedeniyle bu problem eksenel simetrik olarak ele alınmaktadır. Problemde zemine ait malzeme özellikleri, $E=2\times10^{10}$ N/m^2, $\nu=0$ ve $\rho=2000$ kg/m^3 olarak seçilmektedir. Küresel oyuğun yarıçapı $a=1$ m alınmıştır. Probleme ait yükleme ile sonlu-sonsuz eleman ağı aşağıda verilmektedir (Şekil 3.12).



Şekil 3.12. İçerisinde küresel oyuk bulunan sonsuz zemin
(a) Yükleme **(b)** Sonlu-sonsuz eleman ağı

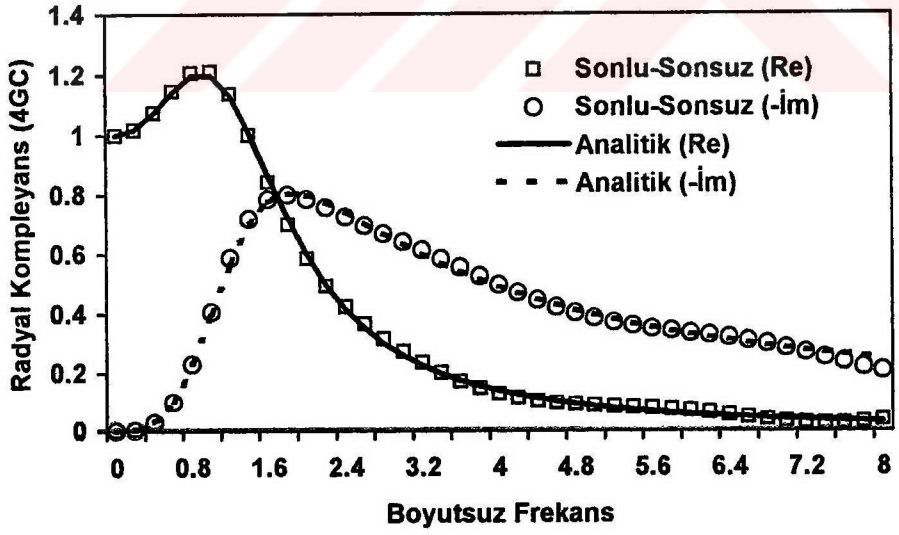
Yukarıda verilen malzeme sabitleri için elastik dalga hızları $c_P=3162.28$ m/s, $c_S=2236.07$ m/s ve $c_R=0.88c_S=1967.74$ m/s olarak hesaplanmıştır. Ayrıca deplasman azaltma parametresi, kaynaktan uzak noktalardaki davranışın $1/x^2$ tarzında olduğu varsayılarak $\alpha=1.39$ seçilmiştir. Radyal doğrultudaki kompleyansın (A noktası) analitik ifadesi,

$$C = \frac{a}{G} \frac{(1+i a_0)}{\left(4+4i a_0 + \frac{2(1-\nu)}{(1-2\nu)}(i a_0)^2\right)} \qquad (3.109)$$

$$a_0 = \frac{\omega a}{c_P}$$

formülü ile verilmektedir (Wolf, 1988). Burada, G elastik ortamın kayma modülünü, a_0 ise boyutsuz frekansı göstermektedir.

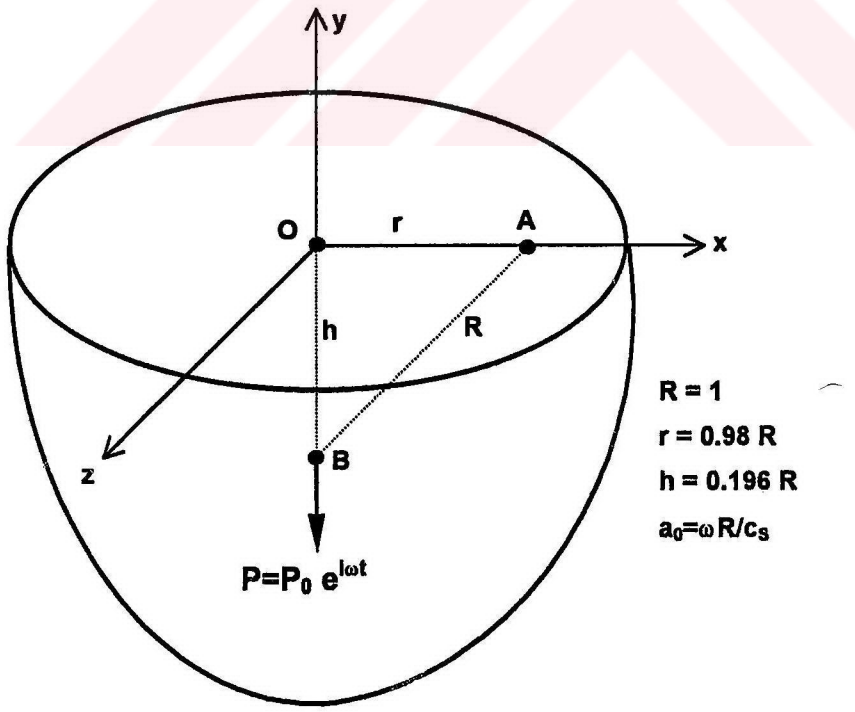
Bu problem, üç değişik sonsuz eleman modeli kullanılarak çözülmüş olup, her üç tip sonsuz eleman içinde bulunan sonuçların tamamının hemen hemen aynı sonucu verdiği görülmüştür. Bu sebepten dolayı burada sadece üç dalga tipini içeren sonsuz eleman modeliyle bulunan sonuçlar, analitik sonuçlarla birlikte aşağıda görülmektedir (Şekil 3.13). Grafikten görüldüğü gibi sonlu-sonsuz eleman modeli ile elde edilen sonuçlarla analitik sonuçlar birbirleriyle oldukça uyumludur.



Şekil 3.13. Radyal kompleyansın boyutsuz frekansla değişimi

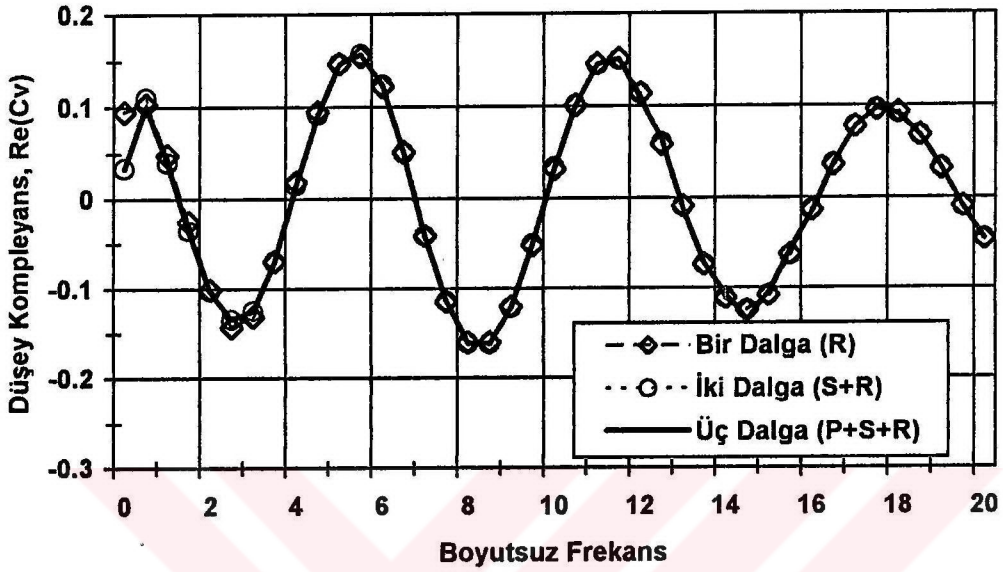
3.3.2.4.(3). Yarı Sonsuz Düzlem İçinde Gömülü Harmonik Tekil Yük

Viskoelastik yarı sonsuz zemin içinde belirli bir derinlikteki harmonik tekil yük nedeniyle, yüzeydeki bir noktanın (A) düşey kompleyans değerinin frekansla değişimi araştırılmaktadır (Şekil 3.14). Geometrisi ve yüklemesi eksenel simetrik olan bu problem, boyutsuz büyüklükler kullanılarak Özkan (1995) tarafından sınır eleman metodu ile çözülmüştür. Boyutsuz malzeme özellikleri olarak, $\bar{E}=1$, $\nu=0.25$, $\bar{\rho}=1$ ve histeretik sönüm oranı $z=0.005$ seçilmiştir. Bu durumda boyutsuz dalga hızları ise, $\bar{c}_P=1.732$, $\bar{c}_S=1$ ve $\bar{c}_R=0.9194$ olarak hesaplanmıştır. Boyutsuz kompleyans $\bar{C}_V=GRC_V$ olarak tariflenmektedir. Problem, çeşitli tipteki sonsuz eleman modelleri kullanılarak çözülmüş ve A noktasının boyutsuz kompleyans değerlerinin a_0 boyutsuz frekansı ile değişimi elde edilmiştir. Sonlu-sonsuz eleman modeli ile çözüm yapılırken, deplasmanların uzak bölgelerde $1/x^2$ tarzında yayıldığı kabul edilerek, azaltma parametresi $\alpha=1.39$ olarak seçilmiştir.

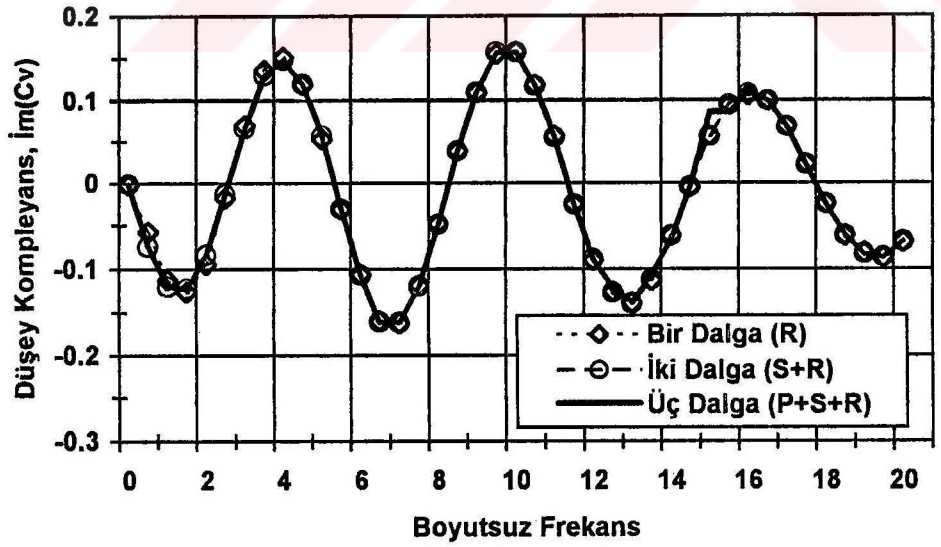


Şekil 3.14. Gömülü tekil yüklemeye maruz yarı sonsuz zemin

Şekil 3.15 ve Şekil 3.16 da, üç değişik sonsuz eleman modeli kullanılarak bulunan, boyutsuz düşey kompleyansın reel ve imajiner kısmının a_0 boyutsuz frekansı ile değişimi görülmektedir.

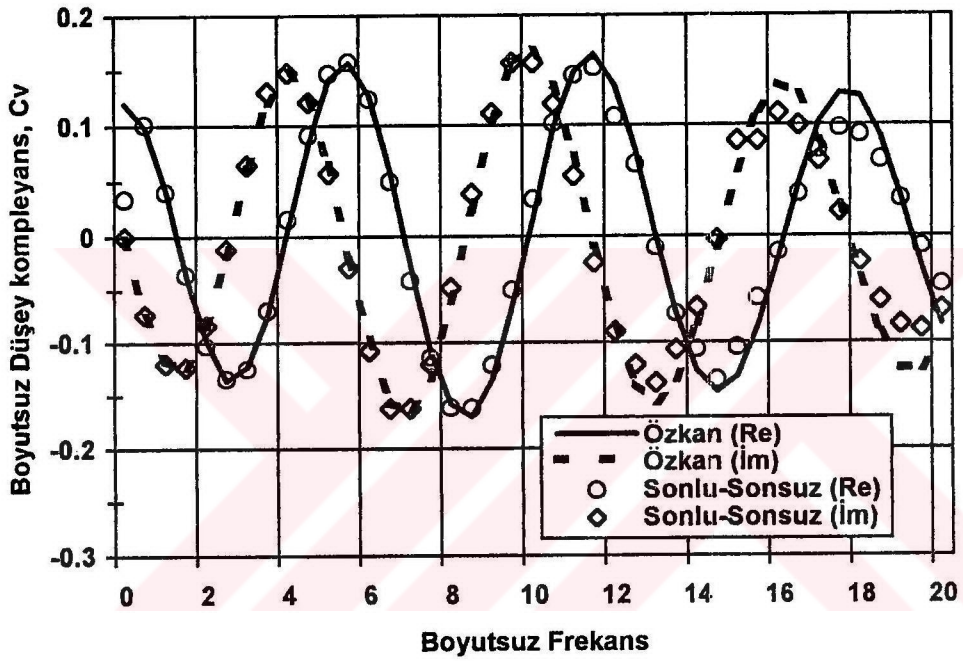


Şekil 3.15. Düşey kompleyansın reel kısmı



Şekil 3.16. Düşey kompleyansın imajiner kısmı

Grafiklerden görüldüğü gibi, çeşitli sonsuz eleman modelleri kullanılarak elde edilen sonuçlar, birbirlerine oldukça yakın çıkmıştır. Bu sebepten dolayı, sadece üç dalga tipini içeren sonsuz eleman modelinden elde edilen sonuçlar kullanılarak, Özkan (1995) tarafından doktora çalışması esnasında bulunan sonuçlarla karşılaştırılmıştır (Şekil 3.17). Boyutsuz frekansın $0 \leq a_0 \leq 20$ aralığında elde edilmiş olan sonuçların birbirleri ile uyumlu olduğu gözlenmektedir.



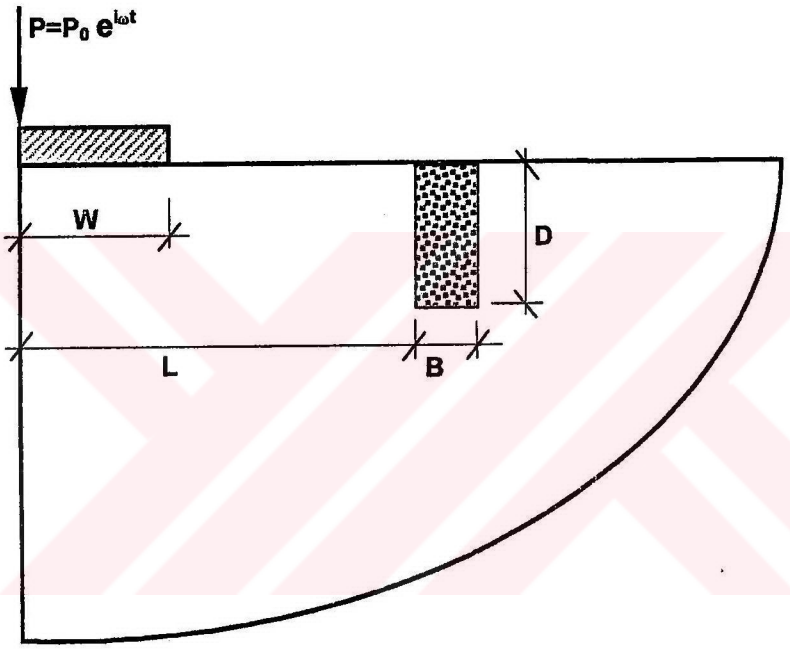
Şekil 3.17. Boyutsuz düşey kompleyansın boyutsuz frekansla değişimi

3.3.2.4.(4). Titreşim İzolasyonu

Titreşim izolasyonu problemleri genel anlamda iki kısımda incelenecektir. Birincisi, yüklemeye yakın bölgede yapılan izolasyondur. Aktif izolasyon olarak da adlandırılan bu tip izolasyonda yükün civarı izole edilmektedir. İkinci tip izolasyon, yüklemeden uzakta inşaa edilmesi muhtemel yapıları korumak amacı ile yapılan izolasyon olup, pasif izolasyon olarak da adlandırılmaktadır.

A. Aktif İzolasyon

Aktif izolasyon problemi, harmonik tekil yüklemeye maruz, elastik zemin üzerinde dairesel temel (eksenel simetrik durum) olarak ele alınmaktadır. Burada, temelin yakınında açılan dikdörtgen kesitli dairesel çukurun yüzeydeki noktalarda meydana getirdiği titreşim izolasyonu incelenmektedir (Şekil 3.18).



Şekil 3.18. Aktif izolasyon problemi

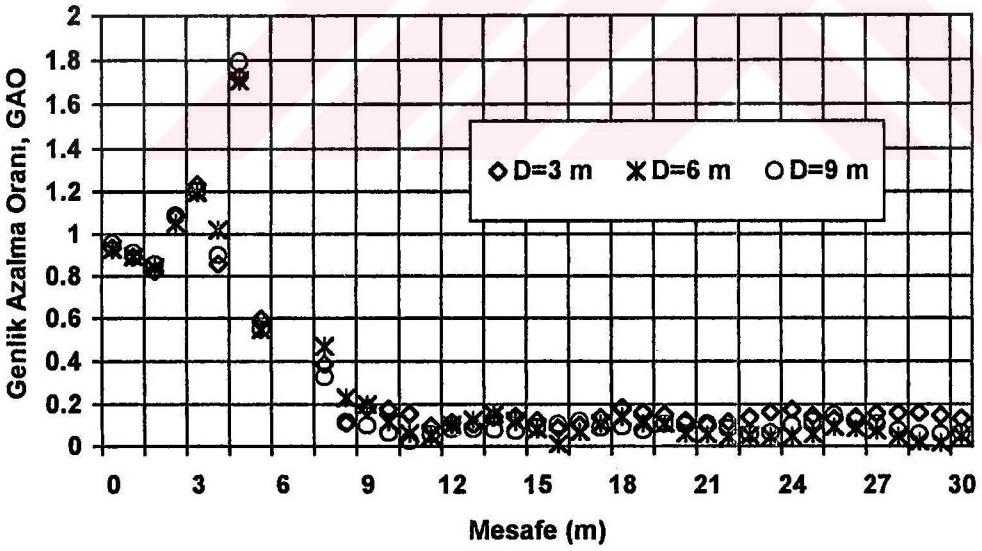
Problem, bir kez çukur boş iken, bir kezde beton dolu iken çözülmekte, yüzeydeki noktalar için hesaplanan ve tarifi aşağıda verilen genlik azalma oranı (GAO) hesaplanarak karşılaştırmalar yapılmaktadır.

$$GAO = \frac{\text{Noktanın çukur var iken deplasman genliği}}{\text{Noktanın çukur yok iken deplasman genliği}}$$

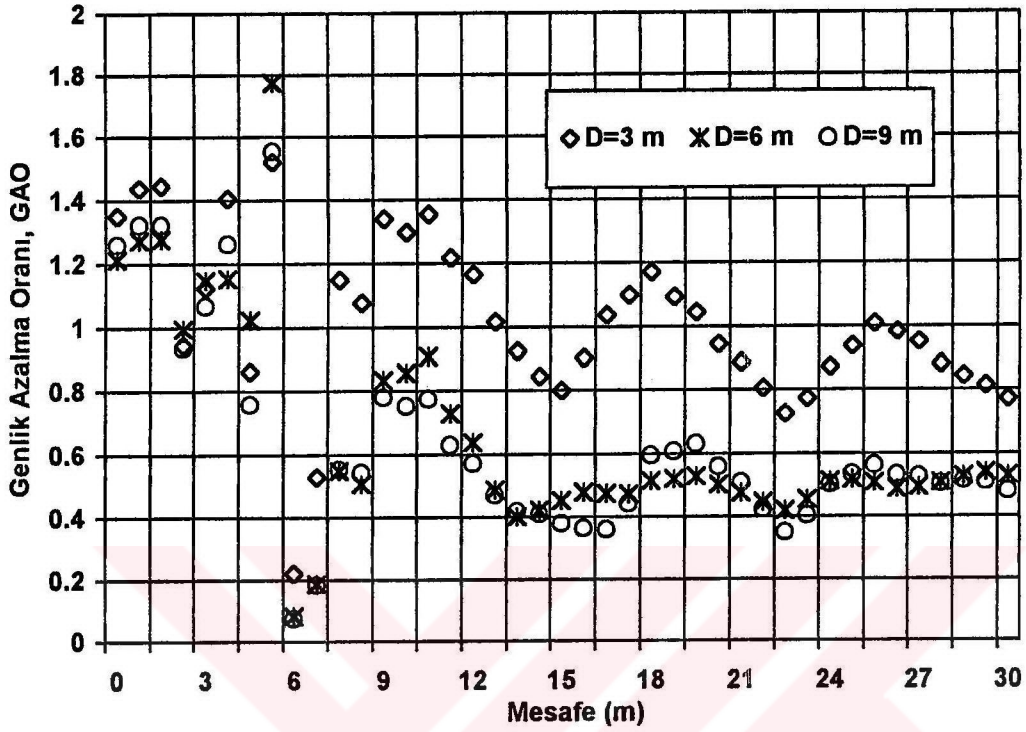
Genlik azalma oranlarının karşılaştırması yapılırken çeşitli çukur derinlikleri (D=3m, 6m ve 9m) seçilmiştir. Yukarıdaki şekilde görülen ve problemde kullanılan parametreler aşağıdaki gibi alınmaktadır.

$W = 3$ m	$L = 6$ m	$B = 1.5$ m	$D = 3, 6, 9$ m
P_0=250000 N	$f = 50$ Hz ($\omega = 314.159$ rad/s)		$\alpha = 0.69$
$E_z = 2\times10^8$ N/m^2	$\rho_z = 2000$ kg/m^3	$\nu_z = 0.30$	
$E_b = 2\times10^{10}$ N/m^2	$\rho_b = 2400$ kg/m^3	$\nu_b = 0.15$	

Bu problem, bir ve iki dalganın mevcudiyetini gözönüne alabilen sonsuz eleman modelleri kullanılarak ayrı ayrı çözülmüş olup, sonuçların birbirine yakın olduğu gözlenmiştir. Aşağıda verilen grafiklerde, yüzeydeki noktaların düşey deplasmanlarının genlik azalma oranları görülmektedir.



Şekil 3.19. Aktif izolasyonda çukur boş iken genlik azalma oranları



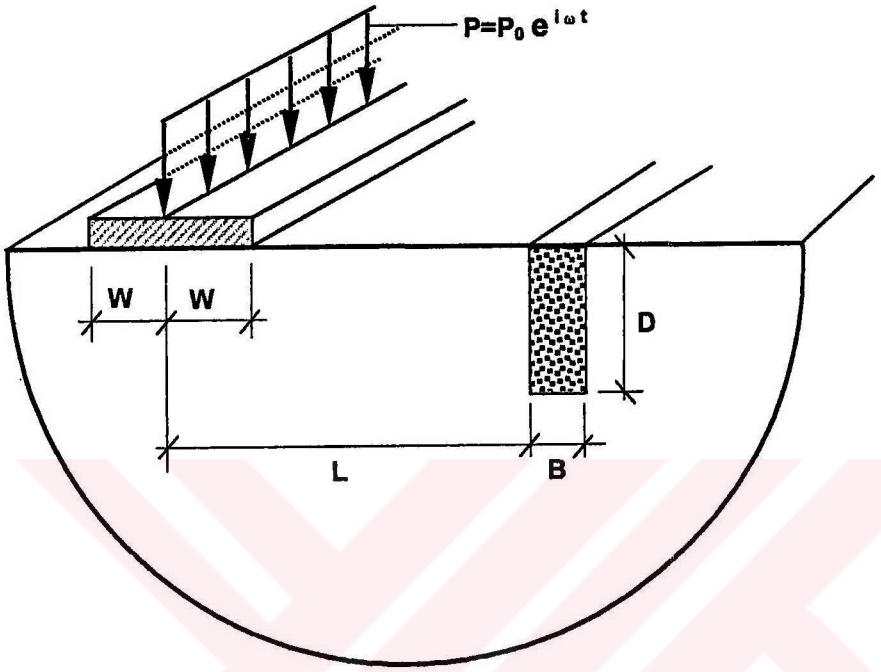
Şekil 3.20. Aktif izolasyonda çukur beton dolu iken genlik azalma oranları

Grafiklerden de görüldüğü üzere, en etkili titreşim izolasyonu durumu çukurun boş olması hali için sağlanmaktadır. Yukarıdaki grafiklerde çeşitli derinlik durumları incelendiğinde ise, burada seçilen derinlikler için iyi yada kötü belirli bir sonucun ortaya çıkmadığı gözlenmiştir.

B. Pasif İzolasyon

Pasif izolasyon problemi, harmonik şerit yüke maruz, elastik zemin üzerinde şerit temel (düzlem şekil değiştirme) olarak ele alınmaktadır. Burada, temelden uzakta (inşaası planlanan yapının yakınında) açılan dikdörtgen kesitli çukurun ötesindeki noktalarda meydana gelen titreşim izolasyonu incelenmektedir (Şekil 3.21). Aktif izolasyon durumunda yapılan incelemeler burada da aynen araştırılmaktadır. Bu problemde kullanılan parametreler, aktif izolasyonda

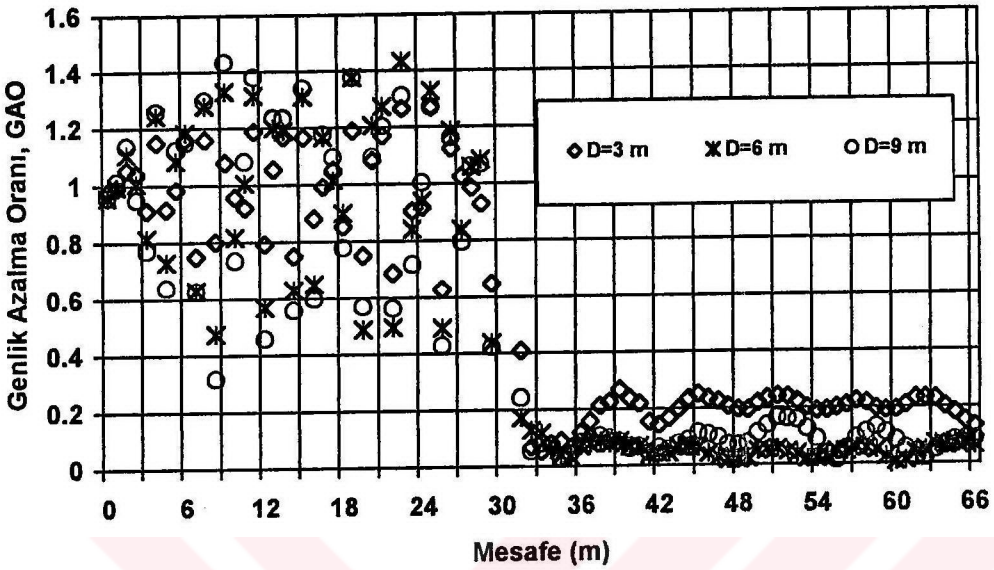
kullanılanlarla aynı olup, sadece çukurun yükten olan uzaklığı L=30 m olarak alınmaktadır.



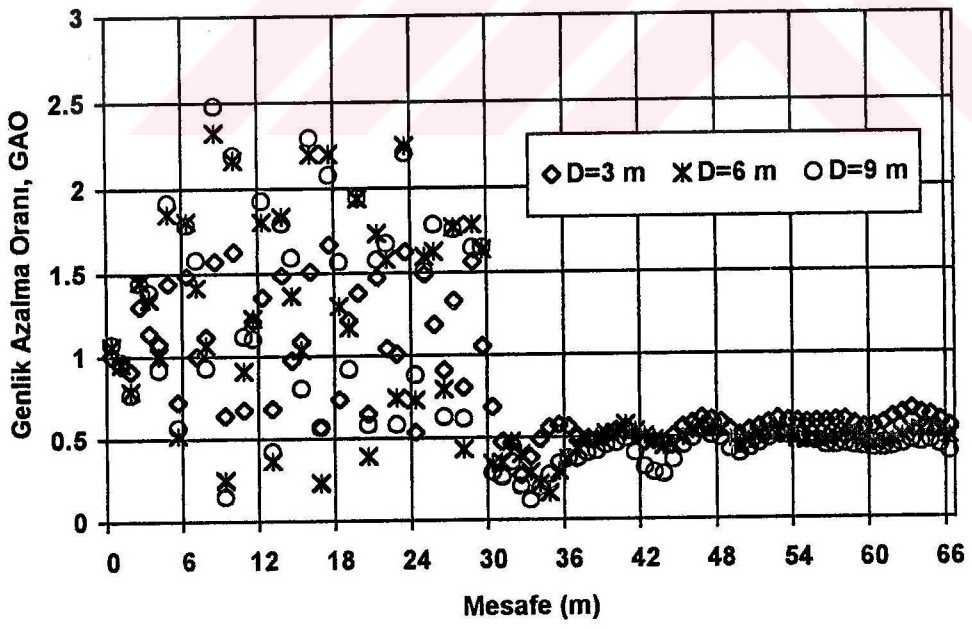
Şekil 3.21. Pasif izolasyon problemi

Aktif izolasyon durumunda bahsedildiği gibi, burada da tek ve iki dalgalı sonsuz elemanlar ile bulunan sonuçlar birbirlerine çok yakın çıkmıştır. Pasif izolasyon durumunda yüzeydeki noktaların düşey deplasmanlarındaki genlik azalma oranları Şekil 3.22 ve Şekil 3.23 te görülmektedir.

Pasif izolasyon durumuna ait genlik azalma oranları grafiklerden incelendiğinde, aktif izolasyon durumundakine benzer sonuçla karşılaşılmaktadır. Çukurun boş olması hali için, çukurun beton ile dolu olması haline göre daha iyi titreşim izolasyonu elde edilmiştir. Yine aktif izolasyon durumunda olduğu gibi burada da, çukur derinliğinin titreşim izolasyonuna olan etkisinin belirgin bir şekilde ortaya çıkmadığı gözlenmiştir.



Şekil 3.22. Pasif izolasyonda çukur boş iken genlik azalma oranları



Şekil 3.23. Pasif izolasyonda çukur beton dolu iken genlik azalma oranları

3.3.3. Zamanla Keyfi Değişen (Transient) Yükleme Durumu

Bu kısımda, dıştan etkiyen yükün zamanla keyfi olarak değişmesi durumu ele alınmaktadır. Bu tip yükleme durumu için formülasyonun tamamı Laplace dönüşüm uzayında gerçekleştirilmektedir. Zamanla keyfi değişen (transient) yükler altında elastik bir ortamda, hareket denklemleri Laplace uzayında,

$$\left(\left[\overline{K}\right]+s^2\left[\overline{M}\right]\right)\left\{\overline{U}_d\right\}=\left\{\overline{P}(s)\right\} \tag{3.110}$$

olarak elde edilmektedir. Burada $\left\{\overline{P}(s)\right\}$ vektörü, dıştan etkiyen yükün Laplace dönüşümünü temsil etmektedir. (3.110) bağıntısından görüldüğü gibi, hareket denklemleri zaman uzayında ikinci mertebeden diferansiyel denklem takımı iken, Laplace dönüşüm uzayında kompleks katsayılı lineer, cebrik denklem takımı haline dönüşmektedir.

(3.110) bağıntısı ile verilen denklem takımı, elastik (sönümsüz) ortamlar için geçerlidir. Eğer sistem viskoelastik (sönümlü) ise, harmonik yükleme durumuna benzer şekilde elastik-viskoelastik anolojisi kullanılarak sistemdeki sönüm gözönüne alınabilmektedir. Bu çalışmada, Laplace dönüşüm uzayında işlemler yapılırken, sistemdeki sönümün Kelvin tipi viskoz sönüm olduğu kabul edilmekte ve bu durumda elastik-viskoelastik anolojisi ile sistem denklem takımı,

$$\left((1+gs)\left[\overline{K}\right]+s^2\left[\overline{M}\right]\right)\left\{\overline{U}_d\right\}=\left\{\overline{P}(s)\right\} \tag{3.111}$$

şeklinde modifiye edilmektedir. Burada g viskoz sönüm oranını temsil etmektedir. Bu şekilde elde edilen sistem denklem takımı, bir dizi Laplace dönüşüm parametresi (s) için çözülerek Laplace dönüşüm uzayında davranış elde edilmektedir. Bundan sonra uygun bir ters Laplace dönüşüm metodu kullanılarak zaman uzayında çözüm bulunmaktadır.

Yukarıdaki (3.111) bağıntısında görülen, sistem rijitlik ve kütle matrisleri, hem sonlu hemde sonsuz elemanlardan gelen katkılardan meydana gelmektedir. Bu matrisler, yakın ve uzak bölgelere ait sistem matrislerinin toplamı şeklinde düşünülürse, yakın bölgeye ait olan sistem matrisleri, Laplace dönüşüm parametresinden bağımsızdır. Bu nedenle sonlu elemanların kullanıldığı yakın bölgede sistem matrislerinin bir defa oluşturulması yeterli olmaktadır.

3.3.3.1. Direkt ve Ters Laplace Dönüşümü

Zamana bağlı ve keyfi olarak değişen yükler altındaki problemlerin çözümü için, önce yükün direkt Laplace dönüşümü alınmaktadır. Laplace dönüşüm uzayında çözüm bulunduktan sonra ise ters Laplace dönüşümü alınarak zaman uzayında çözüm elde edilmektedir.

Zaman uzayında, $t>0$ için zamanın (t) reel fonksiyonu olan f(t) nin direkt Laplace dönüşümü,

$$L[f(t)] = \bar{F}(s) = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt \qquad (3.112)$$

$$s = a + i\omega$$

şeklinde tarif edilmektedir. Burada, L[ ], Laplace dönüşüm operatörüdür. Görüldüğü gibi Laplace dönüşüm parametresi s, kompleks bir sayı olup, f(t) nin Laplace dönüşümü olan $\bar{F}(s)$ de kompleks bir fonksiyon olarak elde edilmektedir. Laplace parametresi s'nin tarifinde görülen "a" sayısı keyfi bir sayı olmakla birlikte, $\bar{F}(s)$ nin tüm tekil noktalarının reel kısmından ve sıfırdan büyük olacak şekilde seçilmektedir. Laplace dönüşüm uzayında verilen bir $\bar{F}(s)$ fonksiyonunun ters Laplace dönüşümü ise aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

$$L^{-1}\left[\bar{F}(s)\right] = f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \bar{F}(s)\, e^{st} ds \qquad (3.113)$$

Direkt Laplace dönüşüm tanımına göre, (3.112) den zamana göre bazı türevlerin Laplace dönüşümü,

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = s\bar{F}(s) - f_0$$
$$L\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right] = s^2\bar{F}(s) - sf_0 - \dot{f}_0 \qquad (3.114)$$

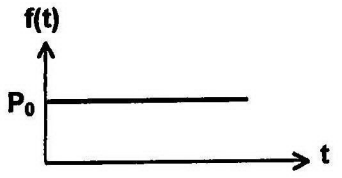
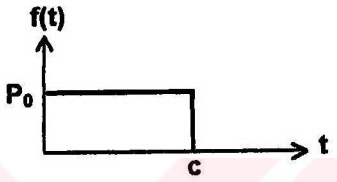
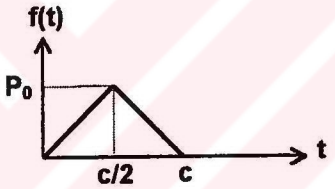
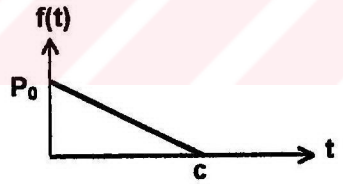
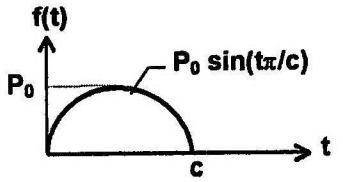
olarak hesaplanmaktadır. İfadelerin üzerindeki noktaların herbiri zamana göre bir türevi göstermektedir. Burada, f_0 ve $\dot{f}_0$ ise $f(t)$ ve $\dot{f}(t)$ nin başlangıç (t=0) anındaki değerlerini göstermektedir.

Bu çalışmada direkt ve ters Laplace dönüşümleri için, (3.112) ve (3.113) te verilen tarifleri yerine, sayısal direkt ve ters Laplace dönüşüm yöntemleri kullanılmaktadır.

3.3.3.1.(1). Sayısal Direkt Laplace Dönüşümü

Tez çalışması esnasında, herhangi bir fonksiyonun direkt Laplace dönüşümü hesaplanırken, öncelikle fonksiyonun kapalı Laplace dönüşümü biliniyorsa kullanılmaktadır. Eğer kapalı direkt Laplace dönüşümü bilinmiyorsa, Fast Fourier Transforma (FFT) dayalı direkt sayısal Laplace dönüşüm yöntemi uygulanmaktadır. Burada ele alınan bazı fonksiyonlara ait kapalı direkt Laplace dönüşümleri aşağıda görülmektedir (Çizelge 3.3).

Çizelge 3.3. Bazı fonksiyonların kapalı Laplace dönüşümleri

Tip No	Yük Tipleri	Zaman Uzayı f(t)	Laplace Uzayı $\bar{F}(s)$
1	Ani Yük		$\frac{P_0}{s}$
2	İmpulsif Dikdörtgen		$\frac{P_0\left(1-e^{-cs}\right)}{s}$
3	İmpulsif Üçgen		$P_0\left[\frac{1-e^{-\frac{cs}{2}}}{s}\right]^2\frac{2}{c}$
4	İmpulsif Dik Üçgen		$P_0\left[\frac{1}{s}-\frac{1-e^{-cs}}{c\,s^2}\right]$
5	İmpulsif Sinüs		$P_0\frac{\pi c\left(1+e^{-cs}\right)}{c^2s^2+\pi^2}$
6	Harmonik Sinüs	$P_0\sin(\omega t)$	$P_0\frac{\omega}{\left(s^2+\omega^2\right)}$

Bazı durumlarda f(t) yük fonksiyonlarının kapalı ifadeleri karmaşık olmakta veya kapalı Laplace dönüşümleri bulunamamaktadır. Bu durumda, fonksiyonun sayısal değerleri ayrık olarak hesaplanarak, dönüşümleri FFT'a dayalı direkt Laplace dönüşüm yöntemi ile yapılmaktadır (Cooley, Lewis ve Welch, 1970). Bu yöntem kısaca aşağıda anlatılmaktadır.

Zaman uzayında, f(t) fonksiyonu,

$$\begin{aligned} f(t) &= f(t) \qquad 0 \le t \le T \text{ için} \\ f(t) &= 0 \qquad t < 0 \text{ ve } t > T \text{ için} \end{aligned} \tag{3.115}$$

ise, Laplace dönüşümü (3.112)'ye göre,

$$\bar{F}(s) = \int_0^T f(t)\, e^{-st}\, dt \tag{3.116}$$

şeklini alır. $t=t_n=n\,\Delta t$ zamanında f(t)'nin ayrık değerleri için (3.116) ifadesi,

$$\begin{aligned} \bar{F}(s_k) &= \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \left(f(t_n)\, e^{-a t_n} \right) e^{-i \frac{2\pi n k}{N}} \qquad (k = 0,1,2,\cdots,N-1) \\ s_k &= a + i \frac{2\pi k}{T} \qquad N = \frac{T}{\Delta t} \end{aligned} \tag{3.117}$$

şeklinde yazılabilmektedir. Burada, T çözüm aralığı ve Δt ise zaman artımını göstermektedir. Bu aşamadan sonra (3.117) ifadesi FFT algoritması yardımıyla hesaplanabilmektedir.

3.3.3.1.(2). Sayısal Ters Laplace Dönüşümü

Laplace dönüşüm uzayında bilinmeyenler için çözüm bulunduktan sonra, zaman uzayına dönüştürülmesi gerekmektedir. Bu dönüştürme işlemi için burada (3.113) tarifi yerine, sayısal ters Laplace dönüşüm yöntemlerinden Durbin metodu

kullanılmıştır (Durbin, 1974). Bu yöntem, sonlu Fourier-Kosinüs dönüşümüne dayalı Dubner ve Abate metodunun geliştirilmiş halidir (Dubner ve Abate, 1968). Durbin'in metodunda, $\bar{F}(s)$ gibi bir fonksiyonun zaman uzayına dönüşümü,

$$f(t_j)=\frac{2e^{a\,j\,\Delta t}}{T}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\bar{F}(a)\right\}+\mathrm{Re}\left\{\sum_{k=0}^{N-1}\left(A(k)+i\,B(k)\right)W^{jk}\right\}\right] \qquad (3.118)$$
$$(j=0,1,2,\cdots,N-1)$$

bağıntısı ile verilmektedir. Burada,

$$A(k)=\sum_{m=0}^{M}\mathrm{Re}\left\{\bar{F}(a+i[k+m\,N]\frac{2\pi}{T})\right\}$$
$$B(k)=\sum_{m=0}^{M}\mathrm{Im}\left\{\bar{F}(a+i[k+m\,N]\frac{2\pi}{T})\right\} \qquad (3.119)$$
$$W=e^{i\cdot\frac{2\pi}{N}}$$

olup, A(k) ve B(k)'nin bulunmasında M=0 alınması yeterli olmaktadır. Durbin (1974)'de "a" parametresinin seçimi için, $3\le aT\le 10$ aralığında dönüşümün iyi sonuç verdiği belirtilmektedir. (3.118) eşitliğinde görülen,

$$\sum_{k=0}^{N-1}\left(A(k)+i\,B(k)\right)W^{jk} \qquad (3.120)$$

ifadesi, FFT yardımı ile hesaplanmaktadır. Laplace dönüşüm uzayında bulunan sonuçların ters dönüşümden önce, Fejer (F_k) ve Lanczos (L_k) faktörleriyle çarpılmasıyla sonuçların iyileştiği belirtilmektedir (Narayanan, 1979).

$$F_k=1-\frac{k}{N} \qquad L_k=\frac{\sin\left(k\pi/N\right)}{\left(k\pi/N\right)} \qquad (3.121)$$

3.3.3.2. Tek Dalga Tipini İçeren Sonsuz Eleman

Tek dalga tipini içeren transient sonsuz eleman durumunda da, Şekil 3.8'de görülen 5 düğümlü sonsuz eleman kullanılmaktadır. Gerçek eleman ile referans elemanı arasındaki geometrik dönüşüm için yine (3.61) bağıntısı ve (3.62) geometrik şekil fonksiyonları kullanılmaktadır. Keyfi dinamik yükleme durumunda hareket denklemleri Laplace dönüşüm uzayında elde edildiğinden, sonsuz elemanların deplasman yaklaşımıda Laplace dönüşüm uzayında,

$$\bar{u} = \sum_{i=1}^{3} \bar{N}_i \bar{u}_i \qquad \bar{v} = \sum_{i=1}^{3} \bar{N}_i \bar{v}_i \tag{3.122}$$

şeklinde seçilmektedir. Burada kullanılan interpolasyon şekil fonksiyonları,

$$\begin{aligned} \bar{N}_1(\xi,\eta,s) &= \bar{P}(\xi,s)\left[\frac{1}{2}\eta(\eta-1)\right] \\ \bar{N}_2(\xi,\eta,s) &= \bar{P}(\xi,s)\left[1-\eta^2\right] \\ \bar{N}_3(\xi,\eta,s) &= \bar{P}(\xi,s)\left[\frac{1}{2}\eta(\eta+1)\right] \end{aligned} \tag{3.123}$$

olarak alınmaktadır. Yukarıda, $\bar{P}(\xi,s)$ Laplace dönüşüm uzayında deplasman yayılma fonksiyonu olup, tek dalga tipini içeren harmonik sonsuz eleman modeli baz alınarak, aşağıdaki formda olduğu kabul edilmiştir.

$$\bar{P}(\xi,s) = e^{-(\alpha+\beta)\xi} \qquad \beta = \frac{s}{c} L \tag{3.124}$$

Burada, α azaltma parametresini, s Laplace dönüşüm parametresini, L karakteristik uzunluğu ve c ise dalga hızını (c_P, c_S veya c_R) göstermektedir.

Seçilen bu tipteki şekil fonksiyonları kullanılarak eleman rijitlik ve kütle matrisleri, düzlem elastisite halinde (3.67a) ve eksenel simetrik durumda (3.67b) bağıntılarında verildiği gibi elde edilmektedir. Sonsuz elemana ait rijitlik ve kütle matrisleri yine sayısal olarak sonlu yönde Gauss-Legendre, sonsuz yönde ise Newton-Cotes integrasyon metodu ile hesaplanmaktadır.

3.3.3.3. İki Dalga Tipini İçeren Sonsuz Eleman

Bu eleman için de yine Şekil 3.8'deki 5 düğümlü sonsuz eleman kullanılmaktadır. Geometrik dönüşüm, tek dalga tipini içeren sonsuz elemandaki gibi olup, deplasmanların dönüşümü Laplace uzayında,

$$\bar{u} = \sum_{i=1}^{5} \bar{N}_i \bar{u}_i \qquad \bar{v} = \sum_{i=1}^{5} \bar{N}_i \bar{v}_i \tag{3.125}$$

şeklinde seçilmektedir. İki dalga tipini içeren sonsuz eleman için interpolasyon şekil fonksiyonları yine harmonik sonsuz elemana benzer olarak,

$$\begin{aligned}
\bar{N}_1(\xi,\eta,s) &= \bar{P}_1(\xi,s)\left[\frac{1}{2}\eta(\eta-1)\right] \\
\bar{N}_2(\xi,\eta,s) &= \bar{P}_2(\xi,s)\left[1-\eta^2\right] \\
\bar{N}_3(\xi,\eta,s) &= \bar{P}_3(\xi,s)\left[\frac{1}{2}\eta(\eta+1)\right] \\
\bar{N}_4(\xi,\eta,s) &= \bar{P}_4(\xi,s)\left[\frac{1}{2}(1-\eta)\right] \\
\bar{N}_5(\xi,\eta,s) &= \bar{P}_5(\xi,s)\left[\frac{1}{2}(1+\eta)\right]
\end{aligned} \tag{3.126}$$

şeklinde şeçilmiştir. Buradaki $\bar{P}_k(\xi,s)$, yine Laplace dönüşüm uzayında deplasman yayılma fonksiyonu olup, aynı anda iki farklı elastik dalganın özelliğini içerecek şekilde, düzlem dalgaların süperpozisyonu gibi düşünülerek,

$$\bar{P}(\xi,s) = a\,e^{-(\alpha+\beta_1)\xi} + b\,e^{-(\alpha+\beta_2)\xi}$$
$$\beta_k = \frac{s}{c_k} L \qquad (3.127)$$

formunda seçilmektedir. (3.127) ifadesinde görülen a ve b katsayılarının hesabı, iki dalga tipini içeren harmonik sonsuz elemanda anlatıldığı gibidir. Bu durumda benzer işlemlerden sonra,

$$\bar{P}_k(\xi, s) = E_{11}\,e^{-(\alpha+\beta_1)\xi} + E_{21}\,e^{-(\alpha+\beta_2)\xi} \qquad k=1,2,3$$
$$\bar{P}_k(\xi, s) = E_{12}\,e^{-(\alpha+\beta_1)\xi} + E_{22}\,e^{-(\alpha+\beta_2)\xi} \qquad k=4,5 \qquad (3.128)$$

olarak deplasman yayılma fonksiyonları bulunmaktadır. Burada, E_{11}, E_{12}, E_{21} ve E_{22} katsayıları (3.95) ten alınacaktır. Yalnız, bu katsayılar hesaplanırken β_k lar için (3.127) bağıntısında görülen tarifi kullanılmalıdır. Bu aşamadan sonra yine harmonik sonsuz elemanda anlatıldığı gibi eleman rijitlik ve kütle matrisleri sayısal integrasyon yöntemi ile hesaplanmaktadır.

3.3.3.4. Üç Dalga Tipini İçeren Sonsuz Eleman

Bu tip eleman için de, üç dalga tipini içeren harmonik sonsuz eleman için kullanılan 7 düğümlü sonsuz eleman kullanılmaktadır. Geometrik dönüşüm aynı olmakla birlikte, deplasmanların dönüşümü için Laplace uzayında,

$$\bar{u} = \sum_{i=1}^{7} \bar{N}_i\,\bar{u}_i \qquad \bar{v} = \sum_{i=1}^{7} \bar{N}_i\,\bar{v}_i \qquad (3.129)$$

şeklinde yaklaşım yapılmaktadır. Burada da interpolasyon şekil fonksiyonları Laplace dönüşüm uzayında aşağıdaki formda seçilmektedir.

$$\begin{aligned}
\overline{N}_1(\xi,\eta,s) &= \overline{P}_1(\xi,s)\left[\frac{1}{2}\eta(\eta-1)\right] \\
\overline{N}_2(\xi,\eta,s) &= \overline{P}_2(\xi,s)\left[1-\eta^2\right] \\
\overline{N}_3(\xi,\eta,s) &= \overline{P}_3(\xi,s)\left[\frac{1}{2}\eta(\eta+1)\right] \\
\overline{N}_k(\xi,\eta,s) &= \overline{P}_k(\xi,s)\left[\frac{1}{2}(1-\eta)\right] \qquad k=4,6 \\
\overline{N}_k(\xi,\eta,s) &= \overline{P}_k(\xi,s)\left[\frac{1}{2}(1+\eta)\right] \qquad k=5,7
\end{aligned} \tag{3.130}$$

Burada, $\overline{P}_k(\xi,s)$, deplasman yayılma fonksiyonları, harmonik sonsuz elemanda olduğu gibi aşağıdaki formda seçilmiştir.

$$\begin{aligned}
\overline{P}(\xi,s) &= a\,e^{-(\alpha+\beta_1)\xi} + b\,e^{-(\alpha+\beta_2)\xi} + c\,e^{-(\alpha+\beta_3)\xi} \\
\beta_k &= \frac{s}{c_k}L
\end{aligned} \tag{3.131}$$

Yukarıda görülen a, b ve c katsayılarının hesabı, harmonik sonsuz elemanda anlatıldığı gibidir. Bu durumda deplasman yayılma fonksiyonları,

$$\begin{aligned}
\overline{P}_k(\xi,s) &= E_{11}e^{-(\alpha+\beta_1)\xi} + E_{21}e^{-(\alpha+\beta_2)\xi} + E_{31}e^{-(\alpha+\beta_3)\xi} \qquad k=1,2,3 \\
\overline{P}_k(\xi,s) &= E_{12}e^{-(\alpha+\beta_1)\xi} + E_{22}e^{-(\alpha+\beta_2)\xi} + E_{32}e^{-(\alpha+\beta_3)\xi} \qquad k=4,5 \\
\overline{P}_k(\xi,s) &= E_{13}e^{-(\alpha+\beta_1)\xi} + E_{23}e^{-(\alpha+\beta_2)\xi} + E_{33}e^{-(\alpha+\beta_3)\xi} \qquad k=6,7
\end{aligned} \tag{3.132}$$

olarak bulunmaktadır. E_{ij} katsayıları (3.106) ifadelerinde verildiği gibi elde edilmektedir. Yalnız, (3.106) ifadelerinde gözüken β_k lar için (3.131) bağıntısındaki tarifi kullanılmalıdır. Bu aşamadan sonra yine harmonik sonsuz elemanda anlatıldığı gibi eleman rijitlik ve kütle matrisleri sayısal integrasyon yöntemi ile hesaplanmaktadır.

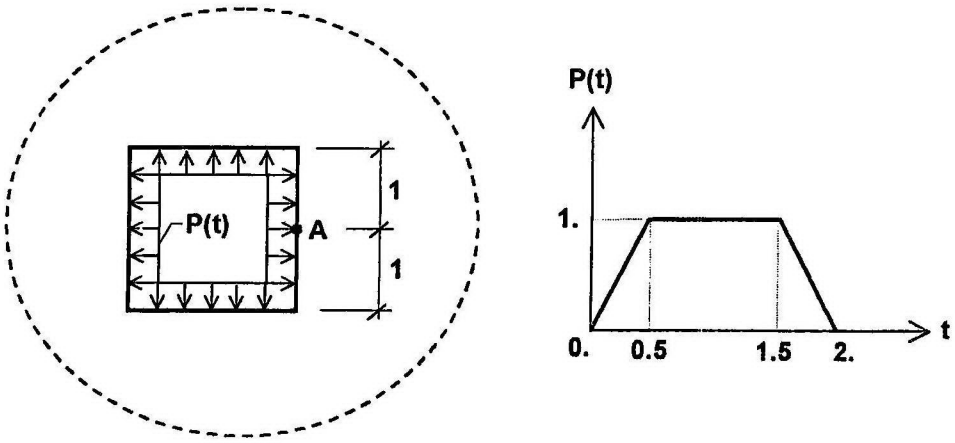
3.3.3.5. Keyfi Dinamik Yükleme Durumunda Sayısal Uygulamalar

Zamanla keyfi olarak değişen dinamik yükleme durumunda, sonlu eleman olarak sekiz düğümlü, kuadratik, izoparametrik eleman ile çeşitli tipteki (bir dalga, iki dalga veya üç dalga özelliğini içeren) sonsuz eleman modelleri kullanılmaktadır. Eleman matrislerinin hesabında, sonlu yönde 3 noktalı Gauss-Legendre sayısal integrasyon yöntemi, sonsuz integraller için 12 noktalı Newton-Cotes integrasyon metodu kullanılmaktadır. Ele alınan sistemler elastik veya viskoelastik yarı sonsuz ortamlardan oluştuğundan, (3.111) sistem hareket denklemi kullanılarak, FORTRAN77 dilinde bilgisayar programları hazırlanmıştır. Programlar Laplace dönüşüm uzayında yapılan formülasyona dayanmaktadır. Bu nedenle, sistem denklem takımı bir dizi "s" parametreleri için çözülüp, aranan büyüklükler hesaplandıktan sonra, Durbin metodu ile sayısal ters Laplace dönüşümü alınarak zaman uzayında çözüm bulunmaktadır.

Burada ele alınan sayısal uygulamaların çoğu, daha önceden literatürde çözülmüş örnekler olup, amaç bu çalışmada önerilen sonsuz elemanların kontrolü ve güvenilirliğini göstermektir.

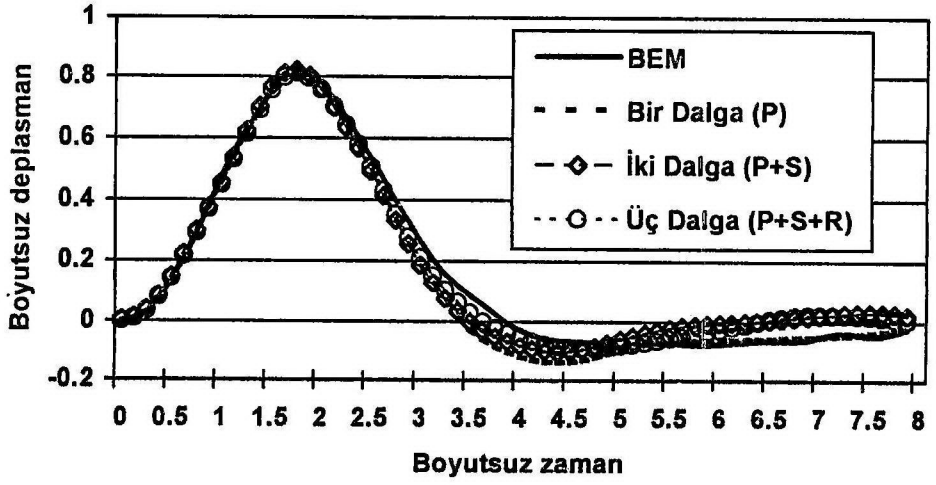
3.3.3.5.(1). Ortasında Kare Delik Bulunan Sonsuz Levha

Elastik sonsuz bir levha içinde bulunan kare şeklindeki delik, Şekil 3.24 te görüldüğü gibi bir yüklemeye maruz bırakılmıştır. Bu örnek, geometrisi ve yüklemesinden dolayı bir düzlem gerilme problemi olup, boyutsuz büyüklükler kullanılarak ele alınmaktadır. Boyutsuz malzeme özellikleri, $\bar{E} = 2.5$, ν=0.25, $\bar{\rho} = 1$ ve $\bar{t} = 1$ olarak seçilmiştir. Bu durumda, boyutsuz dalga hızları ise, $\bar{c}_P = 1.732$, $\bar{c}_S = 1$ ve $\bar{c}_R = 0.9194$ olarak hesaplanmıştır. İki eksene göre simetri nedeniyle dörtte bir bölge gözönüne alınıp, 95 elemandan oluşan ağ (75 sonlu, 20 sonsuz eleman) üzerinde çözüm yapılmıştır. Ayrıca azaltma parametresi α=0.69 ve Laplace dönüşümü için aT=6 olarak seçilmiştir.



Şekil 3.24. Ortasında kare delik bulunan sonsuz levha

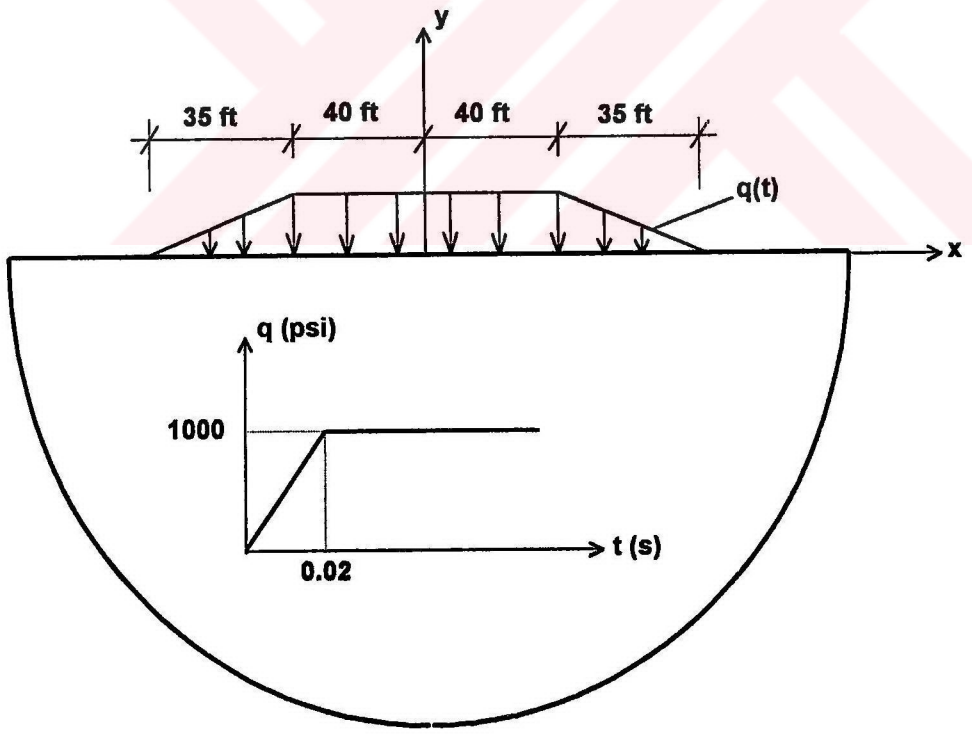
Burada, A noktasının yatay deplasmanının zamanla değişimi aranmaktadır. Bu problem, Mengi ve ark (1994) tarafından hazırlanan sınır eleman metoduna dayalı bilgisayar programı ile, kare delik çevresi 36 sınır elemanına bölünerek çözülmüştür. Sonlu-sonsuz eleman modeli ile çözüm yapılırken, üç değişik sonsuz eleman modeli ile sonuçlar bulunmuş olup, her üç elemandan elde edilen sonuçların birbirine yakın çıktığı görülmektedir (Şekil 3.25). Ayrıca, sonlu-sonsuz eleman modeliyle bulunan sonuçların, sınır eleman metodu ile bulunanlarla uyumlu olduğuda gözlenmektedir.



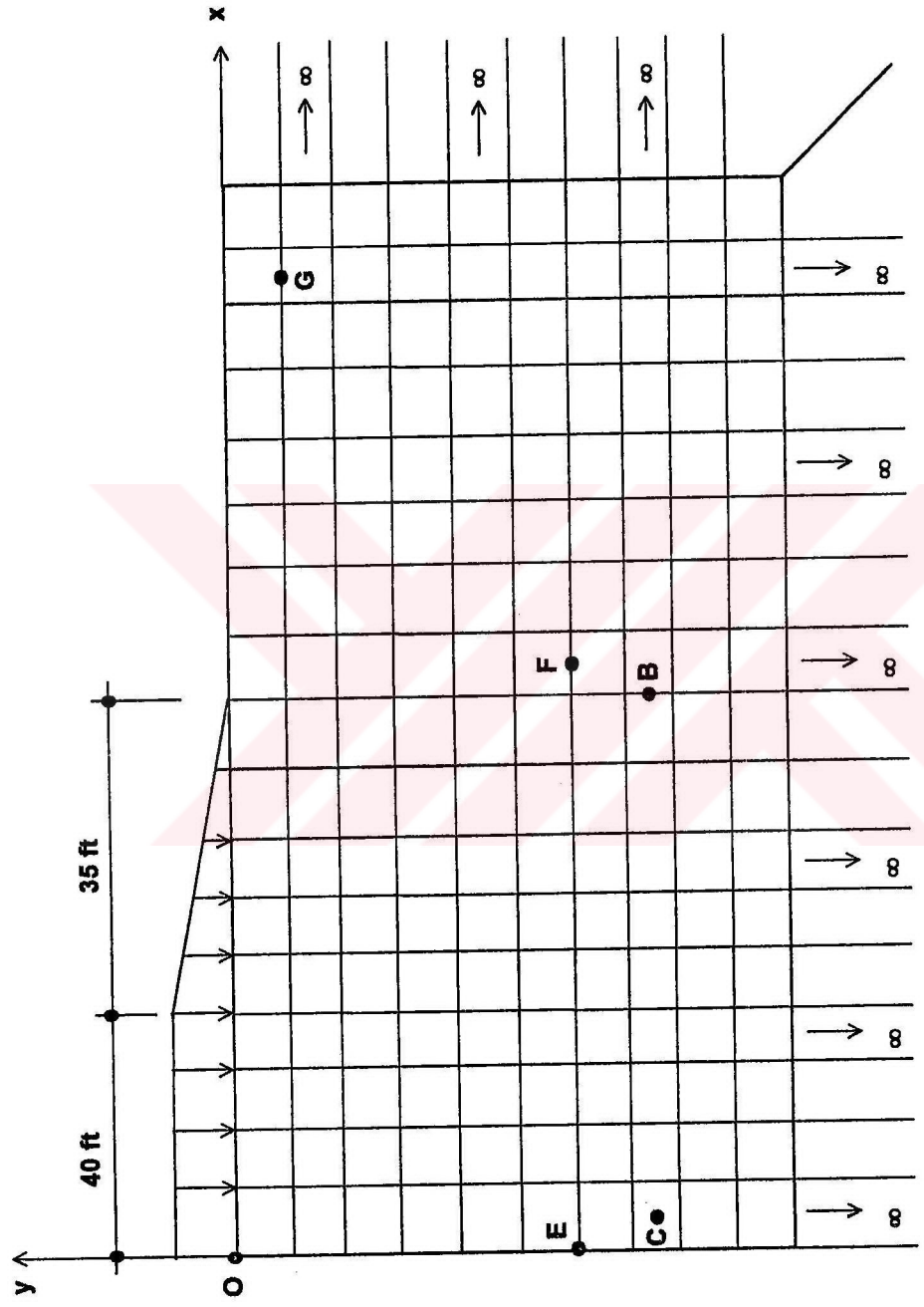
Şekil 3.25. A noktasındaki yatay deplasmanın zamanla değişimi

3.3.3.5.(2). Trapez Şerit Yük Etkisinde Yarı Sonsuz Zemin

Elastik yarı sonsuz zemin, zamanla değişimi rampa tipi olan trapez şeklinde bir yüklemeye maruz bırakılmıştır. Düzlem şekil değiştirme tipinde olan bu problemin geometrisi ve yükün zamanla değişimi aşağıda görülmektedir (Şekil 3.26). Bu problemde, zemin içerisinde belirli noktalardaki deplasman ve gerilmelerin zamanla değişimleri aranmaktadır. Zemine ait malzeme özellikleri, $E=2\times10^5$ psi, $\nu=0.15$ ve $\rho=1.9534\times10^{-4}$ lb-s^2/in^4 olarak alınmıştır. Bu verilere göre elastik ortamdaki dalga hızları, $c_P=32879.93$ in/s, $c_S=21098.69$ in/s ve $c_R=0.903c_S=19052.12$ in/s olarak hesaplanmıştır. Simetri nedeniyle ortamın yarısı gözönüne alınarak sonlu-sonsuz eleman ağı oluşturulmuştur (Şekil 3.27). Sonsuz elemanlarda deplasman azaltma parametresi $\alpha=0.69$ olarak şeçilmiştir.

