

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ϕ δ ASALIMSİ CEBİRSEL YAPILARIN
KARAKTERİZASYONU

Elif KAYA

DOKTORA TEZİ
Matematik Anabilim Dalı
Matematik Programı

Danışman
Prof. Dr. Bayram Ali ERSOY

Mart, 2023

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

$\phi \delta$ ASALIMSİ CEBİRSEL YAPILARIN KARAKTERİZASYONU

Elif KAYA tarafından hazırlanan tez çalışması 17.03.2023 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Matematik Programı **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Bayram Ali ERSOY
Yıldız Teknik Üniversitesi
Danışman

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Bayram Ali ERSOY, Danışman
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Ahmet Göksel AĞARGÜN, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Ünsal TEKİR, Üye
Marmara Üniversitesi

Dr. Öğr. Üyesi Serkan ONAR, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Suat KOÇ, Üye
İstanbul Medeniyet Üniversitesi

Danışmanım Prof. Dr. Bayram Ali ERSOY sorumluluğunda tarafımca hazırlanan ϕ δ Asalımsı Cebirsel Yapıların Karakterizasyonu başlıklı çalışmada veri toplama ve veri kullanımında gerekli yasal izinleri aldığımı, diğer kaynaklardan aldığım bilgileri ana metin ve referanslarda eksiksiz gösterdiğimi, araştırma verilerine ve sonuçlarına ilişkin çarpıtma ve/veya sahtecilik yapmadığımı, çalışmam süresince bilimsel araştırma ve etik ilkelerine uygun davrandığımı beyan ederim. Beyanımın aksinin ispatı halinde her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Elif KAYA

İmza

Canım Babama

ve

Canım Oğlum Ahmet Enes'e



TEŞEKKÜR

Rehberliğini esirgemeyen, tezimin her aşamasında yanımda olduğunu hissettiren kıymetli danışman hocam Prof. Dr. Bayram Ali ERSOY'a, tezin konusunu bulma noktasında ilham olan, aklıma takılan sorulara en kısa sürede dönüş yapan hocam Doç. Dr. Suat KOÇ'a, birlikte çalışma imkanı bulduğum, hiçbir zaman yardımını eksik etmeyen kıymetli hocam Dr. Öğr. Üyesi Serkan ONAR'a sonsuz teşekkürü borç bilirim. Tez jürimde bulunan ve kıymetli önerileriyle tezimi geliştirmemi sağlayan Prof. Dr. Ahmet Göksel AĞARGÜN ve Prof. Dr. Ünsal TEKİR hocalarıma çok teşekkür ederim.

Yüksek lisans ve doktora sürecinde omuz omuza çalıştığım, birlikte öğrendiğim, her heyecanıma ortak olan arkadaşım Melis BOLAT'a çok teşekkür ederim. Çalışma arkadaşlarıma, bilhassa Arş. Gör. Dr. Nurbanu ŞAHİN HATİPOĞLU ve Öğr. Gör. Beyza KIRCA'ya yaşamımın iniş ve çıkışlarında her türlü destekleri için teşekkürlerimi sunarım. Her ne kadar birbirimizden uzakta olsak da yakın olmayı başardığımız kardeşim Uzm. Dr. Özlem ÇİÇEK ZEKEY'e teşekkür ederim.

Bugünlere gelmemi sağlayan, bana doktor diye seslenen, kanser hastalığına daha fazla direnemeyerek 22 Mart 2022'de aramızdan ayrılan canım babama; eğitim hayatımda çok büyük rolü olan, beni her zaman her yönden destekleyen biricik anneme ve tüm aileme çok teşekkür ederim.

24 Mayıs 2022'de dünyaya gelen, evimizi şenlendiren, kütüphane dönüşlerinde beni sabırla bekleyen canım oğlum Ahmet Enes'e, Ahmet'e bakarak çalışma vakitleri bulmama yardımcı olan kıymetli kayınvalideme ve hiçbir desteğini esirgemeyen biricik eşim Ömer Faruk KAYA'ya çok ama çok teşekkür ederim.

Elif KAYA

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ	vi
ÖZET	viii
ABSTRACT	x
1 GİRİŞ	1
1.1 Literatür Özeti	1
1.2 Tezin Amacı	3
1.3 Hipotez	4
2 TEMEL KAVRAMLAR	5
3 ϕ-δ-ASALIMSIZ ALT MODÜLLERİN KARAKTERİZASYONU	22
4 KRASNER HİPER HALKALARDA ϕ-δ-ASALIMSIZ HİPER İDEALLERİN KARAKTERİZASYONU	36
4.1 ϕ -Asal Hiper İdealler	36
4.2 ϕ -Asalimsız Hiper İdealler	44
4.3 ϕ - δ -Asalimsız Hiper İdealler	51
5 SONUÇ VE ÖNERİLER	62
KAYNAKÇA	63
TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR	66

SİMGE LİSTESİ

\subseteq	Alt Kümesi
$\not\subseteq$	Alt Kümesi Değil
\cup	Birleşim
\mathbb{N}	Doğal Sayılar Kümesi
\in	Elemanı
\notin	Elemanı Değil
\exists	En Az Bir Tane Vardır
$\text{Çek}f$	f Fonksiyonunun Çekirdeği
\Rightarrow	Gerek Şart
\Leftrightarrow	Gerek ve Yeter Şart
$P^*(G)$	G nin Boştan Farklı Alt Kümelerinin Ailesi
\sqrt{I}	I İdealinin Radikali
\mathbb{C}	Karmaşık Sayılar Kümesi
$S^{-1}R = R_S$	Kesir Halkası
$S^{-1}M = M_S$	Kesir Modülü
\cap	Kesişim
$L(M)$	M Modülünün Tüm Alt Modüllerinin Kümesi
ζ	Öz Alt Küme
$L(R)$	R Halkasının Tüm İdeallerinin Kümesi
$L(\mathfrak{R})$	\mathfrak{R} Hiper Halkasının Tüm Hiper İdeallerinin Kümesi
\mathbb{Q}	Rasyonel Sayılar Kümesi
\mathbb{R}	Reel Sayılar Kümesi
ann	Sıfırlayıcı

\mathbb{Z}	Tam Sayılar Kümesi
$\exists!$	Tek Türlü Bir Tane Vardır
\Leftarrow	Yeter Şart



ϕ δ Asalımsı Cebirsel Yapıların Karakterizasyonu

Elif KAYA

Matematik Anabilim Dalı

Doktora Tezi

Danışman: Prof. Dr. Bayram Ali ERSOY

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde literatür özeti, tezin amacı ve hipotez verilmiştir. İkinci bölümde tezde kullanılan modüller ve Krasner hiper halkalarla ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde ϕ - δ -asalımsı alt modüller karakterize edilmiştir. Üretilen bu yapıda kullanılan temel teoremler verilmiş, bölüm halkası, yerelleştirme, homomorfizma, kartezyen çarpım özellikleri incelenmiştir. Bu bölümde R halkasının bütün ideallerini temsil eden kümeyi $L(R)$ ile, M modülünün bütün alt modüllerinin kümesini $L(M)$ ile göstereceğiz. ϕ bir indirgeme fonksiyonu olmak üzere $\phi : L(M) \longrightarrow L(M) \cup \{\emptyset\}$ ile ve δ bir genişleme fonksiyonu olmak üzere $\delta : L(R) \longrightarrow L(R)$ ile tanımlanır. M bir R -modül, N de M modülünün bir öz alt modülü olmak üzere; bir $a \in R$, $m \in M$ için $am \in N - \phi(N)$ iken $a \in \delta(N : M)$ veya $m \in N$ ise N ye bir ϕ - δ -asalımsı alt modül denir. Dördüncü bölümde; Krasner hiper halkalarında ϕ -asal, ϕ -asalımsı ve ϕ - δ -asalımsı hiper idealler tanımlanmıştır. Bu yapıları sınıflandırmak amacıyla bazı karakterizasyonlar verilmiştir. Bölüm halkası, yerelleştirme, homomorfizma, kartezyen çarpım özellikleri her bir alt başlıkta incelenmiştir. Bu bölümde \mathfrak{R} hiper halkasının bütün hiper ideallerini temsil eden kümeyi $L(\mathfrak{R})$ ile göstereceğiz. ϕ bir fonksiyon; $\phi : L(\mathfrak{R}) \longrightarrow L(\mathfrak{R}) \cup \{\emptyset\}$ ve δ bir genişleme fonksiyonu; $\delta : L(\mathfrak{R}) \longrightarrow L(\mathfrak{R})$ olmak üzere N , \mathfrak{R} nin bir öz hiper ideali olsun. $a, b \in \mathfrak{R}$ için $a \circ b \in N - \phi(N)$ iken $a \in N$ veya $b \in N$ (bir $k \in \mathbb{N}$ için $b^k \in N$) ise N ye bir ϕ -asal (ϕ -asalımsı) hiper ideal denir. ϕ bir indirgeme fonksiyonu; $\phi : L(\mathfrak{R}) \longrightarrow L(\mathfrak{R}) \cup \{\emptyset\}$ ve δ bir genişleme fonksiyonu; $\delta : L(\mathfrak{R}) \longrightarrow L(\mathfrak{R})$ olsun. N , \mathfrak{R} nin bir öz hiper ideali olmak üzere; $a, b \in \mathfrak{R}$ için $a \circ b \in N - \phi(N)$ iken $a \in N$ veya $b \in \delta(N)$ ise N ye bir ϕ - δ -asalımsı hiper ideal denir. Beşinci bölümde ise sonuç ve öneriler yer almaktadır.

Anahtar Kelimeler: ϕ - δ -asalımsı alt modül, Krasner hiper halka, ϕ -asal hiper ideal, ϕ -asalımsı hiper ideal, ϕ - δ -asalımsı hiper ideal.



YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Characterizations of ϕ δ Primary Algebraic Structures

Elif KAYA

Department of Mathematics

Doctor of Philosophy Thesis

Supervisor: Prof. Dr. Bayram Ali ERSOY

This thesis consists of five chapters. In the first chapter, the literature, the aim of the thesis, and the hypothesis are given. The second chapter gives basic definitions and theorems about modules and Krasner hyperrings used in the thesis. In the third section, ϕ - δ -primary submodules are characterized. The fundamental theorems used in this produced structure are given, and the quotient ring, localization, homomorphism, and cartesian product properties are examined. In this section, we will denote the set of all ideals of the ring R by $L(R)$ and the set of all submodules of the module M by $L(M)$. Let ϕ be a reduction function such that $\phi : L(M) \rightarrow L(M) \cup \{\emptyset\}$ and δ be an expansion function such that $\delta : L(R) \rightarrow L(R)$. Let M be an R -module, N be a proper submodule of M . N is called a ϕ - δ -primary submodule if $am \in N - \phi(N)$ for some $a \in R$, $m \in M$ then $a \in \delta(N : M)$ or $m \in N$. The fourth chapter introduces ϕ -prime, ϕ -primary, and ϕ - δ -primary hyperideals in Krasner hyperrings. To classify these structures, some characterizations are given. Quotient ring, localization, homomorphism, and cartesian product properties are examined for all the subsections in this chapter. In this section, we will denote the set of all hyperideals of the hyperring \mathfrak{R} with $L(\mathfrak{R})$. Let ϕ be a function such that $\phi : L(\mathfrak{R}) \rightarrow L(\mathfrak{R}) \cup \{\emptyset\}$ and δ be an expansion function such that $\delta : L(\mathfrak{R}) \rightarrow L(\mathfrak{R})$. Let N be a proper hyperideal of \mathfrak{R} . N is called a ϕ -prime (ϕ -primary) hyperideal of \mathfrak{R} if $a \circ b \in N - \phi(N)$ for some $a, b \in \mathfrak{R}$, then $a \in N$ or $b \in N$ (for some $k \in \mathbb{N}$, $b^k \in N$). Let ϕ be a reduction function such that $\phi : L(\mathfrak{R}) \rightarrow L(\mathfrak{R}) \cup \{\emptyset\}$, δ be an expansion function such that $\delta : L(\mathfrak{R}) \rightarrow L(\mathfrak{R})$ and N be a proper hyperideal of \mathfrak{R} . So N is called a ϕ - δ -primary hyperideal of \mathfrak{R} if $a \circ b \in N - \phi(N)$ for some $a, b \in \mathfrak{R}$, then $a \in N$ or $b \in \delta(N)$. In the fifth chapter, conclusions and recommendations are given.

Keywords: ϕ - δ -primary submodule, Krasner Hyperring, ϕ -prime hyperideal, ϕ -primary hyperideal, ϕ - δ -primary hyperideal.



**YILDIZ TECHNICAL UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE AND ENGINEERING**

1.1 Literatür Özeti

Boştan farklı bir küme ve en az bir ikili işlemde oluşan yapıya cebirsel yapı adı verilir. Bir işlemli cebirsel yapıya örnek olarak grup, iki işlemli cebirsel yapıya örnek olarak halka ve cisim verilebilir. Bir küme üzerine kurulan cebirsel yapılar olduğu gibi birden fazla küme üzerine kurulan cebirsel yapılar da vardır. Modül; bir değişmeli grup ve bir halkanın ikili işlemlerle birlikte inşa ettiği bir yapıdır. Karşılaşılan ikili işlemlerden bazıları ise sayılar üzerinde, polinomlarda, matrislerde toplama ve çarpma işlemleri, modüler aritmetik, permütasyonların birleşimi ve kümelerde birleşme, kesişme işlemleri olarak ifade edilebilir.

Halka yapısına dahil olan asal ve asalımsı idealler, cebirsel yapılarda önemli bir yere sahiptir. Bu sebeple pek çok araştırmacı bu alanda çalışmıştır. Araştırmacılar tarafından asal ideallerin çeşitli genelleştirmeleri yapılmıştır. Bunlardan bizim çalışmamızla daha çok ilişkili olduğunu düşündüklerimizi inceleyeceğiz. Zhao 2001 yılında asal ideallerin bir genişlemesi olarak δ -asalımsı idealleri tanımlamıştır [1]. Anderson 2003 yılında zayıf asal idealleri tanıtmış [2], Bhatwadekar ve Sharma 2005 yılında hemen hemen asal idealleri [3] çalışmışlardır. Anderson ve Bataineh, 2008 yılında yayınlanan "Generalizations of prime ideals" başlıklı makalelerinde ϕ -asal idealleri tanımlamışlar ve çeşitli özelliklerini incelemişlerdir [4]. Atani 2007 yılında zayıf asal alt modül yapısını [5], Zamani ise 2010 yılında ϕ -asal alt modül yapısını [6] çalışarak asal alt modülleri genelleştirmişlerdir. Asalımsı ideallerin ve alt modüllerin genelleştirilmesi çerçevesinde 2011 yılında Bataineh ve Kuhail hemen hemen asalımsı idealler, ϕ -asalımsı idealler, hemen hemen asalımsı alt modüller ve ϕ -asalımsı alt modüller yapılarını bazı özellikleriyle ele almışlardır [7]. Khaskan 2012 yılında hemen hemen asal alt modülleri [8] ve Darani ϕ -asalımsı idealleri [9] çalışarak literatüre katkıda bulunmuştur. 2012 ve 2013 yıllarında Ebrahimpour ve Nekooei ϕ fonksiyonunu kullanarak asal ideallerin ve asal alt modüllerin genelleştirilmesini sağlamıştır. [10, 11]. Zhao Dongsheng'in çalışmasından esinlenerek 2018 yılında Yeşilot ve arkadaşları ideal yapısını modüle uyarlayarak δ -asalımsı alt modülleri

çalışmışlardır [12]. Jaber ise 2020 yılında δ foksiyonunu genişleme, ϕ fonksiyonunu ise indirgeme fonksiyonu olarak kullanmış ve ϕ - δ -asalımsı idealler yapısını üretmiştir [13].

Hiper yapılar, cebirsel yapıların tanımlanan işlem sayesinde genelleştirilmiş halidir. Klasik cebirde işleme giren iki elemanın sonucu bir elemana karşılık gelir. Buna karşın hiper yapılarda iki eleman hiper işleme alındığında işlemin sonucu bir elemana veya bir kümeyle karşılık gelir. Boştan farklı bir küme ve en az bir hiper işlemden oluşan yapılar sınıfına cebirsel hiper yapılar denir. Hiper grup, hiper halka ve hiper modül yapıları aslında sırasıyla grup, halka ve modüllerin bir hiper işlem aracılığıyla genelleştirilmiş halidir. Fransız Matematikçi Marty, 1934 yılında "Sur une generalization de la notion de groupe" başlıklı çalışmasıyla [14] hiper grupları tanıtarak hiper yapı kavramını literatüre kazandırmıştır. Mittas 1972 yılında kanonik hiper grupları çalışmıştır [15]. Rosaria Rota 1982 yılında çarpımsal hiper halkaları, 1990 yılında ise kuvvetli dağılma özelliğine sahip çarpımsal hiper halkaları tanımlamıştır [16, 17]. Mittas'ın kurduğu kanonik hiper grup yapısı üzerine, ikinci işlem olarak bilinen çarpma işlemi ile kurulan hiper halkaya Krasner hiper halkaları denilmiştir. Krasner, hiper halkalar ve hiper cisimleri 1983'te çalışmıştır [18]. Çarpımsal hiper halkalarda kullanılan hiper işlem çarpma iken Krasner hiper halkalarda kullanılan hiper işlem toplama işlemidir. Şimdiye kadar yapılan çalışmalarda en çok kullanılan hiper halka Krasner hiper halkasıdır [19]. Toplamanın ve çarpmanın aynı anda hiper işlem olarak tanımlandığı hiper halka genel hiper halka adını alır. Bu halka Mittas tarafından süper halka olarak tanımlanmıştır [20]. Krasner'in öğrencileri olan Mittas ve Stratigopoulos hiper modülleri çalışmış, Massouros da yine hiper modüller üzerinde çalışmalar yapmıştır [15, 21, 22]. Marshall tarafından tanımlanan multi halkalar Krasner hiper halkasından farklı olarak sadece soldan dağılma özelliğini karşılar. Bu sebeple hiper halkalar multi halkadır fakat her multi halka hiper halka değildir [23]. Velrajan ve Asokkumar 2007'de düzenli hiper halkalar üzerinde çalışmışlar [24], 2010 yılında kanonik hiper gruplar üzerinde örnekler verip kanonik hiper gruplarda ve genel hiper halkalarda izomorfizma teoremlerini kurmuşlar, 2012 yılında ise hiper halkalar üzerinde radikal özelliğini incelemişlerdir [25, 26]. 2012 yılında çarpımsal hiper halkalar üzerinde asal ve asalımsı hiper idealleri Dasgupta tanımlamıştır [27]. 2013 yılında Asokkumar, Krasner hiper halkaların türevleri ve asal hiper idealler üzerinde çalışmıştır [28]. Ayrıca Ameri ve Norouzi, Corsini, Dasgupta, Davvaz, Omid, Lekkoksung, Leoreanu Fotea hiper halkaları daha ayrıntılı bir şekilde çalışmışlardır [29–35]. Asal ideallerin bir genişlemesi olarak ele alınan δ -asalımsı idealleri 2017 yılında Özel Ay ve Yeşilot, 2018 yılında Abumghaiseb ve Ersoy hiper yapılara uygulamışlardır [36, 37].

Hiper yapı teorisi bilgisayar bilimleri, fizik, kimya, matematik, geometri ve mantık

teorisinde aktif olarak kullanılmaktadır. Hiper yapıların kısa tarihi, kullanım şekilleri, birbiri arasındaki bağlantı ve semantik alt yapısı Golzio'nun makalesinde incelenmiştir [38]. Bu da bize farklı motivasyon ve amaçlarla pek çok araştırmacı tarafından hiper yapıların çalışıldığını göstermektedir.

1.2 Tezin Amacı

Çalışmamızın özgün bölümleri üçüncü ve dördüncü bölümlerdir.

Tezin üçüncü bölümünde ϕ fonksiyonu alt modülleri, alt modüllere dönüştüren bir indirgeme fonksiyonu olarak tanımlanır. Asal, zayıf asal, hemen hemen asal ve w -asal alt modül yapılarını birlikte çalışmamıza olanak sağlar. δ fonksiyonu ise idealleri ideallere dönüştüren bir genişleme fonksiyonudur. Asal ve asalımsı alt modülleri birlikte çalışmamıza olanak sağlar. Bu fonksiyonlarla kurulan yapılar birleştirilerek; bahsedilen tüm alt modülleri bir arada çalışmak amaçlanmıştır. Bu amaç doğrultusunda ϕ - δ -asalımsı alt modüller yapısı inşa edilmiştir ve bu yapıyla ilgili bazı temel karakterizasyonlar verilmiştir (Teorem 3.1 ve Teorem 3.5). ϕ - δ -asalımsı alt modüllerin homomorfizma altındaki görüntüsü ve ters görüntüsü, bölüm modülü ve kartezyen çarpımları incelenmiştir (Teorem 3.4, Sonuç 3.1, Önerme 3.3, Önerme 3.4 ve Teorem 3.7). Teorem 3.6'da çarpımsal alt modüllerin ϕ - δ -asalımsı alt modülleri çalışılmıştır. Son olarak da Naser Zamani tarafından verilen açık probleme [6], Teorem 3.8 ile bir cevap verilmiş ve örneklerle desteklenmiştir.

Tezin dördüncü bölümünde Krasner hiper halka yapısı üzerinde ϕ -asal, ϕ -asalımsı ve ϕ - δ -asalımsı hiper idealler çalışılmıştır. Bölüm 4.1 ve Bölüm 4.2'de ϕ fonksiyonu hiper idealleri, hiper ideallere dönüştüren bir fonksiyon olarak tanımlanır. Bölüm 4.1'de asal, zayıf asal, hemen hemen asal ve w -asal hiper ideal yapılarını birlikte çalışmak, Bölüm 4.2'de ise asalımsı, zayıf asalımsı, hemen hemen asalımsı ve w -asalımsı hiper ideal yapılarını birlikte çalışmak hedeflenmiştir. Öncelikle ϕ -asal ve ϕ -asalımsı hiper idealler tanımlanmış bu sayede asal ve asalımsı hiper idealler üzerinde bir genelleştirme yapılmıştır. Asal hiper ideallerde gerçekleşen teorem ve önermelerin bir çoğunun asalımsı hiper ideallerde de çalıştığı görülmüştür. Bölüm 4.3'te kullanılan δ fonksiyonu; asal ve asalımsı hiper idealleri birlikte çalışmamıza olanak sağlayan ve hiper idealleri, hiper ideallere dönüştüren bir genişleme fonksiyonu olarak tanımlanmıştır. ϕ fonksiyonu ise hiper idealler üzerinde bir indirgeme fonksiyonu olarak alınmıştır. Bu iki yapı birleştirilerek; bahsedilen tüm hiper idealleri bir arada çalışmak amaçlanmıştır. Bu sebeple ϕ - δ -asalımsı hiper idealler karakterize edilmiştir. Bazı koşullar altında bir ϕ - δ -asalımsı hiper idealden yeni bir ϕ - δ -asalımsı hiper ideal üretilmiştir (Teorem 4.10). μ bir iyi homomorfizma

olmak üzere, bir ϕ - δ -asalımsı hiper idealin görüntüsünün ve ters görüntüsünün de ϕ - δ -asalımsı hiper ideal olduğu gösterilmiş (Teorem 4.12) ve aşık sonuçlar ifade edilmiştir (Teorem 4.6). Zayıf δ -asalımsı hiper idealler, ϕ - δ -asalımsı hiper idealler kullanılarak karakterize edilmiştir (Teorem 4.13). Yapılan bu karakterizasyonlara ek olarak ϕ -asal, ϕ -asalımsı ve ϕ - δ -asalımsı hiper idealler için bölüm halkası, yerleştirme ve kartezyen çarpım özellikleri incelenmiş, ilgili özelliklerin ispatları verilmiştir.

Tezin beşinci bölümünde; sonuç ve öneriler başlığı altında, yapılan araştırmaların sonucu verilmiştir.

1.3 Hipotez

Değişmeli halkalarda asal ideallerin genelleştirilmesiyle elde edilen ϕ - δ -asalımsı idealler yapısı modüllere uygulanabilir ve ϕ - δ -asalımsı alt modüller karakterize edilebilir.

Hiper yapılarda ise asal ve asalımsı hiper ideallerin genelleştirilmesi mümkündür. ϕ -asal, ϕ -asalımsı ϕ - δ -asalımsı hiper idealler tanımlanabilir. Karakterizasyonlar yapılarak bölüm halkası, yerleştirme, kartezyen çarpım ve homomorfizma teoremleri gibi çeşitli teoremlere uygulanabilir.

Bu bölümde tezde kullanılacak olan temel kavramlar yer almaktadır.

Tanım 2.1. G boş kümeden farklı olmak üzere $G \times G$ den G ye tanımlanan fonksiyona G üzerinde bir ikili işlem denir.

Örnek 2.1. *Toplama işlemi tam sayılar, doğal sayılar, rasyonel sayılar ve reel sayılar kümelerinde birer ikili işlem olur. Çıkarma işlemi ise doğal sayılar kümesinde bir ikili işlem değildir.*

Tanım 2.2. (G, \star) cebirsel yapısı için:

- (i) Her $a, b \in G$ için $a \star b \in G$;
- (ii) Her $a, b, c \in G$ için $a \star (b \star c) = (a \star b) \star c$;
- (iii) Her $a \in G$ için $a \star e = a = e \star a$ olacak şekilde $\exists e \in G$;
- (iv) Her $a, b \in G$ için $e = a \star b = b \star a$ olacak şekilde bir $\exists! b \in G$ (bu durumda b ye a nın tersi denir ve a^{-1} ile gösterilir);

koşulları sağlanıyorsa G bir gruptur.

Örnek 2.2. *Tam sayılar kümesi toplama işlemiyle bir grup oluşturur. Fakat doğal sayılar kümesi toplama işlemine göre grup oluşturmaz çünkü doğal sayıların ters elemanları doğal sayılar kümesi içine düşmez.*

Örnek 2.3. *Karmaşık sayılar, reel sayılar ve rasyonel sayılar kümelerinden 0 elemanını çıkardığımızda $(\mathbb{C}^*, \mathbb{R}^*, \mathbb{Q}^*)$ elde ettiğimiz kümeler çarpma işlemine göre birer grup oluşturur.*

Tanım 2.3. G bir grup olmak üzere, boştan farklı K alt kümesi de grubun işlemine göre bir grup oluşturuyorsa K ye bir alt grup denir.

Örnek 2.4. (\mathbb{Q}^*, \cdot) grubu, (\mathbb{R}^*, \cdot) grubunun bir alt grubudur.

Tanım 2.4. G bir grup ve K de bir alt grup olsun. $a \in G$ iken $\{ak : k \in K\}$ kümesine K alt grubunun sol koseti denir ve aK ile gösterilir. G toplamsal grup ise sol koset $a + K$ ile ifade edilir ve $a+K = \{a+k : k \in K\}$ ile tanımlanır. (Sağ koset ise $Ka = \{ka : k \in K\}$ ile tanımlanır.)

Örnek 2.5. $G = \mathbb{Z}$ grubu için $K = 3\mathbb{Z}$ ve $a = 2$ olsun.

$$a + K = 2 + 3\mathbb{Z} = \{2 + 3n : n \in \mathbb{Z}\}$$

Tanım 2.5. G bir grup olsun. K , G nin bir alt grubu iken her $g \in G$ için $gKg^{-1} \subseteq K$ oluyor ise K ye G nin normal alt grubu denir.

Örnek 2.6. $2\mathbb{Z}$, \mathbb{Z} nin bir normal alt grubudur.

Tanım 2.6. G bir grup ve K bir normal grup olsun. Oluşturulan G/K grubuna G nin K ye göre bir bölüm grubu denir.

Örnek 2.7. $G = \mathbb{Z}$ ve $K = 4\mathbb{Z}$ olmak üzere bölüm grubu $G/K = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{0 + 4\mathbb{Z}, 1 + 4\mathbb{Z}, 2 + 4\mathbb{Z}, 3 + 4\mathbb{Z}\}$ elemanlarından oluşur.

Tanım 2.7. (G, \star) ve (K, Δ) iki grup iken $f : G \rightarrow K$ olacak şekilde bir f fonksiyonu tanımlansın. Her $a, b \in G$ iken;

$$f(a \star b) = f(a)\Delta f(b) \quad (2.1)$$

oluyorsa tanımlanan bu fonksiyona grup homomorfizması adı verilir.

Tanım 2.8. $(R, +, \cdot)$ cebirsel yapısını ele alalım.

- (i) Her $a, b \in R$ için $a + b = b + a$ olur.
- (ii) Her $a, b, c \in R$ için $a + (b + c) = (a + b) + c$ olur.
- (iii) Her $a \in R$ için $a + 0 = a$ olacak şekilde $0 \in R$ mevcuttur.
- (iv) Her $a \in R$ için $a + (-a) = 0$ olacak şekilde yalnız bir $-a \in R$ mevcuttur ve bu elemana a nın toplamsal tersi denir.
- (v) Her $a, b, c \in R$ için $a.(b.c) = (a.b).c$ olur.
- (vi) Her $a, b, c \in R$ için $a.(b + c) = (a.b) + (a.c)$ ve $(a + b).c = (a.c) + (b.c)$ olur.

Bu cebirsel yapı için yukarıdaki koşullar sağlanıyorsa R bir halkadır.

$(R, +, \cdot)$ bir halka iken ikinci işleme göre değişme özelliği mevcutsa R halkasına değişmeli halka denir. Yine ikinci işleme göre halkanın birimi mevcutsa bu halkaya birimli halka denir.

Örnek 2.8. *Tam sayılar ve reel sayılar kümesi bir halka oluşturur, doğal sayılar kümesi ise bir halka oluşturmaz.*

Not 2.1. Biz bu tezde değişmeli ve birimli halkalar üzerinde çalışacağız.

Not 2.2. Tez boyunca $a \cdot b$ ile gösterilen iki elemanın çarpımını kısaca ab ile göstereceğiz.

Tanım 2.9. Değişmeli ve birimli bir R halkası için her $0 \neq a$ elemanının halkanın ikinci işlemine göre bir tersi mevcutsa R halkasına bir cisim denir.

Örnek 2.9. *Reel sayılar, rasyonel sayılar, kompleks sayılar halkaları birer cisim oluşturur fakat tam sayılar halkası bir cisim oluşturmaz.*

Tanım 2.10. R bir halka ve T bu halkanın boştan farklı bir alt kümesi olsun. T kümesi de R halkasının işlemlerine göre bir halka oluşturuyorsa T ye bir alt halka denir.

Teorem 2.1. T alt kümesinin R nin bir alt halkası olması için gerek ve yeter koşul T kümesinin her a, b elemanı için $a - b$ ve ab lerin de yine T nin bir elemanı olmasıdır.

Örnek 2.10. *Tam sayılar halkasının, reel sayılar halkasının bir alt halkası olduğunu söyleyebiliriz.*

Tanım 2.11. R halkasını alalım ve T , R nin boştan farklı bir kümesi olsun. T kümesinden aldığımız her a, b elemanı ve R halkasından aldığımız her r elemanı için;

(i) $a - b \in T$

(ii) $ra \in T$ ve $ar \in T$

olsun. Bu durumda T ye bir ideal denir. (Eğer (ii)'de yalnızca $ra \in T$ ise sol ideal, yalnızca $ar \in T$ ise sağ ideal adını alır.)

Not 2.3. R halkasının tüm ideallerinin kümesini $L(R)$ ile göstereceğiz.

Örnek 2.11. $n \in \mathbb{N}$ iken $n\mathbb{Z}$, \mathbb{Z} nin bir idealidir.

