



T.C.  
İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



YÜKSEK LİSANS TEZİ

KÜME DEĞERLİ FONKSİYONLARDA YARI-SÜREKLİLİK  
KAVRAMLARI ÜZERİNE BAZI SONUÇLAR

Havva Nur ÖZTÜRK

Matematik Anabilim Dalı

Matematik Programı

DANIŞMAN  
Dr.Öğr.Üyesi Serkan İLTER

II. DANIŞMAN  
Doç.Dr. Hülya DURU

Haziran, 2023

İSTANBUL

Bu çalışma 08.06.2023 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

### Tez Jürisi

Dr.Öğr.Üyesi Serkan İLTER (Danışman)  
İstanbul Üniversitesi  
Fen Fakültesi

Prof.Dr. Erhan ÇALIŞKAN  
İstanbul Üniversitesi  
Fen Fakültesi

Prof.Dr. Uğur ŞENGÜL  
Marmara Üniversitesi  
Fen Fakültesi



- **İntihal Programı Beyanı**

20.04.2016 tarihli resmi gazetede yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; Bu Lisansüstü teze, İstanbul Üniversitesi'nin aboneliği olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü'nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.

## ÖNSÖZ

Lisans ve yüksek lisans eğitimim boyunca bana kattıkları bilgi birikimi ve üzerimdeki emeklerinden dolayı, iyi bir matematikçi olma konusunda her zaman örnek aldığım saygıdeğer hocalarım Doç.Dr.Hülya DURU ve Dr.Öğr.Üyesi Serkan İLTER'e teşekkür ederim.

Desteğini her zaman hissettiğim, motivasyonumun düştüğü zamanlarda toparlanıp devam etmeme yardım eden babam İlhan ÖZTÜRK ve annem Semra ÖZTÜRK'e teşekkürü borç bilirim. Lisans döneminden bu yana birlikte çalıştığım, yardımlarını esirgemeyen Seyit KOCA'ya, beni yüreklendiren ve hep yanımda olan arkadaşım Deniz ULUSOY'a içtenlikle teşekkür ederim.

Yüksek lisans eğitimim sırasında burs desteği sağlayan Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK)'na teşekkür ederim.

Haziran, 2023

Havva Nur ÖZTÜRK

## İÇİNDEKİLER

	Sayfa No
ÖNSÖZ .....	iv
İÇİNDEKİLER .....	v
SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ .....	vi
ÖZET .....	vii
SUMMARY .....	viii
1. GİRİŞ .....	1
2. GENEL KISIMLAR .....	3
3. MALZEME VE YÖNTEM .....	10
4. BULGULAR .....	11
4.1 YARI-SÜREKLİLİK KAVRAMLARI ARASINDAKİ BAZI İLİŞKİLER .....	11
4.2 KÜME DEĞERLİ FONKSİYONLARIN SÜREKLİ SEÇİMLERİ İLE İLGİLİ BAZI SONUÇLAR .....	40
4.3 BİR DİFERANSİYEL DAHİL ETME PROBLEMİYLE İLGİLİ BAZI SONUÇLAR .....	51
5. TARTIŞMA VE SONUÇ .....	54
KAYNAKLAR .....	55
EKLER .....	57
ÖZGEÇMİŞ .....	59

## SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ

Simgeler	Açıklama
$2^A$	: $A$ kümesinin kuvvet kümesi
$B_\varepsilon(x)$	: $x$ merkezli $\varepsilon$ yarıçaplı açık yuvar
$A^\circ$	: $A$ kümesinin içi
$\bar{A}$	: $A$ kümesinin kapanışı
$A^c$	: $A$ kümesinin tümleyeni
$\mathcal{V}(x)$	: $x$ kümesinin komşuluklar ailesi
$d(x, A)$	: $x$ noktasının $A$ kümesine olan uzaklığı
$Gr(\Gamma)$	: $\Gamma$ fonksiyonunun grafiği
$Dom\Gamma$	: $\Gamma$ fonksiyonunun tanım kümesi
$R(\Gamma)$	: $\Gamma$ fonksiyonunun değer kümesi
$\Gamma^-(A)$	: $A$ kümesinin alt ters görüntüsü
$\Gamma^+(A)$	: $A$ kümesinin üst ters görüntüsü
$\mu(A)$	: $A$ kümesinin Lebesgue ölçüsü
$ \cdot $	: $\mathbb{R}^n$ üzerindeki mutlak değer norm
$\ \cdot\ _\infty$	: Supremum normu
$\mathbb{N}^*$	: $\mathbb{N} \setminus \{0\}$
$L^1[a, b]$	: $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ şeklindeki, Lebesgue integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$M([a, b])$	: $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ şeklinde tanımlı mutlak sürekli fonksiyonlar uzayı
$supp f$	: $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ şeklinde tanımlı fonksiyonun destek kümesi
$h(A, B)$	: $A$ kümesi ile $B$ kümesi arasındaki Hausdorff uzaklığı
$co(A)$	: $A$ kümesinin konveks zarfı

## ÖZET

### YÜKSEK LİSANS TEZİ

#### KÜME DEĞERLİ FONKSİYONLARDA YARI-SÜREKLİLİK KAVRAMLARI ÜZERİNE BAZI SONUÇLAR

Havva Nur ÖZTÜRK

İstanbul Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr.Öğr.Üyesi Serkan İLTER

II. Danışman: Doç.Dr. Hülya DURU

Bu tez çalışmasında, ilk olarak, küme değerli fonksiyonlar teorisine ait temel kavramlar verilerek, bu fonksiyonların üstten yarı-süreklilik, alttan yarı-süreklilik, Hausdorff yarı-süreklilik, Kuratowski yarı-süreklilik, zayıf yarı-süreklilik gibi bilinen yarı-süreklilik kavramları ve bunlar arasındaki bilinen bazı ilişkiler incelenmiştir.

Daha sonra bu yarı-süreklilik kavramlarının, küme değerli fonksiyonların sürekli seçimleri konusunda bilinen bazı uygulamaları ispatlarıyla verilmiştir.

Son olarak, küme değerli fonksiyonların bir uygulama alanı olan bir diferansiyel dahil etme probleminin çözümü üzerine bir sonuç elde edilmiştir.

Haziran 2023, 68 sayfa.

**Anahtar kelimeler:** Küme değerli fonksiyonlar, Yarı süreklilik, Sürekli Seçimler, Diferansiyel Dahil Etme.

## **SUMMARY**

### **M.Sc. THESIS**

#### **SOME RESULTS ON SEMI-CONTINUITY NOTIONS FOR SET-VALUED FUNCTIONS**

**Havva Nur ÖZTÜRK**

**İstanbul University**

**Institute of Graduate Studies in Sciences**

**Department of Mathematics**

**Supervisor: Assis.Prof. Serkan İLTER**

**Co-Supervisor: Assoc.Prof. Hülya DURU**

In this thesis, firstly, by giving the basic concepts of the theory of set-valued functions, the well-known notions of semi-continuity of set-valued functions concepts of these functions such as upper semi-continuity, lower semi-continuity, Hausdorff semi-continuity, Kuratowski semi-continuity, weak semi-continuity and some known relationships between them are examined.

Later, some known applications of these notions on continuous selections of set-valued functions are made by giving their proofs.

Finally, a result is obtained about the solution of the differential inclusion problem, which is an application area of set-valued functions.

June 2023, 68 pages.

**Keywords:** Set Valued Functions, Semicontinuity, Continuous Selections, Differential Inclusions.

## 1. GİRİŞ

Küme değerli fonksiyonlar teorisi: fizik, doğa bilimleri, mühendislik, ekonomi ve psikoloji gibi çeşitli alanlarda matematiksel problemlerin modellenmesi, diferansiyel denklemlerle ilgili problemlerin genelleştirilmesi, optimizasyon, optimal kontrol problemleri, (G. Bouligand'ın, F.H. Clarke'ın, R.T. Rockafellar'ın tanıttığı kavramlarda olduğu gibi) farklı teğet koni, normal koni gibi geometrik yapıların oluşturulması, düzgün olmayan (non-smooth) analiz ve teorileri başta olmak üzere çok yönlü ve çeşitli araştırma alanlarında kullanılan; topoloji, analiz ve geometri gibi matematik konularında önemli bir yere sahiptir.

