

ÇOK GENİŞ ÖLÇEKLİ TÜMDEVRE  
ARABAĞLANTILARININ BENZETİMİNDE  
MODEL İNDİRGEME YÖNTEMLERİ

Y. LİSANS TEZİ

E. Fatih YETKİN

702001014

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 5 Mayıs 2003  
Tezin Savunulduğu Tarih : 5 Haziran 2003

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Hasan Dağ *Hasan Dağ*  
Diğer Jüri Üyeleri : Doç. Dr. M. Serdar Çelebi *M. Serdar Çelebi*  
Doç. Dr. Ali Zeki *Ali Zeki*

Haziran 2003

## ÖNSÖZ

Tez çalışması boyunca bilgi, deneyim ve zamanını paylaşmaktan sakınmayan hocam Doç. Dr. Hasan Dağ'a teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca tüm hayatım boyunca her an güven ve sevgileri ile yanımda olan aileme sonsuz desteklerinden dolayı teşekkür ederim.

Son olarak da dostlarıma sonsuz teşekkürlerimle...

Haziran 2003

E. Fatih YETKİN

## İÇİNDEKİLER

KISALTMALAR	vi
TABLO LİSTESİ	vii
ŞEKİL LİSTESİ	viii
SEMBOL LİSTESİ	x
ÖZET	xi
SUMMARY	xii
1 Giriş	1
2 Temel Kavramlar	9
2.1 Devreler Teorisi . . . . .	9
2.1.1 Elektronik Devre Elemanlarının Matematiksel Modelleri . . . . .	12
2.1.2 Devre Denklemlerinin Kurulması . . . . .	14
2.2 Denetim Sistemleri . . . . .	16
2.3 Sayısal Yöntemler . . . . .	19
2.3.1 Padé Yaklaşırımı . . . . .	19
2.3.2 Krylov Altuzayı . . . . .	21
3 Mikroelektronik Sistemlerde Arabağlantı Yapıları	25
3.1 Devre Modelleri . . . . .	28
4 Model İndirgeme Yöntemleri	30
4.1 Giriş . . . . .	30
4.1.1 Özdeğer Hesabına Dayalı Yöntemler . . . . .	31
4.1.2 Momentlerin Tanımı . . . . .	32
4.1.3 Genel Bir Devre İçin Momentlerin Hesabı . . . . .	33
4.2 Moment Eşleme Teknikleri . . . . .	35
4.2.1 Asimptotik Dalgabiçimi Üretimi (AWE) . . . . .	35

4.2.2	Kapalı Moment Eşleme Teknikleri . . . . .	39
4.2.3	PVL (Pade via Lanczos) Yöntemi . . . . .	39
4.2.4	Arnoldi Yöntemine Dayanan Model İndirgeme Yöntemleri	43
4.3	Sistem Gramianları Yardımı ile Model İndirgeme: . . . . .	44
4.3.1	Dengelenmiş Dönüşüm (Balancing Transformation): . . . . .	44
5	Uygulama ve Sonuçlar . . . . .	49
5.1	Giriş . . . . .	49
5.2	AWE . . . . .	49
5.3	PVL . . . . .	51
5.4	syPVL . . . . .	53
5.5	Arnoldi . . . . .	54
5.6	Sistem Gramianları ile İndirgeme: . . . . .	55
5.7	Sonuç ve Gelecek Çalışmalar . . . . .	56

## KAYNAKLAR

59

## KISALTMALAR

<i>AWE</i>	Asymptotic Waveform Evaluation (Asimptotik Dalgabiçimi Analizi)
<i>CMOS</i>	Complementary MOS (Bütünleyici MOS)
<i>DAE</i>	Differential Algebraic Equation (Türevli Cebrik Denklem)
<i>DC</i>	Direct Current (Doğru Akım)
<i>KAY</i>	Kirchhoff Akımlar Yasası
<i>KGY</i>	Kirchhoff Gerilimler Yasası
<i>MIMO</i>	Multi Input Multi Output (Çok Giriş Çok Çıkış)
<i>MNA</i>	Modified Nodal Analysis (Değiştirilmiş Düğüm Analizi)
<i>MOS</i>	Metal-Oksit Yarıiletken Alan Etkili Transistör
<i>MPVL</i>	Matrix Padé Via Lanczos
<i>PVL</i>	Padé Via Lanczos (Lanczos ile Padé)
<i>SISO</i>	Single Input Single Output (Tek Giriş Tek Çıkış)
<i>syPVL</i>	Simetrik Padé Via Lanczos
<i>TBR</i>	Truncated Balanced Realization (Kesilmiş Dengelenmiş Gerçekleme)
<i>ULSI</i>	Ultra Large Scale Integrated (Aşırı Geniş Ölçekli Tümüleştirilmiş)
<i>VLSI</i>	Very Large Scale Integrated (Çok Geniş Ölçekli Tümüleştirilmiş)

## TABLO LİSTESİ

### Tablolar

1.1	<i>VLSI Devre Benzetim Süreçleri</i> . . . . .	1
1.2	<i>Parazitik etkilerin CMOS-SRAM hücresi özniteliklerine etkisi</i> . . .	4
2.1	<i>Direnç ait pul yapısı</i> . . . . .	16
2.2	<i>Sığaca ait pul yapısı</i> . . . . .	16
4.1	<i>Pade Yaklaşımları</i> . . . . .	38
5.1	<i>Momentler Matrisinin Kötü Koşullanmışlığı</i> . . . . .	51
5.2	<i>Örnek sistem için PVL hesaplama süreleri</i> . . . . .	51
5.3	<i>Farklı sistem dereceleri için süreler-PVL</i> . . . . .	52
5.4	<i>Elli Boyutlu bir sistemin farklı boyutlara indirgenmesi-PVL</i> . . . .	53
5.5	<i>Farklı sistem dereceleri için süreler-syPVL</i> . . . . .	53
5.6	<i>Elli Boyutlu bir sistemin farklı boyutlara indirgenmesi-syPVL</i> . . .	54
5.7	<i>Farklı sistem dereceleri için süreler-Arnoldi</i> . . . . .	55
5.8	<i>Elli Boyutlu bir sistemin farklı boyutlara indirgenmesi-Arnoldi</i> . .	56

## ŞEKİL LİSTESİ

### Şekiller

1.1	<i>Devre benzetim yazılımlarının temel akış diyagramı</i>	2
1.2	<i>Doğrusal Model İndirgeme</i>	6
2.1	<i>Direnç Elemanı</i>	12
2.2	<i>Sığaç Elemanı</i>	12
2.3	<i>Bobin Elemanı</i>	13
2.4	<i>Bağımsız Akım Kaynağı</i>	13
2.5	<i>Bağımsız Gerilim Kaynağı</i>	14
2.6	<i>MNA uygulaması için örnek devre</i>	15
3.1	<i>CMOS sürücü ile CMOS alıcı arasındaki ideal arabağlantı</i>	25
3.2	<i>Mikroelektronik sistemlerdeki arabağlantı yapıları</i>	26
3.3	<i>Tipik arabağlantı yapısı</i>	27
3.4	<i>Arabağlantıların kapasitif hat modeli</i>	29
3.5	<i>Arabağlantıların RC modeli</i>	29
5.1	<i>İkinci dereceye indirgenmiş AWE için Bode diyagramları</i>	50
5.2	<i>Üçüncü dereceye indirgenmiş AWE için Bode diyagramları</i>	50
5.3	<i>Dördüncü dereceye indirgenmiş AWE için Bode diyagramları</i>	50
5.4	<i>Beşinci boyuta indirgenmiş PVL için Bode diyagramları</i>	51
5.5	<i>Yedinci boyuta indirgenmiş PVL için Bode diyagramları</i>	51
5.6	<i>HN - Hn hatasının sistem boyutuna göre değişimi-PVL</i>	52
5.7	<i>HN - Hn hatasının model boyutuna göre değişimi-PVL</i>	52
5.8	<i>HN - Hn hatasının sistem boyutuna göre değişimi-syPVL</i>	53
5.9	<i>HN - Hn hatasının model boyutuna göre değişimi-syPVL</i>	53
5.10	<i>Beşinci boyuta indirgenmiş Arnoldi için Bode diyagramları</i>	54
5.11	<i>Yedinci boyuta indirgenmiş Arnoldi için Bode diyagramları</i>	54
5.12	<i>HN - Hn hatasının sistem boyutuna göre değişimi-Arnoldi</i>	55
5.13	<i>HN - Hn hatasının model boyutuna göre değişimi-Arnoldi</i>	55
5.14	<i>Onuncu derece TBR ile indirgenmiş sistemin cevabı</i>	56

5.15	<i>Sistemin gerçek cevabı</i>	56
5.16	<i>Momentler matrisinin kötü koşullanmışlı</i>	57
5.17	<i>Boyuta göre hatanın değişimleri</i>	57

## SEMBOL LİSTESİ

$\mathcal{W}_c$	Denetlenebilirlik Gramianı
$\mathcal{W}_o$	Gözlemlenebilirlik Gramianı
$\rho(t)$	Ani güç
$\epsilon(t)$	Enerji
$R$	Direnç
$G$	İletkenlik
$C$	Sığa
$q_c$	Sığaç Yüğü
$\phi_L$	Bobin Akısı
$s$	Laplace Değişkeni
$z_i$	Sistemin i. sıfırı
$p_i$	Sistemin i. kutbu
$H(s)$	Sistemin Transfer Fonksiyonu
$\mathcal{K}_i$	i. Krylov Altuzayı
$r$	Kalan (rezidü)
$Z_0$	Hattın Karakteristik Empedansı
$\mathcal{M}$	Moment matrisi
$m_k$	k. moment
$n$	İndirgenmiş Boyut
$N$	Sistem Boyutu
$s_0$	Açılım noktası

## ÖZET

Günümüz tümleşik devreleri milyonlarca yarıiletken bileşeni tek bir silikon tabaka üzerinde birleştirmektedir. Devre fonksiyonlarını gerçeklemek üzere bu bileşenler çeşitli yöntemler ile birbirlerine bağlanmaktadır. Yüksek frekanslarda çalışan tümleşik devrenin çalışmasında bu arabağlantı yapılarının fiziksel ve kimyasal niteliklerinden kaynaklanan parazitik devreler oluşmaktadır. Bu parazitik devrelerin modellenmesi ve benzetimi günümüz Çok Geniş Ölçekte Tümleştirilmiş (Very Large Scale Integrated - VLSI) devre benzetimi alanındaki en önemli araştırma alanlarından biri haline gelmiştir. VLSI devre benzetimi problemleri; genel halde doğrusal olmayan, seyrek ve zaman bağımlı diferansiyel cebrik denklem takımlarının sayısal çözümlerine dayanır. Parazitik altdevrelerin etkilerinin eklenmesi ile problem daha da büyümekte ve çözümü daha da zorlaşmaktadır. Ancak bu noktada doğrusal olarak modellenebilen arabağlantı devreleri ile sistemin kendisine ait doğrusal olmayan denklemlerin birbirinden ayrılabilceği fikrinden yararlanılarak doğrusal model indirgeme teknikleri kullanılmaktadır. Model indirgeme tekniklerinin temel yaklaşımı, arabağlantılara ait gerçek doğrusal diferansiyel cebrik denklem takımından daha küçük boyutlu bir denklem takımı yaratmaktır. Bu çalışmada VLSI arabağlantı modellerinin benzetiminde kullanılan doğrusal model indirgeme yöntemleri sayısal kararlılık, doğruluk ve hız bakımından karşılaştırılmıştır.

## SUMMARY

Today's sub-micron integrated circuits are formed using millions of semiconductor components on a single chip. To realize the circuit functions, these components are combined with some interconnections made from conductors. Due to high frequencies used, these interconnections create some parasitic circuits arising from their physical and chemical properties, and their geometries. In the last decade the modelling and simulation of those parasitic circuits has become one of the most important research areas in Very Large Scale Integrated (VLSI) circuit simulation studies. The VLSI circuit simulation is based on the numerical solution of very large, sparse, in general nonlinear, systems of time-dependent differential algebraic equations (DAE). After the addition of subcircuit effects the problem is getting bigger and harder. To solve these problems we take advantage of the separable nature of the nonlinear part of the equations and the linear interconnection circuits equations. The linear model order reduction techniques used in VLSI interconnection were triggered by this separation. The basic approach of the model order reduction techniques is to build a new but much smaller DAE system from the original DAE system. In this study we compare linear model order reduction methods developed upto date from the perspective of numerical stability, accuracy and speed.

## BÖLÜM 1

### Giriş

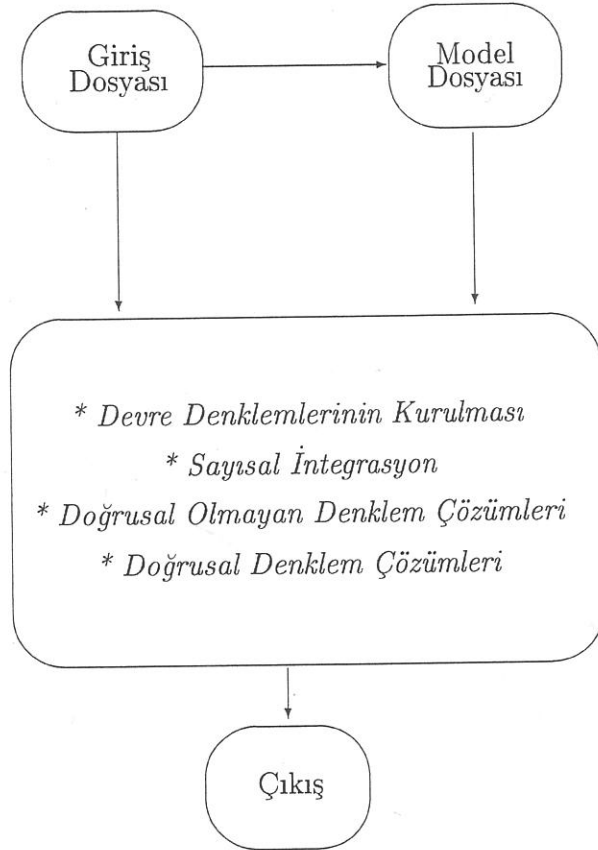
Günümüz elektronik teknolojisi ile ulaşılan noktada, artık tek bir yarıiletken tabaka üzerinde milyonlarca mantık kapısı gerçekleştirilebilmektedir. Çok geniş ölçekte tümleştirilmiş (Very Large Scale Integrated - VLSI) devreler adını alan bu tip devreler ayrıca yüksek başarımların kaçınılmaz sonucu olarak çok yüksek frekanslarda çalışmaktadırlar. Bu koşullar gözönüne alındığında devrenin bant üretimine geçilmeden önce bir fiziksel prototipinin hazırlanıp, hata analizlerinin yapılması ekonomik olarak pahalı bir işlem olduğundan tercih edilmemektedir. Bunun yerine, hazırlanan devrenin tüm analizlerinin bilgisayar ortamında yapılması bir gereklilik haline almıştır. Bu açıdan bakıldığında üretim süreci içerisinde vazgeçilmez bir yer tutan devre benzetimi aygıtları matematiksel açıdan da büyük bir zenginlik ve çeşitlilik gösterirler. En temel tasarım düzeyleri ve bunların modellenmeleri sırasında ihtiyaç duyulacak matematiksel yöntemler Tablo 1.1'de özet olarak sunulmuştur [1].

Tablo 1.1: VLSI Devre Benzetim Süreçleri

TASARIM DÜZEYİ	MATEMATİKSEL YÖNTEM
Serim Düzeyi	Topoloji, Geometri
Devre Düzeyi	Diferansiyel Denklem Çözümü, Graf Teori,
Mantıksal Düzey	Boole Cebri, Mantık
Program, Sistem Düzeyi	Otomat Teorisi, Algoritmik Tasarım

Örneğin sayısal bir mikroişlemci tasarımında ilk aşama olarak *sistem düzeyi* gelir. Bu aşamada yaratılacak olan tümdevrenin genel mimarisi oluşturulur. Bu süreçte işlemci, bellek ve çevre birimlerin tümdevrenin hedef, maliyet, hız ve güç istemlerine uygun olarak yerleştirilmesi işlemi gerçekleştirilir. İkinci aşama *programlama düzeyi* olarak bilinir ve oluşturulacak olan tümdevreye ait komut setlerinin belirlenmesi ve mikro-komut kümelerinin yaratılması gerekmektedir. *Saklayıcı geçiş seviyesi* olarak bilinen üçüncü seviyede ise, komut ve veri kümeleri üzerinde işlem yapacak olan birimlerin (Aritmetik Mantık Birimleri,

Programlanabilir Mantık Dizgeleri, Veri Yolları,vb.), hedefe uygun biçimde tasarımılanması ve yerleştirilmesi işlemleri gerçekleşir. *Anahtar (Mantık) Düzeyi* ise bir önceki düzeylerde belirlenmiş olan bileşenlerin mantık kapıları yardımıyla fiziksel olarak gerçekleşmesi işlemleri yapılır. En son olarak da mantık kapıların elektronik devre bileşenleri (Bipolar Junction Transistor (BJT), Metal-Oxide Semiconductor Field Effect Transistors (MOSFET) vb.) ile gerçekleşmesi aşaması gelir. Bu işlem gerçekleştirildikten sonra devrenin silikon bir pul üzerine minimum güç ve kayıpla basılması yani serim (layout) süreci gelir.



Şekil 1.1: Devre benzetim yazılımlarının temel akış diyagramı

Tüm bu süreçlerde gerekecek yüksek sayıda işlem düzeyi gözönüne alındığında üretim öncesi benzetimin de yukarıdaki ayrılmaya uygun bir şekilde bölümlendirilmesi gerekliliği açıkça görülmektedir.

Bu çalışmada, *devre düzeyi* hesaplamaları ele alınmıştır. Devre düzeyindeki hesaplamalarda takip edilen geleneksel yöntem, varolan devrenin bağlantı şemasını ve elemanların değerlerini veya modellerini içeren bir giriş dosyasının kullanıcı tarafından hazırlanması ve bu dosyadan yola çıkılarak doğrusal olmayan, yüksek boyutlu ve seyrek diferansiyel cebrik yapıya sahip devre denklemlerinin kurulması şeklindedir [2].

Şekil 1.1 ile verilmiş olan yapı kullanılarak gerekli olan tüm analizler gerçekleştirilebilmektedir. En temel devre analizi problemleri aşağıdaki gibi sınıflandırılabilir [3].

- **Doğru Akım (DC) Analizi:** En belirleyici analiz tiplerinden birisi DC analizdir. Bu analiz ile tüm kaynaklar zamandan bağımsız hale getirilir. Bu koşullar altında devredeki tüm gerilim ve akımların sabit duruma geçmeleri beklenir. Bu her zaman mümkün değildir. Örneğin salınım devreleri, DC çalışma koşulları altında da zamanla değişen çıkış işaretleri üretirler. Bu durum için  $e(t)$  zaman bağımlı giriş işaretinin aldığı biçim,  $e_0$  şeklinde sabit olacaktır ve zamana göre türevleri içeren  $\dot{q}(x) = 0$  eşitliği söz konusu olacaktır. Böylelikle DC analiz sırasında çözülmesi gereken doğrusal olmayan cebrik denklem takımı aşağıdaki biçimi alacaktır.

$$j(x_0) - e_0 = 0. \quad (1.1)$$

Burada,  $x_0$  DC sükunetteki bilinmeyen akım ve gerilimleri ifade etmektedir. DC analiz problemlerinde, denklem takımının yapısındaki doğrusal olmayan yapı denklemlerin çözümüne dair eniyelenmiş bir algoritma geliştirimini güçleştirmektedir.

- **Küçük İşaret Analizi:** DC analiz yardımıyla bulunmuş *çalışma noktası* civarında yeterince küçük salınımlı bir işaret ile çalışılırsa doğrusal olmayan devre elemanlarının doğrusal bir çalışma biçimine sahip olmaları yaklaşımından hareket eden küçük işaret analizi ile sistemin değişken işaretler karşısındaki davranışı yaklaşırlır.
- **Duyarlılık Analizi:** Devre bileşenlerinin ya da kaynakların değişimlerinin sistemin çalışmasına etkilerinin incelendiği duyarlılık analizinde ayrıca, sistemin dış etkenler (sıcaklık, radyasyon v.s.) karşısındaki duyarlılıkları da hesaplanmaktadır.
- **Geçici Zaman Analizi:** Tasarlanmış olan devrenin gerçek işaretler karşısındaki davranışının belirlenmesi için tüm zaman bölgesi içindeki davranışının belirlenmesi gerekmektedir. Bunun için (1.2) ile verilen denklemin çözülmesi gerekir ki, bu işlem *geçici zaman analizi (transient analysis)* adını alır ve aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$\dot{q}(x(t)) + j(x(t)) = e(t). \quad (1.2)$$

Geçici zaman analizinde çoğu zaman devrenin ilk anki davranışının  $x(t_0) = x_0$  şeklinde bilindiği varsayıldığından bu problem bir *başlangıç*

değer problemi halini alır. Şayet periyodik davranış gösteren bir devre varsa bu durumda da bir *iki-noktalı sınır değer problemi* sözkonusu olur ( $x(t_0) = x(T + t_0)$ ).

Sonuç olarak kısaca belirtmek gerekirse, geleneksel devre benzetim problemi oldukça kapsamlı bir hesaplama yükü içermektedir. Özellikle devre boyutları büyüdüğünde benzetimin hesaplama zamanını küçültmek için koşut yöntemlere başvurmak ya da model indirgeme yöntemleri yardımı ile sistemi daha küçük bir sisteme taşımak kaçınılmaz bir gereklilik halini almıştır. VLSI devrelerin benzetimi yukarıda aktarıldığı gibi doğrusal olmayan, geniş ve seyrek diferansiyel cebrik denklem takımlarının sayısal çözümlerine dayanmaktadır. Devrenin kendisinden kaynaklanan bu denklemlerin çözümü, parazitik RLC altdevrelerinin etkilerinin de eklenmesi ile daha da zorlaşmaktadır. Bu noktada oluşan denklemlerin doğrusal olanları ile doğrusal olmayanlarının ayrılması yoluna gidilebilmektedir. Buradaki temel yaklaşım ise doğrusal alt devrenin çeşitli doğrusal model indirgeme yöntemleri aracılığı ile özniteliklerini koruyan daha küçük bir eşdeğere indirgenmesi ve böylelikle de yaklaşık doğru çözüme daha az hesaplama ile ulaşılmasıdır [4].