Tanım 2.12. Her halkanın sıfırı ve kendisi de birer idealdir. Bu ideallere aşık ideal denir. Halkanın kendinden farklı idealine öz ideal denir.

Tanım 2.13. T , R halkasının bir ideali olmak üzere;

$$\sqrt{T} = \{a \in R : \text{bir } t \in \mathbb{N} \text{ için } a^t \in T\} \quad (2.2)$$

kümesi $T \subseteq \sqrt{T}$ olacak şekilde R nin bir idealidir ve T nin radikali olarak adlandırılır.

Tanım 2.14. T , R halkasının bir öz ideali olsun. Halkadan aldığımız a, b elemanları için $ab \in T$ iken $a \in T$ veya $b \in T$ ise T asal ideal olarak adlandırılır.

Tanım 2.15. T , R halkasının bir öz ideali olsun. Halkadan aldığımız a, b elemanları için $ab \in T$ iken $a \in T$ veya $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $b^k \in T$ ise T asalımsı ideal olarak adlandırılır.

Tanım 2.16. T bir öz ideal, $a, b \in R$ olsun. $0 \neq ab \in T$ iken $a \in T$ veya $b \in T$ ise T ye zayıf asal ideal denir [2].

Tanım 2.17. T bir öz ideal, $a, b \in R$ olacak şekilde $ab \in T - T^2$ iken $a \in T$ veya $b \in T$ ise T ye bir hemen hemen asal ideal denir [3].

Tanım 2.18. R nin ideallerinin her artan $T_1 \subseteq T_2 \subseteq \dots \subseteq T_n \subseteq \dots$ zinciri sonlu bir adımda duruyorsa bu halka artan zincir koşulunu sağlar denir.

Tanım 2.19. T , R nin bir ideali olsun. Halkadan alınan her a_1, a_2 elemanları için;

$$a_1 \equiv a_2 \pmod{T} \iff a_1 - a_2 \in T \quad (2.3)$$

ile kurulan denklik bağıntısına göre oluşan R/T toplamsal bölüm grubu, $a, b \in R$ olmak üzere

$$(a + T) + (b + T) = (a + b) + T \quad (2.4)$$

$$(a + T)(b + T) = (ab) + T \quad (2.5)$$

işlemleri ile bir halka oluşturur. $(R/T, +, \cdot)$ halkası T ye göre bölüm halkası adını alır.

Tanım 2.20. $(R, +, \cdot)$ ve (S, \oplus, \circ) iki halka iken $f : R \longrightarrow S$ olacak şekilde bir f fonksiyonu tanımlansın. R halkasının biriminin görüntüsü S halkasının birimine eşit iken her $a, b \in R$ olmak üzere;

$$f(a + b) = f(a) \oplus f(b) \quad (2.6)$$

$$f(a \cdot b) = f(a) \circ f(b) \quad (2.7)$$

oluyorsa tanımlanan bu fonksiyona halka homomorfizması adı verilir.

Tanım 2.21. Birebir homomorfizmaya monomorfizma, örten homomorfizmaya epimorfizma, birebir ve örten homomorfizmaya izomorfizma denir. $f : R \longrightarrow R$ olacak

şekilde bir homomorfizma ise f ye endomorfizma, izomorfizma ise f ye otomorfizma adı verilir.

Tanım 2.22. $f : R \longrightarrow S$ ye bir homomorfizma olmak üzere;

$$\text{Çek}f = \{a \in R : f(a) = 0_S\} \quad (2.8)$$

ile tanımlanır.

Tanım 2.23. S boştan farklı, R nin bir çarpımsal alt kümesi olmak üzere $R \times S$ üzerinde aşağıdaki gibi tanımlanan bir denklik bağıntısı \sim olsun. Her $a, a' \in R$ ve her $s, s' \in S$ için;

$$(a, s) \sim (a', s') \iff \exists u \in S, u(as' - a's) = 0 \quad (2.9)$$

$(a, s) \in R \times S$ nin \sim denklik bağıntısına göre belirttiği denklik sınıfı kesir ismini alır ve $\frac{a}{s}$ ile temsil edilir. Tüm kesirlerin kümesi ise $S^{-1}R$ (R_S) ile temsil edilir. Her $a, b \in R$ ve her $s, t \in S$ için;

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at + bs}{st} \quad (2.10)$$

$$\frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st} \quad (2.11)$$

işlemleri ile tanımlanan $(S^{-1}R, +, \cdot)$ halkasına R nin S ye göre yerelleştirmesi denir.

Not 2.4. Tezin içinde $S^{-1}R$ kesir halkası, R_S ile temsil edilecektir.

Tanım 2.24. $\phi : L(R) \longrightarrow L(R) \cup \{\emptyset\}$ bir fonksiyon; T, R nin bir öz ideali olmak üzere halkadan alınan a, b elemanları için $ab \in T - \phi(T)$ iken $a \in T$ veya $b \in T$ ise T ye ϕ -asal ideal denir [4].

Tanım 2.25. $\phi : L(R) \longrightarrow L(R) \cup \{\emptyset\}$ bir fonksiyon; T, R nin bir öz ideali olmak üzere halkadan alınan a, b elemanları için $ab \in T - \phi(T)$ iken $a \in T$ veya $(k \in \mathbb{N}) b^k \in T$ ise T ye ϕ -asalımsı ideal denir [7].

Tanım 2.26. $\delta : L(R) \longrightarrow L(R)$ ile tanımlı bir fonksiyon ve her $T, V \in L(R)$ için

$$(i) \quad T \subseteq \delta(T)$$

$$(ii) \quad T \subseteq V \text{ iken } \delta(T) \subseteq \delta(V)$$

koşullarını sağlıyorsa δ fonksiyonuna bir genişleme fonksiyonu denir [1].

Tanım 2.27. $\delta : L(R) \longrightarrow L(R)$ ye bir genişleme fonksiyonu ve T, R nin öz ideali olsun. Halkadan alınan her a, b elemanı için $ab \in T$ iken $a \in T$ veya $b \in \delta(T)$ oluyorsa T ye δ -asalımsı ideal denir [1].

Tanım 2.28. $\phi : L(R) \longrightarrow L(R) \cup \{\emptyset\}$ ile tanımlı bir fonksiyon ve her $T, V \in L(R)$ için

- (i) $\phi(T) \subseteq T$
- (ii) $T \subseteq V$ iken $\phi(T) \subseteq \phi(V)$

koşullarını sağlıyorsa ϕ fonksiyonuna bir indirgeme fonksiyonu denir [13].

Not 2.5. İndirgeme fonksiyonu halka üzerinde kullanılacaksa $\phi : L(R) \longrightarrow L(R) \cup \{\emptyset\}$ olarak tanımlanır. Eğer modül üzerinde kullanılacaksa $\phi : L(M) \longrightarrow L(M) \cup \{\emptyset\}$ ile tanımlanır.

Tanım 2.29. δ bir genişleme fonksiyonu ve ϕ bir indirgeme fonksiyonu olsun. T, R nin öz ideali olmak üzere her $a, b \in R$ için $ab \in T - \phi(T)$ iken $a \in T$ veya $b \in \delta(T)$ oluyorsa T ye bir ϕ - δ -asalımsı ideal denir [13].

Tanım 2.30. $(M, +)$ bir değişmeli grup ve R bir halka olmak üzere $R \times M \longrightarrow M$ fonksiyonu;

- (i) Her $r \in R$, her $m, m' \in M$ için $r.(m + m') = r.m + r.m'$,
- (ii) Her $r, r' \in R$, her $m \in M$ için $(r + r').m = r.m + r'.m$,
- (iii) Her $r, r' \in R$, her $m \in M$ için $(r.r').m = r.(r'.m)$,
- (iv) Her $m \in M$ için $1_R.m = m$,

koşullarını sağlıyorsa M ye bir R -modül denir.

Tanım 2.31. M bir R -modül ve $\emptyset \neq N \subseteq M$ iken N de R üzerinde modül olma özelliklerini sağlıyorsa N ye M nin bir alt modülü denir.

Not 2.6. M nin tüm alt modüllerinin kümesini Bölüm 3'te $L(M)$ ile göstereceğiz.

Teorem 2.2. M bir R -modül ve $\emptyset \neq N \subseteq M$ iken N nin R -modül olması için gerek ve yeter koşul her $r, r' \in R$ ve her $m, m' \in N$ için $r.m + r'.m' \in N$ olmasıdır.

Tanım 2.32. M bir R -modül olmak üzere N, M nin bir alt modülü, H, R nin bir ideali ve K, M nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. $(N : K)$ ideali ve $(N :_M H)$ alt modülü aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$(N : K) = \{r \in R : rK \subseteq N\} \quad (2.12)$$

$$(N :_M H) = \{m \in M : Hm \subseteq N\}. \quad (2.13)$$

Tanım 2.33. M bir R -modül ve $\emptyset \neq K \subseteq M$ olsun. K nın sıfırlayıcısı aşağıdaki gibi tanımlanmıştır ve $\text{ann}(K)$ ile gösterilir.

$$(0 : K) = \{r \in R : rK = 0\} \quad (2.14)$$

Özel olarak N , M nin alt modülü ve H , R nin ideali iken her N ve H için $\text{ann}_R(N)$ ve $\text{ann}_M(H)$ yi $(0 : N)$ ve $(0 :_M H)$ ile de gösterebiliriz.

Tanım 2.34. N , R -modül olan M nin bir öz alt modülü olsun. $a \in R$ ve $m \in M$ için $am \in N$ iken $a \in (N : M)$ veya $m \in N$ ise N ye asal alt modül adı verilir.

Tanım 2.35. N , R -modül olan M nin bir öz alt modülü olsun. $a \in R$ ve $m \in M$ için $am \in N$ iken bir $k \in \mathbb{N}$ için $a^k \in (N : M)$ veya $m \in N$ ise N ye asalımsı alt modül adı verilir.

Tanım 2.36. Her alt modülü için $N = IM$ olacak şekilde $I \in L(R)$ bulunabiliyorsa M ye çarpımsal R -modül denir [39].

Tanım 2.37. N , R -modül olan M nin bir öz alt modülü olsun. $R \times M/N \longrightarrow M/N$ üzerinde tanımlanan $(r, m + N) \longrightarrow rm + N$ fonksiyonu M/N yi bir R -modül yapar ve buna bölüm modülü adı verilir.

Tanım 2.38. M bir R -modül olsun. M nin alt modüllerinin her artan $N_1 \subseteq N_2 \subseteq \dots \subseteq N_n \subseteq \dots$ zinciri sonlu bir adımda duruyorsa bu modül artan zincir koşulunu sağlar denir.

Tanım 2.39. R bir halka ve $\emptyset \neq S$, R nin bir çarpımsal alt kümesi olsun. M bir R -modül iken $M \times S$ üzerinde aşağıdaki gibi tanımlanan bir denklik bağıntısı \sim olsun. Her $m, m' \in M, s, s' \in S$ için;

$$(m, s) \sim (m', s') \iff \exists u \in S, u(s'm - sm') = 0 \quad (2.15)$$

$(m, s) \in M \times S$ nin \sim denklik bağıntısına göre belirttiği denklik sınıfı kesir ismini alır ve $\frac{m}{s}$ ile temsil edilir. Tüm kesirlerin kümesi ise $S^{-1}M$ ile temsil edilir. Halkadan aldığımız her r , modülden aldığımız her m, n ve çarpımsal alt kümeden aldığımız her s, t elemanları için;

$$\frac{m}{s} + \frac{n}{t} = \frac{tm + sn}{st} \quad (2.16)$$

$$\frac{r}{s} \cdot \frac{n}{t} = \frac{rn}{st} \quad (2.17)$$

işlemleri ile tanımlanan $(S^{-1}M, +, \cdot)$ bir $S^{-1}R$ -modüldür ve bu modüle M nin S ye göre yerelleştirmesi denir.

Not 2.7. Tezin içinde $S^{-1}M$ kesir modülü, M_S ile temsil edilecektir.

Tanım 2.40. R bir halka, M ve N iki R -modül iken $f : M \longrightarrow N$ olacak şekilde bir f fonksiyonu tanımlansın. Modülden alınan her a, m elemanları ve halkadan alınan her r elemanı için;

$$f(a + m) = f(a) + f(m) \quad (2.18)$$

$$f(r.m) = r.f(m) \quad (2.19)$$

oluyorsa tanımlanan bu fonksiyona modül homomorfizması (R -homomorfizma) adı verilir.

Tanım 2.41. N bir öz alt modül olmak üzere $am \in N - (0)$ iken $a \in (N : M)$ veya $m \in N$ ise N ye zayıf asal alt modül denir [5].

Tanım 2.42. N bir öz alt modül olmak üzere $r \in R$ ve $m \in M$ olacak şekilde $rm \in N - (N : M)N$ iken $m \in N$ veya $r \in (N : M)$ ise N bir hemen hemen asal alt modüldür [8].

Her asal alt modül zayıf asal alt modüldür, her zayıf asal alt modül hemen hemen asal alt modüldür fakat tersi doğru olmak zorunda değildir. Örneğin sıfır alt modül zayıf asaldır fakat asal olmayabilir.

Tanım 2.43. $\phi : L(M) \longrightarrow L(M) \cup \{\emptyset\}$ ile tanımlanan bir fonksiyon olsun. N, M nin bir öz alt modülü olmak üzere $a \in R$ ve $m \in M$ ler için $am \in N - \phi(N)$ iken $a \in (N : M)$ veya $m \in N$ ise N ye ϕ -asal alt modül denir [6].

$N - (N \cap \phi(N)) = N - \phi(N)$ olduğundan, $\phi(N) \subseteq N$ olarak kabul edilebilir. Özel olarak eğer $\phi(N) = 0$ ve N bir ϕ -asal alt modül ise N ye zayıf asal alt modül denir [5]. Bunun yanında eğer $\phi(N) = (N : M)N$ ve N, M nin bir ϕ -asal alt modülü ise N ye hemen hemen asal alt modül denir [8].

Tanım 2.44. $\phi : L(M) \longrightarrow L(M) \cup \{\emptyset\}$ ile tanımlanan bir fonksiyon olsun. N, M nin bir öz alt modülü olmak üzere $a \in R$ ve $m \in M$ için $am \in N - \phi(N)$ iken bir $k \in \mathbb{N}$ için $a^k \in (N : M)$ veya $m \in N$ ise N ye ϕ -asalımsı alt modül denir [12].

Zhao Dongsheng'in çalışmasından esinlenerek Yeşilot ve arkadaşları δ -asalımsı alt modül yapısını çalışmışlardır.

Tanım 2.45. δ bir genişleme fonksiyonu olmak üzere $\delta : L(R) \longrightarrow L(R)$ ye tanımlıdır ve

(i) $T \subseteq \delta(T)$

(ii) Her $T, V \in L(R)$ için $T \subseteq V$ iken $\delta(T) \subseteq \delta(V)$

koşullarını sağlar. N, M nin bir öz alt modülü olmak üzere $a \in R$ ve $m \in M$ için $am \in N$ iken $a \in \delta((N : M))$ veya $m \in N$ ise N ye δ -asalımsı alt modül denir [12].

Not 2.8. Her $T \in L(R)$ için $\delta(T) = T$ ($\delta(T) = \sqrt{T}$) oluyorsa M nin her δ -asalımsı alt modülü aynı zamanda M nin asal (asalımsı) alt modülüdür.

Şimdi de hiper yapılar için temel tanım ve teoremler verilecektir. Öncelikle Marty'nin 1934 yılında tanımladığı hiper grupoid, yarı hiper grup, hiper grup ve değişmeli hiper grup kavramlarının tanımlarını verelim [14].

Tanım 2.46. $\emptyset \neq G$ olmak üzere $P^*(G)$, G nin boştan farklı alt kümelerini temsil eder.

$$\oplus : G \times G \longrightarrow P^*(G) \quad (2.20)$$

bir hiper işlemdir ve bu hiper işlemin oluşturduğu (G, \oplus) cebirsel yapısına hiper grupoid denir.

Tanım 2.47. (G, \oplus) bir hiper grupoid olsun. Her $a, b, c \in G$ için $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$ ise $\bigcup_{u \in a \oplus b} u \oplus c = \bigcup_{v \in b \oplus c} a \oplus v$ elde edilir. G bir yarı hiper gruptur.

Tanım 2.48. Her $a \in G$ için $a \in (e \oplus a) \cap (a \oplus e)$ olacak şekilde bir $e \in G$ varsa e ye bir etkisiz eleman denir.

Tanım 2.49. (G, \oplus) bir yarı hiper grup olsun. G grubundan alınan her a elemanı için $a \oplus G = G \oplus a = G$ ise (G, \oplus) cebirsel yapısına bir hiper grup denir.

Tanım 2.50. (G, \oplus) bir hiper grup ve $\emptyset \neq K$, G nin bir alt kümesi olmak üzere $\forall a \in K$ için $a \oplus K = K \oplus a = K$ ise (K, \oplus) ya (G, \oplus) nın bir alt hiper grubu denir.

Tanım 2.51. (G, \oplus) bir hiper grup olmak üzere G nin her a, b elemanı için $a \oplus b = b \oplus a$ ise (G, \oplus) ya bir değişmeli hiper grup denir.

Mittas, kanonik hiper grubu tanımlayarak Krasner hiper halkalarına bir temel oluşturmuştur [15].

Tanım 2.52. $\emptyset \neq \mathfrak{X}$ olmak üzere (\mathfrak{X}, \oplus) için aşağıdaki koşullar sağlandığı takdirde (\mathfrak{X}, \oplus) ya bir kanonik hiper grup adı verilir. \oplus işlemi burada bir hiper işlem olarak alınmıştır.

(i) Her $a, b, c \in \mathfrak{X}$ için $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$;

- (ii) Her $a, b \in \mathfrak{R}$ için $a \oplus b = b \oplus a$;
- (iii) Her $a \in \mathfrak{R}$ için $a \oplus 0 = \{a\}$ olacak şekilde bir $0 \in \mathfrak{R}$ vardır;
- (iv) Her $a \in \mathfrak{R}$ için $0 \in a \oplus a'$ olacak şekilde $\exists! a' \in \mathfrak{R}$ elemanı varsa; (a elemanının tersi olan a' nü $\ominus a$ ile göstereceğiz.)
- (v) Her $a, b, c \in \mathfrak{R}$ için $c \in a \oplus b$ iken $b \in \ominus a \oplus c$ ve $a \in c \oplus b$ elde edilir ki bu da (\mathfrak{R}, \oplus) nın terslenebilir olduğunu ifade eder.

Örnek 2.12. $\mathfrak{R} = \{0, x, y, z\}$ bir küme ve \oplus hiper toplama işlemi aşağıdaki gibi tanımlansın:

\oplus	0	x	y	z
0	$\{0\}$	$\{x\}$	$\{y\}$	$\{z\}$
x	$\{x\}$	$\{0, x\}$	$\{x, z\}$	$\{y\}$
y	$\{y\}$	$\{x, z\}$	$\{0, y\}$	$\{x\}$
z	$\{z\}$	$\{y\}$	$\{x\}$	$\{0\}$

Bu durumda (\mathfrak{R}, \oplus) bir kanonik hiper gruptur. $\{0, z\}$ ve $\{0\}$, \mathfrak{R} nin birer alt hiper grubudur [25].

Krasner 1983 yılında kanonik hiper grupları kullanarak Krasner hiper halkalarını ve Krasner hiper cisimlerini tanıtmıştır [18].

Tanım 2.53. $(\mathfrak{R}, \oplus, \circ)$ aşağıdaki koşulları sağladığı takdirde bir Krasner halka ismini alır.

- (i) (\mathfrak{R}, \oplus) bir kanonik hiper grup;
- (ii) Her $a \in \mathfrak{R}$ için (\mathfrak{R}, \circ) , $a \circ 0 = 0 \circ a = 0$ olacak şekilde 0 ı içeren bir yarı grup;
- (iii) Her $a, b, c \in \mathfrak{R}$ için $(a \oplus b) \circ c = (a \circ c) \oplus (b \circ c)$ ve $a \circ (b \oplus c) = (a \circ b) \oplus (a \circ c)$.

Not 2.9. $(\mathfrak{R}, \oplus, \circ)$ yı birimli ve değişmeli bir Krasner hiper halka olarak alacaksak bu demek oluyor ki (\mathfrak{R}, \circ) birimli ve değişmeli bir yarı grup olmalıdır.

Tanım 2.54. $(\mathfrak{R}, \oplus, \circ)$ bir hiper halka olmak üzere X kümesi \mathfrak{R} nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. (X, \oplus, \circ) da kendi başına bir hiper halka ise X e bir hiper alt halka denir.

Örnek 2.13. [31] $\mathfrak{X} = \{0, 1, 2\}$ kümesi üzerinde \oplus bir hiper işlem ve \circ bir ikili işlem olmak üzere aşağıdaki gibi tanımlayalım:

\oplus	0	1	2	\circ	0	1	2
0	0	1	2	0	0	0	0
1	1	1	\mathfrak{X}	1	0	1	2
2	2	\mathfrak{X}	2	2	0	2	1

(i) Öncelikle \mathfrak{X} nin her elemanı için hiper işlemde birleşme özelliğinin sağlanıp sağlanmadığına bakalım. $(0 \oplus 1) \oplus 2 = 1 \oplus 2 = \mathfrak{X}$, $0 \oplus (1 \oplus 2) = 0 \oplus \mathfrak{X} = \mathfrak{X}$

$$(1 \oplus 1) \oplus 2 = 1 \oplus 2 = \mathfrak{X}, \quad 1 \oplus (1 \oplus 2) = 1 \oplus \mathfrak{X} = \mathfrak{X}$$

$$(2 \oplus 2) \oplus 1 = 2 \oplus 1 = \mathfrak{X}, \quad 2 \oplus (2 \oplus 1) = 2 \oplus \mathfrak{X} = \mathfrak{X}$$

(ii) $1 \oplus 2 = \mathfrak{X} = 2 \oplus 1$, $0 \oplus 1 = 1 = 1 \oplus 0$, $0 \oplus 2 = 2 = 2 \oplus 0$

(iii) $0 \in \mathfrak{X}$ elemanı her elemanı kendisine götürür, bir etkisiz elemandır.

(iv) $0 \in 1 \oplus 2 = \mathfrak{X} = 2 \oplus 1$ ise 1 elemanının tersi 2 elemandır.

(v) $0 \in 1 \oplus 2$ iken $2 \in 2 \oplus 0$ ve $1 \in 0 \oplus 1$, $1 \in 1 \oplus 0$ iken $0 \in 2 \oplus 1 = \mathfrak{X}$ ve $1 \in 1 \oplus 0$, $1 \in 1 \oplus 1$ iken $1 \in 2 \oplus 1 = \mathfrak{X}$ $2 \in 1 \oplus 2$ iken $2 \in 2 \oplus 2$ ve $1 \in 2 \oplus 1 = \mathfrak{X}$, $0 \in 0 \oplus 0$ $2 \in 2 \oplus 2$ iken $2 \in 1 \oplus 2 = \mathfrak{X}$.

O halde (\mathfrak{X}, \oplus) bir kanonik hiper gruptur.

(vi) Şimdi (\mathfrak{X}, \circ) iki taraflı yutan elemana sahip bir yarı grup mudur, ona bakalım.

$$(1 \circ 2) \circ 2 = 2 \circ 2 = 1, \quad 1 \circ (2 \circ 2) = 1 \circ 1 = 1$$

$$(1 \circ 2) \circ 1 = 2 \circ 1 = 2, \quad 1 \circ (2 \circ 1) = 1 \circ 2 = 2$$

$$(2 \circ 1) \circ 1 = 2 \circ 1 = 2, \quad 2 \circ (1 \circ 1) = 2 \circ 1 = 2 \quad (0 \circ 2) \circ 1 = 0 \circ 1 = 0, \quad 0 \circ (2 \circ 1) = 0 \circ 2 = 0$$

Her eleman için \circ birleşme özelliğini sağlar ve 0 iki taraflı yutan elemandır. O halde (\mathfrak{X}, \circ) bir yarı gruptur.

(vii) Her eleman için \circ işleminin \oplus işlemi üzerine dağılma özelliği var mıdır, kontrol edelim.

$$(1 \oplus 2) \circ 1 = \mathfrak{X} \circ 1 = \mathfrak{X}, \quad (1 \circ 1) \oplus (2 \circ 1) = 1 \oplus 2 = 1$$

$$1 \circ (2 \oplus 1) = 1 \circ \mathfrak{X} = \mathfrak{X}, \quad (1 \circ 2) \oplus (1 \circ 1) = 2 \oplus 1 = \mathfrak{X}$$

$$1 \circ (2 \oplus 2) = 1 \circ 2 = 2, \quad (1 \circ 2) \oplus (1 \circ 2) = 2 \oplus 2 = 2$$

$$(1 \oplus 2) \circ 2 = \mathfrak{X} \circ 2 = \mathfrak{X}, \quad (1 \circ 2) \oplus (2 \circ 2) = 2 \oplus 1 = \mathfrak{X}$$

Bu durumda $(\mathfrak{X}, \oplus, \circ)$ bir Krasner hiper halkadır.

Tanım 2.55. X , \mathfrak{K} Krasner hiper halkasının bir hiper alt halkası olsun. X in bir normal hiper alt halka olması için gerek ve yeter koşul her $a \in \mathfrak{K}$ için $a \oplus X \ominus a \subseteq X$ olmasıdır [31].

Teorem 2.3. $\emptyset \neq X \subseteq \mathfrak{K}$ iken X in hiper alt halka olması için gerek ve yeter koşul her $a, b \in X$ için;

$$(i) \ a \ominus b \subseteq X$$

$$(ii) \ a \circ b \in X$$

olmasıdır [31].

Tanım 2.56. \mathfrak{K} bir hiper halka ve X , R nin bir hiper alt halkası olsun. Her $a \in X$ ve her $r \in \mathfrak{K}$ için $r \circ a \in X$ ise X sol hiper ideal, $a \circ r \in X$ ise X sağ hiper ideal olur. Eğer iki taraflı sağlanırsa X e hiper ideal denir [31].

Teorem 2.4. $\emptyset \neq X \subseteq \mathfrak{K}$ iken X in hiper ideal olması için gerek ve yeter koşul her $a, b \in X$ ve her $r \in \mathfrak{K}$ için;

$$(i) \ a \ominus b \subseteq X$$

$$(ii) \ r \circ a \in X \text{ ve } a \circ r \in X$$

olmasıdır [31].

Örnek 2.14. $H = \{0, 1, a\}$ aşağıdaki şekilde tanımlı hiper toplama ve çarpma işlemleriyle bir Krasner hiper halka oluşturur. $B = \{0, a\}$ ise bir hiper idealdir.

\oplus	0	1	a	\circ	0	1	a
0	0	1	a	0	0	0	0
1	1	H	1	1	0	1	a
a	a	1	B	a	0	a	0

[40]

Örnek 2.15. $\mathfrak{K} = \{0, a, b\}$ bir küme olsun. \oplus hiper toplama ve \circ çarpma işlemleri aşağıdaki gibi tanımlansın:

\oplus	0	a	b	\circ	0	a	b
0	0	a	b	0	0	0	0
a	a	$\{a, b\}$	\mathfrak{K}	a	0	b	a
b	b	\mathfrak{K}	$\{a, b\}$	b	0	a	b

Bu durumda (R, \oplus, \circ) bir Krasner hiper halkadır [28].

Örnek 2.16. $\mathfrak{R} = \{0, a, b, c\}$ bir küme olsun. Hiper toplama \oplus ve çarpma \circ işlemleri aşağıdaki gibi tanımlansın:

\oplus	0	a	b	c	\circ	0	a	b	c
0	0	a	b	c	0	0	0	0	0
a	a	$\{0, b\}$	$\{a, c\}$	b	a	0	a	b	c
b	b	$\{a, c\}$	$\{0, b\}$	a	b	0	b	b	0
c	c	b	a	0	c	0	c	0	c

Bu durumda $(\mathfrak{R}, \oplus, \circ)$ bir Krasner hiper halkadır [28].

$I_1 = \{0, b\}, I_2 = \{0, c\}$ ve $I_3 = \{0, b, c\}$ hiper idealleridir.

Tanım 2.57. X ve Y , \mathfrak{R} hiper halkasının boştan farklı iki alt kümesi olmak üzere iki hiper alt kümenin toplam ve çarpımı aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$X \oplus Y = \{a \in x \oplus y : x \in X, y \in Y\} \quad (2.21)$$

$$X \circ Y = \left\{ a \in \sum_{i=1}^n x_i \circ y_i : x_i \in X, y_i \in Y, n \in \mathbb{Z}^+ \right\} \quad (2.22)$$

[31].

Not 2.10. Eğer X ve Y hiper idealse $X \oplus Y$ ve $X \circ Y$ de birer hiper ideal olacaktır [31].

Tanım 2.58. A , \mathfrak{R} hiper halkasının boştan farklı bir alt kümesi olmak üzere A nın ürettiği hiper ideali $A \subseteq X_i \in L(\mathfrak{R})$ olmak üzere $\bigcap_{i \in J} X_i$ ile tanımlarız ve $\langle A \rangle$ ile gösterilir. Eğer $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ ise $\langle A \rangle = \langle a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \rangle$ ile ifade edilir [31].

Tanım 2.59. \mathfrak{R} bir hiper halka olmak üzere merkezinin kümesi aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$C(\mathfrak{R}) = \{x \in \mathfrak{R} : Her t \in \mathfrak{R} için xt = tx\} \quad (2.23)$$

[31]

Teorem 2.5. \mathfrak{R} bir hiper halka; X , \mathfrak{R} nin boştan farklı bir alt kümesi ve $a \in \mathfrak{R}$ olmak üzere a elemanının ürettiği ideallerin elemanlarını farklı durumlarda aşağıdaki formlarda gösterebiliriz.

(i) Tek eleman tarafından üretilen esas hiper ideal:

$$\langle a \rangle = \{x : x \in u \circ a \oplus a \circ v \oplus a \circ n \oplus k \circ (a \ominus a) \oplus \sum_{i=1}^m u_i \circ a \circ v_i; \quad (2.24)$$

$$u, v, u_i, v_i \in \mathfrak{R}, m \in \mathbb{Z}^+, k, n \in \mathbb{Z} \quad (2.25)$$

(ii) \mathfrak{R} bir birim elemana sahipse;

$$\langle a \rangle = \{x : x \in k \circ (a \ominus a) \oplus \sum_{i=1}^m u_i \circ a \circ v_i; u_i, v_i \in \mathfrak{R}, m, k \in \mathbb{Z}^+ \quad (2.26)$$

(iii) a , \mathfrak{R} nin merkezinin bir elemanı ise;

$$\langle a \rangle = \{x : x \in u \circ a \oplus n \circ a \oplus k \circ (a \ominus a); u \in \mathfrak{R}, k, n \in \mathbb{Z}^+ \quad (2.27)$$

(iv) $\mathfrak{R} \circ a = \{r \circ a : r \in \mathfrak{R}\}$, \mathfrak{R} de bir sol hiper ideal ve $a \circ \mathfrak{R} = \{a \circ r : r \in \mathfrak{R}\}$, \mathfrak{R} de bir sağ hiper idealdir. Eğer \mathfrak{R} birim elemana sahipse $a \in a \circ \mathfrak{R} \cap \mathfrak{R} \circ a$

(v) Eğer \mathfrak{R} birimli bir halka ve $a \in C(\mathfrak{R})$ ise $a \circ \mathfrak{R} = \langle a \rangle = \mathfrak{R} \circ a$ dır.