Bu teorinin gelişiminde rol oynamış öncü matematikçiler olarak P. Painlevé, F. Hausdorff, G. Bouligand, K. Kuratowski gösterilebilir. Bugün kullanılan anlamdaki küme dizilerinin yakınsaklığını ilk olarak P. Painlevé tanımlamış ([36]), daha sonra sırasıyla F. Hausdorff ve K. Kuratowski bu konuya katkıda bulunup kitaplarına da dahil ederek yayılmasını desteklemişlerdir ([17],[22]). Metrik uzaylar üzerinde klasik (tek değerli) fonksiyonların süreklilik ve ona eşdeğer olan dizisel süreklilik kavramlarının, küme değerli fonksiyonlara taşınması düşünüldüğünde; artık eşdeğer olmayan iki farklı kavram söz konusu olmuş. Bu durum, 1930'lu yıllarda K. Kuratowski ve G. Bouligand tarafından alttan yarı süreklilik ve üstten yarı süreklilik şeklinde iki farklı yarı-süreklilik kavramının ortaya konmasına imkan tanımıştır. F. Hausdorff'un 1914 yılında yayınlanan kitabında tanıttığı, bir metrik uzayda iki kümenin birbirlerine olan uzaklığının ölçülmesi ilkesine dayanan, daha önce D. Pompeiu'nin bu konudaki katkılarından dolayı günümüzde Pompeiu-Hausdorff uzaklığı olarak bilinen kavram, 1930'lu yıllarda G. Bouligand'ın küme değerli fonksiyonlar için ortaya koyduğu geometrik kavramlar ve yine K. Kuratowski'nin ve G. Bouligand'ın süreklilik ve türev kavramları ile topolojik ve geometrik anlamda teorinin gelişimi hızlanmıştır ([22],[36]).

1940'lı yıllarda küme değerli fonksiyonlar için sabit nokta teoremleri ([20]), 1950'li yıllarda ise küme değerli fonksiyonların sürekli seçimleri üzerine sonuçlar ortaya konmuştur ([25],[26],[27]). 1960'lı yıllarda optimal kontrol problemleri üzerine yapılan çalışmalar ve sağ tarafı süreksiz, diferansiyellenebilir denklemlerin tanıtılmasıyla diferansiyel denklemin bir genelleştirmesi niteliğinde, küme değerli fonksiyon ile belirlenen diferansiyel dahil etme teorisi gelişmeye başlamış, böylece optimal kontrol, fizik, ekonomi, psikoloji gibi

konulara ait birçok sürecin matematiksel modelinde doğrudan küme değerli fonksiyonlar kullanılır hale gelmiştir ([12],[13],[14]). Yine bu yıllarda küme değerli fonksiyonlar için integral kavramı ortaya konmuştur ([3]). 1960'lı -1980'li yıllarda küme değerli fonksiyonların ölçülebilirliği ve ölçülebilir seçimleri üzerine sonuçlar verilmiş ([4],[7]) daha sonra bu sonuçlar süreksiz diferansiyel dahil etmeler ile ilgili uygulama alanları, konveks analiz teorisi başta olmak üzere geniş bir alanda kullanılmıştır ([33],[14],[21]). Yine bu yıllarda F.H. Clarke'ın genelleştirilmiş gradient, genelleştirilmiş jakobiyen kavramları, R.T. Rockafellar'ın konveks analiz üzerine çalışmalarındaki kavramlar ve bunlarla ilgili teğet koni, normal koni ve benzeri geometrik yeni kavramlar başta olmak üzere düzgün olmayan analiz konularında yeni gelişmeler ortaya çıkmış ve küme değerli fonksiyonların farklı bir uygulama alanı şeklinde düşünülebilen bu teoriye ilgiyi arttırmıştır ([8],[33]). Küme değerli fonksiyonlar teorisinde, çok geniş bir uygulama yelpazesine sahip olan Ekeland'ın Varyasyonel Prensipli yine bu yıllarda ortaya konmuştur ([8],[33]). Bunlar ve daha sonra yapılan çalışmalarda etkili sonuçlar [1], [35], [5], [31], [8] ve [33] kaynaklarında derlenmiştir.

Bu tez çalışması, genel kısımlar ve bulgular şeklinde iki ana bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde, küme dizilerinin yakınsaklığı üzerine bazı kavramlar, bir fonksiyonun destek kümesi tanımı, topolojik uzaylara ait bazı sonuçlar, Lusin Teoreminin bir özel şekli, mutlak sürekli fonksiyonların tanımı, küme değerli fonksiyonlar için temel kavramlar, üstten yarı-süreklilik, alttan yarı-süreklilik, Hausdorff yarı-süreklilik, Kuratowski yarı-süreklilik, zayıf yarı-süreklilik gibi bilinen bazı süreklilik kavramları verilmiştir. Sonraki bölümde, yarı-süreklilik kavramları arasındaki bilinen bazı ilişkiler verilmiş; bunların küme değerli fonksiyonların sürekli seçimleri konusunda bilinen bazı uygulamaları incelenmiştir. Ek olarak, küme değerli fonksiyonların bir uygulama alanı olan diferansiyel dahil etmelerle ilgili bir Cauchy probleminin çözümü üzerine bir sonuç verilmiştir.

Lipschitz sürekli küme değerli fonksiyonun konveks ve kompakt değerli olmadığı durumda, birinci mertebeden diferansiyel dahil etme ile ilgili bir Cauchy probleminin, sürekli diferansiyellenebilir global çözümünün varlığı ile ilgili sonuçları [19] çalışmada vermiştik. Bu tez çalışmada verilen sonuç, Lusin teoreminin bir uygulaması şeklinde ve problemin mutlak sürekli çözümü ile sürekli diferansiyellenebilir yaklaşımlarla belirlenebilecek çözümü arasında bir ilişki niteliğindedir.

## 2. GENEL KISIMLAR

**Tanım 2.0.1.**  $(X, d)$  metrik uzay ve  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $X$  içinde küme dizisi olsun. Aşağıdaki üst ve alt limit değerlerine sırasıyla  $(A_n)$  küme dizisinin Painlevé - Kuratowski üst limiti ve Painlevé - Kuratowski alt limiti denir.

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n &= \{x \in X \mid \liminf_{n \rightarrow \infty} d(x, A_n) = 0\} \\ &= \left\{ \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x \in X \mid (x_{n_k}) \subseteq X, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad x_{n_k} \in A_{n_k} \right\}, \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n &= \{x \in X \mid \lim_{n \rightarrow \infty} d(x, A_n) = 0\} \\ &= \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in X \mid (x_n) \subseteq X, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n \in A_n \right\}. \end{aligned}$$

**Tanım 2.0.2.**  $(X, d)$  metrik uzay olsun. Herhangi  $A, B \subseteq X$  kümeleri için  $h^*(A, B)$  ve  $h^*(B, A)$  ile aşağıdaki değerleri gösterelim;

$$\begin{aligned} h^*(A, B) &= \sup\{d(a, B) \mid a \in A\}, \\ h^*(B, A) &= \sup\{d(b, A) \mid b \in B\}. \end{aligned}$$

Bu durumda

$$h : 2^X \times 2^X \longrightarrow [0, \infty], \quad h(A, B) = \max\{h^*(A, B), h^*(B, A)\}$$

şeklinde tanımlanan  $h$  fonksiyonuna Hausdorff uzaklık fonksiyonu,  $h(A, B)$  değerine  $A$  kümesi ile  $B$  kümesi arasındaki Hausdorff uzaklığı denir. Dikkat edilirse aşağıdaki özellikler sağlanır [18]. Her  $A, B, C \subseteq X$  için,

- (i)  $h(A, B) = h(B, A)$
- (ii)  $h(A, B) = 0 \Leftrightarrow \bar{A} = \bar{B}$
- (iii)  $h(A, B) \leq h(A, C) + h(B, C)$

**Tanım 2.0.3.**  $X$  boştan farklı herhangi bir küme ve  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$  olsun.

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad \exists B \in \mathcal{B} \quad B \subseteq A$$

koşulu sağlanıyorsa  $\mathcal{B}$  topluluğu  $\mathcal{A}$  topluluğunun bir incelmesi denir.

**Tanım 2.0.4.**  $(X, \tau)$  herhangi bir topolojik uzay,  $I$  boştan farklı bir indis kümesi ve  $\{U_\alpha : \alpha \in I\}$ ,  $X$  in bir açık örtülüğü olsun.

$$\forall x \in X \quad \exists V \in \mathcal{V}(x) \quad \exists \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\} \subseteq I \quad V \cap U_{\alpha_i} \neq \emptyset \quad i = 1, 2, \dots, k \quad k \in \mathbb{N}$$

koşulunu sağlayan  $\{U_\alpha\}$  topluluğuna yerel sonludur denir.

**Önerme 2.0.5.**  $(X, \tau)$  herhangi bir topolojik uzay ve  $\{U_\alpha : \alpha \in I\}$  topluluğu yerel sonlu olsun. Bu durumda her  $\alpha \in I$  için  $V_\alpha \subseteq U_\alpha$  koşulunu sağlayan kümelerin oluşturduğu

$$\{V_\alpha : \alpha \in I\}$$

topluluğu yerel sonludur [28].