Çalışılan yüksek frekanslar ve mantık kapılarının gerek iç yapılarında gerekse birbirleriyle olan iletişiminde varolan bağlantı şemaları gözönüne alındığında, mikroelektronik yapının çalışma özniteliklerinin büyük ölçüde mantık devresi haricinde kalan parazitik yapılar ile belirlendiği söylenebilir.

Son zamanlarda, VLSI devreleri ve Aşırı Geniş Ölçekte Tümleştirilmiş (Ultra Large Scale Integrated - ULSI) elektronik devrelerin tasarım ve üretim öncesi analiz aşamalarında parazitik arabağlantı (interconnect) devrelerinden kaynaklanan etkilerin yüksek doğrulukla modellenmesi ve üretim sırasında gözönüne alınması kaçınılmaz bir hal almıştır. Bir örnek olarak CMOS-SRAM hücresi için parazitik direnç ve RC devrelerinin etkilerinin ne ölçüde önemli oldukları aşağıdaki tablo ile sunulmuştur [5].

**Tablo 1.2:** Parazitik etkilerin CMOS-SRAM hücresi özniteliklerine etkisi

Öznitelik	Parazitsiz	R ile	RC ile
$t_r$ (ns)	0.15	0.58	0.62
$t_f$ (ns)	0.06	0.26	0.28
$f_m$ (GHz)	4.0	1.0	0.8

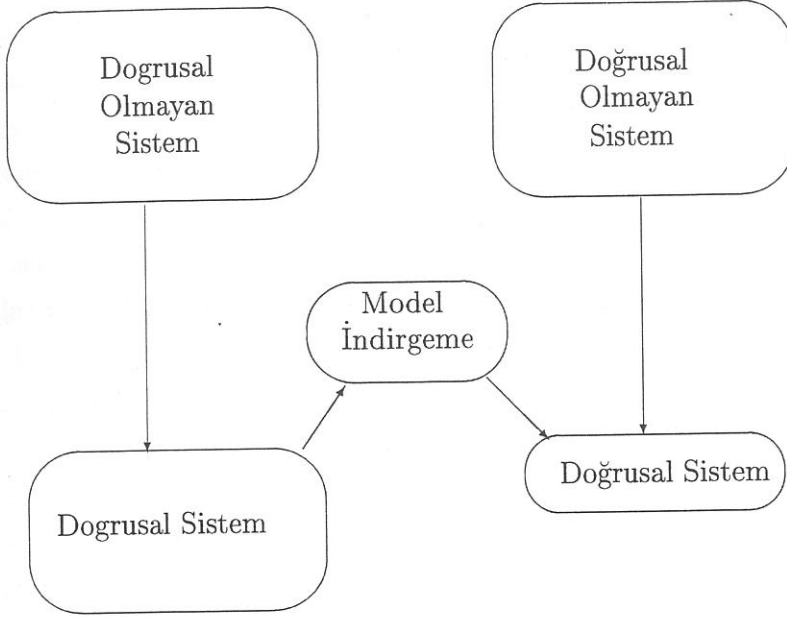
Burada verilmekte olan  $t_r$  parametresi yükselme süresi adını alıp sistemin verilen bir birim basamak girişinin tepe değerinin %10'undan %90'ına ulaşmaya dek geçen süre,  $t_f$  parametresi düşme süresi olup benzer bir tanımla tepe

değerinin %90'ından %10'una düşme süresidir. Üçüncü parametre olan  $f_m$  ise sistemin kararlı çalışabildiği en büyük frekans değeridir. Bu üç parametre sistemin davranışında temel kriterler olarak alınabilen büyüklüklerdir. Bu nedenle parazitik R ve RC devrelerinin etkilerinin sistem modeli içerisine katılmasının ne denli önemli olduğu Tablo 1.2 ile açıkça görülmektedir. Sözkonusu devrelerin sayısal devreler oldukları ve 0-1 sinyallerini işledikleri gözönüne alındığında gözardı edilen  $tr$  ve  $tf$  değerleri yüzünden iki işaret arasında oluşacak işaret girişimi, sistemde gürültüye ve dolayısıyla da bilgi kaybına yol açabilecektir. Bunun önüne geçmek için sistemin modellenmesi sırasında arabağlantı hatlarından ve elemanların fiziksel - kimyasal niteliklerinden kaynaklanan tüm parazitik alt devre yapıları gözönüne alınmak durumundadır. Bu devrelerin önemli bir niteliği pasif ve doğrusal RLC devreleri olarak modellenebilmeleridir. Doğrusal RLC parazitik devrelerinin de eklenmesi ile varolan hesap karmaşıklığı artmış olan devre denklemlerinin, doğrusal olan ve olmayan iki alt devre takımına ayrıştırılması ve doğrusal olan alt devrenin doğrusal model indirgeme yöntemleri ile boyutunun küçültülmesi zamandan önemli kazançlar sağlamaktadır. Bu işleme ait blok Şekil 1.2 ile verilmiştir. Problemin çözüm süresinin azaltılmasında uygulanan yöntemlerden en önemlilerinden olan model indirgeme yöntemleri temelde sistemin davranışını ve niteliklerini değiştirmeden veya en az değiştirerek sistemin boyutlarını küçültme işlemidir. Bu işlem yapılırken oluşturulmuş olan denklem sisteminin özdeğerler ve momentler gibi belirleyici nitelikleri gözönüne alınır. Genel durumda, bir arabağlantı devresinin giriş ve çıkış ilişkilerini kuracak olan durum denklemleri, (1.3) ile verilir.

$$\begin{aligned} C\dot{x}(t) &= Gx(t) + bu(t) \\ y(t) &= I^T x(t) + du(t) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Bu denklemlerde;  $x(t)$  N boyutlu durum değişkenleri vektörü,  $u(t)$  kaynak vektörü,  $C$  ve  $G$  NxN boyutlu sistem matrisleri,  $b$  Nxq boyutlu giriş vektörü ve  $I$ , Nxm boyutlu çıkış vektörüdür.  $d$  vektörünün 0 alınması çoğu sistem için geçerli bir durumdur. Yukarıda aktarılmış olan sistem  $m$  adet giriş  $n$  adet çıkışlı bir sistemdir. Sistemler, alınan giriş ve çıkış sayılarına göre sınıflandırılabilirler.

- SISO Tek giriş-tek çıkışlı (*Single Input Single Output*) sistemler
- MIMO Çok giriş-çok çıkışlı (*Multi Input Multi Output*) sistemler



Şekil 1.2: Doğrusal Model İndirgeme

Elde edilmiş olan bu durum denklemlerinin bir başka gösterim biçiminin de *transfer fonksiyonu* gösterilimi olduğu söylenebilir. Denklem (1.3) ile verilmiş olan durum denklemlerinin Laplace dönüşümü alınır ve ilk koşullar ile  $d$  vektörü 0 kabul edilirse sistemin transfer fonksiyonu

$$H(s) = l^T (G + sC)^{-1} b \quad (1.4)$$

olarak bulunabilir. Transfer fonksiyonu bir sistemin giriş-çıkış ilişkisinin matematiksel olarak ifade edilmesidir. Model indirgeme yöntemleri ile  $(G, C, b, l)$  şeklinde gösterebileceğimiz sistemin daha küçük boyutlu bir eşdeğeri  $(G_k, C_k, b_k, l_k)$  olarak hesaplanmaktadır. Bu işlemi gerçeklemek için kullanılan yöntemler sisteme ait değişmez nitelikleri (özdeğerler, momentler vb.) kullanırlar.

Moment eşleme yöntemleri bileşenleri momentler olan Hankel matrisinin açıkça oluşturulması durumunda açık (explicit) moment eşleme teknikleri adını alırlarken bunun yerine yansıtma (projection) yöntemleri yardımıyla Hankel matrisi oluşturulmadan model indirgeme işlemi yapılması halinde ise kapalı (implicit) moment eşleme teknikleri olmak üzere ikiye ayrılırlar [6].

Asimptotik Dalgabiçimi Üretimi (Asymptotic Waveform Evaluation - AWE) yöntemi [7] k indirgenecek boyut olmak üzere sistemin ilk  $2k$  momentini eşlemeye dayanan açık bir moment eşleme yöntemidir. Bir çok durumda iyi sonuçlar üreten bir yöntem olmasına karşın AWE, Hankel matrisinden kaynaklanan bir kötü-koşullanmışlık içerir. Bu durum AWE ile yüksek boyutta ve doğrulukta model üretilmesini imkansız kılar. Ayrıca, sistemin kararlılık ve pasiflik gibi değişmemesi gereken niteliklerinin yine sayısal kararsızlık dolayısıyla

yitirilebildiği görülmektedir. Bunun önüne geçmek üzere Kaydırılmış (Shifted) AWE ya da Çok Noktalı (Multi-Point) AWE gibi yöntemler geliştirilmiş olsa da, momentler matrisinin olumsuz niteliklerinin önüne geçilememiştir. Bunun önüne geçmek için, çoğunlukla Krylov altuzayı yansıtıcılarına dayanan yöntemler geliştirilmiştir [8].

Bu açık yöntemlerden en bilinenlerinden birisi, Pade yaklaşımı ile Lanczos üçbantlaştırma algoritması arasındaki belirgin ilişkiyi [9] kullanan Pade Via Lanczos (PVL) algoritmasıdır [10]. Sayısal olarak oldukça kullanışlı olan PVL algoritmasının sistem pasifliğini korumakta bazı problemlere sahip olması dolayısıyla yöntemin doğruluğunu arttırmak için yöntem üzerinde bazı değişiklikler yapılmış ve Lanczos algoritmasının simetrik çeşitlemelerini kullanarak SyPVL algoritması geliştirilmiştir [11]. SyPVL simetrik sistemler üzerinde kullanıldığında sistemin simetrisi korunmaktadır. PVL ve SyPVL SISO sistemler için kullanılan yöntemlerdir. Ayrıca Pade yaklaşımının tutarlılığını arttıran çok noktalı yaklaşıma izin vermezler. Bu eksikliklerin önüne geçmek için de MPVL (Matrix PVL) yöntemi geliştirilmiştir [12]. Krylov altuzayına dayanan bir diğer yöntem de Arnoldi algoritmasına dayanan yöntemlerdir [13]. Arnoldi algoritması SISO sistemler için kullanılırken, Blok Arnoldi Algoritması da MIMO sistemler için kullanılmaktadır.

Hesaplama pahası (computational cost) açısından bakıldığında moment eşleme teknikleri oldukça büyük avantajlara sahiptirler. Hatta bazıları sayısal kararlılık ve doğruluk açısından da oldukça iyi durumdadırlar. Ancak indirgenmiş modelin boyutu ile hata arasında birebir ilişki kurulmasına izin vermezler. Bu nedenle de hangi boyutta nasıl bir hatanın üretileceğine dair bir öngörü, hesaplamalara başlamadan önce yapılamaz. Bu ise, pekçok durumda istenmeyen bir durum olabilir. Bunun önüne geçmek için ise, Kesilmiş Dengelenmiş Gerçekleme (Truncated Balanced Realization-(TBR)) adı verilen yöntem kullanılmaktadır [14]. Bu yöntem, sistemin denetlenebilirlik ve gözlemlenebilirlik gramianlarını kullanmaktadır. Bu iki gramian, sistem matrisleri ile oluşturulacak olan iki Lyapunov eşitliğinin çözümü ile hesaplanmaktadır.

$$-GW_C C^T - CW_C G^T + BB^T = 0 \quad (1.5)$$

$$-G^T W_O C - C^T W_O G + LL^T = 0 \quad (1.6)$$

Burada  $W_C$  ile denetlenebilirlik,  $W_O$  ile de gözlemlenebilirlik gramianları gösterilmektedir. Bir kez bu gramianlar hesaplandıktan sonra gözlemlenebilirlik gramianı  $W_O = R^T R$  şeklinde ayrıştırılmakta ve daha sonra  $RW_C R^T$  şeklinde yapılandırılan matrisin tekil değerleri üzerinden yeni bir sistem oluşturulmaktadır. Bu yöntemde kesin bir hata-sınırı sözkonusu olmasına karşın,

iki adet büyük Lyapunov eşitliği çözümünü ve bir adet tekil değer çözümü gerektiren bir yöntem olması dolayısıyla TBR hesaplama açısından oldukça pahalı bir algoritmadır. Problemin hesaplama pahasını indirmek için çeşitli yöntemler geliştirilmiştir [15]. Ayrıca Chebyshev ve Laguerre polinomları ile yaklaştırım yapan zaman bölgesi algoritmaları da mevcuttur [16, 17].

Bu çalışmada, doğrusal model indirgeme teknikleri ve bu yöntemlerin VLSI arabağlantı devrelerinin benzetiminde kullanım biçimleri üzerinde durulacaktır. Bu yöntemler, doğruluk, sayısal kararlılık, hesaplama kazancı, uygulanabilirlik gibi ölçütler esas alınarak karşılaştırılacaktır. Bu karşılaştırma yapılırken, SciLAB programlama ortamında geliştirilen programlar kullanılacaktır.

Çalışmanın geri kalan kısımları aşağıdaki gibi kısımlandırılmıştır. İkinci bölümde, çalışmanın bütünü için önem taşıyan devre analizi ve sayısal analiz kavramları ele alınmıştır. Üçüncü kısımda, modellenecek olan arabağlantı devrelerinin fiziksel ve kimyasal nitelikleri aktarılmıştır. Dördüncü bölümde, incelenecek olan tüm model indirgeme yöntemleri aktarılmıştır. Beşinci bölüm ise uygulamalara ve sonuçlara ayrılmıştır.

## BÖLÜM 2

### Temel Kavramlar

#### 2.1 Devreler Teorisi

Elektronik devreler; dalları devre elemanlarına düğümleri ise devre elemanlarının bağlantı noktalarına denk düşen çizge yapıları olarak modellenenmektedir. Bu çizge yapısı üzerinden denklemlerin kurulması ise esas olarak üç temel kavram aracılığı ile yapılmaktadır: Kirchhoff'un Akım Yasası (KAY), Kirchhoff'un Gerilim Yasası (KGY) ve elemanların uç denklemleri. Bu üç kavramdan yola çıkılarak kurulacak olan denklem yapısı içerisindeki bilinmeyenler ise; grafin dallarından akan akım değerleri, düğümlerin ve dalların üzerine düşen gerilim değerleri olacaktır. KAY ve KGY sadece devre topolojisine bağlı doğrusal denklem takımlarına yol açar. KAY, bir düğüm noktasındaki akımların toplamının; KGY ise bir çevre içindeki gerilimlerin toplamının sıfır olacağı temeline dayanır. Elemanların uç denklemleri ise devre denklemlerine diferansiyel ve/veya doğrusal olmayan niteliklerini verirler. Bunlar, esas olarak devre elemanlarının fiziksel yapılarının matematiksel modellerinin kurulması ile elde edilirler. Örneğin doğrusal bir direnç için, gerilimin akımla doğru orantılı değişeceğini söyleyen Ohm yasası en bilinen uç denklemidir.

Bir elektronik devre elemanı için güç ve enerji gibi kavramlar aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

**Güç:** n-uçlu bir devre elemanı için uçlarından geçen akım ve gerilim vektörlerinin skaler çarpımı ile kurulan;

$$p(t) = i^T(t)v(t) = \sum_{k=1}^{n-1} i_k(t)v_k(t) \quad (2.1)$$

$p(t)$  fonksiyonuna o çok-uçlunun ani gücü adı verilir.

**Enerji:** n-uçlu bir devre elemanının ani gücü  $p(t)$  ise  $[t_0, \infty)$  aralığında buluna herhangi bir  $t$  anı için tanımlanan

$$\epsilon(t) = \int_{t_0}^t p(\tau)d\tau \quad (2.2)$$

skaler fonksiyonuna n-uçlu elemanın  $[t_0, t)$  aralığındaki enerjisi denilir.

Bu iki tanımdan yola çıkılarak pasiflik tanımı da yapılabilir.

**Pasiflik:** Bir devre elemanına pasiftir denilebilmesi için  $[t_0, \infty)$  zaman aralığında alınacak tüm  $t$  değerleri için

$$\epsilon(t) = \int_{t_0}^t i^T(\tau)v(\tau)d\tau \geq 0 \quad (2.3)$$

olması gerekmektedir.

Devreler teorisinin temel iki yasası olan KAY ve KGY aşağıdaki biçimde tanımlanırlar:

- Kirchhoff Akımlar Yasası (KAY): Bir elektrik devresinde bir düğüm noktasına gelen akımların toplamı sifıra eşittir.
- Kirchhoff Gerilimler Yasası (KGY): Bir elektrik devresinde kapalı bir çevre içerisindeki gerilimlerin toplamı sifıra eşittir.

Devre denklemleri KGY, KAY ve elemanların uç denklemleri yardımı ile en genel halde (2.4) ile verildiği gibi doğrusal olmayan, diferansiyel cebrik denklem takımı (DAE) elde edilir.

$$\frac{d}{dt}q(\mathbf{x}, t) + f(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (2.4)$$

Buradaki  $\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)$ ,  $t$  anındaki bilinmeyenler vektörü;  $f(\mathbf{x},t)$  belleksiz elemanlardan (direnç vb. ) kaynaklanan vektör değerli bir fonksiyon,  $q(\mathbf{x},t)$  ise bellekli elemanlardan (sığaç, bobin vb. ) oluşan vektör değerli fonksiyondur. Bu denklemlerin elde edilmesi için kullanılacak yöntemlere göre bu denklemlerin boyutları değişmektedir. En genel yöntemler için bu sayı devredeki eleman sayısı düzeyindedir.

Varolan devre benzetim programları (2.4) ile verilen DAE'nin sayısal çözümünü bulmaktadır. Ancak devredeki bileşenlerin sayısının çok arttığı durumlarda bu tip çözümler etkisiz kalmakta ya da çok uzun işlem süreleri gerektirmektedirler. Öte yandan, tüm elektronik devreler geniş doğrusal altdevrelere ayrıştırılabilirler ve oluşturulacak olan bu alt devrelere ait denklemler model indirgeme yöntemleri aracılığı ile indirgenerek işlem süresinden büyük kazançlar sağlanabilir.

Verilen bir devrenin bir doğrusal alt devresinin  $C_l$  ve devrenin geri kalan doğrusal olmayan kesiminin de  $C_r$  ile gösterildiğini düşünelim. Uygun bir yeniden düzenleme ile devreye ait bilinmeyenler vektörü (2.5) 'deki gibi düzenlenebilir.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_r \\ y \\ x_l \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Buradaki  $x_r$  ve  $x_l$  sırasıyla  $C_r$  ve  $C_l$  devrelerindeki bilinmeyenleri göstermektedir.  $y$  ise her iki devre tarafından paylaşılmakta olan bilinmeyenleri gösterir. Denklem (2.5) kullanılarak aşağıdaki ayrıştırmaya gitmek de mümkündür.

$$x_0 = \begin{bmatrix} x_r \\ y \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

$$x = \begin{bmatrix} y \\ x_l \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Bu son iki eşitlikten yararlanarak da (2.4) eşitliğini doğrusal olan ve olmayan bileşenlerden oluşan iki parçaya ayırmak mümkündür. Bu son hal (2.8) ve (2.9) ile verilmiştir.

$$f(x, t) = \begin{bmatrix} f_0(x_0, t) \\ 0_{k \times 1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{N-Nx1} \\ Gx \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

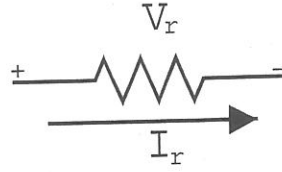
$$q(x, t) = \begin{bmatrix} q_0(x_0, t) \\ 0_{k \times 1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{N-Nx1} \\ Cx \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Burada,  $f_0$  ve  $q_0$ ,  $C_r$  'dan kaynaklanan yapılanmaları,  $C$  ve  $G$  matrisleri ise  $C_l$ 'den kaynaklanan yapıları göstermektedir. Bu iki oluşumu genel durumdan bir şey kaybetmeden ikiye ayırabiliriz. Bu son halde (2.11) denklemi ile gösterilmiştir.

$$f_0(x_0, t) + \frac{d}{dt}q_0(x_0, t) + \begin{bmatrix} 0 \\ I_m \end{bmatrix} u = 0, \quad (2.10)$$

$$C \frac{dx}{dt} + Gx = \begin{bmatrix} I_m \\ 0 \end{bmatrix} u. \quad (2.11)$$

Burada  $u$  vektörü ile  $C_r$  ve  $C_l$  arasındaki arayüz işaretleri belirtilmektedir. Devreye ait denklemlerin yaratılabilmesi için, devreyi oluşturan bileşenlerin herbirinin fiziksel davranışının matematiksel modelinin uygun bir denklem oluşturma yöntemi ile kullanılması gerekmektedir. Bir sonraki altbölümde, en temel devre elemanlarına ait matematiksel modeller ve denklem oluşturma yöntemleri üzerinde durulacaktır.



Şekil 2.1: Direnç Elemanı

### 2.1.1 Elektronik Devre Elemanlarının Matematiksel Modelleri

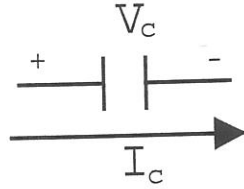
**Direnç:** Direnç elemanı, uçları arasındaki gerilim ve akımın cebrik ilişkisi ile belirlenmektedir. Bu ilişki Ohm yasası adını alıp, genelde doğrusal olmayan bir şekilde tanımlanır.

$$i_R = f(v_R) \quad (2.12)$$

Doğrusal dirençler için ise akım ve gerilim arasında doğrusal bir ilişki söz konusudur. Burada  $R$ , birimi Ohm olan direnç değerini,  $G$  ise birimi Siemens olan iletkenliği göstermektedir.

$$i_R = Gv_R = \frac{1}{R}V_R \quad (2.13)$$

**Sığaç:** Sığaç elemanı, depoladığı yük ile uçları arasındaki gerilimin cebrik ilişkisiyle tanımlanır. Sığaç yükü ( $q_c$ ) ile sığacın üzerinden akan akım arasında ise



Şekil 2.2: Sığaç Elemanı

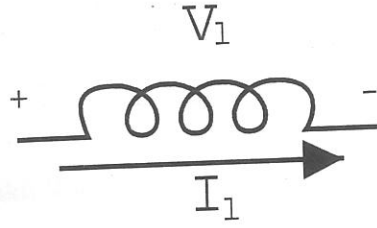
$i_c = \frac{dq_c}{dt}$  şeklinde bir ilişki vardır. Sığacın uç denklemleri yük-gerilim arasındaki ilişkiyi, eğer sığaç doğrusal olmayan bir yapıya sahipse;

$$q_C = q(v_C) \quad (2.14)$$

ya da sığaç doğrusalsa

$$i_C = C \frac{dV_C}{dt} \quad (2.15)$$

şeklinde verilebilir. Burada  $C$ , sığacın birimi Farad olan değerini vermektedir.