(vi) Eğer \mathfrak{R} birimli bir halka ve $X \subseteq C(\mathfrak{R})$ ise;

$$\langle X \rangle = \{x : x \in \sum_{i=1}^m u_i \circ t_i; u_i \in \mathfrak{R}, t_i \in X, m \in \mathbb{Z}^+ \}. \quad (2.28)$$

[31]

Tanım 2.60. X , \mathfrak{R} hiper halkasının bir hiper ideali olmak üzere;

$$\sqrt{X} = \{x \in \mathfrak{R} : \text{bir } t \in \mathbb{N} \text{ için } x^t \in X\} \quad (2.29)$$

kümesi, $X \subseteq \sqrt{X}$ olacak şekilde \mathfrak{R} nin bir hiper idealidir. \sqrt{X} , X in radikali olarak adlandırılır [41].

Tanım 2.61. \mathfrak{R} bir hiper halka ve X bir öz hiper ideal olsun. T ve V , \mathfrak{R} nin hiper idealleri ve $T \circ V \subseteq X$ iken $T \subseteq X$ veya $V \subseteq X$ ise X , \mathfrak{R} nin asal hiper idealidir [31].

Tanım 2.62. \mathfrak{R} bir hiper halka ve X bir öz hiper ideal olsun. T ve V , \mathfrak{R} nin hiper idealleri ve $T \circ V \subseteq X$ iken $T \subseteq X$ veya $V \subseteq \sqrt{X}$ ise X , \mathfrak{R} nin asalımsı hiper idealidir [31].

Lekkoksung 2012 yılında yarı hiper gruplar üzerindeki sol ve sağ zayıf asal hiper ideal tanımlarını aşağıdaki gibi vermiştir.

Tanım 2.63. G bir yarı hiper grup ve $X \subseteq G$ olsun. T ve V , G nin sol (sağ) hiper idealleri ve $T \circ V \subseteq X$ iken $T \subseteq X$ veya $V \subseteq X$ ise X , G nin sol (sağ) zayıf asal hiper idealidir [35].

Tanım 2.64. $(\mathfrak{R}, \oplus, \circ)$ değişmeli bir hiper halka olsun ve hiper halkadan aldığımız a elemanları için $a = a \circ a = a^2$ ise a ya idempotent eleman, $a \in a^2$ ise a ya zayıf idempotent eleman denir [32].

Tanım 2.65. \mathfrak{R} nin hiper ideallerinin her artan $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \dots \subseteq X_n \subseteq \dots$ zinciri sonlu bir adımda duruyorsa bu hiper halka artan zincir koşulunu sağlar denir [42].

Tanım 2.66. X , \mathfrak{R} nin bir normal hiper ideali olmak üzere hiper halkadan alınan her a, b elemanları için;

$$a \equiv b(\text{mod}X) \iff a \oplus b \cap X \neq \emptyset \quad (2.30)$$

ile kurulan bağıntı aX^*b notasyonu ile gösterilir ve bu bağıntı bir denklik bağıntısıdır. $a \in \mathfrak{R}$ için kurulan denklik sınıfı $X^*(a)$ ile ifade edilsin. Her $a \in \mathfrak{R}$ için $X \oplus a = X^*(a)$ dir. $\mathfrak{R}/X^* = \{X^*(a) : a \in \mathfrak{R}\}$ tanımlanan \oplus ve \otimes işlemleri ile bir hiper halka oluşturur.

$$X^*(a) \oplus X^*(b) = \{X^*(c) : c \in X^*(a) \oplus X^*(b)\} \quad (2.31)$$

$$X^*(a) \otimes X^*(b) = \{X^*(a.b)\} \quad (2.32)$$

[31].

Not 2.11. Biz 4. bölümde bölüm hiper halkasını \mathfrak{R}/X ile göstereceğiz.

Örnek 2.17. $\mathbb{Z}_{12} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \dots, \bar{11}\}$ ve \mathbb{Z}_{12} nin birimlerinin çarpımsal alt grubu H yi ele alalım. $H = \{\bar{1}, \bar{5}, \bar{7}, \bar{11}\}$. $\mathfrak{R} = \mathbb{Z}_{12}/H$ yi inşa edelim. $\mathfrak{R} = \{\bar{r}H : \bar{r} \in \mathbb{Z}_{12}\}$

$$\bar{0} = \bar{0}, \bar{1} = \{\bar{1}, \bar{5}, \bar{7}, \bar{11}\}, \bar{2} = \{\bar{2}, \bar{10}\} = \bar{10}, \bar{3} = \{\bar{3}, \bar{9}\} = \bar{9}, \bar{4} = \{\bar{4}, \bar{8}\} = \bar{8}, \bar{6} = \{\bar{6}\},$$

Şimdi \mathfrak{R} üzerinde hiper toplama işlemi ve çarpma işlemi tanımlayalım.

$$\begin{aligned} \bar{x} \oplus \bar{y} &= \{\bar{z} : \bar{z} \cap (\bar{x} \oplus \bar{y}) \neq \emptyset\} \\ \bar{x} \circ \bar{y} &= \overline{\bar{x} \circ \bar{y}} \end{aligned}$$

Toplama işlemi aşağıdaki gibi hesaplanarak hiper toplama tablosu tanımlanır:

$$\bar{2} \oplus \bar{3} = \{\bar{2}, \bar{10}\} \oplus \{\bar{3}, \bar{9}\} = \{\bar{5}, \bar{11}, \bar{1}, \bar{7}\} = \bar{1}$$

\oplus	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$
$\overline{1}$		$\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}$	$\overline{1}, \overline{3}$	$\overline{2}, \overline{4}$	$\overline{1}, \overline{3}$	$\overline{1}$
$\overline{2}$			$\overline{0}, \overline{4}$	$\overline{1}$	$\overline{2}, \overline{6}$	$\overline{4}$
$\overline{3}$				$\overline{0}, \overline{6}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$
$\overline{4}$					$\overline{0}, \overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{6}$						$\overline{0}$

O halde $\mathfrak{K} = \{\overline{0}H, \overline{1}H, \dots, \overline{11}H\} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{6}\}$ elemanlarından oluşan, sıfır bölenleri $\overline{3}$ ve $\overline{4}$ olan bir sonlu Krasner hiper halkasıdır.

\mathfrak{K} halkasının ideallerini $A = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}\}$, $B = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}\}$, $C = \{\overline{0}, \overline{6}\}$, $D = \{\overline{0}, \overline{4}\}$, $E = \{\overline{0}\}$ ve \mathfrak{K} nin kendisi olarak yazabiliriz [19].

Tanım 2.67. $(\mathfrak{K}, \oplus, \circ)$ ve $(S, +, \cdot)$ iki hiper halka iken $\mu : \mathfrak{K} \rightarrow S$ olacak şekilde μ fonksiyonu tanımlansın. Her $a, b \in \mathfrak{K}$ olmak üzere;

$$\mu(a \oplus b) \subseteq \mu(a) + \mu(b) \quad (2.33)$$

$$\mu(a \circ b) = \mu(a) \cdot \mu(b) \quad (2.34)$$

$$\mu(0) = 0 \quad (2.35)$$

oluyorsa tanımlanan bu fonksiyona hiper halkalarda homomorfizma adı verilir [31].

Tanım 2.68. $(\mathfrak{K}, \oplus, \circ)$ ve $(S, +, \cdot)$ iki hiper halka iken $\mu : \mathfrak{K} \rightarrow S$ olacak şekilde μ fonksiyonu tanımlansın. Her $a, b \in \mathfrak{K}$ olmak üzere;

$$\mu(a \oplus b) = \mu(a) + \mu(b) \quad (2.36)$$

$$\mu(a \circ b) = \mu(a) \cdot \mu(b) \quad (2.37)$$

$$\mu(0) = 0 \quad (2.38)$$

oluyorsa tanımlanan bu fonksiyona hiper halkalarda iyi homomorfizma adı verilir [31].

Özel Ay Krasner hiper halkalarda bir hiper ideal genişlemesi tanımlayarak asalımsı hiper idealleri genelleştirmiş ve δ -asalımsı hiper idealleri literatüre kazandırmıştır [36].

$$\delta : L(\mathfrak{K}) \rightarrow L(\mathfrak{K})$$

(i) \mathfrak{K} nin her T hiper ideali için $T \subseteq \delta(T)$;

(ii) \mathfrak{A} nin T ve V hiper idealleri için $T \subseteq V$ ise $\delta(T) \subseteq \delta(V)$

olacak şekilde bir hiper ideal genişleme fonksiyonu olarak tanımlansın.

Tanım 2.69. δ bir hiper ideal genişleme fonksiyonu olmak üzere T , \mathfrak{A} nin bir hiper ideali olsun. Her $a, m \in \mathfrak{A}$ olmak üzere $a \circ m \in T$ için $a \in T$ veya $m \in \delta(T)$ ise T ye bir δ -asalımsı hiper ideal denir.



3

ϕ - δ -ASALIMSIZ ALT MODÜLLERİN KARAKTERİZASYONU

Bu bölümde kurulan ϕ - δ -asalimsiz alt modüllerin yapısı incelenecektir ve bölüm boyunca $(R, +, \cdot)$ değişmeli ve birimli bir halka olacaktır. R halkasının tüm ideallerinin kümesi $L(R)$ ile, M modülünün tüm alt modüllerinin kümesi $L(M)$ ile gösterilecektir. $\phi : L(M) \longrightarrow L(M) \cup \{\emptyset\}$ iken;

- (i) Her $N, K \in L(M)$ için $\phi(K) \subseteq K$
- (ii) $N \subseteq K$ iken $\phi(N) \subseteq \phi(K)$

olacak şekilde bir indirgeme fonksiyonudur.

$\delta : L(R) \longrightarrow L(R)$ iken;

- (i) Her $N, K \in L(R)$ için $K \subseteq \delta(K)$
- (ii) $N \subseteq K$ iken $\delta(N) \subseteq \delta(K)$

olacak şekilde bir genişleme fonksiyonudur.

ϕ indirgeme ve δ genişleme fonksiyonu olmak üzere birkaç örnek verelim:

Örnek 3.1. R birimli ve değişmeli bir halka olsun. Her $I \in L(R)$ için;

- (i) $\delta_{id}(I) = I$ iken δ birim fonksiyon [1].
- (ii) $\delta_{rad}(I) = \sqrt{I}$ iken δ radikal fonksiyon [1].
- (iii) Belirli bir $J \in L(R)$ için $\delta_{res}(I) = (I : J)$
- (iv) $\delta_{ann}(I) = ann(ann(I))$.

(v) Belirli bir $J \in L(R)$ için $\delta_J(I) = I + J$

Yukarıdaki fonksiyonların tümü idealler ailesinde birer genişleme fonksiyonudur.

Örnek 3.2. N , R -modül olan M nin bir öz alt modülü olmak üzere $\phi : L(M) \longrightarrow L(M) \cup \{\emptyset\}$ fonksiyonları tanımlansın. Aşağıdaki fonksiyonların her biri bir indirgeme örneğidir;

(i) $\phi_\emptyset(N) = \emptyset$.

(ii) $\phi_0(N) = 0$.

(iii) $\phi_{id}(N) = N$.

(iv) $\phi_2(N) = (N : M)N$.

(v) $\phi_k(N) = (N : M)^{k-1}N$.

(vi) $\phi_w(N) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (N : M)^n N$.

İndirgeme ve genişleme fonksiyonları asal idealleri ve alt modülleri karakterize etmede kullanıldığı için önemlidir. Bu bölüm boyunca ϕ her zaman $L(M)$ üzerindeki indirgeme fonksiyonunu ve δ , $L(R)$ üzerindeki genişleme fonksiyonunu ifade edecektir. Şimdi asal ve asalımsı alt modülleri karakterize etmemizi sağlayan ϕ - δ -asalımsı alt modül kavramını tanımlayalım.

Tanım 3.1. N , bir M R -modülünün öz alt modülü olsun. $a \in R$, $m \in M$ için $am \in N - \phi(N)$ iken $a \in \delta(N : M)$ veya $m \in N$ ise N ye bir ϕ - δ -asalımsı alt modül denir.

Örnek 3.3. N , bir M R -modülünün öz alt modülü olsun.

(i) N nin asal alt modül olması için gerek ve yeter koşul N nin ϕ_\emptyset - δ_{id} -asalımsı alt modül olmasıdır [43].

İspat. Kabul edelim ki N asal alt modül ve her $a \in R$ ve $m \in M$ için $am \in N - \phi(N)$ olsun. $\phi_\emptyset(N) = \emptyset$ iken $am \in N - \emptyset = N$ elde edilir. N bir asal alt modül olduğundan $m \in N$ veya $a \in (N : M) = \delta_{id}((N : M))$ elde edilir. O halde N bir ϕ_\emptyset - δ_{id} -asalımsı alt modüldür. Tersini için baktığımızda ise N bir ϕ_\emptyset - δ_{id} -asalımsı alt modül, $\phi_\emptyset(N) = \emptyset$ ve $\delta_{id}((N : M)) = (N : M)$ iken $am \in N = N - \phi_\emptyset(N)$ ise N bir ϕ_\emptyset - δ_{id} -asalımsı alt modül olduğundan $a \in (N : M)$ veya $m \in N$ elde edilir. Buradan N bir asal alt modüldür. ■

(ii) N nin asalımsı alt modül olması için gerek ve yeter koşul N nin ϕ_\emptyset - δ_{rad} -asalımsı alt modül olmasıdır [44].

İspat. Kabul edelim ki N asalımsı alt modül ve her $a \in R$ ve $m \in M$ için $am \in N - \phi(N)$ olsun. $\phi_\emptyset(N) = \emptyset$ iken $am \in N - \emptyset$ elde edilir. N alt modülü asalımsı olduğundan $m \in N$ veya $a \in \sqrt{(N : M)} = \delta_{rad}((N : M))$ dir. Bu durumda N bir $\phi_\emptyset\text{-}\delta_{rad}$ -asalımsı alt modüldür. Diğer tarafı göstermek için N bir $\phi_\emptyset\text{-}\delta_{rad}$ -asalımsı alt modül, $\phi_\emptyset(N) = \emptyset$ ve $\delta_{rad}((N : M)) = \sqrt{(N : M)}$ iken $am \in N = N - \phi_\emptyset(N)$ olsun. N bir $\phi_\emptyset\text{-}\delta_{rad}$ -asalımsı alt modül olduğundan $a \in \sqrt{(N : M)}$ veya $m \in N$ elde edilir. Öyleyse N bir asalımsı alt modüldür. ■

(iii) N nin ϕ -asal alt modül olması için gerek ve yeter koşul N nin $\phi\text{-}\delta_{id}$ -asalımsı alt modül olmasıdır [6].

İspat. Kabul edelim ki N bir ϕ asal alt modül ve her $a \in R$ ve $m \in M$ için $am \in N - \phi(N)$ olsun. N bir ϕ -asal alt modül olduğundan $m \in N$ veya $a \in (N : M) = \delta_{id}((N : M))$ dir. Dolayısıyla N bir $\phi\text{-}\delta_{id}$ -asalımsı alt modüldür. Şimdi kabul edelim ki N bir $\phi\text{-}\delta_{id}$ -asalımsı alt modül olsun. $am \in N - \phi(N)$ için $a \in \delta_{id}((N : M)) = (N : M)$ veya $m \in N$ dir. Öyleyse N bir ϕ -asal alt modüldür. ■

(iv) N nin δ -asalımsı alt modül olması için gerek ve yeter koşul N nin $\phi_\emptyset\text{-}\delta$ -asalımsı alt modül olmasıdır [12].

İspat. Kabul edelim ki N δ -asalımsı bir alt modül olsun. Her $a \in R$ ve $m \in M$ için $am \in N - \phi(N)$ olsun. $\phi_\emptyset(N) = \emptyset$ iken $am \in N - \emptyset$ elde edilir. N alt modülü δ -asalımsı olduğundan $m \in N$ veya $a \in \delta((N : M))$ elde edilir. Sonuç olarak N bir $\phi_\emptyset\text{-}\delta$ -asalımsı alt modüldür. Aksine N bir $\phi_\emptyset\text{-}\delta$ -asalımsı alt modül olsun. $\phi_\emptyset(N) = \emptyset$ iken $am \in N = N - \phi_\emptyset(N)$ olsun. N bir $\phi_\emptyset\text{-}\delta$ -asalımsı alt modül olduğundan $a \in \delta(N : M)$ veya $m \in N$ elde edilir. Öyleyse N bir δ -asalımsı alt modüldür. ■

(v) N nin zayıf asal alt modül olması için gerek ve yeter koşul N nin $\phi_0\text{-}\delta_{id}$ -asalımsı alt modül olmasıdır [5].

İspat. Kabul edelim ki N bir zayıf asal alt modül olmak üzere halkadan alınan her a elemanı ve modülden alınan her m elemanı için $am \in N - \phi(N)$ olsun. $\phi_0(N) = 0$ iken $am \in N - 0$ elde edilir ve N alt modülü zayıf asal olduğundan $m \in N$ veya $a \in (N : M) = \delta_{id}((N : M))$ bulunur. Sonuç olarak N bir $\phi_0\text{-}\delta_{id}$ -asalımsı alt modüldür. Diğer tarafı göstermek için kabul edelim ki N bir $\phi_0\text{-}\delta_{id}$ -asalımsı alt modül olsun. $\phi_0(N) = 0$ ve $am \in N - 0$ iken $a \in \delta_{id}((N : M)) = (N : M)$ veya $m \in N$ dir. Öyleyse N bir zayıf asal alt modüldür. ■

(vi) N nin hemen hemen asal alt modül olması için gerek ve yeter koşul N nin ϕ_2 - δ_{id} -asalımsı alt modül olmasıdır [8].

İspat. Kabul edelim ki N bir hemen hemen asal alt modül olsun. Her $a \in R$ ve $m \in M$ için $am \in N - \phi_2(N)$ olsun. $\phi_2(N) = (N : M)N$ iken $am \in N - (N : M)N$ olur. N bir hemen hemen asal alt modül olduğundan $m \in N$ veya $a \in (N : M) = \delta_{id}(N : M)$ dir. O halde N bir ϕ_2 - δ_{id} -asalımsı alt modüldür. Tersine N bir ϕ_2 - δ_{id} -asalımsı alt modül olsun. $\phi_2(N) = (N : M)N$ iken $am \in N - (N : M)N$ için $a \in \delta_{id}((N : M)) = (N : M)$ veya $m \in N$ dir. Öyleyse N bir hemen hemen asal alt modüldür. ■

Tanım 3.2 ile zayıf δ -asalımsı, hemen hemen δ -asalımsı, n -hemen hemen δ -asalımsı ve w - δ -asalımsı alt modül tanımları literatüre kazandırılmıştır.

Tanım 3.2. N , bir M R -modülünün öz alt modülü olsun.

- (i) N bir ϕ_0 - δ -asalımsı alt modülse N zayıf δ -asalımsı alt modüldür.
- (ii) N bir ϕ_2 - δ -asalımsı alt modülse N hemen hemen δ -asalımsı alt modüldür.
- (iii) N bir ϕ_n - δ -asalımsı alt modülse N n -hemen hemen δ -asalımsı alt modüldür.
- (iv) N bir ϕ_w - δ -asalımsı alt modülse N w - δ -asalımsı alt modüldür.

ϕ ve ψ nin $L(M)$ üzerinde iki indirgeme fonksiyonu olduğunu kabul edelim. Her $N \in L(M)$ için $\phi(N) \subseteq \psi(N)$ ise $\phi \leq \psi$ ile gösterilir. Benzer olarak genişleme fonksiyonunda da aynı gösterimi kullanabiliriz. δ ve γ nın $L(R)$ üzerinde iki genişleme fonksiyonu olduğunu varsayalım. Her $J \in L(R)$ için $\delta(J) \subseteq \gamma(J)$ ise $\delta \leq \gamma$ ile ifade edilir.

Önerme 3.1. M bir R -modül; ϕ, ψ $L(M)$ üzerinde indirgeme fonksiyonları ve δ, γ $L(R)$ üzerinde genişleme fonksiyonları olsun.

- (i) Eğer $\phi \leq \psi$ ise her ϕ - δ -asalımsı alt modül bir ψ - δ -asalımsı alt modüldür.
- (ii) Eğer $\delta \leq \gamma$ ise her ϕ - δ -asalımsı alt modül bir ϕ - γ -asalımsı alt modüldür.
- (iii) Her ϕ -asal alt modül bir ϕ - δ -asalımsı alt modüldür.
- (iv) Her δ -asalımsı alt modül bir ϕ - δ -asalımsı alt modüldür.

(v) N nin, M nin bir öz alt modülü olduğunu varsayalım. N zayıf δ -asalımsı $\Rightarrow N$ w - δ -asalımsı $\Rightarrow N$ n -hemen hemen δ -asalımsı (her $n \geq 2$ için) $\Rightarrow N$ bir hemen hemen δ -asalımsı.

İspat. (i) : Kabul edelim ki N, M nin bir ϕ - δ -asalımsı alt modülü olsun. $a \in R$ ve $m \in M$ için $am \in N - \psi(N)$ alalım. $\phi \leq \psi$ yani $\phi(N) \subseteq \psi(N)$ olduğundan $am \in N - \phi(N)$ elde edilir. N, M nin bir ϕ - δ -asalımsı alt modülü olduğu için $a \in \delta(N : M)$ veya $m \in N$ olur. Buradan N, M nin bir ψ - δ -asalımsı alt modülüdür.

(ii) : Kabul edelim ki N, M nin bir ϕ - δ -asalımsı alt modülü olsun. $a \in R$ ve $m \in M$ için $am \in N - \phi(N)$ olsun. N bir ϕ - δ -asalımsı alt modül olduğundan $a \in \delta(N : M)$ veya $m \in N$ olur. $\delta(N : M) \subseteq \gamma(N : M)$ olduğundan $a \in \gamma(N : M)$ veya $m \in N$ dir. O halde N bir ϕ - γ -asalımsı alt modüldür.

(iii) : $\delta_{id} \leq \delta$ olduğundan, (ii) ve Örnek 3.3 (iii)'ten sağlanır.

(iv) : $\phi_\emptyset \leq \phi$ olduğundan (i) ve Örnek 3.3 (iii)'ten sağlanır.

(v) : (i)'den ve $\phi_0 \leq \phi_w \leq \phi_n \leq \phi_2$ den ispat elde edilir. ■

Önerme 3.2. M sonlu üretilmiş bir R -modül olsun. Kabul edelim ki M modülünün ϕ - δ -asalımsı alt modüllerinin artan zincirinin bir ailesi $\{N_i : i \in \Delta\}$ lerden oluşsun. Bu durumda $\bigcup_{i \in \Delta} N_i$ de bir ϕ - δ -asalımsı alt modüldür.

İspat. Kabul edelim ki $\{N_i : i \in \Delta\}$ ler M sonlu üretilmiş modülünün ϕ - δ -asalımsı alt modüllerinin artan zincirinin bir ailesi olsun. Buradan $N = \bigcup_{i \in \Delta} N_i$ nin alt modül olduğu açıktır ve M sonlu üretilmiş olduğundan $\bigcup_{i \in \Delta} N_i$ öz alt modüldür. Kabul edelim ki $am \in N_i - \phi(\bigcup_{i \in \Delta} N_i)$ olsun, bu da demek olur ki bir $i \in \Delta$ için $am \in N - \phi(N_i)$ dir. N_i ler ϕ - δ -asalımsı alt modül olduklarından $m \in N_i$ veya $a \in \delta(N_i : M)$ elde edilir. $N_i \subseteq \bigcup_{i \in \Delta} N_i$ olduğundan eğer $m \in N_i$ ise $m \in \bigcup_{i \in \Delta} N_i$ bulunur, $a \in \delta(N_i : M)$ ise $a \in \delta(\bigcup_{i \in \Delta} N_i : M)$ bulunur. Sonuç olarak $\bigcup_{i \in \Delta} N_i$ bir ϕ - δ -asalımsı alt modül olur. ■

Bu bölümün temel teoremi olarak Teorem 3.1'i vereceğiz. Bu teorem ϕ - δ -asalımsı alt modülleri karakterize etmemizi sağlar.

Teorem 3.1. M bir R -modül, N de M nin öz alt modülü iken aşağıdakiler denktir.

(i) N bir ϕ - δ -asalımsı alt modüldür;

(ii) Her $a \in R - \delta((N : M))$ için $(N :_M a) = N \cup (\phi(N) :_M a)$;

(iii) Her $a \in R - \delta((N : M))$ için $(N :_M a) = N$ veya $(N :_M a) = (\phi(N) :_M a)$ dir;

(iv) R nin her I ideali için ve M nin her K alt modülü için $IK \subseteq N$ ve $IK \not\subseteq \phi(N)$ iken $I \subseteq \delta((N : M))$ veya $K \subseteq N$ dir.

(v) $I \not\subseteq \delta((N : M))$ olacak şekilde R nin her I ideali için $(N :_M I) = N$ veya $(N :_M I) = (\phi(N) :_M I)$ dir.

İspat. (i) \Rightarrow (ii) : N bir ϕ - δ -asalımsı alt modül ve $a \in R - \delta((N : M))$ olsun. $N \cup (\phi(N) :_M a) \subseteq (N :_M a)$ olduğu aşıkardır. Şimdi $(N :_M a) \subseteq N \cup (\phi(N) :_M a)$ olduğunu göstermemiz gerekmektedir. Kabul edelim ki $m \in (N :_M a)$ olsun, buradan $am \in N$ dir. Eğer $am \in \phi(N)$ ise $m \in (\phi(N) :_M a) \subseteq N \cup (\phi(N) :_M a)$ elde edilir. Şimdi ise $am \notin \phi(N)$ olduğu durumu inceleyelim. Burada $am \in N - \phi(N)$ ve $a \notin \delta((N : M))$ olduğundan $m \in N \subseteq N \cup (\phi(N) :_M a)$ olur. İki taraflı kapsama gerçekleştiğinden $(N :_M a) = N \cup (\phi(N) :_M a)$ eşitliğine ulaşılır.

(ii) \Rightarrow (iii) : $(N :_M a) \subseteq N \cup (\phi(N) :_M a)$ olduğundan $(N :_M a) \subseteq N \subseteq (N :_M a)$ veya $(N :_M a) \subseteq (\phi(N) :_M a) \subseteq (N :_M a)$ elde edilir. O halde $(N :_M a) = N$ veya $(N :_M a) = (\phi(N) :_M a)$ bulunur.

(iii) \Rightarrow (iv) : $I \in L(R)$ ve $N \in L(M)$ için $IK \subseteq N - \phi(N)$ ve $I \not\subseteq \delta((N : M))$ olduğunu kabul edelim. Öyleyse $a \in I - \delta((N : M))$ vardır ve (iii)'ten $(N :_M a) = N$ veya $(N :_M a) = (\phi(N) :_M a)$ dır. Eğer $aK \not\subseteq \phi(N)$ ise (iii)'ten $K \subseteq (N :_M a) = N$ dir ve istenen elde edilir. Şimdi ise $aK \subseteq \phi(N)$ olduğunu varsayalım. $IK \not\subseteq \phi(N)$ olduğundan $xK \not\subseteq \phi(N)$ olacak şekilde $x \in I$ seçelim. Eğer $x \notin \delta((N : M))$ ise (iii) den $(N :_M x) = N$ veya $(N :_M x) = (\phi(N) :_M x)$ olur. $K \subseteq (N :_M x)$ fakat $K \not\subseteq (\phi(N) :_M x)$ olduğundan $(N :_M x) = N$ elde ederiz. Bu da bize $K \subseteq (N :_M x) = N$ yi verir. Kabul edelim ki $x \in \delta((N : M))$ olsun, $a + x \in I - \delta((N : M))$ ve $aK \subseteq \phi(N)$, $xK \not\subseteq \phi(N)$ olduğundan $(a + x)K \not\subseteq \phi(N)$ dir. Buradan $K \subseteq (N :_M a + x) = N$ ye ulaşılır ve ispat tamamlanır.

(iv) \Rightarrow (v) : Kabul edelim ki $I \not\subseteq \delta((N : M))$ olacak şekilde $I \in L(R)$ olsun. $I(N :_M I) \subseteq N$ dir. Eğer $I(N :_M I) \subseteq \phi(N)$ ise $(N :_M I) \subseteq (\phi(N) :_M I) \subseteq (N :_M I)$ olur. Eğer $I(N :_M I) \not\subseteq \phi(N)$, ise (iv) den $(N :_M I) \subseteq N \subseteq (N :_M I)$ elde edilir.

(v) \Rightarrow (i) : Kabul edelim ki $a \notin \delta((N : M))$ iken $am \in N - \phi(N)$ olsun. Şimdi $Ra = I$ ve $m \in (N :_M I)$ için (v)'ten, $m \in (N :_M I) = N$ veya $m \in N = (\phi(N) :_M I)$ elde edilir. Bu durumda $am \notin \phi(N)$ olduğundan $m \in N = (\phi(N) :_M I)$ olması mümkün değildir ve $m \in N$ elde edilir. Sonuç olarak N bir ϕ - δ -asalımsı alt modüldür. ■

Aşağıdaki teoremle bir ϕ - δ -asalımsı alt modülden başka bir ϕ - δ -asalımsı alt modül üretilmiştir.

Teorem 3.2. (i) Her $a \in R$ için $(\phi(N) :_M a) = \phi(N :_M a)$ olacak şekilde N , M nin bir ϕ - δ -asalımsı alt modülü olsun. Bu durumda $(N :_M a)$ da M nin bir ϕ - δ -asalımsı alt modülüdür.

(ii) Kabul edelim ki $\delta \leq \delta_{rad}$ ideal genişlemesi olsun ve $\delta_{rad}(\phi(N) : M) \subseteq \delta(N : M)$ olacak şekilde N, M nin bir ϕ - δ -asalımsı alt modülü olsun. Bu durumda $\delta(N : M) = \delta_{rad}(N : M)$ elde edilir.

İspat. (i) : $(\phi(N) :_M a) = \phi(N :_M a)$ iken N, M nin bir ϕ - δ -asalımsı alt modülü olsun. $(N :_M a)$ nın da M nin bir ϕ - δ -asalımsı alt modül olduğunu gösterebilmek için $x \in R$ ve $m \in M$ iken $xm \in (N :_M a) - \phi((N :_M a))$ seçelim. Bu durumda $xam \in N$ elde ederiz. $(\phi(N) :_M a) = \phi(N :_M a)$ olduğundan aynı zamanda $xam \notin \phi(N)$ dir. N bir ϕ - δ -asalımsı alt modül olduğundan $x \in \delta((N : M))$ veya $am \in N$ elde edilir. Bu da demektir ki $x \in \delta((N :_M a) : M)$ veya $m \in (N :_M a)$. Buradan $(N :_M a), M$ nin bir ϕ - δ -asalımsı alt modülüdür.

(ii) : $\delta \leq \delta_{rad}$ olduğundan $\delta(N : M) \subseteq \sqrt{(N : M)} = \delta_{rad}((N : M))$ dir. Tersini ispatlamak için $x \in \sqrt{(N : M)}$ alalım. Öyleyse $x^k \in (N : M)$ olacak şekilde bir en küçük $k \in \mathbb{N}$ mevcuttur. Öyle ki k dan küçük değerler için x in bir kuvveti $(N : M)$ ye düşmez, yani $x^{k-1} \notin (N : M)$ dir. Eğer $k = 1$ ise $x \in (N : M) \subseteq \delta((N : M))$ olur. $k > 1$ olsun. O halde iki ayrı durumda inceleyeceğiz.

Durum 1: $x \in \delta_{rad}(\phi(N) : M) = \sqrt{(\phi(N) : M)}$ ise $x \in \delta(N : M)$ elde edilir.