**Tanım 2.0.6.**  $(X, \tau)$  herhangi bir topolojik uzay olsun.  $X$  in her açık örtülüğü yerel sonlu ve açık bir inceliğe sahipse  $X$  uzayına parakompakt uzay denir.

**Önerme 2.0.7.**  $X$  parakompakt Hausdorff uzayı normaldir [28].

**Önerme 2.0.8.** Her metrik uzay parakompakttır [28].

**Tanım 2.0.9.**  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay ve  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  sürekli bir fonksiyon olsun.

$$\text{supp } f := \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}$$

kümesine  $f$  fonksiyonunun destek kümesi denir.

**Tanım 2.0.10.**  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay ve  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$  bir açık örtülüğü olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan  $\{\phi_\alpha : \alpha \in I\}$  sürekli fonksiyonlar ailesine  $X$  üzerinde birimin bir parçalanışı denir.

(i)  $\sum_{\alpha \in I} \phi_\alpha = 1$

(ii)  $\{\text{supp } \phi_\alpha : \alpha \in I\}$  kümesi  $X$  in yerel sonlu bir örtülüğüdür.

Dikkat edilecek olursa her  $\alpha \in I$  için  $\text{supp } \phi_\alpha \subseteq U_\alpha$  sağlanırsa  $\{\phi_\alpha\}$  ailesi  $\{U_\alpha\}$  örtülüğünün bir incelmesidir.

Şimdi ölçülebilir fonksiyonların süreklilik özellikleri ile ilgili Lusin Teoremini [34] çalışmasında Teorem 2.24'de ifade edildiği şekliyle özel olarak (Lebesgue) ölçülebilir  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  fonksiyonu için verelim.

**Önerme 2.0.11.**  $\varphi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$  ölçülebilir fonksiyon ve  $\varepsilon$  pozitif sabiti verilsin. Bu durumda aşağıdaki koşulları sağlayan sürekli bir  $\psi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$  fonksiyonu vardır.

$$(i) \quad \mu(\{s : \varphi(s) \neq \psi(s)\}) < \varepsilon ,$$

$$(ii) \quad \sup\{|\psi(s)| : s \in [c, d]\} \leq \sup\{|\varphi(s)| : s \in [c, d]\} .$$

**Tanım 2.0.12.**  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyon olsun. Eğer her  $\varepsilon > 0$  sayısı için bir  $\delta > 0$  sayısı varsa ve her sonlu sayıda alt aralık  $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n) \subseteq [a, b]$  için,

$$\sum_{k=1}^n |b_k - a_k| < \delta \Rightarrow \sum_{k=1}^n |\varphi(b_k) - \varphi(a_k)| < \varepsilon$$

gerektirmesi doğru oluyorsa  $\varphi$  fonksiyonuna  $[a, b]$  aralığı üzerinde mutlak süreklidir denir.

$M([a, b]) = M([a, b], \mathbb{R})$  ile  $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  şeklinde tanımlı bütün mutlak sürekli fonksiyonlar uzayı gösterilecektir.

**Önerme 2.0.13.**  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  fonksiyonu verilsin. Aşağıdaki iddialar eşdeğerdir.

(a)  $F$  fonksiyonu mutlak süreklidir.

(b) Aşağıdaki özelliği sağlayacak şekilde bir  $g \in L^1[a, b]$  fonksiyonu vardır

$$F(x) = F(a) + \int_a^x g(\lambda) d\lambda, \quad \forall x \in [a, b].$$

**Tanım 2.0.14.**  $S$  ve  $T$  herhangi iki topolojik uzay olsun. Her  $s \in S$  noktasını  $T$  nin bir alt kümesine götüren  $\Gamma$  fonksiyonuna küme değerli fonksiyon denir ve  $\Gamma : S \rightarrow 2^T$  şeklinde gösterilir.  $\Gamma$  fonksiyonunun tanım kümesi, değer kümesi ve grafiği sırasıyla aşağıdaki gibi

tanımlanır:

$$Dom(\Gamma) = \{s \in S : \Gamma(s) \neq \emptyset\},$$

$$R(\Gamma) = \bigcup_{s \in Dom(\Gamma)} \Gamma(s),$$

$$Gr(\Gamma) = \{(s, t) : t \in \Gamma(s)\}.$$

**Tanım 2.0.15.**  $\Gamma, \Omega : S \rightarrow 2^T$  olsun.

(i)  $\bar{\Gamma} : S \rightarrow 2^T$ , her  $s \in S$  için  $\bar{\Gamma}(s) = \overline{\Gamma(s)}$  şeklinde tanımlanan fonksiyona  $\Gamma$ 'nin kapanış fonksiyonu denir.

(ii)  $\Gamma \cup \Omega : S \rightarrow 2^T$ , her  $s \in S$  için  $\Gamma \cup \Omega(s) = \Gamma(s) \cup \Omega(s)$  şeklinde tanımlanan fonksiyona  $\Gamma$  ve  $\Omega$  fonksiyonlarının birleşim fonksiyonu denir.

(iii)  $\Gamma \cap \Omega : S \rightarrow 2^T$ , her  $s \in S$  için  $\Gamma \cap \Omega(s) = \Gamma(s) \cap \Omega(s)$  şeklinde tanımlanan fonksiyona  $\Gamma$  ve  $\Omega$  fonksiyonlarının kesişim fonksiyonu denir.

**Tanım 2.0.16.**  $\Gamma : S \rightarrow 2^T$  olsun. Bir  $V \subseteq T$  kümesi için  $\Gamma$  alt ters kümesi ve  $\Gamma$  üst ters kümesi sırası ile  $\Gamma^-(V)$ ,  $\Gamma^+(V)$  şeklinde gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\Gamma^-(V) = \{s \in S : \Gamma(s) \cap V \neq \emptyset\},$$

$$\Gamma^+(V) = \{s \in S : \Gamma(s) \subseteq V\}.$$

**Önerme 2.0.17.**  $\Gamma : S \rightarrow 2^T$ ,  $V, U \subseteq T$  ve  $I$  boştan farklı bir indis kümesi olsun. Aşağıdaki özellikler gerçekleşir ([18]).

$$\Gamma^-(V \cup U) = \Gamma^-(V) \cup \Gamma^-(U),$$

$$\Gamma^-(V \cap U) \subseteq \Gamma^-(V) \cap \Gamma^-(U),$$

$$\Gamma^+(V \cap U) = \Gamma^+(V) \cap \Gamma^+(U),$$

$$\Gamma^+(V) \cup \Gamma^+(U) \subseteq \Gamma^+(V \cup U),$$

$$\Gamma^-(T \setminus V) = S \setminus \Gamma^+(V),$$

$$\Gamma^+(T \setminus V) = S \setminus \Gamma^-(V),$$

$$\left(\bigcup_{\alpha \in I} \Gamma_{\alpha}\right)^-(V) = \bigcup_{\alpha \in I} (\Gamma_{\alpha})^-(V),$$

$$\left(\bigcup_{\alpha \in I} \Gamma_{\alpha}\right)^+(V) = \bigcup_{\alpha \in I} (\Gamma_{\alpha})^+(V),$$

$$\Gamma^+\left(\bigcup_{\alpha \in I} V_{\alpha}\right) \supseteq \bigcup_{\alpha \in I} \Gamma^+(V_{\alpha}),$$

$$\Gamma^-\left(\bigcup_{\alpha \in I} V_{\alpha}\right) = \bigcup_{\alpha \in I} \Gamma^-(V_{\alpha}),$$

$$\Gamma^+\left(\bigcap_{\alpha \in I} V_{\alpha}\right) = \bigcap_{\alpha \in I} \Gamma^+(V_{\alpha}),$$

$$\Gamma^-\left(\bigcap_{\alpha \in I} V_{\alpha}\right) \subseteq \bigcap_{\alpha \in I} \Gamma^-(V_{\alpha}).$$

**Tanım 2.0.18.**  $\Gamma : S \rightarrow 2^T$  olsun. Her  $s \in S$  için  $\Gamma(s)$  kümesi  $T$  içinde kapalı (konveks) ise  $\Gamma$  fonksiyonuna kapalı değerli (konveks değerli) fonksiyon denir.

**Tanım 2.0.19.**  $S, T$  topolojik uzaylar ve  $\Gamma : S \rightarrow 2^T$  olsun.  $Gr\Gamma$  kümesi  $S \times T$  üzerinde, çarpım topolojisine göre açık (kapalı) bir küme ise  $\Gamma$  fonksiyonuna açık (kapalı) fonksiyon denir.

**Tanım 2.0.20.**  $\Gamma : S \rightarrow 2^T$  olsun. Her  $s \in S$  için en az bir  $U \in \mathcal{V}(s)$  komşuluğu var ve  $\overline{\Gamma(U)}$  kümesi  $T$  içinde kompakt oluyorsa  $\Gamma$  fonksiyonuna yerel kompakt denir.