Şekil 2.3: Bobin Elemanı

**Bobin:** Bobin elemanı, üzerine düşen akı ile uçları arasındaki akımın cebrik ilişkisiyle tanımlanır.

Bobin akısı  $\phi_L$  ile bobinin üzerindeki gerilim arasında ise  $v_L = \frac{d\phi_L}{dt}$  şeklinde bir ilişki vardır. Bobinin uç denklemleri akı-akım arasındaki ilişkiden, eğer bobin doğrusal olmayan bir yapıya sahipse;

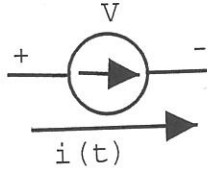
$$\phi_L = q(i_L) \quad (2.16)$$

ya da bobin doğrusalsa

$$v_L = L \frac{di_L}{dt} \quad (2.17)$$

şeklinde verilebilir. Burada  $L$ , bobinin birimi Henry olan değerini vermektedir.

**Bağımsız Akım Kaynağı:** Akım üreten ideal elemanlardır. Basitçe;



Şekil 2.4: Bağımsız Akım Kaynağı

$$i_i = I(t) \quad (2.18)$$

olarak uç denklemleri verilebilir.

**Bağımsız Gerilim Kaynağı:** Gerilim üreten ideal elemanlardır.

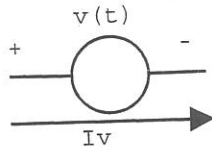
Basitçe;

$$v_v = V(t) \quad (2.19)$$

olarak uç denklemleri verilebilir.

**Bağımlı Kaynaklar:** Bunlar uç denklemleri aşağıdaki biçiminde olan iki kapılı kavramsal devre elemanlarıdır.

$$\begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} \quad (2.20)$$



Şekil 2.5: Bağımsız Gerilim Kaynağı

$$\begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

$$\begin{bmatrix} v_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

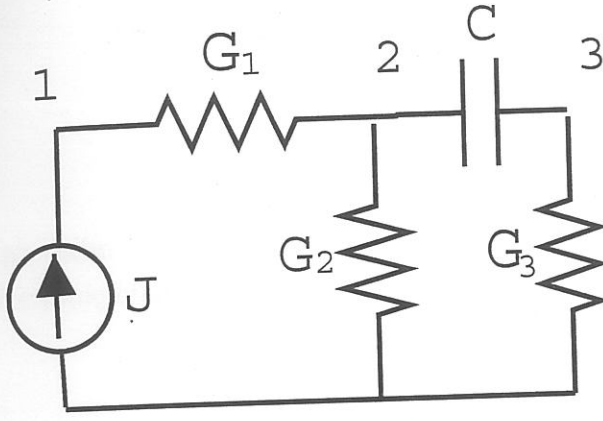
$$\begin{bmatrix} i_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Yukarıda (2.20) denkleminde görüldüğü gibi  $v_2(t)$  gerilimi,  $i_1(t)$  akımının bir katı olarak değişmektedir. Bu nedenle (2.20) ile verilmiş olan iki-kapılı devre elemanına **akım kontrollü gerilim kaynağı** adı verilir. Benzer şekilde diğer elemanlar da sırasıyla **gerilim kontrollü akım kaynağı**, **akım kontrollü akım kaynağı** ve **gerilim kontrollü gerilim kaynağı** adını alırlar.

**Diğer devre elemanları:** Elektronik devrelerinde kullanılan diğer doğrusal ve doğrusal olmayan elemanlar yukarıda uç denklemleri sunulmuş olan temel bileşenlerin kullanılması ile modellenenbilmektedirler. Bu nedenle burada diğer elemanların modellerinden bahsedilmeyecektir. Bu konu ile ilgili ayrıntılı bilgi çeşitli referans kitaplardan bulunabilir [18].

### 2.1.2 Devre Denklemlerinin Kurulması

Devre denklemlerinin bilgisayar ortamında kurulması sırasında kullanılan birçok farklı yaklaşım tarzı vardır. Seyrek Tablo Analizi (Sparse Tableau Analysis), Düğüm Analizi (Nodal Analysis) ve Değiştirilmiş Düğüm Analizi (Modified Nodal Analysis-MNA) bu yöntemlerin en baskın olmalarıdır. Bu çalışma çerçevesinde, devre denklemlerinin devreye ait matrislerin elde edilmesinde MNA yöntemi kullanılmıştır. En genel anlamıyla yöntem, her bir devre elemanının belli bir yapıda matris puluna (stamp) denk geldiğini ve bu elemanların bağlantı şekillerine göre biraraya getirilerek temel devre matrisinin oluşturulabileceği fikrinden yola çıkar. Bir örnek olarak Kirchoff Akımlar Yasası (KAY) ile Şekil 2.6 ile verilmiş olan devrenin denklemlerinin kuruluşunu adım adım inceleyelim.



Şekil 2.6: MNA uygulaması için örnek devre

1, 2 ve 3 sırasayılı düğümler üzerinde KAY uygulayalım.

$$\begin{aligned}
 G_1 V_1 - G_1 V_2 &= J \\
 -G_1 V_1 + (G_1 + G_2 + sC)V_2 - sCV_3 &= 0 \\
 -sCV_2 + (G_3 + sC)V_3 &= 0
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

Denklemleri matrisel olarak ifadelendirirsek;

$$\begin{bmatrix} G_1 & -G_1 & 0 \\ -G_1 & (G_1 + G_2 + sC) & -sC \\ 0 & -sC & (G_3 + sC) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.25}$$

olarak elde edilir. Bu son denklem takımını;

$$(G + sC)V = b \tag{2.26}$$

şeklinde de ifade edebiliriz. Buradaki  $(G + sC)$  matrisi, Düğüm İletkenlik Matrisi olarak ifade edilir. Daha büyük devrelerin denklemlerinin bilgisayar yardımı ile algoritmik olarak kurulması sırasında devre elemanlarına ait pullar (stamps) kullanılır. Bu yapılar (2.25)'de de görülen ilişkilerden yola çıkılarak kurulurlar.  $i$  ve  $j$  sırasayılı düğümlere bağlı olan doğrusal bir direnç gözönüne alındığında, Öncelikle bu direncin üzerinde  $i$ 'den  $j$ 'ye doğru akan akımı  $G=1/R$  olmak üzere;

$$(V_i - V_j)G = I_{ij} \tag{2.27}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde  $j$  sırasayılı düğümden  $i$  sırasayılı düğüme akan akım da;

$$(V_j - V_i)G = I_{ji} \tag{2.28}$$

olacaktır. Böylelikle R direncinin devre matrisi üzerindeki etkisi Tablo 2.1'deki gibi olacaktır.

**Tablo 2.1:** Dirence ait pul yapısı

	i	j
i	G	-G
j	-G	G

Bir başka gösterim ile  $e_i$  i. birim vektör ve  $e_j$  j. birim vektör olmak üzere Tablo 2.1 ile gösterilmiş olan ifade;

$$G(e_j - e_i)(e_j - e_i)^T \quad (2.29)$$

şeklinde de verilebilecektir. Benzer bir yaklaşım tarzı ile diğer temel devre elemanları için pullar üretilebilmektedir. Örneğin sığaç elemanı için  $s$  Laplace değişkeni olmak üzere pul yapısı aşağıdaki gibi tanımlanacaktır.

**Tablo 2.2:** Sığaca ait pul yapısı

	i	j
i	sC	-sC
j	-sC	sC

## 2.2 Denetim Sistemleri

Kendisini ya da başka bir sistemi düzenlemek, denetlemek ya da yönetmek üzere uygun bir biçimde bağlanmış fiziksel elemanlar kümesi *denetim sistemi* adını alır. Çıkışın ya da denetlenen büyüklüğün kumanda edilmesi bakımından denetim sistemleri iki temel gruba ayrılır.

- *Açık Denetim Sistemleri:* Girişindeki denetim işareti, çıkıştan bağımsız olan kontrol sistemleridir.
- *Kapalı Çevrim Denetim Sistemleri:* Girişindeki denetim işareti, çıkış işaretinden üretilen bir işaretle bir referans işaret arasındaki farka ya da bunların toplamına bağlı olan sistemlerdir. Geri Beslemeli Sistemler olarak da isimlendirilirler.

Bu çalışmada gözönüne alınacak elektronik devre düzenlerinin VLSI devrelerinin arabağlantı modellerine dayanılarak kuruldukları ve bu modellerin geribesleme bileşenleri içermedikleri düşünülürse, arabağlantı devrelerinden oluşacak RLC devrelerinin birer açık çevrim kontrol sistemi olarak değerlendirilebilecekleri söylenebilir.

Herhangi bir RLC devresi gözönüne alındığında, devre içerisindeki bellekli bileşenler olarak adlandırabileceğimiz L ve C elemanlarını durum değişkenleri kabul ederek devreye ait denklem takımını daha önceki bölümde aktarılmış yöntemler yardımıyla denklem (1.3)'teki gibi elde edebiliriz.

Denklem (1.3)'ten hareketle, sistemin davranışı belirlenebileceği gibi frekans bölgesi davranışları için bu denklemin (2.30) ile tanımlanmış olan Laplace dönüşümü altındaki görüntüsünden yararlanılır. Bu görüntü sistemin transfer fonksiyonu adını alır.

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (2.30)$$

Böylelikle (1.3) denklem sisteminin Laplace dönüşümü altındaki görüntüsü (2.31) bağıntısında verildiği gibi olur. Burada genel yapıdan birşey yitirmeksizin,  $d=0$  alınmıştır.

$$\begin{aligned} sCX(s) &= -GX(s) + bU(s) \\ Y(s) &= lX(s) \end{aligned} \quad (2.31)$$

Burada en genel hal için işlem yapılmakta olup sistemin  $m$  adet giriş ve  $n$  adet çıkışlı olarak kabul edildiği gözönüne alınır.  $H(s) = Y(s)/U(s)$  olarak tanımlanan transfer fonksiyonu  $H : \rightarrow (C \cup \infty)^{m \times p}$  oransal matris değerli bir fonksiyon olacaktır. Gerekli işlemleri yaptığımızda sisteme ait transfer fonksiyonu (2.32)'deki gibi bulunacaktır.

$$H(s) = l^T (G + sC)^{-1} b \quad (2.32)$$

Tek giriş ve tek çıkışlı bir sistemi gözönüne aldığımızda yukarıdaki matris değerli oransal fonksiyon skaler değerli oransal bir fonksiyona dönüşmektedir. Bir başka deyişle (2.32) ile verilmiş olan transfer fonksiyonu ifadesi (2.33) ile verilmiş olan biçimde ifade edilebilir. Burada payın kökleri sistemin 'sıfır' ları ve paydanın kökleri ise sistemin 'kutup' ları adını alacaktır.

$$H(s) = K \frac{(z_1 - s)(z_2 - s) \cdots (z_m - s)}{(p_1 - s)(p_2 - s) \cdots (p_n - s)} \quad (2.33)$$

**Doğrusallık:** RLC devreleri doğrusal sistemlerdir. Doğrusal bir sistemde,  $u_1$  girişine ilişkin çıkış  $y_1$  ve  $u_2$  girişine ilişkin çıkış  $y_2$  iken sisteme  $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$  girişi verilirse çıkış olarak  $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$  çıkışı alınır.

**Kararlılık:** Doğrusal ve zamanla değişmeyen bir sistem aşağıdaki gibi homojen bir diferansiyel denklem yardımıyla tanımlanmış olsun.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad x(0) = x_0 \quad (2.34)$$

Eğer tüm  $x_0$  değerleri için  $t \rightarrow \infty$  iken  $x(t) \rightarrow 0$  oluyorsa (2.34) denklemi için asimptotik olarak kararlıdır denilir. Ayrıca her bir  $x_0$  değeri için  $t \rightarrow \infty$  iken  $\|x(t)\| < c$  şeklinde bir  $c < \infty$  sayısı bulunabiliyorsa sistem için kararlıdır denilir. Aksi durumda, yani  $t \rightarrow \infty$  iken,  $x(t) \rightarrow \infty$  oluyorsa da sistem kararsızdır denilir.

Bir denetim sistemi tasarımı yapılırken dikkat edilmesi gereken en önemli ölçütlerden birisi sistemin kararlılığıdır. Kurulacak olan sistemi oluşturacak olan fiziksel elemanların dayanımları gözönüne alındığında kararsız bir sistem, kısa sürede işlemez hale gelebilecektir. VLSI devrelerinin arabağlantı devreleri gözönüne alındığında oluşacak sistemin kararlı olması beklenir. Bu nedenle, model indirgeme işlemi yapılırken sistemin kararlılık niteliğini kaybetmemesi, önemli bir ölçüt olacaktır.

Kararlılık analizi yapılırken, sistemin durum denklemlerinin çözülmesi çoğu zaman gerekli olmaz. Bir çok durumda, sistem matrislerinin özdeğerleri gözönüne alınarak kurulan yöntemler kullanılırlar (Routh-Hurwitz, Lienard-Chipart, v.s. ) [19].

**Pasiflik:** Doğrusal dinamik bir sistem ancak ve ancak transfer fonksiyonu  $H$  pozitif gerçel ise pasiftir denilebilir. Pozitif-gerçel matris-değerli bir fonksiyona ait tanım aşağıda sunulmuştur.

$H : \mathcal{C} \rightarrow (\mathcal{C} \cup \{\infty\})^{m \times m}$  şeklinde verilen bir matris değerli transfer fonksiyonunun pozitif-gerçel olabilmesi için;

- (1)  $H; \mathcal{C}_+$  düzleminde hiçbir kutup taşımamalı,
- (2) Tüm  $s \in \mathcal{C}$  için  $H(\bar{s}) = \overline{H(s)}$  olmalı,
- (3) Tüm  $s \in \mathcal{C}_+$  ve  $x \in \mathcal{C}^m$  için  $Re(x^H H(s)x) \geq 0$  olmalı

Pasif olan bir sistemin pasifliğinin indirgeme sırasında korunması doğrusal model indirgeme yöntemlerinin başarı ölçütleri arasında en önemlilerinden birisidir.

#### Denetlenebilirlik:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad x(0) = x_0 \quad (2.35)$$

şeklinde verilen  $m$  adet girişli ve  $n$  boyutlu bir doğrusal kontrol sisteminde herhangi bir  $x_0$  ilk değeri için istenen bir son çıkış değeri  $x_f$  olmak üzere  $x(t_f) = x_f$  ulaşılabilecek sonlu bir  $t_f$  zamanı sözkonusu ise  $(A,B)$  çifti için *denetlenebilir* bir sistemdir denilir. Bir sistemin denetlenebilirliğinin hesaplanması için Kalman tarafından sunulmuş olan cebrik bir kural vardır [?]. Buna göre (2.35) sistemi için denetlenebilir denilebilmesi için  $A$  ve  $B$  matrisleri ile kurulan  $(n \times nm)$  boyutlu

$$P = [B, AB, \dots, A^{n-1}B] \quad (2.36)$$

denetlenebilirlik matrisinin rankının  $n$  olması gerekmektedir. Ayrıca sisteme ait denetlenebilirlik gramianı olarak tanımlanan

$$\mathcal{W}_c = \int_0^t e^{As} B B^T e^{A^T s} ds \quad (2.37)$$

$\mathcal{W}_c$ 'nin tüm  $t > 0$  değerleri için pozitif tanımlı olması gerekmektedir. Kararlı sistemler için denetlenebilirlik gramianı  $\mathcal{W}_c$  ayrıca (2.38) ile verilen Lyauponov eşitliğini de sağlar.

$$A\mathcal{W}_c + \mathcal{W}_c A^T + B B^T = 0 \quad (2.38)$$

### Gözlemlenebilirlik:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) & x(0) &= x_0, \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (2.39)$$

şeklinde verilen  $m$  adet girişli  $r$  adet çıkışlı ve  $n$  boyutlu bir doğrusal kontrol sisteminde herhangi bir  $x_0$  ilk değeri,  $u(t)$  ve  $y(t)$  biliniyor iken sonlu bir  $t_f$  değeri için belirlenebiliyorsa (2.39) sistemi *gözlemlenebilir* bir sistemdir denilir.  $u(t)$  giriş ifadesi tümüyle 0 da alınabilir. Daha açık bir deyişle bir sistemin gözlemlenebilir olması sadece çıkış değerinin ölçülmesi ile sistemin durumunun belirlenebilmesi anlamını taşır. Denetlenebilirliğe benzer bir şekilde gözlemlenebilirlik için de bir  $(r \times n \times n)$  boyutlu gözlemlenebilirlik matrisi tanımlanmıştır.

$$Q = [C, CA, \dots, CA^{n-1}]^T \quad (2.40)$$

Gözlemlenebilirlik matrisinin rankının  $n$  olması durumunda sistemin *gözlemlenebilir* olduğu söylenebilmektedir. Gözlemlenebilirlik gramianı da tanım olarak

$$\mathcal{W}_o = \int_0^t e^{A^T s} C^T C e^{As} ds \quad (2.41)$$

olarak verilir ve yine denetlenebilirlik gramianına benzer olarak;

$$A^T \mathcal{W}_o + \mathcal{W}_o A + C^T C = 0 \quad (2.42)$$

eşitliğini sağlar.

## 2.3 Sayısal Yöntemler

### 2.3.1 Padé Yaklaşımı

Padé Yaklaşımı, en basit anlamda bir polinomun iki fonksiyonun oranı biçiminde yaklaştırılması esasına dayanır. Eşdeyişle, (2.43) ile verilen

polinomun (2.44) ile verilen oransal(rasyonel) fonksiyona yaklaştırılması işlemi Padé yaklaştırımı adını alır.

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_Nx^N \quad (2.43)$$

$$f(x) = R_{n,m} = \frac{p_0 + p_1x + p_2x^2 + \cdots + p_nx^n}{1 + q_1x + q_2x^2 + \cdots + q_mx^m} \quad (2.44)$$

Burada  $N = n + m$  olmaktadır. Eğer  $N > n + m$  ise (2.43) eşitliğinin ilk  $n+m$  terimi gözönüne alınarak indirgeme işlemi yapılmaktadır. Sürekli bir fonksiyonun Padé açılımı yapılırken, ilk önce fonksiyon bir seriye (Taylor, MacLaurin vb.) açılır, ardından uygun hassasiyette terim kesilerek oluşan polinom Padé yaklaştırımı ile rasyonel bir fonksiyona yaklaştırılır. Bunun için (2.45) ile verilen bağıntıyı gözönüne alalım.

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \quad (2.45)$$

Bu bağıntıdan

$$f(x)Q_m(x) - P_n(x) = 0 \quad (2.46)$$

elde edilir. Polinomların açık hallerini yerine yazarsak;

$$\left( \sum_{j=0}^{n+m} a_j x^j \right) \left( \sum_{j=0}^m q_j x^j \right) - \left( \sum_{j=0}^n p_j x^j \right) = 0 \quad (2.47)$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitlikten polinomların derecelerini eşitlemek suretiyle (2.48) ve (2.49)'de gözüken doğrusal denklem takımlarını oluşturabiliriz.

$$\begin{aligned} a_0 q_0 - p_0 &= 0 \\ a_0 q_1 + a_1 q_0 - p_1 &= 0 \\ a_0 q_2 + a_1 q_1 + a_2 q_0 - p_2 &= 0 \\ &\vdots \\ a_{n-m} q_m + a_{n-m+1} q_{m-1} + \cdots + a_n - p_n &= 0 \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned} a_{n-m+1} q_m + a_{n-m+2} q_{m-1} + \cdots + a_{n+1} q_0 &= 0 \\ a_{n-m+2} q_m + a_{n-m+3} q_{m-1} + \cdots + a_{n+2} q_0 &= 0 \\ &\vdots \\ a_n q_m + a_{n+1} q_{m-1} + \cdots + a_{n+m} q_0 &= 0 \end{aligned} \quad (2.49)$$

Burada öncelikle  $q_i$  denklemleri çözülmeli, elde edilen değerler yardımıyla  $p_i$ 'leri içeren (2.48) denklemleri çözülmelidir. Sürekli bir fonksiyon Padé

ile yaklaştırılabileceği gibi, varolan bir veri kümesi yardımı ile interpolasyon yapılması da mümkündür [20].

$f(x_i) = y_i$  biçiminde noktaların verildiğini kabul edelim. Burada  $f(x)$  fonksiyonunun (2.43) ile verilen biçime uyduğunu varsayalım. Bu durumda (2.44) ile verilen Padé yaklaşımını gözönüne alındığında (2.50) eşitliği yazılabilmektedir.

$$f(x_i) = y_i = \frac{p_0 + p_1x_i + p_2x_i^2 + \cdots + p_nx_i^n}{1 + q_1x_i + q_2x_i^2 + \cdots + q_mx_i^m} \quad (2.50)$$

Elde edilen bu son eşitlik için  $i = 1 \cdots N$  olacak şekilde bir değişim olduğundan, (2.51) denklem takımı elde edilir.

$$y = \mathbf{X}.a \quad (2.51)$$

Buradaki bileşenler (2.52)'daki gibi tanımlanabilirler.

$$y = \begin{bmatrix} y_0 & y_1 & y_2 & \cdots & y_N \end{bmatrix}^T$$

$$a = \begin{bmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \cdots & p_n & q_1 & q_2 & \cdots & q_m \end{bmatrix}^T$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n & -y_0x_0 & -y_0x_0^2 & \cdots & -y_0x_0^m \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n & -y_1x_1 & -y_1x_1^2 & \cdots & -y_1x_1^m \\ \vdots & & & & & & & & \\ 1 & x_N & x_N^2 & \cdots & x_N^n & -y_Nx_N & -y_Nx_N^2 & \cdots & -y_Nx_N^m \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

### 2.3.2 Krylov Altuzayı

Krylov altuzayı, (2.53) ile verilen altuzay olarak tanımlanır. Krylov altuzayına dayalı yöntemler büyük boyutlu doğrusal denklem sistemlerinin ve özdeğer problemlerinin çözümünde oldukça etkin bir yinelemeli yöntemler ailesidir [21].