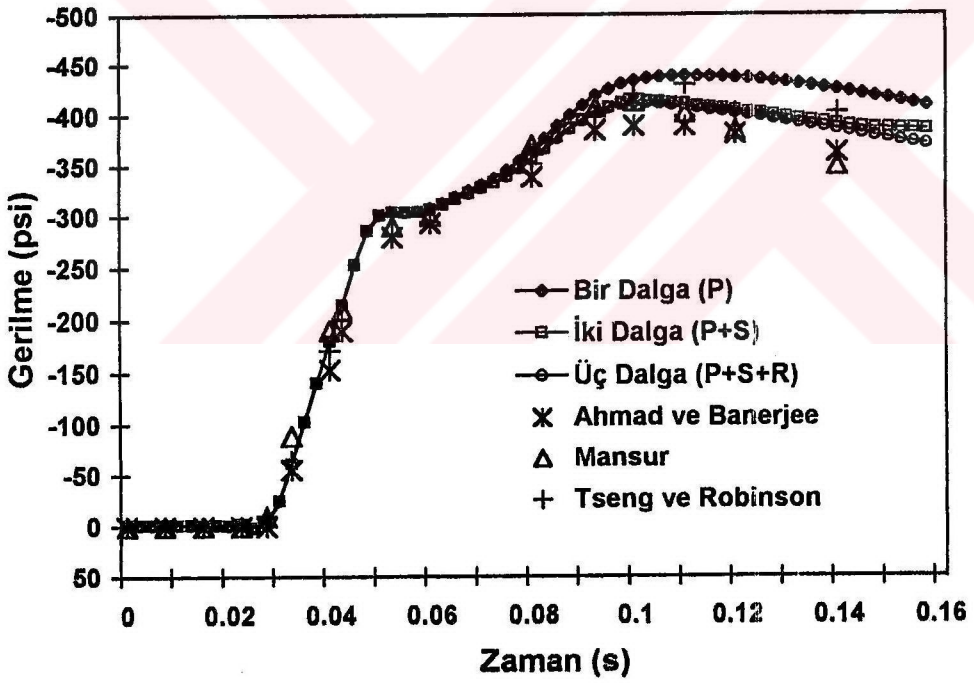


Şekil 3.26. Trapez yüklemeye maruz yarı sonsuz zemin

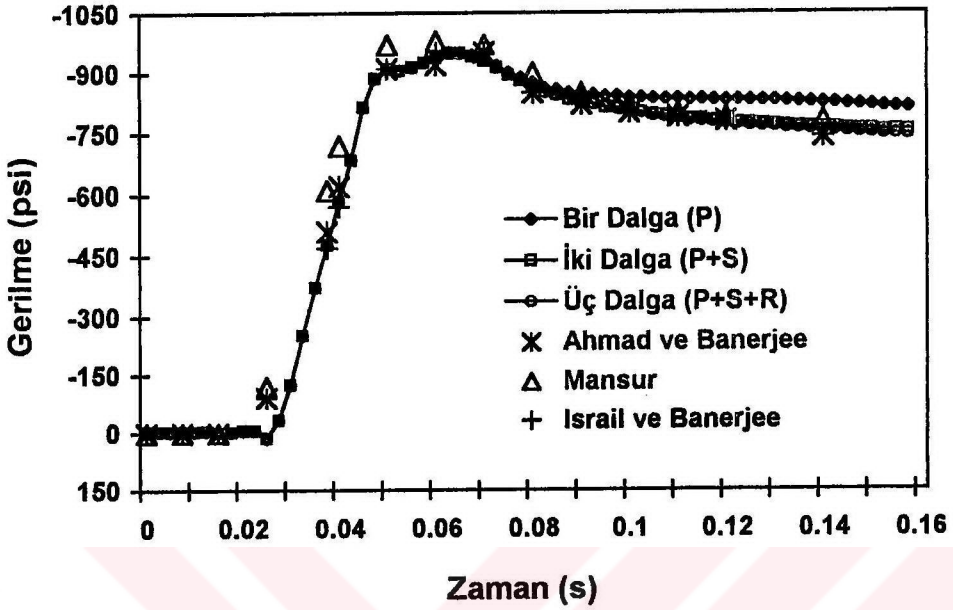


Şekil 3.27. Trapez yükleme altındaki yarı sonsuz zeminin sonlu-sonsuz eleman ağı

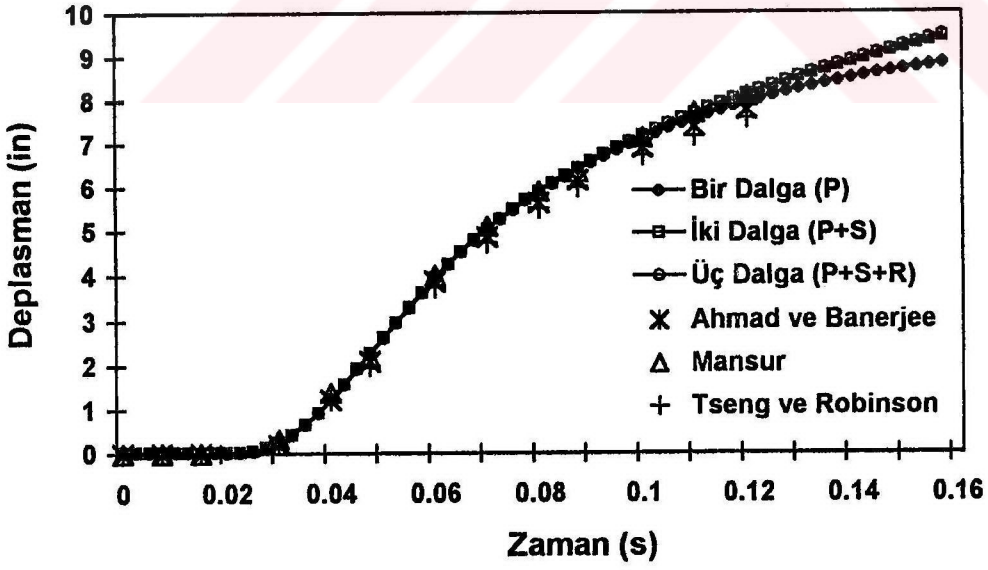
Bu problem daha önce çeşitli araştırmacılar tarafından, çeşitli yöntemler kullanılarak incelenmiştir. Tseng ve Robinson (1975) viskoz sınır şartları ile sonlu farklar metodunu kullanmıştır. Ahmad ve Banerjee (1988) Laplace dönüşüm uzayında sınır eleman metodu formülasyonu ile incelemişlerdir. Ayrıca, Mansur (1983) ile Israil ve Banerjee (1990a)'da zaman uzayında sınır eleman metodu kullanılarak bu problem ele alınmıştır. Bu problem, üç değişik sonsuz eleman formülasyonu kullanılarak ele alınmaktadır. Yukarıdaki şekilde gösterilmiş olan B(75′,-75′) ve C(5′,-75′) noktalarındaki düşey gerilmelerin zamanla değişimi (Şekil 3.28 ve Şekil 3.29), E(0′,-60′), F(80′,-60′) ve G(150′,-10′) noktalarında ise düşey deplasmanın zamanla değişimi incelenmektedir (Şekil 3.30-32).



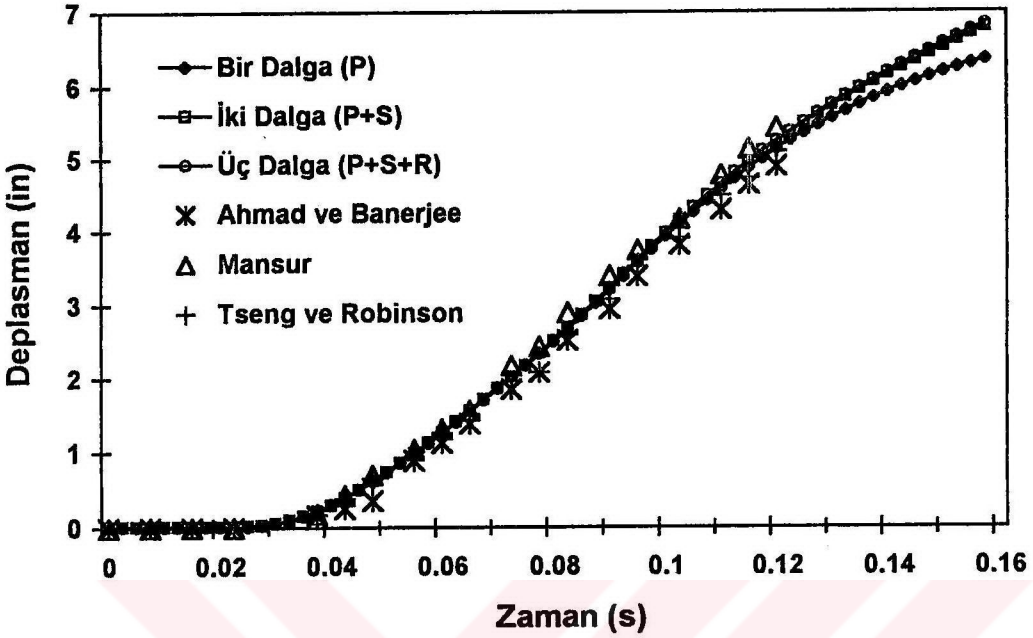
Şekil 3.28. B noktasındaki düşey gerilmenin zamanla değişimi



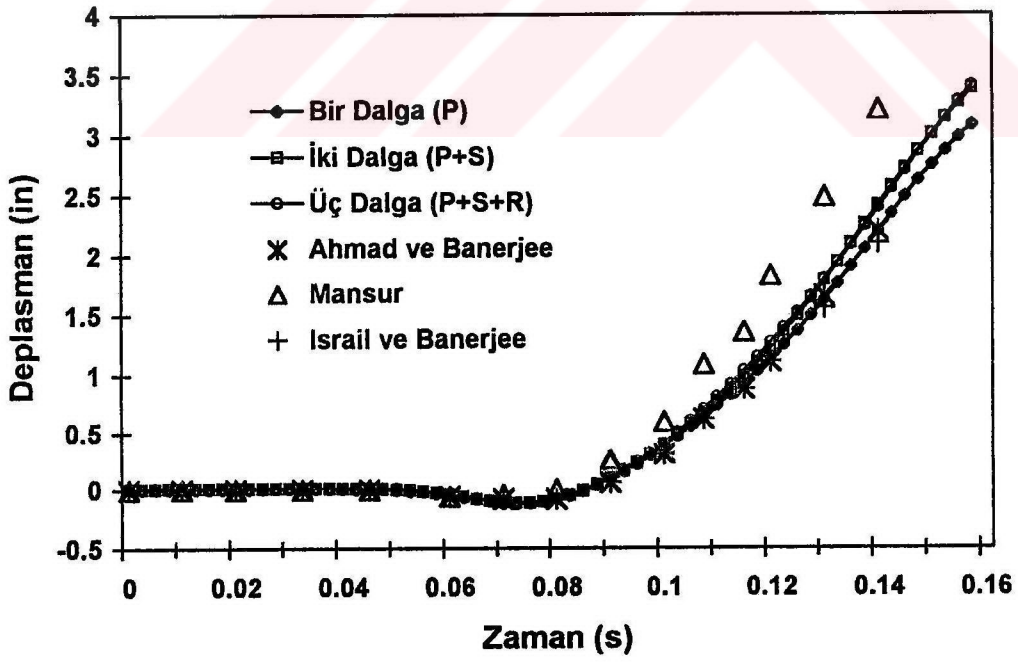
Şekil 3.29. C noktasındaki düşey gerilmenin zamanla değişimi



Şekil 3.30. E noktasındaki düşey deplasmanın zamanla değişimi



Şekil 3.31. F noktasındaki düşey deplasmanın zamanla değişimi

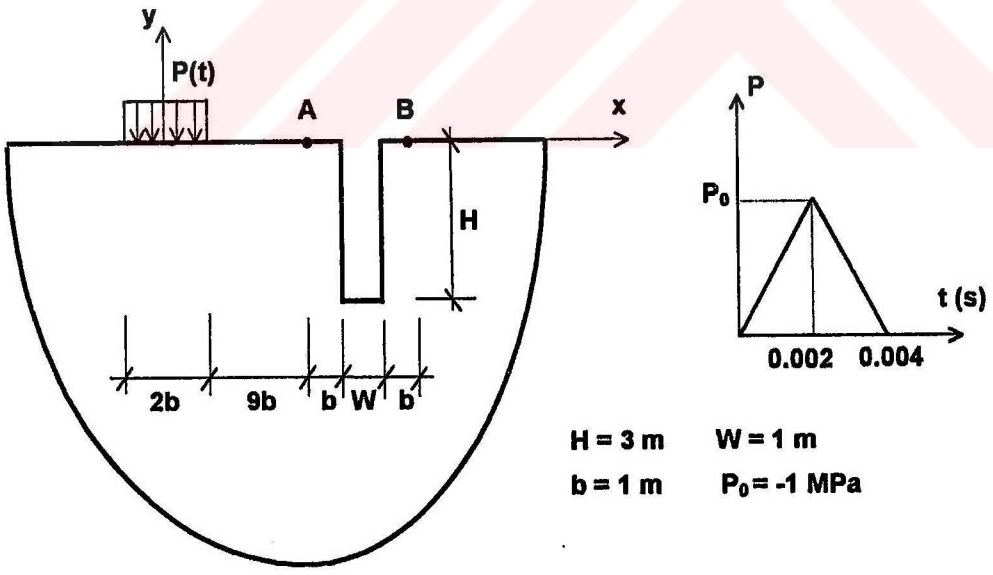


Şekil 3.32. G noktasındaki düşey deplasmanın zamanla değişimi

Grafiklerden, çeşitli dalga tipleri gözönüne alınarak elde edilen sonlu-sonsuz eleman modeli sonuçlarının birbirleri ile oldukça uyumlu oldukları gözlenmektedir. Ayrıca, çeşitli tipteki sonsuz eleman modelleri ile elde edilen sonuçların, diğer araştırmacıların buldukları sonuçlarla da uyumlu olduğu gözlenmektedir. P dalgasının C noktasına ulaşma zamanı $t_C = \overline{OC}/c_P = 0.0274$ saniye olarak bulunmuş ve Şekil 3.29'dan da görülebileceği gibi bu ulaşma zamanı mevcut programlarla da elde edilmiştir.

3.3.3.5.(3). Elastik Yarı Sonsuz Zeminde Çukur Problemi

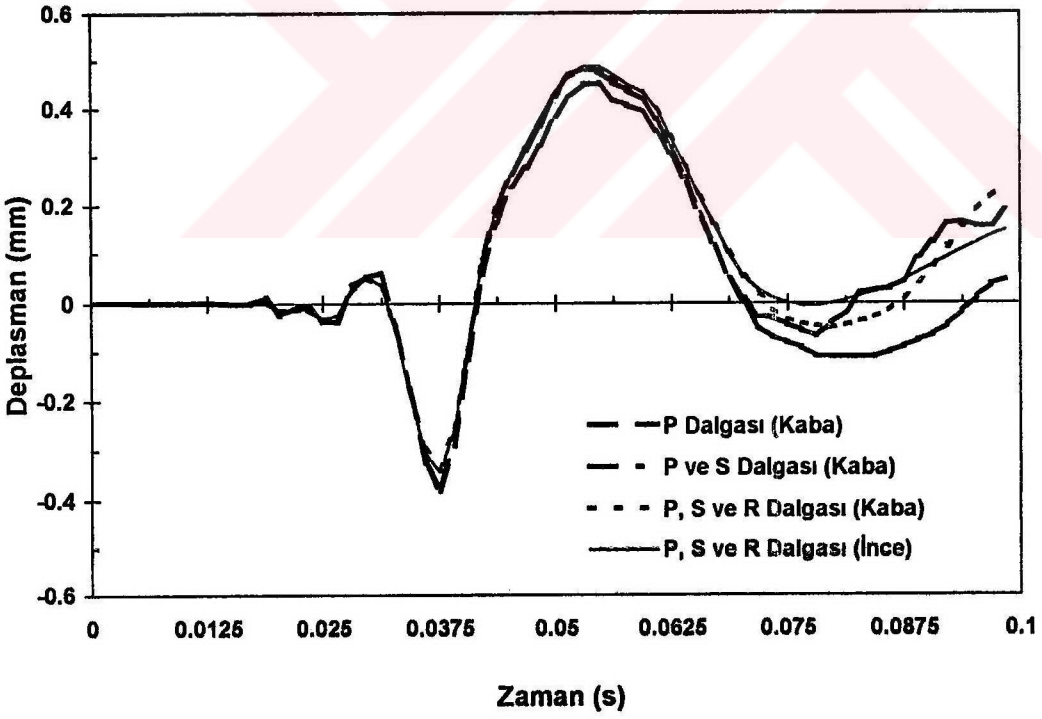
Yarı sonsuz elastik bir zeminin yüzeyinde 2b genişliğindeki kısmı, zamanla değişimi üçgen impulsif tipinde olan yüklemeye maruz bırakılmıştır. Probleme ait geometri ve yükleme Şekil 3.33 te görülmektedir. Burada, zemin yüzeyinde açılan bir çukurun çeşitli noktalarda (çukurdan önce ve sonra) meydana getirdiği titreşim izolasyonu araştırılmaktadır.



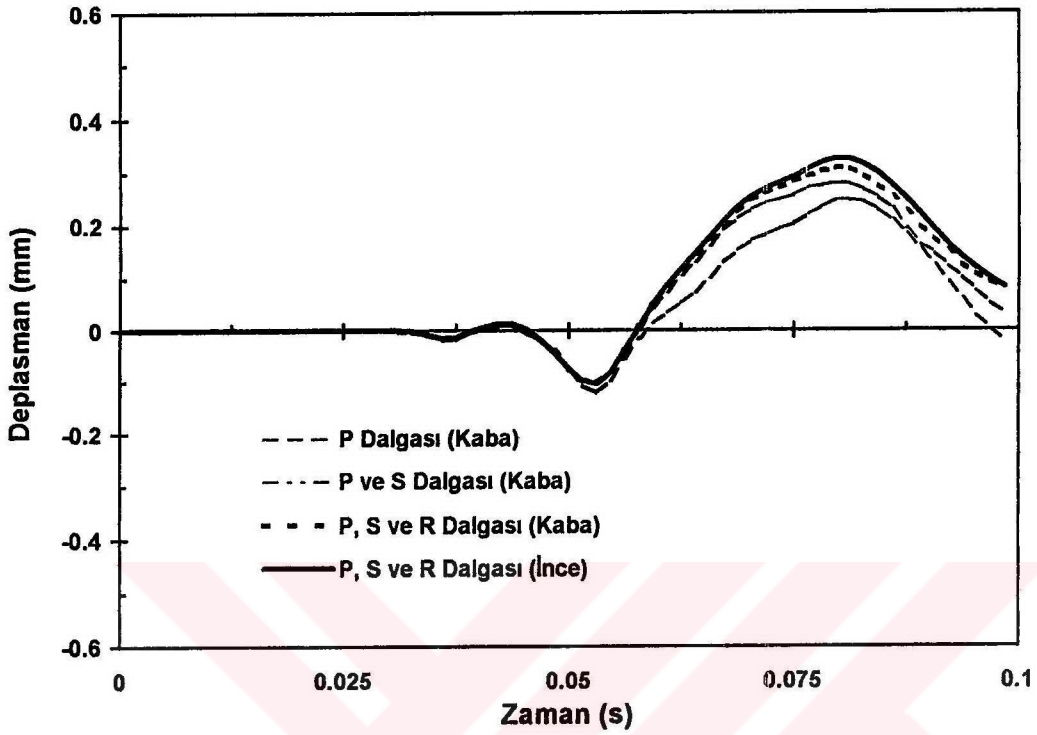
Şekil 3.33. Yarı sonsuz zeminde çukur problemi, geometri ve yükleme durumu

Zemine ait malzeme özellikleri, E=330 Mpa, ν=0.25 ve $\rho=1.7857\times10^3$ kg/m^3 olarak alınmaktadır. Bu durumda, elastik ortamın dalga hızları, c_P=470.916 m/s, c_S=271.883 m/s ve $c_R=0.9194c_S$=249.97 m/s olarak hesaplanmıştır.

Bu problem, sonlu-sonsuz eleman modeli ile iki farklı ağ kullanılarak ele alınmıştır. Bunlar, 208 sonlu ve sonsuz elemandan oluşan kaba ağ ile 479 sonlu ve sonsuz elemandan oluşan ince ağdan meydana gelmektedir. İnce ağla yapılan çözümlerden, bir dalga, iki dalga ve üç dalga tipini içeren sonsuz eleman çözümleri birbirlerine çok yakın bulunmuştur. Kaba ağla yapılan çözümlerde ise bir dalga, iki dalga ve üç dalga özelliğini içeren sonsuz eleman modeli sonuçlarının, ince ağdaki sonuçlara gittikçe yaklaştığı gözlenmiştir. Çukurdan önceki nokta (A) ve çukurdan sonraki nokta (B) için, sonlu sonsuz eleman modeli ve çeşitli dalga tipleri kullanılarak elde edilen sonuçlar aşağıda görülmektedir (Şekil 3.34 ve Şekil 3.35).



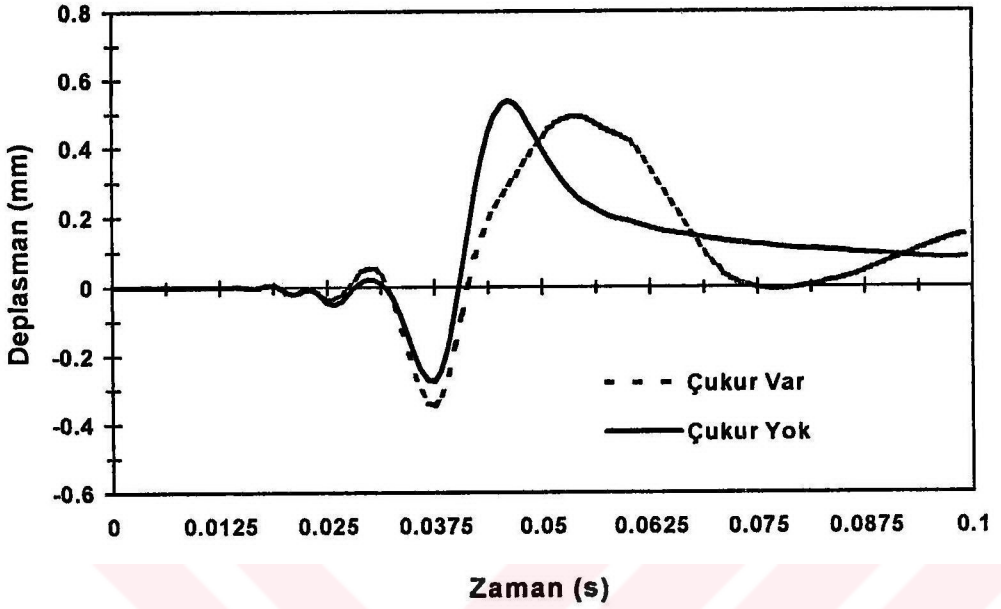
Şekil 3.34. A noktasının (çukurun gerisinde) düşey deplasmanı



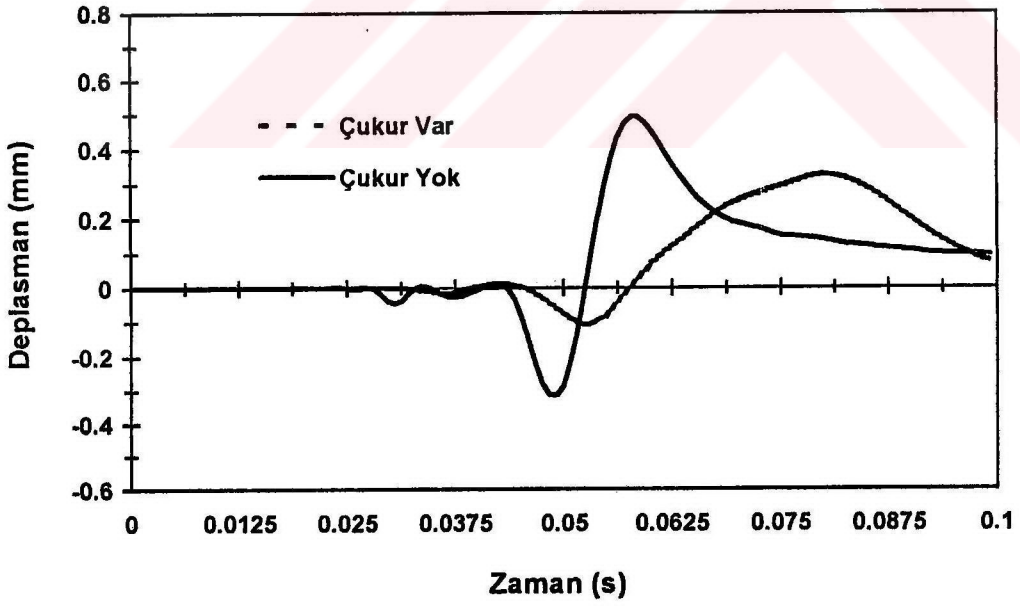
Şekil 3.35. B noktasının (çukurun ötesinde) düşey deplasmanı

P dalgasının A ve B noktalarına varma zamanları, t_A=0.019 saniye ve t_B=0.038 saniye olarak hesaplanmış olup, bu zamanlar otomatik olarak verilen grafiklerden de görülebilmektedir. Buradan, dalgaların çukurun etrafını dolaştığı sonucu ortaya çıkmaktadır.

Ayrıca, A ve B noktalarındaki düşey deplasmanların, çukurun var olup olmamasına göre titreşim izolasyonu durumu araştırılmış olup, sonuçlar grafik olarak aşağıda görülmektedir (Şekil 3.36 ve Şekil 3.37). Bu problem daha önce Israil ve Banerjee (1990a) tarafından zaman uzayında sınır eleman metodu formülasyonu kullanılarak çözülmüştür. Adı geçen çalışmada sonuçlar grafik olarak sunulmaktadır. Burada, üç dalga tipini içeren transient sonlu-sonsuz eleman modeli (ince ağ) ile elde edilen sonuçlar (Şekil 3.36 ve Şekil 3.37), grafiksel olarak karşılaştırıldığında bulunan sonuçların birbirleri ile oldukça uyumlu olduğu gözlenmiştir.



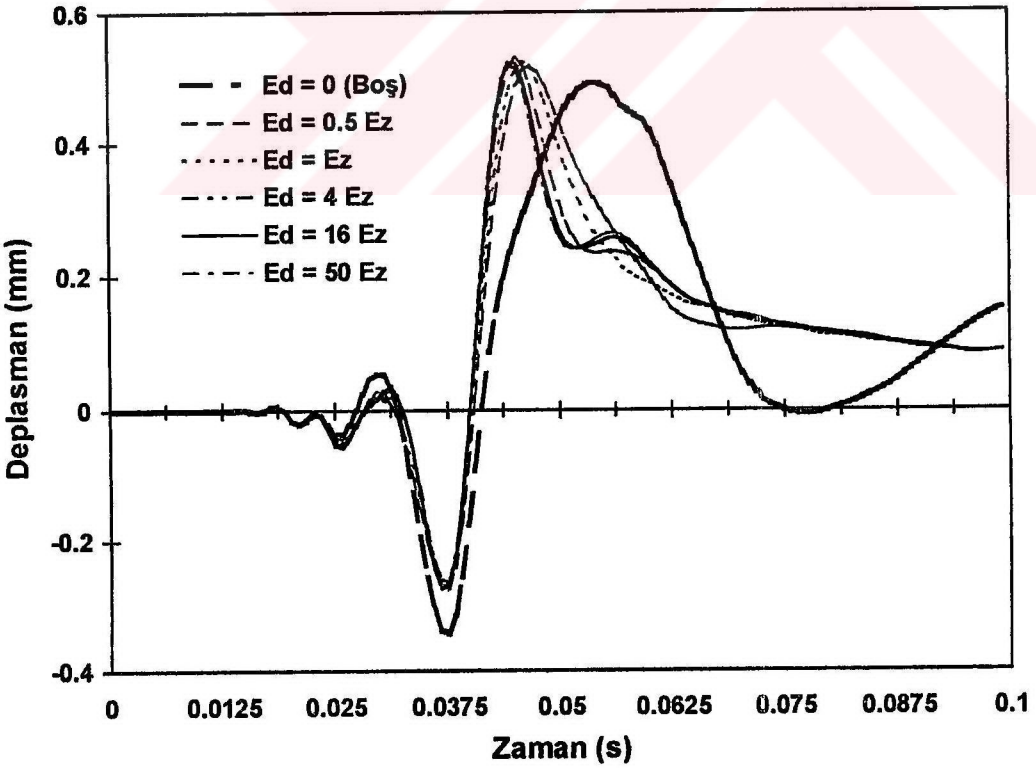
Şekil 3.36. A noktası için titreşim izolasyonu



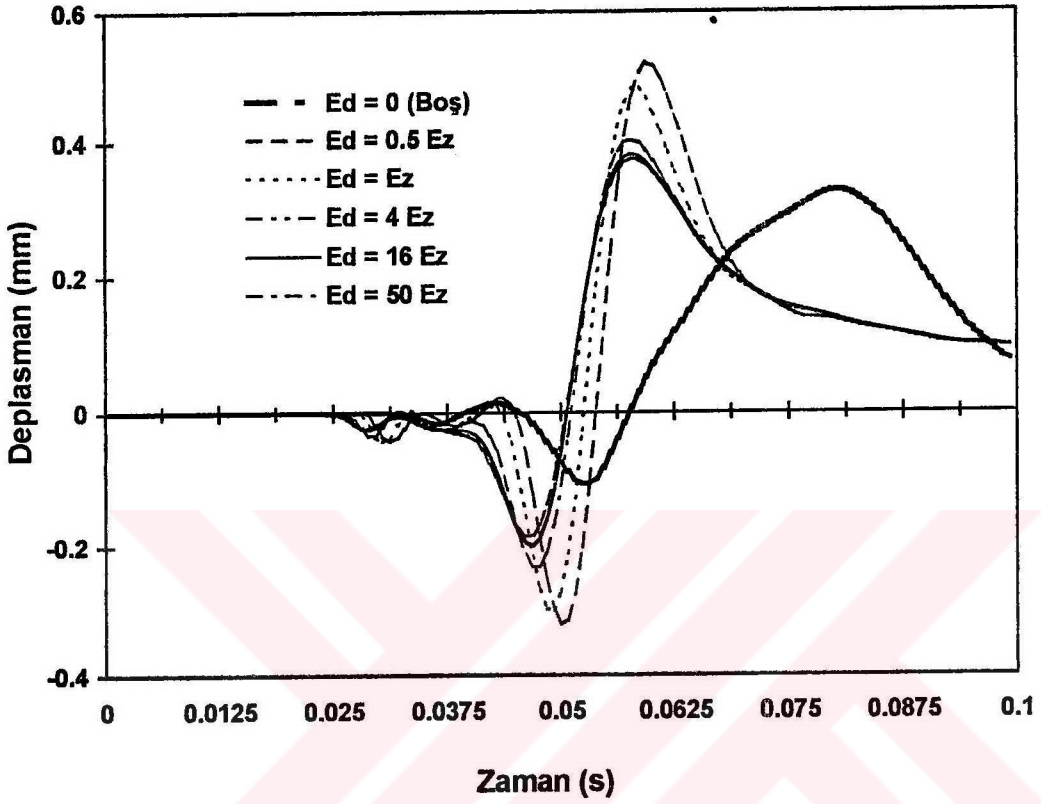
Şekil 3.37. B noktası için titreşim izolasyonu

Grafikler incelendiğinde, çukurun mevcudiyeti A noktasının (çukurun gerisindeki nokta) düşey deplasmanında belirgin bir titreşim izolasyonu meydana getirmemektedir. Bununla birlikte çukurun mevcudiyetinin, B noktasının (çukurun ötesindeki nokta) düşey deplasmanında ve hızında (deplasmanın eğimi) belirgin bir titreşim izolasyonu meydana getirdiği gözlenmektedir.

Bu çalışmada ayrıca yukarıda anlatılan incelemelere ilave olarak, çukurun içine değişik elastik malzeme özelliklerine sahip dolgu malzemelerinin doldurulduğu varsayılarak, çukurun gerisindeki ve ötesindeki noktalardaki titreşim izolasyonu araştırılmıştır. Bu araştırma esnasında sadece üç dalga tipini içeren sonsuz eleman ve ince sonlu-sonsuz eleman ağı kullanılmıştır. Dolgu malzemesi seçilirken, malzeme özellikleri olarak Poisson oranı ve kütlesel yoğunluk için zemine ait değerler kullanılmaktadır. Elastisite modülü için ise zeminin elastisite modülünün belirli katları şeçilmiştir. A ve B noktalarının düşey deplasmanlarının zamanla değişimleri Şekil 3.38 ve Şekil 3.39 da görülmektedir.



Şekil 3.38. Çeşitli dolgu malzemeleri için A noktasının deplasmanı

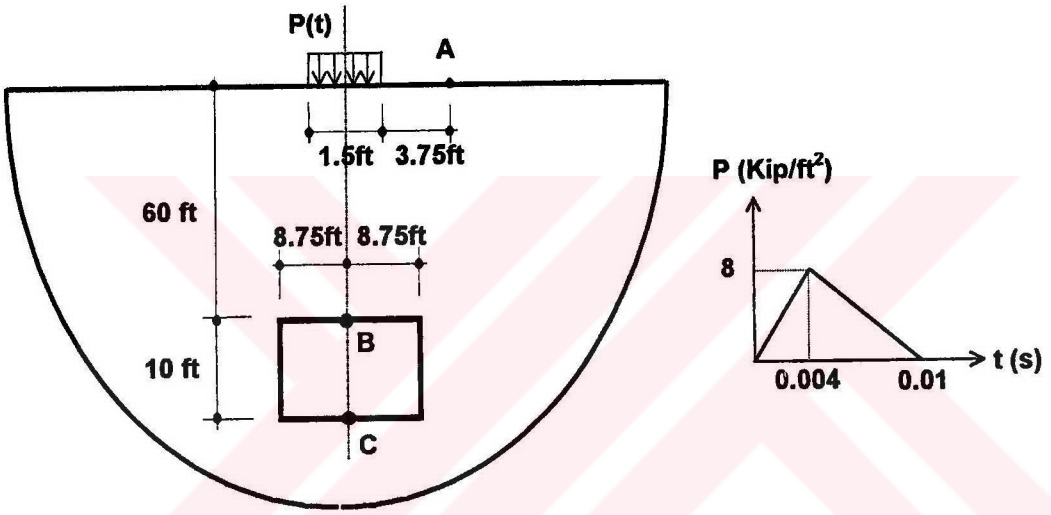


Şekil 3.39. Çeşitli dolgu malzemeleri için B noktasının deplasmanı

Çukurun gerisindeki A noktası için maksimum deplasman açısından belirgin bir titreşim izolasyonu görülmemektedir. Bununla birlikte, çukurun ötesindeki B noktası için, dolgu malzemesinin elastisite modülü arttıkça bir miktar titreşim izolasyonu görülmektedir. Fakat, her iki nokta içinde en iyi titreşim izolasyonunun, çukur boş iken ortaya çıktığı gözlenmiştir.

3.3.3.5.(4). Viskoelastik Yarı Sonsuz Zemin İçinde Tünel

Viskoelastik yarı sonsuz zemin içinde tünel açılmış olup etrafı 6 in kalınlığında beton zarfla kaplanmıştır. Yüzeyine etkiyen üçgen ani yükleme etkisinde A, B ve C noktalarının düşey deplasmanlarının zamanla değişimi aranmaktadır. Problemin geometrisi ve yüklemesi aşağıda görülmektedir (Şekil 3.40).

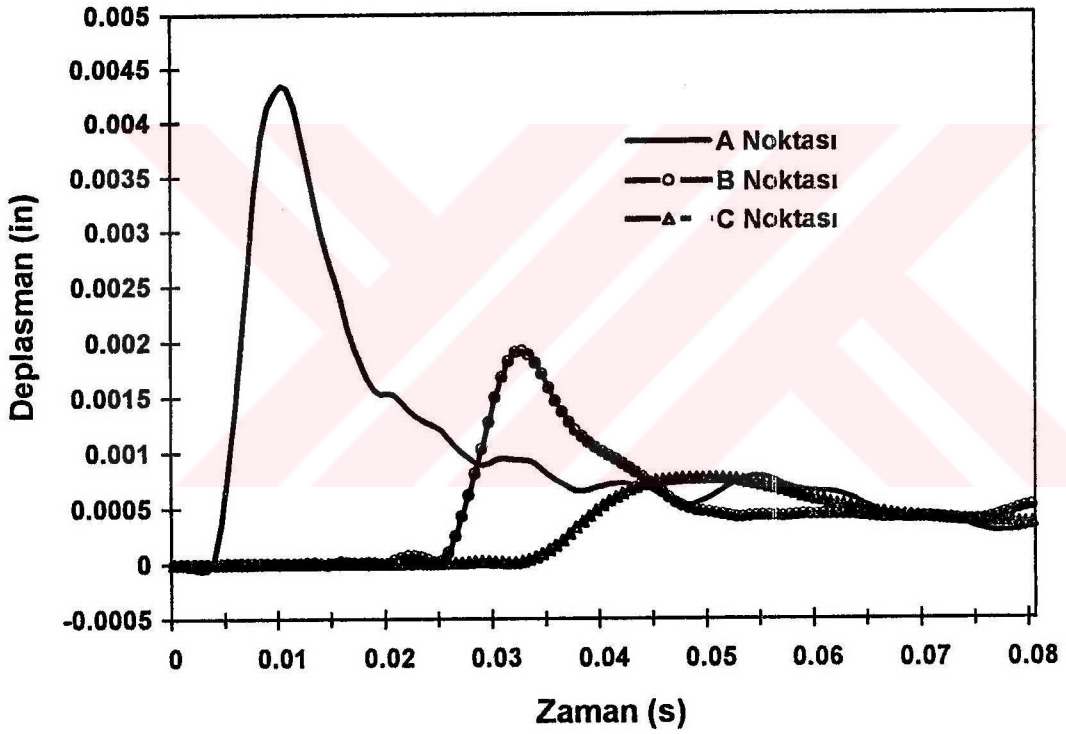


Şekil 3.40. Yarı sonsuz zemin içinde tünel, geometrisi ve yüklemesi

Problemde kullanılan malzeme özellikleri aşağıdaki gibidir.

	Zemin	Beton
Kayma Modülü (G)	68200 psi (470.24 Mpa)	1540600 psi (10622 Mpa)
Poisson Oranı (ν)	0.10	0.17
Kütlesel Yoğunluk (ρ)	1.95×10^{-4} lb-s^2/in^4 (2048 kg/m^3)	2.16×10^{-4} lb-s^2/in^4 (2263 kg/m^3)

Yukarıdaki malzeme özellikleri için elastik dalga hızları, c_P=28067.34 in/s, c_S=18711.56 in/s ve c_R=0.893c_S=16709.42 in/s olarak bulunur. Deplasman azaltma parametresi ise α=0.69 alınmıştır. Şekilde verilen yükleme ve geometri durumu gözönüne alınarak, bu düzlem şekil değiştirme problemi çeşitli tipteki sonsuz eleman modelleri ile çözülmüş ve A, B ve C noktalarındaki düşey deplasmanlar hesaplanmıştır (Şekil 3.41). Bir, iki ve üç dalga tipini içeren sonsuz eleman modelleri ile yapılan analiz sonuçları birbirlerine çok yakın çıktığından, aşağıdaki grafikte bunlardan sadece bir tanesi (üç dalga) gösterilmiştir.



Şekil 3.41. Düşey deplasmanların zamanla değişimi

Bu problem daha önce Vardoulakis ve ark (1987) tarafından, Laplace dönüşüm uzayında sınır eleman metodu formülasyonu kullanılarak ele alınmıştır. Deplasmanlar grafik olarak karşılaştırıldığında şu sonuçlar ortaya çıkmıştır: 1) A noktasının deplasmanı birbirleri ile uyumlu, 2) B noktasının deplasmanı birbirlerine yakın çıkarken, 3) C noktasının deplasmanı ise işaret ve genlik bakımından farklı

çıkmıştır. Bu farkların ortaya çıkması nedeniyle bu problem, alternatif bir yöntem (sonlu eleman ve viskoz sınır şartlarının ortak kullanımına dayanan yöntem) kullanılarak tekrar çözülmüştür. Sonuçların, tezde önerilen sonsuz eleman modeli ile bulunan sonuçlarla uyumlu ve birbirlerine yakın olduğu gözlenmiştir.

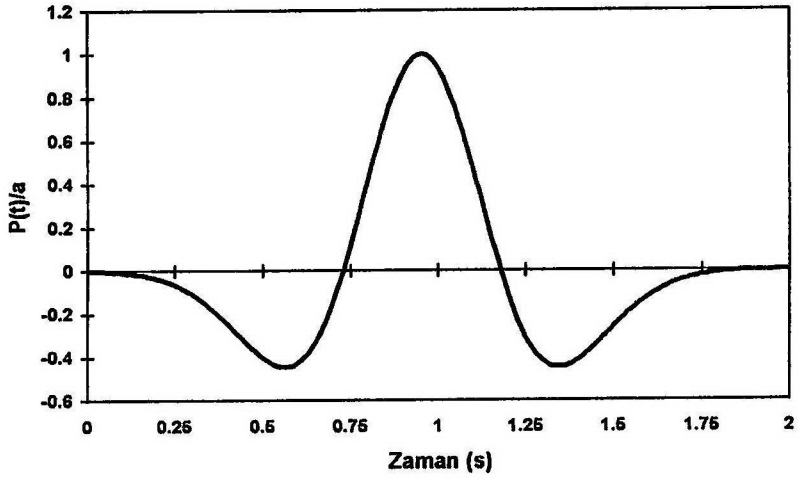
3.3.3.5.(5). Elastik Yarı Sonsuz Zemin ve Elastik Zemin Tabakası

Bu problemler daha önce Von Estorff, Pais ve Kausel (1990) tarafından üç farklı sınır eleman metodu formülasyonu kullanılarak ele alınmıştır. Bunlar, Fourier dönüşüm uzayında sınır eleman metodu, zaman uzayında sınır eleman metodu ve zaman uzayında sınır eleman ve sonlu eleman metodları ortak kullanımına dayalı formülasyonlardır. Bu problemde Ricker Wavelet olarak adlandırılan dinamik bir yükleme altında deplasman analizleri yapılmaktadır. Yüklemenin zamanla değişimi,

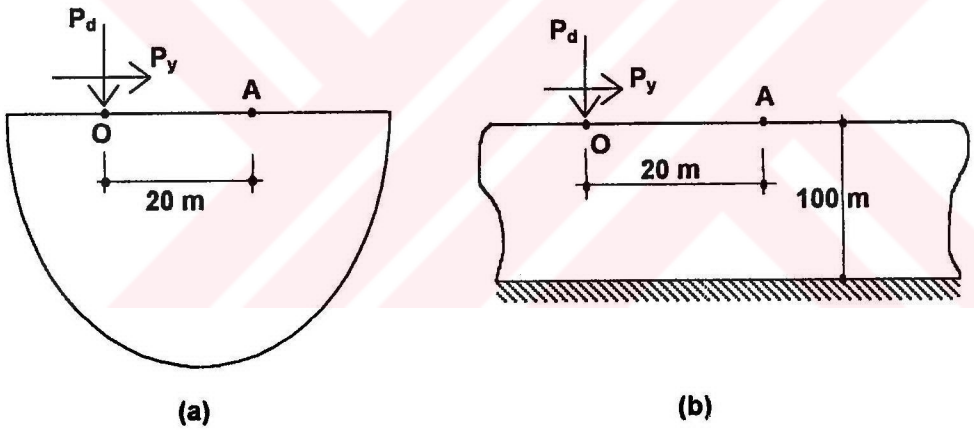
$$P(t) = a\,(1-2\tau^2)\,e^{(-\tau^2)} \tag{3.133}$$

bağıntısı ile verilmektedir. Bu bağıntıda $\tau=(t-t_s)/t_0$ olarak tariflenmektedir. t_s yükün maksimum olduğu zamanı, t_0 Wavelet'in dominant frekansını, a ise yükün genliğini göstermektedir. Bu çalışmada, $t_0=1/\pi$, $t_s=3\ t_0=3/\pi$ ve $a=1\times10^{10}$ N olarak alınmıştır. Bu seçilenlere göre yükün zamanla değişimi aşağıdaki gibidir (Şekil 3.42).

Burada, iki farklı problem ele alınmaktadır. Bunlardan ilki, elastik yarı sonsuz zemin, ikincisi ise rijit tabana oturan elastik zemin tabakasıdır (Şekil 3.43). Zemine ait malzeme özellikleri, $E=2.66\times10^8$ N/m^2, $\nu=0.33$ ve $\rho=2000$ kg/m^3 olarak alınmıştır. Buradan elastik ortama ait dalga hızları, $c_P=443.903$ m/s, $c_S=223.61$ m/s ve $c_R=0.932c_S=208.40$ m/s olarak hesaplanmıştır. Bunlara ilaveten dalgaların, kaynaktan uzak bölgelerde $1/x^3$ tarzında yayıldığı kabul edilerek deplasman azaltma parametresi $\alpha=2.08$ olarak seçilmiştir.

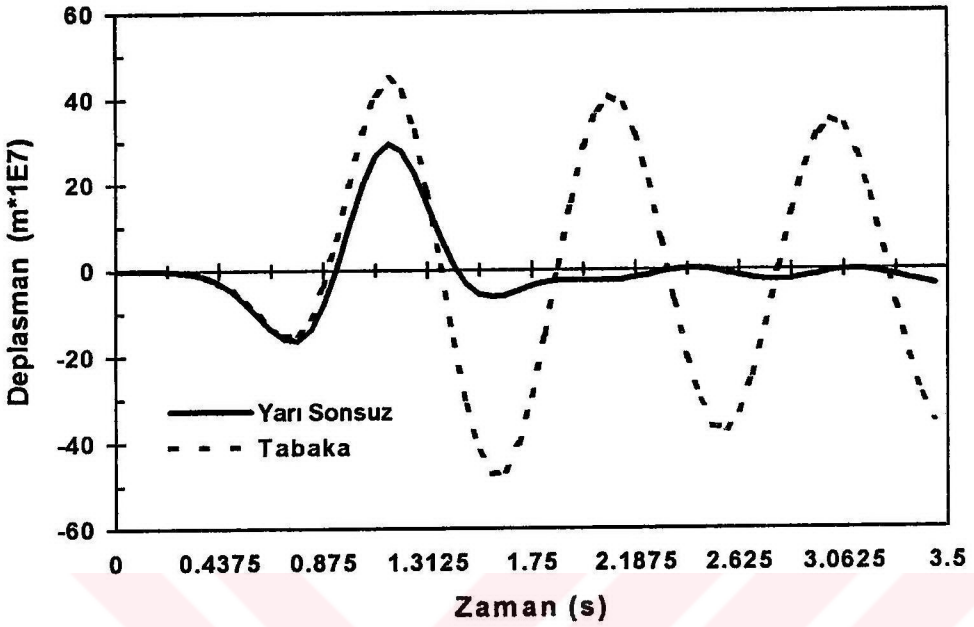


Şekil 3.42. Ricker Wavelet yüklemesi

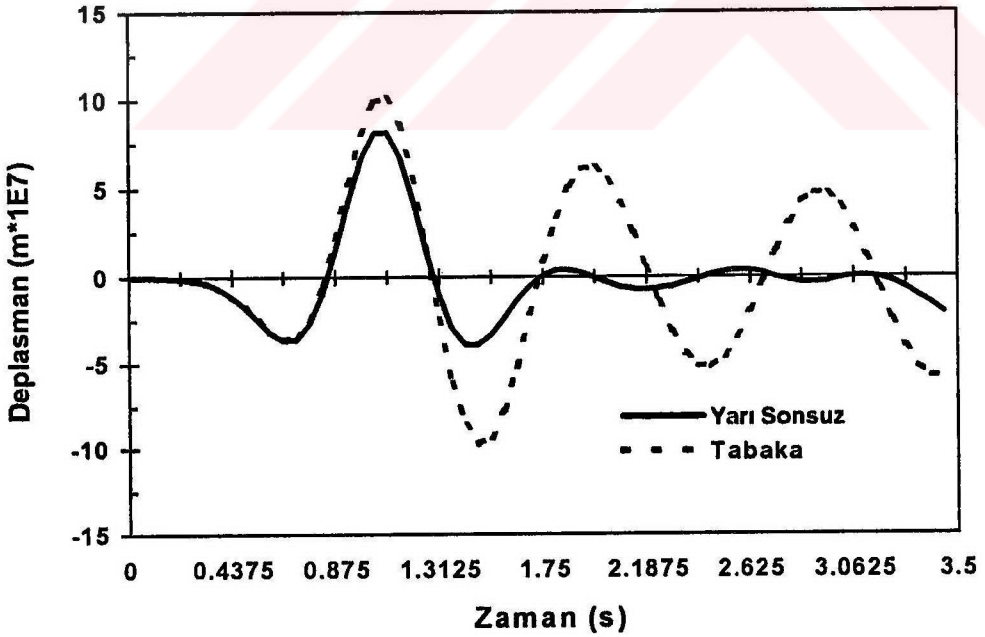


Şekil 3.43. (a) Elastik yarı sonsuz zemin **(b)** Elastik zemin tabakası

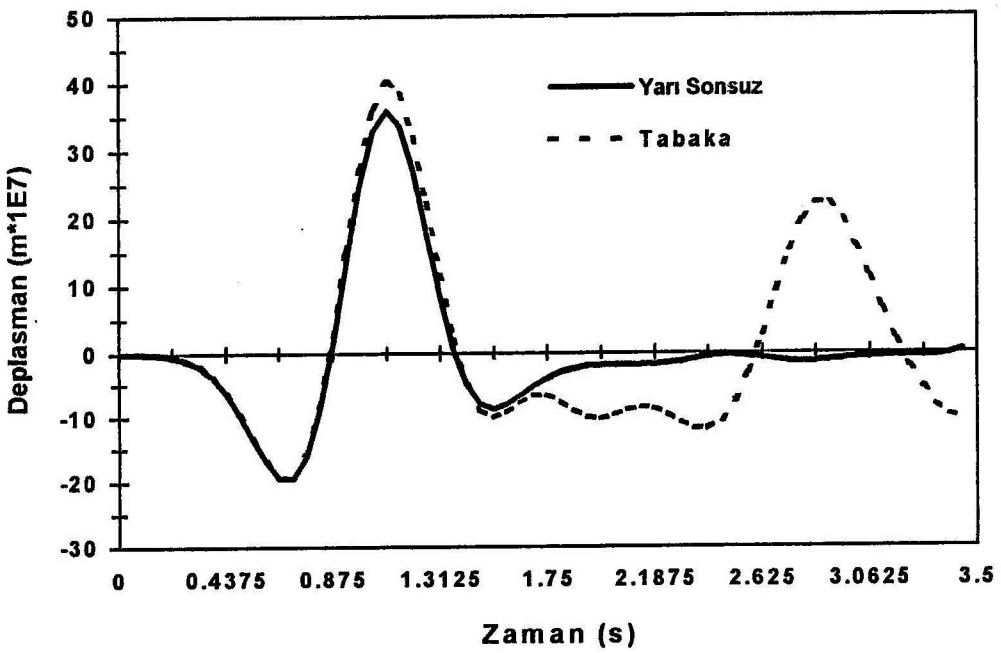
Zemin yüzeyine etkiyen yatay ve düşey tekil yüklemeden dolayı yarı sonsuz zemin ve zemin tabakası sistemi, sırasıyla gözönüne alınıp, A noktasındaki deplasmanların zamanla değişimi hesaplanmıştır. Analiz yapılırken kullanılan sonlu-sonsuz eleman modelinde sadece üç dalga tipini içeren sonsuz eleman kullanılmıştır. Bu problemin ele alınmasındaki amaçlardan ilki modelin başka metodlarla kontrolünü yapmak, ikincisi ise sistemin yarı sonsuz zemin veya zemin tabakası olması durumunda davranışın nasıl değiştiğini incelemektir.



Şekil 3.44. Düşey yükten dolayı düşey deplasman



Şekil 3.45. Düşey yükten dolayı yatay deplasman



Şekil 3.46. Yatay yükten dolayı yatay deplasman

Yukarıda sunulan grafik sonuçlar ve maksimum deplasmanlar, Von Estorff, Pais ve Kausel (1990) tarafından bulunanlarla karşılaştırıldığında, elde edilen deplasmanların sınır eleman formülasyonlarından bulunanlar ile oldukça yakın olduğu gözlenmiştir. P dalgasının A noktasına varma zamanı t_A=0.0451 saniyedir. Bu sonuçtan hareketle, $0 \le t \le 0.0451$ saniye arasında, henüz hiçbir dalga A noktasına varmadığından o noktada bir hareket oluşmamaktadır. Bununla birlikte, t=0.46 saniye zamanından sonra, yarı sonsuz zemin ve tabaka zemin olması hallerinde bulunan sonuçlar birbirlerinden farklılaşmaktadır. Çünkü, bu zamandan sonra, dalgalar aşağıya rijit tabana çarpıp yansıyarak tekrar A noktasına ulaştıklarından dolayı deplasmanların davranışı değişmektedir. Tabaka zemin olması halinde bu yansımalardan dolayı, düşey yükün etkisiyle A noktasındaki düşey deplasmanların değeri artmakta ama t zamanı ilerledikçe deplasmanın genliği sönümlenmektedir. Yarı sonsuz zemin olması halinde ise yaklaşık olarak t=2 saniyeden sonra (yük kalktıktan sonra) deplasmanlar çabucak sönümlenmekte ve sıfıra gitmektedir (Şekil 3.44, Şekil 3.45).

Düşey yüklemeden dolayı A noktasının yatay deplasmanları içinde yukarıda bahsedilen durumlar geçerlidir. Bunlara ilaveten, Şekil 3.46'dan görüldüğü gibi yatay yüklemeden dolayı A noktasının yatay deplasmanında çok fazla farklılık görülmemektedir. Rijit tabandan yansıyan dalgaların A noktasındaki yatay deplasmanı çok fazla etkilemedikleri sonucu çıkarılabilir.

BÖLÜM 4
DIŞ YÜKLEMEYE MARUZ ÜÇ BOYUTLU SİSTEMLERİN YAPI-ZEMİN ETKİLEŞİM ANALİZİ

4.1. Giriş

Bu bölümde, üç boyutlu elastodinamik yapı-zemin etkileşimi problemlerinin dıştan etkiyen dinamik yükleme altındaki davranışları incelenmektedir. Burada, iki boyutlu yapı-zemin etkileşim sistemlerine benzer şekilde, yarı sonsuz zemin ile sonlu bir boyuta sahip olan üst yapı, sonlu ve sonsuz elemanlar kullanılarak incelenmektedir.

Yarı sonsuz geometriye sahip zemin, kaynağa yakın bölgede standart sonlu elemanlarla modellenirken, uzak bölgeler için çeşitli tipte sonsuz eleman modelleri geliştirilmiştir. Bununla birlikte üst yapı, temel ve/veya üç boyutlu uzaysal çubuk elemanlardan oluşabilmektedir.

4.2. Elastodinamikte Hareket Denklemleri ve Sonlu Eleman Yaklaşımı

Üç boyutlu elastodinamik bir problemde, elemanter bir hacim elemanı gözönüne alındığında, elemana etkiyen kuvvetlere ait denge denklemleri aşağıdaki gibi elde edilmektedir.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y - \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \qquad (4.1)$$

veya

$$\sigma_{ij,j} + f_i - \rho \ddot{u}_i = 0 \qquad i,j=1,2,3$$

Uzama oranları ile deplasmanlar arasında,

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma_{yx}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \gamma_{zy}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \qquad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \gamma_{zx} \tag{4.2}$$

veya

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \qquad i,j = 1,2,3$$

bağıntıları mevcuttur. Üç boyutlu bir cisim için bünye denklemi ise,

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \tag{4.3}$$

şeklinde tariflenmektedir. Yukarıdaki bünye denkleminde görülen gerilme ve şekil değiştirme vektörleri ile malzeme matrisinin elemanları aşağıdaki gibidir:

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{xz}\}^T$$

(4.4a)

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{xz}\}^T$$

$$[D] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 & 0 & 0 \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & 0 & 0 & 0 \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \tag{4.4.b}$$

$$D_{11}=D_{22}=D_{33}=\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$D_{12}=D_{13}=D_{21}=D_{23}=D_{31}=D_{32}=\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \qquad (4.4c)$$

$$D_{44}=D_{55}=D_{66}=G=\frac{E}{2(1+\nu)}$$

Cismin yüzeyindeki sınır şartları ise,

$$t_x=\sigma_x n_x+\tau_{xy} n_y+\tau_{xz} n_z$$

$$t_y=\tau_{xy} n_x+\sigma_y n_y+\tau_{yz} n_z$$

$$t_z=\tau_{xz} n_x+\tau_{yz} n_y+\sigma_z n_z \qquad (4.5)$$

veya

$$t_i=\sigma_{ij} n_j \qquad i,j=1,2,3$$

şeklinde elde edilmektedir.

4.2.1. Ağırlıklı Artıklar Yöntemiyle İntegral Forma Geçiş

(4.1) bağıntısı ile verilen denge denklemleri yardımıyla, Laplace dönüşüm uzayında eleman hareket denklemi elde edilmektedir. Bunun için önce denge denklemlerinin birincisinin Laplace dönüşümü alınıp, ψ_1 ağırlık fonksiyonu ile çarpılarak tipik bir hacim elemanı üzerinde integralinin alınmasıyla, diferansiyel denklemden integral forma geçilmektedir. Burada, işlemlerin kolayca izlenebilmesi açısından, formülasyon indisli büyüklükler kullanılarak yapılmaktadır.

$$W_1=\int_{V_e}\psi_1\left(\bar{\sigma}_{11,1}+\bar{\sigma}_{12,2}+\bar{\sigma}_{13,3}+\bar{f}_1-\rho s^2\bar{u}_1\right)dV_e=0 \qquad (4.6)$$

Herhangi bir hacim integrali için kısmi integrasyon ifadesi,

$$\int_V f\, g_{,i}\, dV = \int_A f\, g\, n_i\, dA - \int_V f_{,i}\, g\, dV \tag{4.7}$$

şeklinde verilmektedir. W_1 ifadesinde, ψ_1 ağırlık fonksiyonu ile tüm terimler çarpılıp kısmi integrasyon uygulanır ve Galerkin metodu kullanılarak ağırlık fonksiyonu olarak deplasmanların varyasyonu seçilirse,

$$W_1 = \int_{V_e} \left(\begin{array}{l} -\dfrac{\partial(\delta\bar{u}_1)}{\partial x_1}\bar{\sigma}_{11} - \dfrac{\partial(\delta\bar{u}_1)}{\partial x_2}\bar{\sigma}_{12} - \dfrac{\partial(\delta\bar{u}_1)}{\partial x_3}\bar{\sigma}_{13} \\ +(\delta\bar{u}_1)\bar{f}_1 - (\delta\bar{u}_1)\,\rho s^2\,\bar{u}_1 \end{array} \right) dV_e + \int_{A_e} (\delta\bar{u}_1)\,\bar{t}_1\, dA_e = 0 \tag{4.8}$$

ifadesi elde edilir. Benzer işlemler denge denklemlerinin diğerleri içinde yapılırsa,

$$W_2 = \int_{V_e} \left(\begin{array}{l} -\dfrac{\partial(\delta\bar{u}_2)}{\partial x_1}\bar{\sigma}_{21} - \dfrac{\partial(\delta\bar{u}_2)}{\partial x_2}\bar{\sigma}_{22} - \dfrac{\partial(\delta\bar{u}_2)}{\partial x_3}\bar{\sigma}_{23} \\ +(\delta\bar{u}_2)\bar{f}_2 - (\delta\bar{u}_2)\,\rho s^2\,\bar{u}_2 \end{array} \right) dV_e + \int_{A_e} (\delta\bar{u}_2)\,\bar{t}_2\, dA_e = 0 \tag{4.9}$$

$$W_3 = \int_{V_e} \left(\begin{array}{l} -\dfrac{\partial(\delta\bar{u}_3)}{\partial x_1}\bar{\sigma}_{31} - \dfrac{\partial(\delta\bar{u}_3)}{\partial x_2}\bar{\sigma}_{32} - \dfrac{\partial(\delta\bar{u}_3)}{\partial x_3}\bar{\sigma}_{33} \\ +(\delta\bar{u}_3)\bar{f}_3 - (\delta\bar{u}_3)\,\rho s^2\,\bar{u}_3 \end{array} \right) dV_e + \int_{A_e} (\delta\bar{u}_3)\,\bar{t}_3\, dA_e = 0 \tag{4.10}$$

bağıntıları elde edilir. $W=W_1+W_2+W_3$ şeklinde toplam integral formu oluşturulup, ifadeler yeniden düzenlendikten sonra,

$$\int_{V_e} \{\delta\bar{\varepsilon}\}^T \{\bar{\sigma}\}\, dV_e + s^2 \int_{V_e} \rho \{\delta\bar{u}\}^T \{\bar{u}\} dV_e = \int_{V_e} \{\delta\bar{u}\}^T \begin{Bmatrix} \bar{f}_1 \\ \bar{f}_2 \\ \bar{f}_3 \end{Bmatrix} dV_e + \int_{A_e} \{\delta\bar{u}\}^T \begin{Bmatrix} \bar{t}_1 \\ \bar{t}_2 \\ \bar{t}_3 \end{Bmatrix} dA_e \tag{4.11}$$

eşitliği elde edilir. Bulunan bu ifade, Laplace dönüşüm uzayında virtüel iş prensibini göstermektedir. Eşitliğin sol tarafı iç kuvvetlerin yaptığı virtüel işi, sağ tarafı ise dış kuvvetlerin yaptığı virtüel işi göstermektedir.

4.2.2. Sonlu Eleman Formülasyonu

Bu kısımda, tipik olarak n adet düğümü bulunan üç boyutlu bir eleman için sonlu eleman formülasyonu özetlenmektedir. Elemanın içerisinde herhangi bir noktadaki, deplasman bileşenlerinin üçününde birbirinden bağımsız olduğu kabul edilmektedir. Bu nedenle eleman bünyesindeki herhangi bir noktanın deplasmanları, elemanın düğüm deplasmanları cinsinden,

$$\bar{u} = \sum_{i=1}^{n} \bar{N}_i \bar{u}_i$$

$$\bar{v} = \sum_{i=1}^{n} \bar{N}_i \bar{v}_i \tag{4.12}$$

$$\bar{w} = \sum_{i=1}^{n} \bar{N}_i \bar{w}_i$$

şeklinde tariflenmektedir. Bu üç bağıntı, matris notasyonu kullanılarak,

$$\begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c|ccc} \bar{N}_1 & 0 & 0 & \cdots & \bar{N}_n & 0 & 0 \\ 0 & \bar{N}_1 & 0 & \cdots & 0 & \bar{N}_n & 0 \\ 0 & 0 & \bar{N}_1 & \cdots & 0 & 0 & \bar{N}_n \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{w}_1 \\ \vdots \\ \bar{u}_n \\ \bar{v}_n \\ \bar{w}_n \end{Bmatrix} \tag{4.13}$$

$$\Rightarrow \qquad \{\bar{u}\} = [\bar{N}]\{\bar{u}_d\}$$

şeklinde yazılabilmektedir. Bu durumda düğüm deplasmanlarının varyasyonu,

$$\{\delta\bar{u}\} = [\bar{N}]\{\delta\bar{u}_d\} \Rightarrow \{\delta\bar{u}\}^T = \{\delta\bar{u}_d\}^T[\bar{N}]^T \tag{4.14}$$

olarak bulunur. Şekil değiştirme vektörü ise,

$$\{\bar{\varepsilon}\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \end{Bmatrix} = [L]\{\bar{u}\} \tag{4.15}$$

şeklindedir. (4.13) eşitliği (4.15) te yerine yazılırsa,

$$\{\bar{\varepsilon}\} = [\bar{B}]\{\bar{u}_d\} \qquad [\bar{B}] = [L][\bar{N}] \tag{4.16}$$

olarak, üç boyutlu hal için şekil değiştirmelerin düğüm deplasmanlarına bağlı ifadesi bulunur. Yukarıdaki ifade kullanılarak, şekil değiştirmelerin varyasyonu aşağıda görüldüğü gibi elde edilmektedir.

$$\{\delta\bar{\varepsilon}\}=[\bar{B}]\{\delta\bar{u}_d\} \Rightarrow \{\delta\bar{\varepsilon}\}^T=\{\delta\bar{u}_d\}^T[\bar{B}]^T \tag{4.17}$$

(4.16) bağıntısında verilen şekil değiştirme vektörünün ifadesi, (4.3) teki bünye denkleminde yerine yazılırsa,

$$\{\bar{\sigma}\}=[D][\bar{B}]\{\bar{u}_d\} \tag{4.18}$$

şeklinde gerilmeler ile düğüm deplasmanları arasındaki ilişki elde edilir.

Bu hazırlıklardan sonra, (4.13), (4.14), (4.17) ve (4.18) tarifleri (4.11) virtüel iş prensibi ifadesinde yerine yazıldığında,

$$\{\delta\bar{u}_d\}^T\left(\int_{V_e}[\bar{B}]^T[D][\bar{B}]dV_e+s^2\int_{V_e}\rho[\bar{N}]^T[\bar{N}]dV_e\right)\{\bar{u}_d\}$$
$$=\{\delta\bar{u}_d\}^T\left(\int_{V_e}[\bar{N}]^T\begin{Bmatrix}\bar{f}_1\\ \bar{f}_2\\ \bar{f}_3\end{Bmatrix}dV_e+\int_{A_e}[\bar{N}]^T\begin{Bmatrix}\bar{t}_1\\ \bar{t}_2\\ \bar{t}_3\end{Bmatrix}dA_e\right) \tag{4.19}$$

eşitliği bulunur. Burada eleman rijitlik ve kütle matrisleri ile yük vektörleri olarak,

$$[\bar{k}]=\int_{V_e}[\bar{B}]^T[D][\bar{B}]dV_e \;;\; [\bar{m}]=\int_{V_e}\rho[\bar{N}]^T[\bar{N}]\,dV_e \tag{4.20a}$$

$$\{\bar{f}\}=\int_{V_e}[\bar{N}]^T\begin{Bmatrix}\bar{f}_1\\ \bar{f}_2\\ \bar{f}_3\end{Bmatrix}dV_e \;;\; \{\bar{t}\}=\int_{A_e}[\bar{N}]^T\begin{Bmatrix}\bar{t}_1\\ \bar{t}_2\\ \bar{t}_3\end{Bmatrix}dA_e \tag{4.20b}$$

tarifleri yapılırsa, (4.19) eşitliği aşağıdaki şekle dönüşür.

$$\{\delta\bar{u}_d\}^T\left(([\bar{k}]+s^2[\bar{m}])\{\bar{u}_d\}-\{\bar{f}\}-\{\bar{t}\}\right)=0 \tag{4.21}$$

Sonlu eleman yaklaşımında seçilen deplasmanların varyasyonları keyfi olduğundan, (4.21) ifadesinin geçerli olabilmesi için parantez içindeki ifadenin sıfır olması gerekmektedir. Bu şart altında,

$$\left(\left[\bar{k}\right]+s^2\left[\bar{m}\right]\right)\left\{\bar{u}_d\right\}=\left\{\bar{f}\right\}+\left\{\bar{t}\right\} \tag{4.22}$$

olarak, Laplace dönüşüm uzayında sonlu eleman yaklaşımı yapılarak eleman hareket denklemi elde edilir. Sistemi oluşturan tüm elemanlar için, eleman matrisleri ve yük vektörleri hesaplanıp uygun bir şekilde birleştirilirse (kodlama tekniği vb. bir yöntemle),

$$\left(\left[\bar{K}\right]+s^2\left[\bar{M}\right]\right)\left\{\bar{U}_d\right\}=\left\{\bar{P}\right\} \tag{4.23}$$

şeklinde, Laplace dönüşüm uzayında sistem hareket denklemi, lineer cebrik denklem takımı olarak elde edilir.