Durum 2: $x \notin \sqrt{(\phi(N) : M)}$ ise $x^k \notin (\phi(N) : M)$ dir. Buradan $x^{k-1}(xM) \subseteq N$ ve $x(x^{k-1}M) \not\subseteq \phi(N)$ bulunur. N alt modülü ϕ - δ -asalımsı olduğundan Teorem 3.1'den $x \in \delta((N : M))$ dir veya $x^{k-1}M \subseteq N$ dir. $x^{k-1} \notin (N : M)$ olduğundan $x^{k-1}M \subseteq N$ olması mümkün değildir.

Sonuç olarak iki durumda da $x \in \delta((N : M))$ elde edilir ve $\delta(N : M) = \delta_{rad}(N : M)$ dir. ■

Belirli koşullar altında, ϕ - δ -asalımsı alt modüller ile δ -asalımsı alt modülleri karakterize etmek mümkündür. Şimdi teoreme bakalım.

Teorem 3.3. N, M R -modülünün bir ϕ - δ -asalımsı alt modülü ve $\delta((N : M))N \not\subseteq \phi(N)$ olsun. Bu durumda N, M nin bir δ -asalımsı alt modülüdür.

İspat. Halkadan alınan a ve modülden alınan m elemanları için $am \in N$ olsun. Eğer $am \notin \phi(N)$ ise N bir ϕ - δ -asalımsı alt modül olduğundan $a \in \delta((N : M))$ veya $m \in N$ elde edilir. Kabul edelim ki $am \in \phi(N)$ olsun. Eğer $aN \not\subseteq \phi(N)$ ise $an \notin \phi(N)$ olacak şekilde bir $n \in N$ vardır. Buradan $a(m+n) \in N - \phi(N)$ elde edilir. Yani $a \in \delta((N : M))$ veya $m+n \in N$ olacaktır. O halde $a \in \delta((N : M))$ veya $m \in N$ elde edilir ki ispat tamamlanmış olur. Kabul edelim ki $aN \subseteq \phi(N)$ olsun, benzer şekilde $\delta((N : M))m \subseteq$

$\phi(N)$ olduğunu kabul ederiz. $\delta((N : M))N \not\subseteq \phi(N)$ olduğundan $bm' \notin \phi(N)$ olacak şekilde $b \in \delta((N : M))$ ve $m' \in N$ vardır. Sonuç olarak $(a+b)(m+m') \in N - \phi(N)$ elde edilir. N bir ϕ - δ -asalımsı alt modül olduğundan $a + b \in \delta(N : M)$ veya $m + m' \in N$ elde edilir. O halde $a \in \delta(N : M)$ veya $m \in N$ dir. Dolayısıyla N, M nin bir δ -asalımsı alt modülüdür. ■

M ve M' iki R -modül olmak üzere $f : M \rightarrow M'$ bir homomorfizma ve ϕ bir alt modül indirgeme fonksiyonu olsun. M' nün her N alt modülü için $\phi(f^{-1}(N)) = f^{-1}(\phi(N))$ sağlanıyorsa ϕ ye global fonksiyon veya ϕ fonksiyonu globalliği korur denir.

Teorem 3.4. (i) $f : M \rightarrow M'$ bir homomorfizma, ϕ bir global indirgeme fonksiyonu ve N, M' nün bir ϕ - δ -asalımsı alt modülü olsun. Bu durumda $f^{-1}(N) = M$ dir veya $f^{-1}(N)$ de M nin bir ϕ - δ -asalımsı alt modülüdür.

(ii) $f : M \rightarrow M'$ bir örten homomorfizma, ϕ global indirgeme fonksiyonu ve K, M nin $\text{Çek}f$ yi kapsayan alt modülü olsun. K nin M nin ϕ - δ -asalımsı alt modülü olması için gerek ve yeter koşul $f(K)$ nin M' nün ϕ - δ -asalımsı alt modülü olmasıdır.

İspat. (i) : Kabul edelim ki $f^{-1}(N) \neq M$ olsun. $f : M \rightarrow M'$ bir homomorfizma ve N, M' nün bir ϕ - δ -asalımsı alt modülü olsun. N alt modülünün ters görüntüsünün de ϕ - δ -asalımsı alt modül olduğunu göstermek için $a \in R$ ve $m \in M$ için $am \in f^{-1}(N) - \phi(f^{-1}(N))$ alalım. ϕ fonksiyonu global olduğundan $\phi(f^{-1}(N)) = f^{-1}(\phi(N))$ dir ve buradan $am \in f^{-1}(N) - f^{-1}(\phi(N))$ elde edilir. O halde $af(m) \in N - \phi(N)$ dir. N, M' nün ϕ - δ -asalımsı alt modülü olduğundan $a \in \delta((N : M'))$ veya $f(m) \in N$ bulunur. $(N : M') \subseteq (f^{-1}(N) : M)$ olduğundan $a \in \delta(f^{-1}(N) : M)$ veya $m \in f^{-1}(N)$ elde edilir. Sonuç olarak $f^{-1}(N)$ bir ϕ - δ -asalımsı alt modüldür.

(ii) : Kabul edelim ki $f(K), M'$ nün bir ϕ - δ -asalımsı alt modülü olsun ve K, M nin $\text{Çek}f$ yi kapsayan alt modülü olsun. (i)'den $f(K)$ nin ters görüntüsü de ϕ - δ -asalımsıdır yani $f^{-1}(f(K)) = K, M$ nin bir ϕ - δ -asalımsı alt modülü olur. Tersine K, M nin bir ϕ - δ -asalımsı alt modülü ve $am' \in f(K) - \phi(f(K))$ olsun. f örten, ϕ global ve $\text{Çek}f \subseteq K$ olduğundan $\phi(f(K)) = f(\phi(K))$ bulunur. f örten bir fonksiyon olduğu için $f(m) = m'$ olacak şekilde bir $m \in M$ vardır ve $am \in K - \phi(K)$ dir. K, M nin bir ϕ - δ -asalımsı alt modülü olduğundan $a \in \delta((K : M))$ veya $m \in K$ bulunur. $(K : M) \subseteq (f(K) : M')$ olduğu için $a \in \delta(f(K) : M')$ veya $m' = f(m) \in f(K)$ ye ulaşırız. Buradan $f(K), M'$ nün bir ϕ - δ -asalımsı alt modülüdür. ■

Şimdi yukarıdaki teoremden elde edilenleri bir sonuç olarak verelim.

Sonuç 3.1. (i) N, M R -modülünün bir ϕ - δ -asalımsı alt modülü, $K \not\subseteq N$ olacak şekilde K, M nin bir alt modülü ve ϕ bir global indirgeme fonksiyonu olsun. Bu durumda $N \cap K, K$ nin bir ϕ - δ -asalımsı alt modülüdür.

(ii) $K \subseteq N$ olacak şekilde K ve N, M nin iki alt modülü ve ϕ bir global indirgeme fonksiyonu olsun. Öyleyse N nin, M nin bir ϕ - δ -asalımsı alt modülü olması için gerek ve yeter koşul N/K nin M/K nin bir ϕ - δ -asalımsı alt modülü olmasıdır.

İspat. (i) $a \in R, m \in K$ için $am \in (N \cap K) - \phi(N \cap K)$ olsun. $f : K \rightarrow M$ bir homomorfizma olmak üzere her $k \in K$ için $f(k) = k$ ile tanımlansın. Bu durumda M nin alt modülü olan her L için $f^{-1}(L) = L \cap K$ olur. O halde $f^{-1}(N) = N \cap K$ olur. N yerine $\phi(N)$ alırsak $f^{-1}(\phi(N)) = \phi(N) \cap K$ elde ederiz. ϕ global olduğundan $f^{-1}(\phi(N)) = \phi(f^{-1}(N))$ dir. Yani $\phi(N \cap K) = \phi(N) \cap K$ dir. O halde $am \in (N \cap K) - \phi(N) \cap K$ bulunur. $m \in K$ olduğundan $am \in N - \phi(N)$ dir. N, M nin bir ϕ - δ -asalımsı alt modülü olduğundan $a \in \delta(N : M)$ veya $m \in N$ elde edilir. $m \in N$ ise $m \in K$ olduğundan $m \in N \cap K$ buluruz ve $N \cap K$ nin bir ϕ - δ -asalımsı alt modülü olması için ilk durum sağlanmış olur. Şimdi $a \in \delta(N : M)$ olduğunu kabul edelim ve $a \in \delta((N \cap K) : K)$ olduğunu gösterelim. $(N : M) \subseteq ((N \cap K) : K)$ olduğundan $\delta(N : M) \subseteq \delta((N \cap K) : K)$ sonucuna ulaşılır. Bu durumda $a \in \delta((N \cap K) : K)$ elde edilir.

(ii) $K \subseteq N$ olacak şekilde K ve N, M nin iki alt modülü, ϕ global indirgeme fonksiyonu ve N, M nin bir ϕ - δ -asalımsı alt modülü olsun. Kabul edelim ki $f : M \rightarrow M/K$ ye $f(m) = m + K$ olarak tanımlanan bir homomorfizma olsun, bu durumda $f(N) = N/K$ olur. $a \in R, m + K \in M/K$ için $a(m + K) \in (N/K) - \phi(N/K)$ olsun. O halde $am \in f(N) - \phi(f(N))$ olur. ϕ global olduğundan $\phi(f(N)) = f(\phi(N))$ bulunur. Yani $\phi(f(N)) = \phi(N/K) = f(\phi(N)) = \phi(N)/K$ dir. O halde $a(m + K) \in N/K - \phi(N)/K$ dir ve başlangıçta $m + K \in M/K$ aldığımızdan $am \in N - \phi(N)$ dir. N bir ϕ - δ -asalımsı alt modül olduğundan $a \in \delta(N : M)$ veya $m \in N$ elde edilir. Eğer $m \in N$ ise $m + K \in N/K$ sonucuna ulaşılır. Eğer $a \in \delta(N : M)$ ise $(N : M) = (N/K : M/K)$ olduğundan $a \in \delta(N/K : M/K)$ olur ve bu durumda $N/K, M/K$ nin bir ϕ - δ -asalımsı alt modülüdür. Şimdi tersini ispat etmek için N/K nin M/K nin bir ϕ - δ -asalımsı alt modülü olduğunu kabul edelim. Teorem 3.1'den $f(N)$ nin ters görüntüsü de bir ϕ - δ -asalımsı alt modüldür ve istenen elde edilir. ■

Teorem 3.5. N, M nin bir alt modülü olsun. N nin M nin bir ϕ - δ -asalımsı alt modülü olması için gerek ve yeter koşul $N/\phi(N)$ nin $M/\phi(N)$ nin zayıf δ -asalımsı alt modülü olmasıdır.

İspat. Kabul edelim ki N, M nin bir ϕ - δ -asalımsı alt modülü ve $a(m + \phi(N)) \in$

$N/\phi(N) - \{0_{M/\phi(N)}\}$ olsun. Buradan $am \in N - \phi(N)$ elde ederiz. N, M nin bir ϕ - δ -asalımsı alt modülü olduğundan $a \in \delta((N : M))$ veya $m \in N$ olur ki bu da $a \in \delta(N/\phi(N) : M/\phi(N))$ veya $m + \phi(N) \in N/\phi(N)$ demektir. O halde $N/\phi(N), M/\phi(N)$ nin bir zayıf δ -asalımsı alt modülüdür. Tersine $am \in N - \phi(N)$ olacak şekilde $a \in R$ ve $m \in M$ seçelim. Buradan $a(m + \phi(N)) \in N/\phi(N) - \{0_{M/\phi(N)}\}$ elde edilir. $N/\phi(N), M/\phi(N)$ nin bir zayıf δ -asalımsı alt modülü olduğundan $a \in \delta((N/\phi(N) : M/\phi(N)))$ veya $m + \phi(N) \in N/\phi(N)$ bulunur. Yani $a \in \delta(N : M)$ veya $m \in N$ elde ederiz ki bu da N, M nin bir ϕ - δ -asalımsı alt modülü demektir. ■

Yardımcı Teorem 3.1. N, M nin bir ϕ - δ -asalımsı alt modülü olsun ve $\psi((N : M)) = (\phi(N) : M)$ olacak şekilde $\psi : L(R) \longrightarrow L(R) \cup \{\emptyset\}$ bir indirgeme fonksiyonu olsun. Bu durumda $(N : M), R$ nin bir ψ - δ -asalımsı idealidir.

İspat. N nin, M nin bir ϕ - δ -asalımsı alt modülü ve $\psi((N : M)) = (\phi(N) : M)$ olduğunu varsayalım. Halkadan alınan a ve modülden alınan m elemanları için $ab \in (N : M) - \psi((N : M))$ olsun. Varsayımdan $b(aM) \subseteq N$ fakat $b(aM) \not\subseteq \phi(N)$ olduğunu görürüz. N, ϕ - δ -asalımsı olduğu için Teorem 3.1'den, $aM \subseteq N$ veya $b \in \delta(N : M)$ bulunur. Sonuç olarak $(N : M), R$ nin bir ψ - δ -asalımsı idealidir. ■

Şimdi çarpımsal modüller üzerinde ϕ - δ -asalımsı alt modüller karakterize edilecek ve çeşitli özellikleri incelenecektir. Yardımcı Teorem 3.1'in iki taraflı olması için gereken M modülünün çarpımsal modül olmasıdır. Bunu Teorem 3.6 ile göstereceğiz.

Teorem 3.6. M bir çarpımsal modül, $\phi : L(M) \longrightarrow L(M) \cup \{\emptyset\}$ olacak şekilde bir indirgeme fonksiyonu ve $\delta : L(R) \longrightarrow L(R)$ olacak şekilde bir genişleme fonksiyonu olsun. Her $N \in L(M)$ için $\psi(N : M) = (\phi(N) : M)$ olacak şekilde $\psi : L(R) \longrightarrow L(R) \cup \{\emptyset\}$ bir indirgeme fonksiyonu olsun. M nin bir öz alt modülü N için aşağıdaki durumlar denktir:

(i) N, M nin bir ϕ - δ -asalımsı alt modülüdür.

(ii) $(N : M), R$ nin bir ψ - δ -asalımsı idealidir.

İspat. (i) \Rightarrow (ii) : Yardımcı Teorem 3.1'den bulunur.

(ii) \Rightarrow (i) : Kabul edelim ki K bir alt modül ve I, R halkasının bir ideali olmak üzere $IK \subseteq N$ ve $IK \not\subseteq \phi(N)$ olsun. M bir çarpımsal modül olduğu için $K = JM$ olacak şekilde R nin bir J ideali vardır. Buradan $IJ \subseteq (N : M)$ ve $IJ \not\subseteq (\phi(N) : M) = \psi(N : M)$ elde edilir. $(N : M), R$ nin bir ψ - δ -asalımsı ideali olduğundan $I \subseteq \delta(N : M)$ veya $J \subseteq (N : M)$ dir. O halde $I \subseteq \delta(N : M)$ veya $K = JM \subseteq N$ elde edilir. Dolayısıyla N, M nin bir ϕ - δ -asalımsı alt modülüdür. ■

M bir R -modül ve $S \subseteq R$ iken S, R nin bir çarpımsal kapalı kümesi olsun. M_S, M nin S deki kesir modülünü ve R_S, R nin S deki kesir halkasını gösterebiliriz. N, M modülünün bir alt modülü ve $(N : M)_S \subseteq (N_S : M_S)$ olduğunu da not edelim.

Önerme 3.3. M bir R -modül, $\phi_S : L(M_S) \longrightarrow L(M_S) \cup \{\emptyset\}$ bir indirgeme fonksiyonu, her $I \in L(R)$ için $\delta_S(I_S) = \delta(I)_S$ olacak şekilde $\delta_S : L(R_S) \longrightarrow L(R_S)$ bir genişleme fonksiyonu olsun. Kabul edelim ki $(N : M) \cap S = \emptyset$ ve $\phi(N)_S \subseteq \phi_S(N_S)$ olacak şekilde N bir ϕ - δ -asalımsı alt modül olsun. Bu durumda N_S, M_S nin bir ϕ_S - δ_S -asalımsı alt modüldür.

İspat. $a \in R; s, t \in S$ ve $m \in M$ ler için $\frac{a}{s} \frac{m}{t} \in N_S - \phi_S(N_S)$ olsun. Bu durumda $\phi(N)_S \subseteq \phi_S(N_S)$ olduğundan bir $u \in S$ için $uam \in N - \phi(N)$ dir. N, M modülünün bir ϕ - δ -asalımsı alt modülü olduğundan $a \in \delta((N : M))$ veya $um \in N$ elde edilir. Eğer $a \in \delta((N : M))$ ise $(N : M)_S \subseteq (N_S : M_S)$ olduğundan $\frac{a}{s} \in \delta((N : M))_S = \delta_S((N : M)_S) \subseteq \delta_S((N_S : M_S))$ dir. Eğer $um \in N$ ise $\frac{m}{t} = \frac{um}{ut} \in N_S$ elde edilir. Bu durumda N_S, M_S nin bir ϕ_S - δ_S -asalımsı alt modülü olur. ■

M_i bir R_i -modül, $i = 1, 2$ için $\phi_i : L(M_i) \longrightarrow L(M_i) \cup \{\emptyset\}$ bir indirgeme fonksiyonu ve $\delta_i : L(R_i) \longrightarrow L(R_i)$ bir genişleme fonksiyonu olsun. $M = M_1 \times M_2$ ve $R = R_1 \times R_2$ olarak alalım. Skaler çarpım ve bileşen bileşene toplama ile M bir R -modüldür. N_i ler M_i lerin alt modülü ve $N; N = N_1 \times N_2$ formunda olsun. İndirgeme fonksiyonlarının kartezyen çarpımını ve genişleme fonksiyonlarının kartezyen çarpımını ifade etmek için ise şimdi tanımlayacağımız notasyonları kullanacağız. $\phi_\times : L(M) \longrightarrow L(M) \cup \{\emptyset\}$ indirgeme fonksiyonu $\phi_\times(N_1 \times N_2) = \phi_1(N_1) \times \phi_2(N_2)$ ile ve $\delta_\times : L(R) \longrightarrow L(R)$ genişleme fonksiyonu $\delta_\times(I_1 \times I_2) = \delta_1(I_1) \times \delta_2(I_2)$ ile tanımlansın.

Tanım 3.3. $\delta : L(R) \rightarrow L(R)$ bir genişleme fonksiyonu olsun. $\delta(I) = R$ iken $I = R$ oluyorsa $\delta, (*)$ -koşulunu sağlar denir.

Örnek 3.4. $\delta_{rad}; (*)$ -koşulunu sağlayan bir genişleme fonksiyonu örneğidir.

Önerme 3.4. $\delta_i, (*)$ -koşulunu sağlayan bir genişleme fonksiyonu olsun. Bu durumda aşağıdaki N alt modül formlarından her biri $M = M_1 \times M_2$ nin ϕ_\times - δ_\times -asalımsı alt modüldür.

(i) $\phi_i(N_i) = N_i$ olacak şekilde N_i, M_i nin öz alt modülü iken $N = N_1 \times N_2$ formundadır.

(ii) N_1, M_1 in bir δ_1 -asalımsı alt modülü iken $N = N_1 \times M_2$ formundadır.

(iii) N_2, M_2 nin bir δ_2 -asalımsı alt modülü iken $N = M_1 \times N_2$ formundadır.

(iv) N_1, M_1 in bir ϕ_1 - δ_1 -asalımsı alt modülü ve $\phi_2(M_2) = M_2$ iken $N = N_1 \times M_2$ formundadır.

(v) N_2, M_2 nin bir $\phi_2\text{-}\delta_2$ -asalımsı alt modülü ve $\phi_1(M_1) = M_1$ iken $N = M_1 \times N_2$ formundadır.

İspat. (i): Açıktır.

(ii): N_1, M_1 in bir δ_1 -asalımsı alt modülü iken $N = N_1 \times M_2$ olsun. N nin M nin δ_\times -asalımsı alt modülü olduğunu görmek kolaydır. Önerme 3.1 yardımıyla da N alt modülünün bir $\phi_\times\text{-}\delta_\times$ -asalımsı alt modül olduğu ispatlanmış olur.

(iii): (ii) ile benzer şekilde ispatlanabilir.

(iv): $a_i \in R_i$ ve $m_i \in M_i$ ler için $(a_1, a_2)(m_1, m_2) = (a_1m_1, a_2m_2) \in N - \phi_\times(N)$ olduğunu kabul edelim. Buradan $a_1m_1 \in N_1 - \phi_1(N_1)$ elde edilir. N_1, M_1 in bir $\phi_1\text{-}\delta_1$ -asalımsı alt modülü olduğundan $a_1 \in \delta_1((N_1 : M_1))$ veya $m_1 \in N_1$ elde edilir. Buradan $(a_1, a_2) \in \delta_1((N_1 : M_1)) \times \delta_2(M_2 : M_2) = \delta_\times(N : M)$ veya $(m_1, m_2) \in N$ elde edilir. Dolayısıyla N, M nin bir $\phi_\times\text{-}\delta_\times$ -asalımsı alt modülüdür.

(v): (iv)'e benzer şekilde ispatlanabilir. ■

İki $\phi\text{-}\delta$ -asalımsı alt modülün kartezyen çarpımı her zaman bir $\phi\text{-}\delta$ -asalımsı alt modül olmayabilir. Buna bir örnek verelim.

Örnek 3.5. $R_1 = \mathbb{Z} = R_2$ ve p ve q birbirinden farklı asal sayılar olmak üzere $M_1 = \mathbb{Z}_{p^3q^3} = M_2$ olsun. $N_1 = (\overline{p^2})$ ve $N_2 = (\overline{q^2})$ olmak üzere sırasıyla M_1 ve M_2 nin birer $\phi_\emptyset\text{-}\delta_{rad}$ -asalımsı alt modülüdür. Kabul edelim ki $\phi_\times = \phi_\emptyset \times \phi_\emptyset$, $\delta_\times = \delta_{rad} \times \delta_{rad}$ ve $N = N_1 \times N_2$ olsun. $\delta_\times(N : M) = p\mathbb{Z} \times q\mathbb{Z}$ dir. $(p^2, 1)(\overline{1}, \overline{q^2}) \in N - \phi_\times(N)$ iken $(p^2, 1) \notin \delta_\times(N : M)$ ve $(\overline{1}, \overline{q^2}) \notin N$ elde edilir. Bu durumda N, M nin bir $\phi_\times\text{-}\delta_\times$ -asalımsı alt modülü değildir.

Teorem 3.7. Önerme 3.4'teki notasyon kullanılarak, δ_i nin (*)-koşulunu sağladığını ve $\phi_i(N_i) \neq N_i$ iken $N = N_1 \times N_2$ olduğunu kabul edelim. N nin M nin $\phi_\times\text{-}\delta_\times$ -asalımsı alt modülü olması için gerek ve yeter koşul N nin aşağıdaki formlardan birinde olmasıdır.

(i) N_1, M_1 in bir $\phi_1\text{-}\delta_1$ -asalımsı alt modülü ve $\phi_2(M_2) \neq M_2$ iken N_1, δ_1 -asalımsı alt modüldür ve $N = N_1 \times M_2$ formundadır.

(ii) N_2, M_2 nin bir $\phi_2\text{-}\delta_2$ -asalımsı alt modülü ve $\phi_1(M_1) \neq M_1$ iken N_2, δ_2 -asalımsı alt modüldür ve $N = M_1 \times N_2$ formundadır.

İspat. (\Leftarrow): Önerme 3.4'ten ispata ulaşılır.

(\Rightarrow): Kabul edelim ki $\phi_i(N_i) \neq N_i$ iken N, M modülünün bir $\phi_\times\text{-}\delta_\times$ -asalımsı alt modülü olsun. $a \in R_1, m \in M_1$ için $am \in N_1 - \phi_1(N_1)$ olsun. Buradan $(a, 0)(m, 0) =$

$(am, 0) \in N - \phi_x(N)$ dir. N, M nin ϕ_x - δ_x -asalımsı alt modülü olduğundan $(a, 0) \in \delta_x((N : M))$ veya $(m, 0) \in N$ olur ki bu da $a \in \delta_1((N_1 : M_1))$ veya $m_1 \in N_1$ demektir. Sonuç olarak N_1, M_1 in bir ϕ_1 - δ_1 -asalımsı alt modülüdür. Benzer şekilde N_2 nin de M_2 nin ϕ_2 - δ_2 -asalımsı alt modülü olduğu gösterilebilir. Şimdi $M_1 = N_1$ veya $M_2 = N_2$ olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $M_2 \neq N_2$ olsun ve $m_1 \in N_1 - \phi_1(N_1)$ ve $m_2 \in M_2 - N_2$ seçelim. $(1, 0)(m_1, m_2) = (m_1, 0) \in N - \phi_x(N)$ olur. N, M nin ϕ_x - δ_x -asalımsı alt modülü olduğundan $(1, 0) \in \delta_x(N : M)$ elde edilir. O halde $1 \in \delta_1((N_1 : M_1))$ dir. $\delta_1, (*)$ -koşulunu sağladığından $N_1 = M_1$ olur. Benzer şekilde $N_1 \neq M_1$ olduğunu kabul edersek de $N_2 = M_2$ yi elde ederiz. Genelliği bozmadan $N_1 \neq M_1$ ve $N_2 = M_2$ olduğunu varsayalım. Şimdi $\phi_2(M_2) \neq M_2$ iken N_1 in bir δ_1 -asalımsı alt modül olduğunu gösterelim. $m' \in M_2 - \phi_2(M_2)$ alalım. $x \in R_1$ ve $m \in M_1$ için $xm \in N_1$ olduğunu varsayalım. Buradan $(x, 1)(m, m') = (xm, m') \in N - \phi_x(N)$ olur. N, M nin bir ϕ_x - δ_x -asalımsı alt modülü olduğundan $(x, 1) \in \delta_x((N : M))$ veya $(m, m') \in N$ buluruz. Bu da demektir ki $x \in \delta_1((N_1 : M_1))$ veya $m \in N_1$ dir. Sonuç olarak N_1, M_1 in bir δ_1 -asalımsı alt modülüdür. Eğer $\phi_1(M_1) \neq M_1$ ve $N_1 = M_1$ ise benzer şekilde N_2, M_2 nin bir δ_1 -asalımsı alt modülüdür diyebiliriz. ■

Aşağıdaki örnek; $(*)$ -koşulunun sağlanmadığı durumlarda N ϕ - δ -asalımsı alt modülünün Teorem 3.7'de belirtilen formlardan farklı şekilde de olabileceğini gösteren bir ters örnek niteliğindedir.

Örnek 3.6. p ve q birbirinden farklı asal sayılar olmak üzere $R_1 = \mathbb{Z} = R_2$ ve $M_1 = \mathbb{Z}_{p^3q^3} = M_2$. Kabul edelim ki $R = R_1 \times R_2, M = M_1 \times M_2$ olsun. $N_1 = (\overline{pq^2})$ ve $N_2 = (\overline{qp^2})$, M_1 ve M_2 nin birer alt modülü ve $N = N_1 \times N_2$ olsun. Kabul edelim ki $\delta_1 = \delta_{ann} = \delta_2$, $\phi_1 = \phi_0 = \phi_2$ ve $\phi_x = \phi_1 \times \phi_2$ olarak tanımlansınlar. $\delta_x = \delta_1 \times \delta_2$. δ_i nin $(*)$ -koşulunu sağlamadığı kolaylıkla görülür. N, M nin bir ϕ_x - δ_x -asalımsı alt modülüdür. Fakat $N_1 \neq M_1$ ve $N_2 \neq M_2$ dir.

Naser Zamani'nin " ϕ -prime submodules" isimli makalesinde [6] yer alan açık probleme aşağıdaki ispatla cevap verilmiştir.

Teorem 3.8. M_i, R_i -modül olmak üzere $M = M_1 \times M_2$, her $i = 1, 2$ için $\phi_i(N_i) \neq N_i$ ve $N = N_1 \times N_2$ olsun. Öyleyse N nin bir ϕ -asal alt modül olması için gerek ve yeter koşul N nin aşağıdaki formlardan birine sahip olmasıdır.

(i) N_1, M_1 in bir ϕ_1 -asal alt modülü ve $\phi_2(M_2) \neq M_2$ iken N_1 asal alt modüldür ve $N = N_1 \times M_2$ formundadır.

(ii) N_2, M_2 nin bir ϕ_2 -asal alt modülü ve $\phi_1(M_1) \neq M_1$ iken N_2 asal alt modüldür ve $N = M_1 \times N_2$ formundadır.

İspat. Öncelikle Örnek 3.3'te verildiği üzere N nin ϕ -asal olması için gerek ve yeter koşul ϕ - δ_{id} -asalımsı alt modül olmasıdır. Eğer $\delta = \delta_{id}$ ise M nin N alt modülünün δ -asalımsı olması için gerek ve yeter koşul N nin asal alt modül olmasıdır. Üstelik $\delta_{id} (*)$ -koşulunu sağlar. Teorem 3.7'den, N nin bir ϕ -asal alt modül olması için gerek ve yeter koşulu $N = N_1 \times M_2$ formundayken N_1, M_1 in bir ϕ_1 -asal alt modülüdür ve $\phi_2(M_2) \neq M_2$ iken N_1 bir asal alt modül olmalıdır veya $N = M_1 \times N_2$ formundayken N_2, M_2 nin bir ϕ_2 -asal alt modülüdür ve $\phi_1(M_1) \neq M_1$ iken N_2 asal alt modül olmalıdır. ■



4

KRASNER HİPER HALKALARDA ϕ - δ -ASALIMSIZ HİPER İDEALLERİN KARAKTERİZASYONU

Bu bölümde Krasner hiper halka üzerinde ϕ -asal, ϕ -asalımsız, ϕ - δ -asalımsız hiper idealler çalışılmış ve karakterize edilmiştir. Öncelikle asal ve asalımsız hiper idealler için ϕ fonksiyonu ile bir genelleştirme yapılarak ϕ -asal ve ϕ -asalımsız hiper idealler tanımlanmıştır. Bu genelleştirme asal ve asalımsız hiper idealleri karakterize etmemizi sağlamıştır. Bir T hiper ideali ϕ -asal (ϕ -asalımsız) iken hangi durumlarda asal (asalımsız) olduğu Teorem 4.1 (Teorem 4.5) ile karakterize edilmiştir. Temel teorem olarak adlandırabileceğimiz Teorem 4.2 ile ϕ -asal, Teorem 4.6 ile ϕ -asalımsız hiper idealler karakterize edilmiştir. Asal hiper ideallerde gerçekleşen teorem ve önermelerin bir çoğunun asalımsız hiper ideallerde de çalıştığı görülmüştür.

Asal ve asalımsız hiper ideallerin genelleştirilmesinden sonra; Elif Özel Ay, Gürsel Yeşilot ve Deniz Sönmez [36] tarafından çalışılmış olan δ -asalımsız hiper idealler yapısı ile, oluşturduğumuz ϕ -asalımsız hiper idealler yapısı birleştirilerek ϕ - δ -asalımsız hiper idealler karakterize edilmiştir. Bu yapı kurulurken özel olarak ϕ fonksiyonu indirgeme fonksiyonu olarak alınmıştır. Teorem 4.10 ile bir ϕ - δ -asalımsız hiper idealden yeni bir ϕ - δ -asalımsız hiper ideal üretilmiştir. μ bir iyi homomorfizma olmak üzere, bir ϕ - δ -asalımsız hiper idealin görüntüsünün ve ters görüntüsünün de ϕ - δ -asalımsız hiper ideal olduğu Teorem 4.12 ile gösterilmiş ve Sonuç 4.6 ile de aşık sonuçlar ifade edilmiştir. Teorem 4.13'te zayıf δ -asalımsız hiper idealler, ϕ - δ -asalımsız hiper idealler kullanılarak karakterize edilmiştir. Bu özelliklere ek olarak ϕ -asal, ϕ -asalımsız ve ϕ - δ -asalımsız hiper idealler için bölüm halkası, yerelleştirme ve kartezyen çarpım özellikleri incelenmiş, ilgili özelliklerin ispatları verilmiştir.