**Tanım:** Verilen bir  $\mathbf{A}$  matrisi ve  $\mathbf{v}$  vektörü uyarınca,  $i$ . dereceden Krylov altuzayı

$$\mathcal{K}_i(\mathbf{A}, \mathbf{v}) = \text{span}(\mathbf{v}, \mathbf{A}\mathbf{v}, \mathbf{A}^2\mathbf{v}, \dots, \mathbf{A}^{i-1}\mathbf{v}) \quad (2.53)$$

olarak tanımlanır. Krylov altuzayına dair bazı önemli özellikler bu bölümde sunulacaktır.

- $x \in \mathcal{K}_k$  olmak üzere  $x$  vektörü,  $p$  altuzayın boyutu  $(k-1)$ 'i aşmayan bir polinom olmak üzere  $x = p(\mathbf{A})\mathbf{v}$  şeklinde yazılabilir.
- $\mu$ ,  $p(\mathbf{A})\mathbf{v} = 0$  olmasını sağlayan en küçük derece olmak üzere, tüm  $k \geq \mu$  değerleri için  $\mathbf{A}$  ile kurulacak tüm  $\mathcal{K}_k$  Krylov altuzaylarında  $\mathcal{K}_k = \mu$  olur.

Bu nitelikler uyarınca  $K_\mu$ 'nun  $(A, v)$  ikilisiyle kurulabilecek olası en geniş Krylov altuzayı olduğu söylenebilir.  $(A, v)$  ikilisi ile kurulacak olan  $v, Av, A^2v, \dots, A^{\mu-1}v$  taban vektörleri doğrusal bağımsız olacaklardır ancak  $k > \mu$  değerleri için kurulacak olan  $v, Av, A^2v, \dots, A^k v$  taban vektörleri doğrusal bağımlı olacaklardır. Buna göre;  $m < \mu$  olacak şekilde kurulan bir Krylov altuzayı içindeki herhangi bir bileşen bu altuzayın taban vektörleri cinsinden ifade edilebilecektir. Eşdeyişle;

$$\rho \in \mathcal{K} \Rightarrow \rho = \alpha_1 v + \alpha_2 (Av) + \dots + \alpha_i (A^{i-1}v) \quad (2.54)$$

Krylov Altuzayı tabanlı yöntemlerin genel işleyiş mekanizmasının anlaşılabilmesi için,  $Ax=b$  denklem takımının çözümü için genel bir Krylov tabanlı yöntem algoritması aşağıda sunulmuştur.

#### Algoritma 1:

(1)  $Ax=b$  için bir  $x^{(0)}$  ilk çözümü öner ve buna dayanarak kalanı

$$r^{(0)} = b - Ax^{(0)}$$

olarak hesapla ve döngü değişkeni  $i$ 'yi  $i=0$  olarak ata.

(2)  $\epsilon$  hata için verilen sınır olmak üzere  $\|r^{(i)}\| \geq \epsilon$  olduğu sürece

- $i \leftarrow i + 1$
- $\mathcal{K}_i(r^{(0)}, A)$   $i$ . dereceden Krylov Alt Uzayını oluştur
- $r^{(i)}$  istenen duyarlılıkta olacak şekilde,  $x^{(i)} \in x^{(0)} + \mathcal{K}_i(r^{(0)}, A)$  yeni çözüm vektörünü hesapla .

Krylov Altuzayı yöntemleri; 2. adımın 2. aşamasında Krylov alt uzayını nasıl ürettiklerine ve 3. aşamada hatayı nasıl küçülttüklerine göre birbirlerinden farklılık gösterirler.

#### 2.3.2.1 Krylov Altuzayının Oluşturulması

Bu bölümde, Krylov altuzayının taban vektörlerinin hesaplanması için geliştirilmiş yöntemlerden bazıları üzerinde durulacaktır. Bu oluşturma süreci içerisinde doğrudan bir çarpma ile  $A^i v$  vektörlerini üretmek, sonlu duyarlılık işlem yapan bilgisayarlar nedeniyle olumsuz sonuçlar doğurabilmektedir. Çünkü kuvveti alınan  $A$  matrisi, belli bir kuvvetten sonra sadece baskın özdeğere ilişkin bilgiyi taşımaya başlamakta ve istenen altuzayın derecesi olan  $i$  arttırılsa bile, sayısal anlamda uzay boyutu değişmemektedir. Bu nedenle istenen boyuttta Krylov altuzayını oluşturmak için kullanılan farklı algoritmalar vardır [22].

**Arnoldi Yöntemi:** Arnoldi Yönteminin  $i$ . adımında oluşmuş olan Krylov altuzayının aşağıdaki gibi verildiğini düşünelim.

$$\mathcal{K}_i(A, v) = \text{span}(b_0, b_1, b_2, \dots, b_{i-1}), \quad (2.55)$$

Burada  $j \neq k$  olduğu müddetçe  $b_j^T b_k = 0$  olacaktır. Yineleme sayısını bir arttıralım ve  $d_i = Ab_i$  şeklinde oluşturacağımız vektörü  $b_0, b_1, \dots, b_{i-1}$ 'e karşı dikleştirelim. Bunun için;

$$c_i = d_i - \sum_{j=0}^{i-1} \beta_j b_j \quad (2.56)$$

şeklinde bir yapı kurmamız gerekmektedir. Buradaki  $\beta_j$  katsayıları  $b_j^T c_i = 0$ ;  $j < i$  olacak şekilde hesaplanmalıdır. Böylelikle hesaplanan yeni baz vektör  $b_i$  bulunmuş olan  $c_i$  vektörünün normalize edilmiş hali olacaktır.

$$b_i = \frac{c_i}{\|c_i\|} \quad (2.57)$$

Ayrıca  $c_i$ 'lerin hesaplanmasında kullanılacak olan  $\beta_j$  değerleri de aşağıdaki gibi verilir.

$$\beta_j = \frac{b_j^T A b_i}{b_j^T b_i} \quad (2.58)$$

Bu yapılan dikleştirme işlemi Değiştirilmiş Gram-Schmidt Yöntemi adını alır. Arnoldi yönteminin temel eksikliği, boyut arttıkça işlem pahasının da artmasıdır. Yöntemin hesaplama karmaşıklığı  $\mathcal{O}(n^2)$  ile verilir [23].

**Lanczos Yöntemi:** Krylov alt uzayını oluşturmadaki bir başka yöntem de, esasen özdeğer probleminde bir çözüm olarak önerilmiş olan Lanczos üçbantlaştırma algoritmasıdır.  $n \times n$  boyutlu bir  $A$  matrisini, üçbantlı bir  $T$  matrisine,  $B^{-1}AB = T$  şeklinde çevirecek bir  $B$  matrisi bulunabilir. Lanczos algoritması, verilen bir  $A$  matrisini üçbantlı  $T$  matrisine dönüştürür. Standart Lanczos Algoritması aşağıdaki gibidir.

### Algoritma 2:

- $\rho_1 = \|r\|_2$ ,  $\eta_1 = \|l\|_2$ ,  $v_1 = r/\rho_1$  ve  $w_1 = l/\eta_1$  olarak belirle. Ayrıca  $v_0 = w_0 = 0$  ve  $\delta_0 = 1$  ilk atamasını yap.

$n = 0, 1, \dots, q$  iken:

(1)  $\delta_n = w_n^T v_n$  değerini hesapla.

(2)  $\alpha_n = \frac{w_n^T A v_n}{\delta_n}$ ,  $\beta_n = \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}} \eta_n$ ,  $\gamma_n = \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}} \rho_n$  değerlerini hesapla.

(3)  $v$  ve  $w$  hesaplamalarını yap.

$$\begin{aligned} v &= A v_n - v_n \alpha_n - v_{n-1} \beta_n, \\ w &= A^T w_n - w_n \alpha_n - w_{n-1} \gamma_n. \end{aligned} \quad (2.59)$$

(4)  $\rho_{n+1} = \|v\|_2$  ve  $\eta_{n+1} = \|w\|_2$  olarak ata ve bir sonraki adım için

$$v_{n+1} = \frac{v}{\rho_{n+1}}, \quad w_{n+1} = \frac{w}{\eta_{n+1}}$$

değerlerini hesapla.

Yukarıdaki algoritmanın çözümsüz kalabileceği bazı durumlar sözkonusudur. Örneğin standart Lanczos algoritmasının 2. adımında  $\delta_n$  değerinin 0 ya da 0'a çok yakın bir değer alması halinde sayısal olarak kararsız kalacaktır. Bu durumun önüne geçmek için *Look-ahead Lanczos* [24] algoritması tercih edilir. Yukarıdaki algoritma tarafından üretilen değerlerin bazı özellikleri aşağıda sunulmuştur.

- $\{v_n\}_{n=1}^{q+1}$  ve  $\{w_n\}_{n=1}^{q+1}$  vektörleri biortogonaldir. Yani;

$$w_j^T v_k = \begin{cases} \delta_j, & j = k, \\ 0, & j \neq k, \end{cases} \quad j, k = 1, 2, \dots, q+1. \quad (2.60)$$

- Algoritma içinde hesaplanan  $\alpha$ ,  $\beta$  ve diğer katsayılar yardımıyla kurulan üçbantlı T matrisleri

$$T_q = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \rho_2 & \alpha_2 & \beta_3 & \cdots & 0 \\ 0 & \rho_3 & \vdots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \beta_q \\ 0 & \cdots & 0 & \rho_q & \alpha_q \end{bmatrix}, \quad \hat{T}_q = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \gamma_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \eta_2 & \alpha_2 & \gamma_3 & \cdots & 0 \\ 0 & \eta_3 & \vdots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \gamma_q \\ 0 & \cdots & 0 & \eta_q & \alpha_q \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

şeklinde tanımlanırlar. Bu matrisler ile A matrisi arasında ise;

$$\begin{aligned} AV_q &= V_q T_q + [0 \quad \cdots \quad 0 \quad v_{q+1}] \rho_{q+1}, \\ A^T W_q &= W_q \hat{T}_q + [0 \quad \cdots \quad 0 \quad w_{q+1}] \eta_{q+1} \end{aligned} \quad (2.62)$$

ilişkisi sözkonusudur. Burada  $V_q$  ve  $W_q$  sütunları Lanczos vektörleri olan matrislerdir.

- $\hat{T}_k$  ve  $T_k$  üçbant matrisleri;

$$\hat{T}_k^T = D_q T_q D_q^{-1} \quad (2.63)$$

eşitliğini sağlarlar. Burada  $D_q$

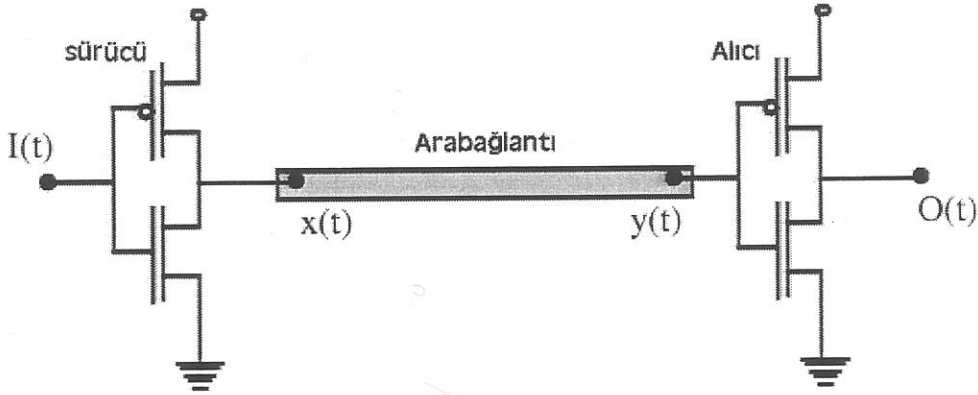
$$D_q = W_q^T V_q = \text{diag}(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_q) \quad (2.64)$$

olarak tanımlıdır.

## BÖLÜM 3

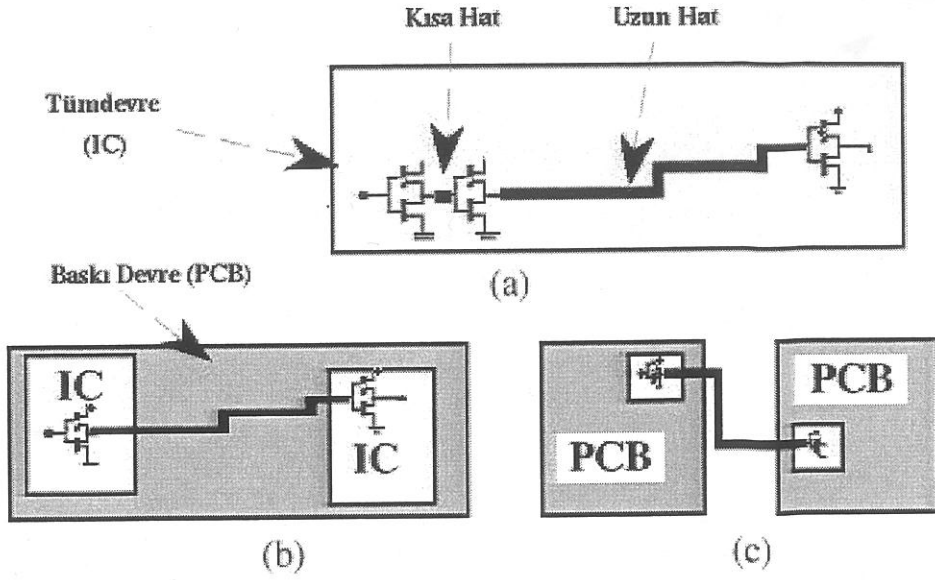
### Mikroelektronik Sistemlerde Arabağlantı Yapıları

Günümüz mikroelektronik teknolojisinde fiziksel arabağlantı yapıları sistem çalışmasında etkin önem taşımaya başlamışlardır. Şekil 3.1'de mikroelektronik devrelerinde yaygın bir kullanıma sahip olan CMOS yapıları arasında tümleşik devre üzerinde görülebilecek ideal bir arabağlantı hattı gösterilmiştir. İdeal arabağlantı hatlarında verilen işaret bozulmaya uğramadan ancak gecikerek iletilir. Sıklıkla kullanılan arabağlantı modeli ideal modeldir.



Şekil 3.1: CMOS sürücü ile CMOS alıcı arasındaki ideal arabağlantı[5]

Bir mikroelektronik sistem, tümleşik devre üzerinde elemanlar arasındaki bağlantıyı sağlayan kabloların birinci derece, bir baskı devre içindeki tümleşik devreleri birbirlerine bağlayan kabloların ikinci derece ya da son olarak iki baskı devre arasındaki bağlantıyı sağlayan arabağlantılar üçüncü derece olmak üzere üç tip arabağlantı yapısına sahip olabilir. Bu yapılar, Şekil 3.2'de gösterilmiştir. Şekil 3.3 ile gösterilen yapıda;  $R_L$  birim uzunluk başına düşen dirençsel etkiyi,  $C_L$  birim uzunluk başına düşen arabağlantı ile toprak arası kapasiteyi,  $L_L$  birim uzunluk başına arabağlantının endüktif etkisini,  $G_L$  hattın



Şekil 3.2: Mikroelektronik sistemlerdeki arabağlantı yapıları (a) devre içi arabağlantılar (b) iki baskı devre arası bağlantılar (c) baskı devreler arası bağlantılar[5]

iletkenliğini ve  $C_c$  kuplaj sığacını göstermektedir. Bu ifadelerin değerleri en temel şekilde;

$$\begin{aligned}
 R_L &= \rho/(\omega t) \\
 C_L &= \epsilon_0 \kappa \omega / h \\
 L_L &= \mu h / \omega \\
 G_L &= g_d \omega / h \\
 C_c &= \epsilon_0 \kappa t / s
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

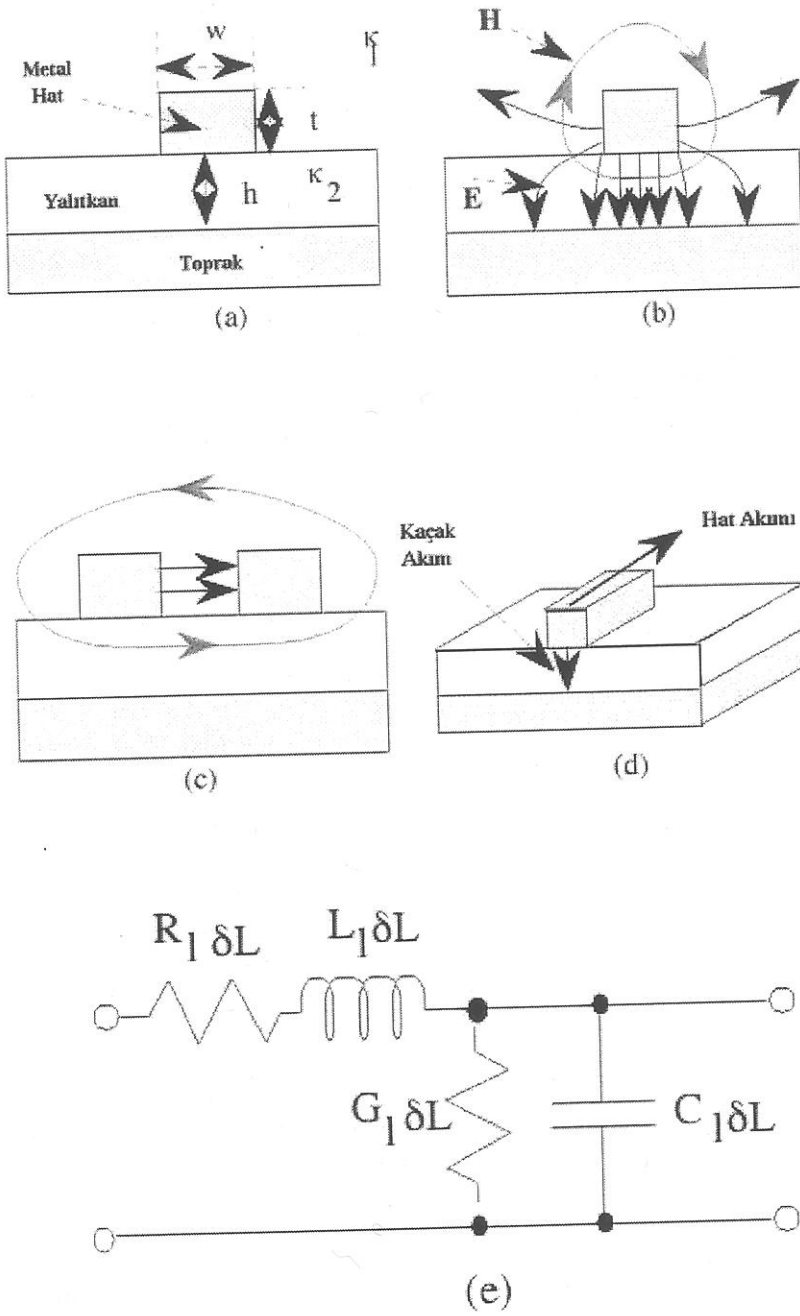
olarak verilebilir.

Burada  $\rho$  kırkık(chip) üretiminde kullanılan metalin öz direncini,  $\epsilon_0$  dielektrik katsayısını,  $g_d$  iletkenliğini,  $t$  metalin kalınlığını,  $h$  yalıtkan kalınlığını,  $\omega$  ise arabağlantının genişliğini simgelemektedir.

Bir tümdevreyi oluşturan bileşenlerin tüm kimyasal niteliklerini gözönüne alarak daha doğru modellemeler yapmak mümkündür [25].  $\delta L \rightarrow 0$  durumunda yukarıda verilmiş olan devre akım ve gerilimin zaman bağımlılıklarından kaynaklanan aşağıdaki eşitliği sağlar.

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial V}{\partial x} &= L_L \frac{\partial I}{\partial t} + R_L I \\
 -\frac{\partial I}{\partial x} &= C_L \frac{\partial V}{\partial t} + G_L I
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Elde edilen bu denklemlerde sık karşılaşılan üç ayrık durum:



**Şekil 3.3:** (a) Arabağlantıya dair boyutlar (b) Arabağlantı üzerinde etken olan elektriksel  $E$  ve manyetik  $H$  alan şiddetlerini (c)  $E$  ve  $H$ 'nin bir hat üzerindeki bağlantısı (d) İletken üzerinden akan akımlar (e) Arabağlantının elektriksel eşdeğeri [5]

- *Dirençsel arabağlantı:* Hat direncinin hattın indüktansının önüne geçtiği ve mükemmel yalıtkanların kullanıldığı varsayımı sonucu (3.2) eşitliği bir difüzyon eşitliğine dönüşür;

$$\frac{\partial V}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \quad (3.3)$$

Burada  $a$ , difüzyon katsayısı olup,  $a^2 = \frac{1}{R_L C_L}$  olarak verilir.

- *İdeal İletim Hattı:* Hattın indüktansının dirence baskın olduğu ve hat iletkenliğinin ihmal edildiği durumda (3.2) eşitliği

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{1}{v_p^2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \quad (3.4)$$

halini alır. Burada  $v_p$  yayılım hızı adını alıp  $v_p^2 = \frac{1}{L_L C_L}$  olarak verilir.

- *İdeal olmayan iletim hattı:* Uzun olan iletim hatlarında hat, işaret üzerinde bozucu etkilere neden olur. Eşitlik (3.2) de  $V(x, t) = V(x)e^{-j\omega t}$  ve  $I(x, t) = I(x)e^{-j\omega t}$  olduğunu varsayalım. Bu durumda (3.2) denklemleri;

$$\begin{aligned} -\frac{\partial V}{\partial x} &= (j\omega L_L + R_L)I(x) \\ -\frac{\partial I}{\partial x} &= (j\omega C_L + G_L)V(x) \end{aligned} \quad (3.5)$$

halini alacaklardır. Burada gerekli hesaplamalar yapıldıktan sonra hattın karakteristik empedansı

$$Z_0 = \frac{V(x, \omega)}{I(x, \omega)} = \sqrt{\frac{(j\omega L_L + R_L)}{(j\omega C_L + G_L)}} \quad (3.6)$$

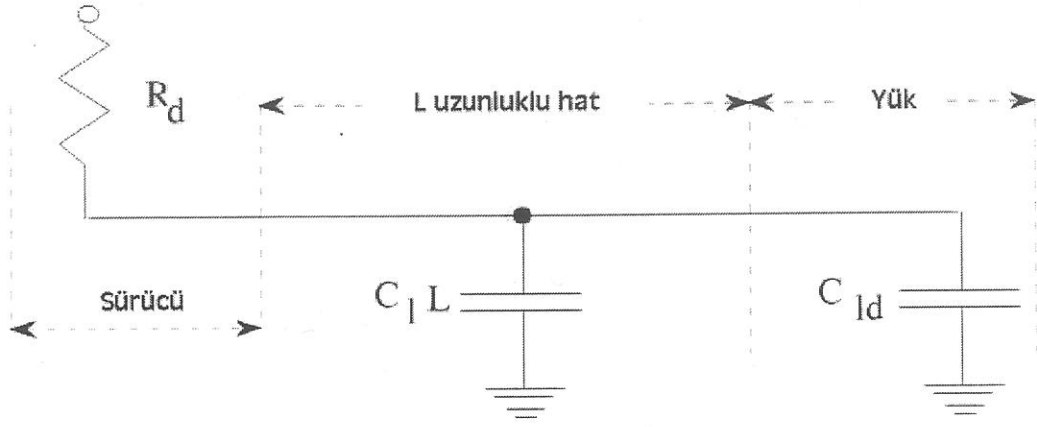
olarak hesaplanacaktır.