4.3. Sonlu Eleman Seçimi

Üç boyutlu yapı-zemin etkileşim analizi problemleri ele alınırken, sistemin yarı sonsuz bir bölge ve sonlu bir boyuta sahip üst yapıdan meydana geldiği kabul edilmektedir. Yarı sonsuz ortamda, kaynaktan uzaktaki bölge sonsuz elemanlar kullanılarak modellenirken, kaynağa yakın bölge ise sonlu elemanlar kullanılarak modellenmektedir. Bununla birlikte, sonlu boyuta sahip olan üst yapı ise yine çeşitli tipteki sonlu elemanlar kullanılarak modellenmektedir.

Bu tez çalışmasında, kaynağa yakın bölgedeki zemin modellenirken, standart sekiz düğümlü, lineer, izoparametrik üç boyutlu sonlu eleman (Brick, Hexahedral eleman) kullanılmaktadır. Üst yapının ise üç boyutlu çubuk elemanlardan meydana gelen kiriş-kolon sisteminden oluşması gözönüne alınabilmektedir. Bununla birlikte, her düğümünde sadece deplasmanlardan oluşan üç serbestlik derecesine sahip brick

eleman ile her düğümünde altı serbestlik derecesine sahip (üç deplasman, üç dönme) çubuk elemanların birarada kullanılabilmesi için, her iki elemanın birleşim yerlerinde özel bir geçiş elemanına ihtiyaç duyulmaktadır. Yukarıda açıklanan nedenden dolayı, bu tez çalışması esnasında her düğümünde altı serbestlik derecesi (üç deplasman, üç dönme) bulunan üç boyutlu bir geçiş elemanı (rotational brick eleman) kullanılmaktadır. Bu geçiş elemanı sadece, iki farklı elemanın (çubuk eleman ile brick eleman) birleştiği noktalarda geçişi sağlamak amacıyla kullanılmaktadır.

Yukarıda bahsedilen sonlu elemanlar, sırasıyla aşağıda detaylı olarak anlatılmaktadır.

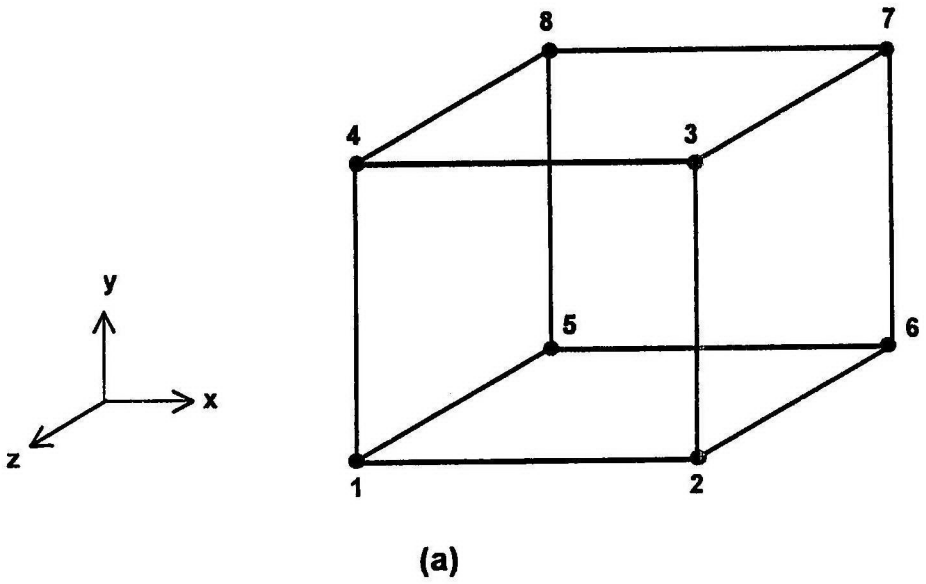
4.3.1. Sekiz Düğümlü Lineer Üç Boyutlu Sonlu Eleman (Brick Eleman)

Tez çalışmasında kullanılan, sekiz düğümlü, lineer, izoparametrik sonlu eleman (brick eleman) Şekil 4.1 de görülmektedir. Bu eleman için kartezyen koordinatlardan (x-y-z), referans koordinatlarına (ξ-η-ζ) geometrik dönüşüm,

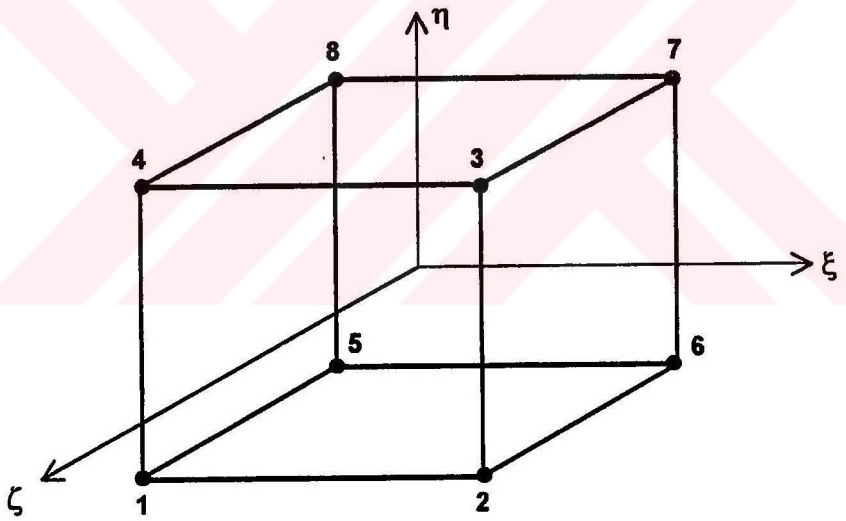
$$x=\sum_{i=1}^{8} N_i x_i \qquad y=\sum_{i=1}^{8} N_i y_i \qquad z=\sum_{i=1}^{8} N_i z_i \tag{4.24}$$

bağıntılarıyla tariflenmektedir. Yukarıda görülen N_i şekil fonksiyonları referans elemanları koordinatlarına bağlı olarak aşağıdaki şekildedir.

$$\begin{aligned} N_1&=\frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1+\zeta) & N_2&=\frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1+\zeta)\\ N_3&=\frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1+\zeta) & N_4&=\frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1+\zeta)\\ N_5&=\frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta) & N_6&=\frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta)\\ N_7&=\frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta) & N_8&=\frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta) \end{aligned} \tag{4.25}$$



(a)



(b)

Şekil 4.1. Üç boyutlu sonlu eleman (Brick eleman)
(a) Gerçek eleman **(b)** Referans elemanı

Gerçek elemanın herhangi bir noktasındaki deplasmanların referans koordinatları cinsinden dönüşümüde;

$$u=\sum_{i=1}^{8} N_i u_i \qquad v=\sum_{i=1}^{8} N_i v_i \qquad w=\sum_{i=1}^{8} N_i w_i \tag{4.26}$$

şeklinde tariflenmektedir. Eleman izoparametrik olduğundan interpolasyon şekil fonksiyonları olarak (4.25) ifadesinde verilenler kullanılmaktadır.

Şekil 4.1'de görülen brick eleman için eleman rijitlik ve kütle matrisleri, sonlu eleman formülasyonu kullanılarak elde edilmektedir. Eleman matrislerinin genel formu (4.20) ifadesinde verilmektedir. Elemanın herhangi bir noktasının deplasmanları (4.26) ifadesi ile hesaplanmaktadır. Bu ifade matris notasyonu kullanılarak yazılacak olursa;

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c|ccc} N_1 & 0 & 0 & \cdots & N_8 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \cdots & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \cdots & 0 & 0 & N_8 \end{array}\right]_{(3\times 24)} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \vdots \\ u_8 \\ v_8 \\ w_8 \end{Bmatrix}_{(24\times 1)} \tag{4.27}$$

$$\Rightarrow \qquad \{u\}=[N]\{u_d\}$$

şeklinde deplasman vektörü elde edilmektedir. Bu tarif kullanılarak, elemanın şekil değiştirme matrisi,

$$[B]_{(6\times 24)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \left[\begin{array}{ccc|c|ccc} N_1 & 0 & 0 & \cdots & N_8 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \cdots & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \cdots & 0 & 0 & N_8 \end{array}\right] \tag{4.28}$$

$$[B]=[\underline{B}_1 \quad \underline{B}_2 \quad \cdots \quad \underline{B}_8]$$

şeklinde hesaplanmaktadır. Yukarıda görülen tipik bir $[B_i]$ alt matrisi;

$$[B_i]=\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix}_{(6\times 3)} \tag{4.29}$$

formundadır. Yukarıda görülen, N_i şekil fonksiyonlarının kartezyen koordinatlara göre türevi Jacobian matrisi [J], yardımıyla;

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} \tag{4.30}$$

şeklinde bulunur. Yukarıdaki ifadenin her iki tarafı soldan Jacobian matrisinin tersi ($[J]^{-1}=[J^*]$) ile çarpıldığı takdirde;

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c|c} J^*_{11} & J^*_{12} & J^*_{13} \\ \hline J^*_{21} & J^*_{22} & J^*_{23} \\ \hline J^*_{31} & J^*_{32} & J^*_{33} \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} = [J^*] \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} \tag{4.31}$$

olarak, şekil fonksiyonlarının kartezyen koordinatlara göre türevleri elde edilmiş olur. Bu ifadeler açık yazılacak olursa;

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = J^*_{11} N_{i,\xi} + J^*_{12} N_{i,\eta} + J^*_{13} N_{i,\zeta}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial y} = J^*_{21} N_{i,\xi} + J^*_{22} N_{i,\eta} + J^*_{23} N_{i,\zeta} \qquad (4.32)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial z} = J^*_{31} N_{i,\xi} + J^*_{32} N_{i,\eta} + J^*_{33} N_{i,\zeta}$$

elde edilir. Bununla birlikte, kartezyen koordinatlardaki elemanter bir hacim (dV_e), referans koordinatları cinsinden

$$dV_e = dx\,dy\,dz = |J|\,d\xi\,d\eta\,d\zeta \qquad (4.33)$$

şeklinde elde edilmektedir. Bundan sonra, (4.32) de görülen türevsel ifadeler (4.29) daki $[B_i]$ alt matrisinde yerlerine yazılırsa, sıfırdan farklı olan elemanları aşağıdaki şekilde bulunmaktadır.

$$\left.\begin{aligned} B_{1j} &= J^*_{11} N_{i,\xi} + J^*_{12} N_{i,\eta} + J^*_{13} N_{i,\zeta} \\ B_{2k} &= J^*_{21} N_{i,\xi} + J^*_{22} N_{i,\eta} + J^*_{23} N_{i,\zeta} \\ B_{3l} &= J^*_{31} N_{i,\xi} + J^*_{32} N_{i,\eta} + J^*_{33} N_{i,\zeta} \\ B_{4j} &= B_{2k} \qquad B_{4k} = B_{1j} \\ B_{5k} &= B_{3l} \qquad B_{5l} = B_{2k} \\ B_{6l} &= B_{1j} \qquad B_{6j} = B_{3l} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} j &= 3i-2 \\ k &= 3i-1 \\ l &= 3i \end{aligned} \qquad (4.34)$$

Ayrıca, (4.30) bağıntısında görülen Jacobian matrisi, (4.24) ifadeleri kullanılarak aşağıdaki şekilde hesaplanmaktadır.

$$[J] = \sum_{i=1}^{8} \begin{bmatrix} N_{i,\xi} x_i & N_{i,\xi} y_i & N_{i,\xi} z_i \\ N_{i,\eta} x_i & N_{i,\eta} y_i & N_{i,\eta} z_i \\ N_{i,\zeta} x_i & N_{i,\zeta} y_i & N_{i,\zeta} z_i \end{bmatrix} \qquad (4.35)$$

Son olarak, (4.34) de görülen $[B_i]$ alt matrisi (4.28) denkleminde yerine yazılırsa, üç boyutlu brick elemana ait şekil değiştirme matrisi elde edilmiş olur. Burada bulunan şekil değiştirme matrisi, (4.33) te görülen elemanter hacim ifadesi ve (4.27) deki şekil fonksiyonları matrisi, (4.20) de tarifi verilen eleman matrislerinde yerlerine yazıldığı takdirde, sekiz düğümlü, lineer, izoparametrik brick elemana ait eleman rijitlik ve kütle matrisleri referans koordinatlarında;

$$\left[k^b\right]_{(24\times24)} = \int_{\zeta=-1}^{+1}\int_{\eta=-1}^{+1}\int_{\xi=-1}^{+1} [B]^T[D][B]|J|\,d\xi\,d\eta\,d\zeta$$
$$\left[m^b\right]_{(24\times24)} = \int_{\zeta=-1}^{+1}\int_{\eta=-1}^{+1}\int_{\xi=-1}^{+1} \rho[N]^T[N]|J|\,d\xi\,d\eta\,d\zeta \qquad (4.36)$$

olarak elde edilir. Yukarıdaki sonlu integraller Gauss-Legendre sayısal integrasyon yöntemi kullanılarak;

$$I=\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} F(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta \cong \sum_{p=1}^{L}\sum_{q=1}^{L}\sum_{r=1}^{L} W_p W_q W_r F(\xi_p,\eta_q,\zeta_r) \qquad (4.37)$$

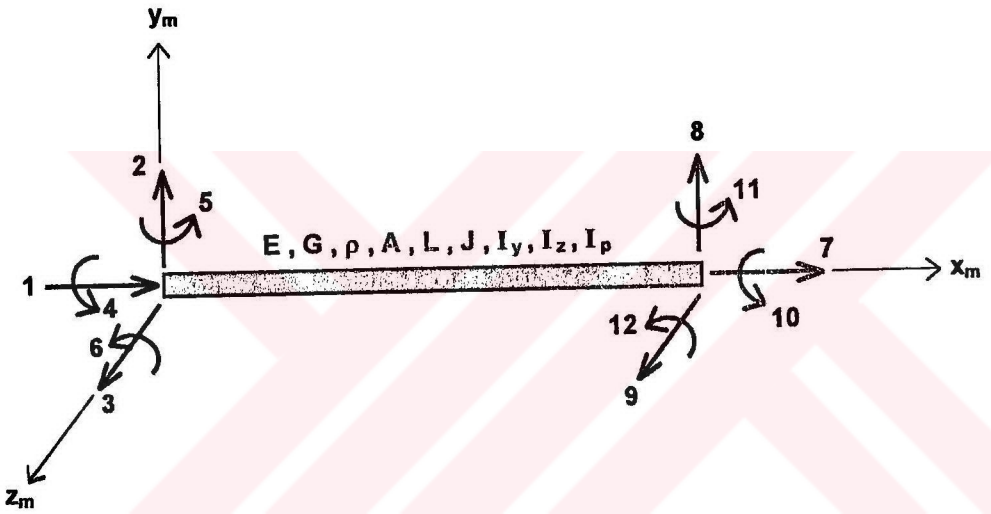
şeklinde hesaplanabilmektedir. Elemanın herhangi bir noktasındaki gerilmeler ise (4.18) bağıntısı yardımıyla;

$$\{\sigma\}=\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_z\\ \tau_{xy}\\ \tau_{yz}\\ \tau_{xz}\end{Bmatrix}=\sum_{i=1}^{8}[D][B_i]\begin{Bmatrix}u_i\\ v_i\\ w_i\end{Bmatrix} \qquad (4.38)$$

şeklinde hesaplanabilmektedir.

4.3.2. Üç Boyutlu Prizmatik Çubuk Eleman

Aşağıda görülen, üç boyutlu prizmatik, sabit kesitli tipik bir çubuk eleman gözönüne alınmaktadır (Şekil 4.2).



Şekil 4.2. Üç boyutlu prizmatik çubuk eleman

Şekilde görülen üç boyutlu prizmatik çubuk elemana ait x_m-y_m-z_m eleman koordinatlarındaki rijitlik ($[k_m]$) ve kütle ($[m_{m1}]$) matrisleri aşağıda (4.39) ve (4.40) bağıntılarında görülmektedir. Yalnız burada verilen kütle matrisi, elemanın dönel ataletinden gelen katkıları içermemektedir. Eğer bu katkılar gözönünde bulundurulmak istenirse, elemanın dönel ataletinden gelen katkı (4.41) bağıntısında verildiği gibidir. Bu durumda eleman kütle matrisi ($[m_m]$), (4.40) ve (4.41) matrislerinin toplamı şeklinde elde edilmektedir.

$$[k_m]=\begin{bmatrix}
\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\
0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 \\
0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} \\
-\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} \\
0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 \\
0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L}
\end{bmatrix} \quad (4.39)$$

$$[m_{ml}] = \frac{\rho AL}{420}
\begin{bmatrix}
140 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 156 & 0 & 0 & 0 & 22L & 0 & 54 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -13L \\
0 & 0 & 156 & 0 & -22L & 0 & 0 & 0 & 54 & 0 & 0 & 13L & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{140I_p}{A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{70I_p}{A} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -22L & 0 & 4L^2 & 0 & 0 & 0 & -13L & 0 & -3L^2 & 0 & -3L^2 & 0 \\
0 & 22L & 0 & 0 & 0 & 4L^2 & 0 & 13L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
70 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 54 & 0 & 0 & 0 & 13L & 0 & 156 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -22L \\
0 & 0 & 54 & 0 & -13L & 0 & 0 & 0 & 156 & 0 & \frac{140I_p}{A} & 0 & 22L & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{70I_p}{A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{140I_p}{A} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 13L & 0 & -3L^2 & 0 & 0 & 22L & 0 & 0 & 4L^2 & 0 & 4L^2 & 0 \\
0 & -13L & 0 & 0 & 0 & -3L^2 & 0 & 0 & -22L & 0 & 0 & 0 & 0 & 4L^2
\end{bmatrix} \quad (4.40)$$

$$[m_{m2}] = \frac{\rho}{30L}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|cccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 36I_z & 0 & 0 & 0 & 3LI_z & 0 & -36I_z & 0 & 0 & 0 & 3LI_z \\
0 & 0 & 36I_y & 0 & -3LI_y & 0 & 0 & 0 & -36I_y & 0 & -3LI_y & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -3LI_y & 0 & 4L^2I_y & 0 & 0 & 0 & 3LI_y & 0 & -L^2I_y & 0 \\
0 & 3LI_z & 0 & 0 & 0 & 4L^2I_z & 0 & -3LI_z & 0 & 0 & 0 & -L^2I_z \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -36I_z & 0 & 0 & 0 & -3LI_z & 0 & 36I_z & 0 & 0 & 0 & -3LI_z \\
0 & 0 & -36I_y & 0 & 3LI_y & 0 & 0 & 0 & 36I_y & 0 & 3LI_y & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -3LI_y & 0 & -L^2I_y & 0 & 0 & 0 & 3LI_y & 0 & 4L^2I_y & 0 \\
0 & 3LI_z & 0 & 0 & 0 & -L^2I_z & 0 & -3LI_z & 0 & 0 & 0 & 4L^2I_z
\end{array}\right] \qquad (4.41)$$

Yukarıdaki çubuk elemana ait, eleman matrislerinde görülen terimlerin tanımı aşağıda verilmektedir.

E : Elastisite modülü

G : Kayma modülü

ρ : Birim hacmin kütlesi

A : Kesit alanı

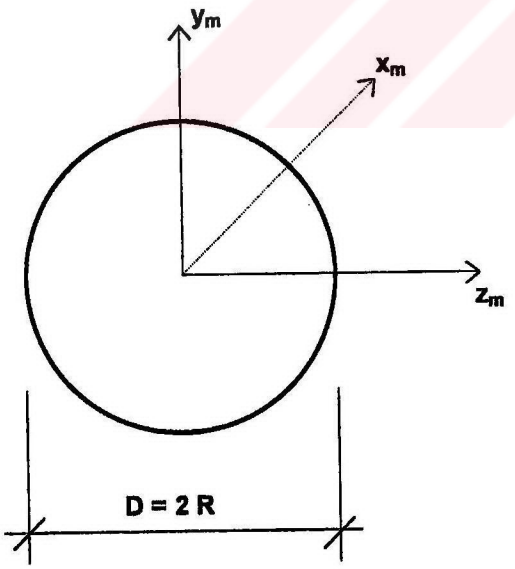
L : Elemanın boyu

J : Burulma atalet momenti

I_y , I_z : y_m ve z_m eksenleri etrafındaki atalet momentleri

I_p : x_m ekseni etrafındaki polar (kutupsal) atalet momenti ($I_p=I_y+I_z$)

Bu tez çalışmasında çoğunlukla kullanılan bazı çubuk kesitleri (dairesel ve dikdörtgen) için, kesit özellikleri aşağıda verilmektedir.

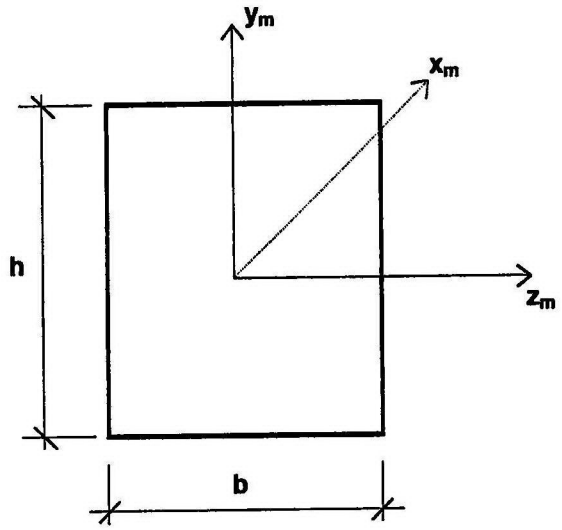


$$I_y = I_z = \frac{\pi R^4}{4}$$

$$I_p = J = \frac{\pi R^4}{2} \qquad (4.42)$$

$$A = \frac{\pi D^2}{4}$$

Şekil 4.3. Dairesel kesitli çubuk



$$I_y = \frac{h\,b^3}{12}$$

$$I_z = \frac{b\,h^3}{12} \qquad (4.43)$$

$$I_p = I_y + I_z$$

$$A = b\,h$$

Şekil 4.4. Dikdörtgen kesitli çubuk

Dikdörtgen kesitli çubuk durumunda, çubuğun burulma atalet momenti (J) aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır.

$h \geq b$ olmak üzere

$$\frac{b}{h} < 0.6 \Rightarrow J = \frac{h\,b^3}{3}\left[1 - 0.63\frac{b}{h} + 0.052\frac{b^5}{h^5}\right] \qquad (4.44)$$

$$\frac{b}{h} \geq 0.6 \Rightarrow J = \frac{b^3 h^3}{3.58\left(b^2 + h^2\right)}$$

Özel bir durum olarak, eğer çubuk kesidi kare ise (b=h=a);

$$I_y = I_z = \frac{a^4}{12} \qquad J = 0.13966\,a^4 \qquad A = a^2 \qquad (4.45)$$

olarak kullanılmaktadır.

Yukarıda verilen eleman rijitlik ve kütle matrisleri çubuk eleman yerel koordinatlarında yazılmıştır. Fakat tüm elemanlar (kiriş, kolon, alt yapı) birden gözönüne alındığında, herhangi bir elemana ait matrislerin ortak bir koordinat takımında yazılması, daha sonra sistem matrislerine katkılarının hesaplanması gerekmektedir. Bu sebepten dolayı, çubuk elemanlara ait rijitlik ve kütle matrisleri öncelikle yerel koordinatlarda elde edilmekte ($[k_m]$ ve $[m_m]$) daha sonra transformasyon matrisi ([T]) yardımıyla;

$$[k^e] = [T]^T [k_m][T] \qquad [m^e] = [T]^T [m_m][T] \tag{4.46}$$

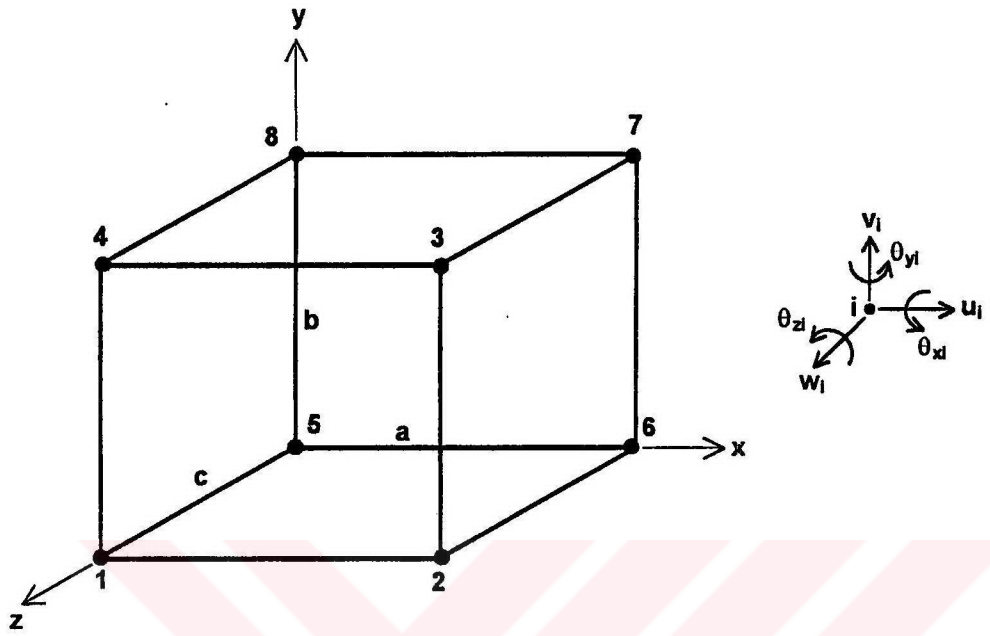
şeklinde, tüm sisteme ait ortak bir eksen takımına dönüştürülmektedir. Yukarıdaki $[k^e]$ ve $[m^e]$, sistem koordinatlarında çubuk eleman rijitlik ve kütle matrisleridir. Üç boyutlu prizmatik bir çubuk elemana ait transformasyon matrisinin elde edilişi Ek-C'de anlatılmaktadır.

4.3.3. Dönme Serbestlik Derecesine Sahip Geçiş Elemanı (Rotational Brick)

Her düğümünde 3 deplasman ve 3 dönme bulunan, 8 düğümlü, 48 serbestlik dereceli eleman (Rotational brick) sadece, standart brick eleman ile prizmatik çubuk elemanlar arasında geçiş elemanı görevini taşımaktadır (Şekil 4.5). Bu elemanın formülasyonu, iki boyutlu Scordelis düzlem elemanının formülasyonu örnek alınıp, dikdörtgenler prizması (a×b×c boyutlu) şeklinde düşünülerek gerçekleştirilmiştir (Scordelis, 1968). Geçiş elemanının herhangi bir noktasındaki deplasmanlar için,

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = [\,\underline{P}(x, y, z)\,]\{\alpha\} \tag{4.47}$$

şeklinde parametrik bir yaklaşım yapılmaktadır.



Şekil 4.5. Üç boyutlu geçiş elemanı (Rotational brick)

Yukarıda görülen [P], baz fonksiyonları matrisi olarak adlandırılmakta olup,

$$[P]=\left[\begin{array}{cccccc|c|cccccc} P_{1x} & 0 & 0 & 0 & P_{5x} & P_{6x} & .. & P_{43x} & 0 & 0 & 0 & P_{47x} & P_{48x} \\ 0 & P_{2y} & 0 & P_{4y} & 0 & P_{6y} & .. & 0 & P_{44y} & 0 & P_{46y} & 0 & P_{48y} \\ 0 & 0 & P_{3z} & P_{4z} & P_{5z} & 0 & .. & 0 & 0 & P_{45z} & P_{46z} & P_{47z} & 0 \end{array}\right] \quad (4.48)$$

formunda seçilmektedir. Bilinmeyen parametreler vektörü ise,

$$\{\alpha\}=\{\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \cdots \quad \alpha_{46} \quad \alpha_{47} \quad \alpha_{48}\}^T \quad (4.49)$$

şeklinde tariflenmektedir. Bu elemanda, herhangi bir noktanın dönmesinin (θ_i) deplasmanlardan (u_i) bağımsız olmadığı düşünülerek, dönmeler deplasmanlar cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilmektedirler.

$$\theta_x = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right]$$

$$\theta_y = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right] \qquad (4.50)$$

$$\theta_z = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right]$$

Bu eleman için yukarıda verilen (4.50) ifadesinin ve (4.48) eşitliğinde görülen baz fonksiyonları matrisinin sıfırdan farklı elemanlarının elde edilişi Ek-D'de detaylı olarak anlatılmaktadır. Burada, baz fonksiyonları matrisinin elemanlarının bilindiği farzedilerek eleman rijitlik ve kütle matrislerinin hesabı anlatılmaktadır.

Deplasmanlar için yapılan (4.47) ve dönmeler için yapılan (4.50) kabülleri kullanılarak, her düğüme ait deplasman ve dönmeler hesaplanıp matris notasyonunda yazılırsa aşağıdaki bağıntı elde edilir.

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ \theta_{z1} \\ \vdots \\ u_8 \\ v_8 \\ w_8 \\ \theta_{x8} \\ \theta_{y8} \\ \theta_{z8} \end{Bmatrix}_{(48\times1)} = \begin{bmatrix} \\ \underline{P}_d \\ \\ \end{bmatrix}_{(48\times48)} \{\alpha\} \qquad (4.51)$$

Bu denklem takımı $\{\alpha\}$ vektörü için çözülürse,

$$\{\alpha\}=[P_d]^{-1}\{u_d\} \tag{4.52}$$

olarak bulunur. Bu ifade, (4.47) de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}\{u\}&=[N]\{u_d\}\\ [N]&=[P][P_d]^{-1}\end{aligned} \tag{4.53}$$

eşitliği elde edilir. Bu durumda, [B] şekil değiştirme matrisi,

$$\begin{aligned}[B]&=[L][N]=[B^*][P_d]^{-1}\\ [B^*]&=[L][P]\end{aligned} \tag{4.54}$$

olarak tariflenmektedir. (4.20) bağıntısında görülen eleman rijitlik matrisi ifadesi, a×b×c boyutlu dikdörtgenler prizması şeklindeki geçiş elemanı için,

$$[k^{rb}]_{(48\times48)}=\int_{z=0}^{c}\int_{y=0}^{b}\int_{x=0}^{a}[B]^T[D][B]\,dx\,dy\,dz \tag{4.55}$$

şeklinde elde edilir. Yukarıda bulunan şekil değiştirme matrisi, (4.55) te yerine yazılır ve düzenlemeler yapılırsa, eleman rijitlik matrisi son halini almaktadır.

$$\begin{aligned}[k^{rb}]_{(48\times48)}&=[P_d]^{-T}[k^*][P_d]^{-1}\\ [k^*]&=\int_0^c\int_0^b\int_0^a[B^*]^T[D][B^*]\,dx\,dy\,dz\end{aligned} \tag{4.56}$$

Benzer işlemler, eleman kütle matrisi içinde yapılmaktadır. (4.53) şekil fonksiyonları matrisi, (4.20) bağıntısında verilen eleman kütle matrisi tarifinde yerine

yazılır ve düzenlemeler yapılırsa, üç boyutlu geçiş elemanı (rotational brick) için eleman kütle matrisi elde edilir.

$$\left[m^{rb}\right]_{(48\times48)} = \left[P_d\right]^{-T}\left[m^*\right]\left[P_d\right]^{-1}$$
$$\left[m^*\right] = \int_0^c \int_0^b \int_0^a \rho\,[P]^T[P]\,dx\,dy\,dz \qquad (4.57)$$

Bu tez çalışmasında seçilen geçiş elemanı, dikdörtgenler prizması olarak sınırlandırılmıştır. Bu nedenle, (4.56) ve (4.57) ifadelerinde görülen eleman rijitlik ve kütle matrisleri, MATHEMATICA paket programı kullanılarak kapalı formda elde edilmiştir. Fakat, elde edilen matrislerin elemanları çok uzun ve karmaşık olduğundan, hazırlanan bilgisayar programlarında, eleman rijitlik ve kütle matrisleri sayısal integrasyon yöntemi kullanılarak hesaplanmaktadır. Aşağıda bu işlemin nasıl yapıldığı anlatılmaktadır. Bu işlemler yapıldıktan sonra birkaç örnek eleman için, hem kapalı ifadesinden hemde sayısal integrasyon yöntemi kullanılarak bulunan eleman matrisleri karşılaştırılmış olup, sonuçların çok yakın olduğu gözlenmiştir.

Bu çalışmada, sonlu yöndeki integraller için Gauss-Legendre sayısal integrasyon yöntemi kullanıldığından dolayı, bu eleman için de aynı yöntem kullanılmaktadır. Sonlu sınırlara sahip belirli bir integralin Gauss-Legendre yöntemi ile nasıl hesaplanacağı aşağıda kısaca özetlenmektedir.

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \int_{-1}^{+1} F(t)\,dt \cong \sum_{i=1}^{L} W_i F(t_i)$$
$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t \qquad dx = \frac{b-a}{2}dt \qquad (4.58)$$
$$F(t) = \frac{b-a}{2} f\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t\right)$$

Yukarıdaki işlemler, burada eleman rijitlik ve kütle matrislerine uygulanmaktadır. Bu amaçla öncelikle eleman matrisleri,

$$\left[k^*\right]=\int_0^c\int_0^b\int_0^a f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$$\left[m^*\right]=\int_0^c\int_0^b\int_0^a g(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \qquad (4.59a)$$

$$f(x,y,z)=\left(\left[B^*\right]^T[D]\left[B^*\right]\right)_{ij}$$

$$g(x,y,z)=\left(\rho\,[P]^T[P]\right)_{ij} \qquad (4.59b)$$

şeklinde yazılmaktadır. x, y ve z kartezyen koordinatları için (4.58) bağıntısında görüldüğü gibi,

$$x=\frac{a}{2}(1+\xi) \qquad y=\frac{b}{2}(1+\eta) \qquad z=\frac{c}{2}(1+\zeta)$$

$$dx=\frac{a}{2}d\xi \qquad dy=\frac{b}{2}d\eta \qquad dz=\frac{c}{2}d\zeta \qquad (4.60)$$

dönüşümleri yapılmaktadır. Bu ifadeler kullanılarak,

$$\left[k^*\right]=\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} F(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta$$

$$\left[m^*\right]=\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} G(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta \qquad (4.61a)$$

$$F(\xi,\eta,\zeta)=\frac{a\,b\,c}{8}\,f\left(x(\xi),y(\eta),z(\zeta)\right)$$

$$G(\xi,\eta,\zeta)=\frac{a\,b\,c}{8}\,g\left(x(\xi),y(\eta),z(\zeta)\right) \qquad (4.61b)$$

formunda eleman rijitlik ve kütle matrisleri elde edilir. İntegraller bu hale geldikten sonra Gauss-Legendre sayısal integrasyon metodu kullanılarak, eleman rijitlik ve kütle matrisleri hesaplanabilmektedir. Hazırlanan bilgisayar programlarında, her üç yöndede 6 noktalı Gauss-Legendre sayısal integrasyon yöntemi kullanılarak eleman

matrisleri hesaplanmaktadır. Bu hesaplamalar tamamen sayısal olmayıp, yarı analitiktir. Çünkü, eleman matrislerinin tariflerinde görülen [P], [P_d] ve [B^*] matrislerinin kapalı ifadeleri, MATHEMATICA paket programı ile hesaplanmış olup, bilgisayar programlarında bu kapalı ifadeler kullanılmaktadır.

4.4. Yapı-Zemin Etkileşim Analizi

Üç boyutlu genel geometriye sahip, yarı sonsuz zemin ile sonlu bir boyuta sahip üst yapıdan meydana gelen, yapı-zemin etkileşim sistemlerinin dinamik analizi incelenmektedir. Üç boyutlu yapı-zemin etkileşimi problemleri, iki boyutlu sistemlerde olduğu gibi, sonlu ve sonsuz elemanlar kullanılarak ele alınmaktadır. Bu amaçla yarı sonsuz zemin, kaynağa yakın bölgelerde standart sonlu elemanlar ile, kaynaktan uzak bölgelerde ise sonsuz elemanlar kullanılarak modellenmektedir. Üst yapı olarak temel yapısı ve/veya çubuk elemanlardan meydana gelen üç boyutlu çerçeve sistemler gözönüne alınmaktadır. Çubuk elemanların kullanıldığı durumlarda, yarı sonsuz zemin modeli ile üst yapıyı birbirlerine bağlamak için dönme serbestlik derecesine sahip geçiş elemanı (Rotational brick eleman) kullanılmaktadır.

İki boyutlu sistemlerde olduğu gibi burada da, dinamik yapı-zemin etkileşim analizi problemleri, harmonik yükleme hali ve zamanla keyfi değişen (transient) dinamik yükleme hali olmak üzere iki ayrı kısımda incelenmektedir. Formülasyon, harmonik yükleme durumu için kompleks uzayda, zamanla keyfi değişen yükleme durumunda ise Laplace dönüşüm uzayında gerçekleştirilmektedir.

4.4.1. Harmonik Yükleme Durumu

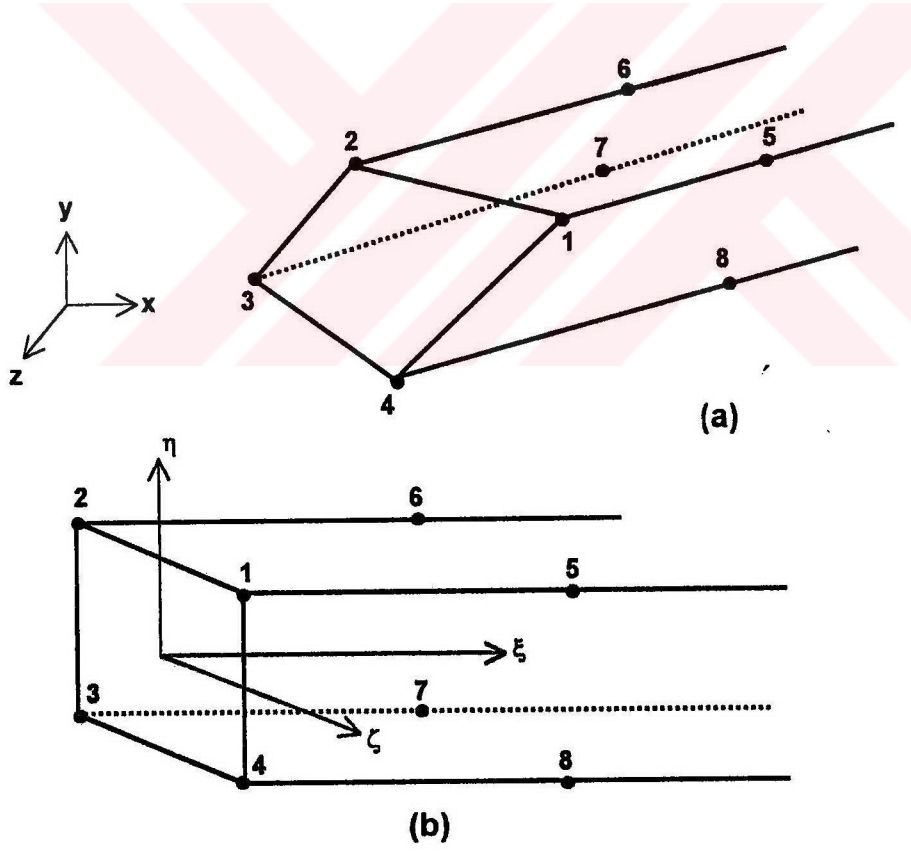
Harmonik yükleme durumunda formülasyon kompleks uzayda yapılmaktadır. Hareket denklemleri, iki boyutlu durumda anlatıldığı gibi elde edilmektedir. Tipik olarak ω frekansı ile sisteme etkiyen harmonik bir yükleme altında, viskoelastik zemin olması durumuda gözönüne alınabilecek şekilde, sistem hareket denklem takımı aşağıdaki formda elde edilmektedir.

$$\left((1+2iz)[K]-\omega^2[M]\right)\{U_0\}=\{F_0\} \tag{4.62}$$

Yarı sonsuz ortamların modellenmesinde, uzak bölgelerde sonsuz elemanlar kullanılacaktır. Bu amaçla bir, iki ve üç dalganın mevcudiyetini gözönüne alabilen sonsuz eleman modelleri geliştirilmiştir. Çeşitli tipteki sonlu ve sonsuz elemanlardan oluşan sistemler için, yukarıdaki hareket denklem takımını oluşturup çözen bazı bilgisayar programları hazırlanmıştır.

4.4.1.1. Tek Dalga Tipini İçeren Sonsuz Eleman

Aşağıda görülen, 8 düğümlü azalan fonksiyonlu sonsuz eleman modeli kullanılmaktadır. Gerçek sonsuz eleman, yine sonsuz bir bölgeye tasvir edilmektedir.



Şekil 4.6. 8 düğümlü sonsuz eleman
(a) Gerçek eleman **(b)** Referans elemanı

Şekildende görüldüğü gibi, bu elemanda bir doğrultu sonsuza giderken ($0\leq\xi\leq\infty$) diğer doğrultular sonlu bir boyuta sahiptir ($-1\leq\eta\leq+1$, $-1\leq\zeta\leq+1$). Gerçek eleman ile referans elemanı arasındaki geometrik dönüşüm,

$$x=\sum_{i=1}^{8} M_i x_i \qquad y=\sum_{i=1}^{8} M_i y_i \qquad z=\sum_{i=1}^{8} M_i z_i \tag{4.63}$$

şeklinde tariflenmektedir. Yukarıda görülen geometrik şekil fonksiyonları,

$$\begin{aligned} M_1&=\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(1+\zeta) & M_2&=\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta)\\ M_3&=\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta) & M_4&=\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(1+\zeta)\\ M_5&=\frac{1}{4}\xi(1+\eta)(1+\zeta) & M_6&=\frac{1}{4}\xi(1+\eta)(1-\zeta)\\ M_7&=\frac{1}{4}\xi(1-\eta)(1-\zeta) & M_8&=\frac{1}{4}\xi(1-\eta)(1+\zeta) \end{aligned} \tag{4.64}$$

olarak seçilmektedir. Bununla birlikte, sonsuz elemanın herhangi bir noktasındaki deplasmanların dönüşümü,

$$\begin{aligned} u&=\sum_{i=1}^{4} N_i u_i\\ v&=\sum_{i=1}^{4} N_i v_i\\ w&=\sum_{i=1}^{4} N_i w_i \end{aligned} \tag{4.65}$$

formunda seçilmiştir. Bu elemana ait interpolasyon şekil fonksiyonları, dalgaların sonsuzda sıfıra gitmesini sağlayacak sekilde, azalan fonksiyonlu olarak,

$$N_1 = P(\xi,\omega)\left[\frac{1}{4}(1+\eta)(1+\zeta)\right]$$
$$N_2 = P(\xi,\omega)\left[\frac{1}{4}(1+\eta)(1-\zeta)\right]$$
$$N_3 = P(\xi,\omega)\left[\frac{1}{4}(1-\eta)(1-\zeta)\right] \qquad (4.66)$$
$$N_4 = P(\xi,\omega)\left[\frac{1}{4}(1-\eta)(1+\zeta)\right]$$

şeklinde seçilmiştir. Yukarıda gözüken $P(\xi,\omega)$ deplasman yayılma fonksiyonu olup, iki boyutlu durumdakine benzer şekilde,

$$P(\xi,\omega) = e^{-(\alpha+\beta)\xi} \qquad \beta = i\beta^* \qquad \beta^* = \frac{\omega}{c} L \qquad (4.67)$$

formunda olduğu kabul edilmiştir. Üç boyutlu sonsuz eleman için L karakteristik boy değeri aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır.

$$L = \sqrt{(x_5 - x_1)^2 + (y_5 - y_1)^2 + (z_5 - z_1)^2} \qquad (4.68)$$

Bu eleman için de yine eleman rijitlik ve kütle matrisleri (4.20) tarifleri kullanılarak elde edilmektedir. Bu tip sonsuz elemana ait rijitlik ve kütle matrisinin elde edilmesinde, sonsuza uzanan yöndeki integraller için Newton-Cotes sayısal integrasyon yöntemi kullanılacağından, aşağıdaki basamaklar takip edilerek eleman rijitlik ve kütle matrisleri hesaplanmaktadır.

İnterpolasyon şekil fonksiyonlarının,

$$N_i = P(\xi,\omega)\, L_i(\eta,\zeta) \qquad (4.69)$$

formunda olduğu düşünülürse, referans koordinatlarına göre türevleri,

$$\begin{aligned} N_i &= L_i\, e^{-(\alpha+\beta)\xi} \\ N_{i,\xi} &= -(\alpha+\beta)\, L_i\, e^{-(\alpha+\beta)\xi} \\ N_{i,\eta} &= L_{i,\eta}\, e^{-(\alpha+\beta)\xi} \\ N_{i,\zeta} &= L_{i,\zeta}\, e^{-(\alpha+\beta)\xi} \end{aligned} \qquad (4.70)$$

olur. Bu tariflere göre şekil fonksiyonları matrisi,

$$[N] = e^{-(\alpha+\beta)\xi} \left[\begin{array}{ccc|c|ccc} L_1 & 0 & 0 & \cdots & L_8 & 0 & 0 \\ 0 & L_1 & 0 & \cdots & 0 & L_8 & 0 \\ 0 & 0 & L_1 & \cdots & 0 & 0 & L_8 \end{array}\right] \qquad (4.71)$$

$$[N] = e^{-(\alpha+\beta)\xi}\,[N^*]$$

şeklinde elde edilmektedir. Bu form gözönüne alınırsa, eleman kütle matrisi referans koordinatlarına dönüşmüş olarak,

$$[m^s]_{(12\times12)} = \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{\infty} \left(\rho\,[N^*]^T\,[N^*]\,|J| \right) e^{-2(\alpha+\beta)\xi}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta \qquad (4.72)$$

olarak bulunur. Şekil değiştirme matrisinin ifadesi ise, (4.70) te elde edilen şekil fonksiyonlarının türevleri kullanılarak,

$$[B]_{(6\times12)} = e^{-(\alpha+\beta)\xi}\,[B^*] \qquad (4.73)$$

şekline dönüşür. $[B^*]$ matrisinin elemanları ise açık olarak aşağıda görüldüğü formda elde edilmektedir.

$$
\begin{aligned}
&i=1,2,3,4 \quad j=3i-2 \quad k=3i-1 \quad l=3i \\
&B^*_{1j}=-(\alpha+\beta)\,J^*_{11}\,L_i+J^*_{12}\,L_{i,\eta}+J^*_{13}\,L_{i,\zeta} \\
&B^*_{2k}=-(\alpha+\beta)\,J^*_{21}\,L_i+J^*_{22}\,L_{i,\eta}+J^*_{23}\,L_{i,\zeta} \\
&B^*_{3l}=-(\alpha+\beta)\,J^*_{31}\,L_i+J^*_{32}\,L_{i,\eta}+J^*_{33}\,L_{i,\zeta}
\end{aligned}
\qquad (4.74)
$$

Şekil değiştirme matrisinin (4.73) teki tarifi kullanılırsa, referans koordinatlarında eleman rijitlik matrisi,

$$
\left[k^S\right]_{(12\times12)}=\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{\infty}\left(\left[B^*\right]^T[D]\left[B^*\right]|J|\right)e^{-2(\alpha+\beta)\xi}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta \qquad (4.75)
$$

şeklinde elde edilmektedir. Eleman rijitlik ve kütle matrislerinde görülen Jacobian matrisi, sonsuz elemana ait geometrik şekil fonksiyonları ve türevleri kullanılarak hesaplanmaktadır. Eleman matrisleri (4.72) ve (4.75) te görüldüğü formda elde edildikten sonra, sonlu yönde Gauss-Legendre ve sonsuz yönde ise Newton-Cotes integrasyon yöntemi uygulanarak sayısal olarak hesaplanmaktadır.

4.4.1.2. İki Dalga Tipini İçeren Sonsuz Eleman

Aynı anda iki farklı elastik dalganın özelliklerini gözönüne alabilen, üç boyutlu sonsuz eleman olarak, tek dalgalı sonsuz eleman için kullanılan 8 düğümlü, azalan fonksiyonlu model kullanılmaktadır. Bu elemanın referans koordinatlarına geometrik dönüşümü için (4.63) ifadeleri ile (4.64) geometrik şekil fonksiyonları kullanılmaktadır. Buna ilaveten elemanın herhangi bir noktasındaki deplasmanlarının dönüşümü ise,

$$
u=\sum_{i=1}^{8}N_i\,u_i \qquad v=\sum_{i=1}^{8}N_i\,v_i \qquad w=\sum_{i=1}^{8}N_i\,w_i \qquad (4.76)
$$

şeklindedir. Yukarıda görülen N_i interpolasyon şekil fonksiyonları aşağıdaki formda seçilmektedirler.

$$\begin{aligned} N_i &= P_i(\xi,\omega)\left[\frac{1}{4}(1+\eta)(1+\zeta)\right] \quad i=1,5 \\ N_i &= P_i(\xi,\omega)\left[\frac{1}{4}(1+\eta)(1-\zeta)\right] \quad i=2,6 \\ N_i &= P_i(\xi,\omega)\left[\frac{1}{4}(1-\eta)(1-\zeta)\right] \quad i=3,7 \\ N_i &= P_i(\xi,\omega)\left[\frac{1}{4}(1-\eta)(1+\zeta)\right] \quad i=4,8 \end{aligned} \tag{4.77}$$

Burada deplasman yayılma fonksiyonu, düzlem dalgaların süperpozisyonu şeklinde iki dalga özelliğini içerecek formda aşağıdaki gibi seçilmiştir.

$$\begin{aligned} P(\xi,\omega) &= a\,e^{-(\alpha+\beta_1)\xi} + b\,e^{-(\alpha+\beta_2)\xi} \\ \beta_k &= i\beta_k^* \qquad \beta_k^* = \frac{\omega}{c_k} L \end{aligned} \tag{4.78}$$

Yukarıdaki a ve b katsayıları, iki boyutlu ve iki dalga tipini içeren sonsuz elemanda anlatıldığı gibi hesaplanmaktadır. Benzer işlemler buradada yapılırsa,

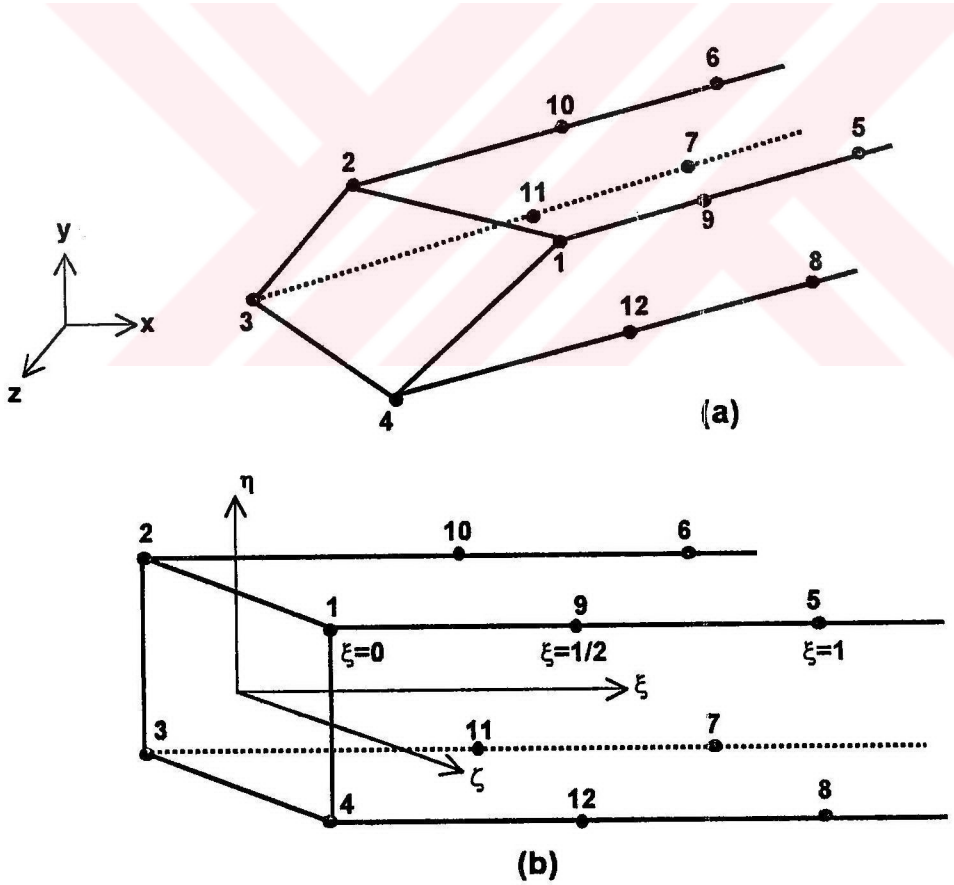
$$\begin{aligned} P_k(\xi,\omega) &= E_{11}\,e^{-(\alpha+\beta_1)\xi} + E_{21}\,e^{-(\alpha+\beta_2)\xi} \qquad k=1,2,3,4 \\ P_k(\xi,\omega) &= E_{12}\,e^{-(\alpha+\beta_1)\xi} + E_{22}\,e^{-(\alpha+\beta_2)\xi} \qquad k=5,6,7,8 \end{aligned} \tag{4.79}$$

olarak deplasman yayılma fonksiyonları bulunmaktadır. Deplasman yayılma fonksiyonlarında görülen E_{ij} katsayıları, iki boyutlu durumda elde edilenler ile tamamen aynı olup (3.95) bağıntısında verilmektedir. Bu şekilde deplasman yayılma fonksiyonları bulunduktan sonra, eleman rijitlik ve kütle matrisleri hesaplanabilmektedir. Bu eleman için de, sonlu integraller için Gauss-Legendre,

sonsuz integraller için ise Newton-Cotes sayısal integrasyon metodları kullanılmaktadır. Sonsuz integrallerin Newton-Cotes metodu ile hesaplanabilmesi için, eleman rijitlik ve kütle matrislerinin, bu yöntemin kullanılmasına uygun forma dönüştürülmeleri gerekmektedir. İki dalga tipini içeren sonsuz elemana ait eleman rijitlik ve kütle matrislerinin, sayısal integrasyon ile hesaplanmasına ilişkin detaylı açıklamalar Ek-E'de verilmektedir.

4.4.1.3. Üç Dalga Tipini İçeren Sonsuz Eleman

Üç farklı dalganın özelliklerini aynı anda gözönüne alabilen üç boyutlu sonsuz eleman olarak aşağıdaki şekilde görülen, 12 düğümlü, azalan fonksiyonlu sonsuz eleman modeli kullanılmaktadır.



Şekil 4.7. 12 düğümlü sonsuz eleman
(a) Gerçek eleman **(b)** Referans elemanı

Geometrik dönüşüm için, diğer iki elemanda olduğu gibi, (4.63) ve (4.64) bağıntıları kullanılmaktadır. Deplasmanların dönüşümü ise,

$$u=\sum_{i=1}^{12} N_i u_i \qquad v=\sum_{i=1}^{12} N_i v_i \qquad w=\sum_{i=1}^{12} N_i w_i \tag{4.80}$$

ifadeleri ile verilmektedir. İnterpolasyon şekil fonksiyonları,

$$\begin{aligned}
N_i &= P_i(\xi,\omega)\left[\frac{1}{4}(1+\eta)(1+\zeta)\right] \quad i=1,5,9\\
N_i &= P_i(\xi,\omega)\left[\frac{1}{4}(1+\eta)(1-\zeta)\right] \quad i=2,6,10\\
N_i &= P_i(\xi,\omega)\left[\frac{1}{4}(1-\eta)(1-\zeta)\right] \quad i=3,7,11\\
N_i &= P_i(\xi,\omega)\left[\frac{1}{4}(1-\eta)(1+\zeta)\right] \quad i=4,8,12
\end{aligned} \tag{4.81}$$

şeklinde seçilmektedir. Deplasman yayılma fonksiyonunun,

$$\begin{aligned}
P(\xi,\omega) &= a\,e^{-(\alpha+\beta_1)\xi} + b\,e^{-(\alpha+\beta_2)\xi} + c\,e^{-(\alpha+\beta_3)\xi}\\
\beta_k &= i\beta_k^* \qquad \beta_k^* = \frac{\omega}{c_k} L
\end{aligned} \tag{4.82}$$

formunda olduğu kabul edilmiştir. Yukarıdaki ifadede görülen a, b ve c katsayıları, iki boyutlu üç dalga tipini içeren sonsuz elemanda anlatıldığı gibi hesaplanmaktadır.

$$\begin{aligned}
P_k(\xi,\omega) &= E_{11}e^{-(\alpha+\beta_1)\xi} + E_{21}e^{-(\alpha+\beta_2)\xi} + E_{31}e^{-(\alpha+\beta_3)\xi} \quad k=1,2,3,4\\
P_k(\xi,\omega) &= E_{12}e^{-(\alpha+\beta_1)\xi} + E_{22}e^{-(\alpha+\beta_2)\xi} + E_{32}e^{-(\alpha+\beta_3)\xi} \quad k=5,6,7,8\\
P_k(\xi,\omega) &= E_{13}e^{-(\alpha+\beta_1)\xi} + E_{23}e^{-(\alpha+\beta_2)\xi} + E_{33}e^{-(\alpha+\beta_3)\xi} \quad k=9,10,11,12
\end{aligned} \tag{4.83}$$

Deplasman yayılma fonksiyonları (4.83) ifadesinde görüldüğü gibi bulunmaktadır. Yukarıdaki ifadede gözüken E_{ij} katsayıları, iki boyutlu üç dalga tipini içeren sonsuz eleman için hesaplananlarla tamamen aynı olup, ifadeleri (3.106) denklemlerinde verilmektedir. Bu şekilde deplasman yayılma fonksiyonları bulunduktan sonra, interpolasyon şekil fonksiyonları bulunur ve daha sonrada referans koordinatlarına dönüşmüş olarak eleman rijitlik ve kütle matrisleri aşağıdaki formda elde edilmiştir.

$$\left[k^s\right]=\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{\infty}[B]^T[D][B]\,|J|\,d\xi\,d\eta\,d\zeta$$

$$\left[m^s\right]=\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{\infty}\rho[N]^T[N]|J|\,d\xi\,d\eta\,d\zeta \qquad (4.84)$$

Bu aşamadan sonra çeşitli integrasyon yöntemleri kullanılarak eleman rijitlik ve kütle matrisleri sayısal olarak hesaplanabilir.

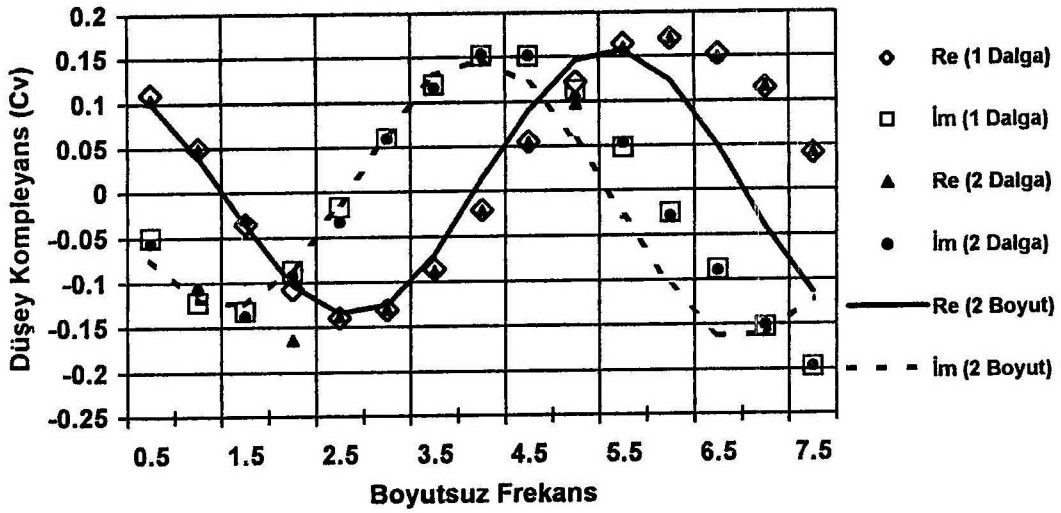
4.4.1.4. Harmonik Yükleme Durumunda Sayısal Uygulamalar

Harmonik yükleme etkisinde, üç boyutlu yapı-zemin etkileşimi problemlerinin çözülmesindeki amaç, önerilen sonsuz eleman modelinin kontrolünün yapılmasıdır. Öncelikle, daha önceden değişik metodlar kullanılarak çözülmüş problemler, burada sonlu-sonsuz eleman modeli ile tekrar çözülüp karşılaştırmalar yapılmıştır. Üç boyutlu sistemler gözönüne alınırken, iki boyutlu durumda olduğu gibi üç değişik sonsuz eleman modelinin kullanılması amaçlanmıştır. Formülasyon yapıldıktan sonra FORTRAN dilinde programlanarak çeşitli problemlere uygulanmışlardır. İlk olarak tek dalga tipini içeren sonsuz eleman modeli kullanılmış olup, kontrol amaçlı çeşitli uygulamalar yapılmıştır. Uygulamalar üç boyutlu ve modeller büyük hacimli olduğundan, gelişmiş özelliklere ve hafızaya sahip bilgisayarların kullanılması zorunluluğunu ortaya çıkarmıştır. Daha sonra iki dalga tipini içeren sonsuz eleman modeli programlanmış olup, benzer şekilde aynı uygulamalar ele alınarak karşılaştırmalar yapılmıştır. Sonuçların yakın olduğu ve

buna karşılık bilgisayar ile çözüm yaparken geçen zamanında, bir dalga tipini içeren sonsuz eleman modeline göre çok fazla olduğu gözlenmiştir. Bu sebeplerden dolayı bu çalışmada; bir, iki ve üç dalga tipini içeren sonsuz eleman modeli formülasyonu yapılmış olmakla birlikte, ele alınan sayısal uygulamalarda sadece tek dalga tipini içeren sonsuz eleman modeli kullanılmıştır. Bununla birlikte, üç dalga tipini içeren sonsuz eleman modelinin bilgisayarda programlanmasına, yukarıda bahsedilen sebeplerden ötürü girişilmemiştir. Hazırlanan bilgisayar programlarında eleman matrisleri sayısal olarak oluşturulmaktadır. Üç boyutlu elemanlar için, sonlu integraller için 2 noktalı Gauss-Legendre, sonsuz integraller için ise 12 noktalı Newton-Cotes sayısal integrasyon metodları kullanılmıştır.

4.4.1.4.(1). Yarı Sonsuz Düzlem İçinde Gömülü Harmonik Tekil Yük

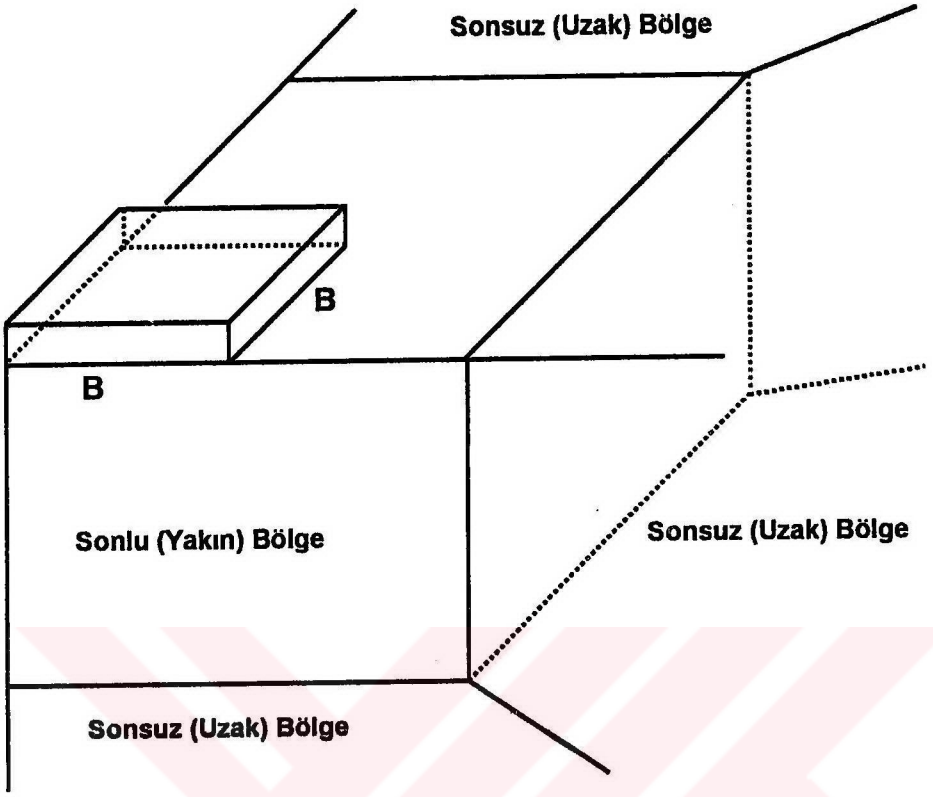
Bu problem, eksenel simetrik geometri ve yüklemeye sahip olduğundan, önceki bölümde iki boyutlu olarak ele alınmıştı (Şekil 3.14). Burada ise, üç boyutlu sonlu-sonsuz eleman modelinin kontrolü amacıyla bu özelliklerinden yararlanılmadan, üç boyutlu bir problem olarak ele alınmaktadır. Problem üç boyutlu olarak ele alınmakla birlikte, geometri ve yüklemenin simetrikliğinden dolayı sistemin dörtte birlik kısmı gözönüne alınıp, sonlu-sonsuz eleman ağı oluşturulmuştur. Sonlu-sonsuz eleman ağı 1000 sonlu (10×10×10) ve 300 sonsuz elemandan meydana gelmektedir. Problem, tek dalga ve iki dalga tipini içeren sonsuz eleman modelleri kullanılarak ayrı ayrı ele alınmış olup, sonuçlarda belirgin bir fark görülmemiştir (Şekil 4.8). Burada iki dalga tipini içeren sonsuz eleman modeli kullanılırken S ve R dalgaları gözönüne alınmıştır. Tek dalga tipini içeren sonsuz eleman kullanılırken ise yanlara doğru giden sonsuz elemanlarda R dalgasının, aşağıya doğru giden sonsuz elemanlarda ise S dalgasının özellikleri gözönüne alınmıştır. İki boyutlu kısımda, üç dalga tipini içeren sonsuz eleman modeli kullanılarak elde edilmiş olan sonuçlarda ayrıca grafikte görülmektedir. Aşağıda görülen grafikten, boyutsuz frekansın $0 \le a_0 \le 6$ aralığı için hesaplanan boyutsuz düşey kompleyans değerlerinin birbirleri ile uyumlu olduğu gözlenmektedir.