**Tanım 2.0.21.**  $S, T$  topolojik uzaylar,  $\Gamma : S \rightarrow 2^T$  ve  $s_0 \in S$  olsun.

(i)  $s_0 \in \Gamma^+(V)$  koşulunu sağlayan her  $V \subseteq T$  açık kümesi için  $s_0 \in \Gamma^+(V)^{\circ}$  oluyorsa  $\Gamma$  fonksiyonuna  $s_0$  noktasında üstten yarı-süreklidir denir.

(ii)  $s_0 \in \Gamma^-(V)$  koşulunu sağlayan her  $V \subseteq T$  açık kümesi için  $s_0 \in \Gamma^-(V)^{\circ}$  oluyorsa  $\Gamma$  fonksiyonuna  $s_0$  noktasında alttan yarı-süreklidir denir.

$\Gamma : S \rightarrow 2^T$  fonksiyonu hem üstten yarı-süreklidir hem de alttan yarı-süreklidir ise  $\Gamma$  fonksiyonuna süreklidir denir.

**Tanım 2.0.22.**  $S, T$  metrik uzaylar,  $\Gamma : S \rightarrow 2^T$  ve  $s \in S$  olsun. Bir  $\varepsilon$  pozitif sayısı için  $\Gamma(B_{\varepsilon}(s))$  kümesi  $T$  içinde sınırlı ise  $\Gamma$  fonksiyonuna  $s$  noktasında yerel sınırlıdır denir.

**Tanım 2.0.23.**  $S$  ve  $T$  iki metrik uzay,  $\Gamma : S \rightarrow 2^T$  ve  $s_0 \in S$  olsun.

(i) Aşağıdaki koşulu sağlayan  $\Gamma$  fonksiyonuna  $s_0$  noktasında Hausdorff üstten yarı-süreklidir denir,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall s \in B_{\delta}(s_0) \quad h^*(\Gamma(s), \Gamma(s_0)) < \varepsilon.$$

(ii) Aşağıdaki koşulu sağlayan  $\Gamma$  fonksiyonuna  $s_0$  noktasında Hausdorff alttan yarı-sürekli denir,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall s \in B_\delta(s_0) \quad h^*(\Gamma(s_0), \Gamma(s)) < \varepsilon.$$

$\Gamma : S \rightarrow 2^T$  fonksiyonu hem Hausdorff üstten yarı-sürekli hem de Hausdorff alttan yarı-sürekli ise  $\Gamma$  fonksiyonuna Hausdorff sürekli denir.

**Tanım 2.0.24.**  $S$  ve  $T$  iki metrik uzay,  $\Gamma : S \rightarrow 2^T$  ve  $s_0 \in S$  olsun.

$$\limsup_{s \rightarrow s_0} \Gamma(s) = \{t \in T \mid \exists s_n \rightarrow s_0, \exists t_n \rightarrow t, \forall n \in \mathbb{N}, t_n \in \Gamma(s_n)\}$$

değerine  $\Gamma(s_0)$ 'in Painlevé - Kuratowski üst limiti,

$$\liminf_{s \rightarrow s_0} \Gamma(s) = \{t \in T \mid \forall s_n \rightarrow s_0, \exists t_n \rightarrow t, \forall n \in \mathbb{N}, t_n \in \Gamma(s_n)\}$$

değerine  $\Gamma(s_0)$ 'in Painlevé- Kuratowski alt limiti denir ([32]).

**Tanım 2.0.25.**  $S$  ve  $T$  iki metrik uzay,  $\Gamma : S \rightarrow 2^T$  ve  $s_0 \in S$  olsun.

(i)  $\limsup_{s \rightarrow s_0} \Gamma(s) \subseteq \Gamma(s_0)$  koşulu sağlanıyorsa  $\Gamma$  fonksiyonuna  $s_0$  noktasında Kuratowski üstten yarı-sürekli denir.

(ii)  $\liminf_{s \rightarrow s_0} \Gamma(s) \supseteq \Gamma(s_0)$  koşulu sağlanıyorsa  $\Gamma$  fonksiyonuna  $s_0$  noktasında Kuratowski alttan yarı-sürekli denir.

**Tanım 2.0.26.**  $(S, \tau)$  bir topolojik uzay,  $(T, d)$  bir metrik uzay,  $\Gamma : S \rightarrow 2^T$  ve  $s_0 \in S$  olsun. Bu durumda,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall V \in \mathcal{V}(s_0) \quad \exists x \in V \quad \exists U \in \mathcal{V}(s_0) \quad \forall t \in \Gamma(x) \quad U \subseteq \Gamma^-(B_\varepsilon(t))$$

koşulu sağlanıyorsa  $\Gamma$  fonksiyonuna  $s_0$  noktasında zayıf Hausdorff alttan yarı-sürekli denir.

**Tanım 2.0.27.**  $(S, \tau)$  bir topolojik uzay,  $(T, d)$  bir metrik uzay,  $\Gamma : S \rightarrow 2^T$  ve  $s_0 \in S$  olsun. Her  $\varepsilon > 0$  sayısı için  $s_0 \in (\Gamma^-(B_\varepsilon))^\circ$  olacak şekilde bir  $B_\varepsilon \subseteq T$  açık yuvarı varsa  $\Gamma$  fonksiyonuna  $s_0$  noktasında zayıf alttan yarı-sürekli denir.

**Tanım 2.0.28.**  $(S, \tau)$  bir topolojik uzay,  $(T, d)$  bir metrik uzay,  $\Gamma : S \rightarrow 2^T$  ve  $s_0 \in S$  olsun.

Bu durumda,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall V \in \mathcal{V}(s_0) \quad \exists x \in V \quad \forall t \in \Gamma(x) \quad s_0 \in (\Gamma^-(B_\varepsilon(t)))^\circ$$

koşulu sağlanıyorsa  $\Gamma$  fonksiyonuna  $s_0$  noktasında kuazi alttan yarı-süreklidir denir.

**Tanım 2.0.29.**  $I \subseteq \mathbb{R}$  sonlu bir aralık,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  ve  $\alpha \in ]0, 1]$  olsun. Aşağıdaki koşulu sağlayan  $f$  fonksiyonuna  $I$  üzerinde  $\alpha$  - Hölder süreklidir denir,

$$[f]_\alpha := \sup \left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}, \quad x, y \in I, \quad x \neq y \right\} < +\infty. \quad (2.1)$$

Dikkat edilecek olursa  $\alpha = 1$  için  $f$  fonksiyonunun  $\alpha$ -Hölder süreklilik tanımı bu fonksiyonun Lipschitz süreklilik tanımını verir. Bütün  $\alpha$  - Hölder sürekli fonksiyonların kümesi  $C^\alpha(I)$  şeklinde gösterilir.

Dikkat edilecek olursa (2.1) koşulu aşağıdaki koşula eşdeğerdir,

$$\exists K > 0 \quad \forall x, y \in I \quad |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|^\alpha.$$

Dikkat edilecek olursa  $[\cdot]_\alpha : C^\alpha(I)$  üzerinde bir yarı norm belirtirken  $|\cdot|_{C^\alpha} := |\cdot|_\infty + [\cdot]_\alpha$  ise  $C^\alpha(I)$  üzerinde bir norm belirtir.

**Önerme 2.0.30.**  $\alpha_0 \in ]0, 1]$  olsun. Bu durumda

$$\forall \alpha_0 \leq \alpha, \quad C^\alpha(I) \subseteq C^{\alpha_0}(I) \subseteq C(I)$$

sağlanır ([10]).

**Tanım 2.0.31.**  $\alpha \in ]0, 1]$  ve  $\Gamma : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$  olsun. Bu durumda,

$$\exists H > 0 \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n \quad \Gamma(x_1) \subseteq \Gamma(x_2) + H|x_1 - x_2|^\alpha B$$

koşulu sağlanıyorsa  $\Gamma$  fonksiyonu  $\alpha$ -Hölder süreklidir denir.

**Tanım 2.0.32.**  $\Gamma : S \rightarrow 2^T$  olsun. Her  $s \in S$  için  $\gamma(s) \in \Gamma(s)$  koşulunu sağlayan sürekli bir  $\gamma : S \rightarrow T$  fonksiyonuna  $\Gamma$  fonksiyonunun sürekli seçimi denir.

### 3. MALZEME VE YÖNTEM

Bu tez çalışmasında, küme dizilerinin yakınsaklığı üzerine bazı özelliklerden, topolojik uzaylara ait bazı temel sonuçlardan, küme değerli fonksiyonlar için bilinen bazı yarı-süreklilik kavramlarından, ölçülebilir fonksiyonların süreklilik özellikleri ile ilgili ünlü Lusin Teoreminden, diferansiyel denklem teorisinde Picard'ın Yöntemi olarak bilinen yaklaşım yönteminden yararlanılmıştır.