### 3.1 Devre Modelleri

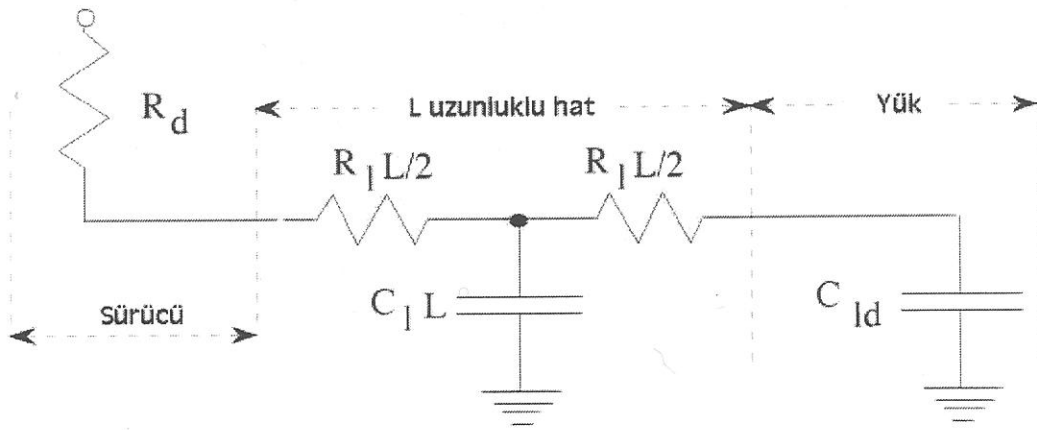
Kısa arabağlantı hatları gözönüne alındığında, (örneğin  $L \rightarrow 0$ ) hattın kapasitif etkisi dirençsel etkisinin önüne geçebilmektedir. Sistemin RC zaman sabiti

$$\tau_{RC} = R_{dr}(C_L L + C_{ld}) \quad (3.7)$$

ile verilebilir. Burada  $R_{dr}$  Şekil 3.1'de de görülen sürücü çıkış direnci,  $C_{ld}$  ise alıcının giriş kapasitesidir. Burada L hat uzunluğu arttıkça sistemin zaman sabiti yükselecektir. Hat uzunluğunda önemli artışlar söz konusu olduğunda ise hat direnci de gözönüne alınacak ve böylelikle arabağlantı devresi ayrık RC modeli ile ifadelendirilecektir. Her iki devre modeli Şekil 3.4 ve Şekil 3.5 ile verilmiştir [26].



Şekil 3.4: Arabağlantıların Kapasitif hat modeli [5]



Şekil 3.5: Arabağlantıların RC modeli [5]

## BÖLÜM 4

### Model İndirgeme Yöntemleri

#### 4.1 Giriş

Genel bir sistemin davranışının matematiksel modelinin (4.1) olarak kurulduğunu kabul edelim.

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= f(x) + Bu(t) \\ y(t) &= L^T x\end{aligned}\quad (4.1)$$

Bu denklemlerde  $x$ ,  $N$  boyutlu bilinmeyenler vektörü;  $y$ ,  $M$  boyutlu çıkış vektörü ve  $u$  ise  $P$  boyutlu giriş vektörü olmaktadır. Buradaki boyutların çok büyük olduklarının gözönüne alınması halinde bu sistemin çözümlenmesi çok uzun işlem süresi isteyen bir hale bürünmektedir. Bu gerçek sistemin yerine kabul edilebilir doğrulukta boyutu küçültülmüş yaklaşık bir sistemin oluşturulması işlemine *Model Mertebesi İndirgeme* (Model Order Reduction) adı verilir. Denklem (4.1)'de bu yöntemin uygulanması halinde oluşacak olan indirgenmiş yapı aşağıdaki eşitliklerde verilmiştir.

$$\begin{aligned}\frac{dz(t)}{dt} &= f_r(x) + B_r u(t) \\ y(t) &= L^T x\end{aligned}\quad (4.2)$$

Denklemlerin bu son halinde  $z$ ,  $q$  boyutlu bilinmeyenler vektörü;  $y$ ,  $M$  boyutlu çıkış vektörü ve  $u$  ise  $P$  boyutlu giriş vektörü olmaktadır. Daha önceki sistem denklemleri ile karşılaştığımızda  $q \ll N$  olmaktadır.

Böylelikle sisteme ait denklem takımının daha kolay çözümlenebilir bir hale getirilmesi sağlanmaktadır. Benzer bir şekilde doğrusal olmayan yapıları içeren denklem sistemlerinde - ki VLSI devrelerinde çoğunlukla yapı doğrusal değildir - mümkün ise devre doğrusal altdevre ve doğrusal olmayan altdevre şeklinde ikiye ayrılarak doğrusal olan kesimin indirgenmesi ile ilgilenilir.

Bu yöntemin en tipik uygulama alanı RL, RC, LC, RLC devreleridir. VLSI bağlantı devrelerinin genel yapısının da R, L ve C elemanlarından oluşan devreler

olarak modellenebileceği gözönüne alındığında çok yüksek boyutlara çıkabilen bağlantı devresi transfer fonksiyonunun mertebelerinin bu yöntem yardımıyla düşürebileceği öngörülebilir.

Denklem (2.32) ile verilmiş olan transfer fonksiyonu ifadesi gözönüne alınarak, doğrusal Model İndirgeme Yöntemlerinden moment eşleme temeline dayalı olanların, sisteme ait yüksek boyutlu transfer fonksiyonu  $H(s)$  yerine  $H(s)$ 'in Pade yaklaşımını ile indirgenmiş hali olan  $H_r(s)$  'in yapılandırılması işlemini yaptıkları söylenebilir.

Elektronik devreler, genel olarak doğrusal olmayan diferansiyel denklem takımları kullanılarak modellenebilirler. Ancak model indirgeme yöntemleri temel olarak doğrusal sistemler üzerinde çalışmaktadır. Bu nedenle öncelikle incelenecek herhangi bir elektronik devrenin doğrusal altdevrelere ayrılması ve daha sonra bu altdevreler üzerinde işlem yapılması gerekmektedir. Ayrıca mikroelektronik sistemlerin arabağlantı yapıları genel anlamda doğrusal devreler olarak modellenebildiklerinden doğrusal yöntemlerce indirgenebilmektedirler.

#### 4.1.1 Özdeğer Hesabına Dayalı Yöntemler

Denklem (2.32) ile verilmiş olan  $H(s)$ 'in uygun bir  $s_0$  açılım noktası civarındaki davranışını hesaplamak için  $(G + s_0C)$  tekil olmamak üzere  $A$  ve  $r$ 'yi aşağıdaki gibi tanımlayalım

$$A = -(G + s_0C)^{-1} \quad r = (G + s_0C)^{-1}b \quad (4.3)$$

Bu matrisler yardımı ile  $H(s)$  transfer fonksiyonunu

$$H(s) = l^T((G + s_0C) + (s - s_0)C)^{-1}b = l^T(I - (s - s_0)A)^{-1}r \quad (4.4)$$

olarak bulunabilir. Böylelikle  $H(s)$ 'in  $s_0$  civarındaki davranışını sadece  $A$  matrisi yardımı ile belirlenebilir.  $A$  matrisinin köşegenleştirilebildiğini varsayarak

$$A = S\Lambda S^{-1} \quad (4.5)$$

Eğer  $f = S^T l = (f_j)$  ve  $g = S^{-1}r = (g_j)$  şeklinde bir isimlendirme yaparsak  $H(s)$ 'i

$$H(s) = f^T(I - (s - s_0)\Lambda)^{-1}g = \sum_{j=1}^N \frac{f_j g_j}{1 - (s - s_0)\lambda_j} = \rho_\infty + \sum_{\lambda_j \neq 0} \frac{z_j}{s - p_j} \quad (4.6)$$

şeklinde kutup-sıfır gösterilimi ile yazabiliriz. Burada  $p_j = s_0 + 1/\lambda_j$  sistemin kutupları,  $z_j = -f_j g_j / \lambda_j$  sistemin sıfırları ve  $\rho_\infty = \sum_{\lambda_j=0} f_j g_j$  de sonsuzdaki kutuplara (sıfır değerli özdeğerlere) denk düşen bir sabittir. Bu işlemin hesaplama pahası  $A$ 'nın köşegenleştirilmesi için  $O(N^3)$  ve her bir  $s$

frekans değeri için yapılacak hesaplama  $\mathcal{O}(N)$  şeklinde olacaktır. Pratikte,  $A$ 'nın köşegenleştirilmesi işlemi kötü koşullanmışlıklardan ötürü sayısal anlamda kararsız sonuçlar üretebileceğinden,  $A = QUQ^T$  şeklinde Schur Ayrıştırması uygulanabilir. Bu durumda  $H(s)$ ;

$$H(s) = l^T (I - (s - s_0)A)^{-1} r = (Q^T l)^T (I - (s - s_0)U)^{-1} (Q^T r) \quad (4.7)$$

şeklini alacaktır. Burada her bir  $s$  frekans noktasındaki değeri hesaplama işleminin pahası  $\mathcal{O}(N^2)$  olacaktır ama sayısal olarak daha kararlı sonuçlar üretilecektir [27].

#### 4.1.2 Momentlerin Tanımı

Zamana bağlı ifadesi  $h(t)$  olan bir fonksiyonun  $H(s)$  transfer fonksiyonu (4.8)'de gibi yazılabilir.

$$H(s) = \int_0^{\infty} h(t) e^{-st} dt \quad (4.8)$$

Yukarıdaki ifadede  $e^{-st}$  terimini  $s=0$  civarında seriye açtığımızda

$$H(s) = \int_0^{\infty} h(t) [1 - st + \frac{1}{2}s^2 t^2 - \frac{1}{6}s^3 t^3 + \dots] dt \quad (4.9)$$

ya da daha toplu bir biçimde

$$H(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} s^k \int_0^{\infty} t^k h(t) dt \quad (4.10)$$

yazabiliriz. Elde ettiğimiz bu son transfer fonksiyonu ifadesinin  $s=0$  noktasındaki birinci türevinin karşılığı ise (4.11)'te verilmiştir.

$$H'(0) = - \int_0^{\infty} t h(t) dt \quad (4.11)$$

Bu elde ettiğimiz ifade birinci moment olarak bilinir ve aşağıdaki biçimde gösterilir.

$$m_1 = - \int_0^{\infty} t h(t) dt \quad (4.12)$$

Denklem (4.12)'i daha da genelleştirir ve tüm diğer momentler için de benzer bir yaklaşım getirirsek  $k$ . momente ait ifade aşağıda sunulduğu gibi olacaktır.

$$m_k = \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^{\infty} t^k h(t) dt \quad (4.13)$$

Böylelikle (4.10) ile (4.13) arasındaki ilişkiden bir transfer fonksiyonunun momentleri cinsinden seriye açılabilirliğini görürüz.

$$H(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k m_k \quad (4.14)$$

$H(s)$ 'i  $s=0$  civarında Taylor serisine açarsak karşılaştığımız  $H(s)$  ifadesi ise

$$H(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k}{k!} H^{(k)}(0) \quad (4.15)$$

olarak elde edilecektir. Denklem (4.14) ile (4.15) ifadelerini eşitlediğimiz zaman ise momente dair başka bir ifade elde etmiş oluruz.

$$m_k = \frac{1}{k!} H^{(k)}(0) \quad (4.16)$$

Ayrıca momentler ile daha önce verilmiş olan (4.4) gösterilimi arasında da bir ilişki kurulabilir. Buna göre sözkonusu denklemin  $s_0$  civarında seriye açılması ile,

$$H(s_0 + s) = l^T (I + sA + s^2 A^2 + \dots) r = \sum_{k=0}^{\infty} m_k s^k \quad (4.17)$$

yazılabilir. Burada

$$m_k = l^T A^k r \quad k = 0, 1, \dots \quad (4.18)$$

olacaktır. Bu bölümde momentlerin ne oldukları üzerinde duruldu. Bir sonraki bölümde ise herhangi bir devre için moment hesabının nasıl yapılacağı üzerinde durulacaktır.

### 4.1.3 Genel Bir Devre İçin Momentlerin Hesabı

Bir  $\delta(x)$  birim darbe fonksiyonu tarafından sürülen en genel haldeki bir RLC devresi için durum denklemleri ve bu durum denklemlerinin Laplace dönüşümü sonrası biçimleri aşağıdaki eşitliklerde verilmiştir.

$$\dot{x} = Ax + B\delta(t) \quad (4.19)$$

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + B \quad (4.20)$$

Başlangıç koşullarının 0 olduğunu düşünelim. Bu durumda

$$X(s) = (sI - A)^{-1} B = -A^{-1} (I - sA^{-1})^{-1} B \quad (4.21)$$

elde edilecektir. Bu son ifadedeki  $(I - sA^{-1})^{-1}$  ifadesinin seri karşılığını kullanırsak

$$X(s) = -A^{-1} (I + sA^{-1} + s^2 A^{-2} + \dots) B \quad (4.22)$$

Böylelikle momentlere ait vektörlerin sırasıyla aşağıdaki biçimde tanımlandığını söyleyebiliriz.

$$\begin{aligned}
 m_0 &= -A^{-1}B \\
 m_1 &= -A^{-2}B \\
 m_2 &= -A^{-3}B \\
 &\vdots \\
 m_q &= -A^{-q+1}B
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

A matrisinin yapısının devre topolojisinden kaynaklandığının gözönüne alınması ve melez parametreler cinsinden bir yazımın her zaman mümkün olması ile A matrisinin (4.24) biçiminde yazılabileceği görülür.

$$A = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} H_{CC} & H_{CL} \\ H_{LC} & H_{LL} \end{bmatrix} \tag{4.24}$$

Denklem (4.24)'deki gibi verilen bir matrisin tersinin (4.25)'deki gibi olacağı ve bu tersin bulunmasının sistemin DC modelinin çözülmesi ile eşdeğer tutulabileceğinden yola çıkılarak sisteme ait (j+1). momentin hesaplanması aşağıdaki algoritma ile gösterilmiştir.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} H_{CC} & H_{CL} \\ H_{LC} & H_{LL} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix} \tag{4.25}$$

Bir elektrik devresinin transfer fonksiyonunun momentlerinin devre üzerinden elde edilmesine dair bir algoritma aşağıda verilmiştir.

### Algoritma 3:

- Devredeki tüm bağımsız kaynakları sıfıra eşitle
- Sığacın modelinden kaynaklanan her bir akım kaynağını sığaç değeri C ile bir önceki adımdan bulunan moment değerinin ( $\mathbf{m}_j^C$ ) çarpımı olarak ata
- Bobinin modelinden kaynaklanan her bir gerilim kaynağını bobin değeri L ile bir önceki adımdan bulunan moment değerinin ( $\mathbf{m}_j^L$ ) çarpımı olarak ata
- Oluşan devrede sığaç akım kaynağının gerilimini ( $\mathbf{m}_{j+1}^C$ ) ve bobin gerilim kaynağından akan akımı ( $\mathbf{m}_{j+1}^L$ ) olarak hesapla

## 4.2 Moment Eşleme Teknikleri

### 4.2.1 Asimptotik Dalgabiçimi Üretimi (AWE)

$l$ . durum değişkeninin tekrar eden kök olmadığı varsayımı ile ilgilenilmekte olan doğrusal sistemin zaman ve frekans bölgesi cevapları (4.26) ve (4.27) ifadeleri ile verilmiştir.

$$x_l(t) = \sum_{j=1}^q k_j e^{p_j t} \quad (4.26)$$

$$X_l(s) = \sum_{j=1}^q \frac{k_j}{s - p_j} = \frac{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_{q-1} s^{q-1}}{1 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_m s^q} \quad (4.27)$$

$X(s)$ 'in momentleri cinsinden seriye açılmış hali daha önce (4.13) eşitliği ile verilmişti. Burada  $2q$  kadar terim bize bilinmeyenleri hesaplamak için yeterli olacaktır.

$$X_l(s) = m_{0,l} + m_{1,l} s + m_{2,l} s^2 + \dots + m_{2q-1,l} s^{2q-1} \quad (4.28)$$

Son olarak da (4.27)'yi  $s$ 'in kuvvetleri cinsinden seriye açar ve (4.28) ile (4.29)'u birebir eşlersek (4.30) ve (4.31) ile görülen iki doğrusal denklem tanımını elde ederiz.

$$\sum_{j=0}^q \frac{k_j}{s - p_j} = \sum_{j=1}^q -\frac{k_j}{p_j} \left(1 + \frac{s}{p_j} + \frac{s^2}{p_j^2} + \dots\right) \quad (4.29)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \frac{1}{p_1} & \frac{1}{p_2} & \dots & \frac{1}{p_q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{p_1^{q-1}} & \frac{1}{p_2^{q-1}} & \dots & \frac{1}{p_q^{q-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{p_1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{p_2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{p_{q-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_q \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} m_{0,l} \\ m_{1,l} \\ \vdots \\ m_{q,l} \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \frac{1}{p_1} & \frac{1}{p_2} & \dots & \frac{1}{p_q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{p_1^{q-1}} & \frac{1}{p_2^{q-1}} & \dots & \frac{1}{p_q^{q-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{p_1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{p_2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{p_{q-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{q} \end{bmatrix}^{q+1} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{q,l} \\ m_{q+1,l} \\ \vdots \\ m_{2q-1,l} \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

Yukarıdaki denklemlere baktığımızda bir Vandermonde matrisi  $V$  ve bir köşegen matris  $\Lambda$  ile çalışılmakta olduğu görülecektir. Yukarıdaki ifade matris notasyonu kullanılarak tekrar yazılırsa;

$$V\Lambda k = -m_l \quad (4.32)$$

$$V\Lambda^{q+1}k = -m_h \quad (4.33)$$

elde edilir. Burada  $m_l$  ilk  $q$  momenti (0'dan  $q-1$ 'e dek) ve  $m_h$  geri kalan  $q$  momenti ( $q$ 'dan  $2q-1$ 'e dek) göstermektedir. İlgili işlemler yapıldığı zaman (4.34) elde edilir.

$$k = -\Lambda^{-1}V^{-1}m_l \quad (4.34)$$

Denklem (4.34)'i (4.33) denkleminde kullanırsak

$$V\Lambda^q V^{-1}m_l = m_h \quad (4.35)$$

elde edilir.

Burada

$$A_c^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{q-1} \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

olarak tanımlanmak üzere (4.35) denklem sistem sistemi

$$A_c^q m_l = m_h \quad (4.37)$$

olarak yeniden yazılabilir. Buradan  $a_i$  katsayılarını elde etmek üzere denklemleri yeniden düzenlersek ;

$$\begin{bmatrix} m_0 & m_1 & \cdots & m_{q-1} \\ m_1 & m_2 & \cdots & m_q \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ m_{q-1} & m_{q-1} & \cdots & m_{2q-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a_0 \\ -a_1 \\ \vdots \\ -a_{q-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_q \\ m_q \\ \vdots \\ m_{2q-1} \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

elde ederiz. Bu elde ettiğimiz denklem yardımı ile bulacağımız  $a_i$  katsayıları bize indirgenmiş sistemin kutuplarına ait karakteristik denklemin katsayılarını verecektir.

$$a_0 + a_1 p^{-1} + a_2 p^{-2} + \cdots + a_{q-1} p^{-q+1} + p^{-q} = 0 \quad (4.39)$$

Denklem (4.39) polinomunun kökleri, indirgenmiş olan sistemin köklerini verecektir. Bu kökler hesaplandıktan sonra  $\mathcal{V}$  matrisini oluşturmakta kullanılacaktır. Böylelikle bulunmuş olan kutuplara karşılık gelen artık (rezidü) değerleri de (4.32) denklemi yardımıyla hesaplanacaktır. Böylelikle indirgenmiş sistem için (4.27) biçiminde bir gösterim kullanılabilir [28]. AWE yöntemine ait bu çözüm yaklaşımını aşağıdaki biçimde maddelendirebiliriz.

**Algoritma 4:**

- (1)  $q$ 'nın seçimi istenen doğruluk düzeyine bağlı olmak üzere sisteme ait ilk  $2q$  momenti hesapla
- (2)  $a_i$  katsayılarını bulabilmek için (4.38)'i çöz
- (3) Yaklaşık kutuplar olan  $p_i$ 'leri bulmak için, elde edilen  $a_i$  katsayıları ile kurulan (4.39) 'u çöz
- (4) Farkları (4.32) dan yararlanarak hesapla.

AWE'de, (4.39)'daki  $q$  derecesi ile kurulan indirgenmiş sistemin doğruluğu arasında ters bir ilişki vardır. Bu tersliğin temel kaynağı (4.38) doğrusal deklemin sisteminin katsayılar matrisi olan ve

$$\mathcal{M}_q = [m_{j+k-2}]_{j,k=1,2,\dots,q} \quad (4.40)$$

şeklinde gösterilebilecek momentler matrisinden kaynaklanmaktadır.  $\mathcal{M}$  matrisinin koşul sayısı  $q$  arttıkça çok yüksek bir hızla artmaktadır. Böylelikle sayısal kirlilik çok yüksek boyutlara ulaşmakta ve yöntem belli bir  $q$  değerinden sonra kötü sonuçlar üretmeye başlamaktadır. Bu kötü koşullanma sorununu çözmek üzere çeşitli ölçeklendirme yöntemleri önerilmiştir. Sistemin gerçek momentleri olan  $m_i$  momentlerini  $\zeta_i m_i$  şeklinde değiştirmek bunlardan birisidir. Buradaki  $\zeta^i$  değerlerini üretmek için çeşitli yaklaşımlar vardır.

$$\zeta_1 = \frac{1}{\|A\|_2} \quad \zeta_2 = \frac{|m_0|}{|m_1|} \quad \zeta_3 = \left( \frac{|m_0|}{|m_{2q-1}|} \right)^{\frac{1}{2q-1}} \quad (4.41)$$

Bu seçimlerden ilki sistem matrisi  $A$ 'yı ölçeklendirme işleminde kullanılmaktadır. ikincisi ilk moment ile ikinciye aynı genliğe getirmekte ve üçüncü ise ilk ve son momentleri aynı genliğe taşımaktadır. Her üç yöntemde, momentler matrisinin kötü koşullanmışlığına etkin düzeyde bir çözüm üretmemekte, koşul sayısı kısa bir sürede oldukça yüksek düzeylere varmaktadır [29].