Şekil 4.8. Düşey kompleyansın frekansla değişimi

4.4.1.4.(2). Elastik Yarı Sonsuz Zemin Üzerinde Rijit Kare Temel

Elastik yarı sonsuz zemin üzerinde bulunan 2B×2B boyutlu rijit, kütlesiz kare temele ait kompleyans değerleri incelenmektedir. Sistemin geometrisi ve yüklemesinin simetri ve/veya antisimetri özellikleri kullanılarak, sadece dörtte bir bölge için sonlu-sonsuz eleman ağı hazırlanarak çözümler elde edilmiştir (Şekil 4.9). Problemde yarı sonsuz zemin ve kütlesiz rijit temel, 8 düğümlü brick elemanlar kullanılarak modellenmiştir. Elastik zemine ait malzeme özellikleri, $E=24\times10^9$ N/m^2, $\nu=1/3$ ve $\rho=2400$ kg/m^3 olarak seçilmiştir. Bu malzeme için kayma modülü $G=9\times10^9$ N/m^2; elastik ortamın dalga hızları ise $c_P=3872.98$ m/s, $c_S=1936.49$ m/s ve $c_R=0.932$ $c_S=1804.81$ m/s olarak hesaplanmıştır. Sonsuz elemanlar için azaltma parametresi $\alpha=0.69$ olarak alınmıştır.



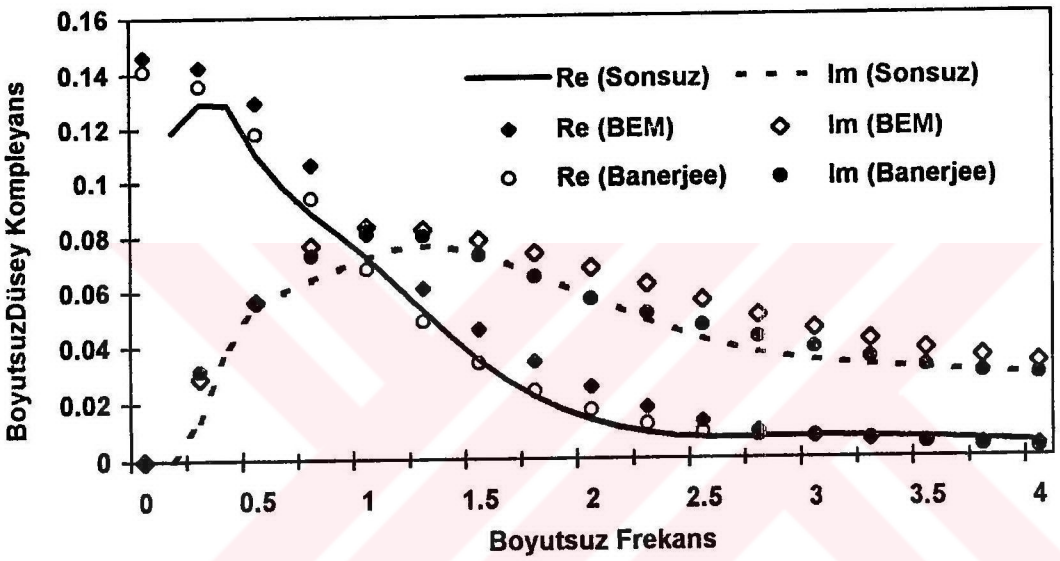
Şekil 4.9. Elastik zemin üzerinde kare temel (1/4 bölge)

Problemde, üç kompleyans bileşeninin (C_{VV}-düşey, C_{HH}-yatay ve C_{MM}-dönme) boyutsuz a_0 frekansı ($a_0=\omega B/c_S$) ile değişimi incelenmektedir. Kare temelin yarı genişliği B=12 m seçilmiştir. Boyutsuz kompleyanslar,

$$\begin{aligned} \overline{C}_{VV} &= GBC_{VV} \\ \overline{C}_{HH} &= GBC_{HH} \\ \overline{C}_{MM} &= GB^3 C_{MM} \end{aligned} \qquad (4.85)$$

şeklinde tariflenmektedirler. Kompleyansların hesabında tek dalga tipini içeren sonsuz eleman modeli kullanılmıştır. Yukarıdan aşağıya doğru uzanan sonsuz elemanlarda S dalgasının, yatay olarak yanlara uzanan sonsuz elemanlarda ise R dalgasının özellikleri gözönüne alınmıştır.

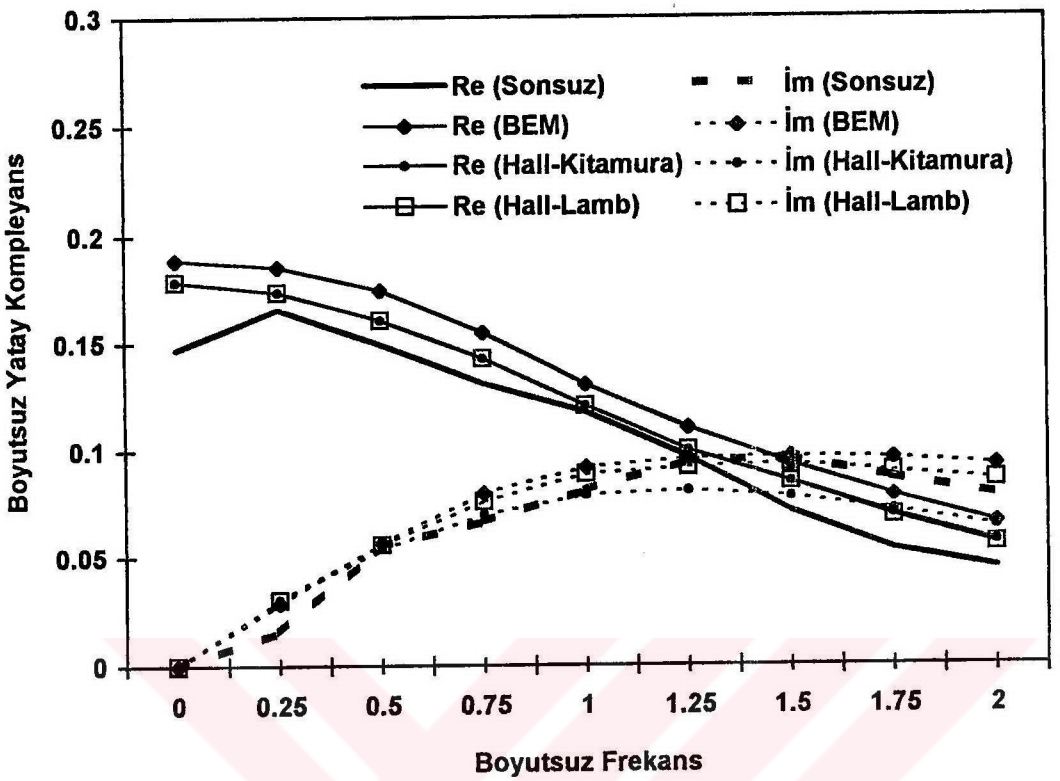
Bu problem ayrıca, Mengi ve ark (1994) tarafından hazırlanmış, sınır eleman formülasyonuna dayalı program ile çözülüp karşılaştırmalar yapılmıştır. Boyutsuz düşey kompleyansın ($\overline{C}_{VV}$) boyutsuz frekansla değişimi, Israil ve Banerjee (1990b) tarafından, yine sınır eleman formülasyonu kullanılarak incelenmiş olup, sonlu-sonsuz eleman modeli ile bulunan sonuçlarla birlikte aşağıda görülmektedir.



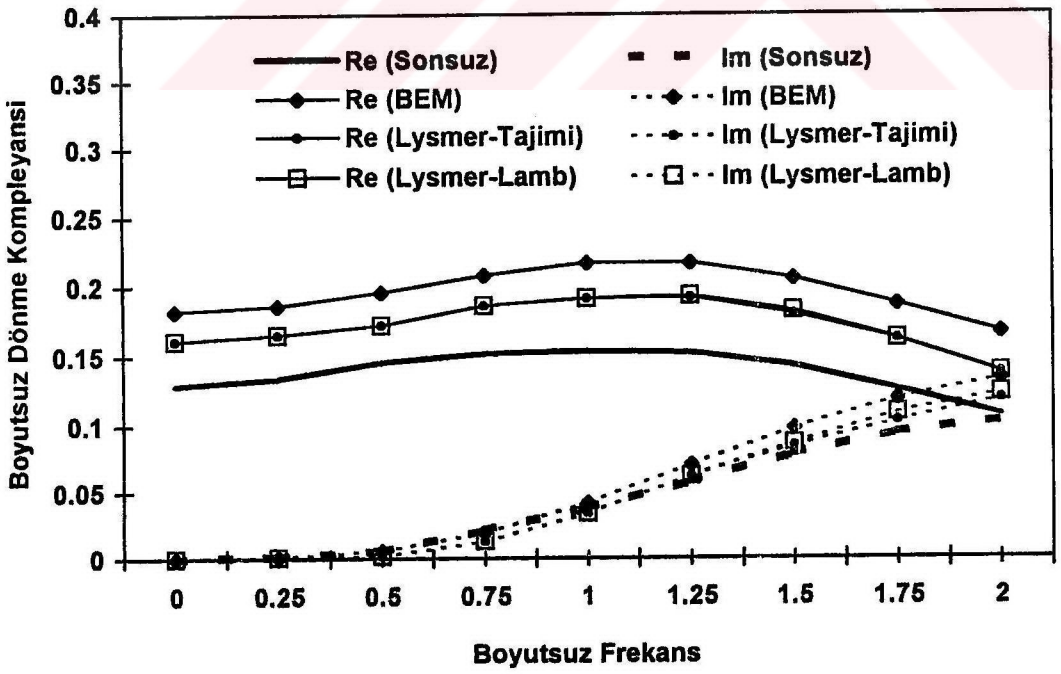
Şekil 4.10. Boyutsuz düşey kompleyansın frekans ile değişimi

Grafikten, düşey kompleyans değerlerinin birbirleriyle uyumlu olduğu gözlenmektedir.

Yatay ve dönme kompleyanslarının ($\overline{C}_{HH}$ ve $\overline{C}_{MM}$) frekansla değişimi Chow (1986) tarafından da incelenmiştir. Chow (1986), yatay kompleyans için Hall-Lamb ve Hall-Kitamura nokta yüklemesi formülasyonunu, dönme kompleyansı için Lysmer-Lamb ve Lysmer-Tajimi nokta yüklemesi formülasyonlarını kullanarak incelemiştir. Burada, yine dörtte bir bölge ve tek dalga tipini içeren sonsuz eleman kullanılarak yatay ve dönme kompleyansları elde edilmiştir. Ayrıca, Mengi ve ark (1994)'te hazırlanan sınır eleman metodu formülasyonu ile sonuçlar elde edilmiş olup, kompleyansların boyutsuz frekansla değişimleri aşağıda görülmektedir.



Şekil 4.11. Boyutsuz yatay kompleyansın frekans ile değişimi

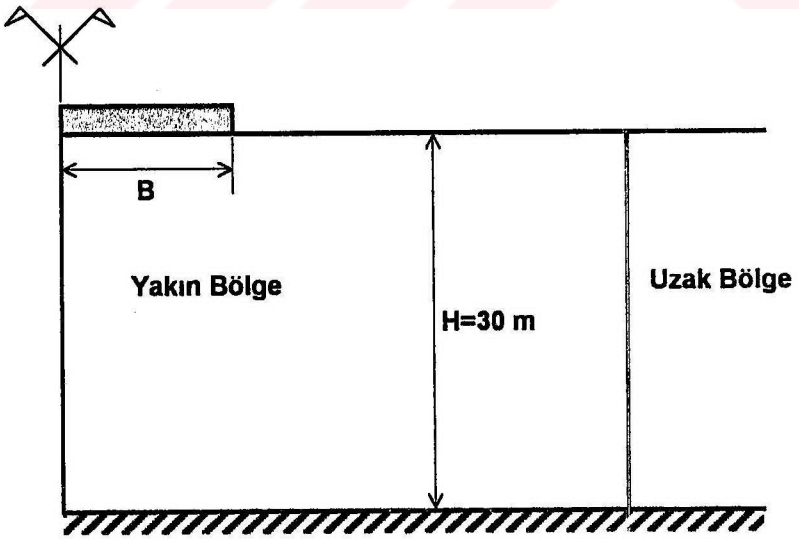


Şekil 4.12. Boyutsuz dönme kompleyansının frekans ile değişimi

Chow (1986) da sonuçlar grafik olarak verilmiştir. Yukarıdaki değerler, bu grafiklerden elde edilmiştir. Görüldüğü üzere, yatay kompleyans sonuçlarının birbirleri ile uyumlu oldukları söylenebilir. Bununla birlikte, dönme kompleyansında, sonuçlar arasında bazı farklılıklar ortaya çıkmıştır. Dönme kompleyansının imajiner kısmı için sonuçlar küçük frekanslarda birbirleri ile uyumlu iken, büyük frekanslarda biraz faklılaşma meydana gelmiştir. Reel kısımda, formlar birbirlerinin benzeri olmasına rağmen kompleyans değerlerinde bazı farklılıklar görülmektedir. Bu farklılıkların, kullanılan üç boyutlu brick elemanın yetersizliği ve eleman sayısının azlığından kaynaklandığı söylenebilir.

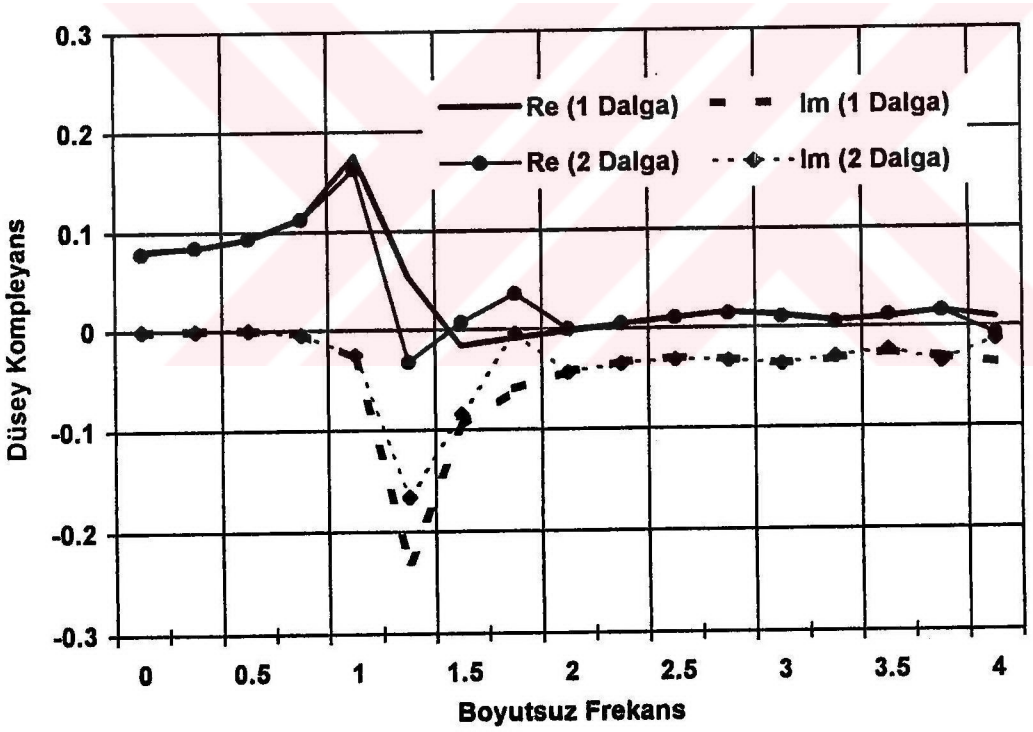
4.4.1.4.(3). Rijit Tabana Oturan Zemin Tabakası Üzerinde Rijit Kare Temel

Tabanı rijit olan elastik bir zemin tabakası üzerinde bulunan kütlesiz, rijit, 2B×2B boyutlu kare bir temele ait düşey kompleyans ve impedans değerleri incelenmektedir. Elastik zemine ait malzeme özellikleri bir önceki örnekte verilenler ile tamamen aynı olup, elastik tabakanın H=30 m kalınlığında olduğu varsayılmıştır. Yine simetriden dolayı dörtte bir bölge gözönüne alınmıştır (Şekil 4.13).

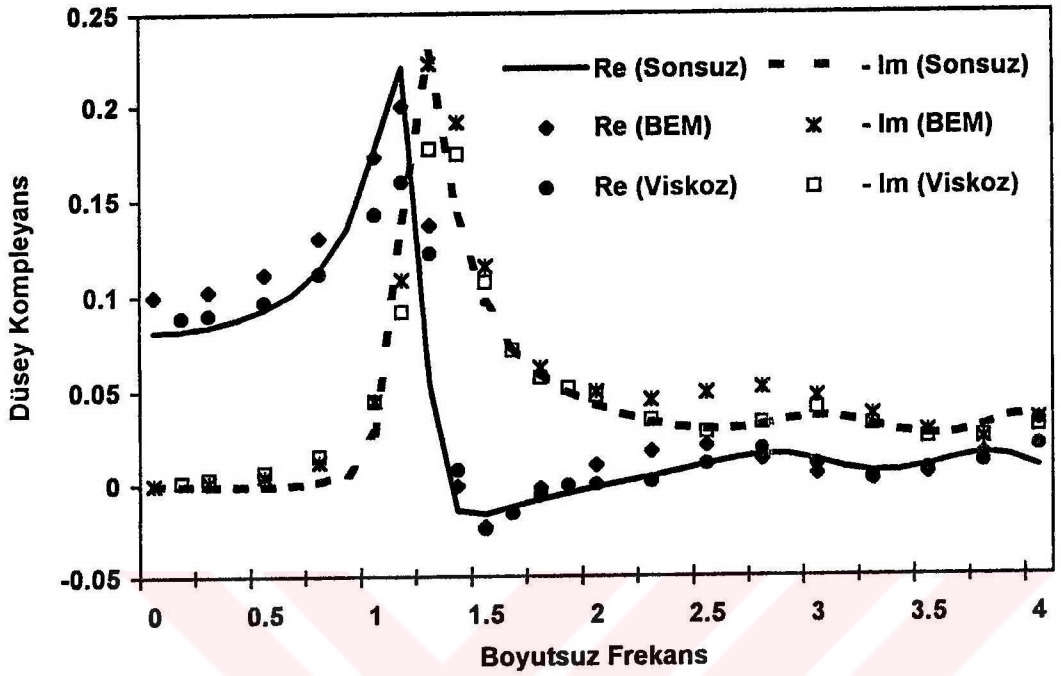


Şekil 4.13. Elastik zemin tabakası üzerinde kare temel (karşıdan görünüş)

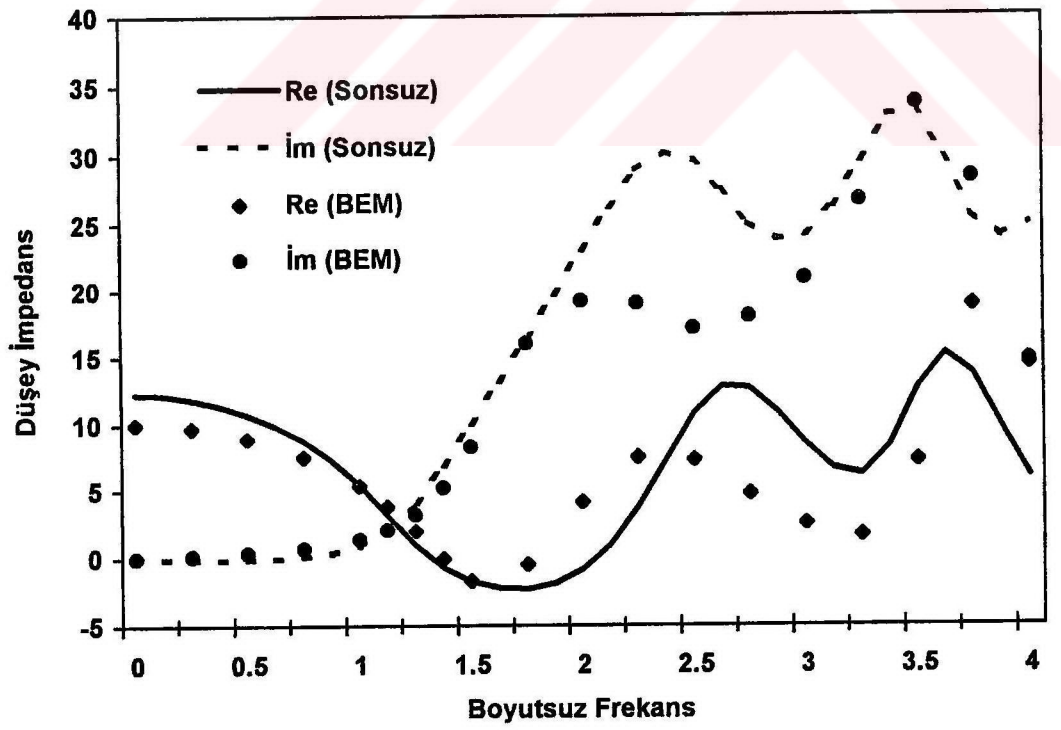
Bir ve iki dalga tipini içeren sonsuz elemanlar kullanılarak düşey kompleyans değerleri elde edilmiştir (Şekil 4.14). Şekildende görüldüğü üzere sonuçlar birbirleri ile oldukça yakındır. Bu nedenle, yapılan karşılaştırmalarda bir dalga tipini içeren sonsuz eleman ile bulunan sonuçlar kullanılmaktadır. Bu örnek ayrıca, Mengi ve ark (1994) tarafından hazırlanan sınır eleman metoduna dayalı programı kullanılarak çözülmüştür. Bunlara ilaveten, sonlu-sonsuz eleman modelinde sonsuz elemanlar atılıp (sadece yakın bölge gözönüne alınarak), viskoz sınır şartları kullanılarak çözüm yapılmış olup, elde edilen sonuçlar Şekil 4.15 ve Şekil 4.16 da verilmektedir (Mengi ve Tanrıkulu, 1993).



Şekil 4.14. Boyutsuz düşey kompleyansın frekansla değişimi



Şekil 4.15. Boyutsuz düşey kompleyansın karşılaştırılması



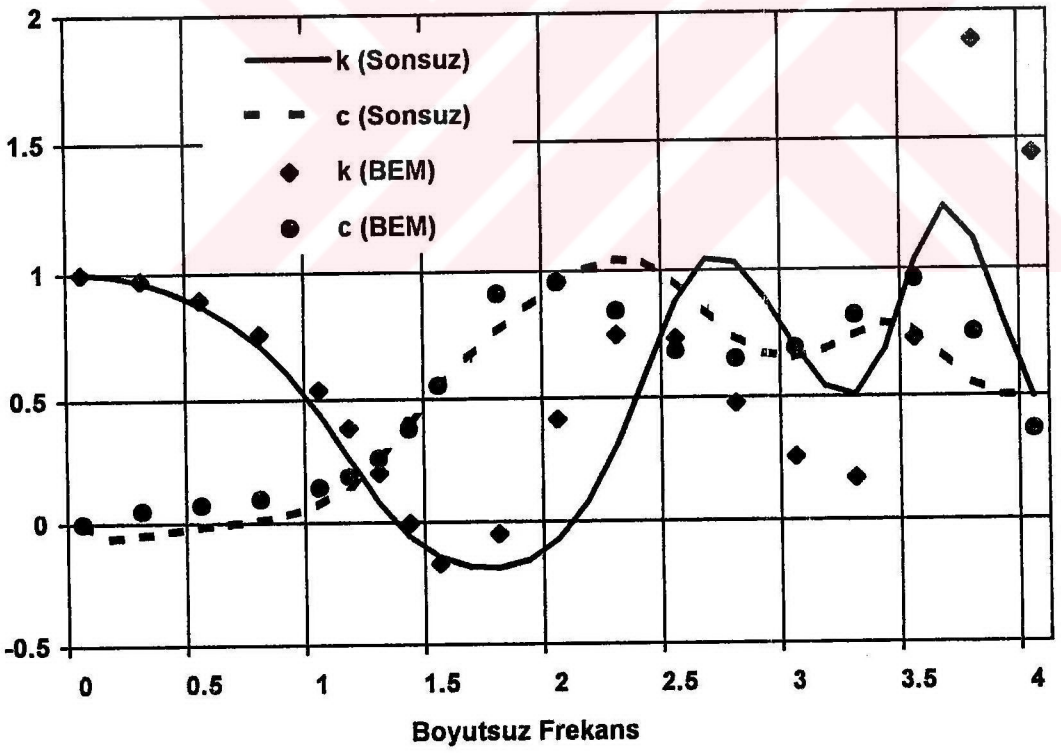
Şekil 4.16. Boyutsuz düşey impedansın karşılaştırılması

Grafikte görülen, sonlu-sonsuz eleman modeli ile bulunan boyutsuz impedans değerleri, kompleyans değerlerinin tersi alınarak hesaplanmıştır. Sınır eleman metodunda ise bu değer direkt olarak hesaplanabilmektedir.

Boyutsuz düşey impedans değerinin,

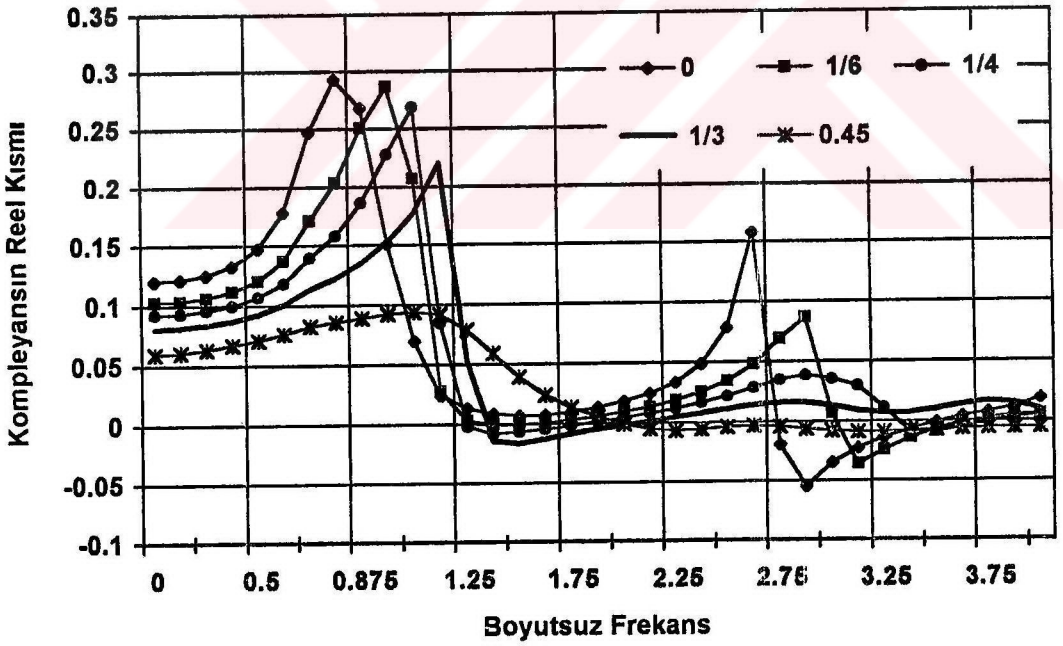
$$\overline{K}_{VV} = \overline{K}_S \, (k + i \, a_0 c) \tag{4.86}$$

şeklinde olduğu düşünülerek k-a_0 ve c-a_0 ilişkileri de incelenmiştir. Yukarıda görülen $\overline{K}_S$ boyutsuz statik impedans değerini temsil etmektedir. Aşağıdaki grafikten, sonlu-sonsuz eleman modeli ile bulunan sonuçların, sınır eleman metodu formülasyonu ile bulunan sonuçlarla, küçük frekanslar için uyumlu olduğu görülmektedir (Şekil 4.17).

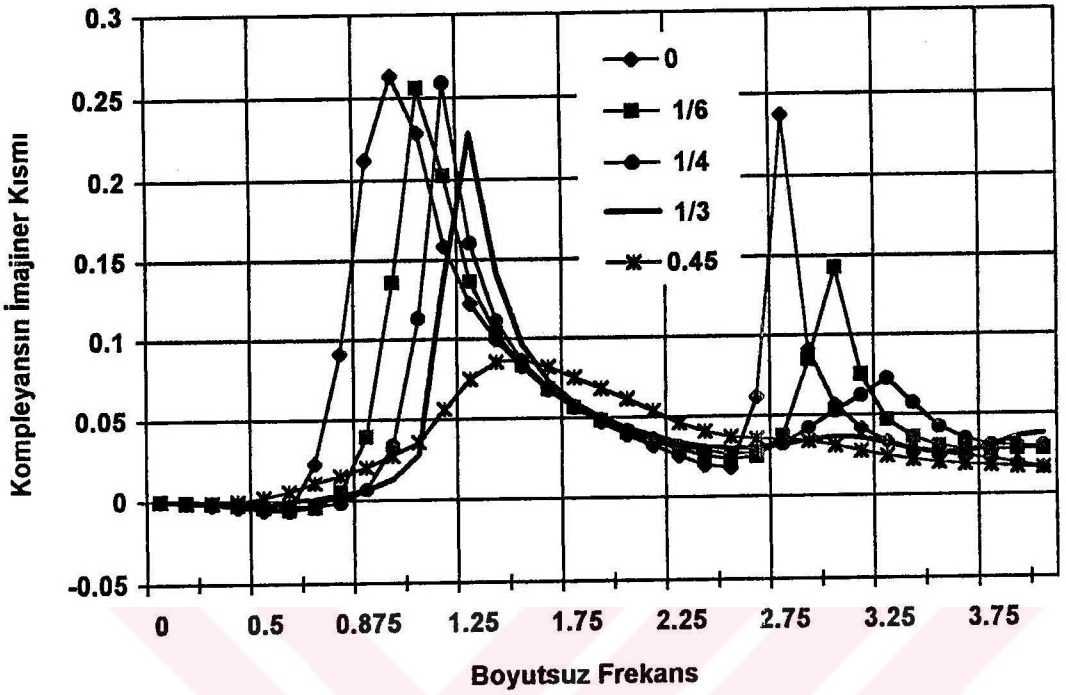


Şekil 4.17. k ve c değerlerinin frekansla değişimi

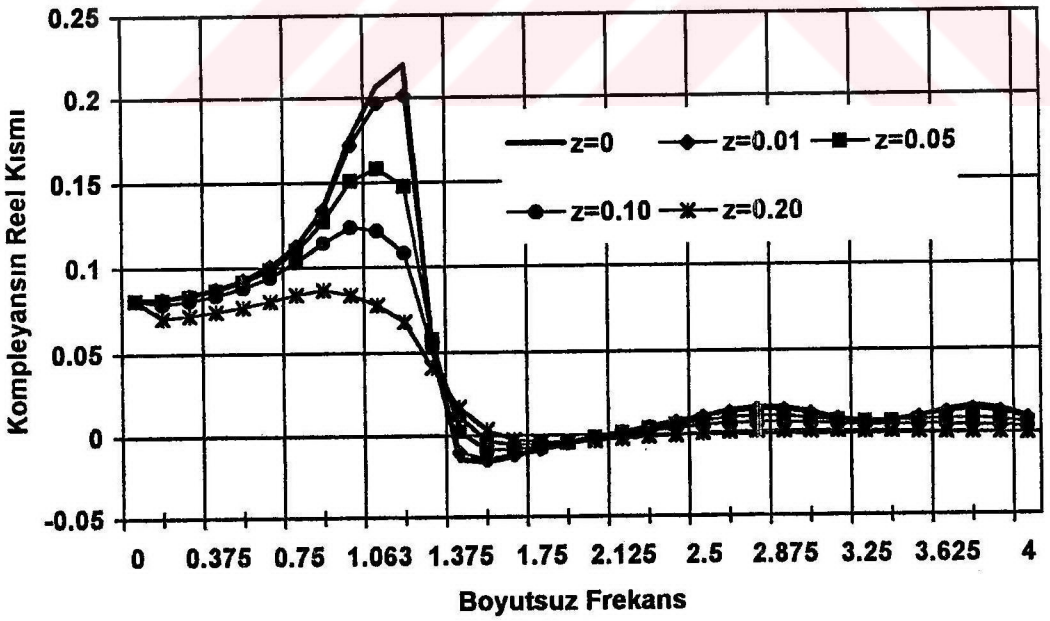
Bu karşılaştırmalara ilave olarak, sadece sonlu-sonsuz eleman modeli kullanılarak boyutsuz düşey kompleyans değerinin, Poisson oranı ve histeretik sönüm oranı ile nasıl değiştiği incelenmiştir. İlk olarak Poisson oranı ile değişim incelenirken, sistemin elastik olduğu (z=0) varsayılmış ve Poisson oranının, ν=0, 1/6, 1/4, 1/3 ve 0.45 değerleri için düşey kompleyansın boyutsuz frekansla değişimi bulunmuştur (Şekil 4.18 ve Şekil 4.19). Sönüm ile değişim incelenirken Poisson oranı ν=1/3 kabul edilerek histeretik sönümün z=0, 0.01, 0.05, 0.10 ve 0.20 değerleri için düşey kompleyansın frekansla değişimi incelenmiştir (Şekil 4.20 ve Şekil 4.21). Beklendiği gibi, sönüm arttıkça kompleyansın değerinde azalmalar meydana geldiği görülmektedir.



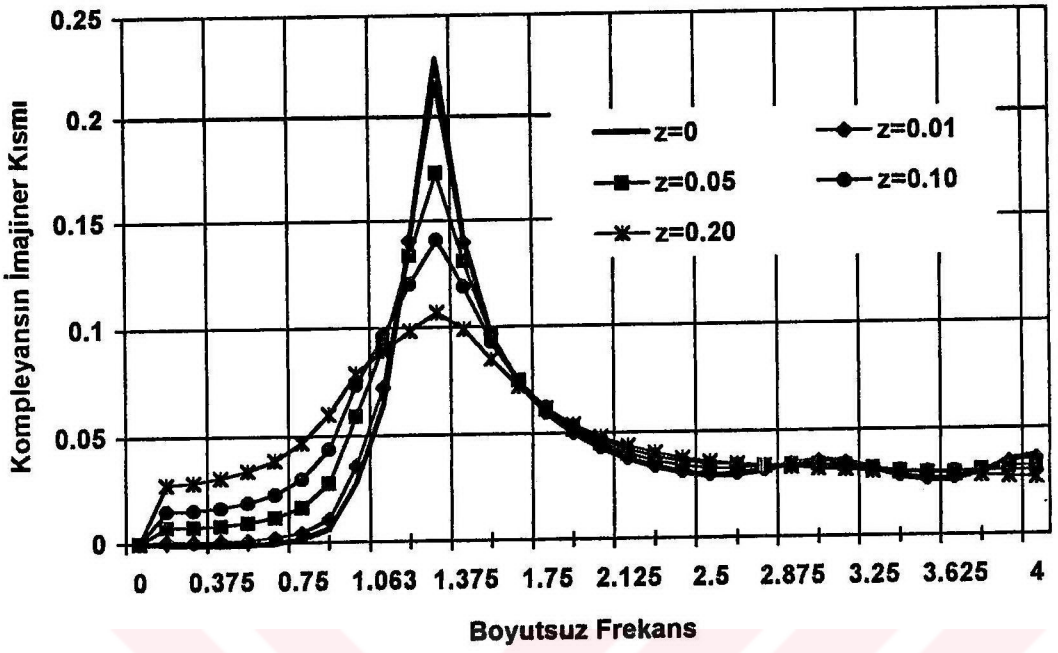
Şekil 4.18. Düşey kompleyansın reel kısmının Poisson oranı ile değişimi



Şekil 4.19. Düşey kompleyansın imajiner kısmının Poisson oranı ile değişimi



Şekil 4.20. Düşey kompleyansın reel kısmının sönüm ile değişimi

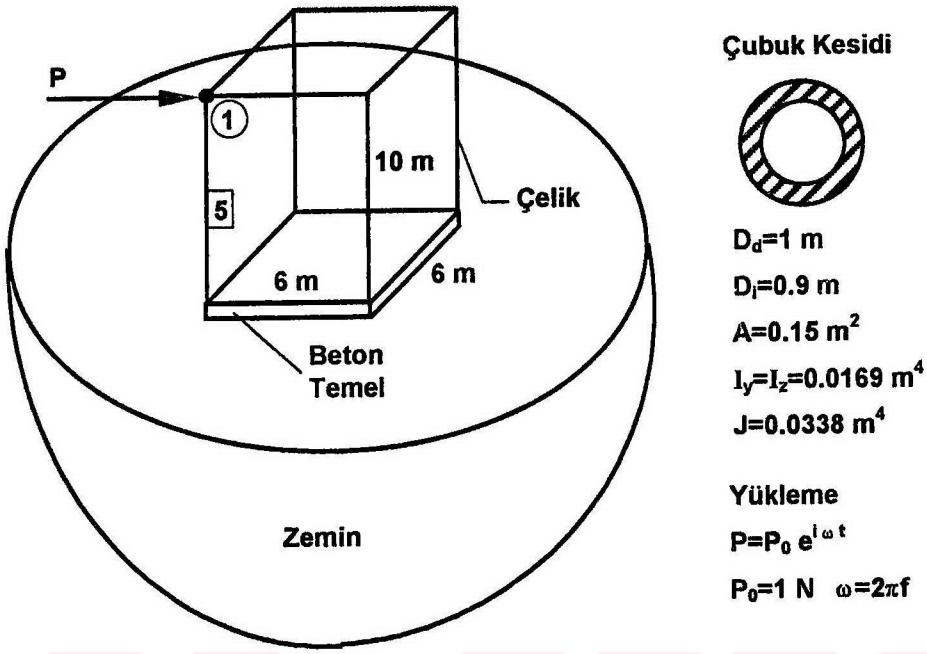


Şekil 4.21. Düşey kompleyansın imajiner kısmının sönüm ile değişimi

4.4.1.4.(4). Yarı Sonsuz Elastik Zemin Üzerinde Tek Katlı Çerçeve

Problem aşağıda görülen, elastik yarı sonsuz zemin üzerine oturan tek katlı çerçeve sisteminden oluşmaktadır (Şekil 4.22). Sisteme ait malzeme özellikleri aşağıda görülmektedir:

Çelik	Beton	Zemin
$E_ç=21\times10^{10}$ N/m^2 $\rho_ç=7800$ kg/m^3 $\nu_ç=0.30$	$E_b=2\times10^{10}$ N/m^2 $\rho_b=2400$ kg/m^3 $\nu_b=0.15$ t=0.5 m	$E_{z1}=2\times10^{8}$ N/m^2 $E_{z2}=4\times10^{8}$ N/m^2 $E_{z3}=8\times10^{8}$ N/m^2 $\rho_z=2000$ kg/m^3 $\nu_z=0.30$ $\alpha=2.07$

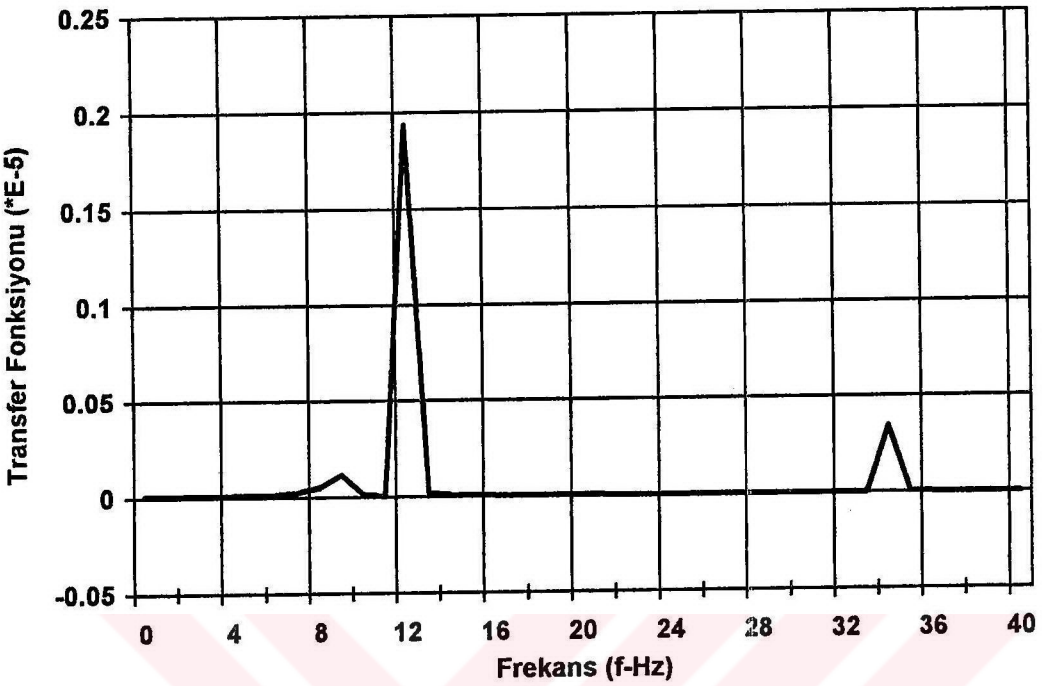


Şekil 4.22. Elastik zemin üzerinde tek katlı çerçeve

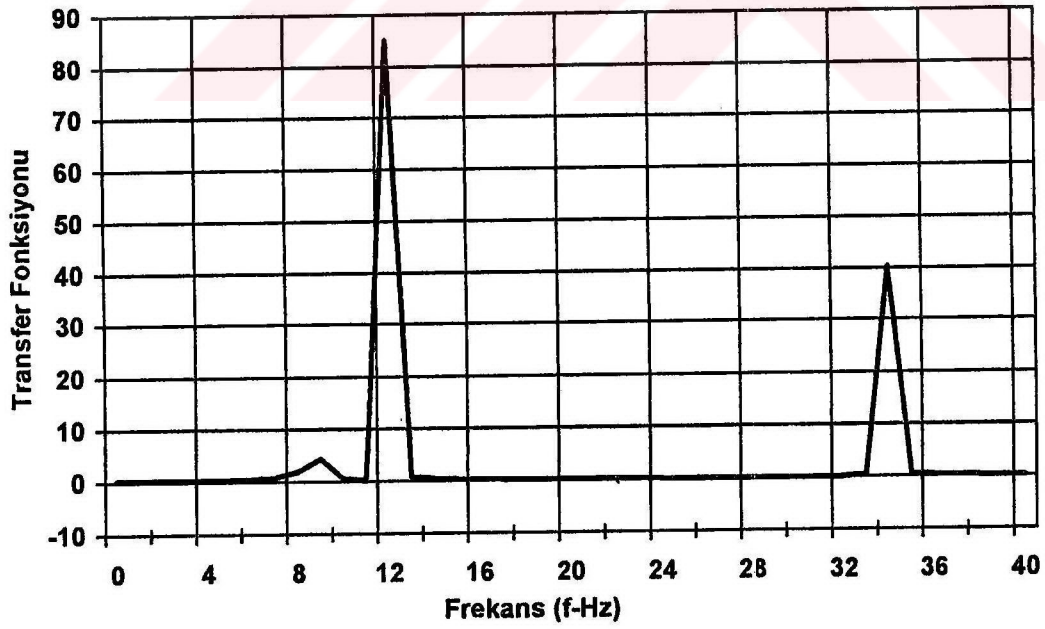
Problemde, yapı-zemin etkileşim sistemine ait transfer fonksiyonlarının analizi yapılmaktadır. Sistemin herhangi bir noktasındaki davranışın (deplasman veya uç kuvveti), dıştan etkiyen harmonik yüklemeye,

$$u = T_d\, P \qquad [T_d] = \frac{L}{F}$$
$$F = T_k\, P \qquad [T_k] = \text{Boyutsuz} \tag{4.87}$$

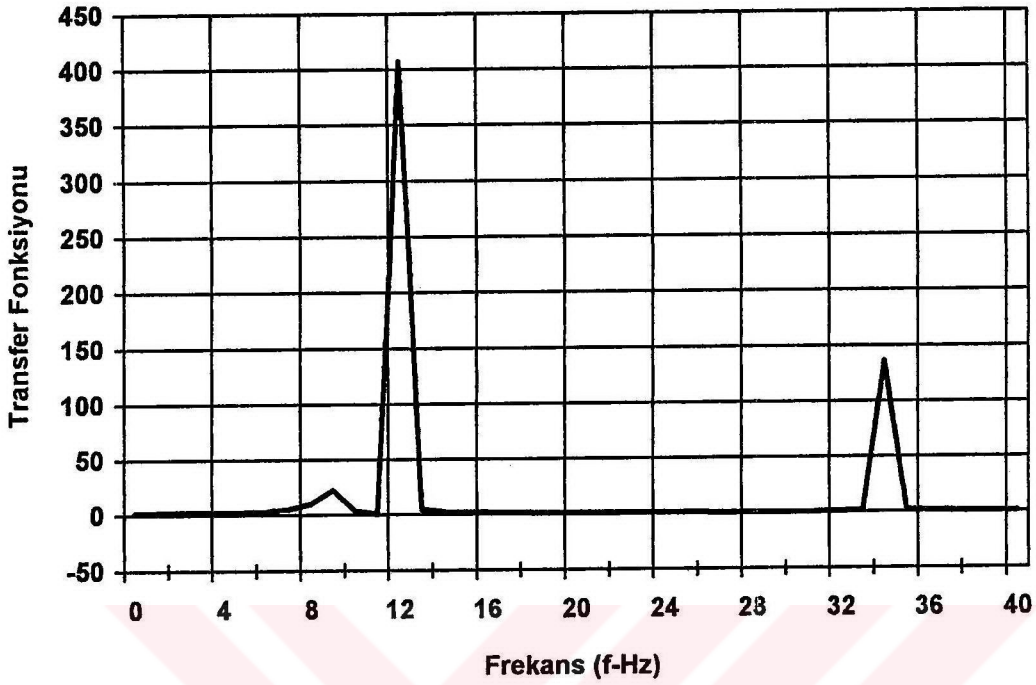
şeklinde bağlı olduğu kabul edilmektedir. Burada, P dıştan etkiyen yükü göstermekte olup, T_d ve T_k ise sırasıyla deplasman ve kuvvet transfer fonksiyonu olarak adlandırılmaktadır. Problemde T_d ve T_k transfer fonksiyonlarının frekansla değişimi incelenmektedir. Öncelikle, sadece üst yapı gözönüne alınıp, zeminle birleştiği yerde ankastre (veya $E_z=\infty$) düşünülerek, şekilde görülen 1 numaralı düğüme ait T_d yatay deplasman (u) transfer fonksiyonu ve 5 numaralı elemanın ankastre uçtaki kesme kuvveti (F_y) ve eğilme momenti (M_z) transfer fonksiyonları bulunmuştur.



Şekil 4.23. Deplasman transfer fonksiyonu



Şekil 4.24. Kesme kuvveti transfer fonksiyonu



Şekil 4.25. Eğilme momenti transfer fonksiyonu

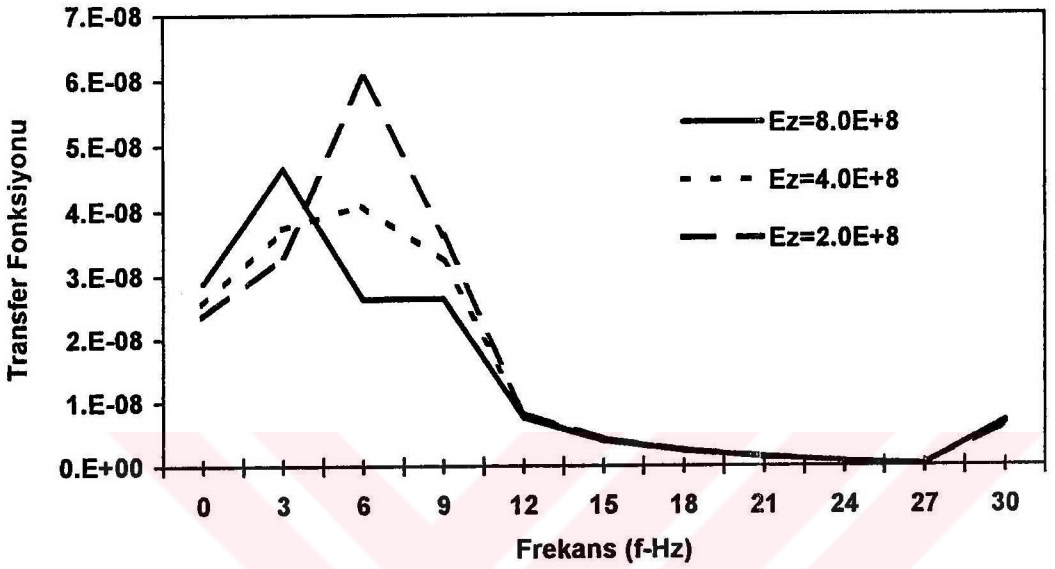
ANSYS paket programı kullanılarak, sadece üst yapının serbest titreşim frekansları bulunmuş olup, ilk dördü Çizelge 4.1 de verilmektedir. Yukarıdaki grafiklerden görüldüğü üzere, deplasman ve kuvvet transfer fonksiyonlarının, serbest titreşim frekanslarına rastladıkları noktalarda, beklendiği gibi rezonans durumu ortaya çıkmıştır.

Çizelge 4.1. Çerçevenin serbest titreşim frekansları

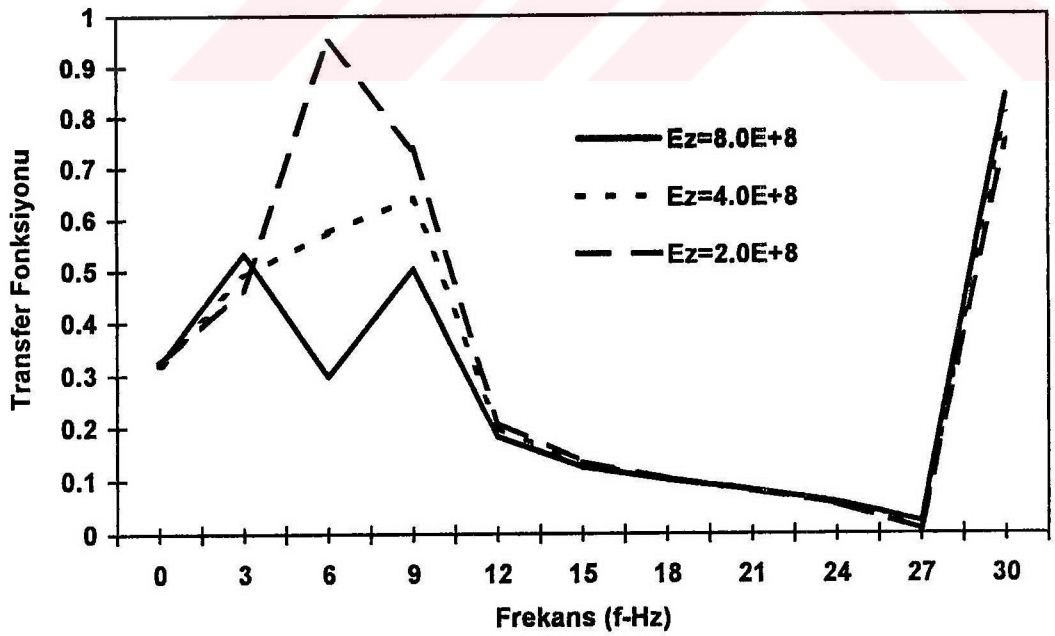
Mod	Frekans, f (Hz)
1	8.7274
2	8.7274
3	11.9672
4	33.8664

Benzer incelemeler bir kezde zeminin mevcudiyeti gözönüne alınarak gerçekleştirilmiştir. Bu durumda, zemin için üç değişik elastisite modülü gözönüne alınmıştır. 1 numaralı düğümün yatay deplasman transfer fonksiyonu (T_d) ile 5

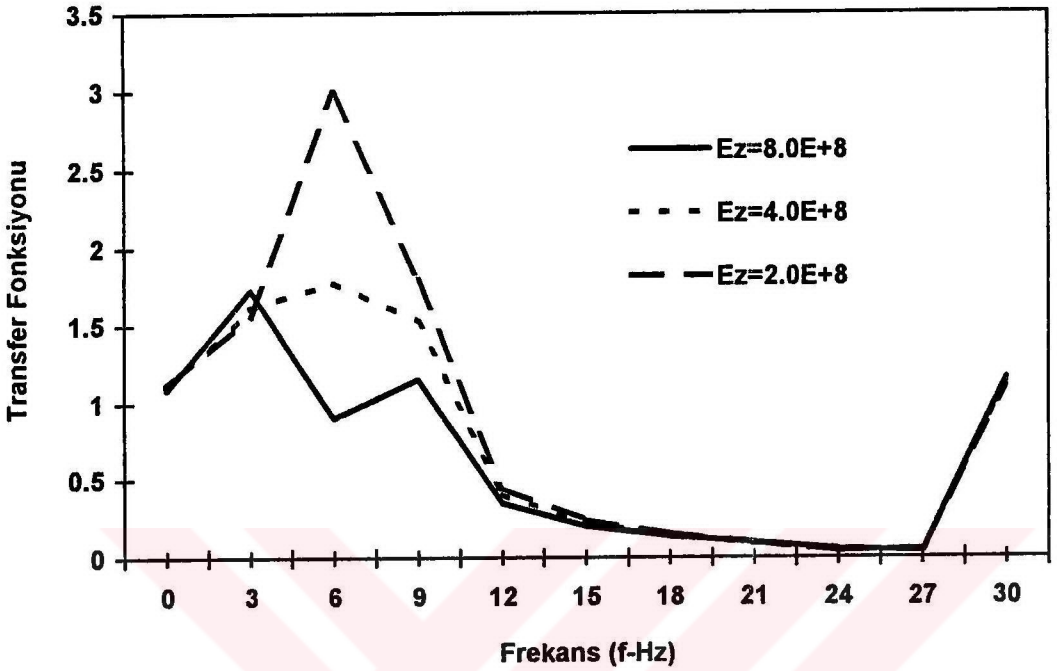
numaralı elemanın alt ucundaki kesme kuvveti (F_y) ve eğilme momenti (M_z) kuvvet transfer fonksiyonlarının frekansla değişimi incelenmiş olup, sonuçlar Şekil 4.26-28 de görülmektedir.



Şekil 4.26. Deplasman transfer fonksiyonunun zemin rijitliğiyle değişimi



Şekil 4.27. Kesme kuvveti transfer fonksiyonunun zemin rijitliğiyle değişimi

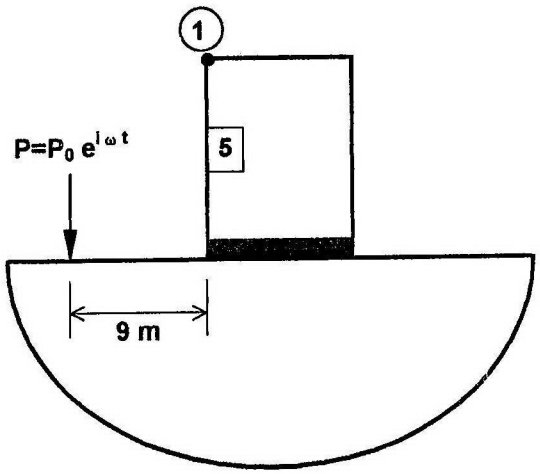


Şekil 4.28. Eğilme momenti transfer fonksiyonunun zemin rijitliğiyle değişimi

Zemin sertleştikçe genlik değerleri küçük frekanslarda düşmekte, frekans büyüdükçe zemin rijitliğinin artması davranışta belirgin bir değişiklik meydana getirmemektedir.

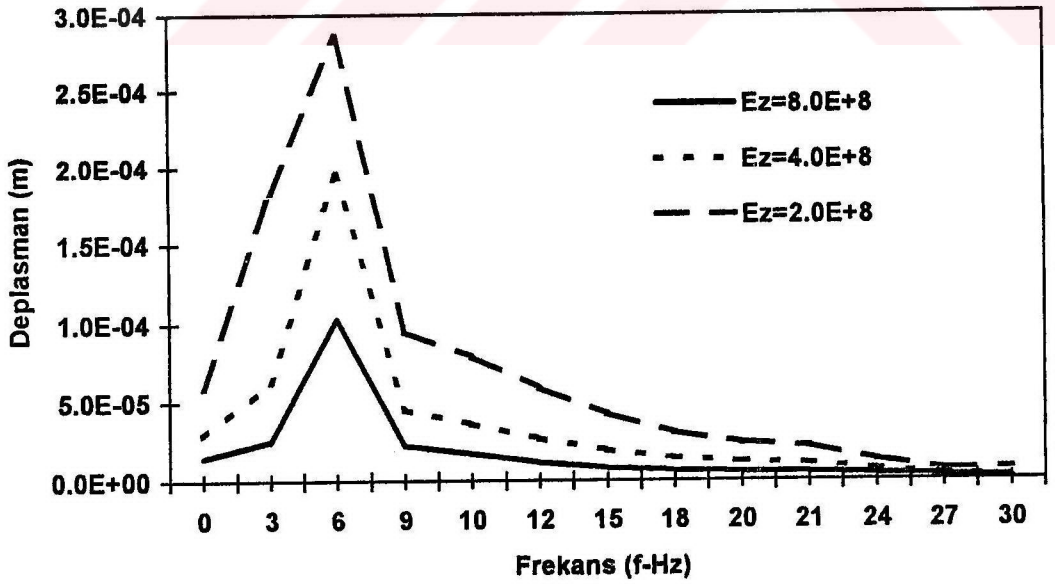
4.4.1.4.(5). Zemin Üzerindeki Tekil Yükten Dolayı Yapı-Zemin Etkileşimi

Problem bir önceki sistemin tamamen aynısı olup, sadece yükleme yapı yerine zemin üzerine etkimektedir (Şekil 4.29). Malzeme, kesit ve geometri özellikleri bir önceki problemde kullanılanlar ile aynı olup, harmonik yüklemenin genliği P_0=500 kN olarak seçilmiştir.

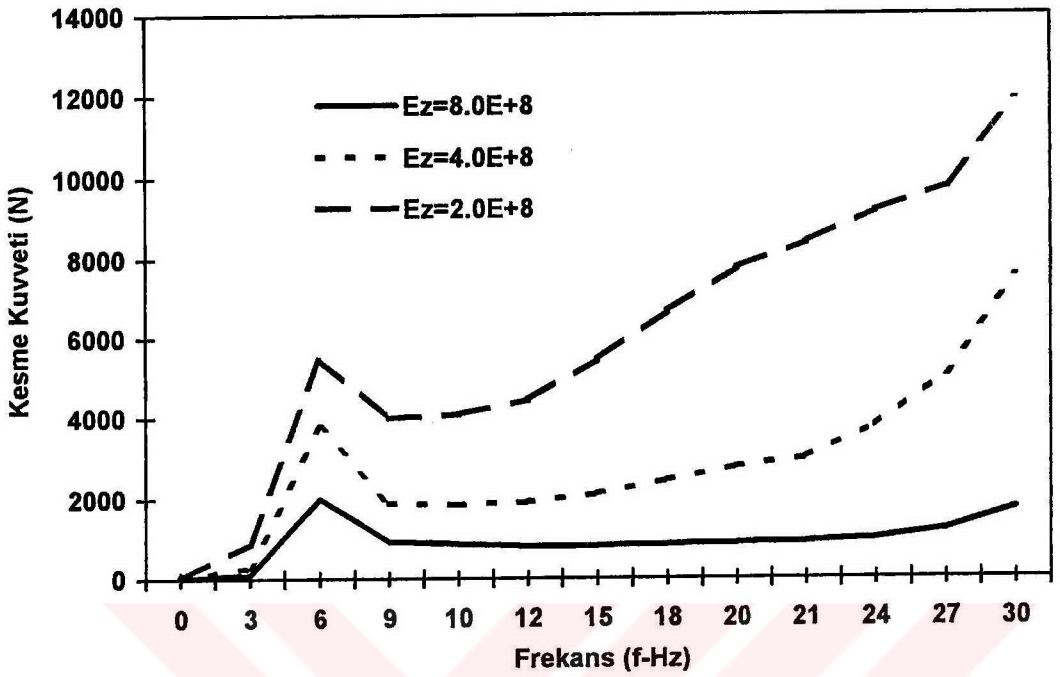


Şekil 4.29. Elastik zemin üzerinde tek katlı çerçeve (karşıdan görünüş)

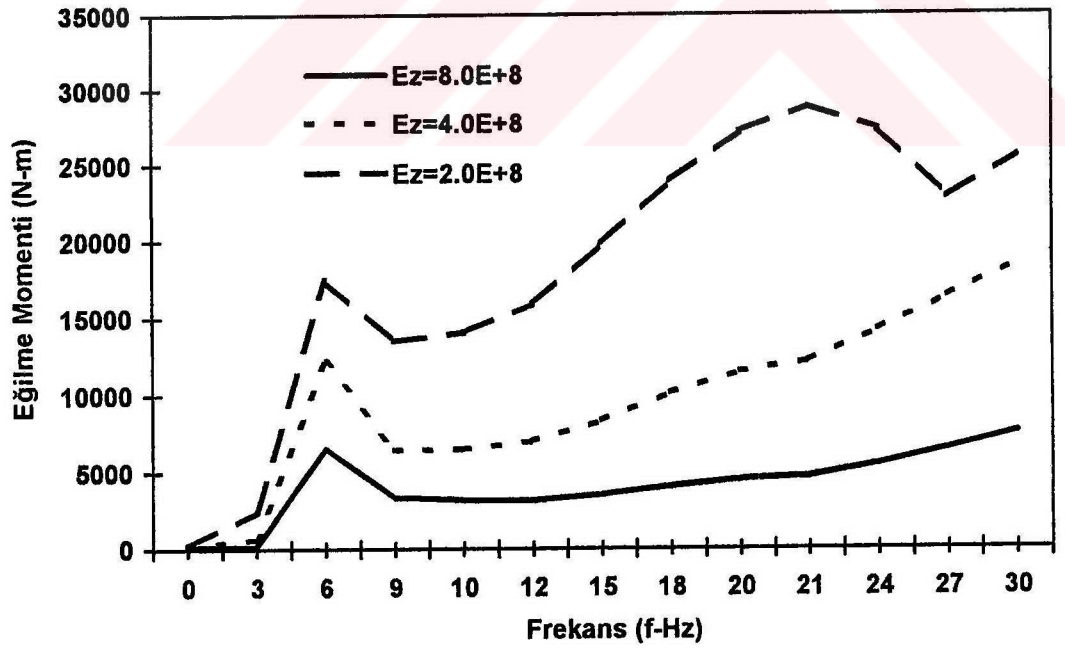
Bu problemde, zeminin üç değişik elastisite modülü için, 1 numaralı düğümün yatay deplasmanı (u) ile 5 numaralı elemanın tabanındaki kesme kuvveti (F_y) ve eğilme momentinin (M_z) frekansla değişimi incelenmektedir. Deplasman ve uç kuvvetlerinin genliklerinin frekans ile değişimleri Şekil 4.30-32 de verilmektedir. Görüldüğü üzere, zemin sertleştikçe yapıda meydana gelen deplasman ve uç kuvvetlerinin genliklerinin azaldığı sonucu ortaya çıkmıştır.



Şekil 4.30. Yatay deplasmanın frekansla değişimi



Şekil 4.31. Kesme kuvvetinin frekansla değişimi



Şekil 4.32. Eğilme Momentinin frekansla değişimi

4.4.2. Zamanla Keyfi Değişen (Transient) Yükleme Durumu

Zamanla keyfi olarak değişen dinamik yükleme durumunda formülasyonun tamamı, iki boyutlu halde olduğu gibi Laplace dönüşüm uzayında yapılmaktadır. Laplace dönüşüm uzayında sistem hareket denklemi, viskoelastik malzemelerin de gözönüne alınabilmesi için,

$$\left((1+gs)\left[\overline{K}\right]+s^2\left[\overline{M}\right]\right)\left\{\overline{U}_d\right\}=\left\{\overline{P}(s)\right\} \tag{4.88}$$

formunda yazılabilir. Laplace dönüşüm uzayında elde edilen bu kompleks katsayılı, lineer cebrik denklem, bir dizi s parametresi için çözülerek davranış bulunmaktadır. Daha sonra ters Laplace dönüşüm alınarak, zaman uzayında aranan büyüklükler hesap edilmektedir.

