

T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

NEWTONYEN OLMAYAN SUMUDU DÖNÜŞÜMÜ VE BAZI
UYGULAMALARI

YÜKSEK LİSANS

Nagihan DİNÇ

HAZİRAN-2023
GÜMÜŞHANE



**T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**NEWTONYEN OLMAYAN SUMUDU DÖNÜŞÜMÜ VE BAZI
UYGULAMALARI**

NON-NEWTONIAN SUMUDU TRANSFORM AND SOME APPLICATIONS

YÜKSEK LİSANS

Nagihan DİNÇ

**HAZİRAN-2023
GÜMÜŞHANE**



T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

NEWTONYEN OLMAYAN SUMUDU DÖNÜŞÜMÜ VE BAZI
UYGULAMALARI

NON-NEWTONIAN SUMUDU TRANSFORM AND SOME APPLICATIONS

YÜKSEK LİSANS

Nagihan DİNÇ

Danışman: Doç. Dr. Nihan GÜNGÖR

HAZİRAN-2023
GÜMÜŞHANE

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI

Yüksek Lisans Tezi olarak hazırlamış olduğum “**Newtonyen Olmayan Sumudu Dönüşümü ve Bazı Uygulamaları**” isimli bu tezimin, tamamen kendi çalışmam olduğunu, her alıntıya kaynak gösterdiğimi, alıntı yaptığım tüm çalışmalarını kaynakçada belirttiğimi ve Gümüşhane Üniversitesi'nin lisanslı kullanıcısı olduğu intihal yazılım programı ile Lisansüstü Eğitim Enstitüsü'nün belirlediği kıstaslara uygun olarak raporladığımı taahhüt ederim. Tezimin kâğıt ve elektronik kopyalarının Gümüşhane Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü arşivinde saklanmasına izin verdiğimi onaylarım.

Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili maddeleri uyarında gereğinin yapılmasını arz ederim.

15/06/2023

.....
Nagihan DİNÇ

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimimde danışmanlık yaptığı süreç boyunca tez konusunun belirlenmesinden başlayarak, tez çalışmasının her adımında desteğini hiç esirgemeyen, her türlü soru ve sorununda bilgi ve deneyimiyle yönlendiren ve bana matematiği bir kez daha sevdiren değerli danışman hocam Doç. Dr. Nihan GÜNGÖR' e çok teşekkür ederim.

Hayatımın her anında her daim yanımda olan ve desteklerini hiç esirgemeyen aileme ve bana inanıp teşvik eden, bu yola beraber çıktığım en büyük destekçim eşime teşekkür ederim.

Nagihan DİNÇ
GÜMÜŞHANE-2023

ÖZET

Bu çalışmanın amacı klasik kalkülüste tanımlanan Sumudu dönüşümünü Newtonyen olmayan kalkülüse genişletmek ve bu Newtonyen olmayan Sumudu dönüşümü yardımıyla uygulamalı matematikte bazı problemlere alternatif bir çözüm yöntemi kazandırmaktır.

Beş bölümden oluşan bu çalışmanın birinci bölümünde; Sumudu dönüşümü ve Newtonyen olmayan kalkülüs ile ilgili şimdiye kadar gerçekleştirilen çalışmalar hakkında bilgi verilmiştir. İkinci bölümde; Newtonyen olmayan kalkülüs tanıtılarak, ihtiyaç duyulacak temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Tez çalışmasını oluşturan bulgulara üçüncü ve dördüncü bölümde yer verilmiştir. Üçüncü bölümde Newtonyen olmayan kalkülüse göre Sumudu dönüşümü tanımlanarak klasik Sumudu dönüşümü tanımı genelleştirilmiş, tanımlanan Newtonyen olmayan Sumudu dönüşümünün varlığı için gerekli koşullar incelenmiş ve bazı temel özellikleri ispatlanmıştır. Dördüncü bölümde ise elde edilen bu özelliklerden yararlanılarak Newtonyen olmayan diferansiyel denklemler ve Newtonyen olmayan diferansiyel denklem sistemleri ile ilgili uygulamalar yapılmıştır.

Son olarak beşinci bölümde bu tezde elde edilen bulgular ifade edilip değerlendirilmiş ve önerilere yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Sumudu dönüşümü, Newtonyen olmayan kalkülüs, Newtonyen olmayan Sumudu dönüşümü, Newtonyen olmayan diferansiyel denklemler, Newtonyen olmayan diferansiyel denklem sistemleri.

SUMMARY

The aim of this paper is to extend the Sumudu transformation defined in classical calculus to non-Newtonian calculus and to provide an alternative solution method to some problems in applied mathematics with the help of this non-Newtonian Sumudu transformation.

In the first part of this study, which consists of five chapters, information is given about the studies on Sumudu transformation and non-Newtonian calculus so far. In the second part, non-Newtonian calculus is introduced and basic definitions and theorems are given.

The findings of the thesis are presented in the third and fourth chapters. In the third section, the classical definition of the Sumudu transform is generalized by defining the Sumudu transform according to non-Newtonian calculus, the necessary conditions for the existence of the defined non-Newtonian Sumudu transform are examined and some basic properties are proved. In the fourth section, these properties are utilized in the applications of non-Newtonian differential equations and systems of non-Newtonian differential equations.

Finally, in the fifth chapter, the findings obtained in this thesis are expressed and evaluated and recommendations are given.

Keywords: Sumudu transform, Non-Newtonian calculus, Non-Newtonian Sumudu transform, Non-Newtonian differential equations, Systems of non-Newtonian differential equations.

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY	III
BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI.....	IV
TEŞEKKÜR.....	V
ÖZET.....	VI
SUMMARY	VII
İÇİNDEKİLER	VIII
TABLolar DİZİNİ	IX
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	X
1. GİRİŞ.....	1
2. GENEL BİLGİLER	5
2.1. α - Aritmetik	5
2.2. *- Kalkülüs	10
3. NEWTONYEN OLMAYAN SUMUDU DÖNÜŞÜMÜ	18
3.1. Newtonyen Olmayan Sumudu Dönüşümünün Tanımı ve Varlığı	18
3.2. Bazı Temel Fonksiyonların Newtonyen Olmayan Sumudu Dönüşümleri.....	24
3.3. Newtonyen Olmayan Sumudu Dönüşümünün Özellikleri.....	32
3.4. Newtonyen Olmayan Ters Sumudu Dönüşümü.....	47
4. NEWTONYEN OLMAYAN SUMUDU DÖNÜŞÜMÜNÜN UYGULAMALARI.....	49
4.1. Newtonyen Olmayan Diferansiyel Denklemlere Uygulaması.....	49
4.2. Newtonyen Olmayan Diferansiyel Denklem Sistemlerine Uygulaması.....	59
5. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME.....	64
KAYNAKÇA.....	65
ÖZGEÇMİŞ	67

TABLolar DİZİNİ

Tablo 1. *-Kalkülüs.....	10
Tablo 2. Kalkülüs çeşitleri.....	11
Tablo 3. Bazı fonksiyonların Newtonyen olmayan Sumudu dönüşümü.....	32
Tablo 4. Bazı fonksiyonların Newtonyen olmayan ters Sumudu dönüşümü.....	48



SİMGELER VE KISALTMALAR

- \exists : En az bir
- \forall : Her
- \mathbb{N} : Doğal sayılar kümesi
- \mathbb{R} : Reel sayılar kümesi
- \mathbb{R}_α : α - Reel sayı kümesi
- \mathbb{Z}_α : α -Tamsayılar Kümesi
- $\dot{\leq}$: α -sıralama
- $| \cdot |_\alpha$: α -mutlak
- $!_\alpha$: α -aritmetiğe göre faktöriyel
- $\sqrt{-\alpha}$: α -karekök
- $[v, v]$: α -aralık
- $*M_v^\nu$: $[v, \nu]$ α -aralığı üzerinde *-ortalama
- * lim : Yıldız limit
- * D : Yıldız türev
- * \int : Yıldız integral

1. GİRİŞ

Doğada gözlemlediğimiz hayatımıza etki eden ve yaşamımızı yönlendiren birçok fiziksel değişim, bilimsel olay ve buna bağlı olarak birçok fizik ve mühendislik problemi bulunmaktadır. Bu problemlerin çözümü için modellemeye ihtiyaç vardır. Diferansiyel denklemler, çözmek istediğimiz bu problemleri modelleyip, daha basit ve anlaşılabilir duruma indirgemekle birlikte olayların doğasına inebilmede ve çözüm bulmakta kullanılır. Özellikle diferansiyel denklemler ile elektromanyetik, ısı ve ışık akışı, radyo, elektrik, su, ses dalgaları, deprem, gazların yayılımı, çevrebilim gibi birçok fiziksel olaylar modellenenir. Bu kadar geniş bir uygulama alanına sahip olan diferansiyel denklemler için birçok analitik ve yaklaşık çözüm yöntemleri geliştirilmiştir.

İntegral dönüşümleri, yüzyıllar boyunca diferansiyel ve integral denklemleri çözmek için kullanılmış matematiksel araçlardır. Bunun için en tipik olanları Fourier ve Laplace olmak üzere birçok integral dönüşümü diferansiyel denklemlerin çözümü için kullanılmıştır.

Bu yöntemlere alternatif olarak

$$A = \{f(t): \exists M, \tau_1, \tau_2 > 0, |f(t)| < Me^{|\tau_j|t}, t \in (-1)^j \times [0, \infty)\}$$

şeklinde tanımlanan A kümesinden alınan bir fonksiyon için M sabit sonlu sayı, τ_1 ve τ_2 sonlu veya sonsuz sabit sayılar, $u \in (-\tau_1, \tau_2)$ olmak üzere S operatörü ile gösterilen Sumudu dönüşümü,

$$S[f(t)] = \int_0^{\infty} \frac{1}{u} e^{-\frac{t}{u}} f(t) dt$$

integral denklemleri formunda Watugala tarafından literatüre kazandırılmıştır (Watugala, 1993).

Weerakoon, 1994 yılında Sumudu dönüşüm yöntemini kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanmıştır (Weerakoon, 1994).

Watugala kontrol mühendisliğinde kullanılan diferansiyel denklemlerin çözümü için Sumudu dönüşüm yöntemini kullanmıştır (Watugala, 1998). Bunun ardından

Weerakoon 1998 yılında karmaşık sayılarda kullanılan ters Sumudu dönüşüm yöntemini tanımlamıştır (Weerakoon, 1998).

Weerakoon, 1997 yılında Laplace dönüşümü ile Sumudu dönüşüm yöntemi arasında farkı göstermiştir (Weerakoon, 1997). Belgacem ve arkadaşları 2003 yılında Sumudu dönüşümünün Laplace dönüşümü ile bağlantısından yararlanarak yöntemin uygulama alanını genişletmişlerdir (Belgacem vd., 2003).

Bhat ve arkadaşları çarpımsal Sumudu dönüşümünü tanımlayarak özelliklerini ispatlamış ve bazı çarpımsal diferansiyel denklemlerin çözümlerini bulmak için bu dönüşümden yararlanmışlardır (Bhat vd., 2019).

Güngör çarpımsal Sumudu dönüşümü yardımıyla, Faltung tipi çarpımsal Volterra integral denklemlerinin ve Faltung tipi çarpımsal Volterra integro-diferansiyel denklemlerinin çözümünü incelemiştir (Güngör, 2022a).

Grossman ve Katz, 1967-1970 yılları arasında Newton ve Leibniz tarafından oluşturulan klasik kalkülüse alternatif olarak yeni bir kalkülüs tanımlamışlardır ve bu konu da bir dizi çalışmaları bulunmaktadır. Bu çalışmaların ardından 1972 yılında Newtonyen olmayan kalkülüsün temellerini oluşturan kitapları yayınlanmıştır (Grossman ve Katz, 1972). Önce klasik, geometrik kuadratik ve harmonik kalkülüsü içeren kalkülüsün bir ailesini tanımlamışlar ve ardından bikuadratik, biharmonik ve bigeometrik kalkülüsü oluşturmuşlardır. Klasik kalkülüsten farklı olarak sınıfların tümünü içine alan bu yeni yapıya Newtonyen olmayan kalkülüs adı verilmiştir. Newtonyen olmayan kalkülüs yerine *-kalkülüs ifadesi de kullanılmaktadır. Klasik kalkülüste kullanılan tüm kavramların, Newtonyen olmayan kalkülüsün içinde karşılığı vardır. Newtonyen olmayan kalkülüsün mühendislik, fen bilimleri ve matematik gibi birçok uygulama alanı bulunmaktadır. Uygulama alanlardan bazıları ekonomide esneklik teorisi, faiz oranları, kanın akışkanlığı, görüntü işleme ve yapay zekayı içeren bilgisayar bilimi; biyoloji; diferansiyel denklemler; fonksiyonel analiz; olasılık teorisi şeklinde ifade edilebilir.

Mcginniss 1980 yılında Newtonyen olmayan kalkülüs ile yapılan çalışmada insanların davranışı ve yapılan seçimlere yorumlanmış olasılık teorisini oluşturmuştur (Mcginniss, 1980).

Grossmann 1983 yılında bigeometrik kalkülüs ile yapılan çalışmada ölçüden bağımsız türev konusunu incelemiştir (Grossman, 1983).

Bashirov, Mısırlı ve Özyapıcı tarafından 2008 yılında geometrik kalkülüs ve bazı uygulamaları üzerine çalışmalar yapılmıştır (Bashirov vd., 2008).

Türkmen ve Başar geometrik kalkülüste reel dizi uzaylarını incelemiştir (Türkmen ve Başar, 2012). Çakmak ve Başar ise Newtonyen olmayan kalkülüste dizi uzayları üzerinde çalışmışlardır. (Çakmak ve Başar, 2012).

Filip ve Piatecki, Newtonyen olmayan kalkülüsü kullanarak ekonomideki Slow-Swan büyüme modelini yeniden doğrulamış ve analiz etmişlerdir (Filip ve Piatecki, 2014).

Çakmak ve Başar çift katlı integrali Newtonyen olmayan kalkülüste tanımlamıştır (Çakmak ve Başar, 2014).

Duyar ve arkadaşları Newtonyen olmayan reel eksende bazı temel topolojik özellikleri elde etmiştir (Duyar vd., 2015).

Kadak ve Özlük adi diferansiyel denklemler için kullanılan Runge-Kutta yöntemini Newtonyen olmayan kalkülüse aktararak uygulamasını incelemiştir (Kadak ve Özlük, 2015).

Erdoğan ve Duyar Newtonyen olmayan kalkülüste has olmayan integrali tanıtmış ve bunların yakınsama koşullarını incelemiştir (Erdoğan ve Duyar, 2018).

Sağır ve Erdoğan Newtonyen olmayan kalkülüste fonksiyon dizi ve serileri ile bu fonksiyonların yakınsaklığını incelemiştir (Sağır ve Erdoğan, 2019).

Güngör *-integrali kullanarak Newtonyen olmayan Fredholm integral denklemlerini tanımlamış ve ardışık yaklaşımlar yöntemi ile lineer Newtonyen olmayan Fredholm integral denklemlerin çözümünün tekliği için gerekli koşulları incelemiştir (Güngör, 2020a). Güngör Newtonyen olmayan Laplace dönüşümünü tanımlamış, bu dönüşümün varlığı için gerekli koşulları ve özelliklerini incelemiştir (Güngör, 2020b).

Boruah ve arkadaşları bigeometrik diferansiyel denklemlerin sayısal yöntemlerle çözümünü incelemiştir (Boruah vd., 2021).

Güngör 2022 yılında Newtonyen olmayan kalkülüste Volterra integral denklemlerini tanımlamış; çözücü çekirdek metodu, ardışık yaklaşım metodu ve Adomian ayrıştırma metodunu Newtonyen kalkülüse aktararak bu denklemlerin çözümünü irdilemiştir (Güngör, 2022c).

Bu tez çalışmasında, ilk olarak has olmayan *-integralden faydalanılarak Sumudu dönüşümünün tanımı Newtonyen olmayan kalkülüse aktarıldı. Newtonyen olmayan Sumudu dönüşümünün varlığı için gerekli koşullar irdelendi ve tanımı yardımıyla bazı temel fonksiyonların Newtonyen olmayan Sumudu dönüşümleri bulundu. Newtonyen olmayan Sumudu dönüşümünün temel özellikleri ispatlandı ve bu özellikler

örneklendirmeler ile pekiştirildi. Son kısımda ise bulunan bu özelliklerden faydalanılarak Newtonyen olmayan diferansiyel denklem ve denklem sistemlerine alternatif çözüm yolu geliştirildiği, sayısal örneklerle gösterildi.



2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde tez çalışmasının temelini oluşturan Newtonyen olmayan kalkülüs tanıtılacak ve bu teori ile ilgili temel tanım, teorem ve özelliklere yer verilecektir.

2.1. α - Aritmetik

Aritmetik, tanım kümesi reel sayıların bir alt kümesi olan bir sıralı cisimdir. Aritmetik sistem ise bu cismin üzerinde tanımlı cebirsel işlemlerle elde edilen yapıya denilmektedir.

Tanım 2.1.1. Tanım kümesi \mathbb{R} ve görüntü kümesi de \mathbb{R} kümesinin bir alt kümesi olan bire bir fonksiyona üreteç denir. e^v fonksiyonu, v^3 fonksiyonu ve I birim fonksiyonu üreteç fonksiyonuna birer örnektirler. Her bir üreteç tek bir aritmetik ürettiği gibi her aritmetikte tek bir üreteç yardımıyla üretilir. Görüntü kümesi A olan α üretici göz önüne alındığında, her $u, v \in A$ için;

$$\alpha\text{-toplama } u \dot{+} v = \alpha\{\alpha^{-1}(u) + \alpha^{-1}(v)\}$$

$$\alpha\text{-çıkarma } u \dot{-} v = \alpha\{\alpha^{-1}(u) - \alpha^{-1}(v)\}$$

$$\alpha\text{-çarpma } u \dot{\times} v = \alpha\{\alpha^{-1}(u) \times \alpha^{-1}(v)\}$$

$$\alpha\text{-bölme } (v \neq 0) u \dot{/} v = \alpha\{\alpha^{-1}(u)/\alpha^{-1}(v)\}$$

$$\alpha\text{-sıralama } u \dot{<} v \Leftrightarrow \alpha^{-1}(u) < \alpha^{-1}(v)$$

işlemlerini ve sıralama bağıntısını sağlayan α üretici α -aritmetik olarak adlandırılır (Grossman ve Katz, 1972).

Örneğin, üreteç fonksiyonu $\alpha = \exp$ olarak seçilirse

$$\begin{aligned} \alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\exp} = \mathbb{R}^+ & \quad \text{ve} \quad \alpha^{-1}: \mathbb{R}_{\exp} \rightarrow \mathbb{R} \\ v \mapsto \alpha(v) = e^v & \quad v \mapsto \alpha^{-1}(v) = \ln v \end{aligned}$$

olması anlamına gelir. Her $u, v \in \mathbb{R}_{\exp}$ için

$$\alpha\text{-toplama } u \dot{+} v = \alpha\{\alpha^{-1}(u) + \alpha^{-1}(v)\} = e^{\{\ln u + \ln v\}} = u \cdot v$$

$$\alpha\text{-çıkarma } u \dot{-} v = \alpha\{\alpha^{-1}(u) - \alpha^{-1}(v)\} = e^{\{\ln u - \ln v\}} = u \div v, v \neq 0$$

$$\alpha\text{-çarpma } u \dot{\times} v = \alpha\{\alpha^{-1}(u) \times \alpha^{-1}(v)\} = e^{\{\ln u \times \ln v\}} = u^{\ln v} = v^{\ln u}$$

$$\alpha\text{-bölme } v \dot{\div} v = \alpha\{\alpha^{-1}(v)/\alpha^{-1}(v)\} = e^{\{\ln v \div \ln v\}} = v^{\frac{1}{\ln v}}, v \neq 1.$$

şeklinde tanımlanır. Bu şekilde birebir ve örten olan \exp fonksiyonu ile üretilen aritmetiğe geometrik aritmetik adı verilir.

Birim üreteç, her v reel sayısı için $I(v) = v$ şeklinde tanımlanan, I birim fonksiyonudur. Birim üreteç kullanılarak oluşturulan aritmetik ile klasik aritmetik üretilir.

Tanım 2.1.2. $\dot{0} \dot{<} v$ olan sayılar α -pozitif, $v \dot{<} \dot{0}$ olanlara da α -negatif denilir. α -sıfır $\alpha(0) = \dot{0}$ ve α -bir $\alpha(1) = \dot{1}$ şeklinde ifade edilir. Burada α -tamsayılar, $\dot{0}$ dan ve $\dot{0}$ sayısına $\dot{1}$ in art arda α -toplamı ile eklenmesiyle ve $\dot{0}$ sayısından ardışık olarak $\dot{1}$ sayısının α -çıkarma ile çıkarılması ile elde edilen sayılardır. Ayrıca burada bahsedilen α -tamsayılar

$$\dots, \alpha(-3), \alpha(-2), \alpha(-1), \alpha(0), \alpha(1), \alpha(2), \alpha(3), \dots$$

olarak tanımlanır.

α -aritmetiğe göre her n tamsayısı, $\dot{n} = \alpha(n)$ şeklinde gösterilir.

α -pozitif tamsayısı olan \dot{n} ise $\dot{n} = \dot{1} \dot{+} \dots \dot{+} \dot{1}$ olarak ifade edilir (Grossman ve Katz, 1972).

Tanım 2.1.3. Her $n \in \mathbb{N}$ için α -aritmetik faktöriyel $\dot{n}!_{\alpha}$ ile gösterilir ve

$$\dot{n}!_{\alpha} = \dot{1} \dot{\times} \dot{2} \dot{\times} \dots \dot{\times} \dot{n} = \alpha(1) \dot{\times} \alpha(2) \dot{\times} \dots \dot{\times} \alpha(n) = \alpha(n!)$$

şeklinde tanımlanır (Grossman ve Katz, 1972).

Tanım 2.1.4. Newtonyen olmayan reel sayıların kümesi $\mathbb{R}_{\alpha} := \{\alpha(v) : v \in \mathbb{R}\}$ şeklinde tanımlanır.

$\mathbb{R}_{\alpha}^{+} := \{\alpha(v) : v \in \mathbb{R}^{+}\}$ ile Newtonyen olmayan pozitif reel sayı kümesi ve $\mathbb{R}_{\alpha}^{-} := \{\alpha(v) : v \in \mathbb{R}^{-}\}$ ile Newtonyen olmayan negatif reel sayı kümesi gösterilir.

\mathbb{R}_{α} kümesi için $\dot{+}$ (α -toplam) ile $\dot{\times}$ (α -çarpım) ikili işlemleri ve $\dot{\leq}$ α -sıralama bağıntısı

$$\begin{aligned} \dot{+} : \mathbb{R}_{\alpha} \times \mathbb{R}_{\alpha} &\rightarrow \mathbb{R}_{\alpha} \\ (v, v) &\rightarrow v \dot{+} v = \alpha\{\alpha^{-1}(v) + \alpha^{-1}(v)\} \end{aligned}$$

$$\dot{\times} : \mathbb{R}_\alpha \times \mathbb{R}_\alpha \rightarrow \mathbb{R}_\alpha$$

$$(v, v) \rightarrow v \dot{\times} v = \alpha\{\alpha^{-1}(v) \times \alpha^{-1}(v)\}$$

$$\dot{\leq} : v, v \in \mathbb{R}_\alpha, v \dot{\leq} v \Leftrightarrow \alpha^{-1}(v) \leq \alpha^{-1}(v)$$

şeklinde tanımlanabilir (Grossman ve Katz, 1972).

Teorem 2.1.5. $(\mathbb{R}_\alpha, \dot{+}, \dot{\times}, \dot{\leq})$ tam sıralı bir cisimdir (Çakmak ve Başar, 2012).

Önerme 2.1.6. $v, v, w, z \in \mathbb{R}_\alpha$ olmak üzere aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır:

$$\text{i) } v \dot{\leq} v \text{ ise } v \dot{+} w \dot{\leq} v \dot{+} w \text{ ve } v \dot{-} w \dot{\leq} v \dot{-} w,$$

$$\text{ii) } v \dot{\leq} v \text{ ve } w \dot{\leq} z \text{ ise } v \dot{+} w \dot{\leq} v \dot{+} z \text{ ve } v \dot{-} w \dot{\leq} v \dot{-} z,$$

$$\text{iii) } v \dot{\leq} v \text{ ve } \dot{0} < w \text{ ise } v \dot{\times} w \dot{\leq} v \dot{\times} w \text{ ve } \frac{v}{w} \alpha \dot{\leq} \frac{v}{w} \alpha,$$

$$\text{iv) } \dot{0} < v, v \text{ ve } v \dot{\leq} v \text{ ise } \frac{1}{v} \alpha \dot{\leq} \frac{1}{v} \alpha,$$

$$\text{v) } v \dot{\leq} v \text{ ise } \dot{0} \dot{-} v < \dot{0} \dot{-} v$$

(Grossman ve Katz, 1972).