AWE yönteminin doğruluğunu arttırmak üzere yapılan bir başka iyileştirme de, sabit bir açılım noktası olarak  $s$  frekans bileşeninin seçilmesi yerine daha uygun

bir noktanın belirlenebilirliğini arttırmak için  $(s - \sigma)$  değerinin açılım noktası olarak belirlenmesi olmaktadır. Böylelikle (4.14) ile verilmiş olan eşitlik

$$H(s) = \sum_{j=1}^{\infty} (s - \sigma)^{j-1} m_{j-1} \quad (4.42)$$

şeklini almaktadır ve yöntemin diğer tüm uygulamaları aynen tekrarlanmaktadır. Ayrıca çoknoktalı Pade yaklaşımı ile  $\{\sigma^1, \sigma^2, \dots, \sigma^k\}$  kümesi ile tanımlı açılma noktalarından yararlanan ve *Çoknoktalı AWE* adını alan bir başka yaklaşım da sözkonusudur. Bu yöntemde  $\sigma_i$  noktasında çakışan  $2J_i$  moment,  $q$  indirgenecek boyut olmak üzere  $\sum_{i=1}^k J_i = q$  olacak şekilde seçilerek daha doğru bir yaklaşım yapılmaya çalışılmaktadır.

Çok genel anlamda bir VLSI arabağlantı devresine ait matematiksel modelin (4.43) ile verilen denklem takımı olarak kurulduğunu gözönüne alalım:

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= Ax(t) + bu(t) \\ y(t) &= c^T x(t) + du(T) \end{aligned} \quad (4.43)$$

Bu sistemin açılımları ve bu sistem üzerinde uygulanacak olan AWE yönteminde kullanılacak olan momentlere dair hesaplama yöntemlerini Tablo 4.1 ile verilmiştir.

**Tablo 4.1:** Pade Yaklaşımları

H(s) Açılımı	j. katsayı
$\sum_{j=1}^{\infty} m_{-j} s^{-j}$	$m_j = c^T (E^{-1}A)^{j-1} E^{-1}b$
$\sum_{j=1}^{\infty} m_{j-1} s^{j-1}$	$m_j = -c^T (A^{-1}E)^{j-1} A^{-1}b$
$\sum_{j=1}^{\infty} m_{j-1} (s - \sigma)^{j-1}$	$m_j = -c^T ((A - \sigma E)^{-1}E)^{j-1} (A - \sigma E)^{-1}b$
$\sum_{j=1}^{\infty} m_{k-1} (s - \sigma^k)^{j_k-1}$	$m_j = -c^T ((A - \sigma^k E)^{-1}E)^{j_k-1} (A - \sigma^k E)^{-1}b$

Yukarıdaki tabloda sırasıyla seriye açılımın  $\infty$  civarında yapıldığı, 0 civarında yapıldığı, seçilmiş bir  $\sigma$  noktası civarında yapıldığı ve son olarak da  $k = 1, \dots, K$ 'ya dek olan farklı noktalarda yapıldığı moment hesaplama seçenekleri görülmektedir.

Tüm bu farklı yaklaşımlara karşın AWE yöntemi, sayısal olarak kararsız bir yöntemdir. Özellikle çok yüksek boyutlu sistemlerin indirgenmesinde, momentler matrisinin kötü koşullanmışlığından ötürü kötü yaklaşımlar yapmaktadır. Ayrıca yine benzer nedenlerden ötürü, yaklaştırılacak kutup sayısının arttırılması yöntemin sonuçlarını iyileştirmek yerine kötüleştirmektedir. Sonuçları iyileştirmek üzere önerilmiş olan farklı noktalarda açılımlar sunma yaklaşımları ise fazlasıyla tahmini durumlar içerip, bir yazılım tarafından sisteme dayanarak belirlenme şansına sahip değillerdir.

#### 4.2.2 Kapalı Moment Eşleme Teknikleri

AWE yöntemi ve türevlerinin momentler matrisi  $\mathcal{M}$ 'den kaynaklanan bir kötü koşullandırılmışlığa sahip oldukları ve bu nedenle de yöntemin indirgeme derecesi arttırıldığında doğruluklarını yitirdiklerinden bahsedilmişti. Yöntemin bu eksikliğini önüne geçmek üzere kapalı moment eşleme teknikleri kullanılır. Kapalı moment eşleme tekniklerinde, sistemin momentler matrisi yapılandırılmadan moment eşleme işlemi yapılmaktadır. Bu işlemin yapılamaması sırasında genellikle  $k$ . derece modeli üretmek üzere  $\pi_k = \pi_k^2 = V_k W_k^T$  şeklinde tanımlanan Krylov yansıtıcıları kullanılmaktadır. Bu yansıtıcıların kullanılması ile gerçek sistem aşağıdaki indirgenmiş biçimi almaktadır.

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= (W_k^T A V_k) \hat{x} + (W_k^T b) u = \hat{A} \hat{x} + \hat{b} u \\ \hat{y} &= (c V_k) \hat{x} = \hat{c} \hat{x}\end{aligned}\quad (4.44)$$

Buradaki  $V_k \in \mathcal{R}^{n \times h}$  ve  $W_k \in \mathcal{R}^{n \times h}$  yansıtıcıları için  $I$  birim matris olmak üzere,  $W_k^T V_k = I$  eşitliği yazılabilmektedir. Ayrıca  $V_k$  ve  $W_k$ 'nin  $K_k$  Krylov altuzayı ile ilişkili oldukları da söylenebilir ve bu ilişki

$$\begin{aligned}COLSP(V_k) &= K_k(A, b) = span(b, Ab, \dots, A^{k-1}b) \\ COLSP(W_k) &= K_k(A^T, c^T) = span(c^T, A^T c^T, \dots, A^{k-1T} c^T)\end{aligned}\quad (4.45)$$

biçiminde verilebilir. Burada COLSP ile satır uzayı belirtilmektedir. Söz konusu Krylov yansıtıcılarının hesaplanması işleminde seçilen yönteme göre kapalı moment eşleme teknikleri farklılıklar gösterirler.

#### 4.2.3 PVL (Pade via Lanczos) Yöntemi

PVL yöntemi, Pade yaklaşımı ile Lanczos yöntemi arasındaki yakın ilişkiyi kullanan kapalı bir moment eşleme tekniğidir.

**Pade - Lanczos İlişkisi:** Denklem (2.62)'yi kullanarak

$$A^j r = \rho_1 A^j v_1 = \rho_1 A^j V_q e_1 = \rho_1 V_q T_q^j e_1, \quad j = 0, 1, \dots, q-1 \quad (4.46)$$

elde edilir. Burada  $e_1 = [10 \dots 0]^T \in \mathcal{R}^q$  olup,  $\mathcal{R}^q$  'daki ilk birim vektördür. Benzer bir şekilde (2.62)'deki ikinci eşitlikten de

$$l^T A^j = \eta_1 e_1^T (\hat{T}_q^T)^k W_q^T = \eta_1 \delta_1 e_1^T T_q^k D_q^{-1} W_q^T, \quad j = 0, 1, \dots, q-1 \quad (4.47)$$

elde edilir. Öte yandan (4.18) eşitliğinde  $k = k' + k''$  olmak üzere

$$m_k = l^T A^k r = (l^T A^{k'}) (A^{k''} r) \quad (4.48)$$

yazılabilir. Eğer  $k \leq 2q-2$  ise  $k'$  ve  $k''$  için  $0 \leq k'$  ve  $k'' \leq q-1$  olarak bulunarak tüm bu eşitliklerden momentlere dair

$$m_k = (\eta_1 \delta_1 e_1^T T_q^{k'} D_q^{-1} W_q^T) (\rho_1 V_q T_q^{k''} e_1) = \eta_1 \rho_1 \delta_1 e_1^T T_q^{k'} D_q^{-1} W_q^T V_q T_q^{k''} e_1 \quad (4.49)$$

olarak bulunur. Eşitliğin düzenlenmesi ile de

$$m_k = (l^T r) \cdot (e_1^T T_q^k e_1) \quad k = 0, 1, \dots, 2q-2 \quad (4.50)$$

sonucuna ulaşılır. Bu ulaştığımız sonuç sistemin  $q$ . Pade yaklaşımıdır. Denklem (4.50)'de  $A$  ile  $T_q$  arasındaki ilişkiden yararlanarak, daha önce  $A$  matrisi ile (4.18) denklemi üzerinde yapılan Taylor serisine açma işlemi benzer biçimde yinelenirse

$$\begin{aligned} l^T r e_1^T (I - \sigma T_q)^{-1} e_1 &= l^T r \sum_{k=0}^{\infty} e_1^T T_q^k e_1 \sigma^k \\ &= \sum_{k=0}^{2q-1} m_k \sigma^k + \mathcal{O}(\sigma^{2q}) \end{aligned} \quad (4.51)$$

elde edilir. Böylelikle de

$$H_q(s_0 + \sigma) = l^T r e_1^T (I - \sigma T_q)^{-1} e_1 \quad (4.52)$$

$H$  transfer fonksiyonunun  $q$ . Pade yaklaşımıdır denilebilir. Elde ettiğimiz ifadeleri (4.18) denklemindekine benzer bir kutup-sıfır gösterim olarak yazabiliriz.  $T_q$  matrisini  $T_q = S_q \Lambda_q S_q^{-1}$  şeklinde bir ayrıştırıma uğratarak

$$H_q(s_0 + \sigma) = l^T r e_1^T S_q^T (I - \sigma \Lambda_q)^{-1} S_q^{-1} e_1 \quad (4.53)$$

yazabiliriz. Burada  $\Lambda_q = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q)$  şeklinde  $T_q$  'nun özdeğerlerinden oluşan köşegen matris  $\mu^T = e_1^T S_q^T$  ve  $\nu = S_q^{-1} e_1$  olmak üzere (4.53) eşitliğini

$$\sum_{j=1}^q \frac{l^T r \mu_j \nu_j}{1 - \sigma \lambda_j} \quad (4.54)$$

şeklinde yazabiliriz.  $T_q$  'nun 0'a eşit olan özdeğerlerinden kaynaklanacak etkiyi göstermek üzere  $k_\infty$  terimini de kullanarak Lanczos ile hesaplanacak Pade yaklaşımının kutup-sıfır gösterilimi (4.55) ifadesindeki gibi olur.

$$H_q(s_0 + \sigma) = k_\infty + \sum_{j=1, k_j \neq 0}^q \frac{-l^T r \mu_j \nu_j / \lambda_j}{\sigma - 1/\lambda_j} \quad (4.55)$$

Denklem (4.55) ile verilmiş olan kutup-sıfır gösterilim yapısını kullanarak  $H$  transfer fonksiyonunun  $q$ . Pade yaklaşımını olan  $H_q$  indirgenmiş transfer fonksiyonunu, Lanczos algoritması yardımıyla  $T_q$  Lanczos matrisini elde edip daha sonra da bu matrisin özdeğer ayrıştırmasını yaparak hesaplayabiliriz. Bu işlemler bütünü PVL algoritması adını alır.

#### Algoritma 5:

- (1) *Algoritma 2* ile verilmiş olan Lanczos yöntemini indirgenecek boyut olan  $q$  kadar çalıştırıp üçbantlı  $T_q$  Lanczos matrisini üret.
- (2)  $T_q$  matrisine ait özdeğer ayrıştırmasını

$$T_q = S_q \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q) S_q^{-1}$$

olarak yap ve  $\mu = S_q^T e_1$  ve  $\nu = S_q^{-1} e_1$  olarak ata.

- (3)  $H_q$ 'nin kutup ve sıfırlarını  $\lambda_j \neq 0, j = 1, 2, \dots, q$  olmak üzere

$p_j = 1/\lambda_j$  ve  $k_j = \frac{l^T r \mu_j \nu_j}{\lambda_j}$  olarak hesapla.

$\lambda_j = 0$  olan durumlar için ise ;

$k_\infty = \sum_{j=0; \lambda_j=0}^q l^T r \mu_j \nu_j$  ifadesini kullan.

PVL yöntemi ile AWE yöntemi hesaplama pahası açısından aynıdır. Her ikisinde de esas paha,  $G + s_0 C = LU$  şeklinde sadece bir kez yapılması gereken LU ayrıştırmasıdır. PVL'de elde edilen  $L$  ve  $U$  matrisleri ile *Algoritma 1*'in üçüncü adımında kullanılan  $Av_n$  ve  $A^T w_n$  vektörleri üretilir.

$$LUz = -Cv_n \quad \text{ve} \quad U^T L^T y = -w_n \quad (4.56)$$

denklemleri çözülerek  $Av_n = z$  ve  $A^T w_n = C^T y$  elde edilir.

SyPVL (Symmetric PVL), PVL algoritmasının simetrik problemlere yönelik bir özelleştirilmesidir. RC, RL, LC elektronik devrelerinin büyük bir çoğunluğu simetrik denklem takımları üretirler. Uğraşmakta olan fiziksel yapıların doğalarından kaynaklanan bu yapı, SyPVL uygulanmasına izin verir. SyPVL, PVL'e göre hemen hemen iki kat hızlı çözüm üretmekte ve aynı zamanda sistemin kararlılık niteliğini de korumaktadır. Gerek AWE, gerekse PVL'de sistemin

kararlılığının korunması gözönüne alınmaz. Simetrik bir sistem için transfer fonksiyonu;

$$H(s) = b^T(G + sC)b \quad G = G^T, C = C^T \quad (4.57)$$

şeklinde verilir. RL, RC ve LC devreleri için G ve C matrisleri pozitif yarı-tanımlıdır. RLC devreleri için ise genelde böyle bir şey söylenemez. Simetrik Lanczos Algoritması aşağıdaki gibi verilebilir.

#### Algoritma 6:

- $v = b$ ,  $v_0 = 0$  ve  $\delta_0 = 1$  olarak ata

$n = 1, 2, \dots, q$  için

- (1)  $Gt = v$  denkleminde  $t$ 'yi çöz.
- (2)  $\delta = v^T t$  'yi  $\delta \neq 0$  iken hesapla.  $\delta = 0$  ise dur.
- (3)  $\gamma_n, \beta_n, v_n$  ve  $t$  değerlerini aşağıdaki şekilde hesapla.

$$\begin{aligned} \gamma_n &= \sqrt{|\delta|}, & \beta_n &= (\text{sign}\delta)\gamma_n \\ v_n &= \frac{v}{\gamma_n}, & t &= \frac{t}{\gamma_n} \end{aligned}$$

- (4)  $v$  ve  $\alpha_n$  değerlerini aşağıdaki gibi hesapla.

$$\begin{aligned} v &= Ct - v_{n-1}\beta_n \\ \alpha_n &= t^T v \\ v &= v - v_n\alpha \end{aligned}$$

Lanczos Algoritması çalıştırıldıktan sonra, üçbantlı Lanczos matrisi aşağıdaki gibi kurulacaktır.

$$T_q = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_2 & 0 & \dots & 0 \\ \gamma_2 & \alpha_2 & \beta_3 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_3 & \vdots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \beta_q \\ 0 & \dots & 0 & \gamma_q & \alpha_q \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

$T_q$  matrisi hesaplandıktan sonra, PVL'de kullanıldığı gibi kullanılabilir. Ancak burada  $T_q$ 'yu oluşturan bileşenlerden,  $\beta_n$ 'in hesaplanmasında kullanılan  $\beta_n = \text{sign}\delta\gamma_n = + - \gamma_n$  gözönüne alınırsa RC, RL, LC devrelerinde G matrisi pozitif tanımlı olacağından,  $\beta_n = \gamma_n$  olmakta ve böylelikle de  $T_q$  matrisi (4.59)'de verildiği gibi simetrik olmaktadır.

$$T_q = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \gamma_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \gamma_2 & \alpha_2 & \gamma_3 & \cdots & 0 \\ 0 & \gamma_3 & \vdots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \gamma_q \\ 0 & \cdots & 0 & \gamma_q & \alpha_q \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

Yukarıda aktarılmış olan PVL ve SyPVL algoritmaları, SISO sistemler için geliştirilmiş yöntemler idi. Matris değerli transfer fonksiyonları için ise MPVL (Matrix PVL) olarak adlandırılan bir başka yöntem geliştirilmiştir [30]. Matris değerli bir transfer fonksiyonu ifadesi (4.4)'dekine benzer olarak;

$$H(s_0 + \sigma) = L^T(I - A\sigma)^{-1}R \quad (4.60)$$

olarak elde edilebilir. Yine PVL yöntemine benzer bir şekilde ancak bu kez blok Krylov altuzaylarını kullanarak çalışmaktadır.

#### 4.2.4 Arnoldi Yöntemine Dayanan Model İndirgeme Yöntemleri

Bölüm 2.3.2'de anlatılmış olan Arnoldi Algoritması da tıpkı Lanczos-tipi algoritmalar gibi  $\mathcal{K}_k(A, b) = \text{span}(b, Ab, A^2b, \dots, A^{k-1}b)$  Krylov altuzayı için ortonormal baz vektörleri yaratmak için kullanılır. Bu yöntemin moment eşlemede kullanılması, Lanczos tipi algoritmaların kullanılmasında olduğu gibi momentlerin doğrudan üretimini gerektiren AWE tipi algoritmalara kıyasla sayısal olarak daha doğru sonuçlar üretmektedir.

Arnoldi Algoritması  $q$  adım çalıştırdıktan sonra  $V_q \in \text{cal}R^{n \times q}$ 'nin sütunlarını oluşturan  $q$  adet ortonormal vektör ve  $q \times q$  boyutlu bir Hessenberg matrisi oluşturulmaktadır. Hessenberg matrisi üçbantlı bir matris ile üstüçgensel bir matrisin toplamı olarak düşünülebilir. Bu  $D_q$  Hessenberg matrisinin elemanları olan  $d_{ij}$  değerleri Arnoldi algoritması tarafından üretilmektedirler. Bu iki matris ile  $A$  matrisi arasında (4.61) ile verilen ilişki vardır.

$$AV_q = V_q D_q + d_{q+1,q} v_{q+1} e_q^T \quad (4.61)$$

Burada  $e_q$ ,  $\mathcal{R}^q$ 'ya ait  $q$ . birim vektördür. (4.61)'den  $k < q$  olmak üzere;

$$A^k b = \|b\|_2 A^k V_q e_1 = \|b\|_2 V_q D_q^k e_1 \quad (4.62)$$

elde edilebilir. Böylelikle de sistemin momentleri ile Arnoldi algoritması ile üretilen matrisler arasında;

$$m_k = l^T A^k b = \|b\|_2 c^T V_q D_q^k e_1 \quad (4.63)$$

ilişkisi kurulabilir. Böylelikle de sistemin Arnoldi yardımı ile indirgenmiş eşiği için;

$$H_q^A(s) = \|b\|_2 c^T V_q (I - sD_q)^{-1} e_1 \quad (4.64)$$

yazılabilir. Oluşturulan yeni sisteme ait matrisler de;  $A_q = D_q$ ,  $b_q = e_1$  ve  $c_1 = \|b\|_2 V_q^T c$  olarak bulunacaktır. Tıpkı MPVL gibi blok Krylov altuzayında Blok Arnoldi işlemi yapan ve MIMO sistemler için çalışan PRIMA gibi yöntemler de vardır [31].

### 4.3 Sistem Gramianları Yardımı ile Model İndirgeme:

#### 4.3.1 Dengelenmiş Dönüşüm (Balancing Transformation):

Kararlı ve zamandan-bağımsız doğrusal bir sistem

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (4.65)$$

Burada (A,B) çiftinin denetlenebilir ve (A,C) çiftinin de gözlemlenebilir oldukları kabul edelim. Bu duruma ilişkin gramianların tanımları (2.37) ve (2.41) eşitlikleri ile verilmiş idi. Sistem dengeleme (system balancing) uygun bir benzerlik dönüşümü yardımı ile pozitif tanımlı gramianların köşegenleştirilmesi işlemine dayanır. Tekil olmayan bir S dönüşüm matrisi yardımı ile  $x(t) = S\hat{x}(t)$  olacaktır. Aynı dönüşüm matrisi sistemin bütünü üzerine uygulandığında

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= \hat{A}\hat{x}(t) + \hat{B}u(t) \\ \hat{y}(t) &= \hat{C}\hat{x}(t) \end{aligned} \quad (4.66)$$

eşitlikleri elde edilecektir. Burada yeni sistem matrisleri

$$\hat{A} = S^{-1}AS \quad \hat{B} = S^{-1}B \quad \hat{C} = CS \quad (4.67)$$

ve sistemin yeni gramianları

$$\hat{W}_c = S^{-1}W_c S^{-T} \quad \hat{W}_o = S^T W_o S \quad (4.68)$$

şeklinde bulunacaktır. Dönüşümden sonra A matrisinin özdeğerleri (yani sistemin kutupları) değişmeyecek ancak gramian matrislerine ait özdeğerler değişecektir. Gramianlar dönüşümden sonra köşegen matris haline geliyorsa bu dönüşümlere *Kontrağradyent Dönüşümler* adı verilir. Kararlı bir sistemin denetlenebilirlik gramianının, simetrik ve pozitif tanımlı olacağı belirtilmişti. Buna göre,  $W_c$ ,  $V_c$  dik matris ve  $\Sigma$  köşegen matris olmak üzere;

$$V_c^T W_c V_c = \Sigma_c^2 \quad (4.69)$$

olacak şekilde yazılabilir. Ayrıca  $(V_c \Sigma_c)^T W_o (V_c \Sigma_c)$  şeklinde kurulacak olan matrisin de pozitif tanımlı olmasından hareketle, (4.70) eşitliğini sağlayacak bir başka  $U$  dik matrisi de bulunabilir.

$$U^T (V_c \Sigma_c)^T W_o (V_c \Sigma_c) U = \Sigma^2 \quad (4.70)$$

Böylelikle,  $S_k = V_c \Sigma_c U \Sigma^{-k}$  olmak üzere bir kontragradyent dönüşümler ailesi tanımlamak mümkündür.

$$S_k^{-1} W_c S_k^{-T} = \Sigma^{2k} \quad S_k^T W_o S_k = \Sigma^{2-2k} \quad (4.71)$$

Burada  $\Sigma$  matrisinin özdeğerleri, sistemin *2.derece modları* adını alır ve  $W_c W_o$  matrisinin özdeğerlerinin kareköküne eşittir. (4.71) denkleminde  $k$  değerinin alabileceği üç değer, sistem analizinde önem taşımaktadır.

$$k = 0 \quad \hat{W}_c = I \quad \hat{W}_o = \Sigma^2 \quad (4.72)$$

$$k = \frac{1}{2} \quad \hat{W}_c = \Sigma \quad \hat{W}_o = \Sigma \quad (4.73)$$

$$k = 1 \quad \hat{W}_c = \Sigma^2 \quad \hat{W}_o = I \quad (4.74)$$

Sırasıyla *giriş-normal koordinatlar*, *içten dengeli koordinatlar* ve *çıkış-normal koordinatlar* adını alırlar.  $k = \frac{1}{2}$  olan kontragradyent dönüşüm, ayrıca *dengelenmiş dönüşüm* adını alır. Bu dönüşümlerin gerçekleşmesi sırasında ilk olarak (2.38) ve (2.42) ile verilen Lyapunov eşitliklerinin çözülmesi gerekmektedir. Gramian hesaplarında kullanılan genel bir Lyapunov eşitliği (4.75) ile verilmiştir.

$$A^T X + X A = C \quad (4.75)$$

Bu denklemin çözümünde kullanılabilecek çeşitli yöntemler aşağıda sunulmuştur.