## 4. BULGULAR

Bu bölümde, küme değerli fonksiyonların yarı sürekliliği ile çalışılacaktır. Öncelikle yarı süreklilik kavramları arasındaki bilinen ilişkiler incelenecek ve örnekler verilecektir. Daha sonra bu kavramların, küme değerli fonksiyonların sürekli seçimleri konusunda bilinen bazı uygulamalarına değinilecektir. Son olarak küme değerli fonksiyonların bir uygulama alanı olan diferansiyel dahil etmelerle ilgili bir Cauchy probleminin çözümü üzerine bir sonuç verilecektir.

Aksi söylenmedikçe  $S$  ve  $T$  iki metrik uzay,  $\Gamma : S \rightarrow 2^T$  boştan farklı değerler alan küme değerli bir fonksiyon olacaktır.

### 4.1 YARI-SÜREKLİLİK KAVRAMLARI ARASINDAKİ BAZI İLİŞKİLER

**Önerme 4.1.1.**  $\Gamma : S \rightarrow 2^T$  fonksiyonu için aşağıdakiler birbirine eşdeğerdir ([18]).

- (i)  $\Gamma$  üstten yarı süreklidir.
- (ii) Her  $V \subseteq T$  açık kümesi için  $\Gamma^+(V)$  kümesi  $S$  içinde açıktır.
- (iii) Her  $G \subseteq T$  kapalı kümesi için  $\Gamma^-(G)$  kümesi  $S$  içinde kapalıdır.

**İspat.** (i)  $\implies$  (ii): Herhangi bir  $V \subseteq T$  açık kümesi için  $s \in \Gamma^+(V)$  alalım. Hipotezden  $s \in \Gamma^+(V)^\circ$  olur. Dolayısıyla  $\Gamma^+(V)$  açıktır.

(ii)  $\implies$  (iii): Herhangi bir  $G \subseteq T$  kapalı kümesi alalım. Böylece  $T \setminus G$  açık olur. Hipotezden  $\Gamma^+(G)$  kümesi açıktır. Önerme 2.0.17 kullanılarak  $S \setminus \Gamma^-(G)$  kümesinin açık olduğu elde edilir. Dolayısıyla  $\Gamma^-(G)$  kümesi kapalı olur.

(iii)  $\implies$  (i):  $\Gamma$  fonksiyonunun  $s_0 \in S$  noktasında üstten yarı sürekli olmadığını kabul edelim. Bu durumda  $\Gamma(s_0) \subseteq V$  ve  $s_0 \notin \Gamma^+(V)$  olacak şekilde bir  $V \subseteq T$  açık kümesi vardır. Böylece,  $T \setminus V$  kümesi kapalıdır ve Önerme 2.0.17'den  $\Gamma^+(V)$  kümesinin açık olur. Bu ise kabulümüz ile çelişir.

**Önerme 4.1.2.**  $\Gamma : S \rightarrow 2^T$  olsun. Aşağıdakiler birbirine eşdeğerdir ([18]).

(i)  $\Gamma$  fonksiyonu alttan yarı süreklidir.

(ii) Her  $V \subseteq T$  açık kümesi için  $\Gamma^-(V)$  kümesi açıktır.

(iii) Her  $G \subseteq T$  kapalı kümesi için  $\Gamma^+(G)$  kümesi kapalıdır.

**İspat.** (i)  $\implies$  (ii): Tanımdan gerçekleştiği açıktır.

(ii)  $\implies$  (iii): Herhangi bir  $G \subseteq T$  kapalı kümesini alalım. Bu durumda  $T \setminus G$  kümesi açık olur. Böylece Önerme 2.0.17'den  $S \setminus \Gamma^+(G)$  kümesinin açık olduğu elde edilir. Dolayısıyla  $\Gamma^+(G)$  kümesi kapalıdır.

(iii)  $\implies$  (i):  $\Gamma$  fonksiyonunun  $s_0 \in S$  noktasında alttan yarı sürekli olmadığını kabul edelim. Bu durumda  $\Gamma(s_0) \cap V \neq \emptyset$  ve  $s_0 \notin \Gamma^-(V)^\circ$  olacak şekilde  $V \subseteq T$  açık kümesi vardır. Böylece  $T \setminus V$  kümesi kapalıdır. Şimdi Önerme 2.0.17 kullanılırsa  $\Gamma^-(V)$  kümesinin açık olduğu elde edilir. Bu ise  $s_0 \notin \Gamma^-(V)^\circ$  olması ile çelişir.

**Örnek 4.1.3.**  $S = T = [0, 1]$   $G : S \rightarrow 2^T$  olmak üzere,

$$G(x) = \begin{cases} [0, \frac{1}{2}], & x \in [0, \frac{1}{3}[ \\ [0, 1], & x \in [\frac{1}{3}, 1] \end{cases}$$

fonksiyonu üstten yarı-süreklidir fakat  $x = \frac{1}{3}$  noktasında alttan yarı-sürekliliği değildir.

$V = ]\frac{1}{2}, 1[$  kümesini alalım. Bu durumda  $V \cap G(\frac{1}{3}) \neq \emptyset$  olur. Öte yandan her  $U \in \mathcal{V}(\frac{1}{3})$  için  $G(x) = [0, \frac{1}{2}]$  olacak şekilde  $x \in U$  vardır. Dolayısıyla  $V \cap G(x) = \emptyset$  olacağından  $\frac{1}{3} \notin G^-(V)^\circ$  elde edilir.

**Örnek 4.1.4.**  $a < c < b$ ,  $a, b, c \in \mathbb{R}$  ve  $S = [a, b]$ ,  $T = [a, c]$ ,  $\Gamma : S \rightarrow 2^T$  olmak üzere,

$$\Gamma(x) = \begin{cases} [a, c], & x \neq c \\ \{a\}, & x = c \end{cases}$$

fonksiyonu alttan yarı sürekli fakat  $x = c$  noktasında üstten yarı-sürekliliği değildir.  $V = [a, c[$  kümesini alalım.  $\Gamma(c) \subseteq V$  kapsamı sağlanır. Öte yandan her  $U \in \mathcal{V}(c)$  için  $\Gamma(x) = [a, c]$

olacak şekilde  $x \in U$  vardır. Dolayısıyla  $\Gamma(x) \not\subseteq V$  olacağından  $c \notin \Gamma^+(V)^\circ$  elde edilir.

**Önerme 4.1.5.**  $\Gamma : S \rightarrow 2^T$  ve  $s_0 \in S$  olsun. Aşağıdakiler gerçektir ([18]).

(i)  $\Gamma$  fonksiyonu  $s_0$  noktasında üstten yarı-sürekliliği için gerek ve yeter koşul  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s_0$  ve  $\Gamma(s_0) \subseteq V$  özelliklerini sağlayan her  $(s_n) \subseteq S$  dizisi ve her  $V \subseteq T$  açık kümesi için aşağıdaki koşulun sağlanmasıdır:

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \Gamma(s_n) \subseteq V.$$

(ii)  $\Gamma$  fonksiyonunun  $s_0$  noktasında alttan yarı-sürekliliği için gerek ve yeter koşul  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s_0$  ve  $\Gamma(s_0) \cap V \neq \emptyset$  olacak şekilde her  $(s_n) \subseteq S$  dizisi ve her  $V \subseteq T$  açık kümesi için aşağıdaki koşulun sağlanmasıdır:

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \Gamma(s_n) \cap V \neq \emptyset.$$

**İspat. (i):**  $\Gamma$  fonksiyonu  $s_0$  noktasında üstten yarı-sürekliliği olsun.  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s_0$  ve  $\Gamma(s_0) \subseteq V$  özelliğini sağlayan herhangi bir  $(s_n)$  dizisi ve herhangi bir  $V \subseteq T$  açık kümesi alalım. Hipotezden  $s_0 \in \Gamma^+(V)^\circ$  olur.  $\Gamma^+(V)^\circ \in \mathcal{V}(s_0)$  ve  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s_0$  kullanıldığında

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \Gamma(s_n) \subseteq \Gamma^+(V)^\circ$$

elde edilir.  $\Gamma^+(V)^\circ \subseteq \Gamma^+(V)$  sağlandığından her  $n \geq N$  için  $\Gamma(s_n) \subseteq \Gamma^+(V)$  olur. Böylece istenen elde edilir.