Tanım 2.1.7. $A \subset \mathbb{R}_\alpha$ kümesindeki bir v sayının α -karesi $v^{2\alpha}$ ile gösterilir ve $v^{2\alpha} = v \dot{\times} v$ ile hesaplanır.

$A \subset \mathbb{R}_\alpha$ kümesindeki bir v sayısının α -karekökü, α -karesi v ya eşit olan α -negatif olmayan sayıdır. Bir v sayısının α -karekökü \sqrt{v}^α ile gösterilir. Yani

$$\sqrt{v}^\alpha = x \Leftrightarrow x^{2\alpha} = v$$

olur. Burada

$$x = \sqrt{v}^\alpha = \alpha \left\{ \sqrt{\alpha^{-1}(v)} \right\}$$

ile tanımlıdır.

$v \in \mathbb{R}_\alpha$ için n . Newtonyen olmayan üssü, $v^{n\alpha}$ ve r . Newtonyen olmayan kökü $\sqrt[r]{v}^\alpha$ şeklinde gösterilirler.

$$\begin{aligned}
v^{2\alpha} &= v \dot{\times} v = \alpha\{\alpha^{-1}(v) \times \alpha^{-1}(v)\} = \alpha\{[\alpha^{-1}(v)]^2\} \\
v^{3\alpha} &= v^{2\alpha} \dot{\times} v = \alpha\{\alpha^{-1}\{\alpha\{\alpha^{-1}(v) \times \alpha^{-1}(v)\}\} \times \alpha^{-1}(v)\} = \alpha\{[\alpha^{-1}(v)]^3\} \\
&\vdots \\
v^{n\alpha} &= v^{(n-1)\alpha} \dot{\times} v = \alpha\{[\alpha^{-1}(v)]^n\}
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir (Grossman ve Katz, 1972).

Tanım 2.1.8. $A \subset \mathbb{R}_\alpha$ kümesindeki bir v elemanının α -mutlak değeri

$$|v|_\alpha = \begin{cases} v, v \dot{>} \dot{0} \\ \dot{0}, v = \dot{0} \\ \dot{0} \dot{-} v, v \dot{<} \dot{0} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır (Grossman ve Katz, 1972).

Tanım 2.1.9. A kümesindeki her $v \dot{<} v$ sayısı için

$$\begin{aligned}
\dot{[}v, v\dot{]} &= \{x \in \mathbb{R}_\alpha \mid v \dot{\leq} x \dot{\leq} v\} \\
&= \{x \in \mathbb{R}_\alpha \mid \alpha^{-1}(v) \dot{\leq} \alpha^{-1}(x) \dot{\leq} \alpha^{-1}(v)\} \\
&= \alpha([\alpha^{-1}(v), \alpha^{-1}(v)])
\end{aligned}$$

kümesi kapalı α -aralık olarak adlandırılır ve $\dot{[}v, v\dot{]}$ ile gösterilir. $\dot{[}v, v\dot{]}$ α -aralığının uzunluğu $v \dot{-} v$ kadardır (Grossman ve Katz, 1972).

Tanım 2.1.10. $u, v \in \mathbb{R}_\alpha$ olan u ve v sayıları arasındaki Newtonyen olmayan uzaklık $|u \dot{-} v|_\alpha$ ile tanımlanır (Grossman ve Katz, 1972).

Önerme 2.1.11. $u, v \in \mathbb{R}_\alpha$ sayıları için

$$|u \dot{-} v|_\alpha = |v \dot{-} u|_\alpha$$

şeklinde yazılabilir (Grossman ve Katz, 1972).

İspat: $u, v \in \mathbb{R}_\alpha$ sayıları için

$$|u \dot{-} v|_\alpha = \alpha\{|\alpha^{-1}(u) - \alpha^{-1}(v)|\} = \alpha\{|\alpha^{-1}(v) - \alpha^{-1}(u)|\} = |v \dot{-} u|_\alpha$$

eşitliği elde edilir.

Önerme 2.1.12. $v, w, z \in \mathbb{R}_\alpha$, $n \in \mathbb{N}$ ve $v, z \neq \hat{0}$ olmak üzere aşağıdaki eşitlikler yazılır:

$$\text{i)} \frac{v}{v} \alpha \dot{+} \frac{w}{z} \alpha = \frac{(v \dot{\times} z) \dot{+} (w \dot{\times} v)}{v \dot{\times} z} \alpha$$

$$\text{ii)} \frac{v}{v} \alpha \dot{-} \frac{w}{z} \alpha = \frac{(v \dot{\times} z) \dot{-} (w \dot{\times} v)}{v \dot{\times} z} \alpha$$

$$\text{iii)} \frac{v}{v} \alpha \dot{\times} \frac{w}{z} \alpha = \frac{v \dot{\times} w}{v \dot{\times} z} \alpha$$

$$\text{iv)} w \neq \hat{0} \text{ olmak üzere } \frac{\frac{v}{w} \alpha}{\frac{z}{w} \alpha} = \frac{v}{v} \alpha \dot{\times} \frac{z}{w} \alpha = \frac{v \dot{\times} z}{v \dot{\times} w} \alpha$$

$$\text{v)} \left(\frac{v}{v} \alpha \right)^{n_\alpha} = \frac{v^{n_\alpha}}{v^{n_\alpha}} \alpha$$

$$\text{vi)} (v \dot{\times} v)^{n_\alpha} = v^{n_\alpha} \dot{\times} v^{n_\alpha}$$

$$\text{vii)} v^{2_\alpha} \dot{-} v^{2_\alpha} = (v \dot{+} v) \dot{\times} (v \dot{-} v).$$

Önerme 2.1.13. $v, v \in \mathbb{R}_\alpha$ olmak üzere aşağıdaki özellikler gerçekleşir:

$$\text{i)} |v|_\alpha \leq v \Leftrightarrow \hat{0} \dot{-} v \leq v \leq v$$

$$\text{ii)} |v \dot{\times} v|_\alpha = |v|_\alpha \dot{\times} |v|_\alpha$$

$$\text{iii)} v \neq \hat{0} \text{ olmak üzere } \left| \frac{v}{v} \alpha \right|_\alpha = \frac{|v|_\alpha}{|v|_\alpha} \alpha.$$

Önerme 2.1.14. (Newtoneyen olmayan üçgen eşitsizliği) $v, v \in \mathbb{R}_\alpha$ olmak üzere

$$|v \dot{+} v|_\alpha \leq |v|_\alpha \dot{+} |v|_\alpha$$

eşitsizliği vardır (Çakmak ve Başar, 2012).

Önerme 2.1.15. $v, v \in \mathbb{R}_\alpha$ olsun. O halde

$$||v|_\alpha \dot{-} |v|_\alpha|_\alpha \leq |v \dot{-} v|_\alpha$$

eşitsizliği vardır.

İspat: $v, v \in \mathbb{R}_\alpha$ için 2.1.14 Önermeden yararlanarak

$$|v|_\alpha = |v \dot{-} v \dot{+} v|_\alpha \leq |v \dot{-} v|_\alpha \dot{+} |v|_\alpha \Rightarrow |v|_\alpha \dot{-} |v|_\alpha \leq |v \dot{-} v|_\alpha \quad (1)$$

$$|v|_\alpha = |v \dot{-} v \dot{+} v|_\alpha \leq |v \dot{-} v|_\alpha \dot{+} |v|_\alpha \Rightarrow |v|_\alpha \dot{-} |v|_\alpha \leq |v \dot{-} v|_\alpha \quad (2)$$

(1) ve (2) eşitsizlikleri yazılabilir. Burada (2) numaralı eşitsizlikten

$$\dot{0} \dot{-} |v \dot{-} v|_{\alpha} \leq \dot{0} \dot{-} (|v|_{\alpha} \dot{-} |v|_{\alpha}) \Rightarrow \dot{0} \dot{-} |k \dot{-} v|_{\alpha} \leq |v|_{\alpha} \dot{-} |v|_{\alpha} \quad (3)$$

elde edilir. (1) ve (3) numaralı eşitsizlikleri α -sıralı olarak yazılırsa

$$\begin{aligned} \dot{0} \dot{-} |v \dot{-} v|_{\alpha} &\leq |v|_{\alpha} \dot{-} |v|_{\alpha} \leq |v \dot{-} v|_{\alpha} \\ ||v|_{\alpha} \dot{-} |v|_{\alpha}|_{\alpha} &\leq |v \dot{-} v|_{\alpha} \end{aligned}$$

bulunur.

2.2. *- Kalkülüs

Grossman ve Katz herhangi iki üreteç fonksiyonu yardımıyla *-kalkülüsü tanımlamıştır. *-kalkülüste α -aritmetik genellikle tanım kümesi, β -aritmetik genellikle değer kümesi için kullanılır. Yani *-kalkülüse göre girdileri α -aritmetik üzerinde, çıktıları ise β -aritmetik üzerinde olan fonksiyonlar tanımlanır.

Tanım 2.2.1. α ve β keyfi seçilen üreteçler olsun. * ise aritmetiklerin sıralı ikilisi olarak (α -aritmetik, β -aritmetik) tanımlansın. Bundan sonra **Tablo 1.** deki gösterimler kullanılacaktır.

Tablo 1. *-Kalkülüs (Grossman ve Katz, 1972).

	α -aritmetik	β -aritmetik
Evren	A	B
Toplama	$\dot{+}$	$\ddot{+}$
Çıkarma	$\dot{-}$	$\ddot{-}$
Çarpma	$\dot{\times}$	$\ddot{\times}$
Bölme	$\dot{/}$	$\ddot{/}$
Sıralama	$\dot{<}$	$\ddot{<}$

Seçilen üreteçler keyfi olduğundan 2.1. kısımda α -aritmetik için gösterilen bütün tanımların β -aritmetik için de uygulanabileceği anlaşılabilir.

Tanım 2.2.2. Aşağıda verilen özellikleri gerçekleştiren A dan B ye tanımlı izomorfizma tek bir iota (ι) fonksiyonu ile belirlidir.

- i) ι birebirdir.
- ii) ι fonksiyonu örtendir.
- iii) A kümesindeki herhangi v ve v sayıları için;

$$\begin{aligned}
\iota(v \dot{+} v) &= \iota(v) \dot{+} \iota(v) \\
\iota(v \dot{-} v) &= \iota(v) \dot{-} \iota(v) \\
\iota(v \dot{\times} v) &= \iota(v) \dot{\times} \iota(v) \\
\iota(v \dot{/} v) &= \iota(v) \dot{/} \iota(v), v \neq \dot{0} \\
v \dot{<} v &\Leftrightarrow \iota(v) \dot{<} \iota(v)
\end{aligned}$$

Not 2.2.3. $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow A, \beta: \mathbb{R} \rightarrow B$ olduğundan ι fonksiyonu A kümesinin içinden alınan her v elemanı için $\iota(v) = \beta\{\alpha^{-1}(v)\}$ olarak yazılabilir ve her n tamsayısı için $\iota(\dot{n}) = \dot{n}$ yazılır.

Ayrıca, $v \dot{+} v = \iota^{-1}\{\iota(v) \dot{+} \iota(v)\}$ şeklinde yazılabileceğinden α -aritmetikteki bir ifade kolaylıkla β -aritmetikte yer alan bir ifadeye dönüştürülebilir.

α ve β üreteçlerinin özel olarak seçilmesiyle elde edilen klasik, geometrik, bigeometrik ve anageometrik kalkülüs Tablo 2 de verilmiştir.

Tablo 2. Kalkülüs çeşitleri

Kalkülüs	α	β
Klasik	I	I
Geometrik	I	exp
Anageometrik	exp	I
Bigeometrik	exp	exp

Tanım 2.2.4. $X \subset \mathbb{R}_\alpha, f: X \rightarrow \mathbb{R}_\beta$ fonksiyonu, $p \in X'$ ve $m \in \mathbb{R}_\beta$ verilsin. Her $\varepsilon \dot{>} \dot{0}$ sayısına karşılık $\dot{0} \dot{<} |t \dot{-} p|_\alpha \dot{<} \delta$ koşulunu sağlayan her $t \in X$ için $|f(t) \dot{-} m|_\beta \dot{<} \varepsilon$ olacak şekilde en az bir $\delta = \delta(\varepsilon) \dot{>} \dot{0}$ sayısı bulunabiliyorsa $f(t)$ fonksiyonunun p noktasındaki *-limiti m dir denir ve $* \lim_{t \rightarrow p} f(t) = m$ ile gösterilir. Diğer bir deyişle

$$* \lim_{t \rightarrow p} f(t) = m \Leftrightarrow \forall \varepsilon \dot{>} \dot{0}, \exists \delta \dot{>} \dot{0} \ni |f(t) \dot{-} m|_\beta \dot{<} \varepsilon, \forall t \in X', |t \dot{-} p|_\alpha \dot{<} \delta$$

yazılır (Sağır ve Erdoğan, 2019).

Teorem 2.2.5. $f, g: X \subset \mathbb{R}_\alpha \rightarrow \mathbb{R}_\beta$ fonksiyonlar için $* \lim_{t \rightarrow p} f(t) = E$ ve $* \lim_{t \rightarrow p} g(t) = F$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler yazılır:

- i) $* \lim_{t \rightarrow p} (f(t) \dot{+} g(t)) = E \dot{+} F$
- ii) $* \lim_{t \rightarrow p} (f(t) \dot{\times} g(t)) = E \dot{\times} F$

- iii) Her $t \in X$ için $g(t) \neq \dot{0}$ ise $* \lim_{t \rightarrow p} \frac{f(t)}{g(t)} \beta = \frac{E}{F} \beta$
- iv) $* \lim_{t \rightarrow p} |f(t)|_\beta = |E|_\beta$
- v) Bir $k \in \mathbb{R}_\beta$ için $* \lim_{t \rightarrow p} (k \ddot{\times} f(t)) = k \ddot{\times} E$

(Erdoğan ve Duyar, 2018).

Tanım 2.2.6. $f: X \subset \mathbb{R}_\alpha \rightarrow \mathbb{R}_\beta$ fonksiyonu ve $p \in X$ noktası verilsin. Herhangi bir $\varepsilon \succ \dot{0}$ sayısına karşılık $|t - p|_\alpha < \delta$ olan her $t \in X$ için $|f(t) - f(p)|_\beta < \varepsilon$ olacak şekilde en az bir $\delta = \delta(\varepsilon) \succ \dot{0}$ bulunabiliyorsa f fonksiyonu $p \in X$ noktasında $*$ -sürekli olarak adlandırılır (Sağır ve Erdoğan, 2019).

Tanım 2.2.7. Eğer

$$* \lim_{t \rightarrow p} \frac{f(t) - f(p)}{\iota(t) - \iota(p)} \beta$$

$*$ -limiti var ise bu limitin değerine f fonksiyonunun p noktasındaki $*$ -türevi denir. f fonksiyonunun p noktasında $*$ -diferansiyellenebilir denir ve $(D^*f)(p) = f^*(p)$ ile gösterilir (Grossman ve Katz, 1972).

Ayrıca,

$$\begin{aligned} f^*(p) &= * \lim_{t \rightarrow p} \frac{f(t) - f(p)}{\iota(t) - \iota(p)} \beta \\ &= * \lim_{t \rightarrow p} \beta \left\{ \frac{\beta^{-1}\{f(t)\} - \beta^{-1}\{f(p)\}}{\alpha^{-1}(t) - \alpha^{-1}(p)} \right\} \\ &= \beta \left\{ \lim_{t \rightarrow p} \left(\frac{\beta^{-1}\{f(t)\} - \beta^{-1}\{f(p)\}}{t - p} \frac{t - p}{\alpha^{-1}(t) - \alpha^{-1}(p)} \right) \right\} \\ &= \beta \left\{ \frac{(\beta^{-1} \circ f)'(p)}{(\alpha^{-1})'(p)} \right\} \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir (Kadak ve Özlük, 2015).

Eğer $(D^*f)(p)$ varsa B kümesinin içinde olmalıdır.

Teorem 2.2.8. D^* , $*$ -türev dönüşüm operatörü β -toplamsal ve β -homojendir. Yani k , B kümesinde bir sabit ve f, g $*$ -türevlenebilen iki fonksiyon olmak üzere

$$D^*(f \ddot{+} g) = D^*f \ddot{+} D^*g$$

$$D^*(k \ddot{\times} f) = k \ddot{\times} D^*f$$

dir.

Tanım 2.2.9. $f(v, v)$, \mathbb{R}_β değerli bir fonksiyon olmak üzere, $*$ -kısmi türevleri

$$f_v^*(v, v) = \frac{\partial^*}{\partial v^*} f(v, v) = * \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(v \dot{+} h, v) \ddot{-} f(v, v)}{\iota(h)} \beta$$

ve

$$f_v^*(v, v) = \frac{\partial^*}{\partial v^*} f(v, v) = * \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(v, v \dot{+} h) \ddot{-} f(v, v)}{\iota(h)} \beta$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.2.10. $[v, v]$ üzerinde $*$ -sürekli f fonksiyonunun $*$ -ortalaması $*M_v^v$ ile gösterilir. u_1, u_2, \dots, u_n sayıları $[v, v]$ aralığının s -katlı α -parçalanışı olmak üzere s . terimi $f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_n)$ fonksiyonlarının β -ortalaması olan β -yakınsak dizinin β -limiti olarak tanımlanır.

$*M_v^v$ dönüşümü β -toplamsal ve β -homojendir.

Tanım 2.2.11. f fonksiyonu $*$ -sürekli olsun. f fonksiyonunun $[v, v]$ üzerindeki $*$ -integrali

$$* \int_v^v f = [\iota(v) \ddot{-} \iota(v)] \times *M_v^v$$

şeklinde tanımlanır ve $* \int_v^v f$ ile gösterilir.

$* \int_v^v f = \ddot{0}$ olduğu açık bir şekilde görülebilir.

u_1, u_2, \dots, u_n $[v, v]$ aralığının s -katlı α -parçalanışı ve $k_s, u_2 \dot{-} u_1, u_3 \dot{-} u_2, \dots, u_s \dot{-} u_{s-1}$ farklarının ortak değeri ise $* \int_v^v f$ integrali, s . terimi

$$[\iota(k_s) \times f(u_1)] \ddot{+} \dots \ddot{+} [\iota(k_s) \times f(u_{s-1})]$$

olan β -yakınsak dizinin β -limitine eşittir.

$*$ -İntegral β -toplamsal ve β -homojendir (Grossman ve Katz, 1972).

i) Herhangi $[v, v]$ aralığı üzerinde tanımlı $g(t) = k$ sabit fonksiyonu için

$$* \int_v^v g = [t(v) \dot{-} t(v)] \dot{\times} k$$

olur.

ii) *-Sürekli ve herhangi $[u, v]$ aralığı üzerinde tanımlı g ve h fonksiyonları, eğer her $t \in [u, v]$ sayısı için $g(t) \dot{\leq} h(t)$ oluyorsa

$$* \int_u^v g \dot{\leq} * \int_u^v h$$

şeklinde yazılabilir.

iii) $u < r < v$ olan herhangi u, v, r sayıları ve $[u, v]$ aralığı üzerinde tanımlı *-sürekli f fonksiyonu için

$$* \int_u^r f \dot{+} * \int_r^v f = * \int_u^v f$$

olur.

Teorem 2.2.12. Bir f fonksiyonu $[u, v]$ aralığında *-sürekli ve her $t \in [u, v]$ ve $h(t) = * \int_u^v f$ olsun. O halde $[u, v]$ aralığı üzerinde $D^*h = f$ olur (Grossman ve Katz, 1972).

Teorem 2.2.13. Eğer D^*h *-türev fonksiyonu $[u, v]$ aralığında *-sürekli ise

$$* \int_u^v D^*h = h(v) \dot{-} h(u)$$

olur (Grossman ve Katz, 1972).

Not 2.2.14. Her $t \in A$ sayısı için $\bar{p} = \alpha^{-1}(p)$ olarak verilsin. $K \subset A$ tanım kümesi ve $L \subset B$ değer kümesi olan bir f fonksiyonu için $\bar{f}(z) = \beta^{-1}(f(\alpha(z)))$ olsun. O halde aşağıdaki bağıntılar gerçekleşir.

* $\lim_{t \rightarrow p} f(t)$ ve $\lim_{t \rightarrow \bar{p}} \bar{f}(z)$ limitleri birlikte vardır ve bu limitler varsa
 * $\lim_{t \rightarrow p} f(t) = \beta(\lim_{z \rightarrow \bar{p}} \bar{f}(z))$ olur.

\bar{f} fonksiyonunun \bar{p} noktasında *-sürekli olması için gerek ve yeter şart f fonksiyonunun p noktasında *-sürekli olmasıdır.

$(Df)(p)$ türevi ve $(D^*f)(p)$ *-türevi birbirini gerektirir ve bu türevler mevcutsa
 $(D^*f)(p) = \beta[(D\bar{f})(\bar{p})]$ olur.

Eğer f fonksiyonu $[u, v]$ aralığı üzerinde *-sürekli ve ${}^*M_v^\nu f = {}^*M_{\bar{v}}^{\bar{\nu}} \bar{f}$ ise

$${}^* \int_u^v f(t) d^*t = \beta \left(\int_{\bar{u}}^{\bar{v}} \bar{f}(t) dt \right) = \beta \left(\int_{\alpha^{-1}(\bar{u})}^{\alpha^{-1}(\bar{v})} \beta^{-1}(f(\alpha(t))) dt \right)$$

olur (Grossman ve Katz, 1972).

Tanım 2.2.15. Bir $f: X \subset \mathbb{R}_\alpha \rightarrow \mathbb{R}_\beta$ fonksiyonu verilsin. Eğer herhangi $\varepsilon \succ \bar{0}$ sayısı alındığında $\forall t \in X$ için $p \dot{-} \delta \dot{<} t \dot{<} p$ ($p \dot{<} t \dot{<} p \dot{+} \delta$) iken $|f(t) \dot{-} L|_\beta \dot{<} \varepsilon$ olacak şekilde en az bir $\delta = \delta(\varepsilon) \dot{>} \bar{0}$ sayısı varsa, f fonksiyonunun $p \in \mathbb{R}_\alpha$ noktasındaki soldan *-limiti (sağdan *-limiti) L sayısıdır denir ve ${}^* \lim_{t \rightarrow p^-} f(t) = L$ (${}^* \lim_{t \rightarrow p^+} f(t) = L$) ile gösterilir (Erdoğan ve Duyar, 2018).

Teorem 2.2.16. Bir $f: X \subset \mathbb{R}_\alpha \rightarrow \mathbb{R}_\beta$ fonksiyonu verilsin. Bu f fonksiyonunun herhangi bir $p \in \mathbb{R}_\alpha$ noktasında *-limitinin var olması için gerekli ve yeterli koşul soldan *-limiti ve sağdan *-limitinin birbirine eşit olmasıdır (Erdoğan ve Duyar, 2018).

Tanım 2.2.17. Bir $f: (\dot{p}, \dot{+}\infty) \rightarrow \mathbb{R}_\beta$ fonksiyonu verilsin. Eğer herhangi bir $\varepsilon \succ \bar{0}$ sayısı verildiğinde $\forall t \dot{>} \delta$ ($\forall t \dot{<} \dot{0} \dot{-} \delta$) için $|f(t) \dot{-} E|_\beta \dot{<} \varepsilon$ olacak şekilde en az bir $\delta = \delta(\varepsilon) \dot{>} \bar{0}$ sayısı varsa, f fonksiyonunun $\dot{+}\infty$ ($\dot{-}\infty$) daki *-limiti $E \in \mathbb{R}_\beta$ sayısıdır ve ${}^* \lim_{t \rightarrow \dot{+}\infty} f(t) = E$ (${}^* \lim_{t \rightarrow \dot{-}\infty} f(t) = E$) ile gösterilir (Erdoğan ve Duyar, 2018).