4.1 ϕ -Asal Hiper İdealler

Bu bölümde $(\mathfrak{K}, \oplus, \circ)$ bir birimli, değişmeli Krasner hiper halka olarak alınacaktır. Halkamız Krasner hiper halka olduğu için hiper işlem olarak \oplus işlemi alınacak, \circ klasik bir ikili işlem olarak ele alınacaktır. \mathfrak{K} hiper halkasının tüm hiper idealleri $L(\mathfrak{K})$

ile ifade edilecektir. $\phi : L(\mathfrak{R}) \longrightarrow L(\mathfrak{R}) \cup \{\emptyset\}$ olacak şekilde bir fonksiyon olarak tanımlanmıştır. ϕ -asal hiper idealin tanımını vererek başlayalım.

Tanım 4.1. $\phi : L(\mathfrak{R}) \longrightarrow L(\mathfrak{R}) \cup \{\emptyset\}$ bir fonksiyon ve N , \mathfrak{R} nin bir öz hiper ideali olmak üzere, $a, b \in \mathfrak{R}$ için $a \circ b \in N - \phi(N)$ iken $a \in N$ veya $b \in N$ ise N ye ϕ -asal hiper ideal denir.

Tanım 4.2. $\phi : L(\mathfrak{R}) \longrightarrow L(\mathfrak{R}) \cup \{\emptyset\}$ bir fonksiyon ve N , \mathfrak{R} nin bir öz hiper ideali olsun. \mathfrak{R} nin K ve L hiper idealleri için $K \circ L \subseteq N$ ve $K \circ L \not\subseteq \phi(N)$ iken $K \subseteq N$ veya $L \subseteq N$ ise N ye güçlü ϕ -asal hiper ideal denir.

Not 4.1. Yukarıdaki tanımlardan açıkça güçlü ϕ -asal hiper idealin bir ϕ -asal hiper ideal olduğu görülür.

Lekkoksung'un yarı hiper gruplar üzerinde yaptığı Tanım 2.63'ten esinlenerek [35], aşağıdaki tanım verilmiştir.

Tanım 4.3. \mathfrak{R} değişmeli ve birimli bir Krasner hiper halka olmak üzere $N \subseteq \mathfrak{R}$ olsun. I ve J , \mathfrak{R} nin hiper idealleri ve $0 \neq I \circ J \subseteq N$ iken $I \subseteq N$ veya $J \subseteq N$ ise N , \mathfrak{R} nin zayıf asal hiper idealidir.

Tanım 4.4. \mathfrak{R} değişmeli ve birimli bir Krasner hiper halka, N de onun bir öz hiper ideali olmak üzere $a \circ m \in N - \bigcap_{n=1}^{\infty} N^n$ iken $a \in N$ veya $m \in N$ ise N ye, \mathfrak{R} nin w -asal hiper ideali denir.

Tanım 4.5. \mathfrak{R} değişmeli Krasner hiper halka ve N , \mathfrak{R} nin bir öz hiper ideali olsun. Her $a, m \in \mathfrak{R}$ için $a \circ m \in N - N^2$ iken $a \in N$ veya $m \in N$ ise N ye, \mathfrak{R} nin hemen hemen asal hiper ideali denir.

Örnek 4.1. \mathfrak{R} bir değişmeli hiper halka olsun. Aşağıdaki hiper idealleri $\phi_\alpha : L(\mathfrak{R}) \longrightarrow L(\mathfrak{R}) \cup \{\emptyset\}$ olmak üzere karşılık gelen ϕ_α -asal idealler ile ifade edelim.

(i) $\phi_\emptyset(N) = \emptyset$ iken N asal hiper ideale,

(ii) $\phi_0(N) = 0$ iken N zayıf asal hiper ideale,

(iii) $\phi_2(N) = N^2$ iken N hemen hemen asal hiper ideale,

(iv) $\phi_n(N) = N^n$ ($n \geq 2$) iken N n -hemen hemen asal hiper ideale,

(v) $\phi_w(N) = \bigcap_{n=1}^{\infty} N^n$ iken N w -asal hiper ideale,

(vi) $\phi_{id}(N) = N$ iken N herhangi bir hiper ideale,

karşılık gelir.

Tanımlanan ϕ_α fonksiyonları $\phi_\emptyset \leq \phi_0 \leq \phi_w \leq \dots \leq \phi_{n+1} \leq \phi_n \leq \phi_{n-1} \leq \dots \leq \phi_2 \leq \phi_{id}$ olacak şekilde sıralanabilir. Şimdi bu sıralamaları da kullanarak bir önerme verelim.

Önerme 4.1. N , \mathfrak{R} değişmeli hiper halkasının bir öz hiper ideali olmak üzere

(1) $\psi_1 \leq \psi_2$ olacak şekilde $\psi_1, \psi_2 : L(\mathfrak{R}) \longrightarrow L(\mathfrak{R}) \cup \{\emptyset\}$ fonksiyonları verilsin. Eğer N ψ_1 -asal ise ψ_2 -asaldır.

(2) (a) N asal $\implies N$ zayıf asal $\implies N$ w -asal $\implies N$ $(n+1)$ -hemen hemen asal $\implies N$ n -hemen hemen asal ($n \geq 2$) $\implies N$ hemen hemen asal.

(b) Bir N hiper idealinin w -asal olması için gerek ve yeter koşul N nin her $n \geq 2$ için n -hemen hemen asal olmasıdır.

İspat. (1) Kabul edelim ki N , \mathfrak{R} nin bir ψ_1 -asal hiper ideali olsun. $a, b \in \mathfrak{R}$ olmak üzere $a \circ b \in N$ ve $a \circ b \notin \psi_2(N)$ iken $\psi_1 \leq \psi_2$ olduğundan $a \circ b \notin \psi_1(N)$ elde edilir. Buradan $a \circ b \in N - \psi_1(N)$ ve N nin ψ_1 -asal hiper ideal olması varsayımından $a \in N$ veya $b \in N$ bulunur. Buradan N nin, \mathfrak{R} nin bir ψ_2 -asal hiper ideali olduğu sonucuna ulaşılır.

(2) (a) ϕ_α 'nın Örnek 4.1'deki sıralamasından ve (1)'in ispatından sonuca ulaşılır.

(b) Kabul edelim ki N bir w -asal hiper ideal olsun. $n \geq 2$ için $\psi_w \leq \psi_n$ olduğundan, (1)'den N bir ψ_n -asal hiper idealdir. Yani her $n \geq 2$ için N nin n -hemen hemen asal hiper ideal olduğu söylenir. Şimdi tersinin doğru olduğunu göstermek için kabul edelim ki her $n \geq 2$ için N bir n -hemen hemen asal hiper ideal ve $a, b \in \mathfrak{R}$ için $a \circ b \in N - \bigcap_{n=1}^{\infty} N^n$ olsun. O halde $a \circ b \in N - \bigcap_{n=2}^{\infty} N^n$ dir. Buradan bir $n \in \mathbb{N}$ için $a \circ b \in N - N^n$ olduğu açıktır ve N bir n -hemen hemen asal hiper ideal olduğundan $a \in N$ veya $b \in N$ elde edilir. Sonuç olarak N , \mathfrak{R} nin bir w -asal hiper idealidir. ■

Önerme 4.1, (2) (a)'da ifade edilenlerin tersinin her zaman doğru olması gerekmez.

Örnek 4.2. $\mathfrak{R} = (\mathbb{Z}_{18}, +, \cdot)$ bir Krasner hiper halka olmak üzere $N = \langle \bar{0} \rangle$ için N bir ϕ_0 -asal hiper idealdir fakat $\bar{6}, \bar{3} \in N$ için $\bar{6} \notin N$ ve $\bar{3} \notin N$ olduğundan N bir ϕ_0 -asal hiper ideal değildir.

Örnek 4.3. $\mathfrak{R} = \{0, 1\}$ kümesi üzerinde \oplus bir hiper işlem ve \circ bir ikili işlem olmak üzere aşağıdaki gibi tanımlayalım:

\oplus	0	1
0	0	1
1	1	\mathfrak{R}

\circ	0	1
0	0	0
1	0	1

N bir Krasner hiper halkadır [28]. $N = \{0\}$ ve $\mathfrak{R} = \{0, 1\}$ birer hiper idealdir [45]. N bir ϕ_0 -asal hiper ideal ve aynı zamanda bir ϕ_\emptyset -asal hiper idealdir.

Örnek 4.4. Örnek 2.16'daki Krasner hiper halkayı ele alalım. $I_4 = \langle 0 \rangle$ hiper ideali için $0 = b \circ c \in I_4$ iken $b \notin I_4$ ve $c \notin I_4$ tür. O halde I_4 bir ϕ_0 -asal hiper idealdir fakat ϕ_\emptyset -asal hiper ideal değildir.

Aşağıdaki teorem bir güçlü ϕ -asal hiper idealin hangi durumlarda asal olduğunun karakterizasyonunu yapmamızı sağlar.

Teorem 4.1. \mathfrak{R} bir değişmeli hiper halka ve $\phi : L(\mathfrak{R}) \longrightarrow L(\mathfrak{R}) \cup \{\emptyset\}$ bir fonksiyon olsun. T , \mathfrak{R} nin öz hiper ideali olmak üzere, T bir güçlü ϕ -asal hiper ideal olsun. T asal hiper ideal değilse $T^2 \subseteq \phi(T)$ dir. Buradan $T^2 \not\subseteq \phi(T)$ ise T nin \mathfrak{R} nin bir asal hiper ideali olduğu elde edilir.

İspat. Kabul edelim ki $T^2 \not\subseteq \phi(T)$ olsun. T nin \mathfrak{R} nin bir asal hiper ideali olduğunu göstermek için \mathfrak{R} hiper halkasından alınan x, y elemanları için $x \circ y \in T$ olsun.

Durum 1: $x \circ y \notin \phi(T)$ ise $x \circ y \in T - \phi(T)$ olur ve T bir güçlü ϕ -asal hiper ideal olduğundan bir ϕ -asal hiper idealdir. Buradan $x \in T$ veya $y \in T$ elde edilir.

Durum 2: $x \circ y \in \phi(T)$ olsun. $x \circ T \not\subseteq \phi(T)$ olduğunu varsayalım. Bu demektir ki bazı $m \in T$ ler için $x \circ m \notin \phi(T)$ dir. Buradan $x \circ (y \oplus m) \notin \phi(T)$ elde edilir. T bir güçlü ϕ -asal hiper ideal olduğu için $x \in T$ veya $y \oplus m \subseteq T$ bulunur. Buradan ise $x \in T$ veya $y \in T$ elde edilir. Şimdi de $x \circ T \subseteq \phi(T)$ olduğunu kabul edelim. (Benzer şekilde $y \circ T \subseteq \phi(T)$ için de aynı ispat yapılabilir.) $T^2 \not\subseteq \phi(T)$ olduğundan bazı $n, k \in T$ elemanları için $n \circ k \notin \phi(T)$ olur. Buradan $(x \oplus n) \circ (y \oplus k) \notin \phi(T)$ elde edilir. T bir güçlü ϕ -asal hiper ideal olduğundan $(x \oplus n) \subseteq T$ veya $(y \oplus k) \subseteq T$ dir. Buradan da $x \in T$ veya $y \in T$ sonucuna ulaşırız.

Dolayısıyla T , \mathfrak{R} nin bir asal hiper idealidir. ■

Sonuç 4.1. T bir güçlü ϕ -asal hiper ideal olmak üzere $\phi \leq \phi_3$ ise T , w -asal hiper idealdir.

İspat. Her ϕ için T nin asal hiper idealken, ϕ_w -asal hiper ideal olduğu bilinmektedir. Buradan T , \mathfrak{R} nin w -asal hiper idealidir. Kabul edelim ki T hiper ideali asal olmasın. Teorem 4.1'den $T^2 \subseteq \phi(T) \subseteq T^3$ olduğundan her $n \geq 2$ için $\phi(T) = T^n$ elde edilir. Buradan her $n \geq 2$ için T bir n -hemen hemen asal hiper ideal olur. O halde Önerme 4.1 (2)-(b)'den T , \mathfrak{R} nin bir w -asal hiper idealidir. ■

Sonuç 4.2. T bir güçlü ϕ -asal hiper ideal olmak üzere $T \subseteq \sqrt{\phi(T)}$ veya $\sqrt{\phi(T)} \subseteq T$ dir. $T \subsetneq \sqrt{\phi(T)}$ ise T asal değildir; $\sqrt{\phi(T)} \subsetneq T$ iken T asaldır. Eğer $\phi(T)$ bir radikal hiper ideal ise $T = \phi(T)$ dir veya T asaldır.

İspat. T bir güçlü ϕ -asal hiper ideal olsun. Teorem 4.1'den $T^2 \subseteq \phi(T)$ veya T bir asal hiper idealdir. $T^2 \subseteq \phi(T)$ ise $T \subseteq \sqrt{\phi(T)}$ olur. T asal hiper idealse $r \in \sqrt{T}$ iken $r^n \in T$ ve T bir güçlü ϕ -asal hiper ideal, dolayısıyla bir ϕ -asal hiper ideal olduğundan $r \in T$ elde edilir. O halde $T = \sqrt{T}$ olur ve $\phi(T) \subseteq T$ olduğundan $\sqrt{\phi(T)} \subseteq \sqrt{T} = T$ elde edilir. Şimdi $T \subsetneq \sqrt{\phi(T)}$ ise T asal değildir. Asal olsaydı $\sqrt{\phi(T)} \subseteq T$ ve $T \subseteq \sqrt{\phi(T)}$ olduğundan $T = \sqrt{\phi(T)}$ olurdu ve bir çelişki elde edilirdi. Şimdi ise $\sqrt{\phi(T)} \subsetneq T$ olsun ve kabul edelim ki T asal olmasın. O halde $T^2 \subseteq \phi(T)$ olur ve $T \subseteq \sqrt{\phi(T)}$ elde edilir. Sonuç olarak $T = \sqrt{\phi(T)}$ çelişkisi çıkar. Öyleyse T asal olmak zorundadır. ■

Şimdi ϕ -asal hiper idealleri karakterize edecek olan temel teoremi verelim.

Teorem 4.2. \mathfrak{R} halkasının bir öz hiper ideali N ve $\phi : L(\mathfrak{R}) \longrightarrow L(\mathfrak{R}) \cup \{\emptyset\}$ bir fonksiyon olmak üzere, aşağıdakiler eşittir.

(i) N hiper ideali ϕ -asaldır.

(ii) $a \in \mathfrak{R} - N$ için $(N : a) = N \cup (\phi(N) : a)$ dir.

(iii) $a \in \mathfrak{R} - N$ için $(N : a) = N$ veya $(N : a) = (\phi(N) : a)$ dir.

İspat. (i) \Rightarrow (ii) \mathfrak{R} Krasner hiper halkasından N hiper idealinde olmayacak şekilde bir eleman alalım, $a \in \mathfrak{R} - N$ olsun. $b \in (N : a)$ olduğunu varsayalım, öyleyse $a \circ b \in N$ elde edilir. Şimdi $a \circ b$ nin $\phi(N)$ nin elemanı olduğu ve olmadığı durumları inceleyelim. Eğer $a \circ b \notin \phi(N)$ ise N , \mathfrak{R} nin bir ϕ -asal hiper ideali olduğundan $b \in N$ bulunur. Eğer $a \circ b \in \phi(N)$ ise $b \in (\phi(N) : a)$ bulunur. Sonuç olarak $(N : a) \subseteq N \cup (\phi(N) : a)$ elde edilir. Eşitliği göstermek için ters kapsamaya baktığımızda $\phi(N) \subseteq N$ varsayımından aşıkardır ve ispat tamamlanır.

(ii) \Rightarrow (iii) $(N : a) \subseteq N \cup (\phi(N) : a)$ olduğundan $(N : a) \subseteq N \subseteq (N : a)$ veya $(N : a) \subseteq (\phi(N) : a) \subseteq (N : a)$ dir ve buradan istenen elde edilir.

(iii) \Rightarrow (i) $a, b \in \mathfrak{R}$ için $a \circ b \in N - \phi(N)$ ve $a \in \mathfrak{R} - N$ olsun. O halde $b \in (N : a)$ ve $b \notin (\phi(N) : a)$ elde ederiz. (iii)'ten $(N : a) = N$ veya $(N : a) = (\phi(N) : a)$ olduğunu biliyoruz. $b \notin (\phi(N) : a)$ bulduğumuz için $b \in (N : a) = N$ elde ederiz ve N bir ϕ -asal hiper idealdir. ■

Teorem 4.1'de T nin asal olmayan bir güçlü ϕ -asal hiper idealken $T^2 \subseteq \phi(T)$ olduğu gösterilmişti. Teorem 4.1 ve Teorem 4.2 ile aşağıdaki sonuç elde edilmiştir ve [4] Sonuç 14 ile benzer şekilde ispatlanmıştır.

Sonuç 4.3. T , asal olmayan bir güçlü ϕ -asal hiper ideal iken $T \sqrt{\phi(T)} \subseteq \phi(T)$ dir.

İspat. Öncelikle $a \in \sqrt{\phi(T)}$ olduğunu varsayalım. Eğer $a \in T$ ise Teorem 4.1'den $a \circ T \subseteq T^2 \subseteq \phi(T)$ olur. Eğer $a \notin T$ ise karakterizasyonun yapıldığı temel teoremden (Teorem 4.2) $(T : a) = T$ veya $(T : a) = (\phi(T) : a)$ olacaktır. $T \subseteq (T : a)$ olduğundan $a \circ T \subseteq \phi(T)$ dir. Kabul edelim ki $(T : a) = T$ olsun. $a^n \in \phi(T)$ alalım fakat $a^{n-1} \notin \phi(T)$ olsun. Bu durumda $a^n \in T$ dir, buradan $a^{n-1} \in (T : a) = T$ elde edilir. $a^{n-1} \notin \phi(T)$ olduğundan $a^{n-1} \in T - \phi(T)$ sonucuna ulaşılır. O halde T güçlü ϕ -asal hiper ideal olduğundan $a \in T$ dir ve çelişki elde edilir. ■

Teorem 4.3. N , \mathfrak{R} nin bir hiper ideali olsun. N nin \mathfrak{R} nin bir ϕ -asal hiper ideali olması için gerek ve yeter koşul $N/\phi(N)$ nin $\mathfrak{R}/\phi(N)$ nin zayıf asal hiper ideali olmasıdır.

İspat. N nin \mathfrak{R} nin bir ϕ -asal hiper ideali olduğunu varsayalım. $(a \oplus \phi(N)) \circ (m \oplus \phi(N)) \in N/\phi(N) - \{0_{\mathfrak{R}/\phi(N)}\}$. Buradan $a \circ m \in N - \phi(N)$. N , \mathfrak{R} nin bir ϕ -asal hiper ideali olduğundan $a \in N$ veya $m \in N$ elde edilir. Buradan $a \oplus \phi(N) \in N/\phi(N)$ veya $m \oplus \phi(N) \in N/\phi(N)$ dir. Sonuç olarak $N/\phi(N)$, $\mathfrak{R}/\phi(N)$ nin bir zayıf asal hiper idealidir. Tersini göstermek için $a \circ m \in N - \phi(N)$ olacak şekilde $a, m \in \mathfrak{R}$ seçelim. Buradan $(a \oplus \phi(N)) \circ (m \oplus \phi(N)) \in N/\phi(N) - \{0_{\mathfrak{R}/\phi(N)}\}$ elde edilir. $N/\phi(N)$, $\mathfrak{R}/\phi(N)$ nin bir zayıf asal hiper ideali olduğundan $a \oplus \phi(N) \in N/\phi(N)$ veya $m \oplus \phi(N) \in N/\phi(N)$ bulunur. Yani $a \in N$ veya $m \in N$ dir. Buradan N , \mathfrak{R} nin bir ϕ -asal hiper ideali olur. ■

$\emptyset \neq S$, \mathfrak{R} hiper halkasının çarpımsal kapalı bir alt kümesi, T , \mathfrak{R} nin bir hiper ideali ve $T \cap S = \emptyset$ olsun. $\phi_S : L(\mathfrak{R}_S) \longrightarrow L(\mathfrak{R}_S) \cup \{\emptyset\}$ fonksiyonu $\phi_S(T) = \phi(T \cap R)_S$ olarak tanımlansın. Eğer $\phi(T \cap R) = \emptyset$ ise $\phi_S(T) = \emptyset$ olarak alınır.

$M \subseteq T$ olacak şekilde M ve T iki hiper idealken $\phi_M : L(\mathfrak{R}/M) \longrightarrow L(\mathfrak{R}/M) \cup \{\emptyset\}$ fonksiyonu $\phi_M(T/M) = (\phi(T) \oplus M)/M$ ile tanımlansın. Eğer $\phi(T) = \emptyset$ ise $\phi_M(T/M) = \emptyset$ olarak alınır.

Önerme 4.2. $\phi : L(\mathfrak{R}) \longrightarrow L(\mathfrak{R}) \cup \{\emptyset\}$ bir fonksiyon ve T , \mathfrak{R} nin bir ϕ -asal hiper ideali olsun.

(i) $M \subseteq T$ iken M , \mathfrak{R} nin bir hiper ideali ise T/M , \mathfrak{R}/M nin ϕ_M -asal hiper idealidir.

(ii) S , \mathfrak{R} hiper halkasının çarpımsal kapalı bir alt kümesi, $T \cap S = \emptyset$ ve $\phi(T)_S \subseteq \phi_S(T_S)$ olsun. Bu durumda T_S , \mathfrak{R}_S nin bir ϕ_S -asal hiper idealidir.

İspat. (i) $x, y \in \mathfrak{X}$ ve $(x \oplus M) \circ (y \oplus M) \in T/M - \phi_M(T/M)$ olsun. Buradan $x \circ y \oplus M \in T/M - (\phi(T) \oplus M)/M$ olur ve $x \circ y \in T - \phi(T) \oplus M$ elde ederiz. O halde $x \circ y \in T - \phi(T)$ elde edilir. T bir ϕ -asal hiper ideal olduğundan $x \in T$ veya $y \in T$ elde edilir. Dolayısıyla $x \oplus M \in T/M$ veya $y \oplus M \in T/M$ dir. Bu da T/M nin \mathfrak{X}/M nin bir ϕ_M -asal hiper ideali olduğunu gösterir.

(ii) $a, b \in \mathfrak{X}$; $s, t \in S$ için $\frac{a}{s} \circ \frac{b}{t} \in T_S - \phi_S(T_S)$ olsun. Bir $u \in S$ için $u \circ a \circ b \in T$ olur. Fakat her $w \in S$ için $w \circ a \circ b \notin \phi_S(T_S) \cap \mathfrak{X}$ dir. Böyle olduğunu göstermek için kabul edelim ki $w \circ a \circ b \in \phi(T)$ olsun. Bu durumda $\frac{a}{s} \circ \frac{b}{t} \in \phi(T)_S \subseteq \phi_S(T_S)$ elde edilir ve bu bir çelişkiye sebep olur. O halde $u \circ a \circ b \in T - \phi(T)$ ve T, \mathfrak{X} nin bir ϕ -asal hiper ideali olduğundan $u \circ a \in T$ veya $b \in T$ elde edilir. Buradan $\frac{a}{s} \in T_S$ veya $\frac{b}{t} \in T_S$ elde edilir. Sonuç olarak T_S nin \mathfrak{X}_S nin ϕ_S -asal hiper ideali olduğu ispatlanmış olur. ■

\mathfrak{X}_1 ve \mathfrak{X}_2 iki değişmeli hiper halka olsun. $\mathfrak{X}_1 \otimes \mathfrak{X}_2$ kartezyen çarpımının asal hiper idealleri; N_1 ve N_2 sırasıyla \mathfrak{X}_1 ve \mathfrak{X}_2 nin asal hiper idealleri olmak üzere $N \otimes \mathfrak{X}_2$ ve $\mathfrak{X}_1 \otimes N_2$ formunda yazılır. Şimdi ise bunu ϕ -asal hiper idealler için karakterize edelim.

Teorem 4.4. (1) X ve Y değişmeli Krasner hiper halkalar olsun. N, X in zayıf asal bir hiper ideali ise $\phi_w \leq \phi \leq \phi_1$ olacak şekilde $M = N \otimes Y, \mathfrak{X} = X \otimes Y$ nin ϕ -asal hiper idealidir.

(2) \mathfrak{X} değişmeli Krasner hiper halka ve M, \mathfrak{X} halkasının sonlu üretilmiş bir öz hiper ideali olsun. Kabul edelim ki $\phi \leq \phi_3$ iken M bir güçlü ϕ -asal hiper ideal olsun. Bu durumda M zayıf asaldır veya $M^2 \neq 0$ idempotenttir. Ayrıca N zayıf asal, $M = N \otimes Y$ ve $Y = M^2$ olmak üzere $\mathfrak{X} = X \otimes Y$ olarak ayrıştırılabilir. Sonuç olarak $\phi_w \leq \phi \leq \phi_1$ olacak şekilde her ϕ için M ϕ -asaldır.

İspat. (1) Kabul edelim ki N, X in bir zayıf asal hiper ideali olsun. $M = N \otimes Y, \mathfrak{X} = X \otimes Y$ nin bir zayıf asal hiper ideali olmak zorunda değildir. M nin zayıf asal hiper ideal olması için gerek ve yeter koşul M nin asal hiper ideal olmasıdır. Eğer N bir asal hiper ideale M de asaldır ve buradan her ϕ için ϕ -asaldır. Kabul edelim ki N asal olmasın. Öyleyse [2] Teorem 1'e benzer şekilde $N^2 = 0$ elde edilir. Buradan $M^2 = 0 \otimes Y$ ve $\phi_w(M) = 0 \otimes Y$ dir. Bu durumda $M - \phi_w(M)$ yi; $M - \phi_w(M) = N \otimes Y - 0 \otimes Y = (N - \{0\}) \otimes Y$ olarak yazabiliriz. Şimdi $(a_1, a_2) \circ (b_1, b_2) = (a_1 \circ b_1, a_2 \circ b_2) \in M - \phi_w(M)$ olarak alalım. Bu demektir ki $a_1 \circ b_1 \in N - \{0\}$ dir, buradan $a_1 \in N$ veya $b_1 \in N$ elde edilir. Sonrasında $(a_1, a_2) \in M$ veya $(b_1, b_2) \in M$ elde edilir. Bu da demek olur ki M bir ϕ_w -asal hiper idealdir ve M bir ϕ -asal hiper ideal olarak bulunur.

(2) Eğer M bir asal hiper ideale M aynı zamanda \mathfrak{X} nin bir zayıf asal hiper idealidir. Kabul edelim ki M asal hiper ideal olmasın. Bu durumda Teorem 4.1'den $M^2 \subseteq \phi(M)$

dir ve $M^2 \subseteq \phi(M) \subseteq \phi_3(M) = M^3$ tür. O halde $M^2 = M^3$ elde edilir ve buradan M^2 nin idempotent olduğuna ulaşılır. M^2 sonlu üretilmiş olduğundan bazı idempotent $m \in \mathfrak{R}$ ler için $M^2 = (m)$ dir. Kabul edelim ki $M^2 = 0$ olsun. $\phi(M) \subseteq M^3 = 0$. Buradan $\phi(M) = 0$ dır. Sonuç olarak M , \mathfrak{R} nin bir zayıf asal hiper idealidir. Şimdi kabul edelim ki $M^2 \neq 0$ olsun. $Y = M^2 = \mathfrak{R} \circ m$ ve $X = \mathfrak{R} \circ (1 \ominus m)$ alalım. $Y = M^2$ iken \mathfrak{R} , $X \otimes Y$ olarak ayrıştırılır. Kabul edelim ki $N = M \circ (1 \ominus m)$ olsun. Buradan $N^2 = (M \circ (1 \ominus m))^2 = M^2 \circ (1 \ominus m)^2 = (m) \circ (1 \ominus m) = 0$ olduğundan $M = N \otimes Y$ elde edilir. N nin zayıf asal hiper ideal olduğunu göstermek için $0 \neq I \circ J \subseteq N$ olacak şekilde I ve J hiper ideallerini alalım. Buradan $0 \neq (I \otimes Y) \circ (J \otimes Y) \subseteq M - \phi(M)$ elde edilir. $\phi \leq \phi_3$ olduğundan $\phi(M) \subseteq M^3 = (N \otimes Y)^3 = 0 \otimes Y$ dir. Buradan da $I \otimes Y \subseteq M$ veya $J \otimes Y \subseteq M$ elde edilir. O halde N nin \mathfrak{R} nin bir zayıf asal hiper ideali olduğunu gösteren $I \subseteq N$ veya $J \subseteq N$ sonucuna ulaşılır. ■

$\phi_i : L(\mathfrak{R}_i) \longrightarrow L(\mathfrak{R}_i) \cup \{\emptyset\}$ fonksiyonunda i leri $i = 1, 2$ olarak seçelim. $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{R}_2$ ve \mathfrak{R} bileşen bileşene çarpım ve bileşen bileşene hiper toplama ile tanımlanan bir hiper halka olsun. N_i ler \mathfrak{R}_i lerin idealleri olmak üzere \mathfrak{R} nin her ideali $N = N_1 \times N_2$ formunda olsun. ϕ fonksiyonlarının kartezyen çarpımını ifade etmek için ise şimdi tanımlayacağımız notasyonları kullanacağız. $\phi_\times : L(\mathfrak{R}) \longrightarrow L(\mathfrak{R}) \cup \{\emptyset\}$ fonksiyonu $\phi_\times(N_1 \times N_2) = \varphi_1(N_1) \times \varphi_2(N_2)$ ile tanımlansın.

Önerme 4.3. \mathfrak{R}_1 ve \mathfrak{R}_2 değişmeli Krasner hiper halkalar ve $i = 1, 2$ için $\varphi_i : L(\mathfrak{R}_i) \longrightarrow L(\mathfrak{R}_i) \cup \{\emptyset\}$ fonksiyonları olsun. $\phi_\times = \varphi_1 \times \varphi_2$ ve $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{R}_2$ olarak alalım. N nin, \mathfrak{R} nin ϕ_\times -asal hiper ideali olması için gerek ve yeter koşul N nin aşağıdaki formlardan birinde olmasıdır.

(i) N_i , \mathfrak{R}_i nin öz hiper ideali ve $\varphi_i(N_i) = N_i$ iken $N = N_1 \times N_2$ formundadır.

(ii) N_1 , \mathfrak{R}_1 in bir φ_1 -asal hiper ideali ve $\varphi_2(\mathfrak{R}_2) \neq \mathfrak{R}_2$ iken N_1 asal hiper idealdir ve $N = N_1 \times \mathfrak{R}_2$ formundadır.

(iii) N_2 , \mathfrak{R}_2 nin bir φ_2 -asal hiper ideali ve $\varphi_1(\mathfrak{R}_1) \neq \mathfrak{R}_1$ iken N_2 asal hiper idealdir ve $N = \mathfrak{R}_1 \times N_2$ formundadır.

İspat. İlk olarak bu üç formdan birine sahip olan N hiper idealinin ϕ -asal olduğunu gösterelim.

(i) $N_1 \times N_2 - \phi(N_1 \times N_2) = \emptyset$ olduğundan N aşıkarak bir ϕ -asal hiper idealdir.