- *Bartels-Stewart Algoritması*: Bartel-Stewarts Algoritması ile ilk önce  $A$  matrisinin gerçel Schur biçimi hesaplanır, daha sonra da geriye dönük çözümler ile  $X$  matrisi hesaplanır. Bu yönteme ilişkin bir algoritma aşağıda sunulmuştur.

(1)  $A$ 'nın üstüçgensel gerçel Schur formunu  $\hat{A} = U^T A U$  olarak hesapla.

(2)  $Z$ ,  $z_{ii} = c_{ii}/2$  olmak üzere  $C$ 'nin üstüçgen kesimi iken  $W = U^T Z U$  değerini hesapla.

(3)  $\hat{C} = W + W^T$  değerini hesapla.

(4)  $l = 1, 2, \dots, p$  ve  $k = l, l + 1, \dots, p$  iken

$$\hat{C}_{kl} \leftarrow \hat{C}_{kl} - \sum_{i=1}^{k-1} \hat{A}_{ik}^T \hat{X}_{il} \quad (4.76)$$

hesapla ve  $j = l + 1, l + 2, \dots, p$  için

$$\hat{X}_{lj} = \hat{X}_{jl}^T \quad (4.77)$$

olarak hesapla ve  $i = j, j + 1, \dots, p$  için

$$\begin{aligned} \hat{C}_{ij} &\leftarrow \hat{C}_{ij} - \hat{X}_{il} \hat{A}_{lk}^T - \hat{A}_{li}^T \hat{X}_{lj} \\ \hat{C}_{ji} &= \hat{C}_{ij}^T \end{aligned}$$

değerlerini hesapla.

(5) Z,  $z_{ii} = \hat{x}_{ii}/2$  olmak üzere  $\hat{X}$ 'in üstüçgen kesimi iken  $W = UZU^T$  değerini hesapla.

(6)  $X = W + W^T$

A ve B'nin Schur Ayrıştırılmalarının, sırasıyla  $13n^3$  ve  $13m^3$  tuttuğunu gözönüne alırsak, Yukarıda sunulmuş olan algoritma, toplam ;  $13(n^3 + m^3) + \frac{5}{2}(nm^2 + mn^2)$  flop tutar.

- *Hammarling Algoritması*: Hammarling Algoritmasında ise çözüm matrisi  $X$ 'in kendisi yerine Cholesky bileşenleri hesaplanır. Hesaplama karmaşıklığı Bartel-Stewarts ile aynı olsa bile - her ikisi de  $\mathcal{O}(n^3)$  - özellikle Dengeli Dönüşüm'de Bartel-Stewarts'a göre tercih edilen bir yöntemdir.
- *Düşük Rank Yöntemleri*: (4.75) denkleminin çözümü için

$$X \approx V_m X_m V_m^T \quad (4.78)$$

şeklinde bir yaklaşık çözüm öneren yöntemlerdir.  $V_m, K_m(A, E)$  blok Krylov altuzayının ortonormal baz vektörleridir. Ayrıca E, (4.75) denkleminin sağyanını oluşturan C matrisinin,  $C = EE^T$  şeklinde ayrıştırılmış halidir.

- *ADI (Alternate Direction Implicit) Yöntemi*: Bu yöntem, Lyapunov eşitliklerinin çözümünde kullanılabilecek bir başka yöntemdir. Bu yöntem sistem indirgeme yaklaşımlarında oldukça yoğun olarak kullanılmaktadır [32].

Kesilmiş Dengelenmiş Gerçekleme (TBR) yöntemine ilişkin bir algoritma aşağıda sunulmuştur.

### Algoritma 7:

- (1) (2.38) ve (2.42) ile verilen Lyauponov eşitliklerinden yararlanarak uygun bir yöntem ile  $\mathcal{W}_c$  ve  $\mathcal{W}_o$  gramianlarını hesapla.
- (2)  $\mathcal{W}_c$  ve  $\mathcal{W}_o$  değerlerinin Cholesky bileşenlerini  $L_c$  ve  $L_o$  olarak hesapla.
- (3)  $L_o^T L_c = U \Sigma V^T$  tekil değer ayrıştırmasını yap.
- (4) Denge dönüşümü matrisini;

$$S = L_c V \Sigma^{-1/2}$$

olarak hesapla.

- (5) Dengelenmiş (Balanced) sistemin matrisleri;

$$\begin{aligned}\hat{A} &= S^{-1} A S = \Sigma^{-1/2} U^T L_o^T A L_c V \Sigma^{-1/2} \\ \hat{B} &= S^{-1} B = \Sigma^{-1/2} U^T L_o^T B \\ \hat{C} &= C S = C L_c V \Sigma^{-1/2}\end{aligned}$$

Yukarıdaki dengeleme algoritması yardımıyla sistemin derecesini küçültmek istediğimizde ise çeşitli yöntemler kullanılabilir. Dengeleme işlemine dayanan model indirgeme yöntemlerinden *Karekök yöntemi*'ne ait algoritma aşağıdaki gibi olacaktır.

### Algoritma 8:

- (1)  $\mathcal{W}_c$  ve  $\mathcal{W}_o$ 'ya ait Cholesky faktörleri  $L_c$  ve  $L_o$  değerlerini hesapla.
- (2)  $L_c^T L_o$  matrisinin tekil değer ayrıştırmasını yap. Öyle ki

$$U = [U_1, \dots, U_n], \quad V = [V_1, \dots, V_n] \quad \text{ve} \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sigma_n \end{bmatrix} \quad (4.79)$$

olmak üzere  $L_c^T L_o = U \Sigma V^T$  olsun.

- (3)  $\sigma_k > \sigma_{k+1}$  olmak üzere uygun bir  $k$  derecesi seçerek,

$$S_c = L_c \begin{bmatrix} U_1 & \dots & U_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\sigma_1}} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{1}{\sqrt{\sigma_k}} \end{bmatrix} \quad (4.80)$$

ve

$$S_o = L_o \begin{bmatrix} V_1 & \dots & V_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\sigma_1}} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{1}{\sqrt{\sigma_k}} \end{bmatrix} \quad (4.81)$$

olarak dengeleme matrislerini hesapla.

- (4) k. dereceden *Kesilmiş Dengelenmiş Gerçekleme* (Truncated Balanced Realization-TBR) sonucu oluşan sistem matrislerini belirle.

$$A_k^{TBR} = S_o^T A S_c, \quad B_k^{TBR} = S_o^T B, \quad C_k^{TBR} = C S_c \quad (4.82)$$

Bu yöntem ile elde edilen transfer fonksiyonunun hatası kesin olarak ifade edilebilmektedir. Bu ifade  $G_{tbr}^n$  n. dereceye TBR ile indirilmiş transfer fonksiyonu,  $G$  gerçek transfer fonksiyonu ve  $\sigma_i$  'ler hankel tekil değerleri olmak üzere ;

$$\|G(jw) - G_{tbr}^n(jw)\| \leq 2(\sigma_{n+1} + \sigma_{n+2} + \dots + \sigma_N) \quad (4.83)$$

olarak verilir.

## BÖLÜM 5

### Uygulama ve Sonuçlar

#### 5.1 Giriş

Doğrusal Model İndirgeme Yöntemlerinin karşılaştırılmasında öncelikle çözümü bilinen durum uzayının boyutu 11 olan bir sistem kullanılmıştır.

Farklı indirgeme boyutları için indirgenmiş sistemlerin verdikleri cevap ile sistemin gerçek cevabı Bode şekilleri aracılığı ile sunulmuştur. Bu şekillerde kesik çizgi ile gösterilenler indirgenmiş sistemin cevabı ve sürekli çizgi ile gösterilenler de gerçek sistemin cevabıdır. Ayrıca rastgele üretilmiş sistemleri için yöntemlerin farklı büyüklükteki sistemler üzerinde çalışma zamanları ölçülmüştür. Burada gösterilmiş olan CPU zamanları Pentium3-900MHz işlemcili ve 256MB RAM'e sahip SuSE 8.0 işletim sistemine sahip bir PC ile bulunmuş olan değerlerdir.

AWE, PVL, Arnoldi yöntemleri için kullanılmış olan örnek sistem bilgisi sistem gramianları ile indirgeme yöntemi için elverişsiz bir yapıya sahiptir. Sistem gramianları ile indirgemedede sistemin kararlı olması birincil derecede önem taşımaktadır. Ayrıca sistemin durum denklemleri ile gösteriliminde (4.65) denklemi biçimi kurulabilmelidir. Ancak kullanmış olduğumuz sistemin

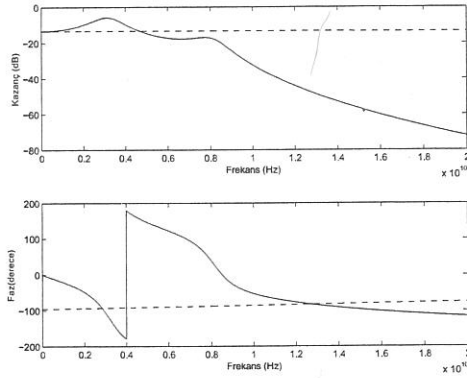
$$\begin{aligned} C\dot{x} &= Gx + bu \\ y &= l^T x \end{aligned} \quad (5.1)$$

biçiminde olması ve buradaki  $C$  matrisinin tekil olması dolayısıyla sistem gramianları ile indirgemedede farklı bir sistem kullanılması tercih edilmiştir. Bunun için [33] ile verilen sistemlerden uygun nitelikli olan bir tanesine Hankel Tekil Değerleri ve sistem gramianlarının Cholesky bileşenleri yardımı ile TBR yöntemi uygulanmıştır. Sonuçların elde edildiği Scilab kodları ekteki diskette verilmiştir.

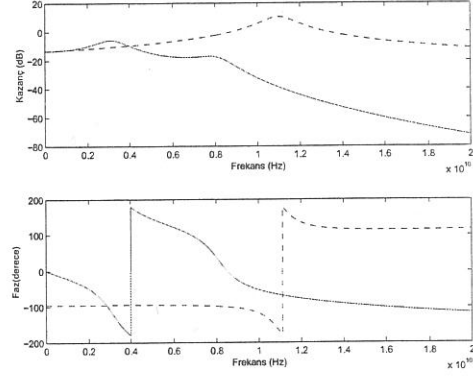
#### 5.2 AWE

AWE yönteminin yukarıda verilmiş olan sistem üzerinde ikinci derece bir sistem üretecek şekilde kullanılması durumunda Şekil ?? ile verilen Bode diyagramları

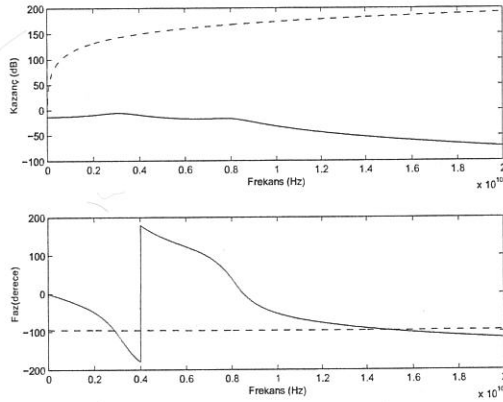
elde edilmektedir. Örnek olarak almış olduğumuz sistemin çalışma frekansı 1 GHz civarında alınmıştır. Ayrıca seçmiş olduğumuz açılma frekansı ( $s_0$ ) 'da 1 GHz olacaktır. Üçüncü derece bir yaklaştırım kullanılması halinde ise ?? ile verilmiş olan şekil elde edilir. Burada görülmekte olan



Şekil 5.1: İkinci dereceye indirgenmiş AWE için Bode diyagramları



Şekil 5.2: Üçüncü dereceye indirgenmiş AWE için Bode diyagramları



Şekil 5.3: Dördüncü dereceye indirgenmiş AWE için Bode diyagramları

Üçüncü derecenin ikinci derece yaklaştırıma göre iyileşmiş olması dördüncü derece bir yaklaştırımın gerçek sonuca daha yakın bir yaklaştırım üreteceği beklentisini yaratmaktadır. Ancak Şekil 5.3 ile de görülebileceği gibi daha kötü bir cevap oluşmaktadır. Bunun nedeni AWE yönteminin doğrudan kullanmakta olduğu momentler matrisinin kötü koşullanmışlığıdır. Momentler matrisinin koşul sayısı ile yaklaştırım derecesi arasındaki ilişki Tablo 5.1 ile verilmiştir. Tablo 5.1'den de görülebileceği gibi AWE yöntemi ile belli bir indirgeme derecesinin üzerindeki indirgemeler, giderek daha kötü sonuçlar vermektedir ki bizim örnek sistemimizde bu kötüleşme dördüncü derece ile başlamaktadır. Çünkü dördüncü derece ile birlikte çözümlerde oluşacak sayısal gürültü, çözümleri anlamsız kılmaktadır.

Tablo 5.1: Momentler Matrisinin Kötü Koşullanmışlığı

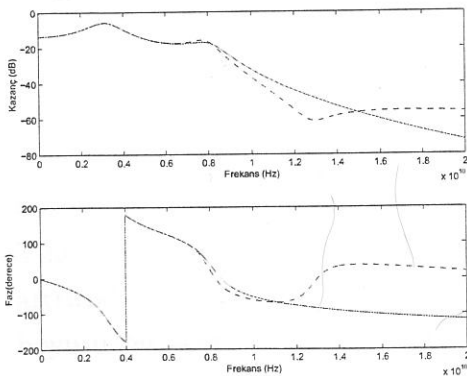
Boyut	Koşul Sayısı
2	2.9483050e+027
3	4.8625435e+039
4	2.6732116e+051
5	4.4088408e+063
6	5.23035348e+072
7	6.7773981e+081
8	1.5627612e+099
9	4.9093547e+111
10	1.8367829e+124

### 5.3 PVL

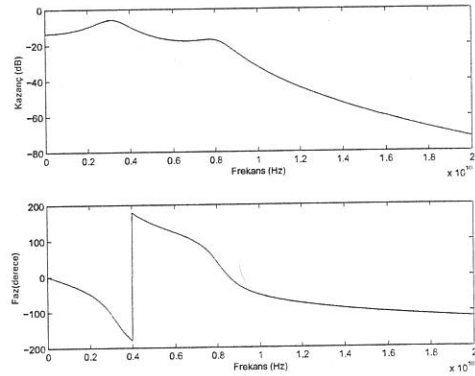
Aynı sistemin PVL'e giriş olarak verilmesi durumunda ise, iki farklı durum için Bode diyagramları çizilmiştir. ( $n=5$ ) ve ( $n=7$ ) için olan grafiklerden açıkça görülebildiği gibi,  $n=7$  durumunda gerçek sistem cevabı ile indirgenmiş sistem cevabı birebir örtüşmektedir. Ayrıca 3 bantlı hale getirilmiş sistem matrisleri dolayısıyla indirgeme sürecinde geçen toplam süre (indirgeme süresi + indirgenmiş sistemin cevabının hesaplanması) gerçek sistemin cevabının hesaplanmasından daha kısa sürmektedir.

Tablo 5.2: Örnek sistem için PVL hesaplama süreleri

Boyut	Gerçek (s)	İndirgenmiş (s)	İndirgeme (s)
5	0.66	0.01	0.16
7	0.65	0.02	0.17

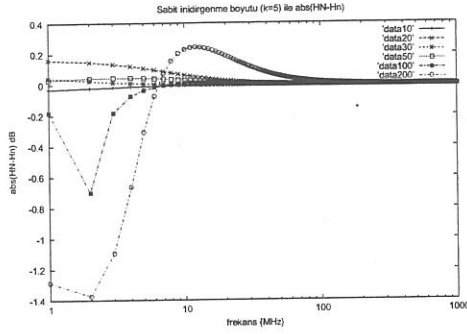


Şekil 5.4: Beşinci boyuta indirgenmiş PVL için Bode diyagramları

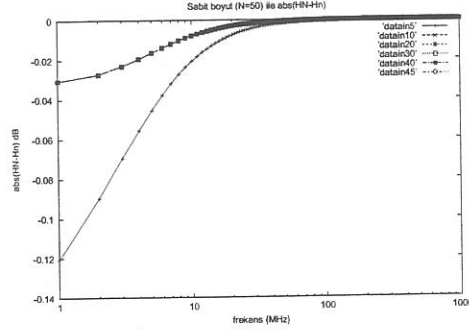


Şekil 5.5: Yedinci boyuta indirgenmiş PVL için Bode diyagramları

PVL yöntemi ile yapılan denemelerde, programa rastgele sistemler verilerek sabit bir indirgeme boyutu ( $n=5$ ) için gerçek sistemin hesaplanma süreleri ile indirgenmiş sistemin hesaplanma süreleri karşılaştırılmıştır. Bu duruma ilişkin veriler Tablo 5.3 ile verilmiştir.



Şekil 5.6:  $HN - H_n$  hatasının sistem boyutuna göre değişimi-PVL



Şekil 5.7:  $HN - H_n$  hatasının model boyutuna göre değişimi-PVL

Tablo 5.3: Farklı sistem dereceleri için süreler-PVL

$N$	Gerçek Süre(s)	İndirgeme Süresi(s)	Hata
10	0.2	0.01	0.059306
20	0.64	0.01	0.42390
30	1.57	0.03	0.096669
50	5.68	0.05	0.14126
100	39.78	0.51	0.77199
200	554.5	1.21	2.6984

Görüldüğü gibi sistemin boyutu arttıkça, Model indirgeme işleminin kendisinin işlem süresi artmaktadır ancak bu artış gerçek sistem için harcanan süre yanında gözardı edilebilecek ölçüdedir. Ayrıca sabit tutulan model boyutu nedeniyle hatanın da gerçek sistemin boyutu ile birlikte arttığı gözlenmiştir. 20. derece sistem ile gözlenmiş olan farklılık PVL yönteminde hata ile boyut arasında kesin bir ilişki bulunmadığının göstergesi olarak alınabilir.

Yine benzer şekilde, sistem derecesi 50 ile sabit tutularak indirgenecek boyut artırıldığında Şekil 5.7 ile verilen grafik elde edilmiştir. Burada  $n$ , indirgenen boyutu vermektedir.

Tablo 5.4 ile de verildiği gibi 50. dereceden olan sistemin derecesinin 45'e düşürülmesi durumunda bile zamandan önemli kazanımlar olmaktadır. Bunun nedeni seçilmiş olan rastgele problemin matrislerinin dolu olan yapılarının üçbantlı bir yapıya indirgenmesidir. Ancak sonuçlar göstermektedir ki 10. derece

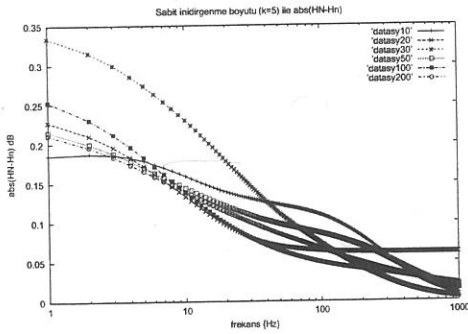
**Tablo 5.4:** Elli Boyutlu bir sistemin farklı boyutlara indirgenmesi-PVL

$n$	İndirgenmiş Süre(s)	İndirgeme Süresi(s)	Hata
5	0.12	0.02	2.1853
10	0.22	0.04	0.066548
20	0.68	0.1	0.066548
30	1.65	0.16	0.066548
40	3.42	0.23	0.066548
45	4.66	0.28	0.066548

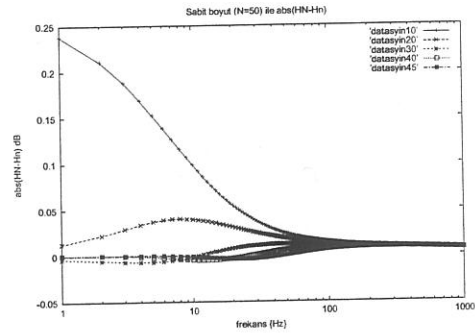
yapının hatası ile 45. derece sistemin hatası arasında belirgin bir farklılık göze çarpmamaktadır.

#### 5.4 syPVL

syPVL yöntemi ile yapılan denemelerde ilk önce, programa rastgele sistemler verilerek sabit bir indirgeme boyutu ( $n=5$ ) için gerçek sistemin transfer fonksiyonu HN ile indirgenmiş sistemin transfer fonksiyonu Hn arasındaki fark değerleri alındı. Bu duruma ilişkin veriler Şekil 5.8 ile verilmiştir.