Tanım 2.2.18. Bir $f: (\dot{-}\infty, \dot{p}) \rightarrow \mathbb{R}_\beta$ fonksiyonu verilsin. Eğer herhangi bir $\varepsilon \succ \bar{0}$ sayısı verildiğinde $\forall t \dot{>} \delta$ ($\forall t \dot{<} \dot{0} \dot{-} \delta$) için $\varepsilon \dot{<} f(t)$ ($f(t) \dot{<} \bar{0} \dot{-} \varepsilon$) olacak şekilde en az bir $\delta = \delta(\varepsilon) \dot{>} \bar{0}$ sayısı varsa, f fonksiyonunun $\dot{-}\infty$ daki *-limitinin $\dot{+}\infty$ ($\dot{-}\infty$) olduğu söylenir ve ${}^* \lim_{t \rightarrow \dot{-}\infty} f(t) = \dot{+}\infty$ (${}^* \lim_{t \rightarrow \dot{-}\infty} f(t) = \dot{-}\infty$) ile gösterilir (Erdoğan ve Duyar, 2018).

Tanım 2.2.19. Bir $f: [v, +\infty) \subset \mathbb{R}_\alpha \rightarrow \mathbb{R}_\beta$ ($f: (-\infty, v] \subset \mathbb{R}_\alpha \rightarrow \mathbb{R}_\beta$) fonksiyonu her $v \leq v$ sayısı için $[v, v]$ aralığında $*$ -sürekli olsun. $* \lim_{v \rightarrow +\infty} * \int_v^v f(t) d^* t$ ($* \lim_{v \rightarrow -\infty} * \int_v^v f(t) d^* t$) $*$ -limitine f fonksiyonunun $[v, +\infty)$ ($(-\infty, v]$) üzerinde birinci çeşit has olmayan $*$ -integrali denir ve $* \int_v^{+\infty} f(t) d^* t$ ($* \int_{-\infty}^v f(t) d^* t$) ile gösterilir. Bu $* \lim_{v \rightarrow +\infty} * \int_v^v f(t) d^* t$ ($* \lim_{v \rightarrow -\infty} * \int_v^v f(t) d^* t$) varsa ve bir $E \in \mathbb{R}_\beta$ sayısına eşitse $* \int_v^{+\infty} f(t) d^* t$ ($* \int_{-\infty}^v f(t) d^* t$) $*$ -integrali yakınsak, limiti yoksa ve $-\infty$ ya da $+\infty$ ise ıraksaktır (Erdoğan ve Duyar, 2018).

Teorem 2.2.20. $v \in \mathbb{R}_\alpha$ ve $V \in \overline{\mathbb{R}_\alpha}$ olmak üzere $f, g: [v, V) \rightarrow \mathbb{R}_\beta$ fonksiyonları her bir $[v, v] \subset [v, V)$ aralığında $*$ -sürekli ve $* \int_v^V f(t) d^* t$ ile $* \int_v^V g(t) d^* t$ has olmayan $*$ -integralleri yakınsak olsun. Burada her $c, k \in \mathbb{R}_\beta$ için $((c \dot{\times} f) \ddot{+} (k \dot{\times} g))(t)$ fonksiyonunun $[v, V)$ üzerinde has olmayan $*$ -integrali

$$* \int_v^V ((c \dot{\times} f) \ddot{+} (k \dot{\times} g))(t) d^* t = c \dot{\times} * \int_v^V f(t) d^* t \ddot{+} k \dot{\times} * \int_v^V g(t) d^* t$$

olur (Erdoğan ve Duyar, 2018).

Teorem 2.2.21. (Karşılaştırma Testi) $V \in \overline{\mathbb{R}_\alpha}$ olmak üzere $f, g: [v, V) \rightarrow \mathbb{R}_\beta$ fonksiyonları $\forall t \in [v, V)$ için $0 \leq f(t) \leq K \dot{\times} g(t)$ olsun. Her iki fonksiyon $v \in [v, V)$ olmak üzere her $[v, v]$ kapalı α -aralığında $*$ -sürekli iken eğer $* \int_v^V g(t) d^* t$ yakınsak ise $* \int_v^V f(t) d^* t$ yakınsak olur (Erdoğan ve Duyar, 2018).

Teorem 2.2.22. Bir $f: [v, v] \subset \mathbb{R}_\alpha \rightarrow \mathbb{R}_\beta$ fonksiyonu $*$ -sürekli verilsin. Bu durumda aşağıdaki ifadeler yazılabilir:

- i) f fonksiyonu $[v, v]$ üzerinde β -sınırlıdır.
- ii) $|* \int_v^v f(t) d^* t|_\beta \leq * \int_v^v |f(t)|_\beta d^* t$

olur (Erdoğan ve Duyar, 2018).

Tanım 2.2.23. Bir $v = f(t)$ fonksiyonunun, t bağımsız değişken, v bağlı değişken ve onun sınırlı sayıda herhangi mertebeye kadar $*$ -türevleri arasında kurulmuş olan bağıntıya Newtonyen olmayan diferansiyel denklem denir. Buna göre bir Newtonyen olmayan diferansiyel denklemin genel ifadesi

$$F\left(t, v, \frac{d^*v}{dt^*}, \frac{d^{*(2)}v}{dt^{*(2)}}, \dots, \frac{d^{*(n)}v}{dt^{*(n)}}\right) = 0$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 2.2.24. f, \mathbb{R}_β değerli bir fonksiyon olmak üzere

$$v^{*(n)} + a_1(t) \ddot{\times} v^{*(n-1)} + \dots + a_{n-1}(t) \ddot{\times} v^* + a_n(t) \ddot{\times} v = f(t)$$

şeklinde yazılan denklem, n . mertebeden lineer Newtonyen olmayan diferansiyel denklem olarak tanımlanır. $a_n(t)$ katsayıları α -sabit ise denklem sabit katsayılı lineer Newtonyen olmayan diferansiyel denklem olur fakat $a_n(t)$ katsayıları α -sabit değil ise denklem değişken katsayılı lineer Newtonyen olmayan diferansiyel denklem olarak adlandırılır.

3. NEWTONYEN OLMAYAN SUMUDU DÖNÜŞÜMÜ

Bu bölümde Newtonyen olmayan kalkülüste Sumudu dönüşümü tanımlanarak, dönüşümün varlığı için gerekli koşullar irdelenecek ve temel özellikleri ispatlanacaktır.

3.1. Newtonyen Olmayan Sumudu Dönüşümünün Tanımı ve Varlığı

Tanım 3.1.1.

$$A = \left\{ f(t) : \exists M > 0, \tau_1, \tau_2 > 0, |f(t)|_\beta < M \times e^{(\alpha^{-1}(|t|_\alpha)/\alpha^{-1}(\tau_j))_\beta}, \right. \\ \left. t \in (0, 1)^{j_\alpha} \times [0, +\infty) \right\}$$

şeklinde tanımlanan A kümesinden alınan bir fonksiyon için M β -sabit sonlu sayı, τ_1 ve τ_2 sayıları sonlu veya sonsuz olabilecek α -sabit sayılardır. A kümesinden alınan bir $f(t)$ fonksiyonunun Newtonyen olmayan Sumudu dönüşümü $v \in (0, \tau_1, \tau_2)$ olmak üzere

$$S_N\{f(t)\} = * \int_0^{+\infty} \frac{\dot{1}}{t(v)} \beta \times e^{\left(\frac{-\alpha^{-1}(t)}{\alpha^{-1}(v)}\right)_\beta} \times f(t) d^*t \quad (4)$$

*-integrali ile tanımlanır. $f(t)$ fonksiyonunun Newtonyen olmayan Sumudu dönüşümü $S_N\{f(t)\} = F_N(v)$ ile gösterilir.

Önerme 3.1.2. Newtonyen olmayan Sumudu dönüşümünün tanımı

$$S_N\{f(t)\} = * \int_0^{+\infty} e^{(-\alpha^{-1}(t))_\beta} \times f(v \times t) d^*t \quad (5)$$

şeklinde de verilebilir.

İspat: (4) ve (5) ifadelerinin birbirine eşit olduğu gösterilmelidir. Newtonyen olmayan Sumudu dönüşümünün tanımı ele alınırsa, *-integral ve klasik integral arasındaki ilişkidenden yararlanılarak,

$$\begin{aligned}
S_N\{f(t)\} &= * \int_0^{+\infty} \frac{\dot{\iota}}{\iota(v)} \beta \ddot{\times} \ddot{e}^{\left(\frac{\alpha^{-1}(t)}{\alpha^{-1}(v)}\right)_\beta} \ddot{\times} f(t) d^* t \\
&= \frac{\dot{\iota}}{\iota(v)} \beta \ddot{\times} * \int_0^{+\infty} \ddot{e}^{\left(\frac{\alpha^{-1}(t)}{\alpha^{-1}(v)}\right)_\beta} \ddot{\times} f(t) d^* t \\
&= \frac{\dot{\iota}}{\iota(v)} \beta \ddot{\times} * \lim_{c \rightarrow +\infty} * \int_0^c \beta \left(e^{\frac{\alpha^{-1}(t)}{\alpha^{-1}(v)}} \right) \ddot{\times} f(t) d^* t \\
&= \frac{\dot{\iota}}{\iota(v)} \beta \ddot{\times} * \lim_{c \rightarrow +\infty} \beta \left(\int_0^{\alpha^{-1}(c)} \beta^{-1} \left(\beta \left(e^{\frac{-t}{\alpha^{-1}(v)}} \right) \right) \cdot \beta^{-1} (f(\alpha(t))) dt \right) \\
&= \frac{\dot{\iota}}{\iota(v)} \beta \ddot{\times} * \lim_{c \rightarrow +\infty} \beta \left(\int_0^{\alpha^{-1}(c)} e^{\frac{-t}{\alpha^{-1}(v)}} \cdot \beta^{-1} \{f(\alpha(t))\} dt \right) \tag{6}
\end{aligned}$$

bulunur. $\frac{t}{\alpha^{-1}(v)} = z$ değişken değişimi yapılırsa, $t = \alpha^{-1}(v) \cdot z$ ve $dt = \alpha^{-1}(v) \cdot dz$ olur.

Değişken değişimi (6) ifadesinde kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
&\frac{\dot{\iota}}{\iota(v)} \beta \ddot{\times} * \lim_{c \rightarrow +\infty} \beta \left(\int_0^{\frac{\alpha^{-1}(c)}{\alpha^{-1}(v)}} e^{-z} \cdot \beta^{-1} (f(\alpha(z \cdot \alpha^{-1}(v)))) \cdot \alpha^{-1}(v) \cdot dz \right) \\
&= \frac{\dot{\iota}}{\iota(v)} \beta \ddot{\times} \iota(v) \ddot{\times} * \lim_{c \rightarrow +\infty} \beta \left(\int_0^{\frac{\alpha^{-1}(c)}{\alpha^{-1}(v)}} e^{-z} \cdot \beta^{-1} (f(\alpha(z \cdot \alpha^{-1}(v)))) dz \right) \\
&= * \lim_{c \rightarrow +\infty} \beta \left(\int_0^{\frac{\alpha^{-1}(c)}{\alpha^{-1}(v)}} e^{-z} \cdot \beta^{-1} (f(\alpha(z \cdot \alpha^{-1}(v)))) dz \right) \\
&= * \lim_{c \rightarrow +\infty} * \int_0^{\frac{c}{v} \alpha} \ddot{e}^{(-\alpha^{-1}(z))_\beta} \ddot{\times} f(v \ddot{\times} z) d^* z \\
&= * \int_0^{+\infty} \ddot{e}^{(-\alpha^{-1}(z))_\beta} \ddot{\times} f(v \ddot{\times} z) d^* z
\end{aligned}$$

olur. Böylece,

$$S_N\{f(t)\} = * \int_0^{+\infty} \dot{e}^{(-\alpha^{-1}(t))_\beta} \ddot{x} f(v \dot{x} t) d^* t$$

elde edilir.

O halde (5) numaralı eşitliği de gerekirse Newtonyen olmayan Sumudu dönüşümünün tanımı olarak kullanmak mümkündür.

Not 3.1.3. $c, t \in A$ için, $\bar{c} = \alpha^{-1}(c), \bar{v} = \alpha^{-1}(v)$ ile gösterilsin. f , girdileri ve çıktıları sırasıyla A ve B kümesi olan bir fonksiyon olmak üzere $\bar{f}(t) = \beta^{-1}(f(\alpha(t)))$ olsun. Bu durumda klasik Sumudu dönüşümü ve Newtonyen olmayan Sumudu dönüşümü arasındaki ilişki aşağıda gösterildiği gibi

$$\begin{aligned} S_N\{f(t)\} &= * \int_0^{+\infty} \frac{\dot{1}}{l(v)} \beta \ddot{x} \dot{e}^{(-\frac{\alpha^{-1}(t)}{\alpha^{-1}(v)})_\beta} \ddot{x} f(t) d^* t \\ &= * \lim_{c \rightarrow +\infty} * \int_0^c \beta \left(\frac{1}{v} \cdot e^{(-\frac{\alpha^{-1}(t)}{\alpha^{-1}(v)})_\beta} \cdot \beta^{-1}(f(t)) \right) d^* t \\ &= * \lim_{c \rightarrow +\infty} \beta \left(\int_0^{\alpha^{-1}(c)} \frac{1}{v} \cdot e^{(-\frac{t}{\alpha^{-1}(v)})_\beta} \cdot \beta^{-1}(f(\alpha(t))) dt \right) \\ &= \beta \left(\lim_{\bar{c} \rightarrow +\infty} \int_0^{\bar{c}} \frac{1}{v} \cdot e^{(-\frac{t}{v})_\beta} \cdot \bar{f}(t) dt \right) \\ &= \beta \left(S(\bar{f}(t)) \right) \\ &= \beta \left(S(\beta^{-1}(f(\alpha(t)))) \right) \end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$S_N\{f(t)\} = \beta \left(S(\bar{f}(t)) \right) = \beta \left(S(\beta^{-1}(f(\alpha(t)))) \right)$$

ifadesi elde edilir, yani $F_N(v) = \beta(F(\bar{v})) = \beta(F(\alpha^{-1}(v)))$ dir.

Tanım 3.1.4. $t_0 \geq \dot{0}$ olmak üzere her $t \geq t_0$ için

$$|f(t)|_\beta \leq M \times \ddot{e}^{(\alpha^{-1}(\gamma \times t))_\beta}$$

olacak şekilde bir $M \succ \dot{0}$ β -sabit ve γ α -sabit bulunabiliyorsa f fonksiyonu γ β -üstel mertebededir denir (Güngör, 2022b).

Tanım 3.1.5. f fonksiyonu, $[a, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{n-1}, b]$ şeklinde sonlu alt α -aralıklara parçalanabilen $[a, b]$ kapalı α -aralığı üzerinde tanımlı olsun. Eğer

- i) f fonksiyonu $t_0 = a, t_n = b$ olmak üzere her (t_{i-1}, t_i) açık α -aralığında $*$ -süreklili,
- ii) f fonksiyonu $*\lim_{t \rightarrow t_{i-1}^+} f(t)$ ile $*\lim_{t \rightarrow t_{i-1}^-} f(t)$ tek taraflı limitlerine sahip

ise bu takdirde $[a, b]$ kapalı α -aralığında f fonksiyonu parçalı $*$ -süreklidir denir (Güngör, 2022b).

Teorem 3.1.6. (Newtonyen olmayan Sumudu dönüşümünün varlığı) $f(t)$ fonksiyonu $[\dot{0}, +\infty)$ aralığında parçalı $*$ -süreklili ve $t \succ t_0$ için γ β -üstel mertebeden bir fonksiyon ise, bu takdirde $\frac{1}{v}\alpha \succ \gamma$ olmak üzere $S_N\{f(t)\}$ mevcuttur.

İspat: $f(t)$ fonksiyonunun Newtonyen olmayan Sumudu dönüşümünün varlığını göstermek için

$$\frac{\dot{1}}{l(v)}\beta \times * \int_0^{+\infty} \ddot{e}^{\left(\frac{-\alpha^{-1}(t)}{\alpha^{-1}(v)}\right)_\beta} \times f(t) d^*t \quad (7)$$

integralinin $\frac{1}{v}\alpha \succ \gamma$ için yakınsak olduğu ispatlanmalıdır. Bunun için $t \succ t_0$ olmak üzere (7) ifadesi

$$\frac{\dot{1}}{l(v)}\beta \times * \int_0^{+\infty} \ddot{e}^{\left(\frac{-\alpha^{-1}(t)}{\alpha^{-1}(v)}\right)_\beta} \times f(t) d^*t$$

$$= \frac{\dot{1}}{l(v)} \beta \ddot{*} \int_0^{t_0} \ddot{e}^{\left(\frac{-\alpha^{-1}(t)}{\alpha^{-1}(v)}\right) \beta} \ddot{*} f(t) d^* t \ddot{+} \frac{\dot{1}}{l(v)} \beta \ddot{*} \int_{t_0}^{+\infty} \ddot{e}^{\left(\frac{-\alpha^{-1}(t)}{\alpha^{-1}(v)}\right) \beta} \ddot{*} f(t) d^* t \quad (8)$$

şeklinde parçalı olarak yazılabilir. Bu durumda ispatı tamamlamak için her iki integralinde yakınsak olduğu gösterilmelidir.

f fonksiyonu $[\dot{0}, t_0]$ α -aralığında parçalı $*$ -sürekli olduğundan t_1, t_2, \dots, t_n sonlu noktaları dışında her sonlu (t_i, t_{i+1}) açık α -alt aralığında $*$ -süreklidir. Buradan

$$|f(t)|_\beta \ddot{\leq} M_i, \quad t_i < t < t_{i+1} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

olacak şekilde sonlu M_i β -sabitleri vardır. f fonksiyonu $[\dot{0}, t_0]$ aralığında parçalı $*$ -sürekli olduğundan (8) ifadesinin sağ tarafındaki ilk $*$ -integrali

$$\begin{aligned} * \int_0^{t_0} \ddot{e}^{\left(\frac{-\alpha^{-1}(t)}{\alpha^{-1}(v)}\right) \beta} \ddot{*} f(t) d^* t &= * \int_0^{t_1} \ddot{e}^{\left(\frac{-\alpha^{-1}(t)}{\alpha^{-1}(v)}\right) \beta} \ddot{*} f(t) d^* t \\ &\ddot{+} * \int_{t_1}^{t_2} \ddot{e}^{\left(\frac{-\alpha^{-1}(t)}{\alpha^{-1}(v)}\right) \beta} \ddot{*} f(t) d^* t \ddot{+} \dots \ddot{+} * \int_{t_n}^{t_0} \ddot{e}^{\left(\frac{-\alpha^{-1}(t)}{\alpha^{-1}(v)}\right) \beta} \ddot{*} f(t) d^* t \end{aligned}$$

şeklinde parçalı olarak yazılır. f fonksiyonu her bir α -alt aralığında $*$ -sürekli ve β -sınırlı olduğundan her bir $*$ -integral iyi tanımlıdır. Buradan ilk $*$ -integralin yakınsak olduğu görülür.

Şimdi, ikinci integralin yakınsak olduğu gösterilmelidir. $f(t)$ fonksiyonu γ β -üstel mertebeden olduğundan her $t > t_0$ için $|f(t)|_\beta \ddot{\leq} M \ddot{*} \ddot{e}^{(\alpha^{-1}(\gamma)\alpha^{-1}(t)) \beta}$ yazılır. Böylece

$$\begin{aligned} \left| * \int_{t_0}^{+\infty} \ddot{e}^{\left(\frac{-\alpha^{-1}(t)}{\alpha^{-1}(v)}\right) \beta} \ddot{*} f(t) d^* t \right|_\beta &\ddot{\leq} * \int_{t_0}^{+\infty} \ddot{e}^{\left(\frac{-\alpha^{-1}(t)}{\alpha^{-1}(v)}\right) \beta} \ddot{*} |f(t)|_\beta d^* t \\ &\ddot{\leq} * \int_{t_0}^{+\infty} \ddot{e}^{\left(\frac{-\alpha^{-1}(t)}{\alpha^{-1}(v)}\right) \beta} \ddot{*} M \ddot{*} \ddot{e}^{(\alpha^{-1}(\gamma)\alpha^{-1}(t)) \beta} d^* t \\ &= * \int_{t_0}^{+\infty} M \ddot{*} \ddot{e}^{\left(-\alpha^{-1}(t) \cdot \left(\frac{1}{\alpha^{-1}(v)} - \alpha^{-1}(\gamma)\right)\right) \beta} d^* t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= M \ddot{\times} * \lim_{c \rightarrow +\infty} * \int_{t_0}^c \ddot{e}^{\left(-\alpha^{-1}(t) \cdot \left(\frac{1}{\alpha^{-1}(v)} - \alpha^{-1}(\gamma)\right)\right)}_{\beta} d^*t \\
&= M \ddot{\times} * \lim_{c \rightarrow +\infty} \beta \left[\int_{\alpha^{-1}(t_0)}^{\alpha^{-1}(c)} \beta^{-1} \left(\beta \left(e^{-\alpha^{-1}(\alpha(t)) \cdot \left(\frac{1}{\alpha^{-1}(v)} - \alpha^{-1}(\gamma)\right)} \right) \right) dt \right] \\
&= M \ddot{\times} * \lim_{c \rightarrow +\infty} \beta \left[\int_{\alpha^{-1}(t_0)}^{\alpha^{-1}(c)} e^{-t \cdot \left(\frac{1}{\alpha^{-1}(v)} - \alpha^{-1}(\gamma)\right)} dt \right] \\
&= M \ddot{\times} * \lim_{c \rightarrow +\infty} \beta \left[\frac{-\alpha^{-1}(v)}{1 - \alpha^{-1}(v)\alpha^{-1}(\gamma)} \cdot e^{-t \cdot \left(\frac{1}{\alpha^{-1}(v)} - \alpha^{-1}(\gamma)\right)} \right]_{\alpha^{-1}(t_0)}^{\alpha^{-1}(c)} \\
&= M \ddot{\times} * \lim_{c \rightarrow +\infty} \beta \left(\frac{-\alpha^{-1}(v)}{1 - \alpha^{-1}(v)\alpha^{-1}(\gamma)} \right. \\
&\quad \cdot \left. \left(e^{-\alpha^{-1}(c) \cdot \left(\frac{1}{\alpha^{-1}(v)} - \alpha^{-1}(\gamma)\right)} - e^{-\alpha^{-1}(t_0) \cdot \left(\frac{1}{\alpha^{-1}(v)} - \alpha^{-1}(\gamma)\right)} \right) \right) \\
&= M \ddot{\times} * \lim_{c \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ddot{\iota}(v)}{\ddot{\mathbb{I}}^{-\iota}(v) \ddot{\times} \iota(\gamma)} \beta \ddot{\times} \left(\ddot{e}^{\left(-\alpha^{-1}(c) \cdot \left(\frac{1}{\alpha^{-1}(v)} - \alpha^{-1}(\gamma)\right)\right)}_{\beta} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \ddot{-} \ddot{e}^{\left(-\alpha^{-1}(t_0) \cdot \left(\frac{1}{\alpha^{-1}(v)} - \alpha^{-1}(\gamma)\right)\right)}_{\beta} \right) \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. $\frac{1}{v} \alpha \dot{>} \gamma$ iken $* \lim_{c \rightarrow +\infty} \ddot{e}^{\left(-\alpha^{-1}(c) \cdot \left(\frac{1}{\alpha^{-1}(v)} - \alpha^{-1}(\gamma)\right)\right)}_{\beta} = \ddot{0}$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
&\left| * \int_{t_0}^{+\infty} \ddot{e}^{\left(\frac{-\alpha^{-1}(t)}{\alpha^{-1}(v)}\right)}_{\beta} \ddot{\times} f(t) d^*t \right|_{\beta} \\
&\leq M \ddot{\times} \frac{\iota(v)}{\ddot{\mathbb{I}}^{-\iota}(v) \ddot{\times} \iota(\gamma)} \beta \ddot{\times} \ddot{e}^{\left(-\alpha^{-1}(t_0) \cdot \left(\frac{1}{\alpha^{-1}(v)} - \alpha^{-1}(\gamma)\right)\right)}_{\beta} \leq \ddot{\dagger} \infty
\end{aligned}$$

olur. Böylece $\frac{\dot{\iota}}{\iota} \alpha \succ \gamma$ olmak üzere her $t \succ t_0$ için $\left| * \int_{t_0}^{+\infty} \ddot{e}^{\left(\frac{-\alpha^{-1}(t)}{\alpha^{-1}(v)}\right)_{\beta}} \ddot{\times} f(t) d^* t \right|_{\beta}$ ifadesi için yakınsak olup Teorem 2.2.21 karşılaştırma kuralı gereğince (8) ifadesinin ikinci *-integrali yakınsaktır. O halde (7) ifadesi $\frac{\dot{\iota}}{\iota} \alpha \succ \gamma$ için yakınsak olup $S_N\{f(t)\}$ mevcuttur.