(ii) Kabul edelim ki N_1 , \mathfrak{R}_1 in bir asal hiper ideali ve $\varphi_2(\mathfrak{R}_2) \neq \mathfrak{R}_2$ olsun. O halde $N = N_1 \times \mathfrak{R}_2$ asaldır, buradan N hiper ideali ϕ_\times -asal elde edilir. Kabul edelim ki N_1 , \mathfrak{R}_1 in bir φ_1 -asal hiper ideali ve $\varphi_2(\mathfrak{R}_2) = \mathfrak{R}_2$ olsun. O halde alınan $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in$

$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{R}_2$ için $(a_1 \circ b_1, a_2 \circ b_2) = (a_1, a_2) \circ (b_1, b_2) \in N_1 \times \mathfrak{R}_2 - \varphi_1(N_1) \times \mathfrak{R}_2 = (N_1 - \varphi_1(N_1)) \times \mathfrak{R}_2$ olur. Sonrasında $a_1 \circ b_1 \in N_1 - \varphi_1(N_1)$ elde edilir ve N_1 bir φ_1 -asal hiper ideal olduğundan $a_1 \in N_1$ veya $b_1 \in N_1$ elde edilir. O halde $(a_1, a_2) \in N_1 \times \mathfrak{R}_2$ veya $(b_1, b_2) \in N_1 \times \mathfrak{R}_2$ dir. Buradan $N_1 \times \mathfrak{R}_2$, \mathfrak{R} nin bir ϕ_x -asal hiper idealidir.

(iii) $\mathfrak{R}_1 \times N_2$ nin ϕ_x -asal hiper ideal olduğunu (ii)'ye benzer şekilde gösterebiliriz.

Şimdi ise $N = N_1 \times N_2$ nin $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{R}_2$ nin bir ϕ_x -asal hiper ideali olduğunu kabul edelim. Alınan $a, b \in \mathfrak{R}_1$ için $a \circ b \in N_1 - \varphi_1(N_1)$ olsun. Bu durumda $(a, 0) \circ (b, 0) = (a \circ b, 0) \in N - \phi(N)$ dir. N , \mathfrak{R} nin bir ϕ_x -asal hiper ideali olduğundan $(a, 0) \in N$ veya $(b, 0) \in N$ dir. Dolayısıyla $a \in N_1$ veya $b \in N_1$ elde edilir. Buradan N_1 in, \mathfrak{R}_1 in φ_1 -asal hiper ideali olduğu söylenir. Benzer şekilde N_2 nin, \mathfrak{R}_2 nin φ_2 -asal hiper ideali olduğu gösterilebilir. $N_1 \times N_2 \neq \varphi_1(N_1) \times \varphi_2(N_2)$ olsun. Kabul edelim ki $N_1 \neq \varphi_1(N_1)$ olsun. Bir $b_1 \in N_1 - \varphi_1(N_1)$ ve bir $b_2 \in N_2$ olacak şekilde elemanlar alalım. $(b_1, 1) \circ (1, b_2) = (b_1, b_2) \in N - \phi(N)$ dir. N nin ϕ -asal hiper ideal olduğu bilindiğinden $(b_1, 1) \in N_1 \times N_2$ veya $(1, b_2) \in N_1 \times N_2$ olur. Öyleyse $N_1 = \mathfrak{R}_1$ veya $N_2 = \mathfrak{R}_2$ dir. Kabul edelim ki $N_2 = \mathfrak{R}_2$ olsun. Şimdi $\varphi_2(\mathfrak{R}_2) \neq \mathfrak{R}_2$ iken N_1 in asal hiper ideal olduğu gösterilecektir. $m' \in \mathfrak{R}_2 - \varphi_2(\mathfrak{R}_2)$ olsun. $x, m \in \mathfrak{R}_1$ için $x \circ m \in N_1$ olsun. O halde $(x, 1) \circ (m, m') = (x \circ m, m') \in N - \phi(N)$ elde edilir. N , \mathfrak{R} nin ϕ_x -asal hiper ideali olduğundan $(x, 1) \in N$ veya $(m, m') \in N$ bulunur. Bu da demektir ki $x \in N_1$ veya $m \in N_1$. Buradan N_1 in, \mathfrak{R}_1 in asal hiper ideali olduğu sonucuna ulaşılır. Eğer $N_1 = \mathfrak{R}_1$ ve $\varphi_1(\mathfrak{R}_1) \neq \mathfrak{R}_1$ ise benzer şekilde N_2 nin, \mathfrak{R}_2 nin asal hiper ideali olduğu ispatlanabilir. ■

4.2 ϕ -Asalımsı Hiper İdealler

Bu bölümde ise ϕ -asal hiper ideallerde verilen tanım ve teoremler ϕ -asalımsı hiper ideallere uygulanacaktır. Notasyonlar ise Bölüm 4.1'de verildiği gibi kullanılacaktır.

Tanım 4.6. $\phi : L(\mathfrak{R}) \longrightarrow L(\mathfrak{R}) \cup \{\emptyset\}$ bir fonksiyon ve N , \mathfrak{R} nin öz hiper ideali olmak üzere, $a, b \in \mathfrak{R}$ ve bir $k \in \mathbb{N}$ için $a \circ b \in N - \phi(N)$ iken $a \in N$ veya $b^k \in N$ ise N ye ϕ -asalımsı hiper ideal denir.

Tanım 4.7. $\phi : L(\mathfrak{R}) \longrightarrow L(\mathfrak{R}) \cup \{\emptyset\}$ bir fonksiyon ve N , \mathfrak{R} nin bir öz hiper ideali olsun. \mathfrak{R} nin K ve L hiper idealleri için $K \circ L \subseteq N$ ve $K \circ L \not\subseteq \phi(N)$ iken $K \subseteq N$ veya $L \subseteq \sqrt{N}$ ise N ye güçlü ϕ -asalımsı hiper ideal denir.

Not 4.2. Yukarıdaki tanımlardan açıkça güçlü ϕ -asalımsı hiper idealin bir ϕ -asalımsı hiper ideal olduğu görülür.

Tanım 4.8. \mathfrak{R} değişmeli ve birimli bir Krasner hiper halka olmak üzere $N \subseteq \mathfrak{R}$ olsun. I ve J , \mathfrak{R} nin hiper idealleri ve $0 \neq I \circ J \subseteq N$ iken $I \subseteq N$ veya $J \subseteq \sqrt{N}$ ise N , \mathfrak{R} nin zayıf asalımsı hiper idealidir.

Tanım 4.9. \mathfrak{R} değişmeli ve birimli bir Krasner hiper halka, N de onun bir öz hiper ideali olmak üzere $a \circ m \in N - \bigcap_{n=1}^{\infty} N^n$ iken $a \in N$ veya bir $k \in \mathbb{N}$ için $m^k \in N$ ise N ye \mathfrak{R} nin w -asalımsı hiper ideali denir.

Tanım 4.10. \mathfrak{R} değişmeli ve birimli bir Krasner hiper halka ve N , \mathfrak{R} nin bir öz hiper ideali olsun. Her $a, m \in \mathfrak{R}$ için $a \circ m \in N - N^2$ iken $a \in N$ veya bir $k \in \mathbb{N}$ için $m^k \in N$ ise N ye, \mathfrak{R} nin hemen hemen asalımsı hiper ideali denir.

Örnek 4.5. \mathfrak{R} bir değişmeli hiper halka olsun. Aşağıdaki hiper idealleri $\phi_\alpha : L(\mathfrak{R}) \longrightarrow L(\mathfrak{R}) \cup \{\emptyset\}$ olmak üzere karşılık gelen ϕ_α -asalımsı idealler ile ifade edelim.

(i) $\phi_\emptyset(N) = \emptyset$ iken N asalımsı hiper ideale,

(ii) $\phi_0(N) = 0$ iken N zayıf asalımsı hiper ideale,

(iii) $\phi_2(N) = N^2$ iken N hemen hemen asalımsı hiper ideale,

(iv) $\phi_n(N) = N^n$, ($n \geq 2$) iken N n -hemen hemen asalımsı hiper ideale,

(v) $\phi_w(N) = \bigcap_{n=1}^{\infty} N^n$ iken N w -asalımsı hiper ideale,

(vi) $\phi_{id}(N) = N$ iken N herhangi hiper ideale,

karşılık gelir.

$\phi_\emptyset \leq \phi_0 \leq \phi_w \leq \dots \leq \phi_{n+1} \leq \phi_n \leq \phi_{n-1} \leq \dots \leq \phi_2 \leq \phi_{id}$ olduğu görülür.

Önerme 4.4. N , \mathfrak{R} değişmeli hiper halkasının bir öz hiper ideali olmak üzere;

(1) $\psi_1 \leq \psi_2$ olacak şekilde verilen $\psi_1, \psi_2 : L(\mathfrak{R}) \longrightarrow L(\mathfrak{R}) \cup \{\emptyset\}$ fonksiyonları için; eğer N ψ_1 -asalımsı ise ψ_2 -asalımsıdır.

(2) (a) N asalımsı $\implies N$ zayıf asalımsı $\implies N$ w -asalımsı $\implies N$ $(n+1)$ -hemen hemen asalımsı $\implies N$ n -hemen hemen asalımsı ($n \geq 2$) $\implies N$ hemen hemen asalımsı.

(b) Bir N hiper idealinin w -asalımsı olması için gerek ve yeter koşul N nin her $n \geq 2$ için n -hemen hemen asalımsı olmasıdır.

İspat. (1) Kabul edelim ki N , \mathfrak{R} nin bir ψ_1 -asalımsı hiper ideali olsun. Halkadan alınan a ve b elemanları için $a \circ b \in N - \psi_2(N)$ alalım. $\psi_1 \leq \psi_2$ yani $\psi_1(N) \subseteq \psi_2(N)$ olduğundan $a \circ b \in N - \psi_1(N)$ elde edilir. N , \mathfrak{R} nin bir ψ_1 -asalımsı hiper ideali olduğu için $a \in N$ veya bir $k \in \mathbb{N}$ için $b^k \in N$ olur. Buradan N , \mathfrak{R} nin bir ψ_2 -asalımsı hiper ideali olarak bulunur.

(2) (a) Örnek 4.5'te verilen ϕ_α 'ların sıralaması ve (1) ile ispata ulaşılabilir.

(b) Kabul edelim ki; her $n \geq 2$ için $a \circ b \in N - N^n$ olsun. O halde $a \circ b \in N - \bigcap_{n=2}^{\infty} N^n$ dir ve $a \circ b \in N - \bigcap_{n=1}^{\infty} N^n$ sonucuna ulaşılır. N, \mathfrak{R} nin bir w -asalımsı hiper ideali olduğundan $a \in N$ veya bir $k \in \mathbb{N}$ için $b^k \in N$ dir ve n -hemen hemen asalımsı hiper ideal elde edilir. Tersine; kabul edelim ki $a \circ b \in N - \bigcap_{n=1}^{\infty} N^n$ olsun. Bazı $n \geq 1$ ler için $a \circ b \in N - N^n$ dir. O halde $n \geq 2$ için de $a \circ b \in N - N^n$ dir ve N her $n \geq 2$ için bir n -hemen hemen asalımsı hiper ideal olduğundan $a \in N$ veya bir $k \in \mathbb{N}$ için $b^k \in N$ elde edilir. Buradan N bir w -asalımsı hiper idealdir. ■

Örnek 4.6. $\mathfrak{R} = (\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$ bir Krasner hiper halka olmak üzere $N = \langle \bar{0} \rangle$ için N bir ϕ_0 -asal hiper ideal olduğundan aşikar olarak ϕ_0 -asalımsı hiper idealdir. $0 = \overline{x \cdot y} \in N$ için $\bar{x} \notin N$ ve $(\bar{y})^3 \in N$ elde edilir. O halde N bir ϕ_0 -asalımsı hiper idealdir. ϕ_0 -asalımsı olup ϕ_0 -asal olmayan hiper ideal örneği olarak N yi verebiliriz.

Örnek 4.3'e baktığımızda N hiper idealinin ϕ_0 -asal hiper ideal yani diğer bir deyişle asal hiper ideal olduğunu görüyoruz. O halde N hiper ideali aynı zamanda ϕ_0 -asalımsı (asalımsı) hiper idealdir. Örnek 4.4'te I_4 , ϕ_0 -asal hiper idealdir ve aynı zamanda ϕ_0 -asalımsı hiper idealdir.

Aşağıdaki teorem güçlü ϕ -asalımsı hiper idealin hangi koşullarda asalımsı olduğunun karakterizasyonunu yapmamızı sağlar.

Teorem 4.5. \mathfrak{R} bir değişmeli hiper halka, $\phi : L(\mathfrak{R}) \longrightarrow L(\mathfrak{R}) \cup \{\emptyset\}$ bir fonksiyon ve T, \mathfrak{R} nin öz hiper ideali iken T bir güçlü ϕ -asalımsı hiper ideal olsun. $T^2 \not\subseteq \phi(T)$ ise T, \mathfrak{R} nin bir asalımsı hiper idealidir. T asalımsı hiper ideal değilse $\sqrt{T} = \sqrt{\phi(T)}$ elde edilir.

İspat. Kabul edelim ki $T^2 \not\subseteq \phi(T)$ olsun. Bu durumda T nin asalımsı hiper ideal olduğu gösterilecektir. Hiper halkadan alınan x, y elemanları için $x \circ y \in T$ olsun.

Durum 1: Eğer $x \circ y \notin \phi(T)$ ise T bir güçlü ϕ -asalımsı hiper ideal olduğundan $x \in T$ veya bir $k \in \mathbb{N}$ için $y^k \in T$ bulunacaktır.

Durum 2: Eğer $x \circ y \in \phi(T)$ ise öncelikle $x \circ T \not\subseteq \phi(T)$ olduğunu kabul edelim. Bir $p_0 \in T$ için $x \circ p_0 \notin \phi(T)$ olacaktır. O halde $x \circ (y \oplus p_0) \subseteq T$ ve $x \circ (y \oplus p_0) \notin \phi(T)$ elde edilir. Bu durumda $x \in T$ veya bir $k \in \mathbb{N}$ için $(y \oplus p_0)^k \subseteq T$ dir. Buradan $x \in T$ veya $y^k \in T$ elde edilir. Şimdi kabul edelim ki $x \circ T \subseteq \phi(T)$ olsun. (Aynı şekilde $y \circ T \subseteq \phi(T)$ olduğunu da kabul edebiliriz.) $T^2 \not\subseteq \phi(T)$ olduğundan $p_1 \circ q_1 \notin \phi(T)$ olacak şekilde $p_1, q_1 \in T$ vardır. Buradan $(x \oplus p_1) \circ (y \oplus q_1) \notin \phi(T)$ elde edilir. T bir güçlü

ϕ -asalımsı hiper ideal olduğundan $x \oplus p_1 \subseteq T$ veya bir $m \in \mathbb{N}$ için $(y \oplus q_1)^m \subseteq T$ dir. O halde $x \in T$ veya $y^m \in T$ elde edilir.

Sonuç olarak T , \mathfrak{R} nin bir asalımsı hiper idealidir. Aksine T asalımsı hiper ideal değilse $T^2 \subseteq \phi(T)$ elde edilir. Yani $\sqrt{T} = \sqrt{T^2} \subseteq \sqrt{\phi(T)}$ dir. $\phi(T) \subseteq T$ olduğunu bildiğimizden de $\sqrt{\phi(T)} \subseteq \sqrt{T}$ ye ulaşırız. O halde eşitlik gösterilmiş olur. ■

Sonuç 4.4. T , $\phi \leq \phi_3$ olmak üzere \mathfrak{R} nin bir güçlü ϕ -asalımsı hiper ideali olsun. O halde T bir w -asalımsı hiper idealdir.

İspat. Bu ispat, Sonuç 4.1'in ispatına benzer olarak gösterilebilir. ■

Aşağıdaki teorem bir temel teorem olarak verilir ve bu teoremle ϕ -asalımsı hiper idealler karakterize edilmektedir.

Teorem 4.6. \mathfrak{R} halkasının bir öz hiper ideali N ve $\phi : L(\mathfrak{R}) \longrightarrow L(\mathfrak{R}) \cup \{\emptyset\}$ bir fonksiyon olmak üzere, aşağıdakiler denktir:

(i) N bir ϕ -asalımsı hiper idealdir.

(ii) $a \in \mathfrak{R} - \sqrt{N}$ için $(N : a) = N \cup (\phi(N) : a)$ dir;

(iii) $a \in \mathfrak{R} - \sqrt{N}$ için $(N : a) = N$ veya $(N : a) = (\phi(N) : a)$ dir;

İspat. (i) \implies (ii) Kabul edelim ki N , \mathfrak{R} nin bir ϕ -asalımsı hiper ideali olsun. $N \cup (\phi(N) : a) \subseteq (N : a)$ olduğu aşikardır. Bu eşitliğin diğer tarafını ispatlamak için bir $b \in (N : a)$ alalım. Bu durumda $a \circ b \in N$ olur. Eğer $a \circ b \notin \phi(N)$ ise N bir ϕ -asalımsı hiper ideal ve $a \in \mathfrak{R} - \sqrt{N}$ olduğundan $b \in N$ olur ve $(N : a) \subseteq N$ elde edilir. Eğer $a \circ b \in \phi(N)$ ise $b \in (\phi(N) : a)$ dir. Buradan $(N : a) \subseteq (\phi(N) : a)$ elde edilir. O halde $(N : a)$, birleşimin alt kümesidir ve iki taraflı kapsamadan $(N : a) = N \cup (\phi(N) : a)$ eşitliği gösterilmiş olur.

(ii) \implies (iii) İspat 4.2 ii) \implies iii)'e benzer şekilde yapılabilir.

(iii) \implies (i) İspat 4.2 iii) \implies i)'e benzer şekilde yapılabilir. ■

Teorem 4.7. N , \mathfrak{R} nin bir hiper ideali olsun. N nin \mathfrak{R} nin bir ϕ -asalımsı hiper ideali olması için gerek ve yeter koşul $N/\phi(N)$ nin $\mathfrak{R}/\phi(N)$ nin zayıf asalımsı hiper ideali olmasıdır.

İspat. Kabul edelim ki N , \mathfrak{R} nin bir ϕ -asalımsı hiper ideali olsun. $(a \oplus \phi(N)) \circ (m \oplus \phi(N)) \in N/\phi(N) - \{0_{\mathfrak{R}/\phi(N)}\}$. Buradan $a \circ m \in N - \phi(N)$. N , \mathfrak{R} nin bir ϕ -asalımsı hiper

ideali olduğundan $a \in N$ veya bir $k \in \mathbb{N}$ için $m^k \in N$ elde edilir. Buradan $a \oplus \phi(N) \in N/\phi(N)$ veya $(m \oplus \phi(N))^k \in N/\phi(N)$ dir. Sonuç olarak $N/\phi(N)$, $\mathfrak{R}/\phi(N)$ nin bir zayıf asalımsı hiper idealidir. Tersini göstermek için $a \circ m \in N - \phi(N)$ olacak şekilde $a, m \in \mathfrak{R}$ seçelim. Buradan $(a \oplus \phi(N)) \circ (m \oplus \phi(N)) \in N/\phi(N) - \{0_{\mathfrak{R}/\phi(N)}\}$ elde edilir. $N/\phi(N)$, $\mathfrak{R}/\phi(N)$ nin bir zayıf asalımsı hiper ideali olduğundan $a \oplus \phi(N) \in N/\phi(N)$ veya bir $t \in \mathbb{N}$ için $(m \oplus \phi(N))^t \in N/\phi(N)$ bulunur. Yani $a \in N$ veya $m^t \in N$ dir. Buradan N, \mathfrak{R} nin bir ϕ -asalımsı hiper ideali olur. ■

Aşağıdaki önerme için kullanılacak olan $\phi_S(T)$ ve $\phi_M(T/M)$ fonksiyonları Önerme 4.2'de tanımlandığı gibi kullanılacaktır.

Önerme 4.5. $\phi : L(\mathfrak{R}) \longrightarrow L(\mathfrak{R}) \cup \{\emptyset\}$ bir fonksiyon ve T, \mathfrak{R} nin bir ϕ -asalımsı hiper ideali olsun.

(i) $M \subseteq T$ iken M, \mathfrak{R} halkasının bir hiper ideali ise $T/M, \mathfrak{R}/M$ nin ϕ_M -asalımsı hiper idealidir.

(ii) S, \mathfrak{R} halkasının çarpımsal kapalı bir alt kümesi, $T \cap S = \emptyset$ ve $\phi(T)_S \subseteq \phi_S(T_S)$ olsun. O halde T_S, \mathfrak{R}_S nin bir ϕ_S -asalımsı hiper idealidir.

İspat. (i) $x, y \in \mathfrak{R}$ olacak şekilde elemanlar alıp, $(x \oplus M) \circ (y \oplus M) \in T/M - \phi_M(T/M)$ olduğunu kabul edelim. $x \circ y \oplus M \in T/M - (\phi(T) \oplus M)/M$ olacaktır. Buradan $x \circ y \in T - (\phi(T) \oplus M)$ ve $x \circ y \in T - \phi(T)$ elde edilir. T, \mathfrak{R} nin ϕ -asalımsı hiper ideali olduğundan $x \in T$ veya bir $k \in \mathbb{N}$ için $y^k \in T$ bulunur. Buradan $x \oplus M \in T/M$ veya $(y \oplus M)^k \in T/M$ dir. Bu da demek olur ki; $T/M, \mathfrak{R}/M$ nin bir ϕ_M -asalımsı hiper idealidir.

(ii) Kabul edelim ki $a, b \in \mathfrak{R}; s, t \in S$ için $\frac{a}{s} \circ \frac{b}{t} \in T_S - \phi_S(T_S)$ olsun. Bir $u \in S$ için $u \circ a \circ b \in T$ dir ve her $w \in S$ için $w \circ a \circ b \notin \phi(T) \cap \mathfrak{R}$ bulunur. Eğer $w \circ a \circ b \in \phi(T)$ ise $\frac{a}{s} \circ \frac{b}{t} \in \phi(T)_S \subseteq \phi_S(T_S)$ olur ve bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $u \circ a \circ b \in T - \phi(T)$ ve T bir ϕ -asalımsı hiper ideal olduğundan $u \circ a \in T$ veya bir $k \in \mathbb{N}$ için $b^k \in T$ dir. Buradan $\frac{a}{s} \in T_S$ veya $\frac{b^k}{t^k} \in T_S$ dir. Sonuç olarak T_S, \mathfrak{R}_S nin bir ϕ_S -asalımsı hiper idealidir. ■

Teorem 4.8. (1) X ve Y değişmeli Krasner hiper halkalar olsun. N, X in zayıf asalımsı bir hiper ideali ise $\phi_w \leq \phi \leq \phi_{id}$ olacak şekilde $M = N \otimes Y, \mathfrak{R} = X \otimes Y$ nin ϕ -asalımsı hiper ideali olur.

(2) \mathfrak{R} değişmeli Krasner hiper halka ve M, \mathfrak{R} halkasının sonlu üretilmiş bir öz hiper ideali olsun. Kabul edelim ki $\phi \leq \phi_3$ iken M bir güçlü ϕ -asalımsı hiper ideal olsun. Bu durumda M zayıf asalımsıdır veya $M^2 \neq 0$ idempotenttir. Ayrıca $Y = M^2, M = N \otimes Y$ ve N zayıf asalımsı olmak üzere $\mathfrak{R} = X \otimes Y$ biçiminde ayrıştırılabilir. Sonuç olarak $\phi_w \leq \phi \leq \phi_{id}$ olacak şekilde her ϕ için M, ϕ -asalımsıdır.

İspat. (1) Kabul edelim ki N, X in bir zayıf asalımsı hiper ideali olsun. M nin zayıf asalımsı hiper ideal olması için gerek ve yeter koşul M nin asalımsı hiper ideal olmasıdır. $\phi_w \leq \phi$ olacak şekilde her ϕ için M bir ϕ -asalımsı hiper idealdir. Eğer N asalımsı hiper ideal ise M de asalımsı bir hiper ideal olacaktır. Bu durumda M her ϕ için bir ϕ -asalımsı hiper ideal olur. Şimdi de N nin asalımsı hiper ideal olmadığı durumu inceleyelim. N zayıf asalımsı ideal ve asalımsı değilse $\sqrt{N} = \sqrt{0}$ dir (Teorem 2.2, [46]). Benzer şekilde $N^2 = 0$ dir ve buradan $M^2 = 0 \otimes Y$ elde edilir ve $\phi_w(M) = 0 \otimes Y$ dir. $M - \phi_w(M) = N \otimes Y - 0 \otimes Y = (N - \{0\}) \otimes Y$ olacak şekilde yazılabilir. Şimdi $a_1, b_1 \in X, a_2, b_2 \in Y$ olmak üzere $(a_1, a_2) \circ (b_1, b_2) = (a_1 \circ b_1, a_2 \circ b_2) \in M - \phi_w(M)$ olsun. Buradan $a_1 \circ b_1 \in N - \{0\}$ denilebilir ve $a_1 \in N$ veya bir $s \in \mathbb{N}$ için $b_1^s \in N$ dir. Öyleyse $(a_1, a_2) \in N \otimes Y$ veya $(b_1, b_2)^s \in N \otimes Y$ bulunur. Dolayısıyla $M = N \otimes Y$ bir ϕ_w -asalımsı hiper idealdir. Her ϕ_w -asalımsı hiper ideal de ϕ -asalımsı olduğundan ispat tamamlanmış olur.

(2) Kabul edelim ki M bir asalımsı hiper ideal olsun. Öyleyse M ye \mathfrak{R} nin zayıf asalımsı hiper ideali denilebilir. Şimdi M nin asalımsı olmadığı durum incelenir. M asalımsı hiper ideal değilken Teorem 4.5'ten $M^2 \subseteq \phi(M)$ dir ve buradan da $M^2 \subseteq \phi(M) \subseteq \phi_3(M) = M^3$ elde edilir. O halde $M^2 = M^3$ eşitliği mevcuttur. Bu eşitlik M^2 nin idempotent olduğu anlamına gelir. M^2 sonlu üretilmiş bir hiper ideal olduğundan bir $m \in \mathfrak{R}$ için $M^2 = (m)$ yazılabilir. Kabul edelim ki $M^2 = 0$ olsun. Öyleyse $\phi(M) \subseteq M^3 = 0$ dir ve buradan $\phi(M) = 0$ elde edilir. Bu da M nin \mathfrak{R} nin zayıf asalımsı hiper ideal olduğunu ispatlar. Şimdi $M^2 \neq 0$ olduğu durum incelenir. $Y = M^2 = \mathfrak{R} \circ m$ ve $X = \mathfrak{R} \circ (1 \ominus m)$ olacak şekilde alınsın. Bu sayede $Y = M^2$ iken $\mathfrak{R}, X \otimes Y$ olacak şekilde ayrıştırılabilir. Kabul edelim ki $N = M \circ (1 \ominus m)$ olsun. Böylece $N^2 = (M \circ (1 \ominus m))^2 = M^2 \circ (1 \ominus m)^2 = (m) \circ (1 \ominus m) = 0$ iken $M = N \otimes Y$ olur. N nin zayıf asalımsı hiper ideal olduğunu gösterelim. \mathfrak{R} nin I ve J hiper idealleri için $0 \neq I \circ J \subseteq N$ olsun. Buradan $0 \neq (I \otimes Y) \circ (J \otimes Y) \subseteq M - \phi(M)$ olur. $\phi \leq \phi_3$ olduğundan $\phi(M) \subseteq M^3 = (N \otimes Y)^3 = 0 \otimes Y$ elde edilir. Dolayısıyla $(I \otimes Y) \subseteq M$ veya bir $t \in \mathbb{N}$ için $(J \otimes Y)^t \subseteq M$ elde edilir. Yani $I \subseteq N$ veya $J^t \subseteq N$ sonucuna ulaşılır. Bu da demek olur ki N, \mathfrak{R} nin bir zayıf asalımsı hiper idealidir. ■

$\phi_i : L(\mathfrak{R}_i) \longrightarrow L(\mathfrak{R}_i) \cup \{\emptyset\}$ fonksiyonunda i leri $i = 1, 2$ olarak seçelim. $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{R}_2$ ve \mathfrak{R} bileşen bileşene çarpım ve bileşen bileşene hiper toplama ile tanımlanan bir hiper halka olsun. N_i ler \mathfrak{R}_i lerin idealleri olmak üzere \mathfrak{R} nin her ideali $N = N_1 \times N_2$ formunda olsun. ϕ fonksiyonlarının kartezyen çarpımını ifade etmek için ise şimdi tanımlayacağımız notasyonları kullanacağız. $\phi_x : L(\mathfrak{R}) \longrightarrow L(\mathfrak{R}) \cup \{\emptyset\}$ fonksiyonu $\phi_x(N_1 \times N_2) = \varphi_1(N_1) \times \varphi_2(N_2)$ ile tanımlansın.

Önerme 4.6. \mathfrak{R}_1 ve \mathfrak{R}_2 değişmeli Krasner hiper halkalar ve $i = 1, 2$ için $\varphi_i : L(\mathfrak{R}_i) \longrightarrow L(\mathfrak{R}_i) \cup \{\emptyset\}$ fonksiyonları olsun. $\phi_x = \varphi_1 \times \varphi_2$ ve $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{R}_2$ olarak alalım. N nin, \mathfrak{R}

nin ϕ_{\times} -asalımsı hiper ideali olması için gerek ve yeter koşul N nin aşağıdaki formlardan birinde olmasıdır.

(i) N_i, \mathfrak{R}_i nin öz hiper ideali ve $\varphi_i(N_i) = N_i$ olacak şekilde $N = N_1 \times N_2$ formundadır.

(ii) N_1, \mathfrak{R}_1 in bir φ_1 -asalımsı hiper ideali ve $\varphi_2(\mathfrak{R}_2) \neq \mathfrak{R}_2$ iken N_1 bir asalımsı hiper idealdir ve $N = N_1 \times \mathfrak{R}_2$ formundadır.

(iii) N_2, \mathfrak{R}_2 nin bir φ_2 -asalımsı hiper ideali ve $\varphi_1(\mathfrak{R}_1) \neq \mathfrak{R}_1$ iken N_2 bir asalımsı hiper idealdir ve $N = \mathfrak{R}_1 \times N_2$ formundadır.

İspat. İlk olarak bu üç formdan birine sahip olan N hiper idealinin ϕ -asalımsı olduğunu gösterelim.

(i) $N_1 \times N_2 - \phi(N_1 \times N_2) = \emptyset$ olduğu için N nin ϕ_{\times} -asalımsı hiper ideal olduğu kolayca söylenebilir.

(ii) Kabul edelim ki N_1, \mathfrak{R}_1 in bir asalımsı hiper ideali ve $\varphi_2(\mathfrak{R}_2) \neq \mathfrak{R}_2$ olsun. O halde $N = N_1 \times \mathfrak{R}_2$ asalımsıdır, buradan N hiper ideali ϕ_{\times} -asalımsı elde edilir. Kabul edelim ki N_1, \mathfrak{R}_1 in bir φ_1 -asalımsı hiper ideali ve $\varphi_2(\mathfrak{R}_2) = \mathfrak{R}_2$ olsun. $a_1, b_1 \in \mathfrak{R}_1, a_2, b_2 \in \mathfrak{R}_2$ olmak üzere $(a_1, a_2) \circ (b_1, b_2) = (a_1 \circ b_1, a_2 \circ b_2) \in N_1 \times \mathfrak{R}_2 - \varphi_1(N_1) \times \mathfrak{R}_2 = (N_1 - \varphi_1(N_1)) \times \mathfrak{R}_2$ dir. O halde $a_1 \circ b_1 \in N_1 - \varphi_1(N_1)$ dir ve N_1, \mathfrak{R}_1 in bir φ_1 -asalımsı hiper ideali olduğundan $a_1 \in N_1$ veya bir $k \in \mathbb{N}$ için $b_1^k \in N_1$ bulunur. Dolayısıyla $(a_1, a_2) \in N_1 \times \mathfrak{R}_2$ veya $(b_1^k, b_2^k) = (b_1, b_2)^k \in N_1 \times \mathfrak{R}_2$ elde edilir. Buradan $N_1 \times \mathfrak{R}_2, \mathfrak{R}$ nin bir ϕ_{\times} -asalımsı hiper idealidir.