Bu tip yükleme durumunda da kaynaktan uzak bölgeler çeşitli tipteki sonsuz elemanlar kullanılarak modellenmektedir.

4.4.2.1. Tek Dalga Tipini İçeren Sonsuz Eleman

Tek dalganın özelliğini gözönüne alabilen transient sonsuz eleman için, harmonik yükleme durumunda bahsedilen model, iki boyuttaki duruma benzer şekilde modifiye edilerek kullanılmaktadır (Şekil 4.6). Burada da gerçek eleman ile referans elemanı arasındaki geometrik dönüşüm (4.63) ve (4.64) bağıntılarında verildiği gibidir. Deplasmanların dönüşümü ise,

$$\overline{u}=\sum_{i=1}^{4}\overline{N}_i\,\overline{u}_i \qquad \overline{v}=\sum_{i=1}^{4}\overline{N}_i\,\overline{v}_i \qquad \overline{w}=\sum_{i=1}^{4}\overline{N}_i\,\overline{w}_i \tag{4.89}$$

şeklinde tariflenmektedir. Yukarıdaki ifadede görülen, $\overline{N}_i$ interpolasyon şekil fonksiyonları olup, Laplace dönüşüm parametresine bağlı olarak,

$$\begin{aligned}
\bar{N}_1 &= \bar{P}(\xi,s)\left[\frac{1}{4}(1+\eta)(1+\zeta)\right] \\
\bar{N}_2 &= \bar{P}(\xi,s)\left[\frac{1}{4}(1+\eta)(1-\zeta)\right] \\
\bar{N}_3 &= \bar{P}(\xi,s)\left[\frac{1}{4}(1-\eta)(1-\zeta)\right] \\
\bar{N}_4 &= \bar{P}(\xi,s)\left[\frac{1}{4}(1-\eta)(1+\zeta)\right]
\end{aligned} \tag{4.90}$$

şeklinde seçilmiştir. Burada $\bar{P}(\xi,s)$ Laplace dönüşüm uzayında deplasman yayılma fonksiyonu olup, aşağıdaki formda olduğu kabul edilmiştir.

$$\bar{P}(\xi,s) = e^{-(\alpha+\beta)\xi} \qquad \beta = \frac{s}{c} L \tag{4.91}$$

Bu deplasman yayılma fonksiyonu kullanılarak, Laplace dönüşüm uzayında eleman rijitlik ve kütle matrisleri (4.72) ve (4.75) ifadelerinde verildiği formda elde edilmektedir. Bu integral ifadeler, sonlu yönde Gauss-Legendre, sonsuz yönde ise Newton-Cotes sayısal integrasyon yöntemi ile hesaplanmaktadır.

4.4.2.2. İki Dalga Tipini İçeren Sonsuz Eleman

Burada, tek dalgalı sonsuz eleman için kullanılan sekiz düğümlü sonsuz eleman modeli kullanılmaktadır (Şekil 4.6). Geometrik dönüşüm (4.63) ve (4.64) bağıntıları yardımıyla hesaplanırken, deplasmanların dönüşümü,

$$\bar{u} = \sum_{i=1}^{8} \bar{N}_i \bar{u}_i \qquad \bar{v} = \sum_{i=1}^{8} \bar{N}_i \bar{v}_i \qquad \bar{w} = \sum_{i=1}^{8} \bar{N}_i \bar{w}_i \tag{4.92}$$

şeklinde seçilmektedir. İnterpolasyon şekil fonksiyonları harmonik sonsuz elemana benzer olarak,

$$\begin{aligned}
\overline{N}_i &= \overline{P}_i(\xi,s)\left[\frac{1}{4}(1+\eta)(1+\zeta)\right] \quad i=1,5 \\
\overline{N}_i &= \overline{P}_i(\xi,s)\left[\frac{1}{4}(1+\eta)(1-\zeta)\right] \quad i=2,6 \\
\overline{N}_i &= \overline{P}_i(\xi,s)\left[\frac{1}{4}(1-\eta)(1-\zeta)\right] \quad i=3,7 \\
\overline{N}_i &= \overline{P}_i(\xi,s)\left[\frac{1}{4}(1-\eta)(1+\zeta)\right] \quad i=4,8
\end{aligned} \tag{4.93}$$

formunda seçilmektedir. İki dalga tipini içeren deplasman yayılma fonksiyonu Laplace dönüşüm uzayında,

$$\begin{aligned}
\overline{P}(\xi,s) &= a\,e^{-(\alpha+\beta_1)\xi} + b\,e^{-(\alpha+\beta_2)\xi} \\
\beta_k &= \frac{s}{c_k} L
\end{aligned} \tag{4.94}$$

bağıntısıyla verilmektedir. (4.94) eşitliğinde görülen a ve b katsayılarının bulunuşu, harmonik haldekinin aynısı olup, sonuçta deplasman yayılma fonksiyonları (4.79) ifadelerinde verildiği gibi elde edilmiştir. Burada dikkat edilmesi gereken husus, (4.79) ifadesinde görülen β_k sayıları için (4.94) te verilen tariflerinin kullanılmasıdır. Daha sonra, sayısal olarak eleman rijitlik ve kütle matrisleri hesaplanmaktadır.

4.4.2.3. Üç Dalga Tipini İçeren Sonsuz Eleman

Bu tip eleman için, harmonik halde olduğu gibi 12 düğümlü sonsuz eleman modeli kullanılmıştır (Şekil 4.7). Bu elemanda deplasmanların dönüşümü için,

$$\bar{u}=\sum_{i=1}^{12}\bar{N}_i\,\bar{u}_i \qquad \bar{v}=\sum_{i=1}^{12}\bar{N}_i\,\bar{v}_i \qquad \bar{w}=\sum_{i=1}^{12}\bar{N}_i\,\bar{w}_i \tag{4.95}$$

şeklinde elemanın tüm düğümleri kullanılarak interpolasyon yapılmaktadır. (4.95) te görülen şekil fonksiyonları,

$$\begin{aligned}
\bar{N}_i &= \bar{P}_i(\xi,s)\left[\frac{1}{4}(1+\eta)(1+\zeta)\right] \quad i=1,5,9\\
\bar{N}_i &= \bar{P}_i(\xi,s)\left[\frac{1}{4}(1+\eta)(1-\zeta)\right] \quad i=2,6,10\\
\bar{N}_i &= \bar{P}_i(\xi,s)\left[\frac{1}{4}(1-\eta)(1-\zeta)\right] \quad i=3,7,11\\
\bar{N}_i &= \bar{P}_i(\xi,s)\left[\frac{1}{4}(1-\eta)(1+\zeta)\right] \quad i=4,8,12
\end{aligned} \tag{4.96}$$

şeklindedir. Deplasman yayılma fonksiyonları,

$$\begin{aligned}
\bar{P}(\xi,s) &= a\,e^{-(\alpha+\beta_1)\xi}+b\,e^{-(\alpha+\beta_2)\xi}+c\,e^{-(\alpha+\beta_3)\xi}\\
\beta_k &= \frac{s}{c_k}L
\end{aligned} \tag{4.97}$$

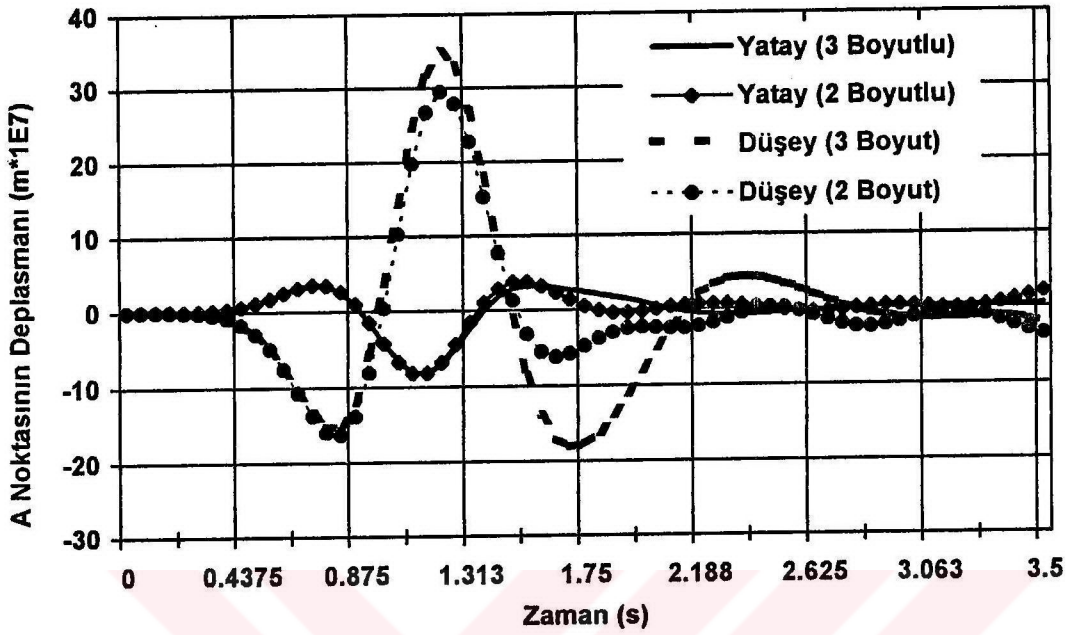
formunda seçilmektedir. (4.97) de görülen a, b ve c katsayılarının hesabı, harmonik yükleme durumunda olduğu gibidir. Deplasman yayılma fonksiyonları (4.83) ifadesinde verildiği formda elde edilmektedir. (4.96) daki interpolasyon şekil fonksiyonları kullanılarak eleman rijitlik ve kütle matrisleri, (4.84) bağıntısında verilen formda elde edilmektedir. Bu ifadeler, sayısal integrasyon yöntemleri kullanılarak hesaplanabilmektedir.

4.4.2.4. Keyfi Dinamik Yükleme Durumunda Sayısal Uygulamalar

Zamanla keyfi olarak değişen dinamik yükleme etkisindeki üç boyutlu yapı-zemin etkileşimi problemleri gözönüne alınırken ilk amaç, tezde önerilen sonsuz eleman modelinin kontrolünün yapılmasıdır. Bu nedenle öncelikle, alternatif metodlarla çözülmüş ve sonucu bilinen örnekler ele alınmıştır. Bu örnekler çözülürken FORTRAN77 dilinde hazırlanmış bilgisayar programları kullanılmıştır. Fakat, harmonik yükleme durumunda bahsedilen zorluklar nedeniyle, formülasyonun anlatılmasına rağmen, üç dalganın mevcudiyetini içeren sonsuz eleman modeli programlanmamıştır. Bununla birlikte, iki dalga tipini içeren sonsuz elemanlar ile yapılan çözümlerle, tek dalga tipini içeren sonsuz eleman çözümleri arasında belirgin bir iyileşme görülmemistir. Bu nedenle, ele alınan problemlerin çoğunda tek dalga tipini içeren sonsuz eleman modeli kullanılmıştır. Hazırlanan bilgisayar programlarında eleman matrisleri sayısal olarak, sonlu yönde 2 noktalı Gauss-Legendre, sonsuz yönde 12 noktalı Newton-Cotes integrasyon yöntemleri kullanılarak hesaplanmaktadır.

4.4.2.4.(1). Elastik Yarı Sonsuz Zemin Üzerinde Tekil Yük

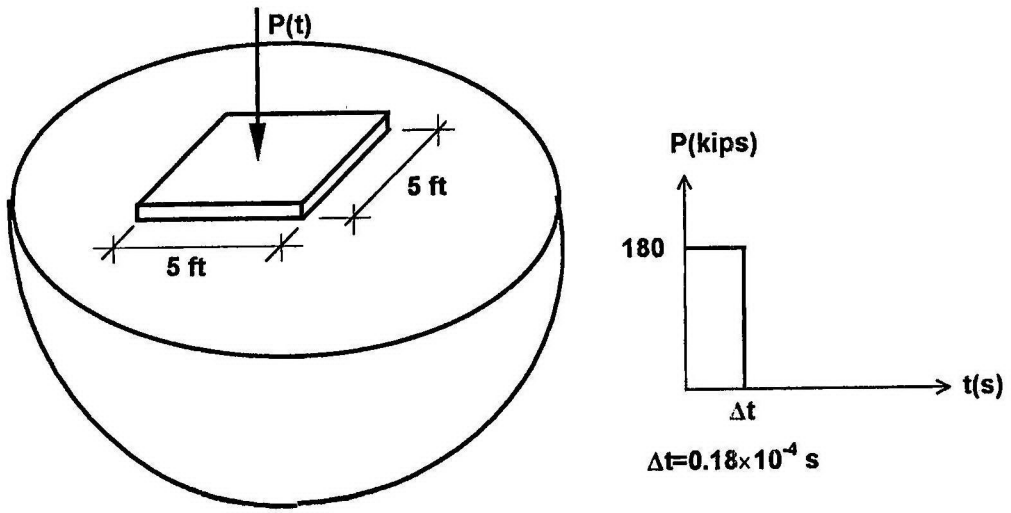
Bu örnek, bölüm 3.3.3.5.(5) te çözülen düzlem şekil değiştirme problemi olup, burada bu özelliği kullanılmadan 1 m genişlikteki yarı sonsuz zemin problemi gibi ele alınmıştır. Problemin geometrisi ve yüklemesi (Ricker Wavelet) Şekil 3.42 ve Şekil 3.43 te görülmektedir. Burada, sadece düşey yükleme durumu gözönüne alınarak, A noktasının yatay ve düşey deplasmanının zamanla değişimi üç boyutlu olarak hesaplanmaktadır. Üç boyutlu sonlu-sonsuz eleman modeliyle bulunan sonuçlar ile iki boyutlu sonlu-sonsuz eleman modeliyle bulunan sonuçlar Şekil 4.33 te görülmektedir. Sonuçların birbirleri ile uyumlu olduğu gözlenmektedir.



Şekil 4.33. A noktasının yatay ve düşey deplasmanı

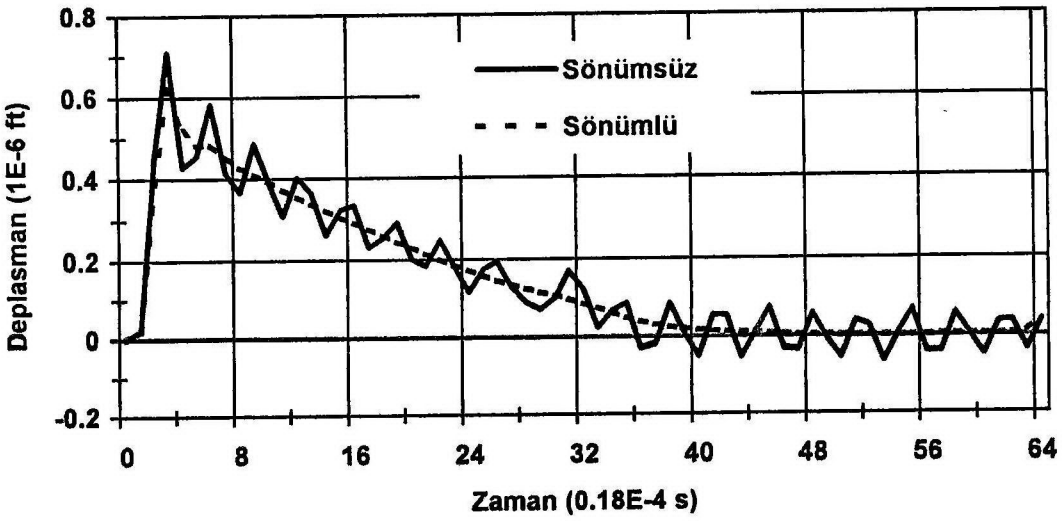
4.4.2.4.(2). Elastik Zemin Üzerinde Rijit, Kütlesiz Kare Temel

Elastik yarı sonsuz zemin üzerinde bulunan kütlesiz, rijit bir kare temel ani dikdörtgen tipi dinamik düşey yüklemeye maruz bırakılmıştır (Şekil 4.34). Bu örnek daha önceden Karabalis ve Beskos (1984) tarafından çözülmüş olup zemine ait malzeme özellikleri ve yükleme oradan alınmıştır. Burada, elastik zeminin malzeme özellikleri, $E=2.58984\times10^{9}$ lb/ft^2, $\nu=$ 1/3 ve $\rho=10.368$ lb-s^2/ft^4 olarak kullanılmaktadır. Sistemin geometrisi ve yüklemesi aşağıdaki şekilde görülmektedir. Bu yüklemenin etkisinde, temelin altındaki noktanın düşey deplasmanının zamanla değişimi incelenmektedir. Sistemin ve yüklemenin simetri özelliğinden dolayı dörtte bir bölge, 1000 adet sonlu ve 300 adet sonsuz eleman ile modellenmiştir. Sonsuz elemanlarda deplasman azaltma parametresi $\alpha=0.69$ seçilmiştir. Direkt ve ters Laplace dönüşümleri için aT=6 olarak seçilmiştir.



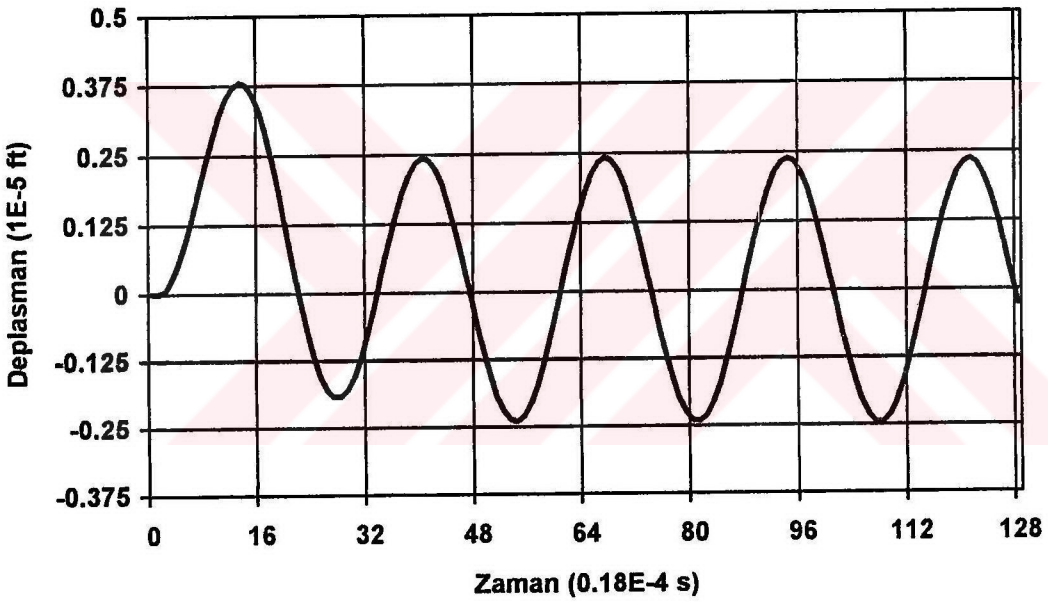
Şekil 4.34. Yarı sonsuz zemin üzerindeki temelin geometri ve yüklemesi

Bu örnek, Karabalis ve Beskos (1984) te zaman uzayında sınır eleman metodu kullanılarak çözülmüş olup, sonuç grafik olarak verilmektedir. Sonlu-sonsuz eleman modeli ile yapılan çözüm aşağıda grafik olarak sunulmaktadır. Grafikler karşılaştırıldığında, sonuçların birbirleri ile uyumlu olduğu görülmektedir. Ayrıca, sisteme çok küçük bir viskoz sönüm (g=0.000005) verilmesinin davranışı yumuşattığı görülmektedir.



Şekil 4.35. Temelin altındaki deplasmanın zamanla değişimi

Dinamik yükün sinüzoidal olması hali için problem tekrar çözülmüştür. Burada, P(t)=180 sin(13000t) kips olarak alınmıştır. Sinüzoidal yüklemeden dolayı bulunan düşey deplasmanın zamanla değişimi aşağıda verilmekte olup, sonuçların Karabalis ve Beskos (1984) tarafından bulunanlar ile çok yakın olduğu gözlenmektedir (Şekil 4.36). Ayrıca, bu problem harmonik yükleme özelliğinden dolayı yukarıda verilen frekans (ω=13000 rad/s) ve genlik değeri (P_0=180 kips) ile harmonik sonsuz eleman kullanılarak yeniden çözülmüştür. Harmonik çözüm sonucu temelin altındaki deplasman, $u_{Re}=0.05292\times10^{-5}$ ft ve $u_{Im}=-0.2364\times10^{-5}$ ft olarak bulunmuştur. Bu sonuçlar grafikle karşılaştırıldığında birbirlerine çok yakın olduğu gözlenmektedir.

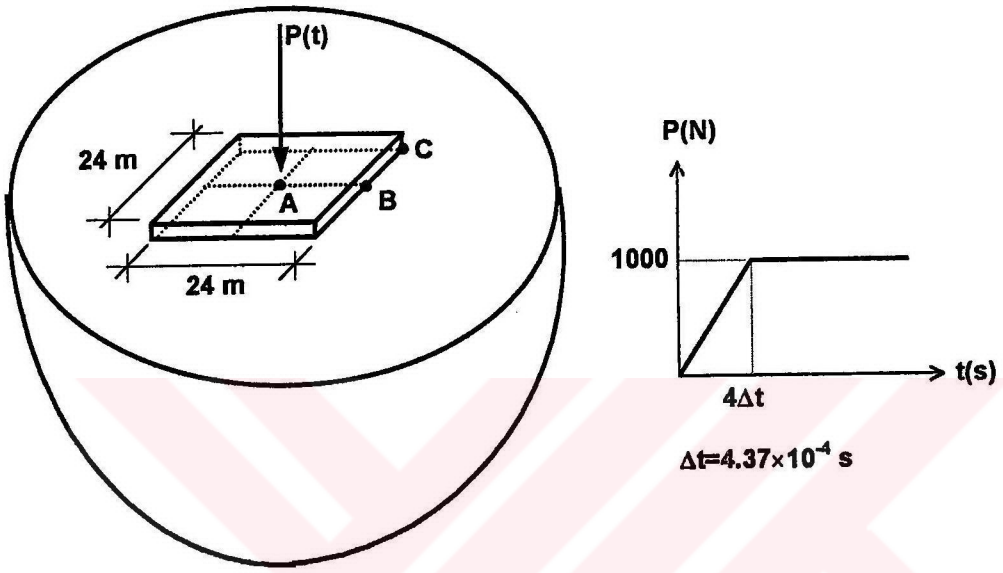


Şekil 4.36. Sinüzoidal yükten dolayı düşey deplasmanın zamanla değişimi

4.4.2.4.(3). Yarı Sonsuz Zemin Üzerinde Esnek Kare Temel

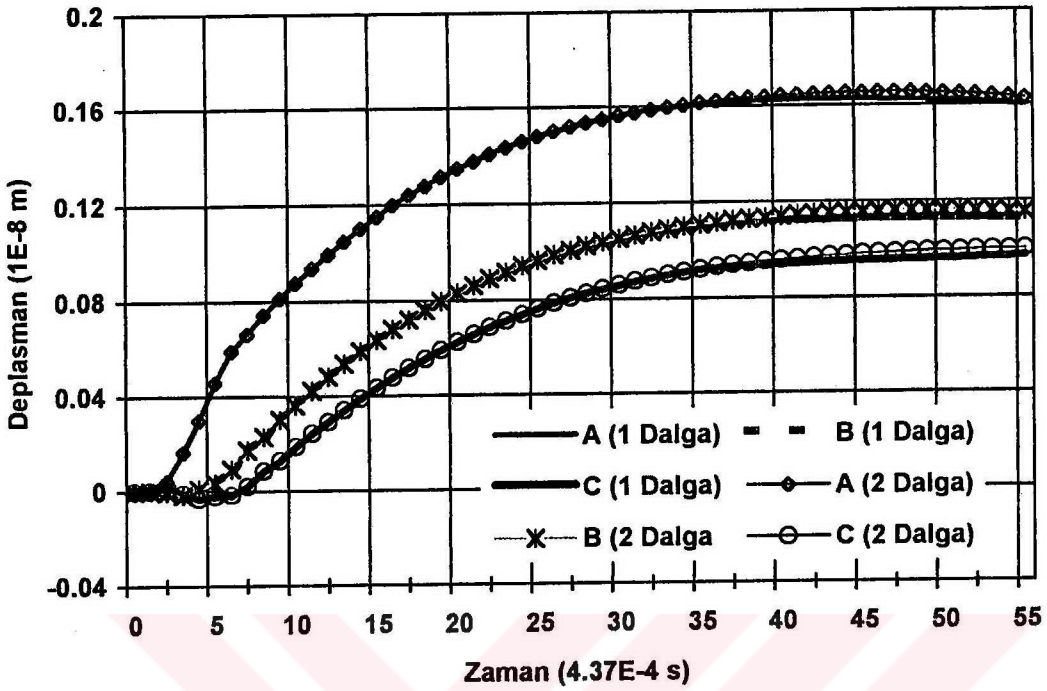
Bu örnek, bir öncekinin benzeri olup, burada kütlesiz kare temel esnek olarak alınmıştır. Problem, Mansur (1983) tarafından doktora tezinde sınır eleman formülasyonu ile ele alınmış olmakla birlikte, esnek temele ait herhangi bir bilgi verilmediğinden, bu çözümle karşılaştırma yapma imkanı bulunamamıştır. Fakat,

bulunan sonucu kontrol etmek amacıyla sisteme bir miktar sönüm verilerek, sonucun statik çözüme asimptotik olarak yaklaşıp yaklaşmadığının kontrolü yapılmıştır. Esnek kare temelin altında şekilde de görüldüğü gibi üç noktanın (A, B ve C) düşey deplasmanları hesaplanmaktadır.



Şekil 4.37. Esnek kare temelin geometrisi ve yüklemesi

Problemde temel ve zemin için kullanılan malzeme özellikleri, $E_z=24\times10^9$ N/m^2, $\nu_z=1/3$, $\rho_z=2400$ kg/m^3, $E_t=24\times10^{12}$ N/m^2, $\nu_t=1/3$ ve temel kalınlığı olarak t=1.2 m seçilmiştir. Ayrıca, zemine g=0.0001 sönüm verilmiştir. Sonsuz elemanlar için deplasman azaltma parametresi $\alpha=0.69$ ve Laplace dönüşümleri için aT=6 olarak seçilmiştir. Şekildeki sistem rampa tipi yükleme altında, bir dalga ve iki dalga tipini içeren sonsuz elemanlar kullanılarak çözülmüş olup, sonuçlar Şekil 4.38 de görülmektedir. Bir dalga ve iki dalga tipini içeren sonsuz elemanlar ile bulunan sonuçların birbirlerine çok yakın olduğu görülmektedir. Problem statik olarak çözüldüğünde, A, B ve C noktalarının düşey deplasmanları $u_A=0.156\times10^{-8}$ m, $u_B=0.106\times10^{-8}$ m ve $u_C=0.088\times10^{-8}$ m olarak hesaplanmıştır. Sonuçların tutarlı olduğu görülmektedir.

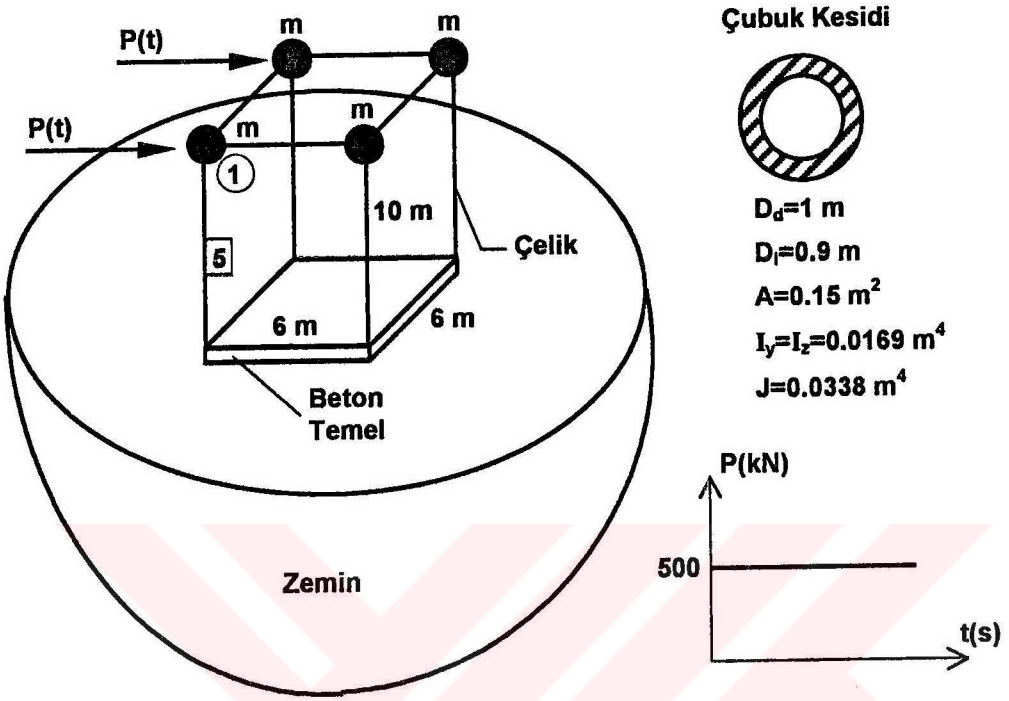


Şekil 4.38. A, B ve C noktalarının düşey deplasmanları

4.4.2.4.(4). Yarı Sonsuz Zemin Üzerinde Çerçeve Sistem

Bundan önceki örneklerin sonuçlarından, önerilen sonsuz eleman modellerine güvenilebileceği kanaatine varılmaktadır. Burada, çeşitli yapı-zemin sistemlerinin analizlerine değinilmektedir. İlk olarak, elastik yarı sonsuz zemin üzerinde çubuk elemanlardan oluşan ve kat hizasında, adım tipi dinamik tekil yüklemenin etkisinde tek katlı çerçeve sistemi ele alınmaktadır. Ayrıca, çerçevenin üst düğümlerinde tekil kütleler mevcuttur (Şekil 4.39).

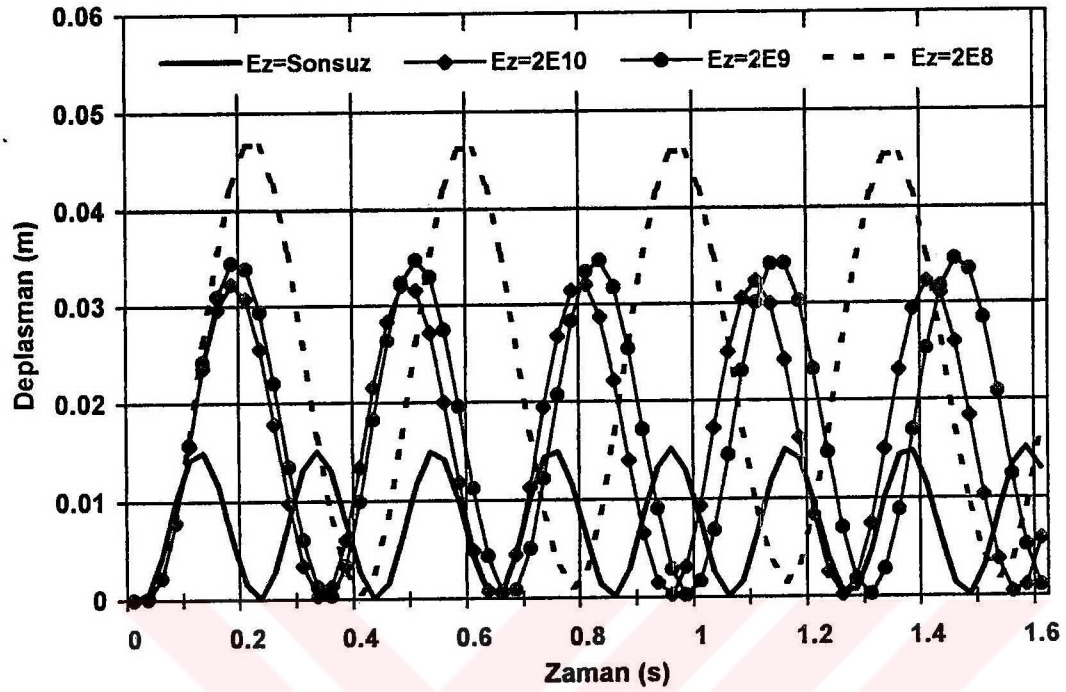
Bu problemde, zeminin mevcudiyetinin yapının davranışına olan etkisi araştırıldığından, üç değişik zemin rijitliği gözönüne alınmaktadır. Özel olarak, zemin sonsuz rijit düşünülerek de çözüm yapılmıştır. Kullanılan malzeme özellikleri aşağıda verilmektedir. Çerçevenin üst düğümlerinde bulunan tekil kütleler m=25000 kg, sonsuz elemanlara ait azaltma parametresi α=2.07 ve Laplace dönüşümleri için aT=6 olarak seçilmiştir.



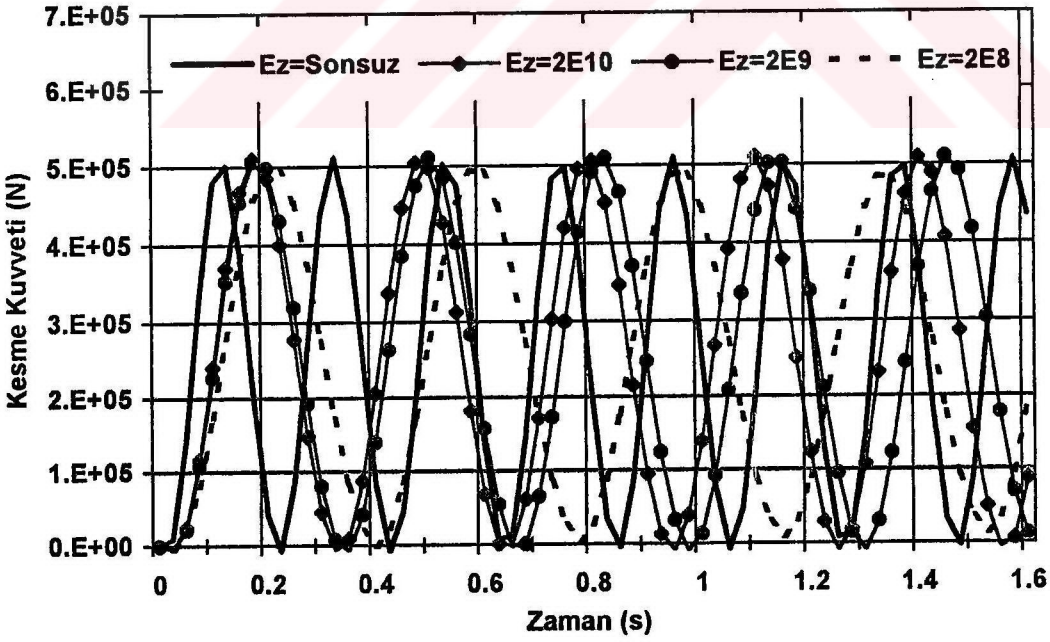
Şekil 4.39. Adım tipi yüklemeye maruz çerçeve

Çelik	Beton	Zemin
$E_ç=21\times10^{10}$ N/m^2 $\rho_ç=7800$ kg/m^3 $\nu_ç=0.30$	$E_b=2\times10^{10}$ N/m^2 $\rho_b=2400$ kg/m^3 $\nu_b=0.15$ t=0.5 m	$E_{z1}=2\times10^{10}$ N/m^2 $E_{z2}=2\times10^{9}$ N/m^2 $E_{z3}=2\times10^{8}$ N/m^2 $\rho_z=2000$ kg/m^3 $\nu_z=0.30$

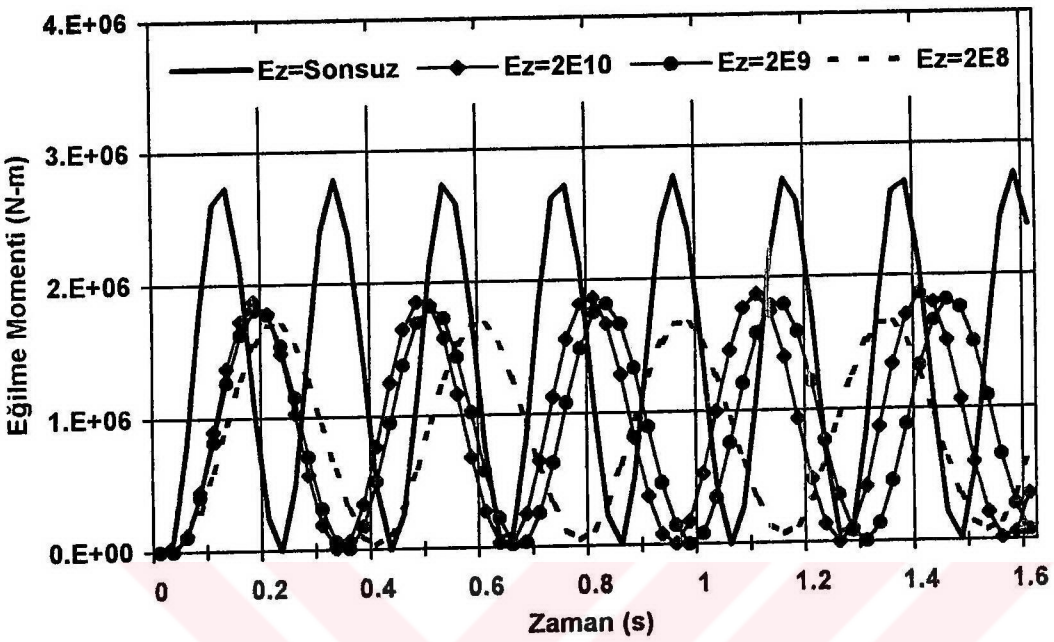
Çeşitli zemin elastisite modülleri gözönüne alınarak, yapıda 1 numaralı düğümün yatay deplasmanı (u) ile 5 numaralı kolon elemanının alt ucundaki kesme kuvveti (F_y) ve eğilme momentinin (M_z) zamanla değişimleri hesaplanmış olup aşağıda görülmektedir.



Şekil 4.40. Yatay deplasmanın zamanla değişimi



Şekil 4.41. Kesme kuvvetinin zamanla değişimi

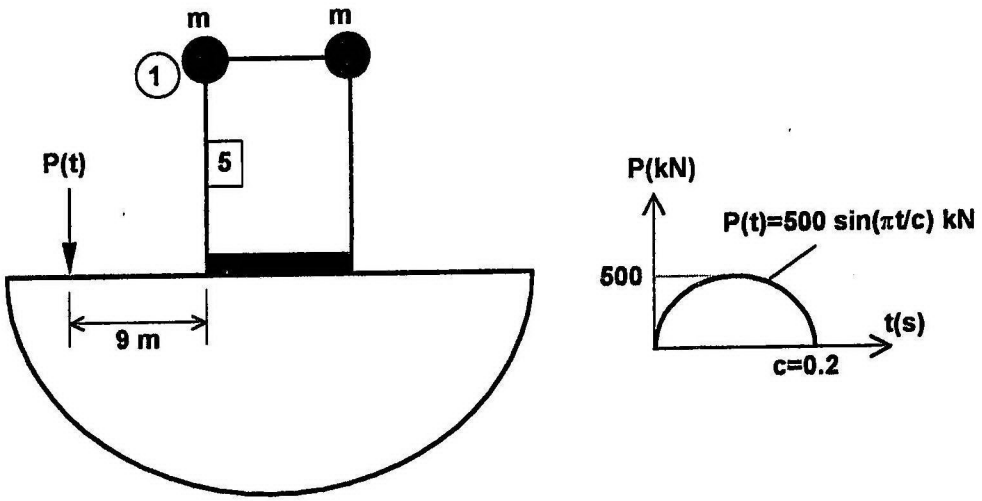


Şekil 4.42. Eğilme momentinin zamanla değişimi

Grafikler incelendiğinde, zeminin mevcudiyetinin yapının davranışında değişiklikler meydana getirdiği gözlenmektedir. Çerçevenin üst noktasının yatay deplasmanı zemin yumuşadıkça artmaktadır (Şekil 4.40). Kesme kuvveti incelendiğinde çeşitli zeminler için sonuçlar birbirlerine yakın çıkmaktadır (Şekil 4.41). Buna karşılık, zemin sertleştikçe eğilme momenti büyümektedir (Şekil 4.42).

4.4.2.4.(5). Zemine Etkiyen İmpulsif Yükten Dolayı Yapı-Zemin Etkileşimi

Bu örnek, geometri olarak bir önceki sistemin aynısı olup, sadece yükleme yapı yerine zemin üzerine etkimektedir (Şekil 4.43). Bu problemde 1 numaralı düğümün yatay deplasmanı ile 5 numaralı elemandaki kesme kuvveti (F_y) ve eğilme momentinin (M_z) zamanla değişimleri incelenmektedir.



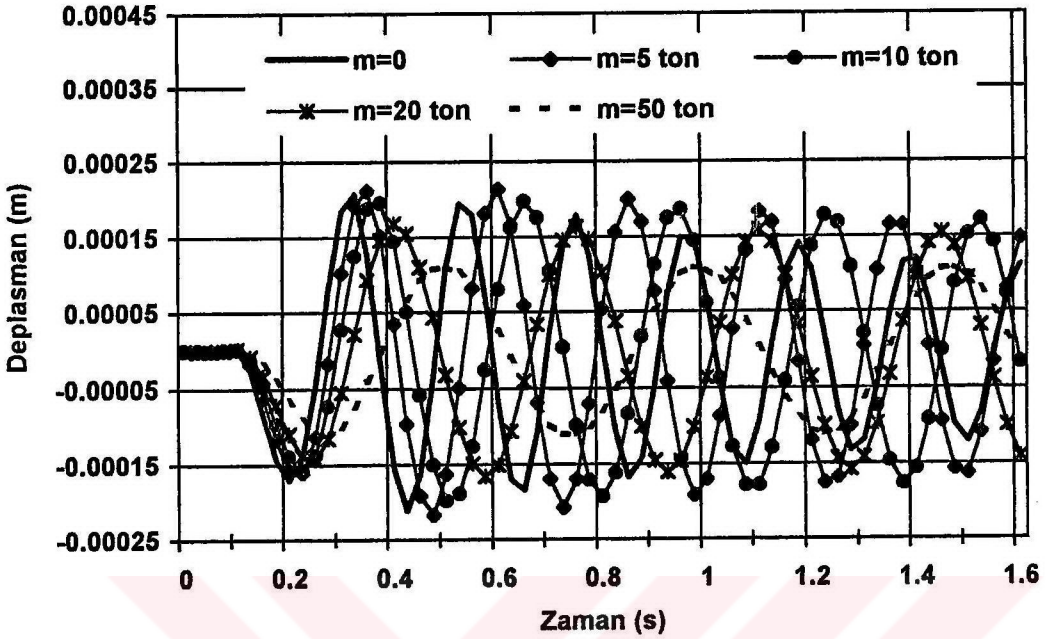
Şekil 4.43. Elastik zemin üzerinde çerçeve (karşıdan görünüş) ve yüklemesi

Bu büyüklükler için iki farklı parametrenin etkisi araştırılmaktadır. Bunlar, çerçevenin üzerindeki tekil kütlelerin ve çeşitli zemin rijitliklerinin yapının davranışına olan etkisidir.

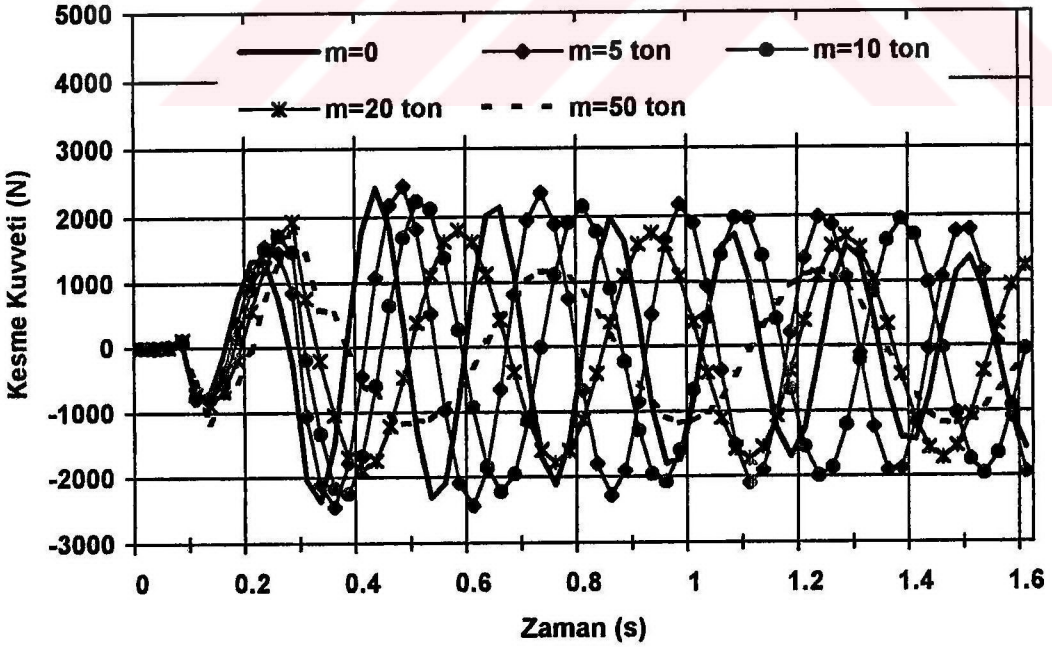
A. Kütlelerin Etkisi

Kütlelerin, yapının davranışına etkisi incelenirken, zemine ait elastisite modülü $E=2\times10^8$ N/m^2 seçilmiştir. Önce, tekil kütleler alınmadan çözüm yapılmıştır (m=0). Daha sonra, çerçevenin üst düğümlerine konulan m kütleleri arttırılarak (m=5, 10, 20, 50 ton) yapının davranışı incelenmektedir. Elde edilen sonuçlar grafik olarak aşağıda verilmektedir.

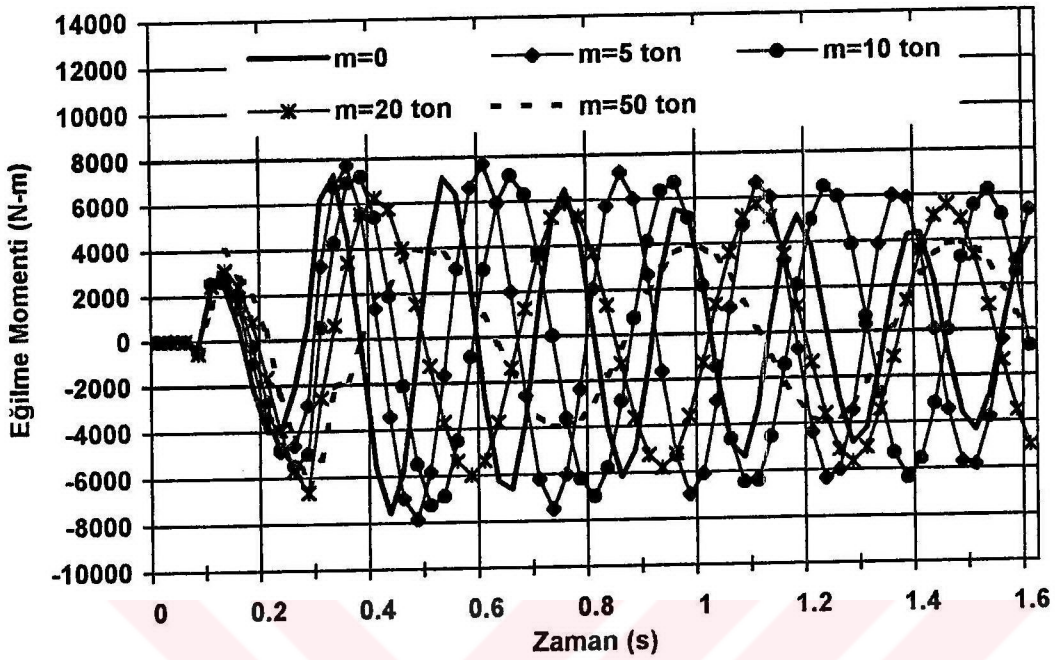
Grafikler incelendiğinde (Şekil 4.44-46), kütle değeri arttıkça yani bina ağırlaştıkça, maksimum değerlerde bir azalma meydana gelmekte ve frekanslarda küçülme görülmektedir.



Şekil 4.44. Yatay deplasmanın kütle ile değişimi



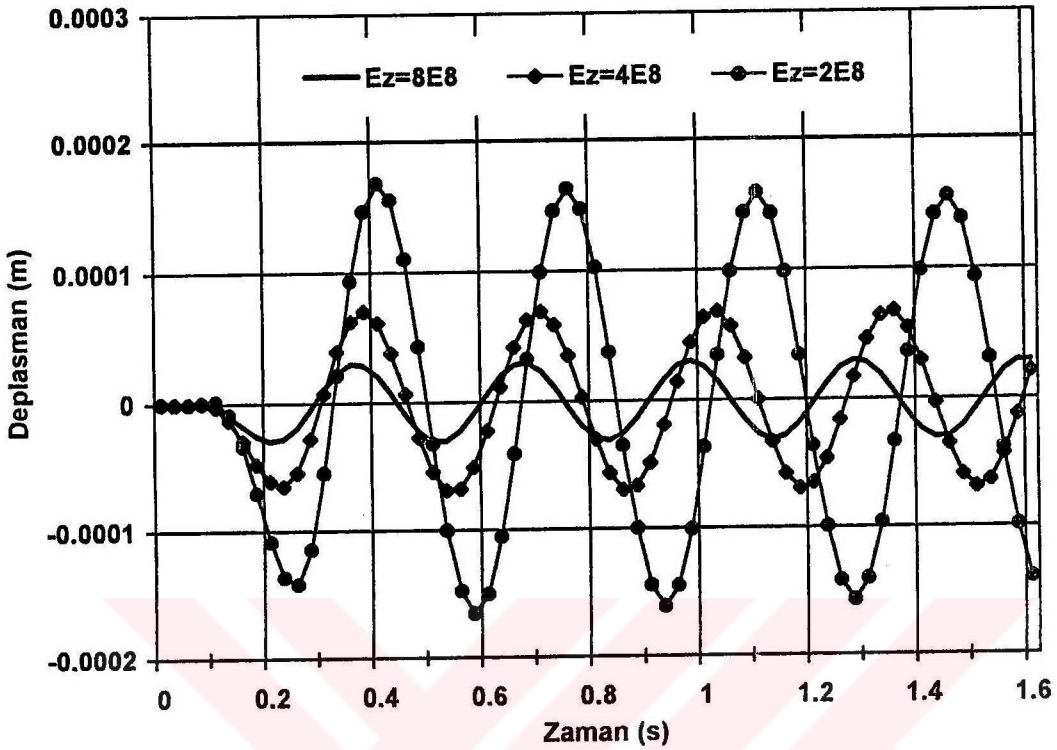
Şekil 4.45. Kesme kuvvetinin kütle ile değişimi



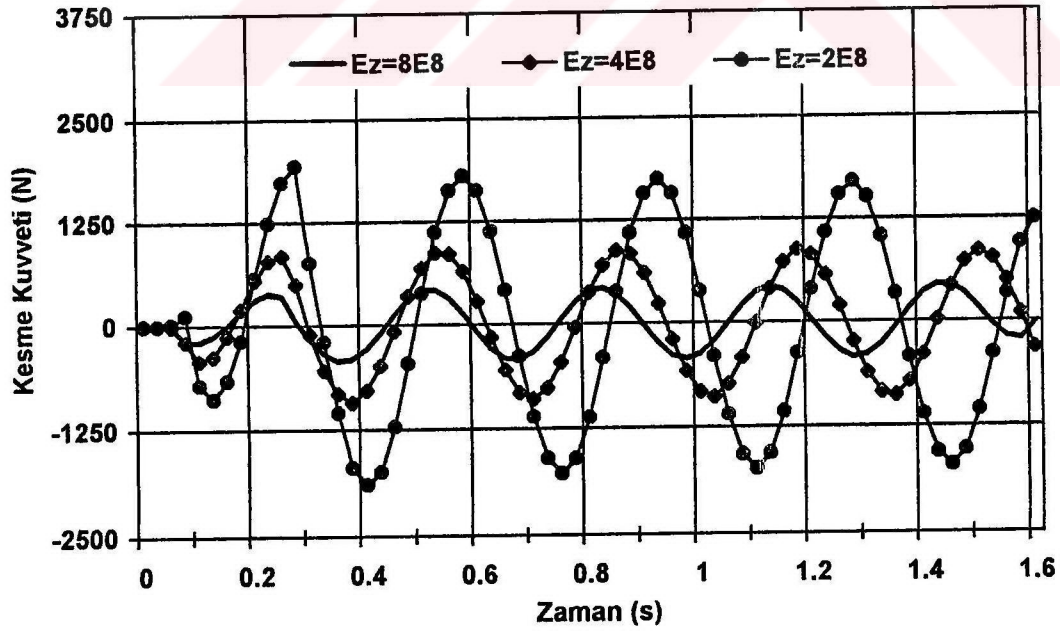
Şekil 4.46. Eğilme momentinin kütle ile değişimi

B. Zeminin Rijitliğinin Etkisi

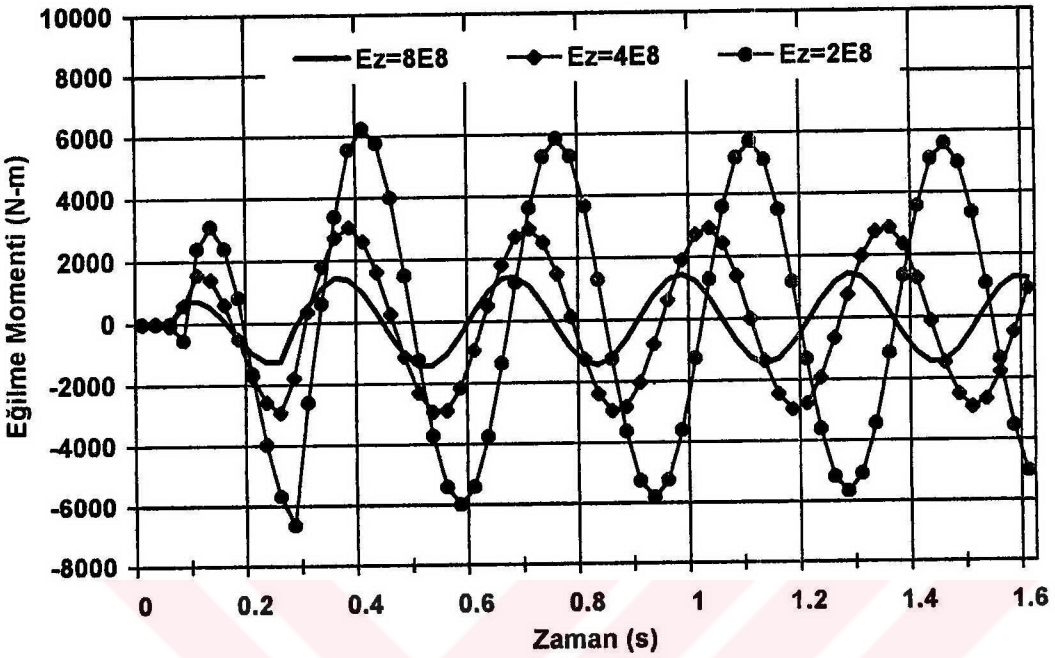
Zemin rijitliğinin davranışa etkisi incelenirken, binanın üst düğümlerinde m=20 ton tekil kütleler olduğu varsayılmaktadır. Bu sistemde zeminin elastisite modüllerinin $E_{z1}=2\times10^8$ N/m^2, $E_{z2}=4\times10^8$ N/m^2 ve $E_{z3}=8\times10^8$ N/m^2 değerleri için yapı-zemin etkileşimi incelenmiş olup, sonuçlar grafik olarak aşağıda verilmektedir. Grafikler incelendiğinde, binanın üst noktasındaki düğümün yatay deplasmanı (Şekil 4.47), kolonun tabanındaki kesme kuvveti (Şekil 4.48) ve eğilme momenti (Şekil 4.49) değerlerinde, zemin yumuşadıkça (elastisite modülleri küçüldükçe) bir büyüme meydana geldiği gözlenmektedir.



Şekil 4.47. Yatay deplasmanın zemin rijitliği ile değişimi



Şekil 4.48. Kesme kuvvetinin zemin rijitliği ile değişimi



Şekil 4.49. Eğilme momentinin zemin rijitliği ile değişimi

BÖLÜM 5
YER HAREKETİ (DEPREM) ETKİSİNDEKİ SİSTEMLERİN YAPI-ZEMİN ETKİLEŞİM ANALİZİ

5.1. Giriş

Bundan önceki bölümlerde, dıştan etkiyen yüklemeler altında iki ve üç boyutlu elastodinamik yapı-zemin etkileşim analizi ele alınmaktadır. Bu bölümde ise, yapı-zemin etkileşiminin yer hareketi (deprem) etkisi altındaki analizleri incelenmektedir.

Deprem etkisi altındaki yapıların analizi incelenirken genellikle, yapının oturduğu zemin ortamının çok rijit olduğu ve deprem hareketinin direkt olarak yapının tabanına etkidiği kabulü yapılmaktadır (Regular Earthquake Analysis, REA). Bir başka deyişle yapı-zemin etkileşimi gözönüne alınmamaktadır. Gerçekte ise, herhangi bir deprem durumunda yapı ile zemin daima bir etkileşim içinde beraber hareket etmektedirler. Yapı ile zemin arasındaki bu etkileşim, hem zeminin hemde yapının özelliğine bağlı olarak değişmektedir.

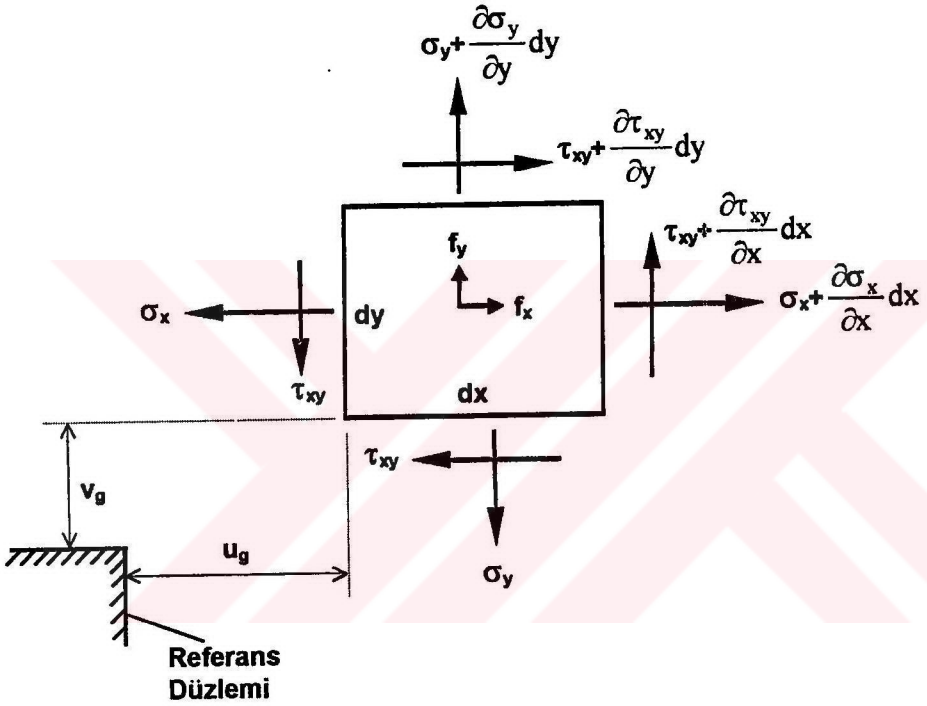
Bu bölümde, deprem etkisi altında yapı-zemin etkileşim analizi iki aşamada incelenmektedir. Bunlardan birincisi, iki boyutlu problemler olup, analiz sonlu ve sonsuz elemanlar kullanılarak gerçekleştirilmektedir. Diğeri ise, üç boyutlu zemin ortamında rijit bir temel üzerine oturan kesme tipi binaların deprem analizidir. Burada, yapı ile zemin arasındaki impedans ilişkisi kullanılarak zeminin mevcudiyeti yapının davranışında gözönünde bulundurulmaktadır.

5.2. İki Boyutlu Yapı-Zemin Etkileşim Analizi

İki boyutlu sistemlerin yapı-zemin etkileşim analizi incelenirken bazı kabuller yapılmaktadır. İlk olarak yapının üzerine oturduğu zeminin, tabanı rijit olan bir zemin tabakası olduğu kabul edilmektedir. Ayrıca, formülasyon relatif deplasmana dayalı olarak Laplace dönüşüm uzayında gerçekleştirilmektedir.

5.2.1. Hareket Denklemlerinin Elde Edilmesi

Yer hareketi bulunması durumunda, tipik olarak düzlemsel bir sonlu elemanın herhangi bir "t" anındaki konumu ve üzerine etkiyen kuvvetler aşağıda görülmektedir (Şekil 5.1).



Şekil 5.1. Elemanter düzlem elemanı serbest cisim diyagramı

Yukarıda görülen elemanın kuvvetler dengesi düşünülürse ($\Sigma F_x=0$ ve $\Sigma F_y=0$),

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$
$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + f_y - \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \qquad (5.1)$$

şeklinde eleman denge denklemleri bulunur. Burada görülen x ve y yönlerindeki deplasmanlar (u, v) toplam deplasmanlar olup,

$$u = u_r + u_g$$
$$v = v_r + v_g \tag{5.2}$$

şeklinde tarif edilmektedir. Burada u_r ve v_r relatif deplasmanları gösterirken, u_g ve v_g ise yer (deprem) hareketini temsil etmektedirler. Yukarıda deplasmanlar için verilen (5.2) tarifleri (5.1) denge denklemlerinde yazılırsa,

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x - \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} - \rho\, a_{gx} = 0$$
$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + f_y - \rho \frac{\partial^2 v_r}{\partial t^2} - \rho\, a_{gy} = 0 \tag{5.3}$$
$$a_{gx} = \frac{\partial^2 u_g}{\partial t^2} \qquad a_{gy} = \frac{\partial^2 v_g}{\partial t^2}$$

şeklinde elde edilmektedir. Denklemlerde görülen a_{gx} ve a_{gy} sırasıyla yatay ve düşey doğrultulardaki yer (deprem) ivmelerini temsil etmektedirler. Bu aşamadan sonra, dış yükleme durumunda verildiği gibi ağırlıklı artıklar yöntemi kullanılarak integral forma geçilmektedir. Daha sonra Galerkin yaklaşımı kullanılarak yer hareketi durumu için, Laplace dönüşüm uzayında virtüel iş prensibi ifadesi aşağıda görüldüğü gibi elde edilmektedir.

$$h_e \int_{A_e} \{\delta\bar{\varepsilon}\}^T \{\bar{\sigma}\}\, dA_e + s^2 h_e \int_{A_e} \rho \begin{Bmatrix} \delta\bar{u}_r \\ \delta\bar{v}_r \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \bar{u}_r \\ \bar{v}_r \end{Bmatrix} dA_e =$$
$$h_e \int_{A_e} \begin{Bmatrix} \delta\bar{u}_r \\ \delta\bar{v}_r \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \bar{f}_x \\ \bar{f}_y \end{Bmatrix} dA_e + h_e \oint_{S_e} \begin{Bmatrix} \delta\bar{u}_r \\ \delta\bar{v}_r \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \bar{t}_x \\ \bar{t}_y \end{Bmatrix} dS_e - h_e \int_{A_e} \rho \begin{Bmatrix} \delta\bar{u}_r \\ \delta\bar{v}_r \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \bar{a}_{gx} \\ \bar{a}_{gy} \end{Bmatrix} dA_e \tag{5.4}$$

Laplace dönüşüm uzayında virtüel iş ilkesi ifadesi bulunduktan sonra, dış yükleme durumundakine benzer olarak, sonlu eleman yaklaşımı relatif deplasmanlar cinsinden yapılmaktadır. Tipik bir eleman için relatif deplasmanlar,

$$\bar{u}_r = \sum_{i=1}^{n} \bar{N}_i \bar{u}_{ri} \qquad \bar{v}_r = \sum_{i=1}^{n} \bar{N}_i \bar{v}_{ri} \tag{5.5}$$

şeklinde tarif edilmektedirler. Standart sonlu eleman formülasyonu adımları takip edilirse, (5.4) virtüel iş prensibi ifadesi,

$$\{\bar{\delta u}_{rd}\}^T \left(\left([\bar{k}] + s^2 [\bar{m}] \right) \{\bar{u}_{rd}\} - \{\bar{f}\} - \{\bar{t}\} + \{\bar{q}\} \right) = 0 \tag{5.6}$$

şekline dönüşmektedir. Yukarıdaki ifadede görülen eleman rijitlik ve kütle matrisleri ile yük vektörleri aşağıdaki gibi tariflenmektedirler.

$$[\bar{k}] = h_e \int_{A_e} [\bar{B}]^T [D] [\bar{B}] dA_e \quad ; \quad [\bar{m}] = h_e \int_{A_e} \rho [\bar{N}]^T [\bar{N}] dA_e$$

$$\{\bar{f}\} = h_e \int_{A_e} [\bar{N}]^T \begin{Bmatrix} \bar{f}_x \\ \bar{f}_y \end{Bmatrix} dA_e \quad ; \quad \{\bar{t}\} = h_e \int_{S_e} [\bar{N}]^T \begin{Bmatrix} \bar{t}_x \\ \bar{t}_y \end{Bmatrix} dS_e \tag{5.7}$$

$$\{\bar{q}\} = h_e \int_{A_e} \rho [\bar{N}]^T \begin{Bmatrix} \bar{a}_{gx} \\ \bar{a}_{gy} \end{Bmatrix} dA_e$$

Bu ifadelerde gözüken $\{\bar{q}\}$, yer hareketinden dolayı oluşan eleman yük vektörünü gösterirken, $\bar{a}_{gx}$ ve $\bar{a}_{gy}$ ise yer ivmesinin Laplace dönüşümleridir. Sonlu eleman formülasyonunda seçilen relatif deplasmanların varyasyonu keyfi olduğundan, (5.6) ifadesinin sağlanabilmesi için parantez içindeki ifadenin sıfır olması gerekmektedir. Buna göre Laplace dönüşüm uzayında, yer hareketi durumu için eleman hareket denklemi aşağıdaki gibi elde edilmektedir.

$$\left(\left[\bar{k}\right]+s^2\left[\bar{m}\right]\right)\left\{\bar{u}_{rd}\right\}=\left\{\bar{p}\right\}$$
$$\left\{\bar{p}\right\}=\left\{\bar{f}\right\}+\left\{\bar{t}\right\}-\left\{\bar{q}\right\} \qquad (5.8)$$

Bu şekilde yer hareketi durumu için Laplace dönüşüm uzayında eleman hareket denklemi elde edildikten sonra, tüm elemanlar için (sonlu ve sonsuz) bu işlem yapılıp, kodlama tekniği vb. bir yöntemle sistem hareket denklemi,

$$\left(\left[\bar{K}\right]+s^2\left[\bar{M}\right]\right)\left\{\bar{U}_{rd}\right\}=\left\{\bar{P}\right\} \qquad (5.9)$$

şeklinde oluşturulmaktadır.