3.2. Bazı Temel Fonksiyonların Newtonyen Olmayan Sumudu Dönüşümleri

Bu bölümde bazı temel fonksiyonların Newtonyen olmayan Sumudu dönüşümleri verilecektir.

Teorem 3.2.1. $f(t) = \ddot{\iota}$ fonksiyonunun Newtonyen olmayan Sumudu dönüşümü

$$S_N\{\ddot{\iota}\} = \ddot{\iota}$$

dir.

İspat: Newtonyen olmayan Sumudu dönüşümünün tanımından,

$$\begin{aligned} S_N\{\ddot{\iota}\} &= \frac{\dot{\iota}}{\iota(v)} \beta \ddot{\times} * \int_0^{+\infty} \ddot{e}^{\left(\frac{-\alpha^{-1}(t)}{\alpha^{-1}(v)}\right)_{\beta}} \ddot{\times} \ddot{\iota} d^* t \\ &= \frac{\dot{\iota}}{\iota(v)} \beta \ddot{\times} * \int_0^{+\infty} \beta \left(\beta^{-1}(\ddot{e})^{\frac{-\alpha^{-1}(t)}{\alpha^{-1}(v)}} \right) \ddot{\times} \ddot{\iota} d^* t \\ &= \frac{\dot{\iota}}{\iota(v)} \beta \ddot{\times} * \int_0^{+\infty} \beta \left(e^{\frac{-\alpha^{-1}(t)}{\alpha^{-1}(v)}} \right) \ddot{\times} \ddot{\iota} d^* t \\ &= \frac{\dot{\iota}}{\iota(v)} \beta \ddot{\times} * \int_0^{+\infty} \beta \left[\beta^{-1} \left(\beta \left(e^{\frac{-\alpha^{-1}(t)}{\alpha^{-1}(v)}} \right) \right) \cdot \beta^{-1}(\ddot{\iota}) \right] d^* t \\ &= \frac{\dot{\iota}}{\iota(v)} \beta \ddot{\times} * \int_0^{+\infty} \beta \left(e^{\frac{-\alpha^{-1}(t)}{\alpha^{-1}(v)}} \cdot 1 \right) d^* t \\ &= \frac{\dot{\iota}}{\iota(v)} \beta \ddot{\times} * \lim_{c \rightarrow +\infty} * \int_0^c \beta \left(e^{\frac{-\alpha^{-1}(t)}{\alpha^{-1}(v)}} \right) d^* t \end{aligned}$$

yazılır. *-kalkülüs ve klasik kalkülüs arasındaki ilişkidten faydalanarak

$$\begin{aligned}
S_N\{\dot{\mathfrak{I}}\} &= \frac{\dot{\mathfrak{I}}}{\iota(v)} \beta \ddot{*} \lim_{c \rightarrow +\infty} \beta \left[\int_{\alpha^{-1}(\dot{0})}^{\alpha^{-1}(c)} \beta^{-1} \left(\beta \left(e^{\frac{-\alpha^{-1}(\alpha(z))}{\alpha^{-1}(v)}} \right) \right) dz \right] \\
&= \frac{\dot{\mathfrak{I}}}{\iota(v)} \beta \ddot{*} \lim_{c \rightarrow +\infty} \beta \left[\int_0^{\alpha^{-1}(c)} e^{\frac{-z}{\alpha^{-1}(v)}} \cdot dz \right] \\
&= \frac{\dot{\mathfrak{I}}}{\iota(v)} \beta \ddot{*} \lim_{c \rightarrow +\infty} \beta \left[-\alpha^{-1}(v) \cdot e^{\frac{-z}{\alpha^{-1}(v)}} \Big|_0^{\alpha^{-1}(c)} \right] \\
&= \frac{\dot{\mathfrak{I}}}{\iota(v)} \beta \ddot{*} \lim_{c \rightarrow +\infty} \beta \left[-\alpha^{-1}(v) \cdot \left(e^{\frac{-\alpha^{-1}(c)}{\alpha^{-1}(v)}} - 1 \right) \right] \\
&= \frac{\dot{\mathfrak{I}}}{\iota(v)} \beta \ddot{*} \iota(v) \ddot{*} \lim_{c \rightarrow +\infty} \left(\dot{\mathfrak{I}} \ddot{*} e^{\left(\frac{-\alpha^{-1}(c)}{\alpha^{-1}(v)} \right) \beta} \right) \\
&= \frac{\dot{\mathfrak{I}}}{\iota(v)} \beta \ddot{*} \iota(v) \ddot{*} \left(\dot{\mathfrak{I}} \ddot{*} \beta \left[\lim_{b \rightarrow +\infty} \beta^{-1} \left(\beta \left(e^{\frac{-\alpha^{-1}(\alpha(b))}{\alpha^{-1}(v)}} \right) \right) \right] \right) \\
&= \frac{\dot{\mathfrak{I}}}{\iota(v)} \beta \ddot{*} \iota(v) \ddot{*} \left(\dot{\mathfrak{I}} \ddot{*} \beta \left(\lim_{b \rightarrow \infty} e^{\frac{-b}{\alpha^{-1}(v)}} \right) \right) = \dot{\mathfrak{I}}
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$S_N\{\dot{\mathfrak{I}}\} = \dot{\mathfrak{I}}$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 3.2.2. $f(t) = \iota(t)$ fonksiyonunun Newtonyen olmayan Sumudu dönüşümü

$$S_N\{\iota(t)\} = \iota(v)$$

şeklindedir.

İspat: $f(t) = \iota(t)$ fonksiyonu Newtonyen olmayan Sumudu dönüşümünün tanımında yerine yazılırsa,

$$S_N\{\iota(t)\} = \frac{\dot{\mathfrak{I}}}{\iota(v)} \beta \ddot{*} \int_0^{+\infty} e^{\left(\frac{-\alpha^{-1}(t)}{\alpha^{-1}(v)} \right) \beta} \ddot{*} \iota(t) d^* t$$

olur. $\iota(t) = \beta(\alpha^{-1}(t))$ olduğundan

$$S_N\{l(t)\} = \frac{\dot{l}}{l(v)} \beta \ddot{*} \int_0^{+\infty} \ddot{e}^{\left(\frac{-\alpha^{-1}(t)}{\alpha^{-1}(v)}\right) \beta} \ddot{*} \beta(\alpha^{-1}(t)) d^*t$$

yazılır. β -çarpım yapıлып *-integral tanımından gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} S_N\{l(t)\} &= \frac{\dot{l}}{l(v)} \beta \ddot{*} \int_0^{+\infty} \beta \left(e^{\frac{-\alpha^{-1}(t)}{\alpha^{-1}(v)}} \cdot \alpha^{-1}(t) \right) d^*t \\ &= \frac{\dot{l}}{l(v)} \beta \ddot{*} \lim_{c \rightarrow +\infty} \left(* \int_0^c \beta \left(e^{\frac{-\alpha^{-1}(t)}{\alpha^{-1}(v)}} \cdot \alpha^{-1}(t) \right) d^*t \right) \\ &= \frac{\dot{l}}{l(v)} \beta \ddot{*} \lim_{c \rightarrow +\infty} \left(\beta \left[\int_{\alpha^{-1}(0)}^{\alpha^{-1}(c)} \beta^{-1} \left(\beta \left(e^{\frac{-\alpha^{-1}(\alpha(z))}{\alpha^{-1}(v)}} \cdot \alpha^{-1}(\alpha(z)) \right) \right) dz \right] \right) \\ &= \frac{\dot{l}}{l(v)} \beta \ddot{*} \lim_{c \rightarrow +\infty} \beta \left(\int_0^{\alpha^{-1}(c)} e^{\frac{-z}{\alpha^{-1}(v)}} \cdot z \cdot dz \right) \end{aligned}$$

bulunur. Burada, kısmi integrasyon yöntemi uygulanır ve sınır değerleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} S_N\{l(t)\} &= \frac{\dot{l}}{l(v)} \beta \ddot{*} \lim_{c \rightarrow +\infty} \beta \left(-\alpha^{-1}(v) \cdot e^{\frac{-z}{\alpha^{-1}(v)}} \cdot z \Big|_0^{\alpha^{-1}(c)} + \int_0^{\alpha^{-1}(c)} \alpha^{-1}(v) \cdot e^{\frac{-z}{\alpha^{-1}(v)}} dz \right) \\ &= \frac{\dot{l}}{l(v)} \beta \ddot{*} \lim_{c \rightarrow +\infty} \beta \left(-\alpha^{-1}(v) \cdot e^{\frac{-\alpha^{-1}(c)}{\alpha^{-1}(v)}} \cdot \alpha^{-1}(c) + 0 - \left(\alpha^{-1}(v) \cdot \alpha^{-1}(v) \cdot e^{\frac{-z}{\alpha^{-1}(v)}} \right) \Big|_0^{\alpha^{-1}(c)} \right) \\ &= \frac{\dot{l}}{l(v)} \beta \ddot{*} \lim_{c \rightarrow +\infty} \beta \left(-e^{\frac{-\alpha^{-1}(c)}{\alpha^{-1}(v)}} \cdot \alpha^{-1}(c) - (\alpha^{-1}(v))^2 \cdot e^{\frac{-\alpha^{-1}(c)}{\alpha^{-1}(v)}} + (\alpha^{-1}(v))^2 \right) \\ &= \frac{\dot{l}}{l(v)} \beta \ddot{*} \lim_{c \rightarrow +\infty} \left(\ddot{0} \ddot{-} \ddot{e}^{\left(\frac{-\alpha^{-1}(c)}{\alpha^{-1}(v)}\right) \beta} \beta \ddot{*} l(c) \ddot{-} (l(v))^{2\beta} \ddot{*} \ddot{e}^{\left(\frac{-\alpha^{-1}(c)}{\alpha^{-1}(v)}\right) \beta} \ddot{+} (l(v))^{2\beta} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. $* \lim_{c \rightarrow +\infty} \ddot{e}^{\left(\frac{-\alpha^{-1}(c)}{\alpha^{-1}(v)}\right) \beta} = \ddot{0}$ olduğundan,

$$\begin{aligned} S_N\{l(t)\} &= \frac{\dot{l}}{l(v)} \beta \ddot{*} (l(v))^{2\beta} \\ &= l(v) \end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$S_N\{\iota(t)\} = \iota(v)$$

elde edilir.

Özel olarak, klasik kalkülüste $\alpha(t) = \beta(t) = t$ olduğundan $\mathbb{R}_\alpha = \mathbb{R}_\beta = \mathbb{R}$ olur. O halde $f(t) = \iota(t) = t$ fonksiyonu için t nin klasik kalkülüste Sumudu dönüşümü v olur ve $S\{t\} = v$ olarak gösterilir.

Geometrik kalkülüste ise, $\alpha(t) = t$ ve $\beta(t) = e^t$ olduğundan $\mathbb{R}_\alpha = \mathbb{R}$ ve $\mathbb{R}_\beta = \mathbb{R}^+$ olur. Buna göre $f(t) = \iota(t) = \beta(\alpha^{-1}(t)) = \beta(t) = e^t$ fonksiyonunun geometrik Sumudu dönüşümü e^v dur ve $S_G\{e^t\} = e^v$ şeklinde gösterilir.

Bigeometrik kalkülüste ise, $\alpha(t) = e^t$ ve $\beta(t) = t$ olduğundan $\mathbb{R}_\alpha = \mathbb{R}_\beta = \mathbb{R}^+$ olur. Buna göre $f(t) = \iota(t) = \beta(\alpha^{-1}(t)) = \beta(\ln t) = e^{\ln t} = t$ fonksiyonunun bigeometrik Sumudu dönüşümü v olur ve $S_{BG}\{t\} = v$ şeklinde gösterilir.

Teorem 3.2.3. $k \in \mathbb{R}_\alpha$ ve $\frac{1}{u}\alpha \succ k$ için $f(t) = \ddot{e}^{(\alpha^{-1}(k \times t))}_\beta$ fonksiyonunun Newtonyen olmayan Sumudu dönüşümü,

$$S_N \left\{ \ddot{e}^{(\alpha^{-1}(k \times t))}_\beta \right\} = \frac{\ddot{1}}{\ddot{1} \times \iota(k) \times \iota(u)} \beta$$

şeklindedir.

İspat: $\ddot{e}^{(\alpha^{-1}(k \times t))}_\beta$ fonksiyonu Newtonyen olmayan Sumudu dönüşümünün tanımında yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned} S_N \left\{ \ddot{e}^{(\alpha^{-1}(k \times t))}_\beta \right\} &= \frac{\ddot{1}}{\iota(v)} \beta \times_* \int_0^{+\infty} \ddot{e}^{\left(\frac{-\alpha^{-1}(t)}{\alpha^{-1}(v)}\right)_\beta} \times \ddot{e}^{(\alpha^{-1}(k)\alpha^{-1}(t))}_\beta d^*t \\ &= \frac{\ddot{1}}{\iota(v)} \beta \times_* \int_0^{+\infty} \beta \left(\beta^{-1}(\ddot{e})^{\frac{-\alpha^{-1}(t)}{\alpha^{-1}(v)}} \right) \times \beta(\beta^{-1}(\ddot{e})^{\alpha^{-1}(k)\alpha^{-1}(t)}) d^*t \\ &= \frac{\ddot{1}}{\iota(v)} \beta \times_* \int_0^{+\infty} \beta \left(e^{\frac{-\alpha^{-1}(t)}{\alpha^{-1}(v)}} \right) \times \beta(e^{\alpha^{-1}(k)\alpha^{-1}(t)}) d^*t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\ddot{1}}{\iota(v)} \beta \ddot{*} \int_0^{+\infty} \beta \left\{ \beta^{-1} \left(\beta \left(e^{\frac{-\alpha^{-1}(t)}{\alpha^{-1}(v)}} \right) \right) \cdot \beta^{-1} \left(\beta \left(e^{\alpha^{-1}(k)\alpha^{-1}(t)} \right) \right) \right\} d^*t \\
&= \frac{\ddot{1}}{\iota(v)} \beta \ddot{*} \int_0^{+\infty} \beta \left(e^{\frac{-\alpha^{-1}(t)}{\alpha^{-1}(v)}} \cdot e^{\alpha^{-1}(k)\alpha^{-1}(t)} \right) d^*t \\
&= \frac{\ddot{1}}{\iota(v)} \beta \ddot{*} \int_0^{+\infty} \beta \left(e^{-\alpha^{-1}(t) \left[\frac{1-\alpha^{-1}(v)\alpha^{-1}(k)}{\alpha^{-1}(v)} \right]} \right) d^*t
\end{aligned}$$

elde edilir. *-integral ve klasik integral arasındaki bağıntıdan faydalanılarak

$$\begin{aligned}
S_N \left\{ \ddot{e}^{(\alpha^{-1}(k)\dot{*}t)} \right\} &= \frac{\ddot{1}}{\iota(v)} \beta \ddot{*} \lim_{c \rightarrow +\infty} * \int_0^c \beta \left(e^{-\alpha^{-1}(t) \left[\frac{1-\alpha^{-1}(v)\alpha^{-1}(k)}{\alpha^{-1}(v)} \right]} \right) d^*t \\
&= \frac{\ddot{1}}{\iota(v)} \beta \ddot{*} \lim_{c \rightarrow +\infty} \beta \left[\int_0^{\alpha^{-1}(c)} \beta^{-1} \left(\beta \left(e^{-\alpha^{-1}(t) \left[\frac{1-\alpha^{-1}(v)\alpha^{-1}(k)}{\alpha^{-1}(v)} \right]} \right) \right) dt \right] \\
&= \frac{\ddot{1}}{\iota(v)} \beta \ddot{*} \lim_{c \rightarrow +\infty} \beta \left(\int_0^{\alpha^{-1}(c)} e^{-t \left[\frac{1-\alpha^{-1}(v)\alpha^{-1}(k)}{\alpha^{-1}(v)} \right]} dt \right) \\
&= \frac{\ddot{1}}{\iota(v)} \beta \ddot{*} \lim_{c \rightarrow +\infty} \beta \left(\frac{-\alpha^{-1}(v)}{1-\alpha^{-1}(v)\alpha^{-1}(k)} \cdot e^{-t \left[\frac{-\alpha^{-1}(v)\alpha^{-1}(k)+1}{\alpha^{-1}(v)} \right]} \Big|_0^{\alpha^{-1}(c)} \right) \\
&= \frac{\ddot{1}}{\iota(v)} \beta \ddot{*} \lim_{c \rightarrow +\infty} \beta \left(\frac{-\alpha^{-1}(v)}{1-\alpha^{-1}(v)\alpha^{-1}(k)} \cdot e^{-\alpha^{-1}(c) \left[\frac{-\alpha^{-1}(v)\alpha^{-1}(k)+1}{\alpha^{-1}(v)} \right]} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\alpha^{-1}(v)}{1-\alpha^{-1}(v)\alpha^{-1}(k)} \right)
\end{aligned}$$

bulunur. $\frac{1}{v}\alpha \succ k$ olduğundan

$$* \lim_{c \rightarrow +\infty} \beta \left(\frac{-\alpha^{-1}(v)}{-\alpha^{-1}(v)\alpha^{-1}(k)+1} \cdot e^{-\alpha^{-1}(c) \left[\frac{1-\alpha^{-1}(v)\alpha^{-1}(k)}{\alpha^{-1}(v)} \right]} \right) = \ddot{0}$$

olur. O halde

$$S_N \left\{ \check{e}^{(\alpha^{-1}(k \times t))}_\beta \right\} = \frac{\check{1}}{\iota(v)} \beta \times \frac{\iota(v)}{\check{1} \times \iota(k) \times \iota(v)} \beta = \frac{\check{1}}{\check{1} \times \iota(k) \times \iota(v)} \beta$$

elde edilir.

Örnek 3.2.4. $\frac{\check{1}}{v} \alpha \succ \check{5}$ için $f(t) = \check{e}^{(\alpha^{-1}(\check{5} \times t))}_\beta$ fonksiyonunun Newtonyen olmayan

Sumudu dönüşümü, $S_N \left\{ \check{e}^{(\alpha^{-1}(k \times t))}_\beta \right\} = \frac{\check{1}}{\check{1} \times \iota(k) \times \iota(v)} \beta$ olduğundan

$$S_N \{f(t)\} = S_N \left\{ \check{e}^{(\alpha^{-1}(\check{5} \times t))}_\beta \right\} = \frac{\check{1}}{\check{1} \times \check{5} \times \iota(v)} \beta$$

şeklinde bulunur.

Teorem 3.2.5. $*$ sin fonksiyonu her $t \in \mathbb{R}_\alpha$ verildiğinde $*: \mathbb{R}_\alpha \rightarrow [\check{0} \times \check{1}, \check{1}]$ olmak üzere $* \sin t = \beta \{\sin(\alpha^{-1}(t))\}$ şeklinde tanımlanır. Herhangi bir $k \in \mathbb{R}_\alpha$ ve $v \succ \check{0}$ için

$$S_N \{* \sin(k \times t)\} = \frac{\iota(k) \times \iota(v)}{\check{1} \times (\iota(k))^{2\beta} \times (\iota(v))^{2\beta}} \beta$$

olur.

İspat: $* \sin(k \times t)$ fonksiyonu Newtonyen olmayan Sumudu dönüşümünün tanımında yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} S_N \{* \sin(k \times t)\} &= \frac{\check{1}}{\iota(v)} \beta \times \int_0^{+\infty} \check{e}^{\left(\frac{-\alpha^{-1}(t)}{\alpha^{-1}(v)}\right)_\beta} \times * \sin(k \times t) d^* t \\ &= \frac{\check{1}}{\iota(v)} \beta \times \lim_{c \rightarrow +\infty} * \int_0^c \beta \left(e^{\frac{-\alpha^{-1}(t)}{\alpha^{-1}(v)}} \right) \times \beta \left(\sin(\alpha^{-1}(k \times t)) \right) d^* t \\ &= \frac{\check{1}}{\iota(v)} \beta \times \lim_{c \rightarrow +\infty} * \int_0^c \beta \left\{ \beta^{-1} \left(\beta \left(e^{\frac{-\alpha^{-1}(t)}{\alpha^{-1}(v)}} \right) \right) \cdot \beta^{-1} \left(\beta \left(\sin(\alpha^{-1}(k \times t)) \right) \right) \right\} d^* t \\ &= \frac{\check{1}}{\iota(v)} \beta \times \lim_{c \rightarrow +\infty} * \int_0^c \beta \left(e^{\frac{-\alpha^{-1}(t)}{\alpha^{-1}(v)}} \cdot \sin(\alpha^{-1}(k) \cdot \alpha^{-1}(t)) \right) d^* t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\dot{\iota}}{\iota(v)} \beta \ddot{\times} * \lim_{c \rightarrow +\infty} \beta \left(\int_0^{\alpha^{-1}(c)} \beta^{-1} \left(\beta \left(e^{\frac{-t}{\alpha^{-1}(v)}} \cdot \sin(\alpha^{-1}(k) \cdot t) \right) \right) dt \right) \\
&= \frac{\dot{\iota}}{\iota(v)} \beta \ddot{\times} * \lim_{c \rightarrow +\infty} \beta \left(\int_0^{\alpha^{-1}(c)} e^{\frac{-t}{\alpha^{-1}(v)}} \cdot \sin(\alpha^{-1}(k)t) dt \right)
\end{aligned}$$

olur. Kısmi integrasyon yöntemi uygulanarak

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\alpha^{-1}(c)} e^{\frac{-t}{\alpha^{-1}(v)}} \cdot \sin(\alpha^{-1}(k)t) dt \\
&= - \frac{\alpha^{-1}(v) \cdot e^{\frac{-t}{\alpha^{-1}(v)}} \cdot (\sin(\alpha^{-1}(k)t) + \alpha^{-1}(k) \cdot \alpha^{-1}(v) \cdot \cos(\alpha^{-1}(k)t))}{(\alpha^{-1}(k))^2 \cdot (\alpha^{-1}(v))^2 + 1} \Bigg|_0^{\alpha^{-1}(c)} \\
&= \frac{\alpha^{-1}(k)(\alpha^{-1}(v))^2}{(\alpha^{-1}(k))^2(\alpha^{-1}(v))^2 + 1} - \frac{e^{\frac{-\alpha^{-1}(c)}{\alpha^{-1}(v)}} \cdot ((\alpha^{-1}(v) \cdot \sin(\alpha^{-1}(c)\alpha^{-1}(k))))}{(\alpha^{-1}(k))^2(\alpha^{-1}(v))^2 + 1} \\
&\quad - \frac{e^{\frac{-\alpha^{-1}(c)}{\alpha^{-1}(v)}} \cdot (\alpha^{-1}(k) \cdot (\cos(\alpha^{-1}(c)\alpha^{-1}(k)(\alpha^{-1}(v))^2)))}{(\alpha^{-1}(k))^2(\alpha^{-1}(v))^2 + 1}
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$\begin{aligned}
S_N\{\sin(k \times t)\} &= \frac{\dot{\iota}}{\iota(v)} \beta \ddot{\times} * \lim_{c \rightarrow +\infty} \beta \left(\frac{\alpha^{-1}(k)(\alpha^{-1}(v))^2}{(\alpha^{-1}(k))^2(\alpha^{-1}(v))^2 + 1} \right. \\
&\quad - \frac{e^{\frac{-\alpha^{-1}(c)}{\alpha^{-1}(v)}} \cdot ((\alpha^{-1}(v) \cdot \sin(\alpha^{-1}(c)\alpha^{-1}(k))))}{(\alpha^{-1}(k))^2(\alpha^{-1}(v))^2 + 1} \\
&\quad \left. - \frac{e^{\frac{-\alpha^{-1}(c)}{\alpha^{-1}(v)}} \cdot (\alpha^{-1}(k) \cdot (\cos(\alpha^{-1}(c)\alpha^{-1}(k)(\alpha^{-1}(v))^2)))}{(\alpha^{-1}(k))^2(\alpha^{-1}(v))^2 + 1} \right) \\
&= \frac{\dot{\iota}}{\iota(v)} \beta \ddot{\times} * \lim_{c \rightarrow +\infty} \left(\frac{\iota(k) \ddot{\times} (\iota(v))^2}{\dot{\iota} \ddot{\times} (\iota(k))^{2\beta} \ddot{\times} (\iota(v))^{2\beta}} \beta \right)
\end{aligned}$$

$$\ddot{\left(\frac{\ddot{\left(\frac{-\alpha^{-1}(c)}{\alpha^{-1}(v)} \right)_{\beta} \ddot{\left((\iota(v) \ddot{*} \sin(k \ddot{*} c)) \ddot{+} \iota(k) \ddot{*} (\iota(v))^{2\beta} \ddot{*} \cos(k \ddot{*} c) \right)}_{(\iota(k))^{2\beta} \ddot{*} (\iota(v))^{2\beta} \ddot{+} \ddot{1}} \right)_{\beta} \right)$$

olur. $\ast \lim_{c \rightarrow +\infty} \left(\ddot{\left(\frac{-\alpha^{-1}(c)}{\alpha^{-1}(v)} \right)_{\beta} \right) = \ddot{0}$ olduğundan

$$\begin{aligned} S_N \{ \ast \sin(k \ddot{*} t) \} &= \frac{\ddot{1}}{\iota(v)} \beta \ddot{*} \frac{\iota(k) \ddot{*} (\iota(v))^{2\beta}}{\ddot{1} \ddot{+} (\iota(k))^{2\beta} \ddot{*} (\iota(v))^{2\beta}} \beta \\ &= \frac{\iota(k) \ddot{*} \iota(v)}{\ddot{1} \ddot{+} (\iota(k))^{2\beta} \ddot{*} (\iota(v))^{2\beta}} \beta \end{aligned}$$

elde edilir.