(iii) $\mathfrak{R}_1 \times N_2$ nin ϕ_{\times} -asalımsı hiper ideal olduğunu (ii)'ye benzer şekilde gösterebiliriz.

Şimdi ise $N = N_1 \times N_2$ nin $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{R}_2$ nin bir ϕ_{\times} -asalımsı hiper ideali olduğunu kabul edelim. $a, b \in \mathfrak{R}_1$ için $a \circ b \in N_1 - \varphi_1(N_1)$ olsun. Bu durumda $(a, 0) \circ (b, 0) = (a \circ b, 0) \in N - \phi(N)$ dir. N, \mathfrak{R} nin bir ϕ_{\times} -asalımsı hiper ideali olduğundan $(a, 0) \in N$ veya bir $k \in \mathbb{N}$ için $(b, 0)^k \in N$ dir. Dolayısıyla $a \in N_1$ veya $b^k \in N_1$ elde edilir. Buradan N_1 in, \mathfrak{R}_1 in φ_1 -asalımsı hiper ideali olduğu söylenir. Benzer şekilde N_2 nin \mathfrak{R}_2 nin φ_2 -asalımsı hiper ideali olduğu ispatlanabilir. $N_1 \times N_2 \neq \varphi_1(N_1) \times \varphi_2(N_2)$ olsun. Kabul edelim ki $N_1 \neq \varphi_1(N_1)$ olsun. Bir $b_1 \in N_1 - \varphi_1(N_1)$ ve $b_2 \in N_2$ olacak şekilde elemanlar alalım. $(b_1, 1) \circ (1, b_2) = (b_1, b_2) \in N - \phi(N)$ dir. N nin ϕ_{\times} -asalımsı hiper ideal olduğu bilindiğinden $(b_1, 1) \in N_1 \times N_2$ veya bir $l \in \mathbb{N}$ için $(1, b_2)^l \in N_1 \times N_2$ olur. O halde $N_1 = \mathfrak{R}_1$ veya $N_2 = \mathfrak{R}_2$ olduğu görülür. Kabul edelim ki $N_2 = \mathfrak{R}_2$ olsun. Şimdi $\varphi_2(\mathfrak{R}_2) \neq \mathfrak{R}_2$ iken N_1 in asalımsı hiper ideal olduğu gösterilecektir. $m' \in \mathfrak{R}_2 - \varphi_2(\mathfrak{R}_2)$ olsun. $x, m \in \mathfrak{R}_1$ için $x \circ m \in N_1$ olsun. O halde $(x, 1) \circ (m, m') = (x \circ m, m') \in N - \phi(N)$ elde edilir. N, \mathfrak{R} nin ϕ_{\times} -asalımsı hiper ideali olduğundan bir $s \in \mathbb{N}$ için $(x, 1)^s \in N$

veya $(m, m') \in N$ bulunur. Bu da demektir ki $x^s \in N_1$ veya $m \in N_1$. Buradan N_1 in, \mathfrak{K}_1 in asalımsı hiper ideali olduğu sonucuna ulaşılır. Eğer $N_1 = \mathfrak{K}_1$ ve $\varphi_1(\mathfrak{K}_1) \neq \mathfrak{K}_1$ ise benzer şekilde N_2 nin, \mathfrak{K}_2 nin asalımsı hiper ideali olduğu bulunabilir. ■

4.3 ϕ - δ -Asalımsı Hiper İdealler

Bu bölümde $(\mathfrak{K}, \oplus, \circ)$ bir birimli değişmeli Krasner hiper halka ve N , \mathfrak{K} nin öz hiper ideali olarak alınacaktır. \mathfrak{K} hiper halkasının tüm hiper idealleri $L(\mathfrak{K})$ ile ifade edilecektir. $\phi : L(\mathfrak{K}) \rightarrow L(\mathfrak{K}) \cup \{\emptyset\}$, her $N, M \in L(\mathfrak{K})$ için; $\phi(N) \subseteq N$ ve $N \subseteq M$ iken $\phi(N) \subseteq \phi(M)$ olacak şekilde bir indirgeme fonksiyonu olarak tanımlanmıştır. δ fonksiyonu ise $\delta : L(\mathfrak{K}) \rightarrow L(\mathfrak{K})$ olacak şekilde bir genişleme fonksiyonudur. Genişleme ve indirgeme fonksiyonlarıyla alakalı örnekler aşağıdaki gibi verilebilir:

Örnek 4.7. \mathfrak{K} birimli değişmeli bir Krasner hiper halka olsun. Aşağıdaki δ fonksiyonları her $N \in L(\mathfrak{K})$ için sağlanır.

(i) δ birim fonksiyon ise $\delta_{id}(N) = N$ olur.

(ii) δ radikal operatörü ise $\delta_{rad}(N) = \sqrt{N}$ dir.

(iii) Bir $M \in L(\mathfrak{K})$ için $\delta_{res}(N) = (N : M)$ dir.

(iv) $\delta_{ann}(N) = ann(ann(N))$.

(vi) Bir $M \in L(\mathfrak{K})$ için $\delta_M(N) = N \oplus M$ dir.

Yukarıdaki fonksiyonlar $L(\mathfrak{K})$ üzerinde birer genişleme fonksiyonudur.

Örnek 4.8. \mathfrak{K} birimli değişmeli bir Krasner hiper halka olsun. Aşağıdaki $\phi : L(\mathfrak{K}) \rightarrow L(\mathfrak{K}) \cup \{\emptyset\}$ fonksiyonları her $N \in L(\mathfrak{K})$ için sağlanır.

(i) $\phi_\emptyset(N) = \emptyset$.

(ii) $\phi_0(N) = 0$.

(iii) $\phi_{id}(N) = N$.

(iv) $\phi_2(N) = N^2$.

(v) $\phi_n(N) = N^n$.

(vi) $\phi_w(N) = \bigcap_{i=1}^{\infty} N^i$.

Yukarıdaki fonksiyonlar $L(\mathfrak{K})$ üzerinde birer indirgeme fonksiyonudur. Sıralamanın

$\phi_\emptyset \leq \phi_0 \leq \phi_w \leq \dots \leq \phi_{n+1} \leq \phi_n \leq \phi_{n-1} \leq \dots \leq \phi_2 \leq \phi_{id}$ şeklinde olduğu görülür.

Tanım 4.11. δ hiper ideal genişleme fonksiyonu ve ϕ hiper ideal indirgeme fonksiyonu olsun. N , \mathfrak{R} nin öz hiper ideali olmak üzere her $a, b \in \mathfrak{R}$ için $a \circ b \in N - \phi(N)$ iken $a \in N$ veya $b \in \delta(N)$ oluyorsa N ye ϕ - δ -asalımsı hiper ideal denir.

Tanım 4.12. δ hiper ideal genişleme fonksiyonu, ϕ hiper ideal indirgeme fonksiyonu ve N , \mathfrak{R} nin bir öz hiper ideali olsun. \mathfrak{R} nin her K ve L hiper idealleri için $K \circ L \subseteq N$ ve $K \circ L \not\subseteq \phi(N)$ ise $K \subseteq N$ veya $L \subseteq \delta(N)$ ise N ye güçlü ϕ - δ -asalımsı hiper ideal denir.

Not 4.3. Güçlü ϕ - δ -asalımsı hiper ideallerin ϕ - δ -asalımsı hiper ideal oldukları açıktır.

Örnek 4.9. \mathfrak{R} bir hiper halka ve N , \mathfrak{R} nin öz hiper ideali olmak üzere:

(i) N hiper idealinin asal olması için gerek ve yeter koşul N nin ϕ_\emptyset - δ_{id} -asalımsı hiper ideal olmasıdır [36].

İspat. Kabul edelim ki N bir asal hiper ideal ve her $a, m \in \mathfrak{R}$ için $a \circ m \in N - \phi(N)$ olsun. $\phi_\emptyset(N) = \emptyset$ iken $a \circ m \in N - \emptyset$ olur. N bir asal hiper ideal olduğundan $a \in N$ veya $m \in N = \delta_{id}(N)$ elde edilir. O halde N bir ϕ_\emptyset - δ_{id} -asalımsı hiper idealdir. Tersini için baktığımızda ise N bir ϕ_\emptyset - δ_{id} -asalımsı hiper ideal, $\phi_\emptyset(N) = \emptyset$, $\delta_{id}(N) = N$ ve $a \circ m \in N = N - \phi_\emptyset(N)$ olsun. N bir ϕ_\emptyset - δ_{id} -asalımsı hiper ideal olduğundan $a \in N$ veya $m \in \delta_{id}(N) = N$ dir. O halde N bir asal hiper idealdir. ■

(ii) N hiper idealinin asalımsı olması için gerek ve yeter koşul N nin ϕ_\emptyset - δ_{rad} -asalımsı hiper ideal olmasıdır [36].

İspat. Kabul edelim ki N bir asalımsı hiper ideal ve her $a, m \in \mathfrak{R}$ için $a \circ m \in N - \phi(N)$ olsun. $\phi_\emptyset(N) = \emptyset$ iken $a \circ m \in N - \emptyset$ olur. N bir asalımsı hiper ideal olduğundan $a \in N$ veya $m \in \sqrt{N} = \delta_{rad}(N)$ dir. Bu durumda N bir ϕ_\emptyset - δ_{rad} -asalımsı hiper idealdir. Aksine; N bir ϕ_\emptyset - δ_{rad} -asalımsı hiper ideal, $\phi_\emptyset(N) = \emptyset$ ve $\delta_{rad}(N) = \sqrt{N}$ iken $a \circ m \in N = N - \phi_\emptyset(N)$ olsun. N bir ϕ_\emptyset - δ_{rad} -asalımsı hiper ideal olduğundan $a \in N$ veya $m \in \sqrt{N}$ dir. Bu durumda N bir asalımsı hiper idealdir. ■

(iii) N hiper idealinin ϕ -asal olması için gerek ve yeter koşul N nin ϕ - δ_{id} -asalımsı hiper ideal olmasıdır.

İspat. Kabul edelim ki N bir ϕ -asal hiper ideal ve her $a, m \in \mathfrak{R}$ için $a \circ m \in N - \phi(N)$ olsun. N bir ϕ -asal hiper ideal olduğundan $a \in N$ veya $m \in N = \delta_{id}(N)$ dir. Dolayısıyla N bir ϕ - δ_{id} -asalımsı hiper idealdir. Tersine, N bir ϕ - δ_{id} -asalımsı hiper ideal olsun. $a \circ m \in N - \phi(N)$ için $a \in \delta_{id}(N) = N$ veya $m \in N$ dir. O halde N bir ϕ -asalımsı hiper idealdir. ■

(iv) N hiper idealinin ϕ -asalımsı olması için gerek ve yeter koşul N nin ϕ - δ_{rad} -asalımsı hiper ideal olmasıdır.

İspat. Kabul edelim ki N bir ϕ asalımsı hiper ideal ve her $a, m \in \mathfrak{R}$ için $a \circ m \in N - \phi(N)$ olsun. N bir ϕ -asalımsı hiper ideal olduğundan $a \in N$ veya $m \in \sqrt{N} = \delta_{rad}(N)$ dir. Dolayısıyla N bir ϕ - δ_{rad} -asalımsı hiper idealdir. Tersine, N bir ϕ - δ_{rad} -asalımsı hiper ideal olsun. $a \circ m \in N - \phi(N)$ için $a \in N$ veya $m \in \delta_{rad}(N) = \sqrt{N}$ dir. Öyleyse N bir ϕ -asalımsı hiper idealdir. ■

(v) N hiper idealinin δ -asalımsı olması için gerek ve yeter koşul N nin ϕ_\emptyset - δ -asalımsı hiper ideal olmasıdır [36].

İspat. Kabul edelim ki N bir δ -asalımsı hiper ideal olsun. Her $a, m \in \mathfrak{R}$ için $a \circ m \in N - \phi(N)$ olsun. $\phi_\emptyset(N) = \emptyset$ iken $a \circ m \in N - \emptyset$ olur. N bir δ -asalımsı hiper ideal olduğundan $a \in N$ veya $m \in \delta(N)$ elde edilir. Sonuç olarak N bir ϕ_\emptyset - δ -asalımsı hiper idealdir. Tersine, N bir ϕ_\emptyset - δ -asalımsı hiper ideal olsun. $\phi_\emptyset(N) = \emptyset$ iken $a \circ m \in N - \phi_\emptyset(N)$ için $a \in N$ veya $m \in \delta(N)$ dir. Buradan N bir δ -asalımsı hiper idealdir. ■

(vi) N hiper idealinin zayıf asal olması için gerek ve yeter koşul N nin ϕ_0 - δ_{id} -asalımsı hiper ideal olmasıdır.

İspat. Kabul edelim ki N bir zayıf asal hiper ideal olsun. Her $a, m \in \mathfrak{R}$ için $a \circ m \in N - \phi(N)$ için $\phi_0(N) = 0$ iken $a \circ m \in N - 0$ olur. N bir zayıf asal hiper ideal olduğundan $a \in N$ veya $m \in N = \delta_{id}(N)$ dir. Sonuç olarak N bir ϕ_0 - δ_{id} -asalımsı hiper idealdir. Tersine, kabul edelim ki N bir ϕ_0 - δ_{id} -asalımsı hiper ideal olsun. $\phi_0(N) = 0$ ve $a \circ m \in N - \phi_0(N)$ iken $a \in N$ veya $m \in \delta_{id}(N) = N$ dir. O halde N bir zayıf asal hiper idealdir. ■

(vii) N hiper idealinin hemen hemen asal olması için gerek ve yeter koşul N nin ϕ_2 - δ_{id} -asalımsı hiper ideal olmasıdır.

İspat. Kabul edelim ki N bir hemen hemen asal hiper ideal olsun. Her $a, m \in \mathfrak{R}$ için $a \circ m \in N - \phi_2(N)$ olsun. $\phi_2(N) = N^2$ iken $a \circ m \in N - N^2$ olur. N bir hemen hemen asal hiper ideal olduğundan $a \in N$ veya $m \in N = \delta_{id}(N)$ dir. Bu durumda N bir ϕ_2 - δ_{id} -asalımsı hiper idealdir. Tersini ispatlamak için kabul edelim ki N bir ϕ_2 - δ_{id} -asalımsı hiper ideal olsun. $\phi_2(N) = N^2$ iken $a \circ m \in N - N^2$ için $a \in N$ veya $m \in \delta_{id}(N) = N$ dir. Öyleyse N bir hemen hemen asal hiper idealdir. ■

Şimdi elde ettiğimiz bazı tanımları verelim.

Tanım 4.13. \mathfrak{R} bir hiper halka ve N , \mathfrak{R} nin öz hiper ideali olmak üzere:

- (i) Eğer N bir ϕ_0 - δ -asalımsı hiper ideal ise N zayıf δ -asalımsı hiper idealdir.
- (ii) Eğer N bir ϕ_2 - δ -asalımsı hiper ideal ise N hemen hemen δ -asalımsı hiper idealdir.
- (iii) Eğer N bir ϕ_n - δ -asalımsı hiper ideal ise N n -hemen hemen δ -asalımsı hiper idealdir.
- (iv) Eğer N bir ϕ_w - δ -asalımsı hiper ideal ise N w - δ -asalımsı hiper idealdir.

Kabul edelim ki ϕ ve ψ , $L(\mathfrak{R})$ üzerinde iki indirgeme fonksiyonu olsun. Eğer her $N \in L(\mathfrak{R})$ için $\phi(N) \subseteq \psi(N)$ ise $\phi \leq \psi$ yazabiliriz. Benzer şekilde $L(\mathfrak{R})$ üzerinde tanımlı δ ve γ genişleme fonksiyonları için de her $N \in L(\mathfrak{R})$ için $\delta(N) \subseteq \gamma(N)$ sağlanıyorsa $\delta \leq \gamma$ denir. Bu özellikten faydalanılarak ulaşılan bazı genelleştirmeler önerme olarak verilmiştir.

Önerme 4.7. \mathfrak{R} bir hiper halka ve N , \mathfrak{R} nin öz hiper ideali olmak üzere; ϕ ve ψ , $L(\mathfrak{R})$ üzerinde indirgeme δ ve γ , $L(\mathfrak{R})$ üzerinde genişleme fonksiyonlarıdır.

- (i) Eğer $\phi \leq \psi$ ise her ϕ - δ -asalımsı hiper ideal bir ψ - δ -asalımsı hiper idealdir.
- (ii) Eğer $\delta \leq \gamma$ ise her ϕ - δ -asalımsı hiper ideal bir ϕ - γ -asalımsı hiper idealdir.
- (iii) Her ϕ -asal hiper ideal bir ϕ - δ -asalımsı hiper idealdir.
- (iv) Her δ -asalımsı hiper ideal bir ϕ - δ -asalımsı hiper idealdir.

(v) Kabul edelim ki N , \mathfrak{R} nin öz hiper ideali olsun. N bir zayıf δ -asalımsı $\Rightarrow N$ bir w - δ -asalımsı hiper ideal \Rightarrow her $n \geq 2$ için N bir n -hemen hemen δ -asalımsı $\Rightarrow N$ bir hemen hemen δ -asalımsı hiper idealdir.

İspat. (i), (ii) : İspat aşikar olarak görülebilir.

(iii) : $\delta_{id} \leq \delta$ olduğundan (ii) ve Örnek 4.9 (iii)'ten sonuca ulaşılır.

(iv) : $\phi_\emptyset \leq \phi$ olduğundan (i) ve Örnek 4.9 (iii)'ten sonuca ulaşılır.

(v) : $\phi_0 \leq \phi_w \leq \phi_n \leq \phi_2$ olduğundan ve (i)'den ispat elde edilir. ■

Önerme 4.8. δ hiper ideal genişleme fonksiyonu ve ϕ hiper ideal indirgeme fonksiyonu olsun. $\{M_i : i \in \Delta\}$, \mathfrak{R} nin ϕ - δ -asalımsı hiper ideallerinin artan zincirinin bir ailesi olsun. Bu durumda $M = \bigcup_{i \in \Delta} M_i$ de bir ϕ - δ -asalımsı hiper idealdir.

İspat. Kabul edelim ki $\{M_i : i \in \Delta\}$, \mathfrak{R} nin ϕ - δ -asalımsı hiper ideallerinin artan zincirinin bir ailesi olsun. Kabul edelim ki $a \circ m \in M - \phi(\bigcup_{i \in \Delta} M_i)$ olsun. Buradan bir $i \in \Delta$ için $a \circ m \in M_i - \phi(M_i)$ olduğu söylenebilir. M_i bir ϕ - δ -asalımsı hiper ideal olduğundan $a \in M_i$ veya $m \in \delta(M_i)$ dir. Eğer $a \in M_i$ ise açıkça $a \in \bigcup_{i \in \Delta} M_i$ olduğu görülür. Eğer $m \in \delta(M_i)$ ise buradan da $m \in \delta(\bigcup_{i \in \Delta} M_i)$ olur. $M = \bigcup_{i \in \Delta} M_i$ olduğundan M bir ϕ - δ -asalımsı hiper idealdir. ■

Aşağıdaki teorem ϕ - δ -asalımsı hiper idealleri karakterize eden temel teorem olarak verilmektedir.

Teorem 4.9. N , \mathfrak{R} nin bir öz hiper ideali olsun, aşağıdakiler denktir:

(i) N bir ϕ - δ -asalımsı hiper idealdir.

(ii) Her $a \in \mathfrak{R} - \delta(N)$ için $(N : a) = N \cup (\phi(N) : a)$ dir.

(iii) Her $a \in \mathfrak{R} - \delta(N)$ için $(N : a) = N$ veya $(N : a) = (\phi(N) : a)$ dir.

İspat. (i) \Rightarrow (ii) : Kabul edelim ki N bir ϕ - δ -asalımsı hiper ideal ve $a \in \mathfrak{R} - \delta(N)$ olsun. $N \cup (\phi(N) : a) \subseteq (N : a)$ olduğu aşıkardır. Tersini göstermek için $m \in (N : a)$ olacak şekilde bir eleman alalım. Buradan $a \circ m \in N$ elde edilir. Şimdi $a \circ m \in \phi(N)$ ve $a \circ m \notin \phi(N)$ olduğu durumlar incelenecektir. Eğer $a \circ m \in \phi(N)$ ise $m \in (\phi(N) : a) \subseteq N \cup (\phi(N) : a)$ bulunur. $a \circ m \notin \phi(N)$ olduğu durumda ise $a \circ m \in N - \phi(N)$ ve $a \notin \delta(N)$ olduğundan $m \in N \subseteq N \cup (\phi(N) : a)$ elde edilir. Bu durumda $(N : a) = N \cup (\phi(N) : a)$ dir ve ispat tamamlanmış olur.

(ii) \Rightarrow (iii) : İspat 4.6 (ii) \Rightarrow (iii)'e benzer şekilde gösterilebilir.

(iii) \Rightarrow (i) : $a, b \in \mathfrak{R}$ için $a \circ b \in N - \phi(N)$ ve $a \in \mathfrak{R} - \delta(N)$ olsun. O halde $b \in (N : a)$ ve $b \notin (\phi(N) : a)$ elde ederiz. (iii)'ten $(N : a) = N$ veya $(N : a) = (\phi(N) : a)$ olduğunu biliyoruz. $b \notin (\phi(N) : a)$ bulduğumuz için $b \in (N : a) = N$ elde ederiz ve N bir ϕ - δ -asalımsı hiper idealdir. ■

Sonuç 4.5. N nin \mathfrak{R} nin güçlü ϕ - δ -asalımsı hiper ideali olması için gerek ve yeter koşul \mathfrak{R} nin $M \not\subseteq \delta(N)$ olacak şekilde her M hiper ideali için $(N : M) = N$ veya $(N : M) = (\phi(N) : M)$ olmasıdır.

İspat. (\Rightarrow) Kabul edelim ki N , \mathfrak{R} nin bir güçlü ϕ - δ -asalımsı hiper ideali, $M \not\subseteq \delta(N)$ olacak şekilde \mathfrak{R} nin bir hiper ideali olsun. $M \circ (N : M) \subseteq N$ dir. Eğer $M \circ (N : M) \subseteq \phi(N)$ ise $(N : M) \subseteq (\phi(N) : M) \subseteq (N : M)$ dir. Kabul edelim ki $M \circ (N : M) \not\subseteq \phi(N)$

olsun. Öyleyse N bir güçlü ϕ - δ -asalımsı hiper ideal olduğundan $(N : M) \subseteq N \subseteq (N : M)$ elde edilir.

(\Leftarrow) Kabul edelim ki $K \circ M \subseteq N$ ve $K \circ M \not\subseteq \phi(N)$ ve $M \not\subseteq \delta(N)$ olsun. Varsayıma göre $(N : M) = N$ veya $(N : M) = (\phi(N) : M)$ dir. Ayrıca $K \subseteq (N : M)$ ve $K \not\subseteq (\phi(N) : M)$ olduğundan $K \subseteq (N : M) = N$ elde edilir. Buradan N nin, \mathfrak{R} nin bir güçlü ϕ - δ -asalımsı hiper ideali olduğu ispatlanmış olur. ■

Aşağıdaki teoremle bir ϕ - δ -asalımsı hiper idealden başka bir ϕ - δ -asalımsı hiper ideal üretilmiştir.

Teorem 4.10. (i) Her $a \in \mathfrak{R}$ için $(\phi(T) : a) = \phi(T : a)$ olacak şekilde T , \mathfrak{R} nin bir ϕ - δ -asalımsı hiper ideali olsun. Bu durumda $(T : a)$ da \mathfrak{R} nin bir ϕ - δ -asalımsı hiper idealidir.

(ii) $\delta_{rad}(\phi(T)) \subseteq \delta(T)$ ve $\delta \leq \delta_{rad}$ olacak şekilde hiper ideal genişlemesi olsun. T , \mathfrak{R} nin bir ϕ - δ -asalımsı hiper ideali ise $\delta(T) = \delta_{rad}(T)$ olur.

İspat. (i) Kabul edelim ki her $a \in \mathfrak{R}$ için $(\phi(T) : a) = \phi(T : a)$ olacak şekilde T , \mathfrak{R} nin bir ϕ - δ -asalımsı hiper idealidir. Şimdi $(T : a)$ nin \mathfrak{R} nin bir ϕ - δ -asalımsı hiper ideali olduğu gösterilecektir. Öncelikle $x \circ m \in (T : a) - \phi(T : a)$ olacak şekilde $x, m \in \mathfrak{R}$ elemanları seçilsin. Buradan $x \circ a \circ m \in T$ bulunur. $(\phi(T) : a) = \phi(T : a)$ olarak kabul edildiğinden $x \circ a \circ m \notin \phi(T)$ dir. T bir ϕ - δ -asalımsı hiper ideal olduğundan $x \in \delta(T)$ veya $a \circ m \in T$ bulunur. $\delta(T) \subseteq \delta(T : a)$ olduğundan $x \in \delta(T : a)$ veya $m \in (T : a)$ dir. O halde $(T : a)$, \mathfrak{R} nin bir ϕ - δ -asalımsı hiper idealidir.

(ii) $\delta \leq \delta_{rad}$ olduğundan $\delta(T) \subseteq \sqrt{T} = \delta_{rad}(T)$ bulunur. Tersini ispatlamak için $x \in \sqrt{T}$ alalım. $x^k \in T$ olacak şekilde bir en küçük $k \in \mathbb{N}$ vardır. Yani $x^{k-1} \notin T$ dir. Kabul edelim ki $k = 1$ olsun, o halde $x \in T \subseteq \delta(T)$ dir. $k > 1$ ler için iki durum incelenecektir.

Durum 1: $x \in \delta_{rad}(\phi(T)) = \sqrt{\phi(T)}$ olsun. Buradan $x \in \delta(T)$ bulunur.

Durum 2: $x \notin \sqrt{\phi(T)}$ olsun. O halde $x^k \notin \phi(T)$ olur yani; $x^{k-1} \circ (x \circ \mathfrak{R}) \subseteq T$ ve $x \circ (x^{k-1} \circ \mathfrak{R}) \not\subseteq \phi(T)$ dir. T , \mathfrak{R} nin bir ϕ - δ -asalımsı hiper ideali olduğundan Teorem 4.9'dan, $x \in \delta(T)$ veya $x^{k-1} \circ \mathfrak{R} \subseteq T$ elde edilir. $x^{k-1} \notin T$ olduğundan ikinci durum mümkün değildir.

O halde her iki durumda da $x \in \delta(T)$ dir. Sonuç olarak $\delta(T) = \delta_{rad}(T)$ dir. ■

Şimdi bir ϕ - δ -asalımsı hiper ideal yardımıyla δ -asalımsı hiper idealleri karakterize

edelim.

Teorem 4.11. $\delta(T)T \not\subseteq \phi(T)$ olsun. T, \mathfrak{R} nin güçlü ϕ - δ -asalımsı hiper ideali ise T, \mathfrak{R} nin bir δ -asalımsı hiper idealidir.

İspat. Hiper halkadan alınan a, m elemanları için $a \circ m \in T$ olsun. Eğer $a \circ m \notin \phi(T)$ ise T, \mathfrak{R} nin bir güçlü ϕ - δ -asalımsı hiper ideali olduğundan $a \in \delta(T)$ veya $m \in T$ elde edilir. Şimdi kabul edelim ki $a \circ m \in \phi(T)$ olsun. Eğer $a \circ T \not\subseteq \phi(T)$ ise $a \circ n \notin \phi(T)$ olacak şekilde bir $n \in T$ vardır. Buradan $a \circ (m \oplus n) \subseteq T$ ve $a \circ (m \oplus n) \notin \phi(T)$ elde edilir. Bu da demek olur ki $a \in \delta(T)$ veya $m \oplus n \subseteq T$ dir. Öyleyse $a \in \delta(T)$ veya $m \in T$ bulunur ve ispat tamamlanır. Şimdi kabul edelim ki $a \circ T \subseteq \phi(T)$ olsun. Benzer şekilde $\delta(T) \circ m \subseteq \phi(T)$ olduğu kabul edilirse $\delta(T)T \not\subseteq \phi(T)$ olduğundan; $b \in \delta(T)$ veya $b \circ m' \notin \phi(T)$ olacak şekilde $m' \in T$ elde edilir. Sonuç olarak $(a \oplus b) \circ (m \oplus m') \notin \phi(T)$ dir. T, \mathfrak{R} nin güçlü ϕ - δ -asalımsı hiper ideali olduğundan $a \oplus b \subseteq \delta(T)$ veya $m \oplus m' \subseteq T$ dir. O halde $a \in \delta(T)$ veya $m \in T$ bulunur. Dolayısıyla T, \mathfrak{R} nin bir δ -asalımsı hiper idealidir. ■

Tanım 4.14. (i) $\mu : \mathfrak{R} \longrightarrow S$ bir iyi hiper halka homomorfizması olsun. Her $M \in L(S)$ için $\delta(\mu^{-1}(M)) = \mu^{-1}(\delta(M))$ ise δ ya global genişleme fonksiyonu denir [36].

(ii) $\mu : \mathfrak{R} \longrightarrow S$ bir iyi hiper halka homomorfizması olsun. Her $M \in L(S)$ için $\phi(\mu^{-1}(M)) = \mu^{-1}(\phi(M))$ ise ϕ ye global indirgeme fonksiyonu denir.

Örnek 4.10. ϕ_0, ϕ_{id} hiper ideal indirgeme ve $\delta_{id}, \delta_{rad}$ hiper ideal genişleme fonksiyonları globaldir.

ϕ - δ -asalımsı hiper ideallerin iyi homomorfizma altında görüntü ve ters görüntülerinin de ϕ - δ -asalımsı hiper ideal olduğunu gösterelim.

Teorem 4.12. $\mu, (\mathfrak{R}, \oplus, \circ)$ Krasner hiper halkasından $(S, +, \cdot)$ Krasner hiper halkasına bir iyi hiper halka homomorfizması olsun.

(i) $\mu : \mathfrak{R} \longrightarrow S$ iyi hiper halka homomorfizması, ϕ global indirgeme fonksiyonu ve δ global genişleme fonksiyonu olsun. M, S nin bir ϕ - δ -asalımsı hiper ideali ise $\mu^{-1}(M) = \mathfrak{R}$ veya $\mu^{-1}(M), \mathfrak{R}$ nin bir ϕ - δ -asalımsı hiper idealidir.

(ii) $\mu : \mathfrak{R} \longrightarrow S$ iyi hiper halka epimorfizması, ϕ global indirgeme fonksiyonu, δ global genişleme fonksiyonu ve N, \mathfrak{R} nin $\text{Çek}\mu$ yü kapsayan bir hiper ideali olsun. N nin \mathfrak{R} nin bir ϕ - δ -asalımsı hiper ideali olması için gerek ve yeter koşul $\mu(N)$ nin S nin bir ϕ - δ -asalımsı hiper ideali olmasıdır.