Tersine  $\Gamma$  fonksiyonunun  $s_0$  noktasında üstten yarı-sürekliliği olmadığını kabul edelim. Bu durumda  $\Gamma(s_0) \subseteq V$  ve  $s_0 \notin (\Gamma^+(V))^\circ$  olacak şekilde  $V \subseteq T$  açık kümesi vardır. Buradan

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad B_{\frac{1}{n}}(s_0) \in \mathcal{V}(s_0)$$

göz önüne alınırsa  $B_{\frac{1}{n}}(s_0) \not\subseteq \Gamma^+(V)$  elde edilir. Dolayısıyla

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in B_{\frac{1}{n}}(s_0) \quad x_n \notin \Gamma^+(V)$$

bulunur. Yani  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$  sonucuna ulaşırız ve hipotez gereği,

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad s_n \in \Gamma^+(V)$$

çelişkisi elde edilir.

**(ii):**  $\Gamma$  fonksiyonu  $s_0$  noktasında alttan yarı-sürekli olsun.  $\Gamma(s_0) \cap V \neq \emptyset$  ve  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s_0$  olacak şekilde  $(s_n)$  dizisi ve  $V \subseteq Y$  açık kümesi alalım. Hipotezden  $s_0 \in \Gamma^-(V)^\circ$  elde ederiz.  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s_0$  ve  $\Gamma^-(V)^\circ \in \mathcal{V}(s_0)$  olduğu kullanılırsa,

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \Gamma(s_n) \in \Gamma^-(V)^\circ$$

elde edilir.  $\Gamma^-(V)^\circ \subseteq \Gamma^-(V)$  kapsaması her zaman sağlandığından istenen elde edilir.

Tersine  $\Gamma$  fonksiyonunun  $s_0$  noktasında alttan yarı-sürekli olmadığını kabul edelim. Bu durumda  $V \subseteq T$  açık kümesini  $\Gamma(s_0) \cap V \neq \emptyset$ ,  $s_0 \notin (\Gamma^-(V))^\circ$  olacak şekilde ve  $(s_n)$  dizisini de her  $n \in \mathbb{N}$  için  $s_n = s_0$  şeklinde alınırsa hipotezden  $s_0 \in (\Gamma^-(V))^\circ$  çelişkisi elde edilir.

**Önerme 4.1.6.**  $\Gamma : S \rightarrow 2^T$  ve  $s_0 \in S$  olsun.  $\Gamma$  fonksiyonunun  $s_0$  noktasında alttan yarı-sürekli olması için gerek ve yeter koşul  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s_0$  olan herhangi bir  $(s_n) \subseteq S$  dizisi ve herhangi bir  $t_0 \in \Gamma(s_0)$  için aşağıdaki koşulları sağlayan  $(t_n) \subseteq T$  dizisinin var olmasıdır ([18]):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t_0, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad t_n \in \Gamma(s_n).$$

Başka bir ifadeyle,  $\Gamma$  fonksiyonu  $s_0$  noktasında alttan yarı-sürekli olması için gerek ve yeter koşul  $\Gamma(s_0) \subseteq \liminf_{n \rightarrow \infty} \Gamma(s_n)$  kapsamasının sağlanmasıdır.

**İspat.**  $\Gamma$  fonksiyonu  $s_0$  noktasında alttan yarı-sürekli olsun.  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s_0$  olan herhangi bir  $(s_n)$  dizisi ve herhangi bir noktası  $t_0 \in \Gamma(s_0)$  elemanı alalım. Her  $\varepsilon > 0$  için  $\Gamma(s_0) \cap B_\varepsilon(t_0) \neq \emptyset$  olduğundan Önerme 4.1.5 göz önüne alındığında

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \Gamma(s_n) \cap B_\varepsilon(t_0) \neq \emptyset$$

elde edilir. Dolayısıyla her  $n \geq N$  için  $s_n \in \Gamma(s_n) \cap B_\varepsilon(t_0)$  noktası vardır. Buradan istenen elde edilir.

Tersine  $\Gamma$  fonksiyonu  $s_0 \in X$  noktasında alttan yarı-sürekli olmadığını kabul edelim. Bu durumda  $\Gamma(s_0) \cap V \neq \emptyset$  ve  $s_0 \notin \Gamma^-(V)^\circ$  olacak şekilde  $V \subseteq T$  açık kümesi vardır.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad B_{\frac{1}{n}}(x_0) \in \mathcal{V}(x_0)$$

ve  $s_0 \notin \Gamma^-(V)^\circ$  olduğu kullanılırsa  $B_{\frac{1}{n}}(x_0) \not\subseteq \Gamma^-(V)$  elde edilir. Dolayısıyla her  $n \in \mathbb{N}^*$  için  $s_n \in B_{\frac{1}{n}}(s_0) \cap (\Gamma^-(V))^c$  şeklinde oluşturulan  $(s_n)$  dizisi için  $\lim s_n = s_0$  olur.  $\Gamma(s_0) \cap V \neq \emptyset$  olduğundan  $t_0 \in \Gamma(s_0) \cap V$  gerçekleşir ve hipotezimizden her  $n \in \mathbb{N}$  için  $t_n \in \Gamma(s_n)$  ve  $y_n \rightarrow t_0$  olacak şekilde  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi olduğu elde edilir.  $t_0 \in V$ ,  $V \in \tau_{d_T}$  ve  $y_n \rightarrow t_0$  özelliklerinden

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad t_n \in V$$

sağlanır. Bu ise kabulümüz olan her  $n \in \mathbb{N}$  için  $s_n \notin \Gamma^-(V)$  ile çelişir.

**Önerme 4.1.7.**  $\Gamma : S \rightarrow 2^T$  olsun. Aşağıdakiler gerçekleşir ([18]).

- (i)  $\Gamma$  fonksiyonunun alttan yarı-sürekli olması için gerek ve yeter koşul  $\bar{\Gamma}$  fonksiyonunun alttan yarı-sürekli olmasıdır.
- (ii)  $\Gamma$  fonksiyonu üstten yarı-sürekli ise  $\bar{\Gamma}$  fonksiyonu üstten yarı-sürekli dir.

**İspat. (i):**  $\Gamma$  fonksiyonu alttan yarı-sürekli olsun ve  $\bar{\Gamma}$  fonksiyonunun alttan yarı-sürekli olduğunu gösterelim. Herhangi bir  $s \in S$  noktası,  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$  ve  $\bar{\Gamma}(x) \cap V \neq \emptyset$  özelliklerini sağlayan herhangi bir  $(s_n)$  dizisi ve herhangi bir  $V \subseteq T$  açık kümesi alalım.  $\Gamma$  fonksiyonu alttan yarı-sürekli olduğundan

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \Gamma(s_n) \cap V \neq \emptyset$$

gerçeklenir.  $\Gamma(s_n) \subseteq \bar{\Gamma}(s_n)$  kapsamı sağlandığından  $\bar{\Gamma}(s_n) \cap V \neq \emptyset$  olur. Dolayısıyla  $\bar{\Gamma}$  fonksiyonu alttan yarı-sürekli olur.

Tersine  $\bar{\Gamma}$  fonksiyonu alttan yarı-sürekli olsun ve  $\Gamma$  fonksiyonunun alttan yarı-sürekli olduğunu gösterelim. Herhangi bir  $s \in S$  noktası,  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$  olacak şekilde  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq S$  dizisi ve  $\Gamma(s) \cap V \neq \emptyset$  olacak şekilde  $V \subseteq T$  açık kümesi alalım.  $\bar{\Gamma}$  fonksiyonu alttan yarı-sürekli olduğundan

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \bar{\Gamma}(s_n) \cap V \neq \emptyset$$

gerçeklenir. Şimdi  $\Gamma(s_n) \cap V = \emptyset$  olduğunu kabul edelim. Bu durumda  $\Gamma(s_n) \subseteq V^c$  olur. O halde

$$\bar{\Gamma}(s_n) \subseteq \bar{V^c} = V^c$$

elde ederiz. Bu ise  $\bar{\Gamma}$  kümesinin alttan-yarı sürekliliği ile çelişir.

**(ii):** Herhangi bir  $V \subseteq T$  açık kümesi alalım ve  $(\bar{\Gamma})^+(V)$  kümesinin  $S$  içinde açık olduğunu gösterelim.  $s \in (\bar{\Gamma})^+(V)$  alalım. Bu durumda  $\bar{\Gamma}(s) \subseteq V$  dir.  $T$  metrik uzayı normal olduğundan

$$\exists V_1 \in \tau_{dT} \quad \bar{\Gamma}(s) \subseteq V_1 \subseteq \bar{V}_1 \subseteq V \quad (4.1)$$

gerçeklenir. Dolayısıyla  $\Gamma(s) \subseteq \bar{\Gamma}(s) \subseteq V_1$  olur.  $V_1 \in \tau_{dT}$  ve hipotez kullanılırsa

$$\exists U \in \mathcal{V}(s) \quad \forall y \in U \quad \Gamma(y) \subseteq V_1 \quad (4.2)$$

elde edilir. (4.2) deki kapsamada her iki tarafından kapanış alırsak  $\bar{\Gamma}(y) \subseteq \bar{V}_1$  bulunur. Böylece (4.1) kapsaması da dikkate alındığında  $\bar{\Gamma}(y) \subseteq V$  elde edilir. Dolayısıyla istenen gösterilmiş olur.