5.2.2. Eleman Yük Vektörünün Hesabı

Yer hareketi bulunması durumunda, iki boyutlu sistemler gözönüne alınırken, hacim kuvvetlerinden ve yüzey gerilmelerinden oluşan eleman yük vektörlerinin katkısı yok varsayılmaktadır. Burada sadece yer ivmesinden dolayı meydana gelen yük vektörü kullanılmaktadır. (5.7) eşitliğinden yük vektörü,

$$\left\{\bar{q}\right\}=h_e\int_{A_e}\rho\left\{\bar{q}^*\right\}dA_e$$
$$\left\{\bar{q}^*\right\}=\left[\bar{N}\right]^T\begin{Bmatrix}\bar{a}_{gx}\\ \bar{a}_{gy}\end{Bmatrix} \qquad (5.10)$$

şeklini alır. Şekil fonksiyonları matrisinin,

$$\left[\bar{N}\right]=\left[\begin{array}{cc|cc|c|cc}\bar{N}_1 & 0 & \bar{N}_2 & 0 & \cdots & \bar{N}_n & 0\\ 0 & \bar{N}_1 & 0 & \bar{N}_2 & \cdots & 0 & \bar{N}_n\end{array}\right] \qquad (5.11)$$

formunda olduğu kabul edilirse,

$$\left\{\bar{q}^*\right\}=\begin{Bmatrix} \overline{N}_1\,\bar{a}_{gx} \\ \overline{N}_1\,\bar{a}_{gy} \\ \overline{N}_2\,\bar{a}_{gx} \\ \overline{N}_2\,\bar{a}_{gy} \\ \vdots \\ \overline{N}_n\,\bar{a}_{gx} \\ \overline{N}_n\,\bar{a}_{gy} \end{Bmatrix} \tag{5.12}$$

şeklinde, eleman yük vektörünün integral alınmadan önceki elemanları bulunur. Sonlu elemanlar için bu integrasyon işlemi standart Gauss-Legendre yöntemi ile yapılmaktadır. Fakat sonsuz elemanlarda, sonlu integraller için Gauss-Legendre yöntemi kullanılırken, sonsuz integraller için Newton-Cotes integrasyon metodu kullanılmaktadır. Azalan fonksiyonlu ve tek dalga tipini içeren iki boyutlu transient sonsuz elemana ait tipik bir şekil fonksiyonu,

$$\overline{N}_i = L_i(\eta)\, e^{-(\alpha+\beta)\xi} \tag{5.13}$$

formundadır. Bu durumda, $\left\{\bar{q}^*\right\}$ vektörünün tipik bir terimi,

$$\overline{N}_i\,\bar{a}_g = \left(\bar{a}_g L_i\right) e^{-(\alpha+\beta)\xi} \tag{5.14}$$

şeklinde elde edilir. Eğer iki dalga tipini içeren sonsuz eleman kullanılıyorsa,

$$\overline{N}_i\,\bar{a}_g = \left(\bar{a}_g L_i a_i\right) e^{-(\alpha+\beta_1)\xi} + \left(\bar{a}_g L_i b_i\right) e^{-(\alpha+\beta_2)\xi} \tag{5.15}$$

olarak bulunur. Eğer üç dalga tipini içeren sonsuz eleman modeli kullanılıyorsa,

$$\overline{N}_i\,\bar{a}_g = \left(\bar{a}_g L_i a_i\right) e^{-(\alpha+\beta_1)\xi} + \left(\bar{a}_g L_i b_i\right) e^{-(\alpha+\beta_2)\xi} + \left(\bar{a}_g L_i c_i\right) e^{-(\alpha+\beta_3)\xi} \tag{5.16}$$

şeklinde elde edilmektedir. Bu durumda Newton-Cotes sayısal integrasyon yöntemi ağırlık değerleri, $Exp[-2((\alpha+\beta_i)/2)\xi]$ terimi gözönüne alınıp modifiye edilerek kullanılmaktadır.

5.2.3. Sonlu ve Sonsuz Eleman Seçimi

Yer hareketi etkisi altında, iki boyutlu yapı-zemin etkileşimi sistemleri gözönüne alınırken yapıya yakın bölgeler standart 8 düğümlü, kuadratik, izoparametrik sonlu elemanlar kullanılarak modellenmektedir (bkz. 3.2.3). Yapıdan uzak bölgeler ise çeşitli tipteki (bir, iki veya üç dalga tipini içeren) sonsuz elemanlar kullanılarak modellenmektedir. Bu kısımda kullanılan transient sonsuz elemanlara ait detaylı formülasyon ve hesaplamalar kısım 3.3.3'te anlatılmaktadır.

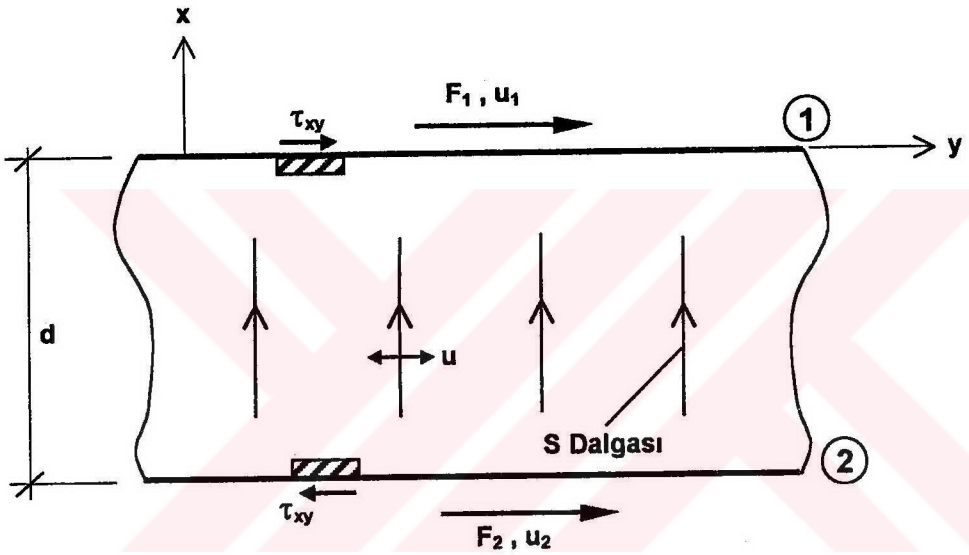
5.2.4. Sayısal Uygulamalar

Yer hareketi etkisi altında bulunan, iki boyutlu yapı-zemin etkileşimi problemlerini, sonlu ve çeşitli tipteki sonsuz elemanlar kullanarak ele alan, FORTRAN77 dilinde bilgisayar programları hazırlanarak örnekler çözülmüştür. Programlarda, eleman matrisleri ve yük vektörleri sonlu yönde 3 noktalı Gauss-Legendre, sonsuz yönde ise 12 noktalı Newton-Cotes integrasyon yöntemleri kullanılarak sayısal olarak hesaplanmaktadır. Formülasyonun Laplace dönüşüm uzayında gerçekleştirilmesinden dolayı, bir dizi parametreler için sistem denklem takımı çözülmektedir. Rijit tabana etkiyen deprem ivmesinin, FFT'a dayalı direkt Laplace dönüşümü alınmakta, çözüm bulunduktan sonra zaman uzayına Durbin'in ters Laplace dönüşüm yöntemi ile geçilmektedir. Hazırlanan bilgisayar programları relatif deplasman formülasyonuna dayanmaktadır.

Burada iki farklı sayısal uygulama ele alınmaktadır. Bunlardan ilki, önerilen modelin kontrolü için çözülmekle beraber, ikincisinde ise yer hareketi (deprem) durumunda yapı-zemin etkileşiminin gözönüne alınıp alınmamasının davranışı ne ölçüde etkilediği araştırılmaktadır.

5.2.4.1. Yer Hareketine Maruz Elastik Tabaka

Rijit tabana oturan ve düşey deprem dalgalarının etkisinde bulunan bir zemin tabakasının üst noktasındaki deplasmanın zamanla değişimi aranmaktadır. Düzlem dalgaların etkisinde bulunan bir zemin tabakasına ait dinamik rijitlik matrisi ifadeleri kullanılarak, bu problemin analitik çözümü hesaplanabilmektedir (Şekil 5.2).



Şekil 5.2. Zemin tabakasında dalga yayılması

Yukarıdaki şekilde görülen zemin tabakasında, S dalgaları aşağıdan yukarıya doğru yayılmaktadır. Bu durumda davranışı idare eden diferansiyel denklem,

$$\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} = \frac{1}{c_s^2}\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} \tag{5.17}$$

şeklindedir. Başlangıç şartlarının sıfır olduğu kabul edilerek yukarıdaki denklemin Laplace dönüşümü alınırsa,

$$\frac{\partial^2 \bar{u}_y}{\partial x^2} - \beta^2 \bar{u}_y = 0 \qquad (5.18)$$

$$\beta = \frac{s}{c_S}$$

halini almaktadır. Bu diferansiyel denklemin çözümünden,

$$\bar{u}_y = A\, e^{\beta x} + B\, e^{-\beta x} \qquad (5.19)$$

şeklinde deplasman ifadesi bulunur. Burada gözüken A ve B katsayıları sınır şartları kullanılarak hesaplanmaktadır. Yukarıdaki (5.19) deplasman ifadesi kullanılarak,

$$\bar{u}_1 = \left(\bar{u}_y\right)\Big|_{x=0}$$
$$\bar{u}_2 = \left(\bar{u}_y\right)\Big|_{x=-d} \qquad (5.20)$$

ifadeleri tariflenip, matris formunda yazılacak olursa,

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{-\beta d} & e^{\beta d} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} \qquad (5.21)$$

bağıntısı elde edilmektedir. Zemin tabakasının herhangi bir noktasındaki gerilme ifadesi bünye denklemi kullanılarak hesaplanmaktadır. Ortamda sadece S dalgaları yayıldığından, sadece τ_{xy} kayma gerilmesi sıfırdan farklıdır. Bu durumda kayma gerilmesinin deplasman cinsinden ifadesi,

$$\bar{\tau}_{xy} = G \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial x} = \rho\, c_S^2 \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial x} \qquad (5.22)$$

şeklinde elde edilmektedir. Burada birim alana gelen kuvvetler (F_1 ve F_2), Laplace dönüşüm uzayında,

$$\bar{F}_1 = \left(\bar{\tau}_{xy}\right)\Big|_{x=0}$$
$$\bar{F}_2 = \left(\bar{\tau}_{xy}\right)\Big|_{x=-d} \qquad (5.23)$$

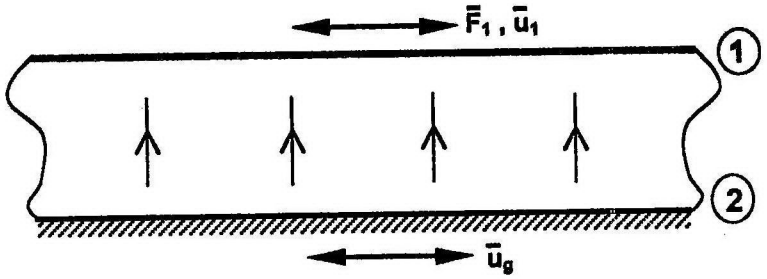
şeklinde tariflenmektedirler. Burada, kayma gerilmesinin (5.22) deki tarifi, (5.19) da verilen deplasman tarifi kullanılarak yazılırsa,

$$\begin{Bmatrix} \bar{F}_1 \\ \bar{F}_2 \end{Bmatrix} = \rho\, c_S\, s \left[\begin{array}{c|c} 1 & -1 \\ \hline e^{-\beta d} & -e^{\beta d} \end{array}\right] \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} \qquad (5.24)$$

bağıntısı elde edilir. (5.21) eşitliğinden A ve B katsayıları hesaplanıp (5.24) te yerine yazılacak olursa, zemin tabakası için [D] dinamik rijitlik matrisi,

$$\begin{Bmatrix} \bar{F}_1 \\ \bar{F}_2 \end{Bmatrix} = \frac{\rho\, c_S\, s}{1-e^{2\beta d}} \left[\begin{array}{c|c} -(1+e^{2\beta d}) & 2\,e^{\beta d} \\ \hline -2\,e^{\beta d} & 1+e^{2\beta d} \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{Bmatrix} \qquad (5.25)$$
$$\Rightarrow \quad \{\bar{F}\} = [D]\{\bar{u}\}$$

şeklinde hesaplanmaktadır. Bu problemde, zemin tabakasının tabanının rijit ve $\bar{u}_g$ gibi bir yer hareketinin etkisinde olduğu varsayılmaktadır (Şekil 5.3).



Şekil 5.3. Yer hareketine maruz zemin tabakası

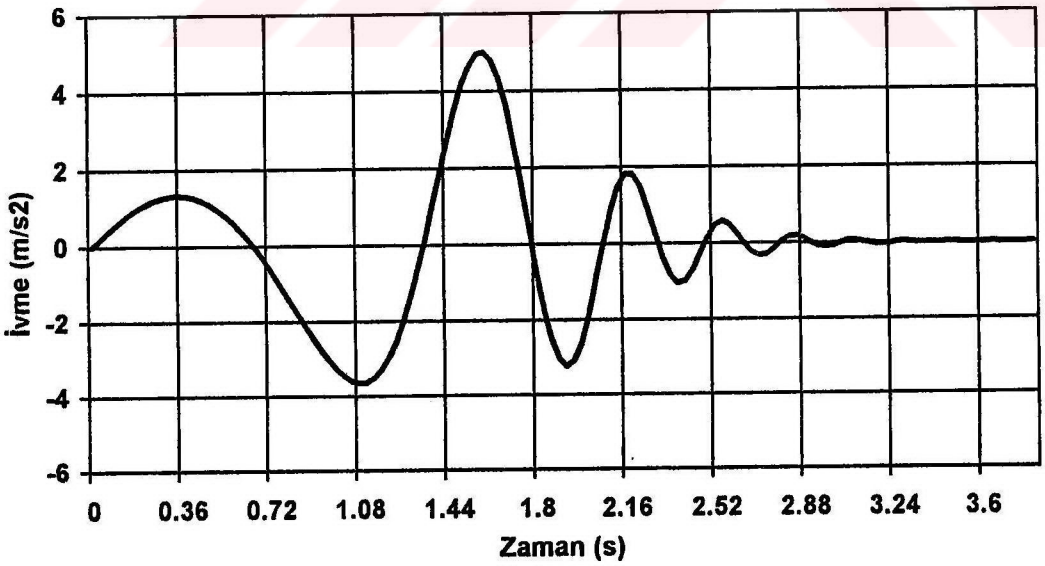
Burada ele alınan problemde sınır şartları,

$$\bar{F}_1 = 0 \qquad \bar{u}_2 = \bar{u}_g \tag{5.26}$$

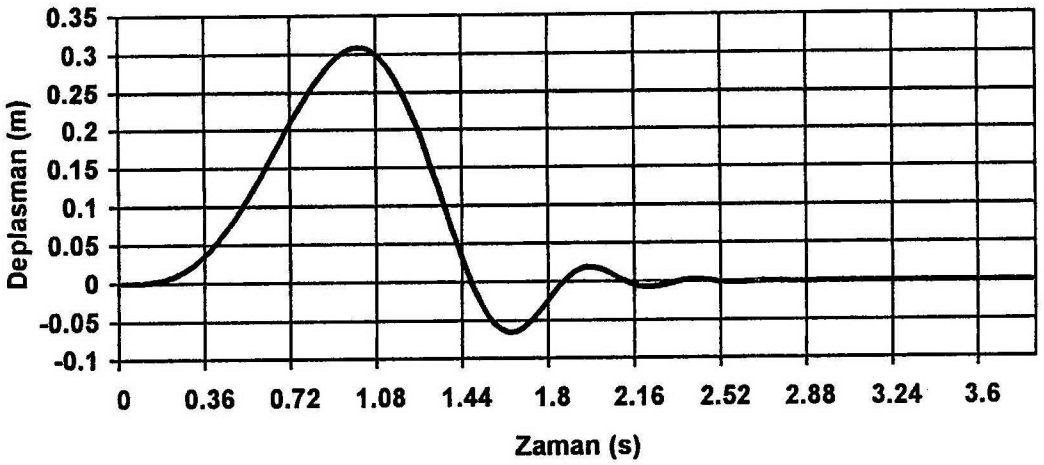
şeklindedir. Zemin tabakasının rijit tabanı yer deplasmanı kadar hareket ederken, tabakanın üst noktalarında kuvvet sıfır olmaktadır. Bu durumda (5.25) denklemlerinin birincisi (5.26) sınır şartları altında yazılırsa,

$$\bar{u}_1 = \frac{2\,e^{\beta d}}{1+e^{2\beta d}}\,\bar{u}_g \tag{5.27}$$

bağıntısıyla, zemin tabakasının üst noktalarının deplasmanı hesaplanmaktadır. Bu problemde zemin tabakasına ait malzeme sabitleri, $E=2\times10^8$ N/m^2, $\rho=2000$ kg/ m^3, $\nu=0.30$ ve zemin tabakasının kalınlığı d=30 m olarak seçilmiştir. Laplace dönüşümleri için aT=6 ve deplasman azaltma parametresi $\alpha=2.77$ olarak alınmaktadır. Rijit tabana etkiyen deprem ivmesi (a_g) ve deplasmanı (u_g) aşağıda verildiği gibi seçilmiştir (Şekil 5.4 ve Şekil 5.5).

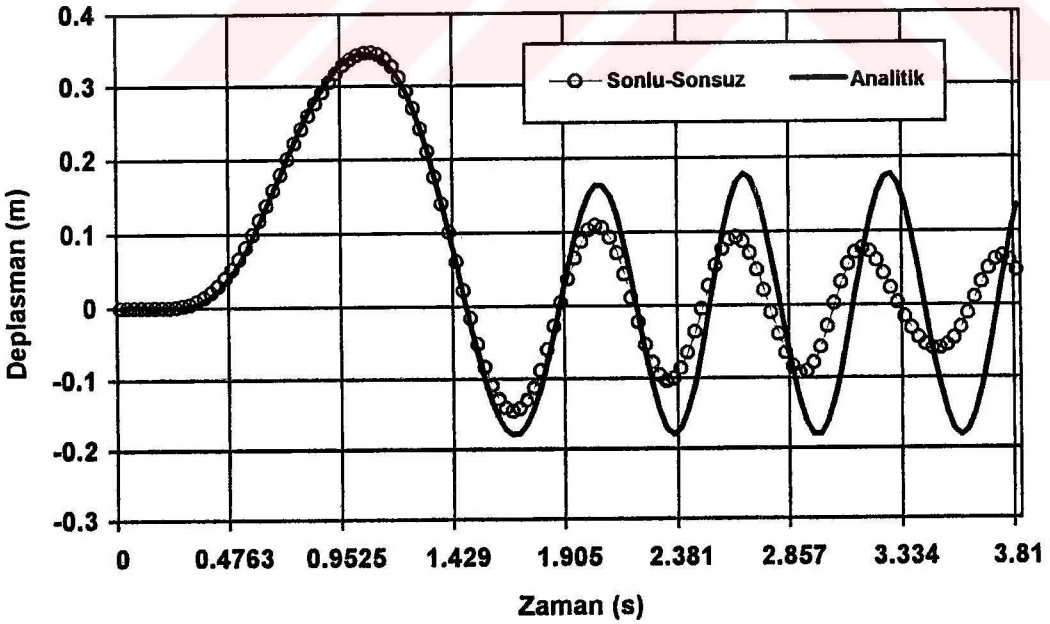


Şekil 5.4. Zemin tabanına etkiyen ivmenin zamanla değişimi



Şekil 5.5. Zemin tabanına etkiyen deplasmanın zamanla değişimi

Rijit taban deplasmanının, Laplace dönüşümü alınıp (5.27) bağıntısında yerine yazıldığında, zemin tabakasının üst noktasındaki deplasman bulunmakta ve ters Laplace dönüşümü alınarak zaman uzayına geçilmektedir. Ayrıca sonlu-sonsuz eleman modeli kullanılarak üst noktanın deplasmanının zamanla değişimi bulunmuş olup, analitik sonuçlarla beraber aşağıda görülmektedir (Şekil 5.6).

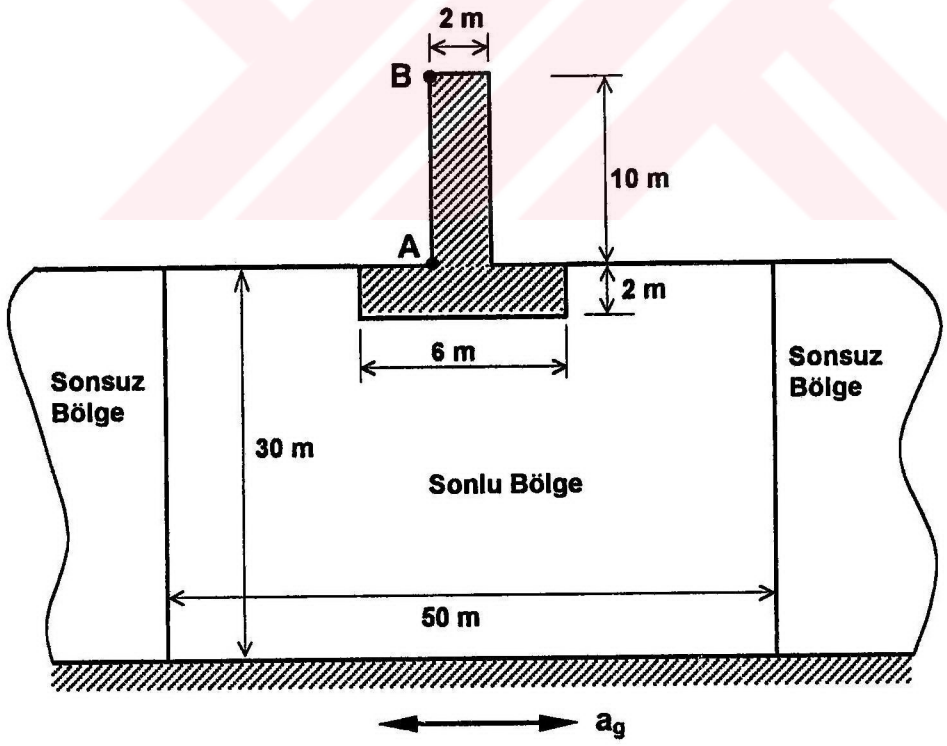


Şekil 5.6. Zeminin üst noktasındaki deplasmanın zamanla değişimi

Yukarıdaki grafik incelendiğinde, analitik olarak elde edilen deplasman sonuçlarının, sonlu-sonsuz eleman modeli ile bulunan sonuçlar ile uyumlu oldukları söylenebilir. Yalnız, yukarıdaki grafikte verilen deplasmanlar üst noktanın toplam deplasmanı olup, sonlu-sonsuz eleman modeli ile bulunan relatif deplasmana yer deplasmanı eklenerek yukarıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

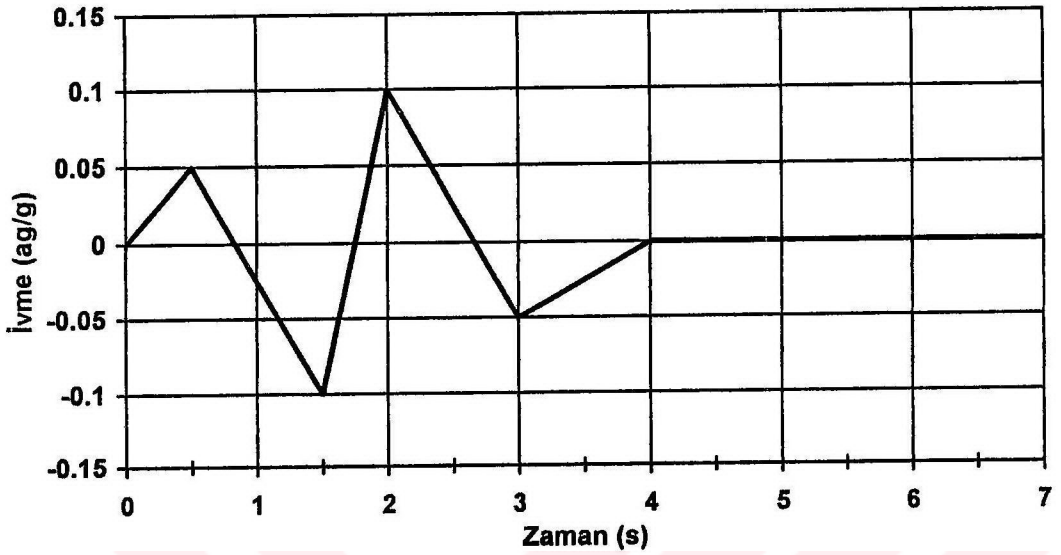
5.2.4.2. Elastik Zemin Tabakası Üzerinde İstinat Duvarı

Elastik zemin tabakası üzerine inşaa edilmiş gömülü, beton istinat duvarının, zeminin rijit tabanına etkiyen yer hareketi etkisi altındaki davranışı araştırılmaktadır. Yapı-zemin sistemi aşağıda görülmektedir (Şekil 5.7). Problemde, zeminin mevcudiyetinin yapı üzerindeki etkisi araştırılmaktadır. Aşağıdaki şekilde görülen A noktasındaki gerilmeler (σ_x ve σ_y) ve B noktasının relatif yatay deplasmanının zamanla değişimleri araştırılmaktadır.



Şekil 5.7. Elastik zemin tabakası üzerinde istinat duvarı

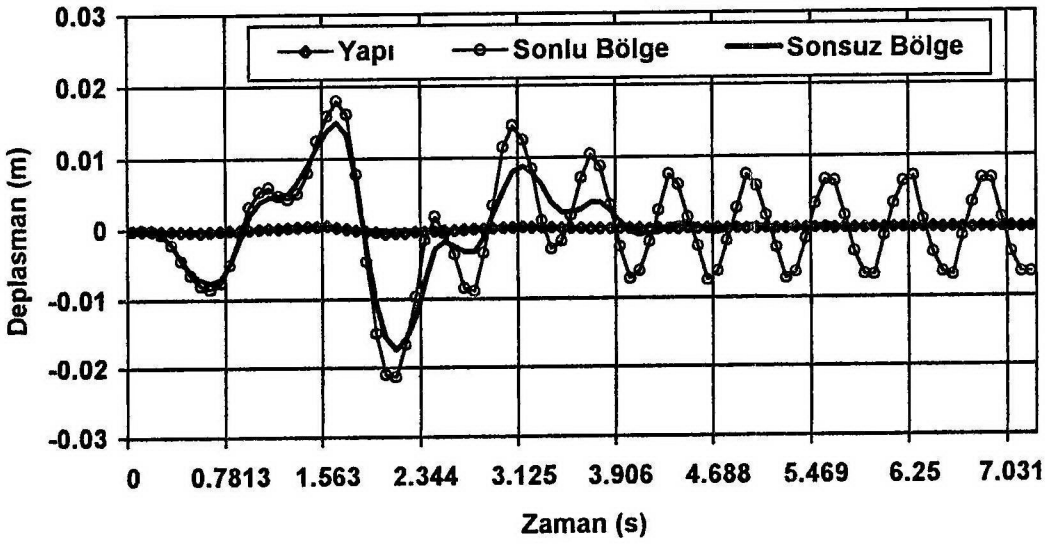
Rijit tabana etkiyen ivmenin (a_g) zamanla değişimi aşağıda görülmektedir.



Şekil 5.8. İvmenin zamanla değişimi

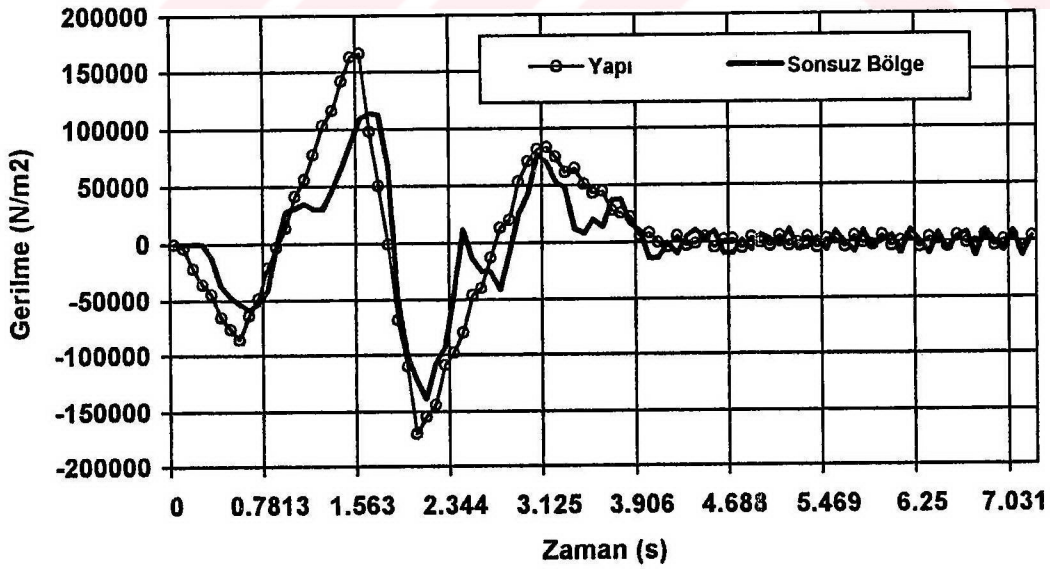
Zemin ve beton için malzeme sabitleri, $E_z=2\times10^8$ N/m^2, $\rho_z=2000$ kg/m^3, $\nu_z=0.30$, $E_b=2\times10^{10}$ N/m^2, $\rho_b=2400$ kg/m^3 ve $\nu_b=0.15$ şeklinde seçilmiştir. Sonsuz elemanlarda deplasman azaltma parametresi $\alpha=1.39$ ve Laplace dönüşümleri için aT=6 olarak alınmıştır. Burada üç dalga tipini içeren sonsuz eleman kullanılmıştır.

Bu problemde öncelikle zeminin sonsuz rijit olduğu varsayılarak, sadece üst yapı gözönüne alınmış ve yer hareketi bu yapının altına etki ettirilerek çözüm yapılmıştır. Daha sonra zeminin mevcudiyeti gözönüne alınarak yapı-zemin etkileşim analizi gerçekleştirilmiştir. Sonlu-sonsuz eleman modeli kullanılarak elde edilen sonuçlar aşağıdaki grafiklerde görülmektedir. Şekil 5.9'da B noktasının yatay deplasmanının zamanla değişimi görülmektedir. Bu grafikten, zeminin mevcudiyetinin hesaplarda gözönüne alınmasının davranışı değiştirdiği ve deplasmanın arttığı gözlenmektedir. B noktasının yatay deplasmanı, bir kez yapı tek başına alınarak, bir kez yapı ile birlikte sonlu bölge kullanılarak, son olarakta yapı ile sonsuz bölge gözönüne alınarak bulunmuştur. Bu grafikten sadece sonlu bölge alındığında dalgaların yansımasından dolayı davranışın bozulduğu görülmektedir.

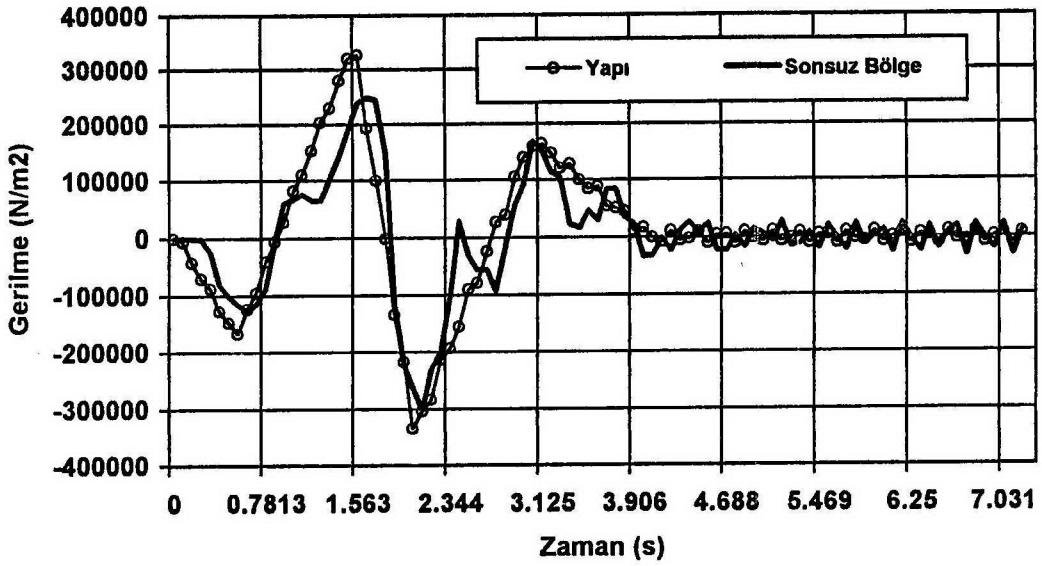


Şekil 5.9. B noktasındaki deplasmanın zamanla değişimi

Şekil 5.10 ve Şekil 5.11'de ise A noktasındaki yatay (σ_x) ve düşey (σ_y) gerilmenin zamanla değişimleri görülmektedir. Grafikler incelendiğinde, sadece yapının gözönüne alınarak deprem analizi yapılmasının, yapı-zemin etkileşiminin gözönüne alınarak analiz yapılmasına göre daha büyük gerilme değerleri oluşturduğu gözlenmektedir.



Şekil 5.10. A noktasındaki yatay gerilmenin zamanla değişimi



Şekil 5.11. A noktasındaki düşey gerilmenin zamanla değişimi

5.3. Üç Boyutlu Yapı-Zemin Etkileşim Analizi

Yer hareketi bulunması durumunda, üç boyutlu yapı-zemin etkileşim analizi problemleri iki şekilde ele alınabilmektedir. Bunlardan ilki, yapı ve zemin birlikte düşünülerek direkt olarak çözüm yapılmasıdır. İkinci yol ise, sadece yapının gözönüne alınması olup, yapı ile zeminin birleştiği noktalarda (rijit temel) impedans ilişkisi kullanılarak zeminin mevcudiyeti yapının davranışında gözönüne alınmaktadır. Bu tez çalışmasında, üç boyutlu sistemlerin direkt olarak ele alınmasının bazı zorluklarından dolayı, ikinci yöntem kullanılarak deprem analizi yapılmaktadır. Direkt yöntemde öncelikle, her Laplace parametresi için tüm sistem matrisleri ve yük vektörleri oluşturulmakta ve sonra çözülmektedir. Burada kullanılan üç boyutlu sonlu elemanların yeteri kadar hassas olmamasından dolayı, problemlerde çok fazla eleman alınması zorunluluğu ortaya çıkmaktadır. Ayrıca, herhangi bir deprem kaydı durumunda kaydedilen yer hareketi nokta sayısı çok fazla olmaktadır. Direkt yöntem kullanılması halinde bütün bu nokta sayısı kadar çözüm yapılması gerekmekte ve dolayısı ile analiz için harcanan zaman oldukça artmaktadır.

Direkt yöntemin yukarıda anlatılan dezavantajları gözönüne alınarak, burada ikinci yöntem kullanılacaktır. Bunun için gerekli impedans (veya kompleyans) değerleri, daha önce harmonik sonsuz elemanlar kullanılarak bulunmuştur. Yapının rijit bir temel vasıtasıyla zemine oturduğu varsayılmaktadır. Bu tez çalışmasında özel olarak Laplace dönüşüm uzayında, N katlı kesme tipi binalar için yapı-zemin etkileşim analizi formülasyonu yapılacaktır.

5.3.1. Hareket Denkleminin Elde Edilmesi

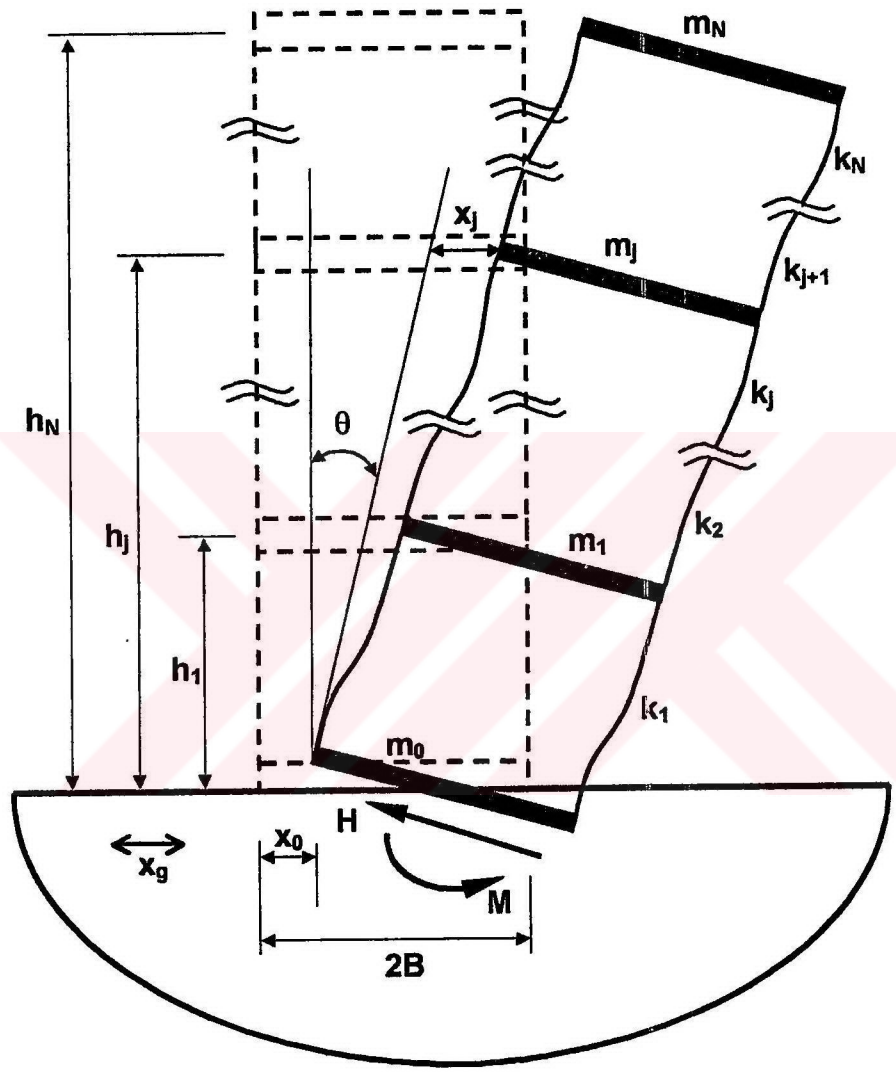
Yer hareketi bulunması durumunda, N katlı kesme tipi bir bina gözönüne alınarak relatif deplasman cinsinden formülasyon gerçekleştirilmektedir (Şekil 5.12). Özel olarak kesme tipi binalar gözönüne alındığından, burada sadece kat hizalarında yatay deplasmanlar meydana gelmektedir. Bu durumda kesme tipi binanın dinamik davranışını idare eden denklemin,

$$[M]\{\ddot{X}^t\}+[C]\{\dot{X}\}+[K]\{X\}=0 \tag{5.28}$$

şeklinde olduğu elastodinamikten bilinmektedir. Yukarıda görülen $\{\ddot{X}^t\}$ toplam deplasmanlardan elde edilen ivme vektörü olup, herhangi bir j ninci katın toplam deplasmanı,

$$x_j^t = x_0 + x_j + h_j\theta \tag{5.29}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Burada x_0 ve θ, rijit temelin toplam yatay deplasmanı ve dönmesini gösterirken, h_j ve x_j ise j ninci katın yerden yüksekliğini ve temele göre relatif yatay deplasmanını göstermektedir. Yukarıda (5.28) hareket denklemindeki sistem matrislerinin mertebesi (N×N) dir. Fakat sistemde toplam N+2 adet bilinmeyen bulunmaktadır (N adet kat deplasmanı ile birlikte temelin deplasmanı ve dönmesi). Bu nedenle sadece üst yapı gözönüne alınarak toplam yatay kuvvet ve tabana göre moment denge denklemleri yazılmaktadır.



Şekil 5.12. Deprem etkisinde N katlı kesme tipi bina

Şekil 5.12 yardımıyla üst yapının denge denklemleri,

$$\sum_{j=1}^{N} m_j \ddot{x}_j^t + m_0 \ddot{x}_0 + H = 0$$
$$\sum_{j=1}^{N} m_j h_j \ddot{x}_j^t + I_t \ddot{\theta} + M = 0 \qquad (5.30)$$

olarak bulunmaktadırlar. Burada I_t temel ve yapının kütlesel atalet momentlerinin toplamıdır. H ve M ise yapının tabanına etkiyen, yapı ile zemin arasındaki etkileşim kuvvetleridir. Yukarıda (5.29) denklemi ile verilen toplam deplasman tarifi, (5.28) ve (5.30) denklemlerinde yazılırsa,

$$[M]\{\ddot{X}\} + [C]\{\dot{X}\} + [K]\{X\} + [M]\{1\}\ddot{x}_0 + [M]\{h\}\ddot{\theta} = 0$$
$$\{1\}^T[M]\{\ddot{X}\} + m_T \ddot{x}_0 + d_T \ddot{\theta} + H = 0 \qquad (5.31)$$
$$\{h\}^T[M]\{\ddot{X}\} + d_T \ddot{x}_0 + I_T \ddot{\theta} + M = 0$$

şeklinde N+2 adet denklemden oluşan sistem denklem takımı elde edilir. Burada, {1} tüm elemanları 1 olan vektörü, {h} ise katların yerden olan yüksekliklerini gösteren vektördür. Ayrıca (5.31) denklemlerinde görülen m_T, d_T ve I_T aşağıdaki gibi tarif edilmektedirler.

$$m_T = \sum_{j=0}^{N} m_j \quad ; \quad d_T = \sum_{j=1}^{N} m_j h_j \quad ; \quad I_T = I_t + \sum_{j=1}^{N} m_j h_j^2 \qquad (5.32)$$

Yukarıdaki denklemlerde görülen H yatay kuvveti ve M momenti, yapı ile zemin arasındaki impedans ilişkisinden elde edilmektedir. Yapı ile zemin arasındaki etkileşimi sağlayan impedans ilişkisi,

$$\begin{Bmatrix} H \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{HH} & S_{HM} \\ S_{MH} & S_{MM} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_0 - x_g \\ \theta \end{Bmatrix} \qquad (5.33)$$

şeklinde verilmektedir. Bu ifadeler açık yazılırsa aşağıdaki bağıntılar bulunur.

$$H = S_{HH}(x_0 - x_g) + S_{HM}\theta$$
$$M = S_{MH}(x_0 - x_g) + S_{MM}\theta \qquad (5.34)$$

Başlangıç şartları sıfır kabul edilerek (5.31) denklemlerinin Laplace dönüşümü alınıp, (5.34) te verilen impedans denklemleri kullanılarak,

$$\begin{aligned}
&\left(s^2[M]+s[C]+[K]\right)\{\bar{X}\}+s^2[M]\{1\}\bar{x}_0+s^2[M]\{h\}\bar{\theta}=0\\
&s^2\{1\}^T[M]\{\bar{X}\}+\left(s^2m_T+S_{HH}\right)\bar{x}_0+\left(s^2d_T+S_{HM}\right)\bar{\theta}=S_{HH}\bar{x}_g \qquad (5.35)\\
&s^2\{h\}^T[M]\{\bar{X}\}+\left(s^2d_T+S_{MH}\right)\bar{x}_0+\left(s^2I_T+S_{MM}\right)\bar{\theta}=S_{MH}\bar{x}_g
\end{aligned}$$

şeklinde lineer, cebrik denklem takımı elde edilmektedir. Burada Laplace dönüşüm parametresi, s=a+iω şeklinde olup, impedansların bu ω değerine karşılık gelen ifadeleri kullanılmaktadır. Yukarıda görülen (5.35) denklemleri Laplace dönüşüm uzayında sistem hareket denklem takımını oluşturmaktadır. Bu ifadeler matris notasyonunda aşağıdaki şekilde düzenlenmektedir.

$$\left[\begin{array}{c|c|c}
\left(s^2[M]+s[C]+[K]\right) & s^2[M]\{1\} & s^2[M]\{h\}\\
\hline
s^2\{1\}^T[M] & s^2m_T+S_{HH} & s^2d_T+S_{HM}\\
\hline
s^2\{h\}^T[M] & s^2d_T+S_{MH} & s^2I_T+S_{MM}
\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}\{\bar{X}\}\\ \bar{x}_0\\ \bar{\theta}\end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{c}\{0\}\\ S_{HH}\bar{x}_g\\ S_{MH}\bar{x}_g\end{array}\right\} \qquad (5.36)$$

Yukarıdaki ifadede görülen [C], sönüm matrisi olup bu çalışmada, sistemde viskoz sönüm olduğu kabulü yapılmaktadır. Bu nedenle, elastik-viskoelastik anolojisi yardımıyla (s[C]+[K]) ifadesi yerine (1+gs)[K] ifadesi kullanılarak sistemdeki sönüm gözönüne alınmaktadır.

Kesme tipi binalar için [K] sistem rijitlik matrisi üçlü diyagonal formda ve [M] sistem kütle matrisi ise diyagonal formda aşağıda görüldüğü gibi elde edilmektedir.

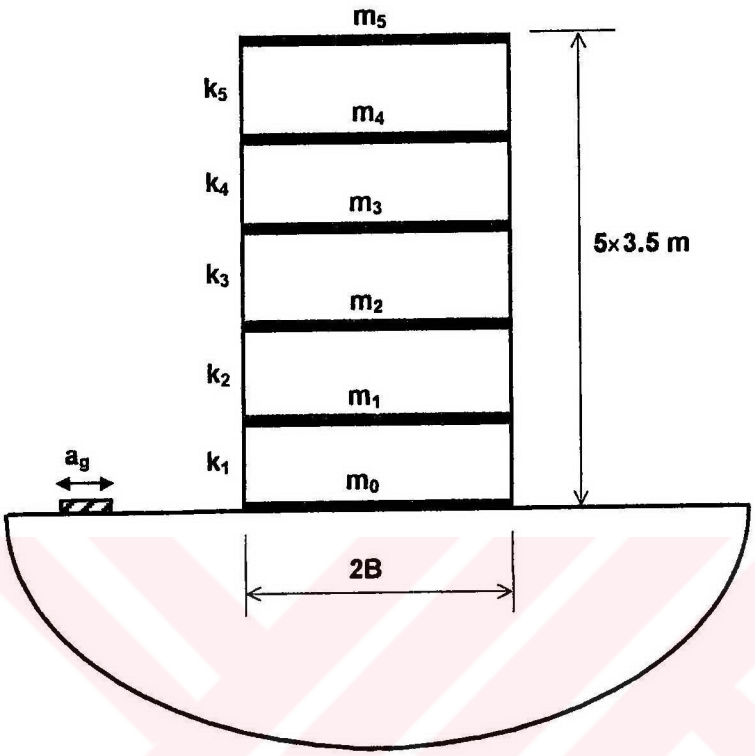
$$[M]_{(N\times N)}=\begin{bmatrix} m_1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m_j & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & m_N \end{bmatrix} \tag{5.37}$$

$$[K]_{(N\times N)}=\begin{bmatrix} (k_1+k_2) & -k_2 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ -k_2 & (k_2+k_3) & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -k_3 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (k_j+k_{j+1}) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & k_N \end{bmatrix} \tag{5.38}$$

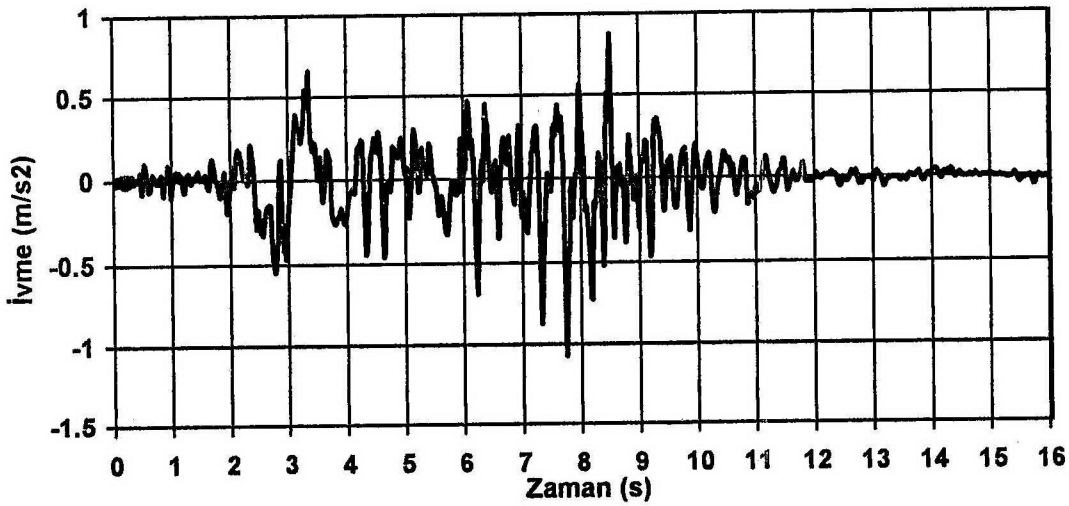
Bu şekilde bulunan sistem matrisleri kullanılarak, (5.36) da görülen sistem denklem takımı oluşturulmaktadır. Yer hareketinin Laplace dönüşümü kullanılarak, kat deplasmanları bir dizi Laplace dönüşüm parametresi için elde edilmektedir. Daha sonra, ters dönüşüm alınarak bu büyüklüklerin zaman uzayındaki değerleri hesaplanmaktadır.

5.3.2. Sayısal Uygulama

Deprem durumunda, üç boyutlu sistemlerin yapı-zemin etkileşim analizini yapan, yukarıda anlatılan formülasyona dayalı olarak FORTRAN77 dilinde bilgisayar programı hazırlanmıştır. Aşağıda görülen, rijit kare temele oturmuş 5 katlı kesme tipi binanın "PACOIMA" deprem kaydı etkisi altında yapı-zemin etkileşim analizi yapılmaktadır (Şekil 5.13). PACOIMA depremi esnasında kaydedilen ivmenin zamanla değişimi aşağıda görülmektedir (Şekil 5.14).



Şekil 5.13. 5 katlı kesme tipi bina

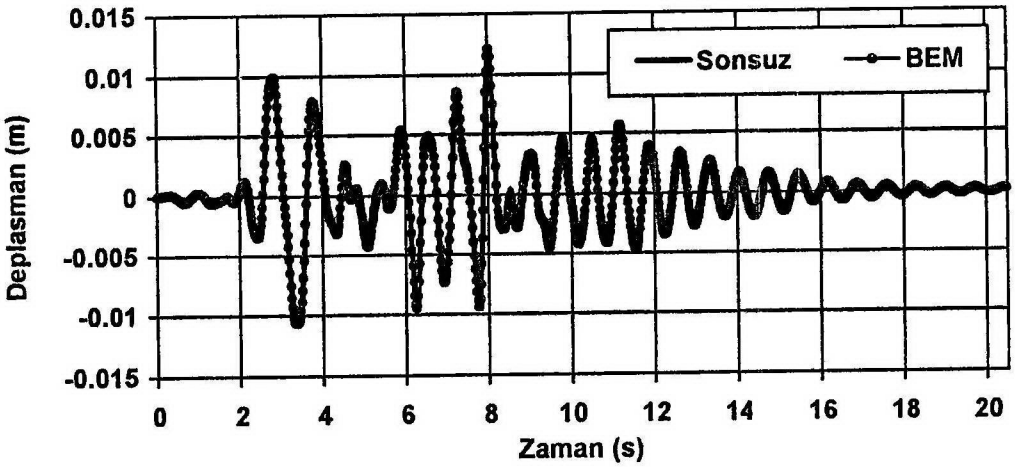


Şekil 5.14. PACOIMA depremi ivme kaydı

Problemde kullanılan malzeme özellikleri aşağıda görüldüğü gibi seçilmiştir.

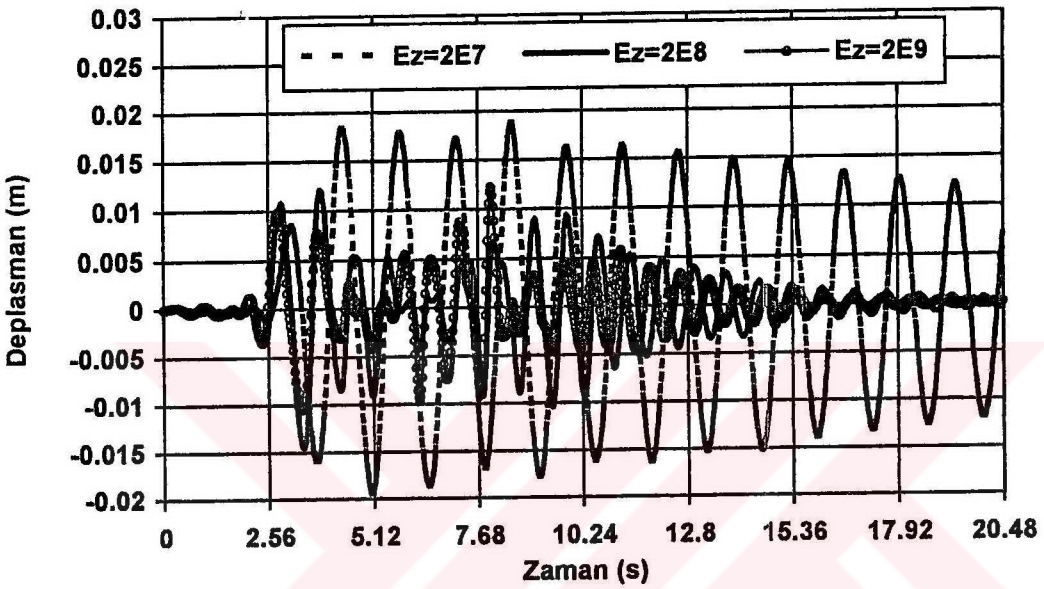
YAPI	TEMEL	ZEMİN
m_j=15000 kg k_j=15000 kN/m I_j=15000 kg-m^2 h_j=3.5×j m	B=1.75 m m_0=30000 kg I_0=30000 kg-m^2	ρ=1700 kg/m^3 ν=1/3 E_{z1}=2×10^7 N/m^2 E_{z2}=2×10^8 N/m^2 E_{z3}=2×10^9 N/m^2

Bu problemde 5. katın yatay deplasmanının zamanla değişimi aranmaktadır. Öncelikle, E_z=2×10^9 N/m^2 ve g=0.01 seçilerek, bir kez sonlu-sonsuz eleman kullanımından bulunan impedanslarla, bir kezde sınır eleman metodu ile bulunan impedanslarla hesaplanmış olan sonuçlar aşağıda görülmektedir (Şekil 5.15). Her iki metodla bulunan impedansların birbirlerinden bir miktar farklı olmasına rağmen, sonuçların yakın olduğu görülmektedir. Bu sebepten dolayı burada hesaplanan tüm büyüklükler için sonlu-sonsuz eleman modeli ile bulunan impedanslar kullanılmıştır.



Şekil 5.15. Değişik impedanslarla bulunan deplasmanın karşılaştırılması

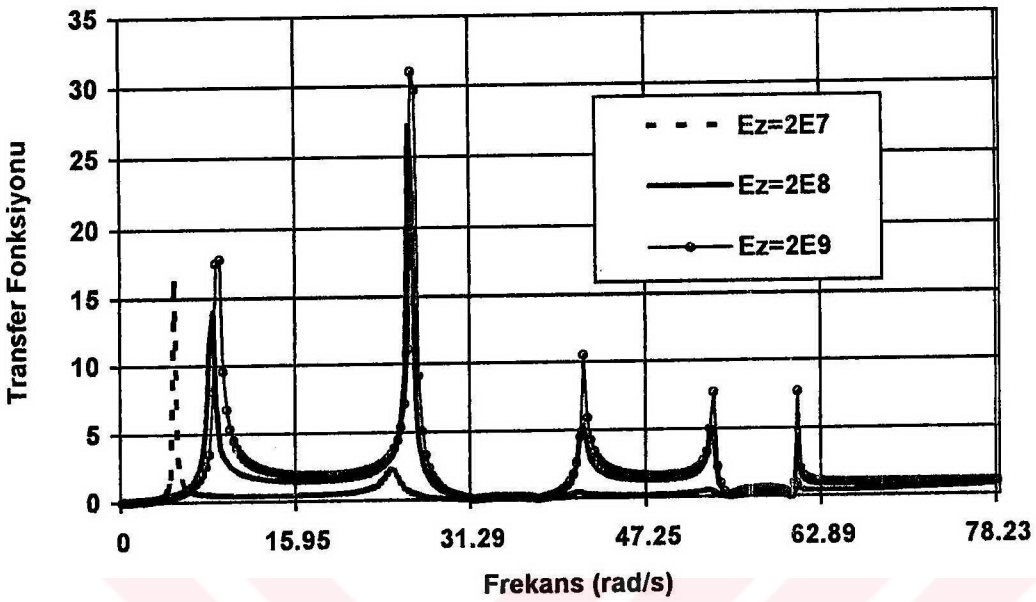
Zemin rijitliğinin davranışı nasıl etkilediğini araştırmak için, üç değişik zemin özelliği kullanılarak 5. katın yatay deplasmanının zamanla değişimi hesaplanmıştır (Şekil 5.16). Burada çözüm yaparken, yapıda g=0.01 kadar viskoz sönüm olduğu kabul edilmiştir. Grafikten, zemin sertleştikçe deplasmanların küçüldüğü gözlenmektedir.



Şekil 5.16. Yatay deplasmanın zeminin rijitliği ile değişimi

Yukarıdaki çalışmalara ilave olarak, yer hareketi durumunda 5. katın yatay deplasmanının çeşitli zemin tipleri için transfer fonksiyonları ($u_5=T\times u_g$) hesaplanmıştır. Bu hesaplamalar sırasında yapının sönümsüz olduğu kabul edilmiştir. Çeşitli zemin tipleri için transfer fonksiyonlarının frekansla değişimi Şekil 5.17'de görülmektedir. Ayrıca temeli ankastre düşünülerek bu binaya ait serbest titreşim frekansları hesaplanmış olup aşağıda verilmektedir.

Mod	1	2	3	4	5
ω (rad/s)	9.00	26.27	41.42	53.21	60.68



Şekil 5.17. 5. katın çeşitli zeminler için transfer fonksiyonu

Sonuçlar karşılaştırıldığında, zemin sertleştikçe binanın serbest titreşim frekanslarına rastlayan noktalarda pik değerler (rezonans) oluşmaktadır.

BÖLÜM 6
BULGULAR VE TARTIŞMA

Dinamik yapı-zemin etkileşimi problemlerinde, sadece sonlu elemanların kullanılması halinde yapay sınırlar meydana gelmektedir. Ortamda yayılan dalgalar bu yapay sınırlara çarparak yansımakta ve davranış gerçeğe uymamaktadır. Sonsuza uzanan bölgelerde sonsuz elemanlar kullanılarak bu olumsuz durum önlenebilmektedir.

Dış yüklemenin etkisindeki iki boyutlu yapı-zemin problemlerinin analizinde, sonlu-sonsuz elemanların birlikte kullanımı ile çözülen örneklerde yeterli hassasiyette sonuçlar elde edilmiştir. Değişik yöntemlerle çözülen veya analitik sonucu bilinen örneklerden, sonlu-sonsuz elemanların güvenle kullanılabileceği görülmüştür. Özellikle birden fazla dalga karakterini içeren sonsuz elemanlar kullanılarak elde edilen sonuçların tatminkar olduğu görülmüştür. Ayrıca, bir veya iki dalga tipini içeren sonsuz eleman kullanılırken, hangi dalga özelliklerinin gözönüne alınacağının seçimi zor olmaktadır. Üç dalga tipini içeren sonsuz elemanda ise böyle bir seçim zorunluluğu olmamaktadır.

Keyfi yükleme etkisi altındaki yapı-zemin sistemleri ele alınırken sonsuz elemanların formülasyonu, Laplace dönüşüm uzayında yapılmaktadır. Kullanılan transient sonsuz elemanlar, Laplace dönüşüm parametresini içerirken, sonlu elemanlar bu parametreden bağımsızdır. Bu sebeple, sonlu elemanların oluşturduğu yakın bölgede sistem matrislerinin bir defa oluşturulması yeterli olmaktadır. Buna karşılık, her Laplace parametresi için sadece sonsuz elemanlara ait matrislerin yeniden hesaplanması gerekmektedir.

Zamanla değişimi keyfi olan yüklemenin etkisindeki sistemlerde, sonlu-sonsuz eleman modeli kullanılarak bulunan sonuçların, sınır eleman yöntemi ile elde edilenlerle uyumlu oldukları gözlenmektedir.

İki boyutlu, yarı sonsuz ortamlarda çukur açılmasının, hem harmonik hemde transient yükleme durumunda belirgin bir titreşim izolasyonu sağladığı gözlenmektedir.

Ele alınan örneklerden, üç boyutlu yapı-zemin etkileşimi problemlerinde de sonlu ve sonsuz elemanların güvenle kullanılabileceği görülmektedir. Sonlu eleman formülasyonu kullanılarak sonlu boyuttaki üst yapı ile zemin birlikte modellenerek tüm sistemin direkt analizi gerçekleştirilebilmektedir. Sınır eleman metodu kullanılarak direkt analiz yapılması pek mümkün olamamaktadır. Bununla beraber, ortamda yayılan dalga karakterleri otomatik olarak gözönüne alındığından, yarı sonsuz ortamlarda sınır eleman metodu başarıyla kullanılmaktadır.

Yer hareketi (deprem) etkisi altında, iki boyutlu problemlerde, sadece tabanı rijit olan tabakalı zemin durumu gözönüne alınabilmektedir. Bununla beraber, tüm ivme (veya deplasman) kaydı için sistem direkt olarak çözülmektedir. Çözüm zamanı ve bilgisayar hafızası bakımından, üç boyutlu sistemlerde zorluklar ortaya çıkmaktadır. Bu nedenle, üç boyutlu yapı-zemin problemleri, direkt olarak ele alınmayıp, yarı sonsuz ortamın impedans ilişkisi yardımıyla, alt yapılara ayırma yöntemi (Substructure method) kullanılarak incelenmektedir. Sonlu-sonsuz eleman kullanılarak bulunan impedanslar, sınır eleman yöntemiyle bulunanlardan bir miktar farklı olmasına rağmen, deprem problemi çözüldüğünde sonuçların yakın çıktığı gözlenmektedir.

Sonlu eleman formülasyonu ve bu çalışmada geliştirilen sonsuz elemanlar kullanılarak, homojen, elastik ve/veya viskoelastik ortamlar kolayca ele alınabilmektedir. Ayrıca, sistem matrisleri bant ve simetri özelliklerini koruduklarından, gelişmiş bilgisayar alt programları kullanılabilmekte, hafıza ve hız bakımından kazanç sağlanabilmektedir.

BÖLÜM 7
SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, dinamik yapı-zemin problemleri ele alınırken, dış yükleme durumuna ağırlık verilmiştir. Harmonik veya zamanla değişimi keyfi olan yükleme etkisindeki sistemler için çeşitli sonsuz eleman modelleri önerilmiştir. Harmonik yükleme durumu için literatürde çeşitli sonsuz eleman modelleri mevcut iken, keyfi yükleme durumu için sonsuz eleman modelleri bu çalışmada geliştirilmiş ve direkt yapı-zemin analizinde başarılı bir şekilde uygulanmıştır. Geliştirilen sonsuz elemanlar, dalgaların yayılması ve sonsuzda sönmesi durumunu (radiation condition) gözönüne alabilecek ve aynı anda birden fazla dalga karakterini içerebilecek şekilde tasarlanmıştır. Üç boyutlu sistemlerde, çubuklardan meydana gelen üst yapı ile yarı sonsuz zemin birlikte, direkt olarak incelenebilmektedir.