İspat. (i) Kabul edelim ki $\mu : (\mathfrak{R}, \oplus, \circ) \longrightarrow (S, +, \cdot)$ bir hiper halka homomorfizması ve $\mu^{-1}(M) \neq \mathfrak{R}$ olacak şekilde M, S nin bir ϕ - δ -asalımsı hiper ideali olsun. $a, m \in \mathfrak{R}$ için

$a \circ m \in \mu^{-1}(M) - \phi(\mu^{-1}(M))$ olsun. ϕ global olduğundan $\phi(\mu^{-1}(M)) = \mu^{-1}(\phi(M))$ ve buradan $a \circ m \in \mu^{-1}(M) - \mu^{-1}(\phi(M))$ elde edilir. Buradan $\mu(a \circ m) = \mu(a) \cdot \mu(m) \in M - \phi(M)$ bulunur. M, S nin bir ϕ - δ -asalımsı hiper ideali olduğundan $\mu(a) \in \delta(M)$ veya $\mu(m) \in M$ bulunur. $a \in \mu^{-1}(\delta(M)) = \delta(\mu^{-1}(M))$ veya $m \in \mu^{-1}(M)$ bulunur. Buradan $\mu^{-1}(M), \mathfrak{R}$ nin bir ϕ - δ -asalımsı hiper idealidir.

(ii) Kabul edelim ki N, \mathfrak{R} nin $\text{Çek}\mu$ yü kapsayan bir hiper idealiyken $\mu(N), S$ nin bir ϕ - δ -asalımsı hiper ideali olsun. (i) den $\mu^{-1}(\mu(N)) = N, \mathfrak{R}$ nin bir ϕ - δ -asalımsı hiper idealidir. Tersini göstermek için kabul edelim ki N, \mathfrak{R} nin bir ϕ - δ -asalımsı hiper ideali olsun ve $a', m' \in S$ için $a' \cdot m' \in \mu(N) - \phi(\mu(N))$ olsun. μ örten olduğundan $\mu(a) = a'$ ve $\mu(m) = m'$ olacak şekilde $a, m \in \mathfrak{R}$ vardır. $x \in \mathfrak{R}$ için $a' \cdot m' = \mu(a) \cdot \mu(m) = \mu(a \circ m) = \mu(x) \in \mu(N) - \phi(\mu(N))$ dir. Buradan $0 \in \mu(a \circ m) - \mu(x) = \mu(a \circ m \ominus x)$ elde edilir. $\mu(t) = 0_S$ olacak şekilde $t \in a \circ m \ominus x$ mevcuttur. O halde $a \circ m \in t \oplus x \subseteq \text{Çek}\mu + N \subseteq N + N \subseteq N$. ϕ bir global indirgeme fonksiyonu ve $\text{Çek}\mu \subseteq N$ olduğundan, $\phi(\mu(N)) = \mu(\phi(N))$ ve $a \circ m \in N - \phi(N)$ olur. N, \mathfrak{R} nin bir ϕ - δ -asalımsı hiper ideali olduğundan $a \in \delta(N)$ veya $m \in N$ dir. $a' = \mu(a) \in \mu(\delta(N)) = \delta(\mu(N))$ veya $m' = \mu(m) \in \mu(N)$ elde edilir. Sonuç olarak $\mu(N), S$ nin bir ϕ - δ -asalımsı hiper idealidir. ■

Sonuç 4.6. (i) N, \mathfrak{R} nin bir ϕ - δ -asalımsı hiper alt halkası olsun. $M \not\subseteq N$ olmak üzere M, \mathfrak{R} nin bir hiper ideali, δ global genişleme fonksiyonu ve ϕ global indirgeme fonksiyonu iken $N \cap M$ de M nin ϕ - δ -asalımsı hiper idealidir.

(ii) $M \subseteq N$ olmak üzere M ve N, \mathfrak{R} nin iki hiper ideali, δ global genişleme fonksiyonu, ϕ global indirgeme fonksiyonu olsun. N nin \mathfrak{R} nin bir ϕ - δ -asalımsı hiper ideali olması için gerek ve yeter koşul N/M nin \mathfrak{R}/M nin ϕ - δ -asalımsı hiper ideali olmasıdır.

İspat. (i) $a, m \in M$ için $a \circ m \in N \cap M - \phi(N \cap M)$ olsun. $\mu : M \rightarrow \mathfrak{R}$ bir homomorfizması $\mu(a) = a$ ile verilsin. Bu durumda \mathfrak{R} nin her L hiper ideali için $\mu^{-1}(L) = L \cap M$ olur. $\mu^{-1}(N) = N \cap M$ dir. N yerine $\phi(N)$ alırsak $\mu^{-1}(\phi(N)) = \phi(N) \cap M$ elde ederiz. ϕ global olduğundan $\mu^{-1}(\phi(N)) = (\phi(\mu^{-1}(N)))$ dir. Yani $\phi(N \cap M) = \phi(N) \cap M$ dir. O halde $a \circ m \in N \cap M - \phi(N) \cap M$ bulunur. $m \in M$ olduğundan $a \circ m \in N - \phi(N)$ dir. N, \mathfrak{R} nin bir ϕ - δ -asalımsı hiper ideali olduğundan $a \in \delta(N)$ veya $m \in N$ elde edilir. Eğer $m \in N$ ise $m \in M$ olduğundan $m \in N \cap M$ bulunur. Eğer $a \in \delta(N)$ ise $a \in M$ olduğundan $a \in \delta(N) \cap M$ bulunur. δ fonksiyonu da global bir fonksiyon olduğundan $\mu^{-1}(\delta(N)) = \delta(\mu^{-1}(N))$ elde edilir. Yani $\delta(N) \cap M = \delta(N \cap M)$ dir. Bu durumda $a \in \delta(N \cap M)$ bulunur ve ispat tamamlanmış olur.

(ii) $M \subseteq N$ olacak şekilde M ve N, \mathfrak{R} nin iki hiper ideali, ϕ global indirgeme fonksiyonu ve N, \mathfrak{R} nin bir ϕ - δ -asalımsı hiper ideali olsun. Kabul edelim ki $\mu : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}/M$ ye bir homomorfizması $\mu(n) = n \oplus M$ olarak tanımlansın. Bu durumda $\mu(N) = N/M$ olur. $a \oplus M, m \oplus M \in \mathfrak{R}/M$ için $(a \oplus M) \circ (m \oplus M) \in N/M - \phi(N/M)$ olsun.

μ örten olduğundan $\mu(x) = a \oplus M$ ve $\mu(y) = m \oplus M$ olacak şekilde $x, y \in \mathfrak{X}$ vardır. Bir $k \in \mathfrak{X}$ için $(a \oplus M) \circ (m \oplus M) = \mu(x) \circ \mu(y) = \mu(x \circ y) = \mu(k) \in \mu(N) - \phi(\mu(N))$ dir. Buradan $0 \in \mu(x \circ y) - \mu(k) = \mu(x \circ y \ominus k)$ elde edilir. $\mu(t) = 0_s$ olacak şekilde $t \in x \circ y \ominus k$ mevcuttur. O halde $x \circ y \in t \oplus k \subseteq \text{Çek}\mu \oplus N \subseteq N \oplus N \subseteq N$. ϕ bir global indirgeme ve $\text{Çek}\mu \subseteq N$ olduğundan, $\phi(\mu(N)) = \mu(\phi(N))$ ve $x \circ y \in N - \phi(N)$ olur. N, \mathfrak{X} nin bir ϕ - δ -asalımsı hiper ideali olduğundan $x \in \delta(N)$ veya $y \in N$ dir. δ global olduğundan $a \oplus M = \mu(x) \in \mu(\delta(N)) = \delta(\mu(N))$ veya $m \oplus M = \mu(y) \in \mu(N)$ elde edilir. Sonuç olarak μ örten olduğundan $\mu(N) = N/M$ dir ve \mathfrak{X}/M nin ϕ - δ -asalımsı hiper idealidir. Şimdi tersini ispat etmek için N/M nin \mathfrak{X}/M nin bir ϕ - δ -asalımsı hiper ideali olduğunu kabul edelim. Teorem 4.12 (i)'den $\mu(N) = N/M$ nin ters görüntüsü de bir ϕ - δ -asalımsı hiper idealdir ve istenen elde edilir. ■

Teorem 4.13. N, \mathfrak{X} nin bir hiper ideali ve δ bir global genişleme fonksiyonu olsun. N nin, \mathfrak{X} nin bir ϕ - δ -asalımsı hiper ideali olması için gerek ve yeter koşul $N/\phi(N)$ nin, $\mathfrak{X}/\phi(N)$ nin zayıf δ -asalımsı hiper ideali olmasıdır.

İspat. N, \mathfrak{X} nin bir ϕ - δ -asalımsı hiper ideali ve $a \oplus \phi(N), m \oplus \phi(N) \in \mathfrak{X}/\phi(N)$ için $(a \oplus \phi(N)) \circ (m \oplus \phi(N)) \in N/\phi(N) - \{0_{\mathfrak{X}/\phi(N)}\}$ olsun. Buradan $a \circ m \in N - \phi(N)$ dir. N, \mathfrak{X} nin bir ϕ - δ -asalımsı hiper ideali olduğundan $a \in \delta(N)$ veya $m \in N$ elde edilir. δ hiper ideal genişleme fonksiyonunun globalliğinden $\delta(N)/\phi(N) = \delta(N/\phi(N))$ dir. O halde $a \oplus \phi(N) \in \delta(N/\phi(N))$ veya $m \oplus \phi(N) \in N/\phi(N)$ elde edilir. Sonuç olarak $N/\phi(N), \mathfrak{X}/\phi(N)$ nin bir zayıf δ -asalımsı hiper idealidir. Tersini göstermek için $a \circ m \in N - \phi(N)$ olacak şekilde $a, m \in \mathfrak{X}$ seçelim. Buradan $(a \oplus \phi(N)) \circ (m \oplus \phi(N)) \in N/\phi(N) - \{0_{\mathfrak{X}/\phi(N)}\}$ elde edilir. $N/\phi(N), \mathfrak{X}/\phi(N)$ nin bir zayıf δ -asalımsı hiper ideali ve δ global olduğundan $a \oplus \phi(N) \in \delta(N/\phi(N)) = \delta(N)/\phi(N)$ veya $m \oplus \phi(N) \in N/\phi(N)$ bulunur. Yani $a \in \delta(N)$ veya $m \in N$ dir. Sonuç olarak N, \mathfrak{X} nin bir ϕ - δ -asalımsı hiper ideali olur. ■

Önerme 4.9. \mathfrak{X} bir değişmeli Krasner hiper halka olsun. $\phi_s : L(\mathfrak{X}_s) \longrightarrow L(\mathfrak{X}_s) \cup \{\emptyset\}$ bir hiper ideal indirgeme fonksiyonu ve $\delta_s : L(\mathfrak{X}_s) \longrightarrow L(\mathfrak{X}_s)$ hiper ideal genişleme fonksiyonu olmak üzere her $N \in L(\mathfrak{X})$ hiper ideali için $\delta_s(N_s) = \delta(N)_s$ olsun. $T \cap S = \emptyset$ ve $\phi(T)_s \subseteq \phi_s(T_s)$ olmak üzere T, \mathfrak{X} nin bir ϕ - δ -asalımsı hiper ideali olsun. Bu durumda T_s, \mathfrak{X}_s nin bir ϕ_s - δ_s -asalımsı hiper idealidir.

İspat. Kabul edelim ki $a, m \in \mathfrak{X} ; s, t \in S$ için $\frac{a}{s} \circ \frac{m}{t} \in T_s - \phi_s(T_s)$ olsun. Bu durumda $\phi(T)_s \subseteq \phi_s(T_s)$ olduğundan bir $u \in S$ için $u \circ a \circ m \in T - \phi(T)$ bulunur. T bir ϕ - δ -asalımsı hiper ideal olduğundan $a \in \delta(T)$ veya $u \circ m \in T$ bulunur. Eğer $a \in \delta(T)$ ise $\frac{a}{s} \in \delta(T)_s = \delta_s(T_s)$ dir. Eğer $u \circ m \in T$ ise $\frac{m}{t} = \frac{u \circ m}{u \circ t} \in T_s$ dir. İki durumda da T_s, \mathfrak{X}_s nin bir ϕ_s - δ_s -asalımsı hiper ideali olur. ■

\mathfrak{R} bir değişmeli Krasner hiper halka olsun. $i = 1, 2$ için $\varphi_i : L(\mathfrak{R}_i) \longrightarrow L(\mathfrak{R}_i) \cup \{\emptyset\}$ bir hiper ideal indirgeme fonksiyonu ve $\gamma_i : L(\mathfrak{R}_i) \longrightarrow L(\mathfrak{R}_i)$ bir hiper ideal genişleme fonksiyonu olmak üzere $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{R}_2$ olsun. \mathfrak{R} nin her $N = N_1 \times N_2$ formundaki N hiper ideali için N_i ler \mathfrak{R}_i nin hiper idealleridir. Ayrıca $\phi_\times : L(\mathfrak{R}) \longrightarrow L(\mathfrak{R}) \cup \{\emptyset\}$ ve $\delta_\times : L(\mathfrak{R}) \longrightarrow L(\mathfrak{R})$ sırasıyla hiper ideal indirgeme ve genişleme fonksiyonları $\phi_\times(N_1 \times N_2) = \varphi_1(N_1) \times \varphi_2(N_2)$ ve $\delta_\times(N_1 \times N_2) = \gamma_1(N_1) \times \gamma_2(N_2)$ olarak tanımlanmıştır.

Önerme 4.10. Yukarıdaki notasyonları kullanalım. Aşağıdaki her N , $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{R}_2$ nin ϕ_\times - δ_\times -asalımsı hiper idealidir:

- (i) $\varphi_i(N_i) = N_i$ olacak şekilde N_i , \mathfrak{R}_i nin hiper idealiyken $N = N_1 \times N_2$,
- (ii) N_1 , \mathfrak{R}_1 in γ_1 -asalımsı hiper idealiyken $N = N_1 \times \mathfrak{R}_2$,
- (iii) N_2 , \mathfrak{R}_2 nin γ_2 -asalımsı hiper idealiyken $N = \mathfrak{R}_1 \times N_2$,
- (iv) $\varphi_2(\mathfrak{R}_2) = \mathfrak{R}_2$ iken ve N_1 , \mathfrak{R}_1 in φ_1 - γ_1 -asalımsı hiper idealiyken $N = N_1 \times \mathfrak{R}_2$
- (v) $\varphi_1(\mathfrak{R}_1) = \mathfrak{R}_1$ iken ve N_2 , \mathfrak{R}_2 nin φ_2 - γ_2 -asalımsı hiper idealiyken $N = \mathfrak{R}_1 \times N_2$.

İspat. (i) $N_1 \times N_2 - \phi_\times(N_1 \times N_2) = \emptyset$ olduğundan N nin bir ϕ_\times - δ_\times -asalımsı hiper ideal olduğu açıkça ifade edilebilir.

(ii) Kabul edelim ki N_1 , \mathfrak{R}_1 in bir γ_1 -asalımsı hiper ideali olmak üzere $N = N_1 \times \mathfrak{R}_2$ olsun. $N_1 \times \mathfrak{R}_2$ in \mathfrak{R}_1 in δ_\times -asalımsı hiper ideali olduğu görülür. Önerme 4.7'den ise N nin \mathfrak{R} nin bir ϕ_\times - δ_\times -asalımsı hiper ideali olduğu söylenebilir.

(iii) İspat (ii)'nin ispatına benzer şekilde yapılabilir.

(iv) Kabul edelim ki $(a_1, a_2) \circ (m_1, m_2) \in N_1 \times \mathfrak{R}_2 - \phi(N_1 \times \mathfrak{R}_2) = \varphi_1(N_1) \times \varphi_2(\mathfrak{R}_2)$ olsun. Bu durumda $(a_1 \circ m_1, a_2 \circ m_2) \in (N_1 - \varphi_1(N_1)) \times \mathfrak{R}_2$ olarak yazılabilir. N_1 , \mathfrak{R}_1 in bir φ_1 - γ_1 -asalımsı hiper ideali olduğundan $a_1 \in N_1$ veya $m_1 \in \gamma_1(N_1)$ sonucuna ulaşılır. Buradan $(a_1, a_2) \in N_1 \times \mathfrak{R}_2$ veya $(m_1, m_2) \in \gamma_1(N_1) \times \mathfrak{R}_2 = \gamma_1(N_1) \times \gamma_2(\mathfrak{R}_2)$ elde edilir. Bu da demek olur ki N , \mathfrak{R} nin bir ϕ_\times - δ_\times -asalımsı hiper idealidir.

(v) İspat (iv)'ün ispatına benzer şekilde yapılabilir. ■

Tanım 4.15. $\delta : L(\mathfrak{R}) \rightarrow L(\mathfrak{R})$ bir hiper ideal genişleme fonksiyonu olsun. $\delta(N) = \mathfrak{R}$ iken $N = \mathfrak{R}$ oluyorsa δ , $(*)$ -koşulunu sağlar denir.

Örnek 4.11. δ_{rad} ; $(*)$ -koşulunu sağlayan bir hiper ideal genişleme fonksiyonu örneğidir.

Teorem 4.14. Notasyonu Önerme 4.10'daki gibi kabul edelim. γ_i ler $(*)$ -koşulunu sağlasın ve $\varphi_i(N_i) \neq N_i$ olsun. Bu durumda N nin \mathfrak{R} nin bir ϕ_\times - δ_\times -asalımsı hiper ideali olması için gerek ve yeter koşul N nin aşağıdaki formlardan birinde olmasıdır:

(i) N_1, \mathfrak{R}_1 in φ_1 - γ_1 -asalımsı hiper ideali ve $\varphi_2(\mathfrak{R}_2) \neq \mathfrak{R}_2$ iken γ_1 -asalımsı hiper ideali olacak şekilde $N = N_1 \times \mathfrak{R}_2$ olmasıdır.

(ii) N_2, \mathfrak{R}_2 nin φ_2 - γ_2 -asalımsı hiper ideali ve $\varphi_1(\mathfrak{R}_1) \neq \mathfrak{R}_1$ iken γ_2 -asalımsı hiper ideali olacak şekilde $N = \mathfrak{R}_1 \times N_2$ olmasıdır.

İspat. (\Leftarrow) Önerme 4.10'un ispatından doğruluğu görülebilir.

(\Rightarrow) $\varphi_i(N_i) \neq N_i$ iken N nin, \mathfrak{R} nin bir ϕ_x - δ_x -asalımsı hiper ideali olduğunu kabul edelim. $a, m \in \mathfrak{R}_1$ için $a \circ m \in N_1 - \varphi_1(N_1)$ olsun. Buradan $(a, 0) \circ (m, 0) = (a \circ m, 0) \in N - \phi(N)$ dir. N, \mathfrak{R} nin bir ϕ_x - δ_x -asalımsı hiper ideali olduğundan $(a, 0) \in N$ veya $(m, 0) \in \delta(N)$ olur. Bu durumda $a \in N_1$ veya $m \in \gamma_1(N_1)$ elde edilir. Buradan N_1 in, \mathfrak{R}_1 in bir φ_1 - γ_1 -asalımsı hiper ideali olduğu söylenebilir. Benzer şekilde N_2 nin, \mathfrak{R}_2 nin bir φ_2 - γ_2 -asalımsı hiper ideali olduğu kanıtlanabilir. Şimdi $N_1 = \mathfrak{R}_1$ veya $N_2 = \mathfrak{R}_2$ olduğu gösterilmelidir. Kabul edelim ki $N_2 \neq \mathfrak{R}_2$ olsun. O halde $N_1 = \mathfrak{R}_1$ olduğu ispatlanacaktır. Bunun için öncelikle $m_1 \in N_1 - \varphi_1(N_1), m_2 \in \mathfrak{R}_2 - N_2$ elemanları alınsın. O halde $(1, 0) \circ (m_1, m_2) = (m_1, 0) \in N - \phi(N)$ dir. Bu ise $(1, 0) \in \delta(N)$ olduğunu gösterir ve $1 \in \gamma_1(N_1)$ elde edilir. $\gamma_1, (*)$ -koşulunu sağladığından $N_1 = \mathfrak{R}_1$ dir. Benzer şekilde $N_1 \neq \mathfrak{R}_1$ kabul edilerek $N_2 = \mathfrak{R}_2$ olduğu gösterilebilir. Genelliği bozmadan $N_1 \neq \mathfrak{R}_1$ olsun. Şimdi $\varphi_2(\mathfrak{R}_2) \neq \mathfrak{R}_2$ iken N_1 in bir γ_1 -asalımsı hiper ideal olduğu gösterilsin. $m' \in \mathfrak{R}_2 - \varphi_2(\mathfrak{R}_2)$ olsun ve $x, m \in \mathfrak{R}_1$ için $x \circ m \in N_1$ alınsın. Bu durumda $(x, 1) \circ (m, m') = (x \circ m, m') \in N - \phi(N)$ elde edilir. N, \mathfrak{R} nin bir ϕ_x - δ_x -asalımsı hiper ideali olduğundan $(x, 1) \in \delta(N) = \gamma_1(N_1) \times \gamma_2(N_2)$ veya $(m, m') \in N$ elde edilir. Yani $x \in \gamma_1(N_1)$ veya $m \in N_1$ dir. Buradan N_1, \mathfrak{R}_1 in bir γ_1 -asalımsı hiper idealidir. Eğer $\varphi_1(\mathfrak{R}_1) \neq \mathfrak{R}_1$ ve $N_1 = \mathfrak{R}_1$ ise benzer olarak N_2 nin, \mathfrak{R}_2 nin γ_2 -asalımsı hiper ideali olduğu ispatlanabilir. ■

5 SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada bazı cebirsel yapılar üzerinde genelleştirmeler yapılmıştır. Bu genelleştirmeler ϕ - δ -asalımsı cebirsel yapılar olarak sınıflandırılmıştır. Bölüm 3'te klasik cebirdeki modül yapısı üzerinde ϕ - δ -asalımsı alt modüller tanımlanmış ve bu yapıyla ilgili bazı temel karakterizasyonlar verilmiştir. ϕ - δ -asalımsı alt modüllerin homomorfizma altındaki görüntü ve ters görüntüleri, bölüm modülü ve kartezyen çarpımları incelenmiştir. Naser Zamani'nin makalesindeki açık probleme [6] bir cevap verilmiş ve örneklerle desteklenmiştir. Bölüm 4'te Krasner hiper halkalar üzerinde bazı karakterizasyonlar yapılmıştır. Bölüm 4.1'de ϕ -asal hiper idealler tanımlanmış ve çeşitli teoremler verilmiştir. Bölüm 4.2'de ϕ -asalımsı hiper idealler tanımlanmış ve benzer teoremler uygulanmıştır. Bölüm 4.3'te ϕ - δ -asalımsı hiper idealler tanımlanmış ve çeşitli karakterizasyonlar yapılmıştır. Yapılan bu karakterizasyonlar sayesinde bir takım asal ve asalımsı cebirsel yapıların tek bir başlık altında incelenmesi mümkün olmuştur.

-
- [1] D. Zhao, “ δ -primary ideals of commutative rings,” *Kyungpook Mathematical Journal*, vol. 41, pp. 17–22, 2001.
- [2] D. Anderson, E. Smith, “Weakly prime ideals,” *Houston J. Math*, vol. 29, no. 4, pp. 831–840, 2003.
- [3] S. M. Bhatwadekar, P. K. Sharma, “Unique factorization and birth of almost primes,” *Communications in Algebra*[®], vol. 33, no. 1, pp. 43–49, 2005.
- [4] D. Anderson, M. Bataineh, “Generalizations of prime ideals,” *Communications in Algebra*[®], vol. 36, no. 2, pp. 686–696, 2008.
- [5] S. E. Atani, F. Farzalipour, “On weakly prime submodules,” *Tamkang Journal of Mathematics*, vol. 38, no. 3, pp. 247–252, 2007.
- [6] N. Zamani, “ φ -prime submodules,” *Glasgow mathematical journal*, vol. 52, no. 2, pp. 253–259, 2010.
- [7] M. Bataineh, S. Kuhail, “Generalizations of primary ideals and submodules,” *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, vol. 6, no. 17, pp. 811–824, 2011.
- [8] H. A. Khashan, “On almost prime submodules,” *Acta Mathematica Scientia*, vol. 32, no. 2, pp. 645–651, 2012.
- [9] A. Y. Darani, “Generalizations of primary ideals in commutative rings,” *Novi Sad J. Math*, vol. 42, no. 1, pp. 27–35, 2012.
- [10] M. Ebrahimpour, R. Nekooei, “On generalizations of prime ideals,” *Communications in Algebra*, vol. 40, no. 4, pp. 1268–1279, 2012.
- [11] M. Ebrahimpour, R. Nekooei, “On generalizations of prime submodules,” *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, vol. 39, no. 5, pp. 919–939, 2013.
- [12] G. Yeşilot, E. Ş. Sevim, G. Ulucak, E. A. Uğurlu, “Some results on delta–primary submodules of modules,” *Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences*, vol. 36, no. 2, pp. 459–464, 2018.
- [13] A. Jaber, “Properties of ϕ - δ -primary and 2-absorbing δ -primary ideals of commutative rings,” *Asian-European Journal of Mathematics*, vol. 13, no. 01, p. 2050026, 2020.
- [14] F. Marty, “Sur une generalization de la notion de groupe,” in *8th congress Math. Scandinaves*, 1934, pp. 45–49.
- [15] J. Mittas, “Hypergroups canoniques,” *Math. Balkanica*, vol. 2, pp. 165–179, 1972.
- [16] R. Rota, “Sugli iperanelli moltiplicativi,” *Rend. Di Mat., Series*, vol. 7, no. 4, p. 2, 1982.

- [17] R. Rota, “Strongly distributive multiplicative hyperrings,” *Journal of Geometry*, vol. 39, no. 1, pp. 130–138, 1990.
- [18] M. Krasner, “A class of hyperrings and hyperfields,” *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, vol. 6, no. 2, pp. 307–311, 1983.
- [19] H. Bordbar, I. Cristea, “Height of prime hyperideals in krasner hyperrings,” *Filomat*, vol. 31, no. 19, pp. 6153–6163, 2017.
- [20] J. Mittas, “Sur certaines classes de structures hypercompositionnelles,” *Proceedings of the Academy of Athens*, vol. 48, pp. 298–318, 1973.
- [21] C. G. Massouros, “Free and cyclic hypermodules,” *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, vol. 150, no. 1, pp. 153–166, 1988.
- [22] D. Stratigopoulos, “Hyperanneaux, hypercorps, hypermodules, hyperspaces vectoriels et leurs proprietes elementaires,” *CR Acad. Sci., Paris A (269)*, pp. 489–492, 1969.
- [23] M. Marshall, “Real reduced multirings and multifields,” *Journal of Pure and Applied Algebra*, vol. 205, no. 2, pp. 452–468, 2006.
- [24] A. Asokkumar, M. Velrajan, “Characterizations of regular hyperrings,” *Italian Journal of Pure and Applied Mathematics*, vol. 22, p. 115, 2007.
- [25] M. Velrajan, A. Asokkumar, “Note on isomorphism theorems of hyperrings,” *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, vol. 2010, 2010.
- [26] A. Asokkumar, M. Velrajan, “A radical property of hyperrings,” *Italian Journal of Pure and Applied Mathematics*, vol. 29, pp. 301–308, 2012.
- [27] U. Dasgupta, “On prime and primary hyperideals of a multiplicative hyperring,” *Annals of the Alexandru Ioan Cuza University-Mathematics*, vol. 58, no. 1, pp. 19–36, 2012.
- [28] A. Asokkumar, “Derivations in hyperrings and prime hyperrings,” *Iranian Journal of Mathematical Sciences and Informatics*, vol. 8, no. 1, pp. 1–13, 2013.
- [29] P. Corsini, V. Leoreanu, *Applications of hyperstructure theory. the netherlands*, 2003.
- [30] B. Davvaz, “Isomorphism theorems of hyperrings,” *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, vol. 35, no. 3, pp. 321–332, 2004.
- [31] B. Davvaz, V. Leoreanu-Fotea, *Hyperring theory and applications*. International Academic Press, USA, 2007, vol. 347.
- [32] R. Ameri, M. Norouzi, “On commutative hyperrings,” *International Journal of Algebraic Hyperstructures and Its Applications*, vol. 1, pp. 45–58, 2014.
- [33] B. Davvaz, *Semihypergroup theory*. Academic Press, 2016.
- [34] S. Omid, B. Davvaz, J. Zhan, “Some properties of n-hyperideals in commutative hyperrings,” *Journal of Algebraic Hyperstructures and Logical Algebras*, vol. 1, no. 2, pp. 23–30, 2020.
- [35] S. Lekkoksung, “On left, right weakly prime hyperideals on semihypergroups,” *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, vol. 7, no. 24, pp. 1193–1197, 2012.
- [36] E. Ozel Ay, G. Yesilot, D. Sonmez, “ δ -primary hyperideals on commutative hyperrings,” *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, vol. 2017, 2017.

- [37] A. Abumghaseeb, B. A. Ersoy, “On δ -primary hyperideals of commutative semihyperrings,” *Sigma*, vol. 9, no. 1, pp. 63–67, 2018.
- [38] A. C. Golzio, “A brief historical survey on hyperstructures in algebra and logic,” *South American Journal of Logic*, vol. 4, no. 1, pp. 1–29, 2018.
- [39] A. Barnard, “Multiplication modules,” *J. ALGEBRA.*, vol. 71, no. 1, pp. 174–178, 1981.
- [40] K. Hila, K. Naka, B. Davvaz, “On (k, n) -absorbing hyperideals in krasner (m, n) -hyperrings,” *The Quarterly Journal of Mathematics*, vol. 69, no. 3, pp. 1035–1046, 2018.
- [41] J. Jun, “Algebraic geometry over hyperrings,” *Advances in Mathematics*, vol. 323, pp. 142–192, 2018.
- [42] N. Ramaruban, *Commutative hyperalgebra*. University of Cincinnati, 2014.
- [43] C. P. Lu, “Unions of prime submodules,” *Houston J. Math*, vol. 23, no. 2, pp. 203–213, 1997.
- [44] R. Y. Sharp, *Steps in commutative algebra*. Cambridge university press, 2000.
- [45] S. Omid, B. Davvaz, “Hyperideal theory in ordered krasner hyperrings,” *Analele științifice ale Universității "Ovidius" Constanța. Seria Matematică*, vol. 27, no. 1, pp. 193–210, 2019.
- [46] S. E. Atani, F. Farzalipour, “On weakly primary ideals,” *Georgian Math. J.*, vol. 12, no. 3, pp. 423–429, 2005.

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR

Makale

1. B. A. Ersoy, Ü. Tekir, E. Kaya, M. Bolat, S. Koç, “On ϕ - δ -primary submodules,” Iranian Journal of Science and Technology, Transactions A: Science, vol. 46, no. 2, pp. 421–427, 2022
2. H. Guan, E. Kaya, M. Bolat, S. Onar, B. Ali Ersoy, K. Hila, “ ϕ - δ -primary hyperideals in krasner hyperrings.,” Mathematical Problems in Engineering, 2022.

Konferans Bildirisi

1. E. Kaya, M. Bolat, S. Onar, B. Ali Ersoy, “ ϕ - δ -primary hyperideals in krasner hyperrings,” in 3rd International conference on life and engineering sciences book of abstracts icoles 2020, FBU, 2020, p. 36.
2. E. Kaya, M. Bolat, B. Ali Ersoy, Ü. Tekir, S. Koç, “On ϕ - δ -primary submodules,” in 3rd International conference on life and engineering sciences book of abstracts icoles 2020, FBU, 2020, p. 40.