Özel olarak, geometrik kalkülüste $\alpha(t) = t$ ve $\beta(t) = e^t$ olduğundan $\mathbb{R}_{\alpha} = \mathbb{R}$ ve $\mathbb{R}_{\beta} = \mathbb{R}^+$ olur. Buna göre $f(t) = \ast \sin(k \ddot{*} t) = \beta(\sin(\alpha^{-1}(k) \cdot \alpha^{-1}(t))) = \beta(\sin(k \cdot t)) = e^{\sin(k \cdot t)}$ fonksiyonunun geometrik Sumudu dönüşümü $\frac{e^{k \cdot v}}{e^{1+k^2 \cdot v^2}}$ olur ve

$$S_G \{ e^{\sin(k \cdot t)} \} = \frac{e^{k \cdot v}}{e^{1+k^2 \cdot v^2}}$$

şeklinde gösterilir.

Bigeometrik kalkülüste ise, $\alpha(t) = e^t$ ve $\beta(t) = e^t$ olduğundan $\mathbb{R}_{\alpha} = \mathbb{R}_{\beta} = \mathbb{R}^+$ olur. Buna göre

$$\begin{aligned} f(t) = \ast \sin(k \ddot{*} t) &= \beta(\sin(\alpha^{-1}(k) \cdot \alpha^{-1}(t))) = \beta(\sin(\ln k \cdot \ln t)) \\ &= e^{\sin(\ln(k \cdot t))} \end{aligned}$$

fonksiyonunun bigeometrik Sumudu dönüşümü $\frac{e^{\ln k \cdot \ln v}}{e^{1+(\ln k)^2 \cdot (\ln v)^2}}$ olur ve

$$S_{BG} \{ e^{\sin(\ln(k \cdot t))} \} = \frac{e^{\ln k \cdot \ln v}}{e^{1+(\ln k)^2 \cdot (\ln v)^2}}$$

şeklinde gösterilir.

Bazı fonksiyonların Newtonyen olmayan Sumudu dönüşümleri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 3. Bazı fonksiyonların Newtonyen olmayan Sumudu dönüşümü

$f(t)$	$S_N[f(t)] = F_N(v)$
$\dot{\imath}$	$\dot{\imath}$
$\iota(t)$	$\iota(v)$
$\iota(t)^{(m)}_{\beta}, m \in \mathbb{Z}^+$	$m!_{\beta} \times \iota(v)^{(m)}_{\beta}$
$k \in \mathbb{R}_{\alpha}$ ve $\frac{1}{v} \alpha > k$ için $\ddot{e}^{(\alpha^{-1}(k \times t))_{\beta}}$	$\frac{\dot{\imath}}{\dot{\imath} \ddot{-} \iota(k) \times \iota(v)} \beta$
$\iota(t) \times \ddot{e}^{(\alpha^{-1}(k \times t))_{\beta}}$	$\frac{\iota(v)}{(\dot{\imath} \ddot{-} \iota(k) \times \iota(v))^{2\beta}} \beta$
$* \sin(k \times t)$	$\frac{\iota(k) \times \iota(v)}{\dot{\imath} \ddot{+} (\iota(k))^{2\beta} \times (\iota(v))^{2\beta}} \beta, v > 0$
$* \cos(k \times t)$	$\frac{\dot{\imath}}{\dot{\imath} \ddot{+} (\iota(k))^{2\beta} \times (\iota(v))^{2\beta}} \beta, v > 0$

3.3. Newtonyen Olmayan Sumudu Dönüşümünün Özellikleri

Bu kısımda Newtonyen Olmayan Sumudu dönüşümlerinin bazı temel özellikleri verilecektir.

Teorem 3.3.1. (Newtonyen olmayan Sumudu dönüşümünün lineerliği) Newtonyen olmayan Sumudu dönüşümü lineerdir. f_1, f_2 Newtonyen olmayan Sumudu dönüşümleri olan fonksiyonlar ve $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_{\beta}$ olmak üzere

$$S_N\{\lambda_1 \times f_1(t) \ddot{+} \lambda_2 \times f_2(t)\} = \lambda_1 \times S_N\{f_1(t)\} \ddot{+} \lambda_2 \times S_N\{f_2(t)\}$$

dır.

İspat: Newtonyen olmayan Sumudu dönüşümünün tanımından

$$\begin{aligned} & S_N\{\lambda_1 \times f_1(t) \ddot{+} \lambda_2 \times f_2(t)\} \\ &= \frac{\dot{\imath}}{\iota(v)} \beta \times \int_0^{+\infty} \ddot{e}^{\left(\frac{-\alpha^{-1}(t)}{\alpha^{-1}(v)}\right)_{\beta}} \times (\lambda_1 \times f_1(t) \ddot{+} \lambda_2 \times f_2(t)) d^*t \end{aligned}$$

yazılır. *-integralin β -toplamsal ve β -homojen olmasından yararlanılarak,

$$\begin{aligned}
S_N\{\lambda_1 \times f_1(t) \dot{+} \lambda_2 \times f_2(t)\} &= \frac{\dot{1}}{\iota(v)} \beta \times \int_0^{+\infty} \ddot{e}^{\left(\frac{-\alpha^{-1}(t)}{\alpha^{-1}(v)}\right)} \beta \times \lambda_1 \times f_1(t) d^*t \\
&\quad + \frac{\dot{1}}{\iota(v)} \beta \times \int_0^{+\infty} \ddot{e}^{\left(\frac{-\alpha^{-1}(t)}{\alpha^{-1}(v)}\right)} \beta \times \lambda_2 \times f_2(t) d^*t \\
&= \lambda_1 \times \frac{\dot{1}}{\iota(v)} \beta \times \int_0^{+\infty} \ddot{e}^{\left(\frac{-\alpha^{-1}(t)}{\alpha^{-1}(v)}\right)} \beta \times f_1(t) d^*t \\
&\quad + \lambda_2 \times \frac{\dot{1}}{\iota(v)} \beta \times \int_0^{+\infty} \ddot{e}^{\left(\frac{-\alpha^{-1}(t)}{\alpha^{-1}(v)}\right)} \beta \times f_2(t) d^*t \\
&= \lambda_1 \times S_N\{f_1(t)\} \dot{+} \lambda_2 \times S_N\{f_2(t)\}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 3.3.2. $f(t) = \ddot{3} \times \iota(t) \dot{+} \ddot{e}^{\left(-\alpha^{-1}(t)\right)} \beta$ fonksiyonunun Newtonyen olmayan Sumudu dönüşümünü, dönüşümün lineer olması ve $S_N \left\{ \ddot{e}^{\left(\alpha^{-1}(k \times t)\right)} \beta \right\} = \frac{\dot{1}}{\dot{1} - \iota(k) \times \iota(v)} \beta$ eşitliğinden yararlanılarak

$$\begin{aligned}
S_N \left\{ \ddot{3} \times \iota(t) \dot{+} \ddot{e}^{\left(-\alpha^{-1}(t)\right)} \beta \right\} &= \ddot{3} \times S_N\{\iota(t)\} \dot{+} S_N \left\{ \ddot{e}^{\left(-\alpha^{-1}(t)\right)} \beta \right\} \\
&= \ddot{3} \times \iota(v) \dot{+} \frac{\dot{1}}{\dot{1} - \iota(v)} \beta
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Örnek 3.3.3. $f(t) = \ddot{5} \times \iota(t)^{2\beta} \dot{+} \ddot{2} \times \cos(t) \dot{-} \ddot{4} \times \ddot{e}^{\left(-\alpha^{-1}(t)\right)} \beta$ fonksiyonunun Newtonyen olmayan Sumudu dönüşümü

$$\begin{aligned}
S_N \left\{ \ddot{5} \times \iota(t)^{2\beta} \dot{+} \ddot{2} \times \cos(t) \dot{-} \ddot{4} \times \ddot{e}^{\left(-\alpha^{-1}(t)\right)} \beta \right\} \\
&= \ddot{5} \times S_N\{\iota(t)^{2\beta}\} \dot{+} \ddot{2} \times S_N\{\cos(t)\} \dot{-} \ddot{4} \times S_N \left\{ \ddot{e}^{\left(-\alpha^{-1}(t)\right)} \beta \right\} \\
&= \ddot{5} \times (\ddot{2}!_{\beta} \times \iota(v)^{2\beta}) \dot{+} \ddot{2} \times \left(\frac{\dot{1}}{\dot{1} - \iota(v)} \right)^{2\beta} \beta \dot{-} \ddot{4} \times \left(\frac{\dot{1}}{\dot{1} - \iota(v)} \beta \right) \\
&= \dot{1}\ddot{0} \times \iota(v)^{2\beta} \dot{+} \frac{\ddot{2}}{\dot{1} - \iota(v)} \beta \dot{-} \frac{\ddot{4}}{\dot{1} - \iota(v)} \beta
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Teorem 3.3.4. (Newtonyen olmayan ilk öteleme teoremi) $f(t)$ fonksiyonunun Newtonyen olmayan Sumudu dönüşümü $S_N\{f(t)\} = F_N(v)$ olmak üzere herhangi bir $k \in \mathbb{R}_\alpha$ için

$$S_N \left\{ \ddot{e}^{(\alpha^{-1}(k \times t))}_\beta \times f(t) \right\} = \frac{\dot{1}}{\dot{1} - \dot{1}(k) \times \dot{1}(v)} \beta \times F_N \left(\frac{v}{\dot{1} - k \times v} \alpha \right)$$

dır.

İspat: $\ddot{e}^{(\alpha^{-1}(k \times t))}_\beta \times f(t)$ β -çarpımının Newtonyen olmayan Sumudu dönüşümünü bulmak için fonksiyon (5) numaralı denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} S_N \left\{ \ddot{e}^{(\alpha^{-1}(k \times t))}_\beta \times f(t) \right\} &= * \int_0^{+\infty} \ddot{e}^{(-\alpha^{-1}(t))}_\beta \times \ddot{e}^{(-\alpha^{-1}(k \times v \times t))}_\beta \times f(v \times t) d^* t \\ &= * \int_0^{+\infty} \beta \left(e^{(-\alpha^{-1}(t)) \cdot [1 - \alpha^{-1}(k) \alpha^{-1}(v)]} \right) \times f(v \times t) d^* t \\ &= * \lim_{c \rightarrow +\infty} * \int_0^c \beta \left(e^{(-\alpha^{-1}(t)) \cdot [1 - \alpha^{-1}(k) \alpha^{-1}(v)]} \right) \times f(v \times t) d^* t \\ &= * \lim_{c \rightarrow +\infty} \beta \left[\int_0^{\alpha^{-1}(c)} \beta^{-1} \left(\beta \left(e^{(-t) [1 - \alpha^{-1}(k) \alpha^{-1}(v)]} \right) \right) \cdot \beta^{-1} \left(f(\alpha(\alpha^{-1}(v), t)) \right) dt \right] \end{aligned}$$

bulunur. Burada $t \cdot [1 - \alpha^{-1}(k) \alpha^{-1}(v)] = w$ değişken değişimi yapılırsa $dt \cdot [1 - \alpha^{-1}(k) \alpha^{-1}(v)] = dw$ olur. O halde,

$$t = \frac{w}{1 - \alpha^{-1}(k) \alpha^{-1}(v)} \text{ ve } dt = \frac{1}{1 - \alpha^{-1}(k) \alpha^{-1}(v)} \cdot dw$$

değişken değişimi integrale uygulanırsa;

$$\begin{aligned} S_N \left\{ \ddot{e}^{(\alpha^{-1}(k \times t))}_\beta \times f(t) \right\} &= * \lim_{c \rightarrow +\infty} \beta \left[\int_0^{\alpha^{-1}(c) \cdot [1 - \alpha^{-1}(k) \alpha^{-1}(v)]} e^{(-w)} \right. \\ &\quad \left. \cdot \beta^{-1} \left(f \left(\alpha \left(\frac{\alpha^{-1}(v)}{1 - \alpha^{-1}(k) \alpha^{-1}(v)} \cdot w \right) \right) \right) \cdot \frac{dw}{1 - \alpha^{-1}(k) \alpha^{-1}(v)} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= {}^* \lim_{c \rightarrow +\infty} \beta \left[\frac{1}{1 - \alpha^{-1}(k)\alpha^{-1}(v)} \cdot \int_0^{\alpha^{-1}(c) \cdot [1 - \alpha^{-1}(k)\alpha^{-1}(v)]} e^{(-w)} \right. \\
&\quad \left. \cdot \beta^{-1} \left(f \left(\alpha \left(\frac{\alpha^{-1}(v)}{1 - \alpha^{-1}(k)\alpha^{-1}(v)} \cdot w \right) \right) \right) dw \right] \\
&= \frac{\dot{\imath}}{\dot{\imath} \dot{-} \iota(k) \dot{\times} \iota(v)} \beta \dot{\times} {}^* \lim_{c \rightarrow +\infty} {}^* \int_0^{c \dot{\times} [\dot{\imath} \dot{-} k \dot{\times} v]} e^{(-\alpha^{-1}(w))} \beta \dot{\times} f \left(\frac{v}{\dot{\imath} \dot{-} k \dot{\times} v} \alpha \dot{\times} w \right) d^* w \\
&= \frac{\dot{\imath}}{\dot{\imath} \dot{-} \iota(k) \dot{\times} \iota(v)} \beta \dot{\times} F_N \left(\frac{v}{\dot{\imath} \dot{-} k \dot{\times} v} \alpha \right)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.3.5. (Newtoneyen olmayan ikinci öteleme teoremi) $f(t)$ fonksiyonunun Newtoneyen olmayan Sumudu dönüşümü $S_N\{f(t)\} = F_N(v)$ ve

$$h(t) = \begin{cases} \dot{\imath}, \dot{\imath} \dot{-} t \dot{-} k \\ f(t \dot{-} k), t \dot{-} k \end{cases}$$

olsun. Bu takdirde $h(t)$ fonksiyonunun Newtoneyen olmayan Sumudu dönüşümü,

$$S_N\{h(t)\} = \dot{e}^{\left(\frac{-\alpha^{-1}(k)}{\alpha^{-1}(v)}\right)} \beta \dot{\times} F_N(v)$$

olur.

İspat: Newtoneyen olmayan Sumudu dönüşümünün tanımından

$$S_N\{h(t)\} = \frac{\dot{\imath}}{\iota(v)} \beta \dot{\times} {}^* \int_0^{+\infty} \dot{e}^{\left(\frac{-\alpha^{-1}(t)}{\alpha^{-1}(v)}\right)} \beta \dot{\times} h(t) d^* t$$

olur. O halde $h(t)$ parçalı fonksiyonunun tanımından,

$$S_N\{h(t)\} = \frac{\dot{\imath}}{\iota(v)} \beta \dot{\times} \left({}^* \int_0^k \dot{e}^{\left(\frac{-\alpha^{-1}(t)}{\alpha^{-1}(v)}\right)} \beta \dot{\times} \dot{\imath} d^* t \dot{+} {}^* \int_k^{+\infty} \dot{e}^{\left(\frac{-\alpha^{-1}(t)}{\alpha^{-1}(v)}\right)} \beta \dot{\times} f(t \dot{-} k) d^* t \right)$$

$$= \frac{\dot{1}}{l(v)} \beta \ddot{*} \int_k^{+\infty} \ddot{e}^{\left(\frac{-\alpha^{-1}(t)}{\alpha^{-1}(v)}\right)_\beta} \ddot{*} f(t \dot{-} k) d^* t$$

yazılır. Böylece

$$\begin{aligned} S_N\{h(t)\} &= \frac{\dot{1}}{l(v)} \beta \ddot{*} \lim_{c \rightarrow +\infty} \left(\int_k^c \ddot{e}^{\left(\frac{-\alpha^{-1}(t)}{\alpha^{-1}(v)}\right)_\beta} \ddot{*} f(t \dot{-} k) d^* t \right) \\ &= \frac{\dot{1}}{l(v)} \beta \ddot{*} \lim_{c \rightarrow +\infty} \left(\beta \left[\int_{\alpha^{-1}(k)}^{\alpha^{-1}(c)} e^{\frac{-t}{\alpha^{-1}(v)}} \cdot \beta^{-1} \left(f \left(\alpha(t - \alpha^{-1}(k)) \right) \right) dt \right] \right) \end{aligned} \quad (9)$$

olur. $t - \alpha^{-1}(k) = w$ dönüşümü yapılırsa $t = w + \alpha^{-1}(k)$ ve $dt = dw$ olur. (9) ifadesinde değişken değiştirme yapılarak gerekli düzenlemeler ile

$$\begin{aligned} S_N\{h(t)\} &= \frac{\dot{1}}{l(v)} \beta \ddot{*} \lim_{c \rightarrow +\infty} \left(\beta \left[\int_0^{\alpha^{-1}(c) - \alpha^{-1}(k)} e^{\frac{-w - \alpha^{-1}(k)}{\alpha^{-1}(v)}} \cdot \beta^{-1} \left(f(\alpha(w)) \right) dw \right] \right) \\ &= \frac{\dot{1}}{l(v)} \beta \ddot{*} \lim_{c \rightarrow +\infty} \left(\beta \left[e^{\frac{-\alpha^{-1}(k)}{\alpha^{-1}(v)}} \cdot \int_0^{\alpha^{-1}(c) - \alpha^{-1}(k)} e^{\frac{-w}{\alpha^{-1}(v)}} \cdot \beta^{-1} \left(f(\alpha(w)) \right) dw \right] \right) \\ &= \ddot{e}^{\left(\frac{-\alpha^{-1}(k)}{\alpha^{-1}(v)}\right)_\beta} \ddot{*} \frac{\dot{1}}{l(v)} \beta \ddot{*} \lim_{c \rightarrow +\infty} \left(\int_0^{c \dot{-} k} \ddot{e}^{\left(\frac{-\alpha^{-1}(w)}{\alpha^{-1}(v)}\right)_\beta} \ddot{*} f(w) d^* w \right) \\ &= \ddot{e}^{\left(\frac{-\alpha^{-1}(k)}{\alpha^{-1}(v)}\right)_\beta} \ddot{*} F_N(v) \end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 3.3.6. $f(t)$ fonksiyonunun Newtonyen olmayan Sumudu dönüşümü $S_N\{f(t)\} = F_N(v)$ olmak üzere

$$S_N\{f(k \dot{*} t)\} = F_N(k \dot{*} v)$$

olur.

İspat: $f(k \dot{*} t)$ fonksiyonunun Newtonyen olmayan Sumudu dönüşümünü bulmak için fonksiyon (5) numaralı denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
S_N\{f(k \times t)\} &= * \int_0^{+\infty} \check{e}^{(-\alpha^{-1}(t))_\beta} \check{\times} f(v \times k \times t) d^* t \\
&= F_N(k \times v)
\end{aligned}$$

olduğu aşıkardır.

Teorem 3.3.7. (I. Mertebeden *-türevin Newtonyen olmayan Sumudu dönüşümü)

$f(t)$ fonksiyonu $[\check{0}, +\infty)$ aralığında *-sürekli, γ β -üstel mertebeden ve $f^*(t)$, $[\check{0}, +\infty)$ aralığında parçalı *-sürekli olmak üzere $\frac{\check{1}}{v} \alpha \check{>} \gamma$ için,

$$S_N\{f^*(t)\} = \frac{S_N\{f(t)\} \check{\ddot{-}} f(\check{0})}{\iota(v)} \beta \quad (10)$$

olur.

İspat: $f(t)$ fonksiyonunun *-türevi olan $f^*(t)$ fonksiyonu Newtonyen olmayan Sumudu dönüşümü tanımında yerine yazılırsa

$$S_N\{f^*(t)\} = \frac{\check{1}}{\iota(v)} \beta \check{\times} * \int_0^{+\infty} \check{e}^{\left(\frac{-\alpha^{-1}(t)}{\alpha^{-1}(v)}\right)_\beta} \check{\times} f^*(t) d^* t$$

olur. Has olmayan *-integral tanımından

$$\begin{aligned}
S_N\{f^*(t)\} &= \frac{\check{1}}{\iota(v)} \beta \check{\times} * \lim_{c \rightarrow +\infty} * \int_0^c \check{e}^{\left(\frac{-\alpha^{-1}(t)}{\alpha^{-1}(v)}\right)_\beta} \check{\times} f^*(t) d^* t \\
&= \frac{\check{1}}{\iota(v)} \beta \check{\times} * \lim_{c \rightarrow +\infty} \left[\beta \left(\int_0^{\alpha^{-1}(c)} e^{\frac{-t}{\alpha^{-1}(v)}} \cdot \beta^{-1} (f^*(\alpha(t))) dt \right) \right] \quad (11)
\end{aligned}$$

yazılır. Klasik türev ile *-türev arasındaki ilişkiden $\beta^{-1} (f^*(\alpha(t))) = (\beta^{-1} f \alpha)'(t)$ olduğu biliniyor. Bu eşitlik (11) numaralı denklemde yerine yazılırsa

$$\int_0^{\alpha^{-1}(c)} e^{\frac{-t}{\alpha^{-1}(v)}} \cdot \beta^{-1} (f^*(\alpha(t))) dt = \int_0^{\alpha^{-1}(c)} e^{\frac{-t}{\alpha^{-1}(v)}} \cdot (\beta^{-1} f \alpha)'(t) dt$$

olur. Kısmi integrasyon yöntemi kullanılarak

$$\begin{aligned} & \int_0^{\alpha^{-1}(c)} e^{\frac{-t}{\alpha^{-1}(v)}} \cdot \beta^{-1} (f^*(\alpha(t))) dt \\ &= e^{\frac{-t}{\alpha^{-1}(v)}} \cdot (\beta^{-1} f \alpha)(t) \Big|_0^{\alpha^{-1}(c)} + \frac{1}{\alpha^{-1}(v)} \cdot \int_0^{\alpha^{-1}(c)} e^{\frac{-t}{\alpha^{-1}(v)}} \cdot (\beta^{-1} f \alpha)(t) dt \\ &= e^{\frac{-\alpha^{-1}(c)}{\alpha^{-1}(v)}} \cdot (\beta^{-1} f(c)) - \beta^{-1} f(\alpha(0)) + \frac{1}{\alpha^{-1}(v)} \cdot \int_0^{\alpha^{-1}(c)} e^{\frac{-t}{\alpha^{-1}(v)}} \cdot (\beta^{-1} f \alpha)(t) dt \end{aligned}$$