Üç boyutlu yapı-zemin problemleri incelenirken bazı zorluklarla karşılaşılmıştır. Öncelikle, ele alınan yarı sonsuz ortam elemanlara bölünerek sonlu-sonsuz eleman ağı oluşturulmaktadır. Gerçeğe yakın sonuçlar elde edebilmek için küçük boyutlara sahip çok sayıda eleman kullanılmakta, bu nedenle bilinmeyen sayısı ve dolayısıyla çözüm süresi artmaktadır.

Ayrıca, üç boyutlu sistemlerin modellenmesinde sonlu eleman olarak, lineer brick eleman kullanılmaktadır. En basit üç boyutlu sonlu eleman olan brick eleman kullanımı bazı durumlarda yetersiz kalmaktadır. Bu nedenle, daha iyi sonuçlar elde edebilmek için, 20 düğümlü, kuadratik sonlu elemanın kullanılması önerilmektedir. Bu durumda, kullanılacak sonlu elemana uygun sonsuz elemanların geliştirilmesi gerekmektedir. Ayrıca, zemin ile üç boyutlu prizmatik çubuk elemanların birleştiği noktalarda kullanılan, geçiş elemanının (rotational brick) her düğümünde 6 serbestlik derecesi (3 deplasman, 3 dönme) bulunmaktadır. Bu elemanın yerine, sadece çubuk elemanı ile birleştiği düğümlerde dönme serbestlik derecelerine sahip başka bir geçiş elemanının geliştirilmesi önerilmektedir.

Üç boyutlu yarı sonsuz zemin üzerinde bulunan kesme tipi binaların deprem analizi, alt yapılara ayırma metodu (Substructure method) ile yapılmaktadır. Yüzeysel, rijit bir temel vasıtasıyla zemine oturan yapının davranışında, zeminin etkisi impedans ilişkisi yardımıyla gözönüne alınmaktadır. Bu durumda, üç boyutlu harmonik sonsuz elemanlar kullanılarak önceden hesaplanmış, kompleyans (veya impedans) değeleri kullanılmaktadır. Genel bir üst yapı ile gömülü veya esnek temel ve zeminden oluşan sistemler için, alt yapılara ayırma metodu ile genel amaçlı bir bilgisayar programının hazırlanması planlanmaktadır.

KAYNAKLAR

ABRAMOWITZ, M., and STEGUN, I. A., 1968. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables. Dover, New York, 1046s.

AHMAD, S., and BANERJEE, P. K., 1988. Multi-Domain BEM for Two Dimensional Problems of Elastodynamics. Int. J. Num. Meth. Engrg., 26: 891-911.

BETTESS, P., 1977. Infinite Elements. Int. J. Num. Meth. Engrg., 11: 53-64.

BETTESS, P., and BETTESS, J. A., 1984. Infinite Elements for Static Problems. Engrg. Comput., 1: 4-15.

BETTESS, P., and ZIENKIEWICZ, O. C., 1977. Diffraction and Refraction of Surface Waves Using Finite and Infinite Elements. Int. J. Num. Meth. Engrg., 11: 1271-1290.

BYCROFT, G. N., 1956. Forced Vibrations of a Rigid Circular Footing on a Semi-Infinite Elastic Space and on an Elastic Stratum. Phil. Trans. Roy. Soc. London, A248: 327-368.

CHONGBIN, Z., and VALLIAPPAN, S., 1993. A Dynamic Infinite Element for Three-Dimensional Infinite-Domain Wave Problems. Int. J. Num. Meth. Engrg., 36: 2567-2580.

CHOW, Y. K., 1986. Simplified Analysis of Dynamic Response of Rigid Foundations with Arbitrary Geometries. Earthquake Engrg. Struc. Dyn., 14: 643-653.

CHOW, Y. K., 1987. Vertical Vibration of Three-Dimensional Rigid Foundations on Layered Media. Earthquake Engrg. Struc. Dyn., 15: 585-594.

CHUHAN, Z., and CHONGBIN, Z., 1987. Coupling Method of Finite and Infinite Elements for Strip Foundation Wave Problems. Earthquake Engrg. Struc. Dyn., 15: 839-851.

CLOUGH, R. W., and PENZIEN, J., 1993. Dynamics of Structures. McGraw-Hill, Singapore, 738s.

COOK, R. D., MALKUS, D. S., and PLESHA, M. E., 1989. Concepts and Applications of Finite Element Analysis. John Wiley & Sons, Singapore, 630s.

COOLEY, J. W., LEWIS, P. A. W., and WELCH, P. D., 1970. The Fast Fourier Transform Algorithm: Programming Considerations in the Calculation of Sine, Cosine and Laplace Transforms. J. Sound Vib., 12: 315-337.

CRAIG, R. R., 1981. Structural Dynamics. John Wiley & Sons, Singapore, 527s.

DUBNER, H., and ABATE, J., 1968. Numerical Inversion of Laplace Transforms by Relating Them to the Finite Fourier Cosine Transform. J. Assoc. Comp. Mechinary, 15(1): 115-123.

DURBIN, F., 1974. Numerical Inversion of Laplace Transforms: An Efficient Improvement to Dubner and Abate's Method. The Computer Journal, 17(4): 371-376.

FUNG, Y. C., 1965. Foundations of Solid Mechanics. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 525s.

GUTIERREZ, J. A., and CHOPRA, A. K., 1978. A Substructure Method for Earthquake Analysis of Structures Including Structure-Soil Interaction. Earthquake Engrg. Struc. Dyn., 6: 51-69.

ISRAIL, A. S. M., and BANERJEE, P. K., 1990a. Advanced Time-Domain Formulation of BEM for Two-Dimensional Transient Elastodynamics. Int. J. Num. Meth. Engrg., 29: 1421-1440.

ISRAIL, A. S. M., and BANERJEE, P. K., 1990b. Effects of Geometrical and Material Properties on the Vertical Vibration of Three-Dimensional Foundations by BEM. Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech., 14: 49-70.

KARABALIS, D. L., and BESKOS, D. E., 1984. Dynamic Response of 3-D Rigid Surface Foundations by Time Domain Boundary Element Method. Earthquake Engrg. Struc. Dyn., 12: 73-93.

KRISHNAMOORTHY, C. S., 1987. Finite Element Analysis – Theory and Programming. McGraw-Hill, New Delhi, 555s.

LUCO, J. E., 1974. Impedance Functions for a Rigid Foundation on a Layered Medium. Nuclear Engrg. Design, 31: 204-217.

LUCO, J. E., and WESTMAN, R. A., 1971. Dynamic Response of Circular Footings. J. Engrg. Mech. Div., ASCE, 97(M5): 381-395.

LUCO, J. E., and WESTMAN, R. A., 1972. Dynamic Response of a Rigid Footing Bounded to an Elastic Half Space. J. Applied Mech., ASME, 39(2): 527-534.

LYSMER, J., and KUHLEMEYER, R. L., 1969. Finite Dynamic Model for Infinite Media. J. Engrg. Mech. Div., ASCE, 95: 859-877.

MANSUR, W. J., 1983. A Time-Stepping Technique to Solve Wave Propagation Problems Using the Boundary Element Method. Ph. D. Thesis, University of Southampton.

MARQUES, J. M. M. C., and OWEN, D. R. J., 1984. Infinite Elements in Quasi-Static Materially Nonlinear Problems. Computers & Structures, 18(4): 739-751.

MEDINA, F., and PENZIEN, J., 1982. Infinite Elements for Elastodynamics. Earthquake Engrg. Struc. Dyn., 10: 699-709.

MENGİ, Y., TANRIKULU, A. H., and TANRIKULU, A. K., 1994. Boundary Element Method for Elastic Media - An Introduction. ODTÜ Basım İşliği, Ankara, 130s.

MENGİ, Y., and TANRIKULU, A. K., 1993. Absorbing Boundary Conditions in Soil-Structure Interaction Analysis (P. GÜLKAN and R. W. CLOUGH editors). Developments in Dynamic Soil-Structure Interaction, Kluwer Academic Publisher, Netherlands, pp. 111-146.

MURAKAMI, H., SHIOYA, S., YAMADA, I., and LUCO, J. E., 1981. Transmitting Boundaries for Time-Harmonic Elastodynamics on Infinite Domains. Int. J. Num. Meth. Engrg., 17: 1697-1716.

NARAYANAN, G. V., 1979. Numerical Operational Methods in Structural Dynamics. Ph. D. Thesis, University of Minnesota.

ÖZKAN, G., 1995. A Boundary Element Method for Axisymmetric Elastodynamic Analysis. Ph. D. Thesis, ODTÜ.

SCORDELIS, A. C., 1967. Analysis of Continuous Box Girder Bridges. Report No: 13945-14039, College of Engineering, Office of Research Services, University of California, Berkeley.

TEMEL, B., 1996. Dinamik Zemin-Yapı Etkileşimi Problemlerinin Sonlu-Sonsuz Elemanlar ve Laplace Dönüşüm Yöntemi ile Analizi. Doktora Tezi, Ç. Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü.

TEMEL, B., YERLİ, H. R., ve KIRAL, E., 1997. Dinamik Yapı-Zemin Etkileşimi Problemlerinin Sonlu ve Sonsuz Elemanlar ile Çözümü. İMO Teknik Dergi, 8(1): 1343-1362.

THOMSON, W. T., and KOBORI, T., 1963. Dynamic Compliance of Rectangular Foundation on an Elastic half-Space. J. Applied. Mech., ASME, 30(2): 579-584.

TIMOSHENKO, S., and GOODIER, J. N., 1951. Theory of Elasticity. McGraw-Hill, New York, 506s.

TSENG, M. N., and ROBINSON, A. R., 1975. A Transmitting Boundary for Finite Difference Analysis of Wave Propagation in Solids. Project No: NR 064-183, University of Illinois.

VARDOULAKIS, I. G., BESKOS, D. E., LEUNG, K. L., DASGUPTA, B., and STERLING, R. L., 1987. Computation of Vibration Levels in Underground Space. Int. J. Rock Mech. Min. Sci. and Geomech. Abstr., 24(5): 291-298.

VELETSOS, A. S., and VERBIC, B., 1973. Vibration of Viscoelastic Foundations. Earthquake Engrg. Struc. Dyn., 2: 87-102.

VON ESTORFF, O., and KAUSEL, E., 1989. Coupling of Boundary and Finite Elements for Soil-Structure Interaction Problems. Earthquake Engrg. Struc. Dyn., 18: 1065-1075.

VON ESTORFF, O., PAIS, A. L., and KAUSEL, E., 1990. Some Observations on Time Domain and Frequency Domain Boundary Elements. Int. J. Num. Meth. Engrg., 29: 785-800.

WOLF, J. P., 1988. Soil-Structure Interaction Analysis in Time Domain. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 446s.

WOLFRAM, S., 1991. Mathematica: A System for Doing Mathematics by Computer; Second Edition. Addison-Wesley, California, 961s.

WU, W., and SMITH, H. A., 1995. Efficient Modal Analysis for Structures with Soil-Structure Interaction. Earthquake Engrg. Struc. Dyn., 24: 283-299.

ZIENKIEWICZ, O. C., KELLY, D. W., and BETTESS, P., 1977. The Coupling of the Finite Element Method and Boundary Solution Procedures. Int. J. Num. Meth. Engrg., 11: 355-375.

ÖZGEÇMİŞ

1969 yılında Adana'da doğdum. İlk, orta ve lise öğrenimimi Adana'da tamamladım. 1987 yılında Çukurova Üniversitesi Mühendislik-Mimarlık Fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölümüne başlayıp, 1991 yılında mezun oldum. Aynı yıl Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalında yüksek lisans öğrenimime, 1993 yılında ise aynı Anabilim dalında araştırma görevlisi olarak çalışmaya başladım. 1994 yılında yüksek lisans eğitimimi tamamlayarak, yine aynı Anabilim dalında doktora programına girdim. Doktora programı boyunca da araştırma görevlisi olarak çalışmaya devam ettim.

EKLER

EK-A
İKİ DALGA TİPİNİ İÇEREN, İKİ BOYUTLU SONSUZ ELEMAN MATRİSLERİ

A.1. Kütle Matrislerinin Hesabı

Azalan fonksiyonlu tipik bir sonsuz elemanın kütle matrisi, düzlem elastisite ve eksenel simetrik haller için aşağıdaki gibi elde edilmektedir.

$$\left[m^{Sd}\right]_{(10\times10)} = h_e \int_{\eta=-1}^{+1}\int_{\xi=0}^{\infty} \rho[N]^T[N]|J|d\xi d\eta$$
$$\left[m^{Se}\right]_{(10\times10)} = 2\pi \int_{\eta=-1}^{+1}\int_{\xi=0}^{\infty} \rho[N]^T[N] r |J| d\xi d\eta \qquad (A.1)$$

Yukarıdaki tariflerde görülen şekil fonksiyonları matrisi, [N],

$$[N] = \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc|cc} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 \end{array}\right]_{(2\times10)} \qquad (A.2)$$

olarak tanımlanmaktadır. Kütle matrisi ifadesinde görülen matris çarpımı,

$$[N]^T[N] = \left[\begin{array}{cc|cc|c|cc} N_1N_1 & 0 & N_1N_2 & 0 & \cdots & N_1N_5 & 0 \\ 0 & N_1N_1 & 0 & N_1N_2 & \cdots & 0 & N_1N_5 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \hline N_5N_1 & 0 & N_5N_2 & 0 & \cdots & N_5N_5 & 0 \\ 0 & N_5N_1 & 0 & N_5N_2 & \cdots & 0 & N_5N_5 \end{array}\right] \qquad (A.3)$$

şeklinde bulunur. Tipik bir şekil fonksiyonu,

$$N_i = P_i(\xi,\omega)\, L_i(\eta)$$
$$P_i(\xi,\omega) = a_i\, e^{-(\alpha+\beta_1)\xi} + b_i\, e^{-(\alpha+\beta_2)\xi} \tag{A.4}$$

olarak seçilmektedir. Bu tarife göre,

$$N_i\, N_j = (P_i\, L_i)\,(P_j\, L_j) \tag{A.5}$$

olur. P_i ve P_j nin tarifleri yerlerine yazılıp sadeleştirmeler yapılırsa,

$$\begin{aligned} N_i N_j =& e^{-2(\alpha+\beta_1)\xi}\left[L_i\, L_j\, a_i\, a_j\right] \\ &+ e^{-2(\alpha+\frac{\beta_1+\beta_2}{2})\xi}\left[L_i\, L_j\,(a_i\, b_j + a_j\, b_i)\right] \\ &+ e^{-2(\alpha+\beta_2)\xi}\left[L_i\, L_j\, b_i\, b_j\right] \end{aligned} \tag{A.6}$$

ifadesi bulunur. İntegral içindeki tüm terimler için bu işlemler yapılıp yerlerine yazılırsa, sonlu yönde ($-1\le\eta\le+1$) Gauss-Legendre, sonsuz yönde ($0\le\xi\le\infty$) Newton-Cotes integrasyon yöntemi ile eleman kütle matrisi sayısal olarak hesaplanır.

A.2. Rijitlik Matrislerinin Hesabı

A.2.1. Düzlem Elastisite Hali

Tipik bir sonsuz eleman için eleman rijitlik matrisinin genel ifadesi, aşağıda görüldüğü gibi elde edilmektedir.

$$\left[k^{Sd}\right]_{(10\times10)} = h_e \int_{\eta=-1}^{+1}\int_{\xi=0}^{\infty} \left[k^*\right] |J|\, d\xi\, d\eta$$
$$\left[k^*\right] = \left[B^d\right]^T \left[D\right] \left[B^d\right] \tag{A.7}$$

Yukarıda görülen ifade genel olup, problemin tipine göre (düzlem gerilme veya düzlem şekil değiştirme) sadece [D] malzeme matrisinin elemanları değişmektedir. Fakat her iki durumda da bu matrisin formu,

$$[D]=\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{21} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix}_{(3\times 3)} \tag{A.8}$$

şeklindedir. Şekil değiştirme matrisi, $[B^d]$, ise tipik olarak,

$$[B^d]=\left[\begin{array}{cc|cc|c|cc} B_{11} & 0 & B_{13} & 0 & \cdots & B_{19} & 0 \\ \hline 0 & B_{22} & 0 & B_{24} & \cdots & 0 & B_{2,10} \\ \hline B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} & \cdots & B_{39} & B_{3,10} \end{array}\right] \tag{A.9}$$

formundadır. Eleman rijitlik matrisi tarifinde görülen $[k^*]$ matrisi hesaplanacak olursa, elemanları aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\left.\begin{aligned} k^*_{kp} &= D_{11}B_{1k}B_{1p} + D_{33}B_{21}B_{2s} \\ k^*_{ks} &= D_{12}B_{1k}B_{2s} + D_{33}B_{21}B_{1p} \\ k^*_{lp} &= D_{21}B_{21}B_{1p} + D_{33}B_{1k}B_{2s} \\ k^*_{ls} &= D_{22}B_{21}B_{2s} + D_{33}B_{1k}B_{1p} \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} i=1,2,3,4,5 \\ k=2i-1\ ,\ l=2i \\ j=1,2,3,4,5 \\ p=2j-1\ ,\ s=2j \end{array} \tag{A.10}$$

Şekil değiştirme matrisinin elemanları ise tipik olarak,

$$\left.\begin{aligned} B_{1k} &= J^*_{11}N_{i,\xi} + J^*_{12}N_{i,\eta} \\ B_{21} &= J^*_{21}N_{i,\xi} + J^*_{22}N_{i,\eta} \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} i=1,2,3,4,5 \\ k=2i-1 \qquad l=2i \end{array} \tag{A.11}$$

şeklinde daha önceden elde edilmişti. Şekil fonksiyonları ve türevleri,

$$N_i(\xi,\eta,\omega) = P_i(\xi,\omega)\, L_i(\eta)$$
$$N_{i,\xi} = P_{i,\xi}\, L_i \qquad (A.12)$$
$$N_{i,\eta} = P_i\, L_{i,\eta}$$

şeklinde yazılabilir. (A.4)'te görülen $P_i(\xi,\omega)$ değeri (A.12)'de yerine konursa,

$$N_i = (L_i a_i)\, e^{-(\alpha+\beta_1)\xi} + (L_i b_i)\, e^{-(\alpha+\beta_2)\xi}$$
$$N_{i,\xi} = \left[-L_i a_i (\alpha+\beta_1)\right] e^{-(\alpha+\beta_1)\xi} + \left[-L_i b_i (\alpha+\beta_2)\right] e^{-(\alpha+\beta_2)\xi} \qquad (A.13)$$
$$N_{i,\eta} = (a_i L_{i,\eta})\, e^{-(\alpha+\beta_1)\xi} + (b_i L_{i,\eta})\, e^{-(\alpha+\beta_2)\xi}$$

olarak bulunur. Burada, (A.13) tarifleri (A.11)'de yerine yazılıp düzenlemeler yapılırsa, şekil değiştirme matrisinin elemanları aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$B_{1k} = bk1\; e^{-(\alpha+\beta_1)\xi} + bk2\; e^{-(\alpha+\beta_2)\xi}$$
$$B_{1p} = bp1\; e^{-(\alpha+\beta_1)\xi} + bp2\; e^{-(\alpha+\beta_2)\xi} \qquad (A.14a)$$
$$B_{2l} = bl1\; e^{-(\alpha+\beta_1)\xi} + bl2\; e^{-(\alpha+\beta_2)\xi}$$
$$B_{2s} = bs1\; e^{-(\alpha+\beta_1)\xi} + bs2\; e^{-(\alpha+\beta_2)\xi}$$

$$bk1 = \left[-a_i J^*_{11} L_i (\alpha+\beta_1) + a_i J^*_{12} L_{i,\eta}\right]$$
$$bk2 = \left[-b_i J^*_{11} L_i (\alpha+\beta_2) + b_i J^*_{12} L_{i,\eta}\right] \qquad (A.14b)$$
$$bp1 = \left[-a_j J^*_{11} L_j (\alpha+\beta_1) + a_j J^*_{12} L_{j,\eta}\right]$$
$$bp2 = \left[-b_j J^*_{11} L_j (\alpha+\beta_2) + b_j J^*_{12} L_{j,\eta}\right]$$

$$bl1 = \left[-a_i J^*_{21} L_i (\alpha+\beta_1) + a_i J^*_{22} L_{i,\eta}\right]$$
$$bl2 = \left[-b_i J^*_{21} L_i (\alpha+\beta_2) + b_i J^*_{22} L_{i,\eta}\right] \qquad (A.14c)$$
$$bs1 = \left[-a_j J^*_{21} L_j (\alpha+\beta_1) + a_j J^*_{22} L_{j,\eta}\right]$$
$$bs2 = \left[-b_j J^*_{21} L_j (\alpha+\beta_2) + b_j J^*_{22} L_{j,\eta}\right]$$

Bundan sonra, (A.14a) ifadeleri (A.10)'da yerine konursa, $[k^*]$ matrisinin elemanları elde edilir.

$$\begin{aligned} k^*_{kp} &= e^{-2(\alpha+\beta_1)\xi}\left[D_{11}(bk1\ bp1)+D_{33}(bl1\ bs1)\right] \\ &+ e^{-2(\alpha+\frac{\beta_1+\beta_2}{2})\xi}\left[D_{11}(bk1\ bp2+bk2\ bp1)+D_{33}(bl1\ bs2+bl2\ bs1)\right] \\ &+ e^{-2(\alpha+\beta_2)\xi}\left[D_{11}(bk2\ bp2)+D_{33}(bl2\ bs2)\right] \end{aligned} \qquad (A.15a)$$

$$\begin{aligned} k^*_{ks} &= e^{-2(\alpha+\beta_1)\xi}\left[D_{12}(bk1\ bs1)+D_{33}(bl1\ bp1)\right] \\ &+ e^{-2(\alpha+\frac{\beta_1+\beta_2}{2})\xi}\left[D_{12}(bk1\ bs2+bk2\ bs1)+D_{33}(bl1\ bp2+bl2\ bp1)\right] \\ &+ e^{-2(\alpha+\beta_2)\xi}\left[D_{12}(bk2\ bs2)+D_{33}(bl2\ bp2)\right] \end{aligned} \qquad (A.15b)$$

$$\begin{aligned} k^*_{lp} &= e^{-2(\alpha+\beta_1)\xi}\left[D_{21}(bl1\ bp1)+D_{33}(bk1\ bs1)\right] \\ &+ e^{-2(\alpha+\frac{\beta_1+\beta_2}{2})\xi}\left[D_{21}(bl1\ bp2+bl2\ bp1)+D_{33}(bk1\ bs2+bk2\ bs1)\right] \\ &+ e^{-2(\alpha+\beta_2)\xi}\left[D_{21}(bl2\ bp2)+D_{33}(bk2\ bs2)\right] \end{aligned} \qquad (A.15c)$$

$$\begin{aligned} k^*_{ls} &= e^{-2(\alpha+\beta_1)\xi}\left[D_{22}(bl1\ bs1)+D_{33}(bk1\ bp1)\right] \\ &+ e^{-2(\alpha+\frac{\beta_1+\beta_2}{2})\xi}\left[D_{22}(bl1\ bs2+bl2\ bs1)+D_{33}(bk1\ bp2+bk2\ bp1)\right] \\ &+ e^{-2(\alpha+\beta_2)\xi}\left[D_{22}(bl2\ bs2)+D_{33}(bk2\ bp2)\right] \end{aligned} \qquad (A.15d)$$

Bu şekilde $[k^*]$ matrisinin tüm elemanları bulunduktan sonra, sonlu yönde Gauss-Legendre, sonsuz yönde Newton-Cotes integrasyon yöntemi kullanılarak düzlem elastisite hali için eleman rijitlik matrisi sayısal olarak hesaplanır.

A.2.2. Eksenel Simetrik Hal

Eksenel simetrik problemler gözönüne alındığında, sonsuz eleman rijitlik matrisi aşağıda görüldüğü gibi elde edilmektedir.

$$\left[k^{Se}\right]_{(10\times10)} = 2\pi \int_{\eta=-1}^{+1} \int_{\xi=0}^{\infty} \left[k^*\right] r \left|J\right| d\xi\, d\eta$$
$$\left[k^*\right] = \left[B^e\right]^T [D] \left[B^e\right] \qquad \text{(A.16)}$$

Eksenel simetrik problemler için malzeme matrisi, [D], ve şekil değiştirme matrisi, $[B^e]$, aşağıdaki fomdadırlar.

$$[D] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & 0 \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{44} \end{bmatrix} \qquad \text{(A.17)}$$

$$\left[B^e\right] = \left[\begin{array}{cc|cc|c|cc} B_{11} & 0 & B_{13} & 0 & \cdots & B_{19} & 0 \\ \hline 0 & B_{22} & 0 & B_{24} & \cdots & 0 & B_{2,10} \\ \hline B_{31} & 0 & B_{33} & 0 & \cdots & B_{39} & 0 \\ \hline B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} & \cdots & B_{49} & B_{4,10} \end{array}\right] \qquad \text{(A.18)}$$

Düzlem elastisite haline benzer olarak, $[k^*]$ matrisi hesaplanırsa elemanları aşağıdaki gibi bulunmaktadır.

$$\begin{aligned} k^*_{kp} &= D_{11}B_{1k}B_{1p} + D_{31}B_{3k}B_{1p} + D_{13}B_{1k}B_{3p} + D_{33}B_{3k}B_{3p} + D_{44}B_{2l}B_{2s} \\ k^*_{ks} &= D_{12}B_{1k}B_{2s} + D_{32}B_{3k}B_{2s} + D_{44}B_{2l}B_{1p} \\ k^*_{lp} &= D_{21}B_{2l}B_{1p} + D_{23}B_{2l}B_{3p} + D_{44}B_{1k}B_{2s} \\ k^*_{ls} &= D_{22}B_{2l}B_{2s} + D_{44}B_{1k}B_{1p} \end{aligned} \qquad \text{(A.19)}$$
$$i,j = 1,2,3,4,5 \Rightarrow k=2i-1\ ,\ l=2i\ ,\ p=2j-1\ ,\ s=2j$$

Eksenel simetrik hal için (A.18)'de verilen, $[B^e]$ şekil değiştirme matrisinin elemanları ise aşağıdaki gibi tariflenmektedirler.

$$\left.\begin{aligned} B_{1k} &= J^*_{11} N_{i,\xi} + J^*_{12} N_{i,\eta} \\ B_{2l} &= J^*_{21} N_{i,\xi} + J^*_{22} N_{i,\eta} \\ B_{3k} &= \frac{N_i}{r} \end{aligned}\right| \begin{aligned} &i=1,2,3,4,5 \\ &k=2i-1 \\ &l=2i \end{aligned} \qquad (A.20)$$

Şekil fonksiyonları ve türevleri için (A.13)'te verilen tarifleri kullanılırsa şekil değiştirme matrisinin elemanları bulunur. (A.19) ifadelerinde görülen B_{1k}, B_{1p}, B_{2l} ve B_{2s} elemanlarının tarifleri (A.14) bağıntısında elde edildiği gibi olup diğer elemanlar aşağıdaki şekilde elde edilmiştir.

$$\begin{aligned} B_{3k} &= \left(\frac{1}{r} a_i L_i\right) e^{-(\alpha+\beta_1)\xi} + \left(\frac{1}{r} b_i L_i\right) e^{-(\alpha+\beta_2)\xi} \\ B_{3p} &= \left(\frac{1}{r} a_j L_j\right) e^{-(\alpha+\beta_1)\xi} + \left(\frac{1}{r} b_j L_j\right) e^{-(\alpha+\beta_2)\xi} \end{aligned} \qquad (A.21)$$

Böylece şekil değiştirme matrisinin tüm elemanları elde edildikten sonra, (A.14a) ve (A.21)'de verilen tarifler (A.19)'da yerine yazılırsa eksenel simetrik hal için $[k^*]$ matrisinin elemanları hesaplanmış olur.

$$\begin{aligned} k^*_{kp} = {} & e^{-2(\alpha+\beta_1)\xi}\Big[\, D_{11}(bk1\ bp1) + D_{31}(bp1\,\frac{1}{r} a_i L_i) + \\ & D_{13}(bk1\frac{1}{r} a_j L_j) + D_{33}(\frac{1}{r^2} a_i L_i a_j L_j) + D_{44}(bl1\ bs1)\Big] \\ & + e^{-2(\alpha+\frac{\beta_1+\beta_2}{2})\xi}\Big[\, D_{11}(bk1\ bp2 + bk2\ bp1) + \\ & D_{31}(bp1\frac{1}{r} b_i L_i + bp2\frac{1}{r} a_i L_i) + D_{13}(bk1\frac{1}{r} b_j L_j + bk2\frac{1}{r} a_j L_j) \\ & + D_{33}(\frac{1}{r^2} a_i L_i b_j L_j + \frac{1}{r^2} a_j L_j b_i L_i) + D_{44}(bl1\ bs2 + bl2\ bs1)\Big] \\ & + e^{-2(\alpha+\beta_2)\xi}\Big[\, D_{11}(bk2\ bp2) + D_{31}(bp2\,\frac{1}{r} b_i L_i) + \\ & D_{13}(bk2\frac{1}{r} b_j L_j) + D_{33}(\frac{1}{r^2} b_i L_i b_j L_j) + D_{44}(bl2\ bs2)\Big] \end{aligned} \qquad (A.22a)$$

$$
\begin{aligned}
k^{*}_{ks} &= e^{-2(\alpha+\beta_1)\xi}\left[D_{12}(bk1\ bs1)+D_{32}(bs1\ \frac{1}{r}a_iL_i)+D_{44}(bl1\ bp1)\right] \\
&+ e^{-2(\alpha+\frac{\beta_1+\beta_2}{2})\xi}\left[\ D_{12}(bk1\ bs2+bk2\ bs1)+\right. \\
&\quad D_{32}(bs1\frac{1}{r}b_iL_i+bs2\frac{1}{r}a_iL_i)+D_{44}(bl1\ bp2+bl2\ bp1)\left.\right] \\
&+ e^{-2(\alpha+\beta_2)\xi}\left[D_{12}(bk2\ bs2)+D_{32}(bs2\ \frac{1}{r}b_iL_i)+D_{44}(bl2\ bp2)\right]
\end{aligned}
\qquad (A.22b)
$$

$$
\begin{aligned}
k^{*}_{lp} &= e^{-2(\alpha+\beta_1)\xi}\left[D_{21}(bl1\ bp1)+D_{23}(bl1\ \frac{1}{r}a_jL_j)+D_{44}(bk1\ bs1)\right] \\
&+ e^{-2(\alpha+\frac{\beta_1+\beta_2}{2})\xi}\left[\ D_{21}(bl1\ bp2+bl2\ bp1)+\right. \\
&\quad D_{23}(bl1\frac{1}{r}b_jL_j+bl2\frac{1}{r}a_jL_j)+D_{44}(bk1\ bs2+bk2\ bs1)\left.\right] \\
&+ e^{-2(\alpha+\beta_2)\xi}\left[D_{21}(bl2\ bp2)+D_{23}(bl2\ \frac{1}{r}b_jL_j)+D_{44}(bk2\ bs2)\right]
\end{aligned}
\qquad (A.22c)
$$

$$
\begin{aligned}
k^{*}_{ls} &= e^{-2(\alpha+\beta_1)\xi}\left[D_{22}(bl1\ bs1)+D_{44}(bk1\ bp1)\right] \\
&+ e^{-2(\alpha+\frac{\beta_1+\beta_2}{2})\xi}\left[D_{22}(bl1\ bs2+bl2\ bs1)+D_{44}(bk1\ bp2+bk2\ bp1)\right] \\
&+ e^{-2(\alpha+\beta_2)\xi}\left[D_{22}(bl2\ bs2)+D_{44}(bk2\ bp2)\right]
\end{aligned}
\qquad (A.22d)
$$

Böylece $[k^{*}]$ matrisinin tüm elemanları bulunduktan sonra, sonlu yönde Gauss-Legendre ve sonsuz yönde Newton-Cotes integrasyon yöntemi kullanılarak eksenel simetrik hal için eleman rijitlik matrisi sayısal olarak hesaplanır.

EK-B
ÜÇ DALGA TİPİNİ İÇEREN, İKİ BOYUTLU SONSUZ ELEMAN MATRİSLERİ

B.1. Kütle Matrislerinin Hesabı

Azalan fonksiyonlu, üç dalga tipini içeren bir sonsuz elemanın kütle matrisi, düzlem elastisite ve eksenel simetrik haller için aşağıdaki gibi elde edilmektedir.

$$\left[m^{Sd}\right]_{(14\times14)} = h_e \int_{\eta=-1}^{+1}\int_{\xi=0}^{\infty} \rho[N]^T[N]|J|d\xi d\eta$$
$$\left[m^{Se}\right]_{(14\times14)} = 2\pi \int_{\eta=-1}^{+1}\int_{\xi=0}^{\infty} \rho[N]^T[N] r |J| d\xi\, d\eta \qquad (B.1)$$

Yukarıdaki tariflerde görülen şekil fonksiyonları matrisi, [N],

$$[N] = \left[\begin{array}{cc|cc|c|cc} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \cdots & N_7 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \cdots & 0 & N_7 \end{array}\right]_{(2\times14)} \qquad (B.2)$$

olarak tanımlanmaktadır. Kütle matrisi ifadesinde görülen matris çarpımı,

$$[N]^T[N] = \left[\begin{array}{cc|cc|c|cc} N_1N_1 & 0 & N_1N_2 & 0 & \cdots & N_1N_7 & 0 \\ 0 & N_1N_1 & 0 & N_1N_2 & \cdots & 0 & N_1N_7 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \hline N_7N_1 & 0 & N_7N_2 & 0 & \cdots & N_7N_7 & 0 \\ 0 & N_7N_1 & 0 & N_7N_2 & \cdots & 0 & N_7N_7 \end{array}\right] \qquad (B.3)$$

şeklinde bulunur. Tipik bir şekil fonksiyonu,

$$N_i = P_i(\xi,\omega)\, L_i(\eta)$$
$$P_i(\xi,\omega) = a_i e^{-(\alpha+\beta_1)\xi} + b_i e^{-(\alpha+\beta_2)\xi} + c_i e^{-(\alpha+\beta_3)\xi} \tag{B.4}$$

olarak seçilmektedir. Bu tarife göre,

$$N_i N_j = (P_i L_i)(P_j L_j) \tag{B.5}$$

olur. P_i ve P_j nin tarifleri yerlerine yazılıp düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned} N_i N_j =& e^{-2(\alpha+\beta_1)\xi}\left[L_i L_j a_i a_j\right] \\ &+ e^{-2(\alpha+\beta_2)\xi}\left[L_i L_j b_i b_j\right] \\ &+ e^{-2(\alpha+\beta_3)\xi}\left[L_i L_j c_i c_j\right] \\ &+ e^{-2(\alpha+\frac{\beta_1+\beta_2}{2})\xi}\left[L_i L_j (a_i b_j + a_j b_i)\right] \\ &+ e^{-2(\alpha+\frac{\beta_1+\beta_3}{2})\xi}\left[L_i L_j (a_i c_j + a_j c_i)\right] \\ &+ e^{-2(\alpha+\frac{\beta_2+\beta_3}{2})\xi}\left[L_i L_j (b_i c_j + b_j c_i)\right] \end{aligned} \tag{B.6}$$

ifadesi bulunur. Bulunan bu ifadeler integral içinde yerine konup, sayısal olarak sonlu yönde Gauss-Legendre, sonsuz yonde Newton-Cotes integrasyon yöntemi ile integrasyon yapılırsa eleman kütle matrisi elde edilir.

B.2. Rijitlik Matrislerinin Hesabı

B.2.1. Düzlem Elastisite Hali

Azalan fonksiyonlu, üç dalga özelliğini aynı anda içeren sonsuz eleman için eleman rijitlik matrisinin genel ifadesi, aşağıda görüldüğü gibidir.

$$\left[k^{Sd}\right]_{(14\times14)} = h_e \int_{\eta=-1}^{+1} \int_{\xi=0}^{\infty} \left[k^*\right] |J| d\xi d\eta$$
$$\left[k^*\right] = \left[B^d\right]^T [D] \left[B^d\right] \tag{B.7}$$

Malzeme matrisinin formu iki dalga tipini içeren sonsuz elemanda verildiği gibi olup, $[B^d]$ şekil değiştirme matrisinin formu,

$$\left[B^d\right] = \left[\begin{array}{cc|cc|c|cc} B_{11} & 0 & B_{13} & 0 & \cdots & B_{1,13} & 0 \\ \hline 0 & B_{22} & 0 & B_{24} & \cdots & 0 & B_{2,14} \\ \hline B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} & \cdots & B_{3,13} & B_{3,14} \end{array}\right] \tag{B.8}$$

şeklindedir. Yukarıda (B.7) bağıntısında tariflenen $[k^*]$ matrisinin elemanları form olarak iki dalga tipini içeren sonsuz elemanda olduğu gibidir.

$$\left.\begin{aligned} k^*_{kp} &= D_{11} B_{1k} B_{1p} + D_{33} B_{2l} B_{2s} \\ k^*_{ks} &= D_{12} B_{1k} B_{2s} + D_{33} B_{2l} B_{1p} \\ k^*_{lp} &= D_{21} B_{2l} B_{1p} + D_{33} B_{1k} B_{2s} \\ k^*_{ls} &= D_{22} B_{2l} B_{2s} + D_{33} B_{1k} B_{1p} \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} i=1,2,\cdots,7 \\ k=2i-1 \ , \ l=2i \\ j=1,2,\cdots,7 \\ p=2j-1 \ , \ s=2j \end{array} \tag{B.9}$$

Şekil değiştirme matrisinin elemanları ise şu şekildedir:

$$\left.\begin{aligned} B_{1k} &= J^*_{11} N_{i,\xi} + J^*_{12} N_{i,\eta} \\ B_{2l} &= J^*_{21} N_{i,\xi} + J^*_{22} N_{i,\eta} \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} i=1,2,\cdots,7 \\ k=2i-1 \qquad l=2i \end{array} \tag{B.10}$$

Şekil fonksiyonlarının ve türevlerinin formu,

$$\begin{aligned} N_i(\xi,\eta,\omega) &= P_i(\xi,\omega)\, L_i(\eta) \\ N_{i,\xi} &= P_{i,\xi}\, L_i \\ N_{i,\eta} &= P_i\, L_{i,\eta} \end{aligned} \tag{B.11}$$

olarak tariflenirse, açık olarak,

$$
\begin{aligned}
N_i &= (L_i a_i)\, e^{-(\alpha+\beta_1)\xi} + (L_i b_i)\, e^{-(\alpha+\beta_2)\xi} + (L_i c_i)\, e^{-(\alpha+\beta_3)\xi} \\
N_{i,\xi} &= \left[-L_i a_i(\alpha+\beta_1)\right] e^{-(\alpha+\beta_1)\xi} + \left[-L_i b_i(\alpha+\beta_2)\right] e^{-(\alpha+\beta_2)\xi} \\
&\quad + \left[-L_i c_i(\alpha+\beta_3)\right] e^{-(\alpha+\beta_3)\xi} \\
N_{i,\eta} &= (a_i L_{i,\eta}) e^{-(\alpha+\beta_1)\xi} + (b_i L_{i,\eta}) e^{-(\alpha+\beta_2)\xi} + (c_i L_{i,\eta}) e^{-(\alpha+\beta_3)\xi}
\end{aligned}
\qquad (B.12)
$$

yazılabilir. Bu ifadeler, (B.10) bağıntısında yerlerine konursa, şekil değiştirme matrisinin elemanları aşağıdaki gibi elde edilir.

$$
\begin{aligned}
B_{1k} &= bk1\; e^{-(\alpha+\beta_1)\xi} + bk2\; e^{-(\alpha+\beta_2)\xi} + bk3\; e^{-(\alpha+\beta_3)\xi} \\
B_{1p} &= bp1\; e^{-(\alpha+\beta_1)\xi} + bp2\; e^{-(\alpha+\beta_2)\xi} + bp3\; e^{-(\alpha+\beta_3)\xi} \\
B_{2l} &= bl1\; e^{-(\alpha+\beta_1)\xi} + bl2\; e^{-(\alpha+\beta_2)\xi} + bl3\; e^{-(\alpha+\beta_3)\xi} \\
B_{2s} &= bs1\; e^{-(\alpha+\beta_1)\xi} + bs2\; e^{-(\alpha+\beta_2)\xi} + bs3\; e^{-(\alpha+\beta_3)\xi}
\end{aligned}
\qquad (B.13)
$$

Yukarıda görülen bk1, bk2,bp1,bp2,bl1,bl2,bs1 ve bs2 ifadeleri iki dalga tipini içeren sonsuz eleman matrislerinde tariflendiği gibi olup (bkz. Ek-A), diğerlerinin tarifleri aşağıda verilmektedir.

$$
\begin{aligned}
bk3 &= \left[-c_i J^*_{11} L_i(\alpha+\beta_3) + c_i J^*_{12} L_{i,\eta}\right] \\
bp3 &= \left[-c_j J^*_{11} L_j(\alpha+\beta_3) + c_j J^*_{12} L_{j,\eta}\right] \\
bl3 &= \left[-c_i J^*_{21} L_i(\alpha+\beta_3) + c_i J^*_{22} L_{i,\eta}\right] \\
bs3 &= \left[-c_j J^*_{21} L_j(\alpha+\beta_3) + c_j J^*_{22} L_{j,\eta}\right]
\end{aligned}
\qquad (B.14)
$$

Bu aşamadan sonra (B.13) bağıntısı ile verilen $[B^d]$ matrisinin elemanları (B.9) eşitliklerinde yerlerine yazılırsa, üç dalga tipini içeren sonsuz eleman için $[k^*]$ matrisinin elemanları elde edilmiş olur.

$$
\begin{aligned}
k^{*}_{kp} &= e^{-2(\alpha+\beta_1)\xi}\left[D_{11}(bk1\ bp1)+D_{33}(bl1\ bs1)\right] \\
&+ e^{-2(\alpha+\beta_2)\xi}\left[D_{11}(bk2\ bp2)+D_{33}(bl2\ bs2)\right] \\
&+ e^{-2(\alpha+\beta_3)\xi}\left[D_{11}(bk3\ bp3)+D_{33}(bl3\ bs3)\right] \\
&+ e^{-2(\alpha+\frac{\beta_1+\beta_2}{2})\xi}\left[D_{11}(bk1\ bp2+bk2\ bp1)+D_{33}(bl1\ bs2+bl2\ bs1)\right] \\
&+ e^{-2(\alpha+\frac{\beta_1+\beta_3}{2})\xi}\left[D_{11}(bk1\ bp3+bk3\ bp1)+D_{33}(bl1\ bs3+bl3\ bs1)\right] \\
&+ e^{-2(\alpha+\frac{\beta_2+\beta_3}{2})\xi}\left[D_{11}(bk2\ bp3+bk3\ bp2)+D_{33}(bl2\ bs3+bl3\ bs2)\right]
\end{aligned}
\qquad (B.15a)
$$

$$
\begin{aligned}
k^{*}_{ks} &= e^{-2(\alpha+\beta_1)\xi}\left[D_{12}(bk1\ bs1)+D_{33}(bl1\ bp1)\right] \\
&+ e^{-2(\alpha+\beta_2)\xi}\left[D_{12}(bk2\ bs2)+D_{33}(bl2\ bp2)\right] \\
&+ e^{-2(\alpha+\beta_3)\xi}\left[D_{12}(bk3\ bs3)+D_{33}(bl3\ bp3)\right] \\
&+ e^{-2(\alpha+\frac{\beta_1+\beta_2}{2})\xi}\left[D_{12}(bk1\ bs2+bk2\ bs1)+D_{33}(bl1\ bp2+bl2\ bp1)\right] \\
&+ e^{-2(\alpha+\frac{\beta_1+\beta_3}{2})\xi}\left[D_{12}(bk1\ bs3+bk3\ bs1)+D_{33}(bl1\ bp3+bl3\ bp1)\right] \\
&+ e^{-2(\alpha+\frac{\beta_2+\beta_3}{2})\xi}\left[D_{12}(bk2\ bs3+bk3\ bs2)+D_{33}(bl2\ bp3+bl3\ bp2)\right]
\end{aligned}
\qquad (B.15b)
$$

$$
\begin{aligned}
k^{*}_{lp} &= e^{-2(\alpha+\beta_1)\xi}\left[D_{21}(bl1\ bp1)+D_{33}(bk1\ bs1)\right] \\
&+ e^{-2(\alpha+\beta_2)\xi}\left[D_{21}(bl2\ bp2)+D_{33}(bk2\ bs2)\right] \\
&+ e^{-2(\alpha+\beta_3)\xi}\left[D_{21}(bl3\ bp3)+D_{33}(bk3\ bs3)\right] \\
&+ e^{-2(\alpha+\frac{\beta_1+\beta_2}{2})\xi}\left[D_{21}(bl1\ bp2+bl2\ bp1)+D_{33}(bk1\ bs2+bk2\ bs1)\right] \\
&+ e^{-2(\alpha+\frac{\beta_1+\beta_3}{2})\xi}\left[D_{21}(bl1\ bp3+bl3\ bp1)+D_{33}(bk1\ bs3+bk3\ bs1)\right] \\
&+ e^{-2(\alpha+\frac{\beta_2+\beta_3}{2})\xi}\left[D_{21}(bl2\ bp3+bl3\ bp2)+D_{33}(bk2\ bs3+bk3\ bs2)\right]
\end{aligned}
\qquad (B.15c)
$$

$$
\begin{aligned}
k^{*}_{ls} &= e^{-2(\alpha+\beta_1)\xi}\left[D_{22}(bl1\ bs1)+D_{33}(bk1\ bp1)\right] \\
&+ e^{-2(\alpha+\beta_2)\xi}\left[D_{22}(bl2\ bs2)+D_{33}(bk2\ bp2)\right] \\
&+ e^{-2(\alpha+\beta_3)\xi}\left[D_{22}(bl3\ bs3)+D_{33}(bk3\ bp3)\right] \\
&+ e^{-2(\alpha+\frac{\beta_1+\beta_2}{2})\xi}\left[D_{22}(bl1\ bs2+bl2\ bs1)+D_{33}(bk1\ bp2+bk2\ bp1)\right] \\
&+ e^{-2(\alpha+\frac{\beta_1+\beta_3}{2})\xi}\left[D_{22}(bl1\ bs3+bl3\ bs1)+D_{33}(bk1\ bp3+bk3\ bp1)\right] \\
&+ e^{-2(\alpha+\frac{\beta_2+\beta_3}{2})\xi}\left[D_{22}(bl2\ bs3+bl3\ bs2)+D_{33}(bk2\ bp3+bk3\ bp2)\right]
\end{aligned}
\qquad (B.15d)
$$

Bu şekilde $[k^*]$ matrisinin elemanları bulunduktan sonra (B.7) ifadesinde yerine konup, sonlu yönde Gauss-Legendre, sonsuz yönde Newton-Cotes integrasyon yöntemi kullanılarak düzlem elastisite hali için eleman rijitlik matrisi sayısal olarak hesaplanır.

B.2.2. Eksenel Simetrik Hal

Eksenel simetrik problemler gözönüne alındığında, üç dalga tipini içeren sonsuz eleman rijitlik matrisi aşağıdaki formda elde edilmektedir.

$$\left[k^{Se}\right]_{(14\times14)} = 2\pi \int_{\eta=-1}^{+1} \int_{\xi=0}^{\infty} \left[k^*\right] r \left|J\right| d\xi\, d\eta$$
$$\left[k^*\right] = \left[B^e\right]^T [D] \left[B^e\right] \qquad \text{(B.16)}$$

Eksenel simetrik problemler için malzeme matrisi, [D], iki dalgalı sonsuz elemanda verildiği formda olup, şekil değiştirme matrisi, $[B^e]$,

$$\left[B^e\right] = \left[\begin{array}{cc|cc|c|cc} B_{11} & 0 & B_{13} & 0 & \cdots & B_{1,13} & 0 \\ \hline 0 & B_{22} & 0 & B_{24} & \cdots & 0 & B_{2,14} \\ \hline B_{31} & 0 & B_{33} & 0 & \cdots & B_{3,13} & 0 \\ \hline B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} & \cdots & B_{4,13} & B_{4,14} \end{array}\right] \qquad \text{(B.17)}$$

şeklinde tariflenmektedir. Düzlem elastisite halindeki gibi, $[k^*]$ matrisi oluşturulursa, elemanları aşağıdaki gibi bulunmaktadır.

$$\begin{aligned} k^*_{kp} &= D_{11}B_{1k}B_{1p} + D_{31}B_{3k}B_{1p} + D_{13}B_{1k}B_{3p} + D_{33}B_{3k}B_{3p} + D_{44}B_{2l}B_{2s} \\ k^*_{ks} &= D_{12}B_{1k}B_{2s} + D_{32}B_{3k}B_{2s} + D_{44}B_{2l}B_{1p} \\ k^*_{lp} &= D_{21}B_{2l}B_{1p} + D_{23}B_{2l}B_{3p} + D_{44}B_{1k}B_{2s} \\ k^*_{ls} &= D_{22}B_{2l}B_{2s} + D_{44}B_{1k}B_{1p} \\ i,j &= 1,2,\cdots,7 \Rightarrow k=2i-1\ ,\ l=2i\ ,\ p=2j-1\ ,\ s=2j \end{aligned} \qquad \text{(B.18)}$$

Eksenel simetrik hal ve üç dalgalı sonsuz elemana ait, $[B^e]$ şekil değiştirme matrisinin elemanları aşağıdaki gibidir.

$$\left.\begin{aligned} B_{1k} &= J^*_{11} N_{i,\xi} + J^*_{12} N_{i,\eta} \\ B_{2l} &= J^*_{21} N_{i,\xi} + J^*_{22} N_{i,\eta} \\ B_{3k} &= \frac{N_i}{r} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &i=1,2,\cdots,7 \\ &k=2i-1 \\ &l=2i \end{aligned} \qquad (B.19)$$

Şekil fonksiyonlarının ve türevlerinin (B.12)'deki tarifleri kullanılırsa (B.19)'da verilen şekil değiştirme matrisinin elemanları bulunur. Yukarıda (B.18) ifadesinde görülen B_{1k}, B_{1p}, B_{2l} ve B_{2s} elemanlarının tarifleri (B.13) bağıntısında elde edildiği gibi olup diğer elemanlar aşağıda tariflenmektedirler.

$$\begin{aligned} B_{3k} &= \left(\frac{1}{r} a_i L_i\right) e^{-(\alpha+\beta_1)\xi} + \left(\frac{1}{r} b_i L_i\right) e^{-(\alpha+\beta_2)\xi} + \left(\frac{1}{r} c_i L_i\right) e^{-(\alpha+\beta_3)\xi} \\ B_{3p} &= \left(\frac{1}{r} a_j L_j\right) e^{-(\alpha+\beta_1)\xi} + \left(\frac{1}{r} b_j L_j\right) e^{-(\alpha+\beta_2)\xi} + \left(\frac{1}{r} c_j L_j\right) e^{-(\alpha+\beta_3)\xi} \end{aligned} \qquad (B.20)$$

Bu şekilde $[B^e]$ matrisinin tüm elemanları bulunduktan sonra, (B.13) ve (B.20)'de verilen tarifler (B.18)'de yerine yazılırsa, üç dalga tipini içeren eksenel simetrik sonsuz elemana ait $[k^*]$ matrisinin elemanları hesaplanmış olur.

$$
\begin{aligned}
k^{*}_{kp} = e^{-2(\alpha+\beta_1)\xi}\Big[& D_{11}(bk1\ bp1)+D_{31}(bp1\frac{1}{r}a_iL_i)+ \\
& D_{13}(bk1\frac{1}{r}a_jL_j)+D_{33}(\frac{1}{r^2}a_iL_ia_jL_j)+D_{44}(bl1\ bs1)\Big] \\
+ e^{-2(\alpha+\beta_2)\xi}\Big[& D_{11}(bk2\ bp2)+D_{31}(bp2\frac{1}{r}b_iL_i)+ \\
& D_{13}(bk2\frac{1}{r}b_jL_j)+D_{33}(\frac{1}{r^2}b_iL_ib_jL_j)+D_{44}(bl2\ bs2)\Big] \\
+ e^{-2(\alpha+\beta_3)\xi}\Big[& D_{11}(bk3\ bp3)+D_{31}(bp3\frac{1}{r}c_iL_i)+ \\
& D_{13}(bk3\frac{1}{r}c_jL_j)+D_{33}(\frac{1}{r^2}c_iL_ic_jL_j)+D_{44}(bl3\ bs3)\Big] \\
+ e^{-2(\alpha+\frac{\beta_1+\beta_2}{2})\xi}\Big[& D_{11}(bk1\ bp2+bk2\ bp1)+ \\
& D_{31}(bp1\frac{1}{r}b_iL_i+bp2\frac{1}{r}a_iL_i)+D_{13}(bk1\frac{1}{r}b_jL_j+bk2\frac{1}{r}a_jL_j) \\
& +D_{33}(\frac{1}{r^2}a_iL_ib_jL_j+\frac{1}{r^2}a_jL_jb_iL_i)+D_{44}(bl1\ bs2+bl2\ bs1)\Big] \\
+ e^{-2(\alpha+\frac{\beta_1+\beta_3}{2})\xi}\Big[& D_{11}(bk1\ bp3+bk3\ bp1)+ \\
& D_{31}(bp1\frac{1}{r}c_iL_i+bp3\frac{1}{r}a_iL_i)+D_{13}(bk1\frac{1}{r}c_jL_j+bk3\frac{1}{r}a_jL_j) \\
& +D_{33}(\frac{1}{r^2}a_iL_ic_jL_j+\frac{1}{r^2}a_jL_jc_iL_i)+D_{44}(bl1\ bs3+bl3\ bs1)\Big] \qquad \text{(B.21a)} \\
+ e^{-2(\alpha+\frac{\beta_2+\beta_3}{2})\xi}\Big[& D_{11}(bk2\ bp3+bk3\ bp2)+ \\
& D_{31}(bp2\frac{1}{r}c_iL_i+bp3\frac{1}{r}b_iL_i)+D_{13}(bk2\frac{1}{r}c_jL_j+bk3\frac{1}{r}b_jL_j) \\
& +D_{33}(\frac{1}{r^2}b_iL_ic_jL_j+\frac{1}{r^2}b_jL_jc_iL_i)+D_{44}(bl2\ bs3+bl3\ bs2)\Big]
\end{aligned}
$$

$$k^*_{ks} = e^{-2(\alpha+\beta_1)\xi}\left[D_{12}(bk1\ bs1)+D_{32}(bs1\ \frac{1}{r}a_iL_i)+D_{44}(bl1\ bp1)\right]$$
$$+ e^{-2(\alpha+\beta_2)\xi}\left[D_{12}(bk2\ bs2)+D_{32}(bs2\ \frac{1}{r}b_iL_i)+D_{44}(bl2\ bp2)\right]$$
$$+ e^{-2(\alpha+\beta_3)\xi}\left[D_{12}(bk3\ bs3)+D_{32}(bs3\ \frac{1}{r}c_iL_i)+D_{44}(bl3\ bp3)\right]$$
$$+ e^{-2(\alpha+\frac{\beta_1+\beta_2}{2})\xi}\left[\ D_{12}(bk1\ bs2+bk2\ bs1)+\right.$$
$$\left.D_{32}(bs1\frac{1}{r}b_iL_i+bs2\frac{1}{r}a_iL_i)+D_{44}(bl1\ bp2+bl2\ bp1)\right] \qquad \text{(B.21b)}$$
$$+ e^{-2(\alpha+\frac{\beta_1+\beta_3}{2})\xi}\left[\ D_{12}(bk1\ bs3+bk3\ bs1)+\right.$$
$$\left.D_{32}(bs1\frac{1}{r}c_iL_i+bs3\frac{1}{r}a_iL_i)+D_{44}(bl1\ bp3+bl3\ bp1)\right]$$
$$+ e^{-2(\alpha+\frac{\beta_2+\beta_3}{2})\xi}\left[\ D_{12}(bk2\ bs3+bk3\ bs2)+\right.$$
$$\left.D_{32}(bs2\frac{1}{r}c_iL_i+bs3\frac{1}{r}b_iL_i)+D_{44}(bl2\ bp3+bl3\ bp2)\right]$$

$$k^*_{lp} = e^{-2(\alpha+\beta_1)\xi}\left[D_{21}(bl1\ bp1)+D_{23}(bl1\ \frac{1}{r}a_jL_j)+D_{44}(bk1\ bs1)\right]$$
$$+ e^{-2(\alpha+\beta_2)\xi}\left[D_{21}(bl2\ bp2)+D_{23}(bl2\ \frac{1}{r}b_jL_j)+D_{44}(bk2\ bs2)\right]$$
$$+ e^{-2(\alpha+\beta_3)\xi}\left[D_{21}(bl3\ bp3)+D_{23}(bl3\ \frac{1}{r}c_jL_j)+D_{44}(bk3\ bs3)\right]$$
$$+ e^{-2(\alpha+\frac{\beta_1+\beta_2}{2})\xi}\left[\ D_{21}(bl1\ bp2+bl2\ bp1)+\right.$$
$$\left.D_{23}(bl1\frac{1}{r}b_jL_j+bl2\frac{1}{r}a_jL_j)+D_{44}(bk1\ bs2+bk2\ bs1)\right] \qquad \text{(B.21.c)}$$
$$+ e^{-2(\alpha+\frac{\beta_1+\beta_3}{2})\xi}\left[\ D_{21}(bl1\ bp3+bl3\ bp1)+\right.$$
$$\left.D_{23}(bl1\frac{1}{r}c_jL_j+bl3\frac{1}{r}a_jL_j)+D_{44}(bk1\ bs3+bk3\ bs1)\right]$$
$$+ e^{-2(\alpha+\frac{\beta_2+\beta_3}{2})\xi}\left[\ D_{21}(bl2\ bp3+bl3\ bp2)+\right.$$
$$\left.D_{23}(bl2\frac{1}{r}c_jL_j+bl3\frac{1}{r}b_jL_j)+D_{44}(bk2\ bs3+bk3\ bs2)\right]$$

$$
\begin{aligned}
k_{ls}^{*} &= e^{-2(\alpha+\beta_1)\xi}\left[D_{22}(bl1\ bs1)+D_{44}(bk1\ bp1)\right] \\
&+ e^{-2(\alpha+\beta_2)\xi}\left[D_{22}(bl2\ bs2)+D_{44}(bk2\ bp2)\right] \\
&+ e^{-2(\alpha+\beta_3)\xi}\left[D_{22}(bl3\ bs3)+D_{44}(bk3\ bp3)\right] \\
&+ e^{-2(\alpha+\frac{\beta_1+\beta_2}{2})\xi}\left[D_{22}(bl1\ bs2+bl2\ bs1)+D_{44}(bk1\ bp2+bk2\ bp1)\right] \\
&+ e^{-2(\alpha+\frac{\beta_1+\beta_3}{2})\xi}\left[D_{22}(bl1\ bs3+bl3\ bs1)+D_{44}(bk1\ bp3+bk3\ bp1)\right] \\
&+ e^{-2(\alpha+\frac{\beta_2+\beta_3}{2})\xi}\left[D_{22}(bl2\ bs3+bl3\ bs2)+D_{44}(bk2\ bp3+bk3\ bp2)\right]
\end{aligned}
\qquad \text{(B.21d)}
$$

Bu şekilde $[k^{*}]$ matrisinin elemanları bulunduktan sonra, (B.16) ifadesinde yerine konup sonlu yönde Gauss-Legendre, sonsuz yönde Newton-Cotes sayısal integrasyon yöntemi ile eksenel simetrik halde üç dalgalı sonsuz elemana ait rijitlik matrisi hesaplanmış olur.

EK-C
ÜÇ BOYUTLU PRİZMATİK ÇUBUK ELEMANIN TRANSFORMASYON MATRİSİ

Bilindiği üzere, herhangi bir çubuk elamana ait yerel koordinatlarda (x_m-y_m-z_m) elde edilmiş eleman rijitlik ve kütle matrisleri ([k_m] ve [m_m]) aşağıda görülen ilişki ile tüm sisteme ait ortak bir koordinat takımına (x-y-z) dönüştürülmektedir.

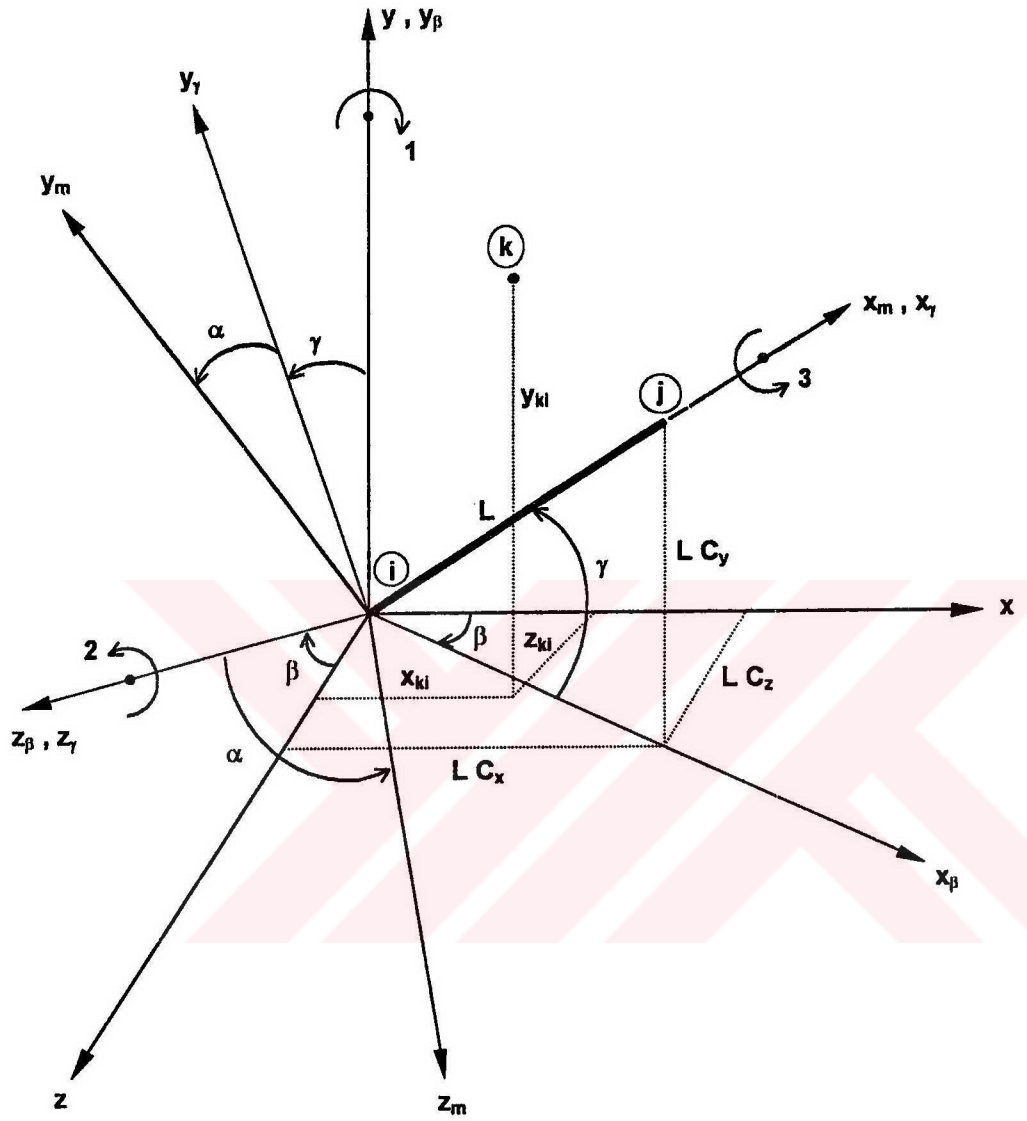
$$\begin{aligned}\left[k^e\right] &= [T]^T[k_m][T] \\ \left[m^e\right] &= [T]^T[m_m][T]\end{aligned} \qquad (C.1)$$

Burada görülen [T], transformasyon matrisi olup, aşağıdaki formdadır.

$$[T] = \begin{bmatrix} \underline{T'} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{T'} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{T'} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{T'} \end{bmatrix}_{(12\times12)} \qquad (C.2)$$

Üç boyutlu prizmatik çubuk elemanlar gözönüne alındığında, çubuk eleman x_m ekseni üzerinde i ucundan j ucuna doğru tariflenmektedir. Bununla birlikte y_m ve z_m eksenleride kesitin asal eksenleri olmaktadır. Üç boyutlu transformasyon işlemi yapılırken, çubuğun asal eksenlerinin belirlenmesi için üçüncü bir düğüme ihtiyaç duyulmaktadır. Bu üçüncü düğüm noktası, k, x_m-y_m düzleminde herhangi bir nokta olarak seçilmektedir (Şekil C.1).

Burada uygulanacak olan transformasyon işlemi ile, sistem koordinat takımı sırasıyla y, z ve x eksenleri etrafında döndürülerek, elemanın yerel koordinat takımı ile çakışacak hale getirilmektedir. Burada, y ekseni düşey olarak seçilmektedir.



Şekil C.1. Üç boyutlu çubuğun eksenlerinin döndürülmesi

Şekil C.1 yardımıyla, elemanın i düğümünün koordinatları (x_i, y_i, z_i) ve j düğümünün koordinatları (x_j, y_j, z_j) kullanılarak elemanın boyu (L) ve doğrultman kosinüsleri (C_x, C_y ve C_z) aşağıdaki gibi bulunmaktadır.

$$L = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}$$

$$C_x = \frac{(x_j - x_i)}{L} \qquad C_y = \frac{(y_j - y_i)}{L} \qquad C_z = \frac{(z_j - z_i)}{L} \tag{C.3}$$

Transformasyon matrisi aşağıda anlatılan 3 adım izlenerek elde edilmektedir.