**Not 4.1.8.** Önerme 4.7 - (ii) ifadesinin tersinin her zaman doğru olması gerekmez.

**Örnek 4.1.9.**  $\Gamma : \mathbb{R} \rightarrow 2^{\mathbb{R}}$ ,  $\Gamma(x) = ]x - 1, x + 1[$  şeklinde tanımlı fonksiyonu için  $\bar{\Gamma}(x) = [x - 1, x + 1]$  fonksiyonu üstten yarı-süreklidir fakat  $\Gamma$  fonksiyonu  $x = 0$  noktasında üstten yarı-sürekliliği değildir.

**Önerme 4.1.10.**  $(S, d_1), (T, d_2), (W, d_3)$  üç metrik uzay,  $\Gamma_1 : S \rightarrow 2^T$  ve  $\Gamma_2 : T \rightarrow 2^W$  olsun. Aşağıdakiler gerçekleşir ([18]).

**(i)**  $\Gamma_1$  ve  $\Gamma_2$  fonksiyonları üstten yarı-sürekliliği ise  $\Gamma_2 \circ \Gamma_1$  bileşke fonksiyonu üstten yarı-sürekliliği.

**(ii)**  $\Gamma_1$  ve  $\Gamma_2$  fonksiyonu alttan yarı-sürekliliği ise  $\Gamma_2 \circ \Gamma_1$  bileşke fonksiyonu alttan yarı-sürekliliği.

**İspat. (i):** Herhangi bir  $V \subseteq W$  açık kümesi alalım ve  $(\Gamma_2 \circ \Gamma_1)^+(V)$  kümesinin açık olduğunu gösterelim. Bunun için öncelikle  $(\Gamma_2 \circ \Gamma_1)^+(V) = \Gamma_1^+(\Gamma_2^+(V))$  eşitliğinin sağlandığını gösterelim.  $x \in (\Gamma_2 \circ \Gamma_1)^+(V)$  alalım. Bu durumda  $\Gamma_2 \circ \Gamma_1(x) \subseteq V$  olur. Bileşke fonksiyon

tanımından  $x \in \Gamma_1^+(\Gamma_2^+(V))$  elde edilir. Şimdi  $x \in \Gamma_1^+(\Gamma_2^+(V))$  alalım. Bu durumda  $\Gamma_1(x) \subseteq \Gamma_2^+(V)$  ve buradan  $\Gamma_2(\Gamma_1(x)) \subseteq V$  elde edilir. Dolayısıyla  $x \in (\Gamma_2 \circ \Gamma_1)^+(V)$  bulunur. Hipotezden  $\Gamma_2$  üstten yarı-sürekli olduğu için  $\Gamma_2^+(V)$  kümesi açık olur ve  $\Gamma_1$  üstten yarı-sürekli olduğu için  $\Gamma_1^+(\Gamma_2^+(V))$  açık olur. Dolayısıyla bileşke fonksiyonu üstten yarı-sürekli dir.

**(ii):** Herhangi bir  $V \subseteq W$  açık kümesi alalım ve  $(\Gamma_2 \circ \Gamma_1)^-(V)$  kümesinin açık olduğunu gösterelim.

Bunun için öncelikle  $(\Gamma_2 \circ \Gamma_1)^-(V) = \Gamma_1^-(\Gamma_2^-(V))$  eşitliğini gösterelim.  $x \in (\Gamma_2 \circ \Gamma_1)^-(V)$  alalım. Bu durumda  $(\Gamma_2 \circ \Gamma_1)(x) \cap V \neq \emptyset$  olur. Bileşke fonksiyon tanımından  $x \in \Gamma_1^-(\Gamma_2^-(V))$  elde edilir.

Tersine  $x \in \Gamma_1^-(\Gamma_2^-(V))$  alalım. Bu durumda  $\Gamma_1(x) \cap \Gamma_2^-(V) \neq \emptyset$  bulunur. Buradan  $\Gamma_2(y) \cap V \neq \emptyset$  olacak şekilde  $y \in \Gamma_1$  elemanı vardır. Böylece  $\Gamma_2(\Gamma_1(x)) \cap V \neq \emptyset$  elde edilir. Dolayısıyla  $x \in (\Gamma_2 \circ \Gamma_1)^-(V)$  bulunur. Hipotez gereği  $\Gamma_2$  alttan yarı-sürekli olduğundan  $\Gamma_2^-(V)$  açık olur ve  $\Gamma_1$  alttan yarı-sürekli olduğundan  $\Gamma_1^-(\Gamma_2^-(V))$  açık olur. Dolayısıyla bileşke fonksiyonu alttan yarı-sürekli dir.

**Önerme 4.1.11.**  $\Gamma_1, \Gamma_2 : S \rightarrow 2^T$  olsun.  $\Gamma_1$  ve  $\Gamma_2$  fonksiyonları alttan yarı-sürekli (üstten yarı-sürekli) ise  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$  fonksiyonu alttan yarı-sürekli dir (üstten yarı-sürekli dir) ([18]).

**İspat.** Alttan yarı-süreklilik için ispatlayalım. Herhangi bir  $V \subseteq T$  açık kümesi alalım ve  $(\Gamma_1 \cup \Gamma_2)^-(V)$  kümesinin açık olduğunu gösterelim.  $s \in (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)^-(V)$  alalım. Bu durumda  $(\Gamma_1 \cup \Gamma_2)(s) \cap V \neq \emptyset$  dir. Yani  $\Gamma_1(s) \cap V \neq \emptyset$  ve  $\Gamma_2(s) \cap V \neq \emptyset$  olur. Bu ise  $s \in \Gamma_1^-(V)$  ve  $\Gamma_2^-(V)$  olduğunu söyler.

Buradan  $(\Gamma_1 \cup \Gamma_2)^-(V) = \Gamma_1^-(V) \cup \Gamma_2^-(V)$  sonucu çıkar. Hipotezden  $\Gamma_1^-(V)$  ve  $\Gamma_2^-(V)$  kümeleri açık olduğundan  $\Gamma_1^-(V) \cup \Gamma_2^-(V)$  kümesi açık bulunur. Böylece birleşim fonksiyonu alttan yarı-sürekli olur.

Şimdi üstten yarı-sürekliliğin ispatı için herhangi bir  $V \subseteq T$  açık kümesi alalım ve  $(\Gamma_1 \cup \Gamma_2)^+(V)$  kümesinin açık olduğunu gösterelim.  $s \in (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)^+(V)$  alalım. Bu durumda  $(\Gamma_1 \cup \Gamma_2)(s) \subseteq V$  elde edilir. Birleşim fonksiyonunun tanımından  $\Gamma_1(s) \cup \Gamma_2(s) \subseteq V$  ve buradan  $\Gamma_1(s) \subseteq V, \Gamma_2(s) \subseteq V$  sonucu çıkar. Dolayısıyla  $s \in \Gamma_1^+(V) \cup \Gamma_2^+(V)$  elde edilir. Yani  $(\Gamma_1 \cup \Gamma_2)^+(V) = \Gamma_1^+(V) \cup \Gamma_2^+(V)$  olur. Hipotezden  $\Gamma_1^+(V), \Gamma_2^+(V)$  kümeleri açık olduğundan  $\Gamma_1^+(V) \cup \Gamma_2^+(V)$  kümesi açık bulunur.

**Önerme 4.1.12.**  $I$  boştan farklı bir indis kümesi olmak üzere,  $\alpha \in I$  için  $\Gamma_\alpha : S \rightarrow 2^T$  fonksiyonu verilsin. Her  $\alpha \in I$  için  $\Gamma_\alpha$  fonksiyonu alttan yarı-sürekli ise

$$\bigcup_{\alpha \in I} \Gamma_\alpha : S \rightarrow 2^T$$

fonksiyonu alttan yarı-sürekli dir ([18]).

**İspat.** Herhangi bir  $V \subseteq T$  açık kümesi alalım ve  $(\bigcup_{\alpha \in I} \Gamma_\alpha)^-(V)$  kümesinin açık olduğunu gösterelim. Hipotezden her  $\alpha$  için  $(\Gamma_\alpha)^-(V)$  açık olduğundan  $\bigcup_{\alpha \in I} (\Gamma_\alpha)^-(V)$  kümesi açık olur ve Önerme 2.0.2'den  $(\bigcup_{\alpha \in I} \Gamma_\alpha)^-(V)$  açık olur. Böylece istenen sonuç elde edilir.

**Not:** Yukarıdaki önermede alttan yarı-süreklilik koşulu yerine üstten yarı-süreklilik koşulu alındığında önermenin sonucunun her zaman doğru olması gerekmez.