bulunur. Böylece (11) ifadesinden

$$\begin{aligned} S_N\{f^*(t)\} &= \frac{\dot{\mathbf{i}}}{\iota(v)} \beta \ddot{\times} * \lim_{c \rightarrow +\infty} \beta \left(e^{\frac{-\alpha^{-1}(c)}{\alpha^{-1}(v)}} \cdot (\beta^{-1} f(c)) - \beta^{-1} f(\dot{0}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\alpha^{-1}(v)} \cdot \int_0^{\alpha^{-1}(c)} e^{\frac{-t}{\alpha^{-1}(v)}} \cdot (\beta^{-1} f \alpha)(t) dt \right) \\ &= \frac{\dot{\mathbf{i}}}{\iota(v)} \beta \ddot{\times} * \lim_{c \rightarrow +\infty} \left[\ddot{\mathbf{e}}^{\left(\frac{-\alpha^{-1}(c)}{\alpha^{-1}(v)}\right) \beta} \ddot{\times} f(c) \ddot{-} f(\dot{0}) \right. \\ &\quad \left. \ddot{+} \frac{\dot{\mathbf{i}}}{\iota(v)} \beta \ddot{\times} \beta \left(\int_0^{\alpha^{-1}(c)} e^{\frac{-t}{\alpha^{-1}(v)}} \cdot (\beta^{-1} f \alpha)(t) dt \right) \right] \\ &= \frac{\dot{\mathbf{i}}}{\iota(v)} \beta \ddot{\times} * \lim_{c \rightarrow +\infty} \left[\ddot{\mathbf{e}}^{\left(\frac{-\alpha^{-1}(c)}{\alpha^{-1}(v)}\right) \beta} \ddot{\times} f(c) \ddot{-} f(\dot{0}) \right] \\ &\quad \ddot{+} \frac{\dot{\mathbf{i}}}{\iota(v)} \beta \ddot{\times} \frac{\dot{\mathbf{i}}}{\iota(v)} \beta \ddot{\times} * \lim_{c \rightarrow +\infty} \beta \left(\int_0^{\alpha^{-1}(c)} e^{\frac{-t}{\alpha^{-1}(v)}} \cdot (\beta^{-1} f \alpha)(t) dt \right) \\ &= \frac{\dot{\mathbf{i}}}{\iota(v)} \beta \ddot{\times} \left[* \lim_{c \rightarrow +\infty} \ddot{\mathbf{e}}^{\left(\frac{-\alpha^{-1}(c)}{\alpha^{-1}(v)}\right) \beta} \ddot{\times} f(c) \right] \ddot{-} \frac{\dot{\mathbf{i}}}{\iota(v)} \beta \ddot{\times} f(\dot{0}) \end{aligned}$$

$$\ddot{+} \frac{\ddot{1}}{l(v)} \beta \ddot{\times} \frac{\ddot{1}}{l(v)} \beta \ddot{\times} * \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_0^c \ddot{e}^{\left(\frac{-\alpha^{-1}(t)}{\alpha^{-1}(v)}\right) \beta} \ddot{\times} f(t) d^* t \quad (12)$$

olur. f fonksiyonu γ β -üstel mertebeden olduğundan her $t \in \mathbb{R}_\alpha$ için

$$|f(t)|_\beta \leq M \ddot{\times} \ddot{e}^{(\alpha^{-1}(\gamma \times t)) \beta}$$

olacak şekilde bir $M \geq \ddot{0}$ sayısı vardır. Buradan

$$\begin{aligned} \left| \ddot{e}^{\left(\frac{-\alpha^{-1}(c)}{\alpha^{-1}(v)}\right) \beta} \ddot{\times} f(c) \right|_\beta &\leq M \ddot{\times} \ddot{e}^{(\alpha^{-1}(\gamma) \cdot \alpha^{-1}(c) - \frac{\alpha^{-1}(c)}{\alpha^{-1}(v)}) \beta} \\ &= M \ddot{\times} \ddot{e}^{\left(-\alpha^{-1}(c) \left(-\alpha^{-1}(\gamma) + \frac{1}{\alpha^{-1}(v)}\right)\right) \beta} \end{aligned}$$

yazılır. Bu ifadeden yola çıkarak $\frac{1}{v} \alpha > \gamma$ olmak üzere $* \lim_{c \rightarrow +\infty} \ddot{e}^{\left(\frac{-\alpha^{-1}(c)}{\alpha^{-1}(v)}\right) \beta} \ddot{\times} f(c) = \ddot{0}$ elde edilir. Böylece (12) ifadesinden

$$\begin{aligned} S_N\{f^*(t)\} &= \frac{\ddot{1}}{l(v)} \beta \ddot{\times} \left[* \lim_{c \rightarrow +\infty} \ddot{e}^{\left(\frac{-\alpha^{-1}(c)}{\alpha^{-1}(v)}\right) \beta} \ddot{\times} f(c) \right] \ddot{-} \frac{\ddot{1}}{l(v)} \beta \ddot{\times} f(\ddot{0}) \\ &\quad \ddot{+} \frac{\ddot{1}}{l(v)} \beta \ddot{\times} \frac{\ddot{1}}{l(v)} \beta \ddot{\times} * \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_0^c \ddot{e}^{\left(\frac{-\alpha^{-1}(t)}{\alpha^{-1}(v)}\right) \beta} \ddot{\times} f(t) d^* t \\ &= \frac{\ddot{1}}{l(v)} \beta \ddot{\times} \ddot{0} \ddot{-} \frac{\ddot{1}}{l(v)} \beta \ddot{\times} f(\ddot{0}) \ddot{+} \frac{\ddot{1}}{l(v)} \beta \ddot{\times} S_N\{f(t)\} \\ &= \frac{\ddot{1}}{l(v)} \beta \ddot{\times} [S_N\{f(t)\} \ddot{-} f(\ddot{0})] \end{aligned}$$

bulunur. Bu ifade

$$S_N\{f^*(t)\} = \frac{S_N\{f(t)\} \ddot{-} f(\ddot{0})}{l(v)} \beta$$

şeklinde de yazılabilir.

İkinci mertebeden *-türevin Newtonyen olmayan Sumudu dönüşümü

$$S_N\{f^{*(2)}(t)\} = S_N\{(f^*(t))^*\} = \frac{S_N\{f^*(t)\} \ddot{-} f^*(\dot{0})}{\iota(v)} \beta$$

yazılır. Böylece (10) ifadesinden faydalanılarak

$$S_N\{f^{*(2)}(t)\} = \frac{S_N\{f(t)\}}{\iota^{2\beta}(v)} \beta \ddot{-} \frac{f(\dot{0})}{\iota^{2\beta}(v)} \beta \ddot{-} \frac{f^*(\dot{0})}{\iota(v)} \beta$$

elde edilir. Üçüncü mertebeden *- türevin Newtonyen olmayan Sumudu dönüşümü

$$\begin{aligned} S_N\{f^{*(3)}(t)\} &= S_N\{(f^{*(2)}(t))^*\} = \frac{S_N\{f^{*(2)}(t)\} \ddot{-} f^{*(2)}(\dot{0})}{\iota(v)} \beta \\ &= \frac{\frac{S_N\{f(t)\}}{\iota^{2\beta}(v)} \beta \ddot{-} \frac{f(\dot{0})}{\iota^{2\beta}(v)} \beta \ddot{-} \frac{f^*(\dot{0})}{\iota(v)} \beta \ddot{-} f^{*(2)}(\dot{0})}{\iota(v)} \beta \end{aligned}$$

olur. Bu ifade düzenlenirse

$$S_N\{f^{*(3)}(t)\} = \frac{S_N\{f(t)\}}{\iota^{3\beta}(v)} \beta \ddot{-} \frac{f(\dot{0})}{\iota^{3\beta}(v)} \beta \ddot{-} \frac{f^*(\dot{0})}{\iota^{2\beta}(v)} \beta \ddot{-} \frac{f^{*(2)}(\dot{0})}{\iota(v)} \beta$$

şeklinde yazılır.

Bu şekilde devam edilirse aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.3.8. $f(t), f^*(t), \dots, f^{*(n-1)}(t)$ fonksiyonları $[\dot{0}, +\infty)$ aralığında *-sürekli, γ β -üstel mertebeden ve n . mertebeden *- türevi $f^{*(n)}(t)$, $[\dot{0}, +\infty)$ aralığında parçalı *-sürekli olmak üzere $\frac{1}{v}\alpha \dot{>} \gamma$ için,

$$S_N\{f^{*(n)}(t)\} = \frac{S_N\{f(t)\}}{\iota^{n\beta}(v)} \beta \ddot{-} \frac{f(\dot{0})}{\iota^{n\beta}(v)} \beta \ddot{-} \frac{f^*(\dot{0})}{\iota^{(n-1)\beta}(v)} \beta \ddot{-} \dots \ddot{-} \frac{f^{*(n-1)}(\dot{0})}{\iota(v)} \beta$$

olur.

Teorem 3.3.9. f fonksiyonu $[\dot{0}, +\infty)$ aralığında parçalı *-sürekli ve γ β -üstel mertebeden bir fonksiyon olsun. $f(t)$ fonksiyonunun Newtonyen olmayan Sumudu dönüşümü $S_N\{f(t)\} = F_N(v)$ olmak üzere,

$$S_N\{\iota(t) \times f(t)\} = \iota^{2\beta}(v) \times \frac{d^*}{dv^*} F_N(v) \dot{+} \iota(v) \times F_N(v)$$

olur.

İspat: Newtonyen olmayan Sumudu tanımı ve *-integral ile klasik integral arasındaki bağıntı kullanılarak,

$$\begin{aligned}
F_N(v) &= {}^* \int_0^{+\infty} \frac{\ddot{\iota}}{\iota(v)} \beta \times \ddot{e}^{\left(\frac{-\alpha^{-1}(t)}{\alpha^{-1}(v)}\right)_\beta} \times f(t) d^* t \\
&= {}^* \lim_{c \rightarrow +\infty} {}^* \int_0^c \frac{\ddot{\iota}}{\iota(v)} \beta \times \ddot{e}^{\left(\frac{-\alpha^{-1}(t)}{\alpha^{-1}(v)}\right)_\beta} \times f(t) d^* t \\
&= {}^* \lim_{c \rightarrow +\infty} {}^* \int_0^c \beta \left(\frac{\beta^{-1}(1)}{\beta^{-1}(\beta(\alpha^{-1}(v)))} \right) \times \beta \left(e^{\frac{-\alpha^{-1}(t)}{\alpha^{-1}(v)}} \right) \times f(t) d^* t \\
&= {}^* \lim_{c \rightarrow +\infty} {}^* \int_0^c \beta \left[\frac{1}{\alpha^{-1}(v)} \cdot e^{\frac{-\alpha^{-1}(t)}{\alpha^{-1}(v)}} \cdot \beta^{-1}(f(t)) \right] d^* t \\
&= {}^* \lim_{c \rightarrow +\infty} \beta \left[\int_0^{\alpha^{-1}(c)} \frac{1}{\alpha^{-1}(v)} \cdot e^{\frac{-t}{\alpha^{-1}(v)}} \cdot \beta^{-1} f(\alpha^{-1}(t)) dt \right] \\
&= \beta \left[\lim_{c \rightarrow \infty} \beta^{-1} \left(\beta \left[\int_0^c \frac{1}{\alpha^{-1}(v)} \cdot e^{\frac{-t}{\alpha^{-1}(v)}} \cdot \beta^{-1} f(\alpha^{-1}(t)) dt \right] \right) \right] \\
&= \beta \left[\int_0^\infty \frac{1}{\alpha^{-1}(v)} \cdot e^{\frac{-t}{\alpha^{-1}(v)}} \cdot \beta^{-1} f(\alpha^{-1}(t)) dt \right] \tag{13}
\end{aligned}$$

bulunur. *-türev ve klasik türev arasındaki ilişkiden

$$\frac{d^*}{dv^*} F_N(v) = F_N^*(v) = \beta \left[\frac{(\beta^{-1} \circ F_N)'(v)}{(\alpha^{-1})'(v)} \right]$$

yazılır. Böylece (13) ifadesi gereğince

$$F_N^*(v) = \beta \left[\frac{\left(\int_0^\infty \frac{1}{\alpha^{-1}(v)} \cdot e^{\frac{-t}{\alpha^{-1}(v)}} \cdot \beta^{-1} f(\alpha^{-1}(t)) dt \right)'}{(\alpha^{-1})'(v)} \right] \quad (14)$$

olur. Has olmayan integral için Leibnitz teoreminden (Schiff, 1999; Teorem A.12)

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dv} \int_0^\infty \frac{1}{\alpha^{-1}(v)} \cdot e^{\frac{-t}{\alpha^{-1}(v)}} \cdot \beta^{-1} f(\alpha^{-1}(t)) dt \\ &= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\alpha^{-1}(v)} \cdot e^{\frac{-t}{\alpha^{-1}(v)}} \cdot \beta^{-1} f(\alpha^{-1}(t)) \right) dt \\ &= \int_0^\infty - \frac{(\alpha^{-1}(v))'}{(\alpha^{-1}(v))^2} \cdot e^{\frac{-t}{\alpha^{-1}(v)}} \cdot \beta^{-1} f(\alpha^{-1}(t)) dt \\ &+ \int_0^\infty \frac{1}{\alpha^{-1}(v)} \cdot \left(\frac{t(\alpha^{-1}(v))'}{(\alpha^{-1}(v))^2} \right) \cdot e^{\frac{-t}{\alpha^{-1}(v)}} \cdot \beta^{-1} f(\alpha^{-1}(t)) dt \end{aligned} \quad (15)$$

bulunur. (15) eşitliği (14) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} F_N^*(v) &= \beta \left[\frac{1}{(\alpha^{-1}(v))'} \cdot \left(\frac{(\alpha^{-1}(v))'}{(\alpha^{-1}(v))^3} \int_0^\infty t \cdot e^{\frac{-t}{\alpha^{-1}(v)}} \beta^{-1} f(\alpha^{-1}(t)) dt \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{(\alpha^{-1}(v))'}{(\alpha^{-1}(v))^2} \int_0^\infty e^{\frac{-t}{\alpha^{-1}(v)}} \cdot \beta^{-1} f(\alpha^{-1}(t)) dt \right) \right] \\ &= \beta \left[\frac{1}{(\alpha^{-1}(v))^2} \cdot \int_0^\infty \frac{1}{\alpha^{-1}(v)} \cdot t \cdot e^{\frac{-t}{\alpha^{-1}(v)}} \beta^{-1} f(\alpha^{-1}(t)) dt \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\alpha^{-1}(v)} \int_0^\infty \frac{1}{\alpha^{-1}(v)} \cdot e^{\frac{-t}{\alpha^{-1}(v)}} \cdot \beta^{-1} f(\alpha^{-1}(t)) dt \right] \\ &= \frac{\ddot{1}}{l^{2\beta}(v)} \beta \ddot{\times} \beta \left[\int_0^\infty \frac{1}{\alpha^{-1}(v)} \cdot t \cdot e^{\frac{-t}{\alpha^{-1}(v)}} \beta^{-1} f(\alpha^{-1}(t)) dt \right] \\ &= \frac{\ddot{1}}{l(v)} \beta \ddot{\times} \frac{\ddot{1}}{l(v)} \beta \ddot{\times} \int_0^{+\infty} \frac{\ddot{1}}{l(v)} \beta \ddot{\times} e^{\left(\frac{-\alpha^{-1}(t)}{\alpha^{-1}(v)} \right) \beta} \ddot{\times} f(t) d^* t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\dot{\iota}}{\iota^{2\beta}(v)} \beta \times \beta \left[\int_0^\infty \frac{1}{\alpha^{-1}(v)} \cdot t \cdot e^{\frac{-t}{\alpha^{-1}(v)}} \beta^{-1} f(\alpha^{-1}(t)) dt \right] \doteq \frac{\dot{\iota}}{\iota(v)} \beta \times F_N(v) \\
&= \frac{\dot{\iota}}{\iota^{2\beta}(v)} \beta \times \beta \left[\lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^c \frac{1}{\alpha^{-1}(v)} \cdot t \cdot e^{\frac{-t}{\alpha^{-1}(v)}} \beta^{-1} (f(\alpha^{-1}(t))) dt \right] \doteq \frac{\dot{\iota}}{\iota(v)} \beta \times F_N(v) \\
&= \frac{\dot{\iota}}{\iota^{2\beta}(v)} \beta \times \beta \left[\lim_{c \rightarrow \infty} \beta^{-1} \left(\beta \left(\int_0^c \frac{1}{\alpha^{-1}(v)} \cdot t \cdot e^{\frac{-t}{\alpha^{-1}(v)}} \beta^{-1} (f(\alpha^{-1}(t))) dt \right) \right) \right] \\
&\quad \doteq \frac{\dot{\iota}}{\iota(v)} \beta \times F_N(v) \\
&= \frac{\dot{\iota}}{\iota^{2\beta}(v)} \beta \times \lim_{c \rightarrow +\infty} \beta \left[\int_0^{\alpha^{-1}(c)} \frac{1}{\alpha^{-1}(v)} \cdot t \cdot e^{\frac{-t}{\alpha^{-1}(v)}} \beta^{-1} (f(\alpha^{-1}(t))) dt \right] \doteq \frac{\dot{\iota}}{\iota(v)} \beta \times F_N(v) \\
&= \frac{\dot{\iota}}{\iota^{2\beta}(v)} \beta \times \left[\lim_{c \rightarrow +\infty} \int_0^c \frac{\dot{\iota}}{\iota(v)} \beta \times e^{\left(\frac{\alpha^{-1}(t)}{\alpha^{-1}(v)}\right) \beta} \times \iota(t) \times f(t) d^* t \right] \doteq \frac{\dot{\iota}}{\iota(v)} \beta \times F_N(v) \\
&= \frac{\dot{\iota}}{\iota^{2\beta}(v)} \beta \times S_N\{\iota(t) \times f(t)\} \doteq \frac{\dot{\iota}}{\iota(v)} \beta \times F_N(v)
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Bu ifade düzenlendiğinde istenilen

$$S_N\{\iota(t) \times f(t)\} = \iota^{2\beta}(v) \times F_N^*(v) \dot{+} \iota(v) \times F_N(v)$$

eşitliği bulunmuş olur.

Bu teorem aşağıda ifade edildiği gibi genelleştirilebilir.

Teorem 3.3.10. f fonksiyonu $[\dot{0}, \dot{+}\infty)$ aralığında parçalı $*$ -sürekli ve $\gamma \beta$ -üstel mertebeden bir fonksiyon olsun. $f(t)$ fonksiyonunun Newtonyen olmayan Sumudu dönüşümü $S_N\{f(t)\} = F_N(v)$ olmak üzere $\iota^{n\beta}(t) \times f(t)$ β -çarpımının Newtonyen olmayan Sumudu dönüşümü

$$S_N\{\iota^{n\beta}(t) \times f(t)\} = \iota^{n\beta}(v) \times \sum_{k=0}^n a_k^n \times \iota(v)^{k\beta} \times \frac{d^{*(n)}}{dv^n} F_N(v)$$

$$a_0^n = \dot{n}!_\beta, a_n^n = \dot{1}, a_1^n = \dot{n}!_\beta \times \dot{n}, a_{n-1}^n = \dot{n}^{2\beta} \text{ ve } k = \dot{2}, \dot{3}, \dots, \dot{n} \dot{-} \dot{2}$$

$$a_k^n = a_{k-1}^k \dot{+} (n \dot{+} k) \times a_k^{n-1}$$

şeklindedir.

Tanım 3.3.11. Herhangi bir $\varepsilon \geq 0$ sayısı ve $\tau \geq u_0$ koşulunu sağlayan her $\tau \in A$ için

$$\left| \int_{\tau}^{+\infty} f(u) d^* u \right| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $u_0 \in \mathbb{R}_\alpha$ sayısı varsa $\int_0^{+\infty} f(u) d^* u$ has olmayan *-integrali A üzerinde *-düzgün yakınsaktır denir.

Teorem 3.3.12. (*-Leibnitz Teoremi) $f(v, t)$ ve $\frac{\partial^* f(v, t)}{\partial v^*}$ fonksiyonları $t = t_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ sonlu noktaları haricinde $a \leq v \leq b$, $0 \leq t \leq T$, $T > 0$ aralığında *-sürekli olsunlar.

$$F(v) = \int_0^{+\infty} f(v, t) d^* t$$

-yakınsak ve $\int_0^{+\infty} \frac{\partial^ f(v, t)}{\partial v^*} d^* t$ *-düzgün yakınsak ise, bu takdirde

$$\frac{d^*}{dv^*} F(v) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^* f(v, t)}{\partial v^*} d^* t$$

olur.

İspat: *-integral ve *-limit tanımı gereğince

$$F(v) = \int_0^{+\infty} f(v, t) d^* t$$

$$= \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_0^c f(v, t) d^* t$$

$$= \lim_{c \rightarrow +\infty} \beta \left[\int_0^{\alpha^{-1}(c)} \beta^{-1} f(v, \alpha^{-1}(t)) dt \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \beta \left[\lim_{c \rightarrow \infty} \beta^{-1} \left(\beta \left[\int_0^c \beta^{-1} f(v, \alpha^{-1}(t)) dt \right] \right) \right] \\
&= \beta \left[\int_0^{\infty} \beta^{-1} f(v, \alpha^{-1}(t)) dt \right]
\end{aligned}$$

bulunur. *-türev ve klasik türev arasındaki ilişkiden faydalanılarak

$$\begin{aligned}
\frac{d^*}{dv^*} F(v) = F^*(v) &= \beta \left[\frac{(\beta^{-1} \circ F)'(v)}{(\alpha^{-1})'(v)} \right] \\
&= \beta \left[\frac{\left(\int_0^{\infty} \beta^{-1} f(v, \alpha^{-1}(t)) dt \right)'}{(\alpha^{-1})'(v)} \right] \tag{16}
\end{aligned}$$

olur. Has olmayan integral için Leibnitz teoremi gereğince (Schiff, 1999: Teorem A.12)

$$\frac{d}{dv} \left(\int_0^{\infty} \beta^{-1} f(v, \alpha^{-1}(t)) dt \right) = \left(\int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial v} (\beta^{-1} f(v, \alpha^{-1}(t))) dt \right) \tag{17}$$

yazılır. (16) ve (17) ifadelerinden gerekli düzenlemeler yapılarak

$$\begin{aligned}
\frac{d^*}{dv^*} F(x) &= \beta \left[\frac{\int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial v} (\beta^{-1} f(v, \alpha^{-1}(t))) dt}{(\alpha^{-1})'(v)} \right] \\
&= \beta \left[\int_0^{\infty} \frac{1}{(\alpha^{-1})'(v)} \frac{\partial}{\partial v} (\beta^{-1} f(v, \alpha^{-1}(t))) dt \right] \\
&= \beta \left[\int_0^{\infty} \beta^{-1} \left[\beta \left(\frac{\frac{\partial}{\partial v} (\beta^{-1} f(v, \alpha^{-1}(t)))}{(\alpha^{-1})'(v)} \right) \right] dt \right] \\
&= \beta \left[\int_0^{\infty} \beta^{-1} \left(\frac{\partial^*}{\partial v^*} (f(v, \alpha^{-1}(t))) \right) dt \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \beta \left[\lim_{c \rightarrow +\infty} \beta^{-1} \left(\beta \left(\int_0^c \beta^{-1} \left(\frac{\partial^*}{\partial v^*} (f(v, \alpha^{-1}(t))) \right) dt \right) \right) \right] \\
&= {}^* \lim_{c \rightarrow +\infty} \beta \left[\int_{\alpha^{-1}(0)}^{\alpha^{-1}(c)} \beta^{-1} \left(\frac{\partial^*}{\partial v^*} (f(v, \alpha^{-1}(t))) \right) dt \right] \\
&= {}^* \lim_{c \rightarrow +\infty} {}^* \int_0^c \frac{\partial^*}{\partial v^*} (f(v, t)) d^* t \\
&= {}^* \int_0^{+\infty} \frac{\partial^*}{\partial v^*} f(v, t) d^* t
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 3.3.13. $f(t)$ fonksiyonunun Newtonyen olmayan Sumudu dönüşümü $F_N(v)$ olmak üzere $l^{n\beta}(t) \ddot{\times} f^{*(n)}(t)$ fonksiyonunun Newtonyen olmayan Sumudu dönüşümü

$$S_N\{l^{n\beta}(t) \ddot{\times} f^{*(n)}(t)\} = l^{n\beta}(v) \ddot{\times} \frac{d^{*(n)}}{dv^{*(n)}} F_N(v)$$

şeklindedir.