**Şekil 5.8:** HN - Hn hatasının sistem boyutuna göre değişimi-syPVL



**Şekil 5.9:** HN - Hn hatasının model boyutuna göre değişimi-syPVL

İşlem sürelerine ilişkin ölçüm değerleri Tablo 5.5 ile verilmiştir.

**Tablo 5.5:** Farklı sistem dereceleri için süreler-syPVL

$N$	Gerçek Süre(s)	İndirgeme Süresi(s)	Hata
10	0.2	0.01	1.9035
20	0.64	0.01	2.0805
30	1.57	0.03	1.6822
50	5.68	0.05	1.7177
100	39.78	0.51	1.3264
200	554.5	11.23	1.4599

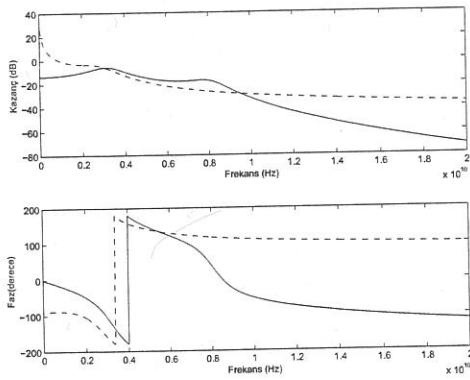
Yine benzer şekilde, sistem boyutu 50 ile sabit tutularak indirgeme derecesi artırıldığında Şekil 5.9 ile verilen grafik elde edilmiştir.

**Tablo 5.6:** Elli Boyutlu bir sistemin farklı boyutlara indirgenmesi-syPVL

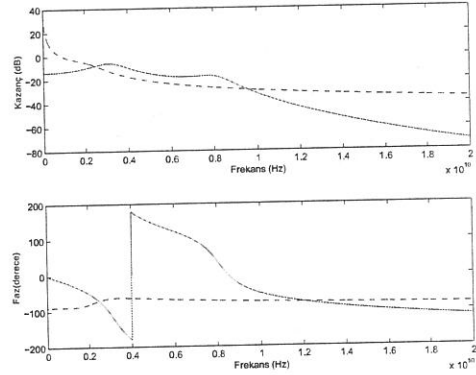
$n$	İndirgenmiş Süre(s)	İndirgeme Süresi(s)	Hata
10	0.19	0.01	0.71642
20	0.45	0.02	0.35453
30	0.84	0.05	0.28322
40	1.41	0.05	0.26228
45	1.73	0.06	0.24314

## 5.5 Arnoldi

Örnek alınmış olan sistemin Arnoldi algoritması yardımı ile indirgenmesi işleminde, PVL'e göre kötü fakat AWE'ye göre iyi sonuçlar elde edilmiştir. Beşinci ve yedinci boyuta indirgenmiş sistemlerin ve gerçek sistemin Bode diyagramları sırasıyla Şekil 5.10 ve Şekil 5.11 ile verilmiştir.



**Şekil 5.10:** Beşinci boyuta indirgenmiş Arnoldi için Bode diyagramları

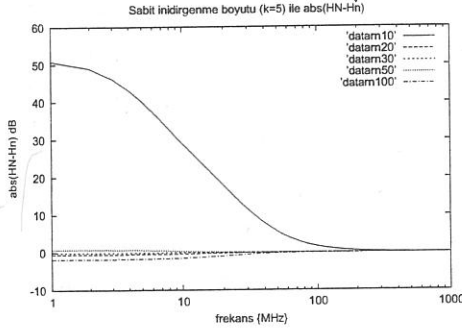


**Şekil 5.11:** Yedinci boyuta indirgenmiş Arnoldi için Bode diyagramları

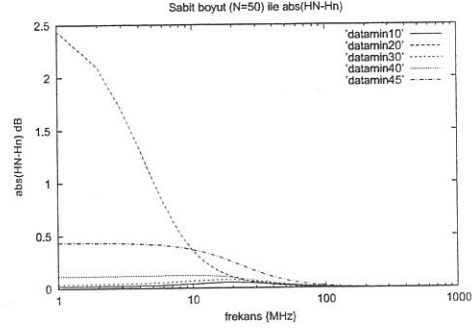
Arnoldi yöntemi ile yapılan hesaplamalarda PVL'e göre daha kötü sonuçlar alınmış olması uygulanan yöntemde PVL'de olduğu gibi iki taraflı bir Krylov altuzayı kurulmamasından kaynaklanmaktadır. Bu sorunun çözümü için benzer bir yaklaşım uygulanabilmekte ancak bu durum işlem pahasını yükseltmektedir. Bunun yerine uygulanabilecek daha farklı yaklaşımlar sözkonusudur [34].

Ayrıca Arnoldi yöntemi ile rastgele sistemler yardımı ile çeşitli zaman ölçümleri alınmıştır. Sabit bir indirgeme boyutu ( $n=5$ ) için gerçek sistemin hesaplanma

süresi ile indirgenmiş sistemin hesaplanan süresi ve indirgeme işlemi süreleri karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırma sonucunda elde edilen hata ifadeleri, gerçek sisteme ait transfer fonksiyonu ifadesi ile indirgenmiş sisteme ait transfer fonksiyonu ifadelerinin farkları ile oluşturulmuş hata vektörünün normu esas alınarak hesaplanmıştır. Ayrıca Şekil 5.12 ile de hata ifadelerinin frekansa göre değişimleri gösterilmiştir.



Şekil 5.12:  $HN - Hn$  hatasının sistem boyutuna göre değişimi-Arnoldi



Şekil 5.13:  $HN - Hn$  hatasının model boyutuna göre değişimi-Arnoldi

İşlem sürelerine ilişkin ölçüm değerleri Tablo 5.7 ile verilmiştir.

Tablo 5.7: Farklı sistem dereceleri için süreler-Arnoldi

$N$	Gerçek Süre(s)	İndirgeme Süresi	Hata
10	0.22	0.01	167,53
20	0.70	0.01	1.6763
30	1.68	0.01	0.046433
50	6.28	0.02	2.2727
100	43.59	0.02	7.2054

Yine benzer şekilde, sistem derecesi 50 ile sabit tutularak indirgeme derecesi arttırıldığında elde edilen sonuçlar Tablo 5.8 ile verilmiştir. Burada işlemin gerçek süresi toplamda 6.11 s. olarak hesaplanmıştır. Ayrıca hata hesabı yapılırken izlenen yöntem  $e = \|HN(jw) - Hn(jw)\|_2$  şeklindedir. Buradaki  $HN$ , orijinal sistemin transfer fonksiyonu ve  $Hn$ , indirgenmiş sistemin transfer fonksiyonudur. Yine aynı hata vektörünün frekans bölgesine göre değişimleri Şekil 5.13 ile verildiği gibi olacaktır.

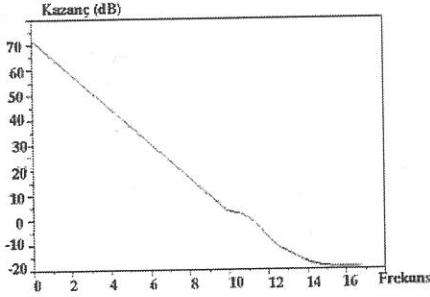
## 5.6 Sistem Gramianları ile İndirgeme:

Sistem gramianları ile indirgeme işleminde [33] 'da verilmiş olan veriler kullanıldı. Bu verilerde sistemin Hankel tekil değerleri ve sistem gramianlarının Cholesky

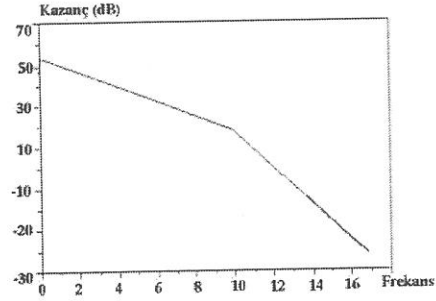
**Tablo 5.8:** Elli Boyutlu bir sistemin farklı boyutlara indirgenmesi-Arnoldi

$n$	İndirgenmiş Süre(s)	İndirgeme Süresi(s)	Hata
10	0.21	0.01	0.33194
20	0.57	0.03	4.9914
30	1.29	0.06	0.45973
40	2.45	0.11	0.66426
45	3.32	0.13	1.8743

bileşenleri verilmiştir. Bu veriler ve sistem matrisleri yardımı ile karekök yöntemi kullanılarak indirgenmiş sistemin matrisleri hesaplanmıştır. İlgili referansta verilen rastgele sistem üzerinde uygulanan yöntem sonucu Şekil 5.14'deki Bode şekilleri elde edilmiştir. Sistemin gerçek cevabı ise Şekil 5.15 ile verilmiştir. Burada sistem gramianlarının hesaplanması işlemi yapılmamış olması nedeni ile işlem süreleri ölçülmemiştir.



**Şekil 5.14:** Onuncu derece TBR ile indirgenmiş sistemin cevabı



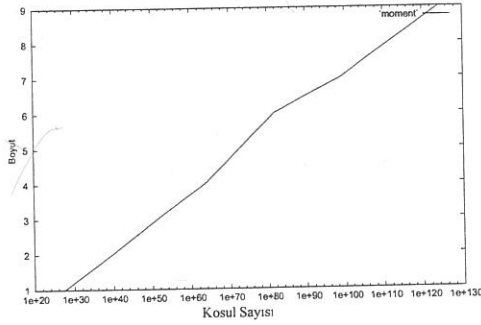
**Şekil 5.15:** Sistemin gerçek cevabı

## 5.7 Sonuç ve Gelecek Çalışmalar

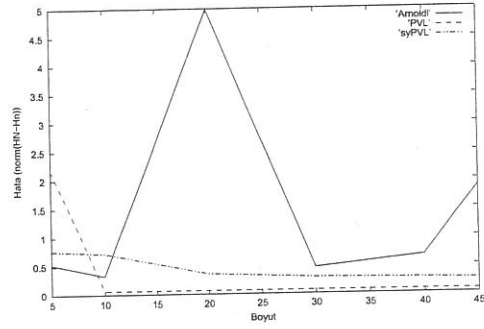
VLSI devrelerinde arabağlantı devrelerinin taşıdığı önem gözönüne alındığında tasarım öncesi bu yapıların etkilerinin yapılan benzetim çalışmalarına eklenmesi kaçınılmaz bir durumdur. Bu eklenti sırasında yararlanılabilecek çok önemli bir nitelik, arabağlantı devrelerinin doğrusal devreler olarak modellenenbilmeleridir. Doğrusal olarak modellenenbilen arabağlantı devreleri sistem benzetimine doğrusal model indirgeme yöntemleri yardımıyla daha düşük dereceli sistemler olarak eklenebilmekte böylelikle de hesaplama süresinden önemli kazanımlar sağlanabilmektedir.

Bu çalışmada VLSI arabağlantı devrelerinin benzetiminde kullanılan temel yöntemler arasında bir karşılaştırma yapılmıştır. Bu karşılaştırmada etkin ölçüt olarak hesaplama zamanı, doğruluk ve sistem niteliklerini saklama alınmıştır.

AWE yöntemi, sistem momentlerinin oluşturduğu momentler matrisi  $\mathcal{M}$  'in kötü koşullanmışlığı nedeni ile düşük derece ve frekanslarda göreceli olarak iyi sonuçlar vermekte ancak indirgenen sistemin boyutu büyüdükçe cevabı kötüleşmektedir. Bu nedenle doğrudan momentlerin kullanımına dayanan AWE yöntemi yüksek dereceli sistemlerin indirgenmesi için iyi bir yöntem niteliği taşımamaktadır. AWE ile yapılmış olan incelemelerde elde edilen ve momentler matrisinin kötü koşullanmışlığı şekil (5.16) ile gösterilmiştir.



Şekil 5.16: Momentler matrisinin kötü koşullanmışlığı



Şekil 5.17: Boyuta göre hatanın değişimleri

PVL yöntemi ise AWE ile eşdeğer bir hesaplama pahası içermesine karşın sistem momentlerini doğrudan kullanmayarak Lanczos üçbantlaştırma algoritması ile Padé yaklaşımını arasındaki ilişki aracılığı ile indirgeme işlemi yapmaktadır. Bu nedenle de sayısal anlamda AWE yöntemine kıyasla çok daha kararlı bir yöntemdir. PVL'in tıkanıdığı önemli noktalardan biri sistem hatası ile indirgeme derecesi arasında doğrudan bir ilişki olmamasıdır. Ayrıca PVL sistemin pasifliğini saklama konusunda garanti vermez. İndirgenmiş sistem, gerçek sistem pasif olmasına karşın aktif olabilir. Ancak sistemin kararlılığını saklar. Ayrıca sistem simetrik bir sistem olursa simetrik Lanczos algoritmasını kullanan syPVL yöntemi kullanılarak sistemin simetrisi saklanabilir.

Arnoldi algoritmasına dayanan model indirgeme yöntemlerinde ise karşılaşılabilecek önemli bir sorun tek taraflı bir Krylov altuzayı oluşturması nedeni ile sistem cevabı ile örtüşememe sorunudur. Çift taraflı bir Arnoldi algoritması kullanılması ise indirgeme işleminin hesap pahasına yapacağı olumsuz etkiden dolayı tercih edilen bir yaklaşım değildir. Bunun yerine daha farklı yaklaşımlar geliştirilmiştir. Arnoldi tabanlı yöntemlerin en önemli getirisi ise sistemin pasiflik niteliğini saklamalarıdır. PVL, SyPVL ve Arnoldi yöntemlerinde oluşacak olan hata oluşumları ise şekil 5.17 ile verilmiştir.

TBR yaklaşımına dayalı model indirgeme yöntemleri hesaplama pahası açısından daha önce bahsedilen tüm yöntemlerden daha pahalı bir yöntemdir. İki adet

Lyapunov eşitliği çözümlü ve bir tekil değer ayrıştırması gerektirir. Ancak hata ile indirgenme derecesi arasında matematiksel olarak belirli bir hata sınırı taşır. Bu nedenle gereksinim duyulan duyarlılık sınırına dek indirgeme yapılmasına izin verir. Ancak bu yöntem ile kararsız bir sistemin indirgenmesi sırasında Lyapunov eşitlikleri kullanılamaz. Dolayısıyla geliştirilmiş olan yaklaşımların hiçbirinde kararsız bir sistemin indirgenmesi mümkün olmamaktadır.

Herbir yöntemin taşıdığı farklı olumlu ve olumsuz nitelikler gözönüne alındığında sistemin ihtiyacına göre bir indirgeme yöntemi seçilmesinin gerekliliği ortaya çıkmaktadır. Varsayımsal olarak gözönüne alınabilecek hata sınırı kesin olarak belirli ise buna uygun bir TBR kullanılabilirken, pasifliğin saklanması önem taşıyorsa Arnoldi tabanlı yöntemler kullanılabilir.

Tüm bu durumlar gözönüne alındığında melez bir yöntemin kurulabilirliği ya da doğrusal olmayan indirgeme yöntemlerinin VLSI ya da ULSI devrelerinin analizinde uygulanış teknikleri henüz kesin sınırları çizilmemiş araştırma alanlarıdır.

## KAYNAKLAR

- [1] **Ruehli, A. E.**, Circuit Analysis, Simulation and Design, *North Holland*, New York, 1986.
- [2] **Freund, R. W.**, Krylov Subspace Iterations for Reduced-Order Modeling in VLSI Circuit Simulation, Tech. Report, *Bell Laboratories*, Murray Hill.
- [3] **Feldmann, P. and Freund, R. W.**, Numerical Simulation of Electronic Circuits: State-of-the-Art Techniques and Challenges, Lecture Notes (<http://cm.bell-labs.com/cm/cs/who/freund/notes.ps.gz>).
- [4] **Bai, Z., Feldmann, P. and R. W. Freund**, How to Make Theoretically Passive Reduced-order Models Passive in Practice. *Proc. IEEE 1998 Custom Int. Circ. Conf.*, pp. 207-210.
- [5] **Van der Meijs, N. P. and Smedes T.**, Accurate Interconnect Modeling: Towards Multi-million Transistor Chips As Microwave Circuits. *Int. Conf. On CAD, Proc. of ICCAD'96* pp. 244-251, 1996.
- [6] **Bai, Z., Dewilde, P. W. and Freund, R. W.**, Reduced Order Modeling, Tech. Report, *Bell Laboratories*, Murray Hill, New Jersey, 2002.
- [7] **Pillage, L. T., Rohrer, R. A.**, Asymptotic Waveform Evaluation for Timing Analysis, *IEEE Trans. on CAD*, **9**, pp. 352-366, 1990.
- [8] **Skoogh, D.**, Krylov Subspace Methods for Linear Systems, Eigenvalues and Model Order Reduction, Tech. Rep., *Department of Mathematics*, Göteborg, 1997.
- [9] **Dooren, P. V.**, The Lanczos Algorithm and Padé Approximations, Notes, *Dept. Math. Eng. Universite Catholique de Louvain*, 1995.
- [10] **Feldmann P. and Freund, R. W.**, Efficient Linear Circuit Analysis by Padé Approximation via the Lanczos Process, *IEEE Trans. Computer-Aided Design*, vol. 14, pp. 639-649.
- [11] **Freund, R. W. and Feldmann, P.**, Reduced-order Modeling of Large Passive Linear Circuits by Means of the SyPVL Algorithm, *Tech. Dig. 1996 IEEE/ACM Int. Conf. on CAD*, pp. 280-287, 1996.
- [12] **Freund, R. W. and Feldmann, P.**, Reduced-Order Modeling of Large Linear Passive Multi-terminal Circuits Using Matrix-Pade Approximation, Tech. Report, *Bell Laboratories*, Murray Hill, New Jersey, 1997.

- [13] **Silveria, L. M., Kamon, M., Elfadel, I. and White, J.**, A Coordinate-Transformed Arnoldi Algorithm for Generating Guaranteed Stable Reduced-Order Models of RLC Circuits, *Int. Conf. On CAD, Proc. of ICCAD'96*.
- [14] **Li, R.**, Model Reduction of Large Linear Systems via Low Rank System Gramians, Ph.D. thesis, M. I. T. (2000).
- [15] **Su, Q., Balakrishnan, V. and Koh, C. K.**, Efficient Approximate Balanced Truncation of General Large-Scale RLC Systems via Krylov Methods, *Proc. of VLSID*, 2002.
- [16] **Wang, J. M., Kuh, E.**, Passive Model Order Reduction Algorithm Based on Chebyshev Expansion of Impulse Response of Interconnect Networks. *In Proc. Design Automation Conf.*, p. 520-525, June 2000.
- [17] **Chen, Y., Balakrishnan, V., Koh, C. K. and Roy, K.**, Model Reduction in the Time-Domain Using Laguerre Polynomials and Krylov Methods, *Proc. Of Design, Automation and Test in Europe Conf.*, 2002.
- [18] **Vlach, J. and Singhal K.**, Computer Methods for Circuit Analysis and Design, *Van Nostrand Reinhold*, New York, second edition, 1993.
- [19] **Petkov, P. Hr., Christov, H. N. and Konstantinov, M. M.** Computational Methods for Linear Control Systems, *Prentice Hall*, New York, 1991.
- [20] **Bartkovjak, J. and Karavičová, M.**, Approximation by Rational Functions, *Measurement Science Review*, Vol:1, No: 1, 200, 2001.
- [21] **Saad, Y.**, Iterative Methods for Sparse Linear Systems, PWS, 1996.
- [22] **Sleijpen, G. L. G. and Van der Vorst, H. A.**, Optimal Iteration Methods for Large Linear Systems of Equations, *Proceedings of Numerical Advection Difussion*, University of Utrecht, 1993.
- [23] **Baley, D. L.**, Krylov Subspace Methods on State-Space Control Models, Tech. Report, *University of Minnesota*, 1994.
- [24] **Freund, R. W., Gutknecht, M. H. and Nachtigal, N. M.**, An Implementation of the Look-ahead Lanczos Algorithm for Non-hermitian Matrices, part1, math. num. analy. report 90-10, M. I. T., 1990.
- [25] **Saleh, R. and White, J.**, Fast-Cap: A Multipole-Accelerated 3-D Capacitance Extraction Program, *IEEE Transactions on Computer-Aided Design*, vol.10, no. 10, November 1991, p. 1447-1459.
- [26] **Tewksbury, S. K.**, Microelectronic System Interconnections: Performance and Modelling, *IEEE Press*, New York, 1995.
- [27] **Bai, Z.**, Krylov Subspace Techniques for Reduced-order Modeling of Large-scale Dynamical Systems, *Applied Numerical Mathematics*, Elsevier, 43, pp. 9-44, 2002.

- [28] **Pillage, L. T., Rohrer, R. A. and Visweswariah, C.**, *Electronic Circuit and System Simulation Methods*, McGraw-Hill, New York, 1995.
- [29] **Lee, J. Y., Huang, X. and Rohrer, R. A.**, Pole and Zero Sensitivity Calculation in Asymptotic Waveform Evaluation, *IEEE Transactions on Computer-Aided Design*, Vol: 11, No:5, pp.586-597, May 1992.
- [30] **Felddmann, P. and Freund, R. W.**, Reduced Order Modeling of Large Linear Subcircuits via A Block Lanczos Algorithm, *32nd ACM/IEEE Design Automation Conference (DAC)*, 1995.
- [31] **Odabaşioğlu, A., Çelik, M. and Pillegi L. T.**, PRIMA: Passive Reduced-order Interconnect Macro-modelling Algorithm. *Tech. Dig. 1997 IEEE/ACM Int. Conf. on CAD*, pp. 58-65.
- [32] **Li, J. R. and White, J.**, Efficient Model Reduction via Approximate System Gramians, *Proc. of IEEE/ACM Int. Conf. On Computer-aided Design*, IEEE Press, New York, pp. 380-384, 1999.
- [33] **Chahlaoui, Y. and Dooren, P. V.**, A Collection of Benchmark Examples for Model Reduction Time Invariant Dynamical Systems, *SLICOT Tech. Notes*, 2002.
- [34] **Grimme, E. J.**, Krylov Projection Methods for Model Reduction, Ph.D. Thesis, University of Illionis, 1997.

## ÖZGEÇMİŞ

1978 yılında Turhal'da doğdu. 1994 yılında ortaöğretimini tamamladıktan sonra Uludağ Üniversitesi Mühendislik Mimarlık Fakültesi Elektronik Mühendisliği bölümüne girdi. 2000 yılında lisans eğitimini bitirdi. Aynı yıl İstanbul Teknik Üniversitesi Bilişim Enstitüsü Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik Yüksek Lisans Programına girdi. Halen bu bölümde eğitimini sürdürmektedir.