1. Adım

İlk adımda, y ekseni etrafında "β" kadar dönme durumu ele alınmaktadır. y ekseninin β kadar dönmesi sonucunda, x ekseni x_β, y ekseni y_β ve z ekseni z_β konumuna gelmektedir (Şekil C.1). Burada, x_β konumu x_m nin x-z düzlemindeki izdüşümü ile çakışıktır. Bu durumda x-y-z uzayındaki bir $\bar{Q}$ vektörünün bileşenleri, x_β-y_β-z_β uzayında aşağıdaki gibi elde edilmektedir.

$$\begin{Bmatrix} Q_{1\beta} \\ Q_{2\beta} \\ Q_{3\beta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix} = [T_\beta] \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix} \tag{C.4}$$

Yukarıdaki ifadede görülen cosβ ve sinβ ifadeleri, Şekil C.1 ve doğrultman kosinüsleri yardımıyla,

$$\cos\beta = \frac{C_x}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} \qquad \sin\beta = \frac{C_z}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} \tag{C.5}$$

şeklinde hesaplanabilmektedir. cosβ ve sinβ ifadeleri, (C.4) bağıntısında yerine yazılırsa, $[T_\beta]$ aşağıdaki gibi elde edilir.

$$[T_\beta]=\begin{bmatrix} \dfrac{C_x}{\sqrt{C_x^2+C_z^2}} & 0 & \dfrac{C_z}{\sqrt{C_x^2+C_z^2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\dfrac{C_z}{\sqrt{C_x^2+C_z^2}} & 0 & \dfrac{C_x}{\sqrt{C_x^2+C_z^2}} \end{bmatrix} \qquad (C.6)$$

2. Adım

İkinci adımda, z_β ekseni etrafında "γ" kadar dönme durumu ele alınmaktadır. z_β ekseninin "γ" açısı kadar dönmesi sonucunda x_β ekseni x_γ, y_β ekseni y_γ ve z_β ekseni z_γ konumuna gelmektedir (Şekil C.1). Bu durumda, x_γ ekseni x_m ekseni ile çakışmaktadır. $\vec{Q}$ vektörünün x_β-y_β-z_β uzayındaki bileşenleri, x_γ-y_γ-z_γ uzayında aşağıdaki gibi elde edilmektedir.

$$\begin{Bmatrix} Q_{1\gamma} \\ Q_{2\gamma} \\ Q_{3\gamma} \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} Q_{1\beta} \\ Q_{2\beta} \\ Q_{3\beta} \end{Bmatrix}=[T_\gamma]\begin{Bmatrix} Q_{1\beta} \\ Q_{2\beta} \\ Q_{3\beta} \end{Bmatrix} \qquad (C.7)$$

$\cos\gamma$ ve $\sin\gamma$ değerleri, Şekil C.1 ve doğrultman kosinüsleri yardımıyla,

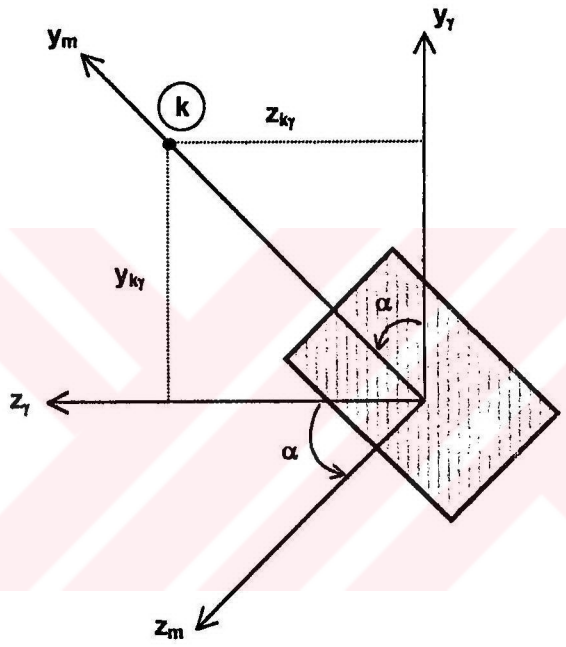
$$\cos\gamma=\sqrt{C_x^2+C_z^2} \qquad \sin\gamma=C_y \qquad (C.8)$$

olarak bulunup yerine yazılırsa $[T_\gamma]$ transformasyon matrisi bulunur.

$$[T_\gamma]=\begin{bmatrix} \sqrt{C_x^2+C_z^2} & C_y & 0 \\ -C_y & \sqrt{C_x^2+C_z^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (C.9)$$

3. Adım

Üçüncü adım olarak, x_γ-y_γ-z_γ eksenleri x_m (x_γ) ekseni etrafında "α" kadar döndürülmektedir. Bu döndürme sonucunda, y_γ ekseni y_m ve z_γ ekseni z_m konumuna gelmekte ve transformasyon işi tamamlanmaktadır (Şekil C.2).



Şekil C.2. Üç boyutlu çubuğun x_m ekseni etrafındaki dönmesi

Bu durumda, $\vec{Q}$ vektörünün x_γ-y_γ-z_γ uzayındaki bileşenleri, x_m-y_m-z_m uzayında aşağıdaki gibi elde edilmektedir.

$$\begin{Bmatrix} Q_{1m} \\ Q_{2m} \\ Q_{3m} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_{1\gamma} \\ Q_{2\gamma} \\ Q_{3\gamma} \end{Bmatrix} = [\,T_\alpha\,] \begin{Bmatrix} Q_{1\gamma} \\ Q_{2\gamma} \\ Q_{3\gamma} \end{Bmatrix} \qquad (C.10)$$

Son olarak, (C.4), (C.7) ve (C.10) eşitlikleri birleştirilirse, $\bar{Q}$ vektörünün, yerel koordinat takımı ile sistem koordinat takımındaki bileşenleri arasındaki transformasyon ilişkisi elde edilmiş olur.

$$\{Q_m\} = [T']\{Q\}$$
$$[T']_{(3\times3)} = [T_\alpha][T_\gamma][T_\beta] \qquad (C.11)$$

$[T_\alpha]$ matrisinde α'ya bağlı ifadeler henüz belirlenmemiş durumdadır. Bunun için x_m-y_m düzleminde seçilmiş olan k noktası kullanılmaktadır. Yalnız, k noktasının x_m ekseni üzerinde seçilmemesine dikkat edilmelidir. Sistem koordinat takımında k noktasının i düğümüne göre koordinatları şu şekildedir:

$$x_{ki} = x_k - x_i \qquad y_{ki} = y_k - y_i \qquad z_{ki} = z_k - z_i \qquad (C.12)$$

k noktasının x_γ-y_γ-z_γ uzayındaki koordinatları $x_{k\gamma}$, $y_{k\gamma}$ ve $z_{k\gamma}$ olsun. Bu koordinat değerleri, ilk iki adımda anlatılan transformasyon uygulanarak aşağıdaki gibi bulunabilmektedir.

$$\begin{Bmatrix} x_{k\gamma} \\ y_{k\gamma} \\ z_{k\gamma} \end{Bmatrix} = [T_\gamma][T_\beta] \begin{Bmatrix} x_{ki} \\ y_{ki} \\ z_{ki} \end{Bmatrix} \qquad (C.13)$$

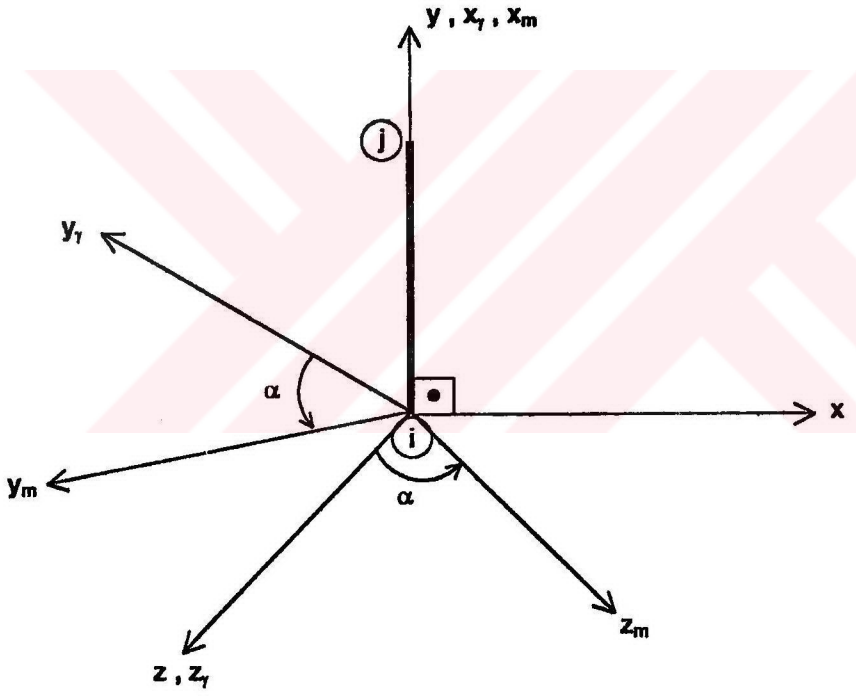
(C.13) bağıntısı kullanılırsa, $x_{k\gamma}$, $y_{k\gamma}$ ve $z_{k\gamma}$ değerleri aşağıdaki gibi bulunmaktadır.

$$x_{k\gamma} = C_x x_{ki} + C_y y_{ki} + C_z z_{ki}$$
$$y_{k\gamma} = -\frac{C_x C_y}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} x_{ki} + \sqrt{C_x^2 + C_z^2}\, y_{ki} - \frac{C_y C_z}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} z_{ki} \qquad (C.14)$$
$$z_{k\gamma} = -\frac{C_z}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} x_{ki} + \frac{C_x}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} z_{ki}$$

Bu aşamadan sonra Şekil C.2 yardımıyla,

$$\sin\alpha = \frac{z_{k\gamma}}{\sqrt{y_{k\gamma}^2 + z_{k\gamma}^2}} \qquad \cos\alpha = \frac{y_{k\gamma}}{\sqrt{y_{k\gamma}^2 + z_{k\gamma}^2}} \tag{C.15}$$

ifadeleri elde edilmektedir. Sonuçta, [T'] transformasyon matrisinin tamamı elde edilmiş olmaktadır. Bununla beraber, transformasyon matrisi, çubuk elemanın düşey konumda olması durumunu içermemektedir. Çubuk eleman düşey ise, yani y-eksenine paralel ise [T'] transformasyon matrisi bu özel durum için ayrıca hesaplanmalıdır.



Şekil C.3. Düşey konumdaki çubuk elemanın transformasyonu

Şekil C.3'ten görüldüğü gibi, burada sadece 2 adet dönme durumu mevcuttur. Birinci dönme γ dönmesi (90° veya 270°), ikincisi ise α dönmesidir. Bu durumda, sonuç olarak [T'] transformasyon matrisi aşağıdaki formda bulunmaktadır.

$$[T'] = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & C_y & 0 \\ \hline -C_y \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ \hline C_y \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{array}\right] \qquad C_x = C_z = 0 \qquad (C.16)$$

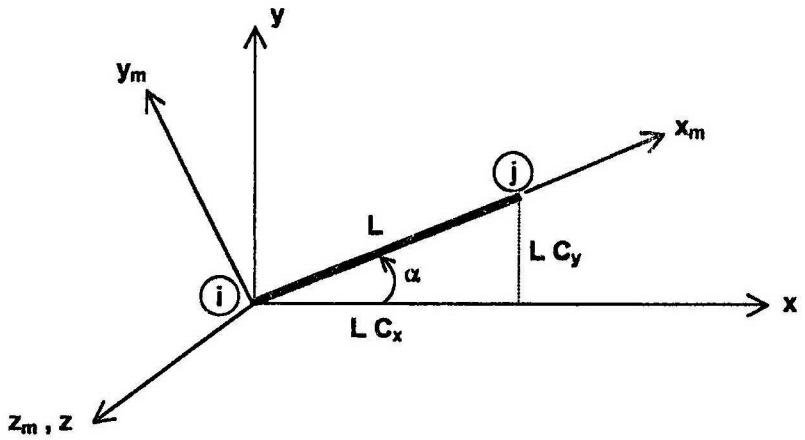
sinα ve cosα ifadeleri, k noktasının koordinatına göre,

$$\sin\alpha = \frac{z_{ki}}{\sqrt{x_{ki}^2 + z_{ki}^2}} \qquad \cos\alpha = \frac{-x_{ki}}{\sqrt{x_{ki}^2 + z_{ki}^2}} \qquad (C.17)$$

şeklinde hesaplanmaktadır. Bu aşamadan sonra, üç boyutlu prizmatik çubuğun yerel koordinatlardan sistem koordinatlarına dönüşümü için gerekli transformasyon matrisi, (C.11) ve (C.16) daki gibi elde edilmiş olmaktadır.

Transformasyon matrisleri, eleman eksenlerin özel konumda olması hali için daha basit ve pratik olarak bulunabilmektedir. Burada bahsedilen özel konumlar, çubuk elemanının z_m yerel ekseninin, global x-y-z eksenlerinden herhangi birine paralel olması halleridir.

z_m // z (LP=1,0) durumu :

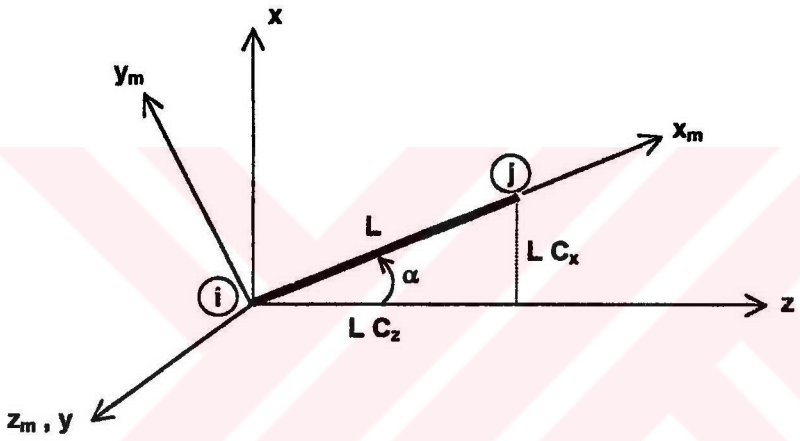


Şekil C.4. z_m // z durumu

Bu durumda, transformasyon matrisi aşağıda verilmektedir.

$$[T'] = \left[\begin{array}{c|c|c} C_x & C_y & 0 \\ \hline -C_y & C_x & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad \text{(C.18)}$$

z_m // y (LP=2,0) durumu :

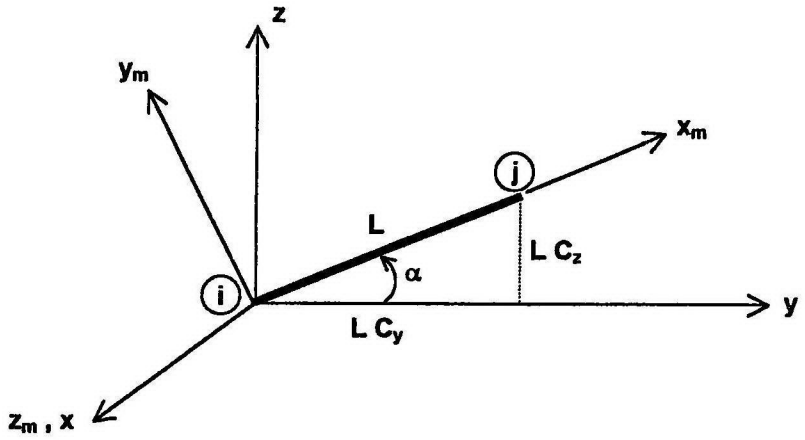


Şekil C.5. z_m // y durumu

Bu durumda transformasyon matrisi aşağıdaki hali almaktadır.

$$[T'] = \left[\begin{array}{c|c|c} C_z & 0 & C_x \\ \hline -C_x & 0 & C_z \\ \hline 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \qquad \text{(C.19)}$$

z_m // x (LP=3,0) durumu :



Şekil C.6. z_m // x durumu

Bu durumda transformasyon matrisi,

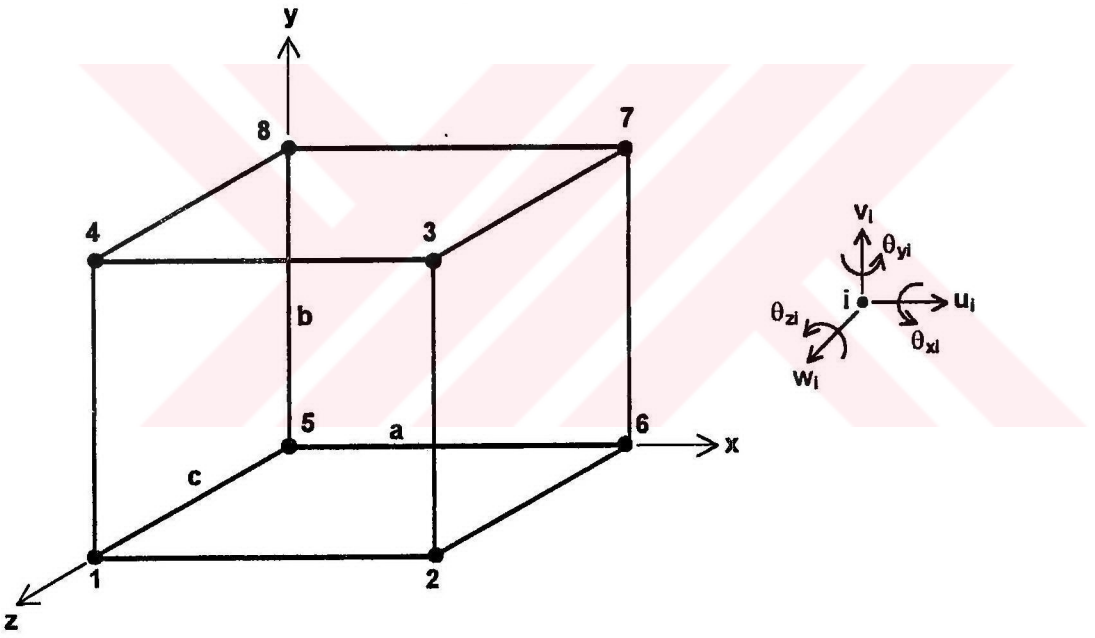
$$[T'] = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & C_y & C_z \\ \hline 0 & -C_z & C_y \\ \hline 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad \text{(C.20)}$$

formunda elde edilmektedir.

EK-D

DÖNME SERBESTLİK DERECESİNE SAHİP, ÜÇ BOYUTLU GEÇİŞ ELEMANI FORMÜLASYONU

Her düğümünde 3 deplasman ve 3 dönme bulunan, 8 düğümlü, 48 serbestlik dereceli elemanın (Rotational brick) formülasyonu, iki boyutlu Scordelis düzlem elemanının formülasyonu örnek alınarak, dikdörtgenler prizması (a×b×c boyutlu) şeklinde düşünülerek gerçekleştirilmiştir.

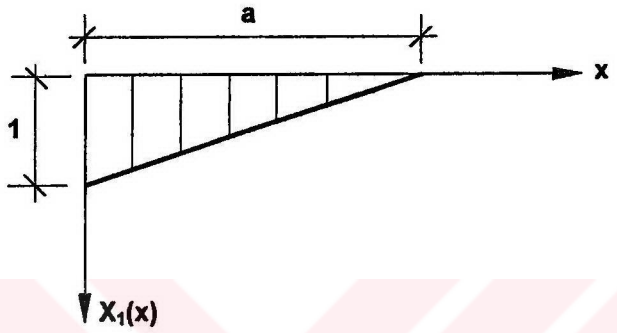


Şekil D.1. Üç boyutlu geçiş elemanı ve düğüm deplasmanları

Her düğümün deplasmanlarından dolayı elemanın yüzeyinde meydana gelen deplasman dağılımı, çeşitli tipteki deplasman durumlarının süperpozisyonu şeklinde düşünülerek formülasyon yapılmaktadır. Burada bahsedilen çeşitli deplasman durumları, lineer fonksiyon, kiriş dönme fonksiyonu ve kiriş deplasman fonksiyonlarıdır.

Lineer Fonksiyon Durumu

Lineer fonksiyon durumunda, bir ucunda birim çökme olan diğer ucu tutulu bir kiriş eleman gözönüne alınmaktadır. Bu durumda, kirişin deformasyon yapmış şekli ve meydana gelen deplasman fonksiyonları aşağıdaki gibidir.

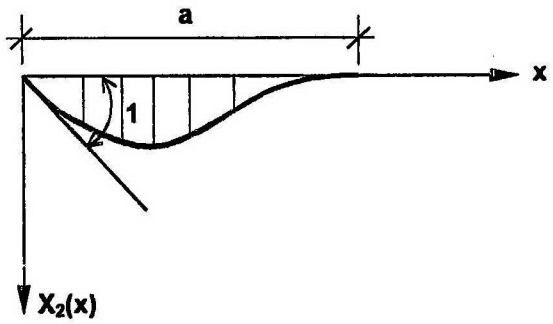


Şekil D.2. Lineer deplasman fonksiyonu

$$X_1(x) = \frac{a-x}{a} \qquad X_1(a-x) = \frac{x}{a} \tag{D.1}$$

Kiriş Dönme Fonksiyonu Durumu

Burada, bir ucu birim dönen, diğer ucu tutulu bir kiriş gözönüne alınmaktadır.



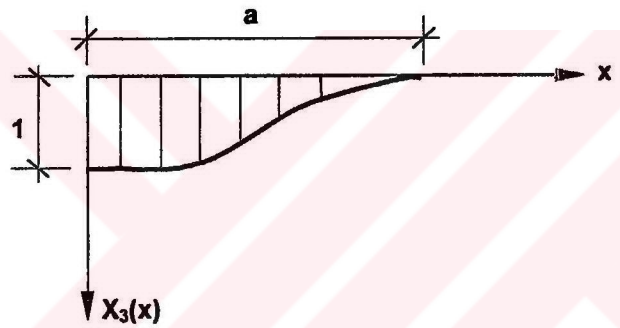
Şekil D.3. Kiriş dönme fonksiyonu

Bu durumda, kirişin deplasman fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilmektedir.

$$X_2(x) = a\left[\left(\frac{x}{a}\right)^3 - 2\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{x}{a}\right)\right]$$
$$X_2(a-x) = a\left[-\left(\frac{x}{a}\right)^3 + \left(\frac{x}{a}\right)^2\right] \qquad \text{(D.2)}$$

Kiriş Deplasman Fonksiyonu Durumu

Burada, bir ucu birim çöken, diğer ucu tutulu bir kiriş gözönüne alınmaktadır. Ayrıca, bu kirişin her iki ucunda dönmeleri engellenmiş durumdadır.



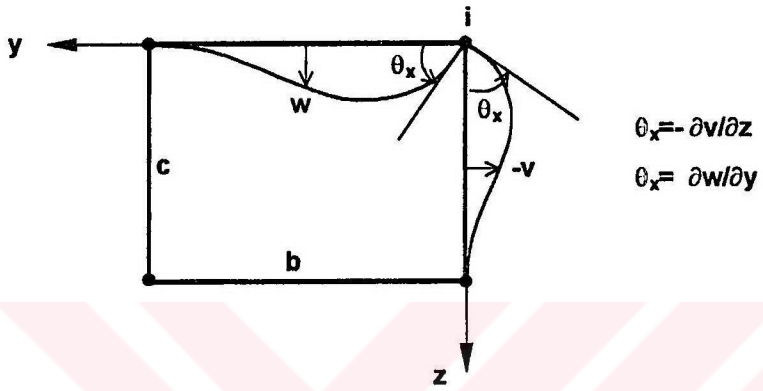
Şekil D.4. Kiriş deplasman fonksiyonu

Bu durumda, kirişin deplasman fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$X_3(x) = \left[2\left(\frac{x}{a}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1\right]$$
$$X_3(a-x) = \left[-2\left(\frac{x}{a}\right)^3 + 3\left(\frac{x}{a}\right)^2\right] \qquad \text{(D.3)}$$

θ_x Dönme İfadesi

θ_x dönmesi durumunda, elemanın tipik olarak bir kenarının deplasman yapmış hali aşağıdaki gibidir.



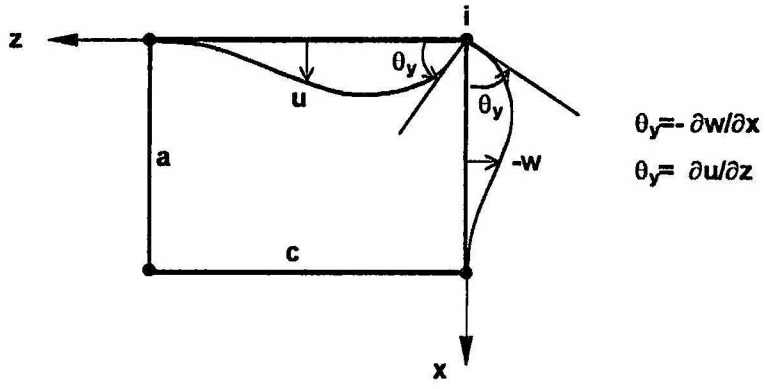
Şekil D.5. θ_x dönmesi durumu

Bu durumda, Şekil D.5 yardımıyla θ_x dönme ifadesi elde edilmektedir.

$$\theta_{xi} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_i - \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_i\right] \qquad (D.4)$$

θ_y Dönme İfadesi

θ_y dönmesi durumunda, elemanın tipik olarak bir kenarının deplasman yapmış hali aşağıdaki gibidir.



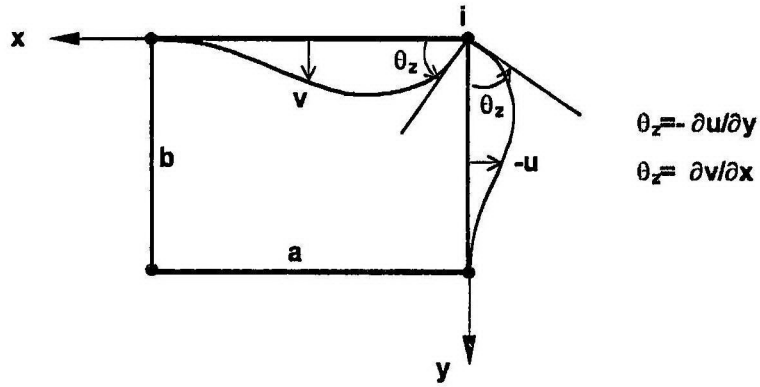
Şekil D.6. θ_y dönmesi durumu

Bu durumda, Şekil D.6 yardımıyla θ_y dönme ifadesi elde edilmektedir.

$$\theta_{yi} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_i - \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_i\right] \qquad (D.5)$$

θ_z Dönme İfadesi

θ_z dönmesi durumunda, elemanın tipik olarak bir kenarının deplasman yapmış hali aşağıdaki gibidir.

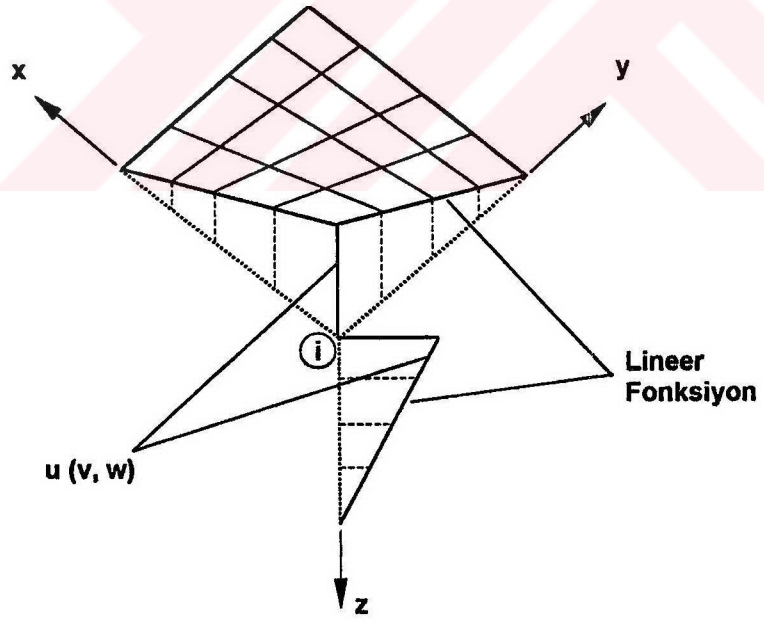


Şekil D.7. θ_z dönmesi durumu

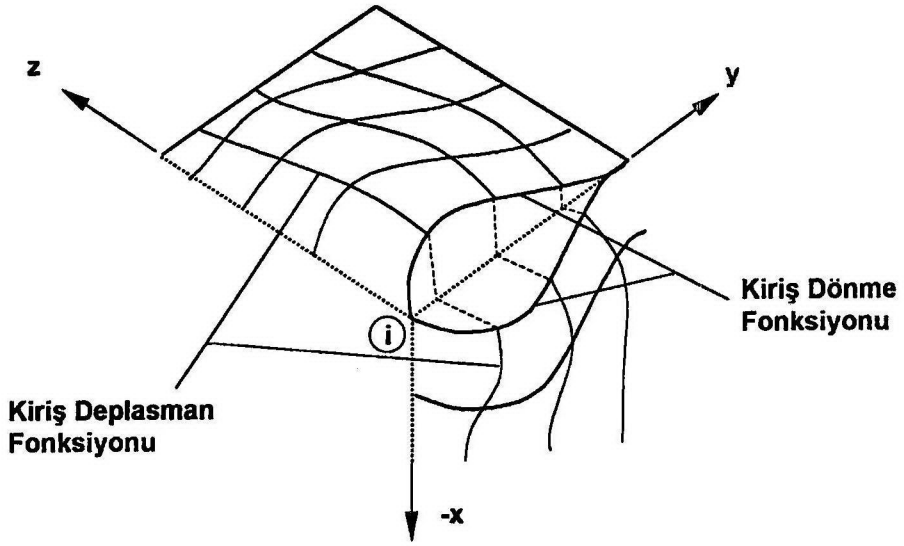
Bu durumda, Şekil D.7 yardımıyla θ_z dönme ifadesi elde edilmektedir.

$$\theta_{zi} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_i - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_i\right] \qquad (D.6)$$

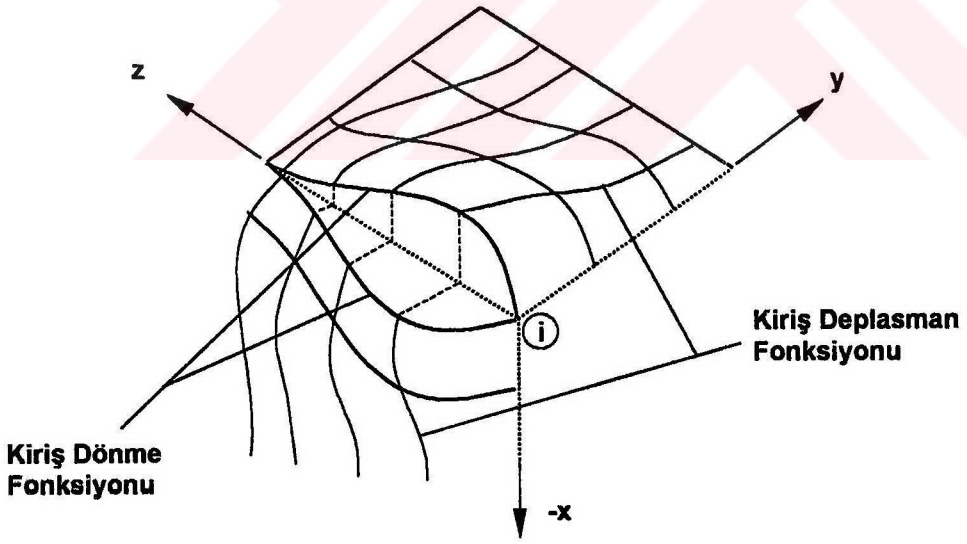
Düğümlerdeki dönmelerin deplasmanlar cinsinden tarifleri bu şekilde elde edildikten sonra, şimdi baz fonksiyonları matrisinde görülen sıfırdan farklı elemanlar elde edilecektir. Bu elemanlar elde edilirken, yukarıda bahsedilen çeşitli deplasman durumları gözönünde bulundurulacaktır. Bunun için u_i, v_i ve w_i deplasmanları ile θ_{xi}, θ_{yi} ve θ_{zi} dönmelerine ait kabul edilen deplasman durumları aşağıdaki şekillerde görülmektedirler (Şekil D.8-11).



Şekil D.8. u (v, w) deplasmanının yüzey boyunca değişimi

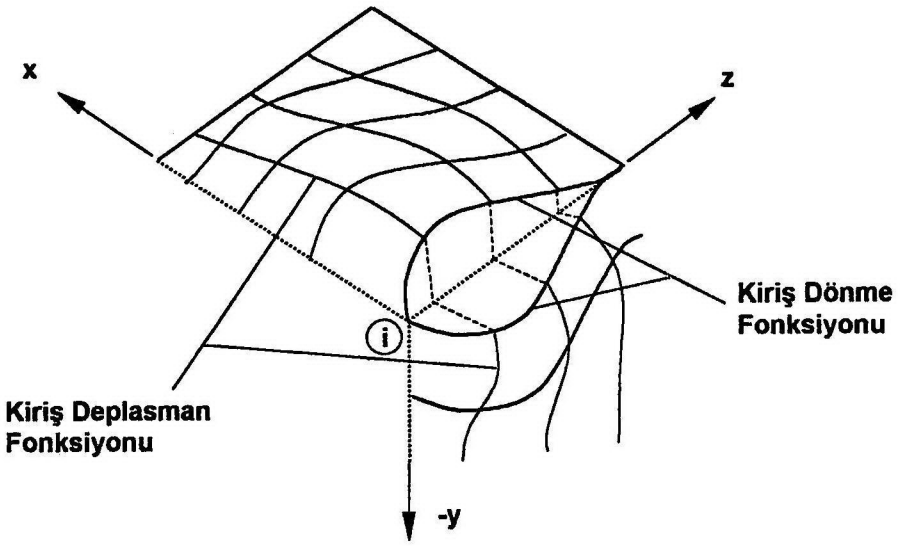


w deplasmanının dağılımı

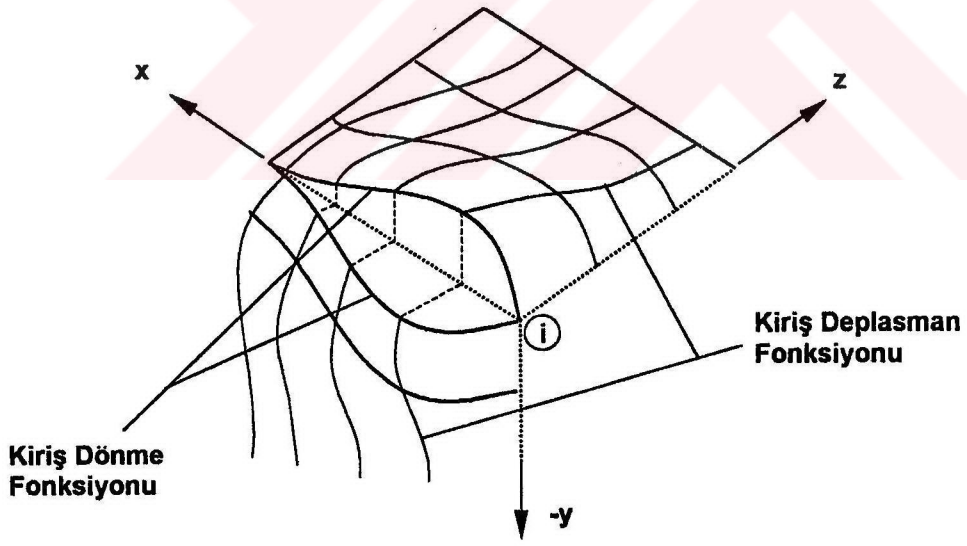


v deplasmanının dağılımı

Şekil D.9. θ_x dönmesinden dolayı deplasmanların yüzey boyunca değişimi

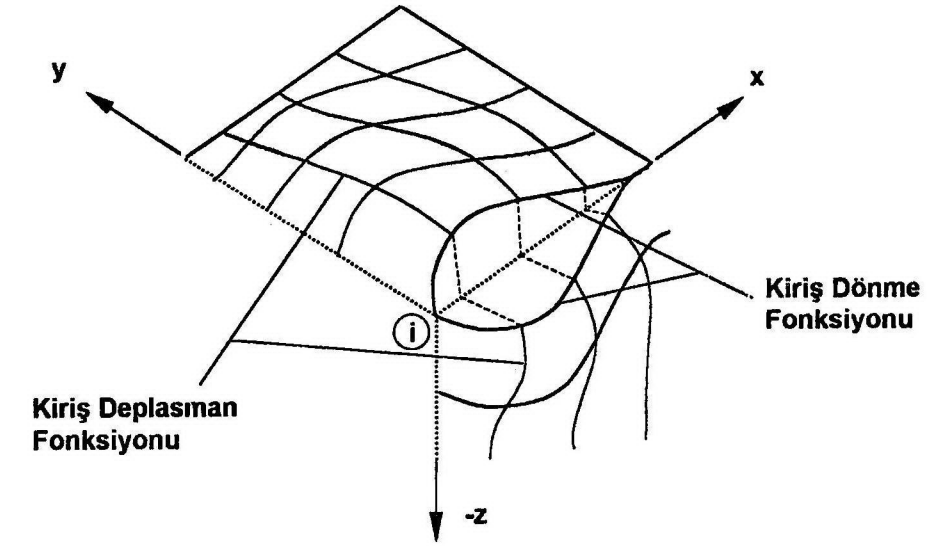


u deplasmanının dağılımı

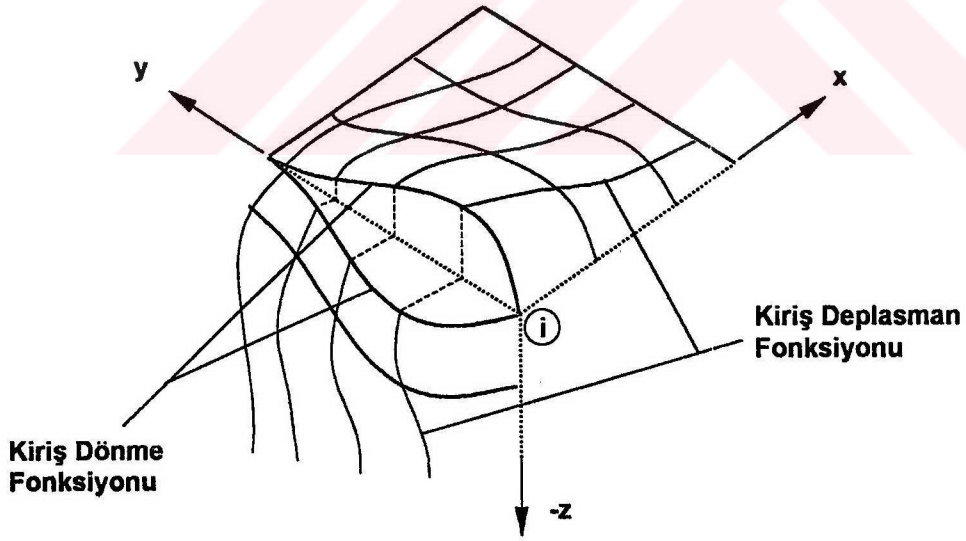


w deplasmanının dağılımı

Şekil D.10. θ_y dönmesinden dolayı deplasmanların yüzey boyunca değişimi



v deplasmanının dağılımı



u deplasmanının dağılımı

Şekil D.11. θ_z dönmesinden dolayı deplasmanların yüzey boyunca değişimi

Tipik bir "i" düğümü için verilen durumlar, elemanın tüm düğümleri içinde mevcuttur. Sonuç olarak toplam 48 adet deplasman durumunun süperpozisyonu yapılarak, baz fonksiyonları matrisinin sıfırdan farklı elemanları aşağıdaki çizelgelerde görüldüğü şekilde hesaplanmıştır.

Çizelge D.1. u deplasmanına ait baz fonksiyonları

u deplasmanından	θ_y dönmesinden	θ_z dönmesinden
$P_{1x}=X_1(x)\,Y_1(y)\,Z_1(c-z)$	$P_{5x}=-X_3(x)\,Y_3(y)\,Z_2(c-z)$	$P_{6x}=-X_3(x)\,Y_2(y)\,Z_3(c-z)$
$P_{7x}=X_1(a-x)\,Y_1(y)\,Z_1(c-z)$	$P_{11x}=-X_3(a-x)\,Y_3(y)\,Z_2(c-z)$	$P_{12x}=-X_3(a-x)\,Y_2(y)\,Z_3(c-z)$
$P_{13x}=X_1(a-x)\,Y_1(b-y)\,Z_1(c-z)$	$P_{17x}=-X_3(a-x)\,Y_3(b-y)\,Z_2(c-z)$	$P_{18x}=X_3(a-x)\,Y_2(b-y)\,Z_3(c-z)$
$P_{19x}=X_1(x)\,Y_1(b-y)\,Z_1(c-z)$	$P_{23x}=-X_3(x)\,Y_3(b-y)\,Z_2(c-z)$	$P_{24x}=X_3(x)\,Y_2(b-y)\,Z_3(c-z)$
$P_{25x}=X_1(x)\,Y_1(y)\,Z_1(z)$	$P_{29x}=X_3(x)\,Y_3(y)\,Z_2(z)$	$P_{30x}=-X_3(x)\,Y_2(y)\,Z_3(z)$
$P_{31x}=X_1(a-x)\,Y_1(y)\,Z_1(z)$	$P_{35x}=X_3(a-x)\,Y_3(y)\,Z_2(z)$	$P_{36x}=-X_3(a-x)\,Y_2(y)\,Z_3(z)$
$P_{37x}=X_1(a-x)\,Y_1(b-y)\,Z_1(z)$	$P_{41x}=X_3(a-x)\,Y_3(b-y)\,Z_2(z)$	$P_{42x}=X_3(a-x)\,Y_2(b-y)\,Z_3(z)$
$P_{43x}=X_1(x)\,Y_1(b-y)\,Z_1(z)$	$P_{47x}=X_3(x)\,Y_3(b-y)\,Z_2(z)$	$P_{48x}=X_3(x)\,Y_2(b-y)\,Z_3(z)$

Çizelge D.2. v deplasmanına ait baz fonksiyonları

v deplasmanından	θ_x dönmesinden	θ_z dönmesinden
$P_{2y}=X_1(x)\,Y_1(y)\,Z_1(c-z)$	$P_{4y}=X_3(x)\,Y_3(y)\,Z_2(c-z)$	$P_{6y}=X_2(x)\,Y_3(y)\,Z_3(c-z)$
$P_{8y}=X_1(a-x)\,Y_1(y)\,Z_1(c-z)$	$P_{10y}=X_3(a-x)\,Y_3(y)\,Z_2(c-z)$	$P_{12y}=-X_2(a-x)\,Y_3(y)\,Z_3(c-z)$
$P_{14y}=X_1(a-x)\,Y_1(b-y)\,Z_1(c-z)$	$P_{16y}=X_3(a-x)\,Y_3(b-y)\,Z_2(c-z)$	$P_{18y}=-X_2(a-x)\,Y_3(b-y)\,Z_3(c-z)$
$P_{20y}=X_1(x)\,Y_1(b-y)\,Z_1(c-z)$	$P_{22y}=X_3(x)\,Y_3(b-y)\,Z_2(c-z)$	$P_{24y}=X_2(x)\,Y_3(b-y)\,Z_3(c-z)$
$P_{26y}=X_1(x)\,Y_1(y)\,Z_1(z)$	$P_{28y}=-X_3(x)\,Y_3(y)\,Z_2(z)$	$P_{30y}=X_2(x)\,Y_3(y)\,Z_3(z)$
$P_{32y}=X_1(a-x)\,Y_1(y)\,Z_1(z)$	$P_{34y}=-X_3(a-x)\,Y_3(y)\,Z_2(z)$	$P_{36y}=-X_2(a-x)\,Y_3(y)\,Z_3(z)$
$P_{38y}=X_1(a-x)\,Y_1(b-y)\,Z_1(z)$	$P_{40y}=-X_3(a-x)\,Y_3(b-y)\,Z_2(z)$	$P_{42y}=-X_2(a-x)\,Y_3(b-y)\,Z_3(z)$
$P_{44y}=X_1(x)\,Y_1(b-y)\,Z_1(z)$	$P_{46y}=-X_3(x)\,Y_3(b-y)\,Z_2(z)$	$P_{48y}=X_2(x)\,Y_3(b-y)\,Z_3(z)$

Çizelge D.3. w deplasmanına ait baz fonksiyonları

w deplasmanından	θ_x dönmesinden	θ_y dönmesinden
$P_{3z}=X_1(x)\ Y_1(y)\ Z_1(c\text{-}z)$	$P_{4z}= X_3(x)\ Y_2(y)\ Z_3(c\text{-}z)$	$P_{5z}= -X_2(x)\ Y_3(y)\ Z_3(c\text{-}z)$
$P_{9z}= X_1(a\text{-}x)\ Y_1(y)\ Z_1(c\text{-}z)$	$P_{10z}= X_3(a\text{-}x)\ Y_2(y)\ Z_3(c\text{-}z)$	$P_{11z}= X_2(a\text{-}x)\ Y_3(y)\ Z_3(c\text{-}z)$
$P_{15z}= X_1(a\text{-}x)\ Y_1(b\text{-}y)\ Z_1(c\text{-}z)$	$P_{16z}= -X_3(a\text{-}x)\ Y_2(b\text{-}y)\ Z_3(c\text{-}z)$	$P_{17z}= X_2(a\text{-}x)\ Y_3(b\text{-}y)\ Z_3(c\text{-}z)$
$P_{21z}= X_1(x)\ Y_1(b\text{-}y)\ Z_1(c\text{-}z)$	$P_{22z}= -X_3(x)\ Y_2(b\text{-}y)\ Z_3(c\text{-}z)$	$P_{23z}= -X_2(x)\ Y_3(b\text{-}y)\ Z_3(c\text{-}z)$
$P_{27z}= X_1(x)\ Y_1(y)\ Z_1(z)$	$P_{28z}= X_3(x)\ Y_2(y)\ Z_3(z)$	$P_{29z}= -X_2(x)\ Y_3(y)\ Z_3(z)$
$P_{33z}= X_1(a\text{-}x)\ Y_1(y)\ Z_1(:)$	$P_{34z}= X_3(a\text{-}x)\ Y_2(y)\ Z_3(z)$	$P_{35z}= X_2(a\text{-}x)\ Y_3(y)\ Z_3(z)$
$P_{39z}= X_1(a\text{-}x)\ Y_1(b\text{-}y)\ Z_1(z)$	$P_{40z}= -X_3(a\text{-}x)\ Y_2(b\text{-}y)\ Z_3(z)$	$P_{41z}= X_2(a\text{-}x)\ Y_3(b\text{-}y)\ Z_3(z)$
$P_{45z}= X_1(x)\ Y_1(b\text{-}y)\ Z_1(z)$	$P_{46z}= -X_3(x)\ Y_2(b\text{-}y)\ Z_3(z)$	$P_{47z}= -X_2(x)\ Y_3(b\text{-}y)\ Z_3(z)$

Baz fonksiyonları ifadelerinde görülen X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3, Z_1, Z_2, ve Z_3 fonksiyonlarının tarifleri, (D.1), (D.2) ve (D.3) eşitliklerinde verilen formdadır. Bu şekilde baz fonksiyonları bulunduktan sonra eleman rijitlik ve kütle matrisleri hesaplanabilmektedir.

EK-E
İKİ DALGA TİPİNİ İÇEREN, ÜÇ BOYUTLU SONSUZ ELEMAN MATRİSLERİ

E.1. Kütle Matrisinin Hesabı

Azalan fonksiyonlu, üç boyutlu sonsuz elemana ait kütle matrisi, referans koordinatlarında aşağıdaki formda elde edilmektedir.

$$\left[m^S\right]_{(24\times24)} = \int_{\zeta=-1}^{+1}\int_{\eta=-1}^{+1}\int_{\xi=0}^{\infty} \rho\,[N]^T[N]|J|\,d\xi\,d\eta\,d\zeta \qquad (E.1)$$

Yukarıda görülen şekil fonksiyonları matrisi,

$$[N]=\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} N_1 & 0 & 0 & \cdots & N_8 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \cdots & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \cdots & 0 & 0 & N_8 \end{array}\right]_{(3\times24)} \qquad (E.2)$$

olarak tanımlanmaktadır. Bu durumda,

$$[N]^T[N]=\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} N_1N_1 & 0 & 0 & \cdots & N_1N_8 & 0 & 0 \\ 0 & N_1N_1 & 0 & \cdots & 0 & N_1N_8 & 0 \\ 0 & 0 & N_1N_1 & \cdots & 0 & 0 & N_1N_8 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline N_8N_1 & 0 & 0 & \cdots & N_8N_8 & 0 & 0 \\ 0 & N_8N_1 & 0 & \cdots & 0 & N_8N_8 & 0 \\ 0 & 0 & N_8N_1 & \cdots & 0 & 0 & N_8N_8 \end{array}\right] \qquad (E.3)$$

olarak bulunur. Tipik bir şekil fonksiyonu,

$$N_i(\xi,\eta,\zeta,\omega) = P_i(\xi,\omega)\, L_i(\eta,\zeta)$$
$$P_i(\xi,\omega) = a_i\, e^{-(\alpha+\beta_1)\xi} + b_i\, e^{-(\alpha+\beta_2)\xi} \qquad \text{(E.4)}$$

şeklinde seçilmektedir. Buna göre,

$$\begin{aligned} N_i N_j =& e^{-2(\alpha+\beta_1)\xi}\left[L_i L_j a_i a_j\right] \\ &+ e^{-2(\alpha+\frac{\beta_1+\beta_2}{2})\xi}\left[L_i L_j (a_i b_j + a_j b_i)\right] \\ &+ e^{-2(\alpha+\beta_2)\xi}\left[L_i L_j b_i b_j\right] \end{aligned} \qquad \text{(E.5)}$$

olarak bulunur. Tüm terimler bu şekilde bulunduktan sonra, sonlu yönde Gauss-Legendre, sonsuz yönde ise Newton-Cotes integrasyon yöntemi kullanılarak, üç boyutlu, iki dalga tipini içeren sonsuz elemana ait kütle matrisi sayısal olarak hesaplanabilmektedir.

E.2. Rijitlik Matrisinin Hesabı

Azalan fonksiyonlu, üç boyutlu sonsuz elemana ait rijitlik matrisi ifadesi, referans koordinatlarında aşağıdaki şekildedir.

$$\left[k^S\right]_{(24\times24)} = \int_{\zeta=-1}^{+1}\int_{\eta=-1}^{+1}\int_{\xi=0}^{\infty}\left[k^*\right]|J|\, d\xi\, d\eta\, d\zeta$$
$$\left[k^*\right] = \left[B\right]^T\left[D\right]\left[B\right] \qquad \text{(E.6)}$$

Burada, [D] malzeme matrisi, üç boyutlu bir eleman için aşağıdaki formdadır.

$$[D]=\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 & 0 & 0 \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & 0 & 0 & 0 \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \qquad \text{(E.7)}$$

Şekil değiştirme matrisinin formu ise aşağıda verildiği gibidir.

$$[B]=\left[\begin{array}{ccc:c:ccc} B_{11} & 0 & 0 & \cdots & B_{1,22} & 0 & 0 \\ 0 & B_{22} & 0 & \cdots & 0 & B_{2,23} & 0 \\ 0 & 0 & B_{33} & \cdots & 0 & 0 & B_{3,24} \\ B_{41} & B_{42} & 0 & \cdots & B_{4,22} & B_{4,23} & 0 \\ 0 & B_{52} & B_{53} & \cdots & 0 & B_{5,23} & B_{5,24} \\ B_{61} & 0 & B_{63} & \cdots & B_{6,22} & 0 & B_{6,24} \end{array}\right] \qquad \text{(E.8)}$$

Eleman rijitlik matrisi ifadesinde görülen $[k^*]$ matrisinin elemanları hesaplanıp düzenlemeler yapıldıktan sonra, aşağıdaki formda elde edilmiştir.

$$\begin{array}{ll} i=1,2,\cdots,8 & j=1,2,\cdots,8 \\ m=3i & r=3j \\ l=3i-1 & q=3j-1 \\ k=3i-2 & p=3j-2 \end{array} \qquad \text{(E.9)}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} k^*_{kp} &= D_{11}\,B_{1k}\,B_{1p} + D_{44}\,B_{2l}\,B_{2q} + D_{66}\,B_{3m}\,B_{3r} \\ k^*_{kq} &= D_{12}\,B_{1k}\,B_{2q} + D_{44}\,B_{2l}\,B_{1p} \\ k^*_{kr} &= D_{13}\,B_{1k}\,B_{3r} + D_{66}\,B_{3m}\,B_{1p} \end{aligned} \qquad \text{(E.10a)}$$

$$k^*_{lp} = D_{21} B_{2l} B_{1p} + D_{44} B_{1k} B_{2q}$$

$$k^*_{lq} = D_{22} B_{2l} B_{2q} + D_{44} B_{1k} B_{1p} + D_{55} B_{3m} B_{3r} \qquad \text{(E.10b)}$$

$$k^*_{lr} = D_{23} B_{2l} B_{3r} + D_{55} B_{3m} B_{2q}$$

$$k^*_{mp} = D_{31} B_{3m} B_{1p} + D_{66} B_{1k} B_{3r}$$

$$k^*_{mq} = D_{32} B_{3m} B_{2q} + D_{55} B_{2l} B_{3r} \qquad \text{(E.10c)}$$

$$k^*_{mr} = D_{33} B_{3m} B_{3r} + D_{55} B_{2l} B_{2q} + D_{66} B_{1k} B_{1p}$$

Şekil değiştirme matrisinin elemanları ise,

$$\left.\begin{aligned} B_{1k} &= J^*_{11} N_{i,\xi} + J^*_{12} N_{i,\eta} + J^*_{13} N_{i,\zeta} \\ B_{2l} &= J^*_{21} N_{i,\xi} + J^*_{22} N_{i,\eta} + J^*_{23} N_{i,\zeta} \\ B_{3m} &= J^*_{31} N_{i,\xi} + J^*_{32} N_{i,\eta} + J^*_{33} N_{i,\zeta} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} k &= 3i-2 \\ l &= 3i-1 \\ m &= 3i \end{aligned} \qquad \text{(E.11)}$$

şeklinde yazılabilmektedir. Şekil fonksiyonları ve türevleri,

$$N_i(\xi,\eta,\zeta,\omega) = P_i(\xi,\omega)\, L_i(\eta,\zeta)$$

$$N_{i,\xi} = P_{i,\xi}\, L_i \qquad N_{i,\eta} = P_i\, L_{i,\eta} \qquad N_{i,\zeta} = P_i\, L_{i,\zeta} \qquad \text{(E.12)}$$

olarak bulunur. İki dalga tipini içeren sonsuz eleman için,

$$N_i = (L_i a_i)\, e^{-(\alpha+\beta_1)\xi} + (L_i b_i)\, e^{-(\alpha+\beta_2)\xi}$$

$$N_{i,\xi} = \left[-L_i a_i (\alpha+\beta_1)\right] e^{-(\alpha+\beta_1)\xi} + \left[-L_i b_i (\alpha+\beta_2)\right] e^{-(\alpha+\beta_2)\xi} \qquad \text{(E.13)}$$

$$N_{i,\eta} = (a_i L_{i,\eta})\, e^{-(\alpha+\beta_1)\xi} + (b_i L_{i,\eta})\, e^{-(\alpha+\beta_2)\xi}$$

$$N_{i,\zeta} = (a_i L_{i,\zeta})\, e^{-(\alpha+\beta_1)\xi} + (b_i L_{i,\zeta})\, e^{-(\alpha+\beta_2)\xi}$$

şeklinde, şekil fonksiyonları ve türevlerinin ifadeleri elde edilmiş olur. Burada (E.13) ifadeleri (E.11) eşitliklerinde yerine yazılırsa, şekil değiştirme matrisinin elemanları aşağıda görüldüğü gibi elde edilir.

$$
\begin{aligned}
B_{1k} &= bk1\ e^{-(\alpha+\beta_1)\xi} + bk2\ e^{-(\alpha+\beta_2)\xi} \\
B_{1p} &= bp1\ e^{-(\alpha+\beta_1)\xi} + bp2\ e^{-(\alpha+\beta_2)\xi} \\
B_{2l} &= bl1\ e^{-(\alpha+\beta_1)\xi} + bl2\ e^{-(\alpha+\beta_2)\xi} \\
B_{2q} &= bq1\ e^{-(\alpha+\beta_1)\xi} + bq2\ e^{-(\alpha+\beta_2)\xi} \\
B_{3m} &= bm1\ e^{-(\alpha+\beta_1)\xi} + bm2\ e^{-(\alpha+\beta_2)\xi} \\
B_{3r} &= br1\ e^{-(\alpha+\beta_1)\xi} + br2\ e^{-(\alpha+\beta_2)\xi}
\end{aligned}
\qquad \text{(E.14a)}
$$

$$
\begin{aligned}
bk1 &= \left[-a_i J^*_{11} L_i(\alpha+\beta_1) + a_i J^*_{12} L_{i,\eta} + a_i J^*_{13} L_{i,\zeta}\right] \\
bk2 &= \left[-b_i J^*_{11} L_i(\alpha+\beta_2) + b_i J^*_{12} L_{i,\eta} + b_i J^*_{13} L_{i,\zeta}\right] \\
bp1 &= \left[-a_j J^*_{11} L_j(\alpha+\beta_1) + a_j J^*_{12} L_{j,\eta} + a_j J^*_{13} L_{j,\zeta}\right] \\
bp2 &= \left[-b_j J^*_{11} L_j(\alpha+\beta_2) + b_j J^*_{12} L_{j,\eta} + b_j J^*_{13} L_{j,\zeta}\right]
\end{aligned}
\qquad \text{(E.14b)}
$$

$$
\begin{aligned}
bl1 &= \left[-a_i J^*_{21} L_i(\alpha+\beta_1) + a_i J^*_{22} L_{i,\eta} + a_i J^*_{23} L_{i,\zeta}\right] \\
bl2 &= \left[-b_i J^*_{21} L_i(\alpha+\beta_2) + b_i J^*_{22} L_{i,\eta} + b_i J^*_{23} L_{i,\zeta}\right] \\
bq1 &= \left[-a_j J^*_{21} L_j(\alpha+\beta_1) + a_j J^*_{22} L_{j,\eta} + a_j J^*_{23} L_{j,\zeta}\right] \\
bq2 &= \left[-b_j J^*_{21} L_j(\alpha+\beta_2) + b_j J^*_{22} L_{j,\eta} + b_j J^*_{23} L_{j,\zeta}\right]
\end{aligned}
\qquad \text{(E.14c)}
$$

$$
\begin{aligned}
bm1 &= \left[-a_i J^*_{31} L_i(\alpha+\beta_1) + a_i J^*_{32} L_{i,\eta} + a_i J^*_{33} L_{i,\zeta}\right] \\
bm2 &= \left[-b_i J^*_{31} L_i(\alpha+\beta_2) + b_i J^*_{32} L_{i,\eta} + b_i J^*_{33} L_{i,\zeta}\right] \\
br1 &= \left[-a_j J^*_{31} L_j(\alpha+\beta_1) + a_j J^*_{32} L_{j,\eta} + a_j J^*_{33} L_{j,\zeta}\right] \\
br2 &= \left[-b_j J^*_{31} L_j(\alpha+\beta_2) + b_j J^*_{32} L_{j,\eta} + b_j J^*_{33} L_{j,\zeta}\right]
\end{aligned}
\qquad \text{(E.14d)}
$$

Şimdi, (E.14a) da görülen ifadeler, (E.10) eşitliklerinde yerine yazılırsa, $[k^*]$ matrisinin elemanları bulunur.

$$\begin{aligned} k^*_{kp} &= e^{-2(\alpha+\beta_1)\xi}\left[D_{11}(bk1\ bp1)+D_{44}(bl1\ bq1)+D_{66}(bm1\ br1)\right] \\ &+ e^{-2(\alpha+\frac{\beta_1+\beta_2}{2})\xi}\left[D_{11}(bk1\ bp2+bk2\ bp1)\right. \\ &\qquad \left.+D_{44}(bl1\ bq2+bl2\ bq1)+D_{66}(bm1\ br2+bm2\ br1)\right] \\ &+ e^{-2(\alpha+\beta_2)\xi}\left[D_{11}(bk2\ bp2)+D_{44}(bl2\ bq2)+D_{66}(bm2\ br2)\right] \end{aligned} \tag{E.15a}$$

$$\begin{aligned} k^*_{kq} &= e^{-2(\alpha+\beta_1)\xi}\left[D_{12}(bk1\ bq1)+D_{44}(bl1\ bp1)\right] \\ &+ e^{-2(\alpha+\frac{\beta_1+\beta_2}{2})\xi}\left[D_{12}(bk1\ bq2+bk2\ bq1)+D_{44}(bl1\ bp2+bl2\ bp1)\right] \\ &+ e^{-2(\alpha+\beta_2)\xi}\left[D_{12}(bk2\ bq2)+D_{44}(bl2\ bp2)\right] \end{aligned} \tag{E.15b}$$

$$\begin{aligned} k^*_{kr} &= e^{-2(\alpha+\beta_1)\xi}\left[D_{13}(bk1\ br1)+D_{66}(bm1\ bp1)\right] \\ &+ e^{-2(\alpha+\frac{\beta_1+\beta_2}{2})\xi}\left[D_{13}(bk1\ br2+bk2\ br1)+D_{66}(bm1\ bp2+bm2\ bp1)\right] \\ &+ e^{-2(\alpha+\beta_2)\xi}\left[D_{13}(bk2\ br2)+D_{66}(bm2\ bp2)\right] \end{aligned} \tag{E.15c}$$

$$\begin{aligned} k^*_{lp} &= e^{-2(\alpha+\beta_1)\xi}\left[D_{21}(bl1\ bp1)+D_{44}(bk1\ bq1)\right] \\ &+ e^{-2(\alpha+\frac{\beta_1+\beta_2}{2})\xi}\left[D_{21}(bl1\ bp2+bl2\ bp1)+D_{44}(bk1\ bq2+bk2\ bq1)\right] \\ &+ e^{-2(\alpha+\beta_2)\xi}\left[D_{21}(bl2\ bp2)+D_{44}(bk2\ bq2)\right] \end{aligned} \tag{E.15d}$$

$$\begin{aligned} k^*_{lq} &= e^{-2(\alpha+\beta_1)\xi}\left[D_{22}(bl1\ bq1)+D_{44}(bk1\ bp1)+D_{55}(bm1\ br1)\right] \\ &+ e^{-2(\alpha+\frac{\beta_1+\beta_2}{2})\xi}\left[D_{22}(bl1\ bq2+bl2\ bq1)\right. \\ &\qquad \left.+D_{44}(bk1\ bp2+bk2\ bp1)+D_{55}(bm1\ br2+bm2\ br1)\right] \\ &+ e^{-2(\alpha+\beta_2)\xi}\left[D_{22}(bl2\ bq2)+D_{44}(bk2\ bp2)+D_{55}(bm2\ br2)\right] \end{aligned} \tag{E.15e}$$

$$k^*_{lr} = e^{-2(\alpha+\beta_1)\xi}\left[D_{23}(bl1\ br1)+D_{55}(bm1\ bq1)\right]$$
$$+ e^{-2(\alpha+\frac{\beta_1+\beta_2}{2})\xi}\left[D_{23}(bl1\ br2+bl2\ br1)+D_{55}(bm1\ bq2+bm2\ bq1)\right] \quad (E.15f)$$
$$+ e^{-2(\alpha+\beta_2)\xi}\left[D_{23}(bl2\ br2)+D_{55}(bm2\ bq2)\right]$$

$$k^*_{mp} = e^{-2(\alpha+\beta_1)\xi}\left[D_{31}(bm1\ bp1)+D_{66}(bk1\ br1)\right]$$
$$+ e^{-2(\alpha+\frac{\beta_1+\beta_2}{2})\xi}\left[D_{31}(bm1\ bp2+bm2\ bp1)+D_{66}(bk1\ br2+bk2\ br1)\right] \quad (E.15g)$$
$$+ e^{-2(\alpha+\beta_2)\xi}\left[D_{31}(bm2\ bp2)+D_{66}(bk2\ br2)\right]$$

$$k^*_{mq} = e^{-2(\alpha+\beta_1)\xi}\left[D_{32}(bm1\ bq1)+D_{55}(bl1\ br1)\right]$$
$$+ e^{-2(\alpha+\frac{\beta_1+\beta_2}{2})\xi}\left[D_{32}(bm1\ bq2+bm2\ bq1)+D_{55}(bl1\ br2+bl2\ br1)\right] \quad (E.15h)$$
$$+ e^{-2(\alpha+\beta_2)\xi}\left[D_{32}(bm2\ bq2)+D_{55}(bl2\ br2)\right]$$

$$k^*_{mr} = e^{-2(\alpha+\beta_1)\xi}\left[D_{33}(bm1\ br1)+D_{55}(bl1\ bq1)+D_{66}(bk1\ bp1)\right]$$
$$+ e^{-2(\alpha+\frac{\beta_1+\beta_2}{2})\xi}\left[D_{33}(bm1\ br2+bm2\ br1)\right.$$
$$\left.+D_{55}(bl1\ bq2+bl2\ bq1)+D_{66}(bk1\ bp2+bk2\ bp1)\right] \quad (E.15ı)$$
$$+ e^{-2(\alpha+\beta_2)\xi}\left[D_{33}(bm2\ br2)+D_{55}(bl2\ bq2)+D_{66}(bk2\ bp2)\right]$$

Görüldüğü gibi, $[k^*]$ matrisinin tüm elemanları bulunduktan sonra (E.6) bağıntısında yerine yazılmaktadır. Sonlu yönde Gauss-Legendre, sonsuz yönde ise Newton-Cotes integrasyon yöntemi uygulanarak eleman rijitlik matrisi sayısal olarak hesaplanmaktadır.