İspat: Newtonyen olmayan Sumudu dönüşümünün (5) eşitliği ile verilen tanımından faydalanılarak

$$F_N(v) = {}^* \int_0^{+\infty} \ddot{e}^{(-\alpha^{-1}(t))\beta} \ddot{\times} f(v \ddot{\times} t) d^* t$$

yazılır. Her iki tarafın n . mertebeden $*$ -türevi alınırsa $*$ -Leibnitz Teoremi gereğince

$$\begin{aligned}
\frac{d^{*(n)}}{dv^{*(n)}} F_N(v) &= \frac{d^{*(n)}}{dv^{*(n)}} {}^* \int_0^{+\infty} f(v \ddot{\times} t) \ddot{\times} \ddot{e}^{(-\alpha^{-1}(t))\beta} d^* t \\
&= {}^* \int_0^{+\infty} \frac{\partial^{*(n)}}{\partial v^{*(n)}} f(v \ddot{\times} t) \ddot{\times} \ddot{e}^{(-\alpha^{-1}(t))\beta} d^* t
\end{aligned} \tag{18}$$

bulunur. $\frac{\partial^{*(n)}}{\partial v^{*(n)}} f(v \times t) = \iota^{n\beta}(t) \times f^{*(n)}(v \times t)$ olduğundan (18) ifadesinden

$$\frac{d^{*(n)}}{dv^{*(n)}} F_N(v) = \int_0^{+\infty} \iota^{n\beta}(t) \times f^{*(n)}(v \times t) \times e^{(-\alpha^{-1}(t))\beta} d^*t$$

olur. Eşitliğin sağ tarafı $\iota^{n\beta}(v)$ ile β -çarpılıp β -bölünerek düzenlenirse

$$\begin{aligned} \frac{d^{*(n)}}{dv^{*(n)}} F_N(v) &= \frac{\dot{\iota}}{\iota^{n\beta}(v)} \beta \times \int_0^{+\infty} \iota^{n\beta}(t) \times \iota^{n\beta}(v) \times f^{*(n)}(v \times t) \times e^{(-\alpha^{-1}(t))\beta} d^*t \\ &= \frac{\dot{\iota}}{\iota^{n\beta}(v)} \beta \times \int_0^{+\infty} \iota^{n\beta}(v \times t) \times f^{*(n)}(vt) \times e^{(-\alpha^{-1}(t))\beta} d^*t \\ &= \frac{\dot{\iota}}{\iota^{n\beta}(v)} \beta \times S_N[\iota^{n\beta}(t) \times f^{*(n)}(t)] \end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$S_N\{\iota^{n\beta}(t) \times f^{*(n)}(t)\} = \iota^{n\beta}(v) \times \frac{d^{*(n)}}{dv^{*(n)}} F_N(v)$$

elde edilir.

Sonuç 3.3.14. $F_N(v)$, f fonksiyonunun Newtonyen olmayan Sumudu dönüşümü olmak üzere,

$$S_N\left\{\iota(t) \times \frac{d^*f(t)}{dt^*}\right\} = \iota(v) \times \frac{d^*}{dv^*} F_N(v)$$

olur.

3.4. Newtonyen Olmayan Ters Sumudu Dönüşümü

Tanım 3.4.1. $S_N\{f(t)\} = F_N(v)$ ise Newtonyen olmayan ters Sumudu dönüşümü

$$S_N^{-1}\{F_N(v)\} = f(t)$$

olarak tanımlanır.

Teorem 3.4.2. Newtonyen olmayan ters Sumudu dönüşümü lineerdir. Yani, λ_1 ve λ_2 keyfi β -sabitler olmak üzere

$$S_N^{-1}\{\lambda_1 \times F_{1_N}(v) \dot{+} \lambda_2 \times F_{2_N}(v)\} = \lambda_1 \times S_N^{-1}\{F_{1_N}(v)\} \dot{+} \lambda_2 \times S_N^{-1}\{F_{2_N}(v)\}$$

dır.

Newtonyen olmayan ters Sumudu dönüşümünden faydalanılarak bazı fonksiyonların ters dönüşümleri tablo olarak aşağıda verilmiştir.

Tablo 4. Bazı fonksiyonların Newtonyen olmayan ters Sumudu dönüşümü

$F_N(v) = S_N[f(t)]$	$S_N^{-1}[S_N[f(t)]] = f(t)$
$\dot{1}$	$\dot{1}$
$\iota(v)$	$\iota(t)$
$\iota(v)^{2\beta}$	$\frac{\iota(t)^{2\beta}}{\dot{2}!_{\beta}} \beta$
$\iota(v)^{m\beta}, m \in \mathbb{Z}^+$	$\frac{\iota(t)^{m\beta}}{\dot{m}!_{\beta}} \beta$
$k \in \mathbb{R}_{\alpha}$ ve $\frac{1}{v} \alpha \dot{>} k$ için $\frac{\dot{1}}{\dot{1} \dot{-} \iota(k) \dot{\times} \iota(v)} \beta$	$\ddot{e}^{(\alpha^{-1}(k \dot{\times} t))_{\beta}}$
$\frac{\dot{1}}{\dot{1} \dot{+} (\iota(k))^{2\beta} \dot{\times} (\iota(v))^{2\beta}} \beta$	$* \cos(k \dot{\times} t)$
$\frac{\iota(v)}{\dot{1} \dot{+} (\iota(k))^{2\beta} \dot{\times} (\iota(v))^{2\beta}} \beta$	$\frac{* \sin(k \dot{\times} t)}{\iota(k)} \beta$

4. NEWTONYEN OLMAYAN SUMUDU DÖNÜŞÜMÜNÜN UYGULAMALARI

Bu bölümde Newtonyen olmayan Sumudu dönüşümünün bazı uygulamalarına yer verilmiştir.

Verilen bir Newtonyen olmayan diferansiyel denklemin Newtonyen olmayan Sumudu dönüşümü alınır ve denklem cebirsel bir ifadeye indirgenir, sonrasında ise bu ifadeden bağımlı değişken yalnız bırakılıp her iki tarafa ters Newtonyen olmayan Sumudu dönüşümü uygulanarak çözüm bulunur.

4.1. Newtonyen Olmayan Diferansiyel Denklemlere Uygulaması

Newtonyen olmayan diferansiyel denklemleri Newtonyen olmayan Sumudu dönüşümü ile çözmek mümkündür. Bununla ilgili bazı sayısal örneklere aşağıda yer verilmiştir.

Örnek 4.1.1. $v = v(t)$ olmak üzere birinci mertebeden

$$v^*(t) \ddot{v}(t) = \ddot{0} \quad (19)$$

Newtonyen olmayan diferansiyel denklemin $v(\dot{0}) = \dot{1}$ başlangıç şartına uyan çözümünü bulmak için Newtonyen olmayan diferansiyel denklemin her iki tarafının Newtonyen olmayan Sumudu dönüşümü alınır; lineerlikten ve $S_N\{v^*\} = \frac{S_N\{v\} \ddot{v}(\dot{0})}{l(v)} \beta$ eşitliğinden yararlanılarak,

$$S_N\{v^*(t) \ddot{v}(t)\} = S_N\{\ddot{0}\}$$

$$S_N\{v^*(t)\} \ddot{S}_N\{v(t)\} = S_N\{\ddot{0}\}$$

$$\frac{S_N\{v(t)\} \ddot{v}(\dot{0})}{l(v)} \beta \ddot{S}_N\{v(t)\} = \ddot{0}$$

bulunur. Başlangıç koşulu yerine yazılır ve eşitlik düzenlenirse

$$\frac{S_N\{v(t)\} \ddot{\dot{1}}}{\iota(v)} \beta \ddot{\dot{1}} S_N\{v(t)\} = \ddot{0}$$

$$S_N\{v(t)\} \ddot{\times} \left(\frac{\dot{1}}{\iota(v)} \beta \ddot{\dot{1}} \right) \ddot{\dot{1}} \frac{\dot{1}}{\iota(v)} \beta = \ddot{0}$$

$$S_N\{v(t)\} = \frac{\dot{1}}{\iota(v)} \beta \ddot{\times} \frac{\iota(v)}{\dot{1} \ddot{\dot{1}} \iota(v)} \beta$$

$$S_N\{v(t)\} = \frac{\dot{1}}{\dot{1} \ddot{\dot{1}} \iota(v)} \beta$$

olur. Her iki tarafın Newtonyen olmayan ters Sumudu dönüşümü alınırsa

$$v(t) = \ddot{e}^{(\alpha^{-1}(t)) \beta}$$

olarak Newtonyen olmayan diferansiyel denklemin çözümü bulunmuş olur.

Özel olarak, geometrik kalkülüste (19) denklemi göz önüne alındığında $v^*(t) = e^{\frac{v'(t)}{v(t)}}$ olduğundan,

$$\frac{e^{\frac{v'(t)}{v(t)}}}{v(t)} = 1$$

$$v'(t) = v(t) \cdot \ln(1 \cdot v(t))$$

$$v'(t) - v(t) \cdot \ln v(t) = 0$$

bulunur. Böylece

$$v'(t) - v(t) \cdot \ln v(t) = 0$$

diferansiyel denklemi $v(0) = e$ başlangıç şartı ile ele alındığında çözümünün

$$v(t) = e^{e^t}$$

olduğu görülür.

Örnek 4.1.2. Birinci mertebeden

$$v^*(t) \ddot{\ddot{2}} \ddot{\times} v(t) = \ddot{e}^{(-\alpha^{-1}(t))_\beta} \quad (20)$$

Newtonyen olmayan diferansiyel denkleminin $v(\dot{0}) = \ddot{2}$ başlangıç koşuluna uygun çözümünü bulmak için her iki tarafın Newtonyen olmayan Sumudu dönüşümü alınırsa dönüşümün lineerliğinden

$$S_N\{v^*(t) \ddot{\ddot{2}} \ddot{\times} v(t)\} = S_N\left\{\ddot{e}^{(-\alpha^{-1}(t))_\beta}\right\}$$

$$S_N\{v^*(t)\} \ddot{\ddot{2}} \ddot{\times} S_N\{v(t)\} = S_N\left\{\ddot{e}^{(-\alpha^{-1}(t))_\beta}\right\}$$

yazılır. Böylece $S_N\{v(t)\} = F_N(v)$ olmak üzere $S_N\left\{\ddot{e}^{(-\alpha^{-1}(t))_\beta}\right\} = \frac{\ddot{i}}{\ddot{1} + \iota(v)} \beta$ dönüşümünden faydalanılarak

$$\frac{F_N(v) \ddot{\ddot{2}} \ddot{\times} v(\dot{0})}{\iota(v)} \beta \ddot{\ddot{2}} \ddot{\times} F_N(v) = \frac{\ddot{i}}{\ddot{1} + \iota(v)} \beta$$

bulunur. Başlangıç koşulu yerine yazılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\frac{F_N(v) \ddot{\ddot{2}}}{\iota(v)} \beta \ddot{\ddot{2}} \ddot{\times} F_N(v) = \frac{\ddot{i}}{\ddot{1} + \iota(v)} \beta$$

$$F_N(v) \ddot{\times} \left(\frac{\ddot{i}}{\iota(v)} \beta \ddot{\ddot{2}} \right) = \frac{\ddot{i}}{\ddot{1} + \iota(v)} \beta \ddot{\ddot{2}} \frac{\ddot{2}}{\iota(v)} \beta$$

$$F_N(v) \ddot{\times} \left(\frac{\ddot{i} \ddot{\ddot{2}} \ddot{\times} \iota(v)}{\iota(v)} \beta \right) = \frac{\ddot{3} \ddot{\times} \iota(v) \ddot{\ddot{2}}}{(\ddot{1} + \iota(v)) \ddot{\times} \iota(v)} \beta$$

$$F_N(v) = \frac{\ddot{3} \ddot{\times} \iota(v) \ddot{\ddot{2}}}{(\ddot{1} + \iota(v)) \ddot{\times} \iota(v)} \beta \ddot{\times} \frac{\iota(v)}{\ddot{1} \ddot{\ddot{2}} \ddot{\times} \iota(v)} \beta$$

olur. Buradan

$$F_N(v) = \frac{\ddot{i}}{\ddot{1} + \iota(v)} \beta \ddot{\ddot{2}} \frac{\ddot{i}}{\ddot{1} \ddot{\ddot{2}} \ddot{\times} \iota(v)} \beta$$

elde edilir. Her iki tarafın Newtonyen olmayan ters Sumudu dönüşümü alınırsa

$$S_N^{-1}\{F_N(v)\} = S_N^{-1}\left\{\frac{\ddot{1}}{\ddot{1} + \iota(v)}\beta \ddot{+} \frac{\ddot{1}}{\ddot{1} + \ddot{2} \times \iota(v)}\beta\right\}$$

olup

$$v(t) = \ddot{e}^{(-\alpha^{-1}(t))\beta} \ddot{+} \ddot{e}^{(-2\alpha^{-1}(t))\beta}$$

çözümü bulunur.

Özel olarak, (20) denklemi bigeometrik kalkülüste göz önüne alınırsa

$v^*(t) = e^{t \cdot \frac{v'(t)}{v(t)}}$ olduğundan

$$e^{t \cdot \frac{v'(t)}{v(t)}} \cdot (v(t))^{\ln e^2} = e^{-\ln t}$$

$$t \cdot \frac{v'(t)}{v(t)} + 2 \cdot \ln v(t) = e^{-\ln t}$$

$$t \cdot v'(t) + 2 \cdot v(t) \ln v(t) - v(t) \cdot \frac{1}{t} = 0$$

bulunur. Böylece

$$t^2 \cdot v'(t) + 2 \cdot t \cdot v(t) \ln v(t) - v(t) = 0$$

diferansiyel denkleminin $v(1) = e^2$ başlangıç koşuluna uygun çözümü

$$v(t) = e^{\frac{t+1}{t^2}}$$

olarak elde edilir.

Örnek 4.1.3. İkinci mertebeden

$$v^{*(2)}(t) \ddot{+} v(t) = \iota(t) \tag{21}$$

Newtonyen olmayan diferansiyel denkleminin $v(\dot{0}) = \dot{1}, v^*(\dot{0}) = \dot{0}$ başlangıç şartlarına uyan çözümünü bulmak için Newtonyen olmayan diferansiyel denklemin her iki tarafının Newtonyen olmayan Sumudu dönüşümü alınırsa lineerlikten

$$\begin{aligned} S_N\{v^{*(2)}(t) \ddot{+} v(t)\} &= S_N\{l(t)\} \\ S_N\{v^{*(2)}(t)\} \ddot{+} S_N\{v(t)\} &= S_N\{l(t)\} \end{aligned}$$

yazılır. Teorem 3.3.7 den faydalanılır ve başlangıç koşulları yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \frac{S_N\{v(t)\}}{l^{2\beta}(v)} \beta \ddot{-} \frac{v(\dot{0})}{l^{2\beta}(v)} \beta \ddot{-} \frac{v^*(\dot{0})}{l(v)} \beta \ddot{+} S_N\{v(t)\} &= l(v) \\ S_N\{v(t)\} \times \left(\dot{1} \ddot{+} \frac{\dot{1}}{l^{2\beta}(v)} \beta \right) &= l(v) \ddot{+} \frac{\dot{1}}{l^{2\beta}(v)} \beta \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned} S_N\{v(t)\} &= \frac{l^{3\beta}(v) \ddot{+} \dot{1}}{l^{2\beta}(v) \ddot{+} \dot{1}} \beta \\ &= l(v) \ddot{+} \frac{\dot{1} \ddot{-} l(v)}{l^{2\beta}(v) \ddot{+} \dot{1}} \beta \\ &= l(v) \ddot{+} \frac{\dot{1}}{l^{2\beta}(v) \ddot{+} \dot{1}} \beta \ddot{-} \frac{l(v)}{l^{2\beta}(v) \ddot{+} \dot{1}} \beta \end{aligned}$$

elde edilir. Her iki tarafın Newtonyen olmayan ters Sumudu dönüşümü alınır ise çözümlü

$$v(t) = l(t) \ddot{+} * \cos(t) \ddot{-} * \sin(t)$$

olarak bulunur.

Özel olarak, (21) denklemi bigeometrik kalkülüste göz önüne alınırsa $v^*(t) = e^{t \cdot \frac{v'(t)}{v(t)}}$ olduğundan

$$\left(e^{\frac{t \cdot \frac{v(t)v'(t) + t \cdot v(t)v''(t) - t \cdot (v'(t))^2}{(v(t))^2}}{v(t)}} \right) v(t) = t$$

$$\frac{tv(t)v'(t) + t^2v(t)v''(t) - t^2 \cdot (v'(t))^2}{(v(t))^2} + \ln v(t) = \ln t$$

$$tv(t)v'(t) + t^2v(t)v''(t) - t^2 \cdot (v'(t))^2 + (v(t))^2 \cdot (\ln v(t) - \ln t) = 0$$

elde edilir. Böylece

$$t \cdot v(t)v'(t) + t^2 \cdot v(t)v''(t) - t^2 \cdot (v'(t))^2 + (v(t))^2 \cdot (\ln v(t) - \ln t) = 0$$

diferansiyel denkleminin $v(1) = e$, $v'(1) = 0$ başlangıç şartlarına uyan çözümünün

$$v(t) = t \cdot e^{(\cos \ln t - \sin \ln t)}$$

olduğu görülür.

Örnek 4.1.4. İkinci mertebeden

$$v^{*(2)}(t) + v^*(t) - 2 \times v(t) = 3 \times \iota(t), (t \geq 0) \quad (22)$$

Newtonyen olmayan diferansiyel denklemin $v(0) = 3$, $v^*(0) = 0$ başlangıç değerleriyle çözümünü bulmak için her iki tarafın Newtonyen olmayan Sumudu dönüşümü alınır ve Teorem 3.3.7 den yararlanılarak

$$S_N\{v^{*(2)}(t) + v^*(t) - 2 \times v(t)\} = S_N\{3 \times \iota(t)\}$$

$$S_N\{v^{*(2)}(t)\} + S_N\{v^*(t)\} - 2 \times S_N\{v(t)\} = 3 \times S_N\{\iota(t)\}$$

$$\frac{S_N\{v(t)\}}{\iota^{2\beta}(v)} \beta \cdot \frac{v(0)}{\iota^{2\beta}(v)} \beta \cdot \frac{v^*(0)}{\iota(v)} \beta + \frac{S_N\{v(t)\}}{\iota(v)} \beta \cdot \frac{v(0)}{\iota(v)} \beta - 2 \times S_N\{v(t)\} = 3 \times \iota(v)$$

eşitliği yazılır. Başlangıç koşulları yerine yazılır ve eşitlik düzenlenirse

$$S_N\{v(t)\} \times \left(\frac{\dot{1}}{t^{2\beta}(v)} \beta \ddot{+} \frac{\dot{1}}{v} \beta \ddot{-} \ddot{2} \right) \ddot{-} \frac{\ddot{3}}{t^{2\beta}(v)} \beta \ddot{-} \ddot{0} \ddot{-} \frac{\ddot{3}}{v} \beta = \ddot{3} \times v$$

$$S_N\{v(t)\} \times \left(\frac{\dot{1} \ddot{+} v \ddot{-} \ddot{2} \times t^{2\beta}(v)}{t^{2\beta}(v)} \beta \right) = \ddot{3} \times \left(\frac{t^{3\beta}(v) \ddot{+} v \ddot{+} \dot{1}}{t^{2\beta}(v)} \beta \right)$$

$$S_N\{v(t)\} = \frac{\ddot{3} \times t^{3\beta}(v) \ddot{+} \ddot{3} \times v \ddot{+} \ddot{3}}{\dot{1} \ddot{+} v \ddot{-} \ddot{2} \times t^{2\beta}(v)} \beta$$

bulunur. Eşitliğin sağ tarafı basit kesirlerine ayrılırsa

$$S_N\{v(t)\} = \frac{\ddot{3}}{\dot{1} \ddot{-} v} \beta \ddot{+} \frac{\ddot{3}}{\ddot{4} \times (\dot{1} \ddot{+} \ddot{2} \times v)} \beta \ddot{-} \frac{\ddot{3}}{\ddot{2}} \beta \times v \ddot{-} \frac{\ddot{3}}{\ddot{4}} \beta$$

olur. İfadenin her iki tarafının Newtonyen olmayan ters Sumudu dönüşümü alınırsa

$$v(t) = \ddot{3} \times e^{(-\alpha^{-1}(t))} \beta \ddot{+} \frac{\ddot{3}}{\ddot{4}} \beta \times e^{(-2\alpha^{-1}(t))} \beta \ddot{-} \frac{\ddot{3}}{\ddot{2}} \beta \times v(t) \ddot{-} \frac{\ddot{3}}{\ddot{4}} \beta$$

çözümü elde edilir.

Özel olarak, (22) denklemi geometrik kalkülüste ele alınırsa

$$\frac{e^{\frac{v''(t).v(t) - (v'(t))^2}{(v(t))^2}} \cdot e^{\frac{v'(t)}{v(t)}}}{v(t) \ln e^2} = (e^t)^{\ln e^3}$$

$$\frac{v''(t).v(t) - (v'(t))^2}{(v(t))^2} + \frac{v'(t)}{v(t)} = 2 \ln v(t) + 3t$$

olup

$$v''(t).v(t) - (v'(t))^2 + v(t) v'(t) - 2v^2(t) \ln v(t) - 3tv^2(t) = 0 \quad (23)$$

diferansiyel denklemi bulunur. Böylece (23) diferansiyel denkleminin $v(0) = e^3$ ve $v'(0) = 0$ başlangıç değerleri ile çözümü

$$v(t) = e^{3e^{-t} + \frac{3}{4}e^{-2t} - \frac{3}{2}t - \frac{3}{4}}$$

olarak elde edilir.

Örnek 4.1.5. $v = v(t)$ olmak üzere üçüncü dereceden

$$v^{*(3)} \ddot{\delta} \times v^{*(2)} \dot{\delta} \times v^* \ddot{\delta} \times v = \ddot{\delta}$$

Newtonyen olmayan diferansiyel denklemin $v(\dot{\delta}) = \ddot{\delta}$, $v^*(\dot{\delta}) = \dot{\delta}$, $v^{*(2)}(\dot{\delta}) = \ddot{\delta} - \dot{\delta}$ başlangıç koşullarıyla uyum çözümünü bulmak için eşitliğin her iki tarafına Newtonyen olmayan Sumudu dönüşümü uygulanır ve lineerlik özelliğinden yararlanarak

$$S_N\{v^{*(3)} \ddot{\delta} \times v^{*(2)} \dot{\delta} \times v^* \ddot{\delta} \times v\} = S_N\{\ddot{\delta}\}$$

$$S_N\{v^{*(3)}\} \ddot{\delta} \times S_N\{v^{*(2)}\} \dot{\delta} \times S_N\{v^*\} \ddot{\delta} \times S_N\{v\} = S_N\{\ddot{\delta}\}$$

eşitliği bulunur. Teorem 3.3.7 kullanılarak

$$\frac{S_N\{v(t)\}}{l^{3\beta}(v)} \beta \ddot{\delta} \times \frac{v(\dot{\delta})}{l^{3\beta}(v)} \beta \ddot{\delta} \times \frac{v^*(\dot{\delta})}{l^{2\beta}(v)} \beta \ddot{\delta} \times \frac{v^{*(2)}(\dot{\delta})}{l(v)} \beta \ddot{\delta} \times \frac{S_N\{v(t)\}}{l^{2\beta}(v)} \beta \ddot{\delta} \times \frac{v(\dot{\delta})}{l^{2\beta}(v)} \beta$$

$$\ddot{\delta} \times \frac{v^*(\dot{\delta})}{l(v)} \beta \dot{\delta} \times \frac{S_N\{v(t)\}}{l(v)} \beta \dot{\delta} \times \frac{v(\dot{\delta})}{l(v)} \beta \ddot{\delta} \times S_N\{v(t)\} = \ddot{\delta}$$

yazılır. Başlangıç şartları yerine yazılır ve denklem düzenlenirse

$$S_N\{v(t)\} \times \left(\frac{\dot{\delta}}{l^{3\beta}(v)} \beta \ddot{\delta} \times \frac{\dot{\delta}}{l^{2\beta}(v)} \beta \dot{\delta} \times \frac{\dot{\delta}}{l(v)} \beta \ddot{\delta} \right) = \frac{\ddot{\delta}}{l^{3\beta}(v)} \beta \ddot{\delta} + \frac{\dot{\delta}}{l^{2\beta}(v)} \beta$$

$$\ddot{\delta} + \frac{\dot{\delta}}{l(v)} \beta \ddot{\delta} + \frac{\ddot{\delta}}{l^{2\beta}(v)} \beta \ddot{\delta} + \frac{\ddot{\delta}}{l(v)} \beta \ddot{\delta} + \frac{2\ddot{\delta}}{l(v)} \beta$$

olur. $S_N\{v(t)\}$ eşitlikte yalnız bırakılırsa

$$S_N\{v(t)\} = \frac{\ddot{\delta} \dot{\delta} \times l(v) \dot{\delta} \times l^{2\beta}(v)}{\dot{\delta} \ddot{\delta} \times l(v) \dot{\delta} \times l^{2\beta}(v) \ddot{\delta} \times l^{3\beta}(v)} \beta$$

elde edilir. İfade basit kesirlere ayrılarak düzenlenirse

$$S_N\{v(t)\} = \frac{\ddot{8}}{t(v)\ddot{1}}\beta \ddot{\ddot{2}} \frac{\ddot{9}}{\ddot{2} \times t(v)\ddot{1}}\beta \ddot{\ddot{3}} \frac{\ddot{3}}{\ddot{3} \times t(v)\ddot{1}}\beta$$

bulunur. Her iki tarafın Newtonyen olmayan ters Sumudu dönüşümü alınırsa

$$v(t) = \ddot{8} \times \ddot{e}^{(-\alpha^{-1}(t))_\beta} \ddot{\ddot{9}} \times \ddot{e}^{(-2.\alpha^{-1}(t))_\beta} \ddot{\ddot{3}} \times \ddot{e}^{(-3.\alpha^{-1}(t))_\beta}$$

çözümü elde edilir.

Örnek 4.1.6. $v = v(t)$ olmak üzere ikinci dereceden

$$v^{*(2)} \ddot{+} v = \ddot{0}$$

Newtonyen olmayan diferansiyel denklemin $v(\ddot{0}) = \ddot{2}, v^*(\ddot{0}) = \ddot{3}$ başlangıç şartlarını sağlayan çözümünü bulmak için eşitlikte her iki tarafın Newtonyen olmayan Sumudu dönüşümü alınırsa lineerlik özelliğinden

$$S_N\{v^{*(2)} \ddot{+} v\} = S_N\{\ddot{0}\}$$

$$S_N\{v^{*(2)}\} \ddot{+} S_N\{v\} = S_N\{\ddot{0}\}$$

yazılır. Burada

$$\frac{S_N\{v(t)\}}{t^{2\beta}(v)} \beta \ddot{\ddot{2}} \frac{v(\ddot{0})}{t^{2\beta}(v)} \beta \ddot{\ddot{2}} \frac{v^*(\ddot{0})}{t(v)} \beta \ddot{\ddot{3}} \ddot{+} S_N\{v(t)\} = \ddot{0}$$

$$S_N\{v(t)\} \times \left(\frac{\ddot{1}}{t^{2\beta}(v)} \beta \ddot{\ddot{1}} \right) = \frac{\ddot{2}}{t^{2\beta}(v)} \beta \ddot{\ddot{2}} \frac{\ddot{3}}{t(v)} \beta$$

$$S_N\{v(t)\} = \frac{\ddot{2} \ddot{\ddot{3}} \times t(v)}{\ddot{1} \ddot{\ddot{1}} t^{2\beta}(v)} \beta$$

bulunur. Bu ifade sade bir biçimde

$$S_N\{v(t)\} = \frac{\ddot{2}}{\ddot{1} \ddot{\ddot{1}} t^{2\beta}(v)} \beta \ddot{\ddot{2}} \frac{\ddot{3} \times t(v)}{\ddot{1} \ddot{\ddot{1}} t^{2\beta}(v)} \beta$$

olarak yazılır. Her iki tarafın Newtonyen olmayan ters Sumudu dönüşümü alınırsa

$$v(t) = \ddot{2} \ddot{x}^* \cos(t) + \ddot{3} \ddot{x}^* \sin(t)$$

çözümü bulunur.

Örnek 4.1.7. $v = v(t)$ olmak üzere ikinci mertebeden

$$v^{*(2)} + \ddot{1}\ddot{6} \ddot{x} v = \ddot{5} \ddot{x}^* \sin(t)$$

Newtonyen olmayan diferansiyel denklemin $v(\dot{0}) = v^*(\dot{0}) = \ddot{0}$ başlangıç koşullarına uyan $v(t)$ çözümünü bulmak için verilen eşitlikte her iki tarafının Newtonyen olmayan Sumudu dönüşümü alınırsa dönüşüm lineer olduğundan

$$S_N\{v^{*(2)} + \ddot{1}\ddot{6} \ddot{x} v\} = S_N\{\ddot{5} \ddot{x}^* \sin(t)\}$$

$$S_N\{v^{*(2)}(t)\} + \ddot{1}\ddot{6} \ddot{x} S_N\{v(t)\} = \ddot{5} \ddot{x} S_N\{^* \sin(t)\}$$

yazılır. Teorem 3.3.7 ve Teorem 3.2.5 kullanılarak eşitlik düzenlenirse,

$$\frac{S_N\{v(t)\}}{t^{2\beta}(v)} \beta \ddot{\cdot} \frac{v(\dot{0})}{t^{2\beta}(v)} \beta \ddot{\cdot} \frac{v^*(\dot{0})}{t(v)} \beta + \ddot{1}\ddot{6} \ddot{x} S_N\{v(t)\} = \frac{\ddot{5} \ddot{x} t(v)}{t^{2\beta}(v) + \ddot{1}} \beta$$

$$S_N\{v(t)\} \ddot{x} \left(\frac{\ddot{1}}{t^{2\beta}(v)} \beta + \ddot{1}\ddot{6} \right) = \frac{\ddot{5} \ddot{x} t(v)}{t^{2\beta}(v) + \ddot{1}} \beta$$

$$S_N\{v(t)\} = \frac{t^{2\beta}(v)}{\ddot{1} + \ddot{1}\ddot{6} \ddot{x} t^{2\beta}(v)} \beta \ddot{x} \frac{\ddot{5} \ddot{x} t(v)}{t^{2\beta}(v) + \ddot{1}} \beta$$

$$S_N\{v(t)\} = \frac{t(v)}{\ddot{3} \ddot{x} (t^{2\beta}(v) + \ddot{1})} \beta \ddot{\cdot} \frac{\ddot{4} \ddot{x} t(v)}{\ddot{1}\ddot{2} \ddot{x} (\ddot{1} + \ddot{1}\ddot{6} \ddot{x} t^{2\beta}(v))} \beta$$

elde edilir. Bu denklemin her iki tarafına Newtonyen olmayan Ters Sumudu dönüşümü uygulanırsa

$$v(t) = \frac{\ddot{1}}{\ddot{3}} \beta \ddot{x}^* \sin(t) \ddot{\cdot} \frac{\ddot{1}}{\ddot{1}\ddot{2}} \beta \ddot{x}^* \cos(\ddot{4} \ddot{x} t)$$

çözümü elde edilir.

4.2. Newtonyen Olmayan Diferansiyel Denklem Sistemlerine Uygulaması

Newtonyen olmayan diferansiyel denklem sistemlerini Newtonyen olmayan Sumudu dönüşümü ile çözmek mümkündür.

Örnek 4.2.1. $y = y(t)$ ve $v = v(t)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\frac{d^*v}{dt^*} &= \ddot{y} \\ \frac{d^*y}{dt^*} &= v\end{aligned}$$

şeklinde verilen Newtonyen olmayan diferansiyel denklem sistemlerinin $v(\dot{0}) = \dot{1}$, $y(\dot{0}) = \ddot{0}$ başlangıç koşullarını sağlayan $\{y(t), v(t)\}$ çözüm çiftini bulmak için her iki denklemde de sırasıyla Newtonyen olmayan Sumudu dönüşümü alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}S_N\{v^*\} &= \ddot{y} S_N\{y\} \\ \frac{S_N\{v\} - v(\dot{0})}{l(v)} \beta &= \ddot{y} S_N\{y\} \\ \frac{S_N\{v\}}{l(v)} \beta - \frac{\dot{1}}{l(v)} \beta &= \ddot{y} S_N\{y\}\end{aligned}\tag{24}$$

ve

$$\begin{aligned}S_N\{y^*\} &= S_N\{v\} \\ \frac{S_N\{y\} - y(\dot{0})}{l(v)} \beta &= S_N\{v\} \\ \frac{S_N\{y\} - \ddot{0}}{l(v)} \beta &= S_N\{v\} \\ \frac{S_N\{y\}}{l(v)} \beta &= S_N\{v\}\end{aligned}\tag{25}$$

bulunur. (25) numaralı denklem (24) numaralı denklemde yerine yazılıp düzenlenirse

$$\frac{S_N\{y\}}{l^{2\beta}(v)} \beta - \frac{\dot{1}}{l(v)} \beta = \ddot{y} S_N\{y\}$$

$$\frac{S_N\{y\}}{l^{2\beta}(v)} \beta \ddot{+} S_N\{y\} = \frac{\dot{1}}{l(v)} \beta$$

$$S_N\{y\} = \frac{l(v)}{l^{2\beta}(v) \ddot{+} \dot{1}} \beta$$

elde edilir. Burada her iki tarafın Newtonyen olmayan ters Sumudu dönüşümü alınırsa

$$y(t) = * \sin t$$

bulunur. Böylece

$$v(t) = * \cos t$$

bulunur. $\{y(t), v(t)\}$ çözüm çifti

$$\{y(t), v(t)\} = \{ * \sin t, * \cos t \}$$

şeklinde elde edilir.

Örnek 4.2.2. $v = v(t)$ ve $y = y(t)$ olmak üzere

$$v^* \ddot{+} y = \ddot{3} \ddot{\times} \ddot{e}^{(\alpha^{-1}(\dot{2} \times t))_\beta}$$

$$y^* \ddot{+} v = \ddot{0}$$

denkleminin $v(\dot{0}) = \ddot{2}$, $y(\dot{0}) = \ddot{0}$ başlangıç koşuluna uyan $\{v(t), y(t)\}$ çözüm çiftini bulmak için her iki denklemde de her iki tarafın Newtonyen olmayan Sumudu dönüşümü alınırsa dönüşümün lineerliğinden gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$S_N\{v^* \ddot{+} y\} = S_N \left\{ \ddot{3} \ddot{\times} \ddot{e}^{(\alpha^{-1}(\dot{2} \times t))_\beta} \right\}$$

$$S_N\{v^*\} \ddot{+} S_N\{y\} = \ddot{3} \ddot{\times} S_N \left\{ \ddot{e}^{(\alpha^{-1}(\dot{2} \times t))_\beta} \right\}$$

$$\frac{S_N\{v\} \ddot{-} v(\dot{0})}{l(v)} \beta \ddot{+} S_N\{y\} = \ddot{3} \ddot{\times} \frac{\dot{1}}{\dot{1} \ddot{-} \ddot{2} \ddot{\times} l(v)} \beta$$

$$S_N\{v\} \ddot{\iota}(v) \times S_N\{y\} = \frac{\ddot{3} \times \iota(v)}{\ddot{1} \ddot{2} \times \iota(v)} \beta \ddot{2} \quad (26)$$

ve

$$\begin{aligned} S_N\{y^* \ddot{v}\} &= S_N\{\ddot{0}\} \\ S_N\{y^*\} \ddot{S}_N\{v\} &= S_N\{\ddot{0}\} \\ \frac{S_N\{y\} \ddot{y}(\ddot{0})}{\iota(v)} \beta \ddot{S}_N\{v\} &= \ddot{0} \\ S_N\{y\} \ddot{\iota}(v) \times S_N\{v\} &= \ddot{0} \end{aligned} \quad (27)$$

bulunur. Eğer (26) ve (27) eşitlikleri yerine yazma metodu veya yok etme metodlarından biri kullanılarak düzenlenirse

$$S_N\{y\} = \frac{\ddot{3} \times \iota^{2\beta}(v)}{\left(\ddot{1} \ddot{2} \times \iota(v)\right) \times \left(\ddot{1} \ddot{2} \times \iota^{2\beta}(v)\right)} \beta \ddot{2} \times \frac{\ddot{2} \times \iota(v)}{\ddot{1} \ddot{2} \times \iota^{2\beta}(v)} \beta$$

elde edilir. İfade basit kesirlere ayrılarak düzenlenirse

$$S_N\{y\} = \frac{\ddot{1}}{\ddot{2}} \beta \times \left(\frac{\ddot{1}}{\ddot{1} \ddot{2} \times \iota(v)} \beta \ddot{2} \times \frac{\ddot{1}}{\ddot{1} \ddot{2} \times \iota(v)} \beta \right) \ddot{2} \times \frac{\ddot{1}}{\ddot{1} \ddot{2} \times \iota(v)} \beta$$

elde edilir. Her iki tarafın Newtonyen olmayan ters Sumudu dönüşümü alınırsa

$$y(t) = \frac{\ddot{1}}{\ddot{2}} \beta \times \left(\ddot{e}^{(\alpha^{-1}(t))_\beta} \ddot{2} \times \ddot{e}^{(-\alpha^{-1}(t))_\beta} \right) \ddot{2} \times \ddot{e}^{(\alpha^{-1}(\ddot{2} \times t))_\beta}$$

bulunur. Çözüm Newtonyen olmayan diferansiyel denklem sisteminde yerine yazılırsa

$$v(t) = \frac{\ddot{1}}{\ddot{2}} \beta \times \left(\ddot{e}^{(-\alpha^{-1}(t))_\beta} \ddot{2} \times \ddot{e}^{(\alpha^{-1}(t))_\beta} \right) \ddot{2} \times \ddot{e}^{(\alpha^{-1}(\ddot{2} \times t))_\beta}$$

olur. Buradan $\{v(t), y(t)\}$ çözüm çifti

$$\{v(t), y(t)\} = \left\{ \frac{\dot{1}}{2} \beta \ddot{\times} \left(\ddot{e}^{(-\alpha^{-1}(t))_\beta} \ddot{\times} \ddot{e}^{(\alpha^{-1}(t))_\beta} \right) \ddot{\times} \ddot{e}^{(\alpha^{-1}(\dot{\times}t))_\beta} \right. \\ \left. , \frac{\dot{1}}{2} \beta \ddot{\times} \left(\ddot{e}^{(\alpha^{-1}(t))_\beta} \ddot{\times} \ddot{e}^{(-\alpha^{-1}(t))_\beta} \right) \ddot{\times} \ddot{e}^{(\alpha^{-1}(\dot{\times}t))_\beta} \right\}$$

olarak yazılır.

Örnek 4.2.3. $v = v(t)$ ve $y = y(t)$ olmak üzere

$$v^{*(2)} \ddot{\times} \ddot{3} \ddot{\times} v^* \ddot{\times} \ddot{2} \ddot{\times} v \ddot{\times} y = \ddot{0} \\ v^* \ddot{\times} y^* \ddot{\times} \ddot{2} \ddot{\times} v \ddot{\times} y = \ddot{0}$$

denklemin sisteminin $v(\dot{0}) = v^*(\dot{0}) = \ddot{0}$, $y(\dot{0}) = \ddot{0} \ddot{\times} \dot{1}$ başlangıç koşullarına uyan $\{v(t), y(t)\}$ çözüm çiftini bulmak için her iki tarafın Newtonyen olmayan Sumudu dönüşümü alınırsa dönüşümün lineer olmasından yararlanılarak gerekli dönüşüm ve düzenlemeler yapılırsa

$$S_N\{v^{*(2)} \ddot{\times} \ddot{3} \ddot{\times} v^* \ddot{\times} \ddot{2} \ddot{\times} v \ddot{\times} y\} = S_N\{\ddot{0}\} \\ S_N\{v^{*(2)} \ddot{\times} \ddot{3} \ddot{\times} S_N\{v^*\} \ddot{\times} \ddot{2} \ddot{\times} S_N\{v\} \ddot{\times} S_N\{y\}\} = S_N\{\ddot{0}\} \\ \frac{S_N\{v\}}{l^{2\beta}(v)} \beta \ddot{\times} \frac{v(\dot{0})}{l^{2\beta}(v)} \beta \ddot{\times} \frac{v^*(\dot{0})}{l(v)} \beta \ddot{\times} \ddot{3} \ddot{\times} \left(\frac{S_N\{v\} \ddot{\times} v(\dot{0})}{l(v)} \beta \right) \ddot{\times} \ddot{2} \ddot{\times} S_N\{v\} \ddot{\times} S_N\{y\} \\ = \ddot{0} \tag{28}$$

ve

$$S_N\{v^* \ddot{\times} y^* \ddot{\times} \ddot{2} \ddot{\times} v \ddot{\times} y\} = S_N\{\ddot{0}\} \\ S_N\{v^*\} \ddot{\times} S_N\{y^*\} \ddot{\times} \ddot{2} \ddot{\times} S_N\{v\} \ddot{\times} S_N\{y\} = S_N\{\ddot{0}\} \\ \frac{S_N\{v\} \ddot{\times} v(\dot{0})}{l(v)} \beta \ddot{\times} \frac{S_N\{y\} \ddot{\times} y(\dot{0})}{l(v)} \beta \ddot{\times} \ddot{2} \ddot{\times} S_N\{v\} \ddot{\times} S_N\{y\} = \ddot{0} \tag{29}$$

bulunur. (28) ve (29) numaralı eşitlikler yerine yazma metodu ile düzenlenirse

$$S_N\{v\} = \frac{\ddot{2}}{\dot{1} \ddot{\times} l(v)} \beta \ddot{\times} \frac{\dot{1}}{\dot{1} \ddot{\times} \ddot{2} \ddot{\times} l(v)} \beta \ddot{\times} \dot{1} \\ S_N\{y\} = \frac{\dot{1}}{\dot{1} \ddot{\times} l(v)} \beta \ddot{\times} \ddot{2}$$

olur. Eşitliklerin her iki tarafının Newtonyen olmayan ters Sumudu dönüşümü alınırsa

$$v(t) = \ddot{z} \times \ddot{e}^{(\alpha^{-1}(t))_{\beta}} \ddot{e}^{(\alpha^{-1}(\dot{z} \times t))_{\beta}} \ddot{1}$$

$$y(t) = \ddot{e}^{(\alpha^{-1}(t))_{\beta}} \ddot{z}$$

olarak bulunur. Buradan $\{v(t), y(t)\}$ çözüm çifti

$$\{v(t), y(t)\} = \left\{ \ddot{z} \times \ddot{e}^{(\alpha^{-1}(t))_{\beta}} \ddot{e}^{(\alpha^{-1}(\dot{z} \times t))_{\beta}} \ddot{1}, \ddot{e}^{(\alpha^{-1}(t))_{\beta}} \ddot{z} \right\}$$

şeklinde yazılır.

5. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

Yapılan çalışmada Newtonyen olmayan Sumudu dönüşümü tanımlandı ve Sumudu dönüşümü ile Newtonyen olmayan Sumudu dönüşümü arasındaki ilişki gösterildi. Newtonyen olmayan Sumudu dönüşümüne denk olan integral dönüşümü elde edildi. Bazı fonksiyonların Newtonyen olmayan Sumudu dönüşümü hesaplandı ve tablo ile verildi. Newtonyen olmayan Sumudu dönüşümünün temel özellikleri ispatlandı. Newtonyen olmayan ters Sumudu dönüşümü tanımlandı ve bazı dönüşümler tablo ile verildi. Bu tanım ve teoremlerden yararlanılarak Newtonyen olmayan diferansiyel denklemlerde ve Newtonyen olmayan diferansiyel denklem sistemlerinde uygulamalar sayısal örneklerle irdelendi. Newtonyen olmayan kalkülüsün özel durumları göz önüne alınarak bazı örneklerin geometrik ve bigeometrik kalkülüsteki karşılıklarına yer verildi. Ayrıca bu örneklerden, geometrik ve bigeometrik kalkülüsün klasik kalkülüs ile arasındaki ilişkiden faydalanılarak bazı diferansiyel denklemlerin çözümlerinin de elde edildiği görüldü.

Sumudu dönüşümü ve Newtonyen olmayan kalkülüsün fizik, matematik ve mühendislik gibi birçok uygulama alanına sahip olmasından yararlanarak burada yapılan çalışmanın, bahsi geçen alanlarda yeni bir bakış açısı kazandıracığı, alternatif bir çözüm yöntemi olarak görüleceği ve yapılacak çalışmaların, bu uygulama alanlarına aktarımıyla günlük hayatta karşılaşılan bazı problemlere farklı bakış açısı getirileceği düşünülmektedir. Bu çalışmanın ardından dönüşümün uygulama alanı genişletilebilir ve büyüme modeli gibi pek çok farklı matematiksel modelin çözümü bu yöntem ile incelenebilir.

KAYNAKÇA

- Baruah, K., Hazarika, B. ve Bashirov, A.E. (2021). Solvability of bigeometric differential equations by numerical methods. *Boletim da Sociedade Paranaense de Matematica*, 39(2), 203-222.
- Bashirov, A. E., Mısırlı, Kurpınar E. ve Özyapıcı, A. (2008). Multiplicative calculus and its applications. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 337(1), 36-48.
- Belgacem , F.B.M., Karaballi, A.A. ve Kalla, S.L. (2003). Analytical investigations of the Sumudu transform and applications to integral production equations. *Mathematical Problems in Engineering*, No:3, 103-118.
- Bhat, A.H. , Majid M. ve Wani I.A. (2019). Multiplicative Sumudu Transform and its Applications. *Journal of Emerging Technologies and Innovative Research*, 6(1), 579-589.
- Çakmak A. F. ve Başar F., (2012). Some new results on sequence spaces with respect to non-Newtonian calculus, *Journal of Inequalities and Applications*, 228, 1-12.
- Çakmak, A.F. ve Başar, F. (2014). *On line and double integrals in the non-Newtonian sense*. AIP Conference Proceedings.
- Duyar, C., Birsen, S. ve Oğur, O. (2015). Some Basic Topological Properties on Non-Newtonian Real Line. *British Journal of Mathematics & Computer Science*, 9(4),300-307.
- Erdoğan, M. ve Duyar, C.(2018). Non-Newtonian improper integrals. *Journal of Science and Arts* 1(42), 49–74.
- Filip, D. ve Piatecki, C. (2014). A non-Newtonian examination of the theory of exogenous growth. *Mathematica Aeterna*, 4(2), 101-117.
- Güngör N., (2020a). The Successive Approximations Method for Solving Non-Newtonian Fredholm Integral Equations of the Second Kind. *Conference Proceeding Science and Technology*, 3(1), 166-175.
- Güngör, N., (2020b). *Non-Newtonian Laplace Transform*, The International Conference On Recent Advances in Pure and Applied Mathematics, Gümüşhane, Türkiye.
- Güngör, N. (2022a). On the Solution of Faltung Type Multiplicative Integral Equations. *Journal of Emerging Technologies and Innovative Research*, 9(12), 423-431.
- Güngör, N. (2022b). A note on linear non-Newtonian Volterra integral equations, *Mathematical Sciences*, 16(4), 373-387.

- Güngör, N. (2022c). A Note on Linear Non-Newtonian Volterra Integral Equations. *Mathematical Sciences*, 16(4), 373-387.
- Grossman, M. ve Katz, R. (1972). *Non-Newtonian Calculus*. (1. Baskı), Pigeon Cove Massachussets: Lee Press.
- Grossman, M. (1983). *Biometric Calculus: A System with a Scale Free Derivative*. (First Edition), Rockport Massachussets: Archimedes Foundation.
- Kadak, U. ve Özlük, M. (2014). Generalized Runge-Kutta Method with respect to the Non-Newtonian Calculus. *Hindawi Publishing Corporation Abstract and Applied Analysis*, vol. 2015, Article ID 594685, 1-10.
- Mcginness, J. R. (1980). Non-Newtonian calculus applied to probability, utility, and Bayesian Analysis. *American Statistical Association: Proceedings of the Business and Economic Statistics Section*, 405-410.
- Sağır, B., Erdoğan, F. (2019). On the function sequences and series in the non-Newtonian calculus. *Journal of Science and Arts*, 4(49), 915-936.
- Schiff, J.L., (1999). *The Laplace Transform*. Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg.
- Türkmen, C. ve Başar, F. (2012). Some Basic Results On The Sets of Sequences With Geometric Calculus. *First International Conference on Analysis and Applied Mathematics*, Gümüşhane, Türkiye.
- Watugala, G. K. (1993). Sumudu transform: a new integral transform to solve differential equations and control engineering problems. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, no.1, 35-43.
- Watugala, G. K. (1998). Sumudu transform a new integral transform to solve differential equations and control engineering problems. *Mathematical engineering in industry*, vol. 1, 319-329.
- Weerakoon, S. (1994). Application of Sumudu transform to partial differential equations. *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.*, 25(2), 277-283.
- Weerakoon, S., (1997). The Sumudu transform and the Laplace transform reply, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 28(1), 159-160.
- Weerakoon, S. (1998). Complex Inversion Formula for Sumudu Transform, *International Journal of Mathematical Education Science and Technology*, 29(4), 618-621.

ÖZGEÇMİŞ

Nagihan Dinç, Liseye 2003 yılında Bursa Osmangazi Lisesi'nde başladı. 2006 yılında ise Balıkesir Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde öğrenim görmeye başladı. Mezuniyetinin ardından 2010-2011 yılları arasında Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Eğitim Fakültesi'nde Pedagojik Formasyonunu tamamladı. 2021 yılında Sakarya Üniversitesi Bilişim Sistemleri Bölümü Tezsiz Yüksek Lisans'tan mezun oldu. Aynı anda 2020 yılında Gümüşhane Üniversitesi Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı'nda yüksek lisansa başladı. 2012 Eylül' den beri de Milli Eğitim Bakanlığı'nda Matematik Öğretmeni olarak görev yapmaktadır.