**Örnek 4.1.13.**  $S = T = [0, 1]$ ,  $\Gamma_n : S \rightarrow 2^T$ ,  $\Gamma_n(s) = \{s^2\}$  olsun. Her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\Gamma_n$  fonksiyonu üstten yarı süreklidir fakat  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n$  fonksiyonu  $s = \frac{1}{2}$  noktasında üstten yarı-sürekli değildir.

**Önerme 4.1.14.**  $\Gamma_1, \Gamma_2 : S \rightarrow 2^T$  olsun.  $\Gamma_1$  ve  $\Gamma_2$  fonksiyonları kapalı değerli ve üstten yarı-sürekli ( $\Gamma_1$  alttan yarı-sürekli ve  $\Gamma_2$  açık) ise  $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$  fonksiyonu üstten yarı-sürekli dir (alttan yarı-sürekli dir) ([18]).

**İspat.** Üstten yarı-süreklilik için ispatlayalım. Herhangi bir  $V \subseteq T$  açık kümesi için  $(\Gamma_1 \cap \Gamma_2)^+(V)$  kümesinin açık olduğunu göstermek yeterli olacaktır.  $s_0 \in (\Gamma_1 \cap \Gamma_2)^+(V)$  alalım. Bu durumda,

$$\Gamma_1(s_0) \cap \Gamma_2(s_0) \subseteq V$$

olur. Yani

$$\Gamma_1(s_0) \cap \Gamma_2(s_0) \cap V^c = \emptyset$$

sağlanır.  $T$  metrik uzayı normal ve  $\Gamma_1(s_0), \Gamma_2(s_0) \cap V^c$  kümeleri kapalı olduğundan

$$\exists O_1, O_2 \in \tau_T \setminus \{\emptyset\}, \quad O_1 \cap O_2 = \emptyset, \quad \Gamma_1(s_0) \subseteq O_1, \quad \Gamma_2(s_0) \cap V^c \subseteq O_2$$

gerçeklenir.  $V_1 = O_2 \cup V$  diyelim. Bu durumda,  $\Gamma_2 \subseteq V \cup O_2 = V_1$  bulunur. Hipotezden  $s_0 \in (\Gamma_1(O_1)^+)^{\circ} \cap (\Gamma_2(V_1)^+)^{\circ} \in \mathcal{V}(s_0)$  bulunur.  $(\Gamma_1(O_1)^+)^{\circ} \cap (\Gamma_2(V_1)^+)^{\circ} = U$  diyelim.

O halde,  $(\Gamma_1(\mathcal{O}_1)^+)^{\circ} \cap (\Gamma_2(V_1)^+)^{\circ} \subseteq \Gamma_1(\mathcal{O}_1)^+ \cap \Gamma_2(V_1)^+$  kapsaması göz önüne alındığında

$$\begin{aligned} \forall y \in U \quad \Gamma_1(y) \cap \Gamma_2(y) &\subseteq V_1 \cap \mathcal{O}_1 \\ &\subseteq (V \cup \mathcal{O}_2) \cap \mathcal{O}_1 \\ &= V \cap \mathcal{O}_1 \subseteq V \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla  $U \subseteq (\Gamma_1 \cap \Gamma_2)^+(V)$  olur. Yani  $s_0 \in ((\Gamma_1 \cap \Gamma_2)^+(V))^{\circ}$  elde edilir. Böylece kesişim fonksiyonu üstten yarı-sürekli olur.

Şimdi alttan yarı-süreklilik için ispatlayalım. Herhangi bir  $V \subseteq Y$  açık kümesi alalım ve  $(\Gamma_1 \cap \Gamma_2)^-(V)$  kümesinin açık olduğunu gösterelim. Bunun için  $s \in (\Gamma_1 \cap \Gamma_2)^-(V)$  alalım. Bu durumda  $\Gamma_1(s) \cap \Gamma_2(s) \cap V \neq \emptyset$  olduğundan  $t \in \Gamma_1(s) \cap \Gamma_2(s) \cap V$  alalım. Buradan  $(s, t) \in Gr\Gamma_2 \cap (S \times V)$  sağlanır.  $Gr\Gamma_2$  ve  $S \times V$  kümeleri açık olduğundan  $Gr\Gamma_2 \cap (S \times V)$  açık olur. O halde

$$\exists U_1 \in \mathcal{V}(s) \quad \exists V_1 \in \mathcal{V}(t) \quad U_1 \times V_1 \subseteq Gr\Gamma_2 \cap (S \times V)$$

gerçeklenir.  $\Gamma_1(s) \cap V \neq \emptyset$  ve  $\Gamma_1$  fonksiyonunun alttan yarı-sürekli olması kullanılırsa  $s \in (\Gamma_1(V))^{\circ}$  elde edilir. Şimdi  $U = (\Gamma_1(V))^{\circ} \cap U_1$  diyelim. Bu durumda

$$\forall a \in U \quad \text{için} \quad \exists z \in \Gamma_1(a) \cap V_1$$

sağlanır.

$$U \times V_1 = ((\Gamma_1(V))^{\circ}) \times V_1 \subseteq U_1 \cap V_1 \subseteq Gr\Gamma_2 \cap (S \times V)$$

ve  $(a, z) \in U \times V_1$  olduğundan

$$(a, z) \in Gr\Gamma_2 \cap (S \times V) \Rightarrow z \in \Gamma_2(a) \cap V$$

sağlanır. Bu durumda,

$$\Gamma_1(a) \cap \Gamma_2(a) \cap V \neq \emptyset \Rightarrow U \subseteq (\Gamma_1 \cap \Gamma_2)^-(V)$$

elde edilir. Dolayısıyla  $(\Gamma_1 \cap \Gamma_2)^-(V)$  kümesi açıktır.

**Not 4.1.15.** Yukarıdaki önermede  $\Gamma_2$  fonksiyonunun "açık" olması koşulu yerine "açık değerli" olması koşulu alındığında alttan yarı-süreklilik her zaman sağlanmaz.

**Örnek 4.1.16.**  $S = T = [0, 1]$ ,  $\Gamma_1, \Gamma_2 : S \rightarrow 2^T$  aşağıdaki şekilde tanımlı olsun.

$$\Gamma_1(s) = \begin{cases} \{0\}, & s = 0 \\ \{\frac{1}{n} : n \geq 1\}, & s \neq 0 \end{cases}$$

$$\Gamma_2(s) = \begin{cases} [0, 1], & s = 0 \\ ]0, 1] \setminus \{\frac{1}{n} : n \geq 2\}, & s \neq 0. \end{cases}$$

Dikkat edilecek olursa  $\Gamma_1$  fonksiyonu alttan yarı-süreklidir ve  $\Gamma_2$  fonksiyonu açık değerlidir fakat  $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$  fonksiyonu  $s = 0$  noktasında alttan yarı-süreklidir değildir [18].

**Önerme 4.1.17.**  $\Gamma : S \rightarrow 2^T$  olsun.  $\Gamma$  fonksiyonu kapalı değerli ve üstten yarı-süreklidir ise kapalıdır ([18]).

**İspat.**  $Gr\Gamma$  kümesinin kapalı olmadığını kabul edelim. Bu durumda,

$$\exists (s, t) \in \overline{Gr\Gamma} \quad t \notin \Gamma(s)$$

gerçeklenir. Dolayısıyla  $Gr\Gamma$  içinde  $\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n, t_n) = (s, t)$  olacak şekilde  $(s_n, t_n)$  dizisi vardır.  $\Gamma(s)$  kapalı,  $t \notin \Gamma(s)$  ve  $T$  uzayının regüler olması özellikleri kullanılırsa,

$$\exists O_1, O_2 \in \tau_{d_T} \setminus \{\emptyset\} \quad O_1 \cap O_2 = \emptyset \quad t \in O_1, \quad \Gamma(s) \subseteq O_2$$

bulunur.  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$  ve  $\Gamma$  üstten yarı-süreklidir olduğundan

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \Gamma(s_n) \subseteq O_2$$

sağlanır.  $(s_n, t_n) \in Gr\Gamma$  özelliğinden her  $n \geq N$  için  $t_n \in O_2$  olur.  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t$  ve  $O_1 \in \mathcal{V}(t)$  özelliğinden

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n \neq N_1 \quad t_n \in O_1$$

bulunur. Böylece  $m = \max\{N, N_1\}$  alınırsa

$$\forall n \neq m \quad t_n \in O_1 \cap O_2$$

elde edilir. Bu sonuç ise  $O_1 \cap O_2 = \emptyset$  olması ile çelişir.

**Not 4.1.18.** Yukarıdaki önermenin tersinin her zaman doğru olması gerekmez.

**Örnek 4.1.19.**  $S = T = \mathbb{R}^+$ ,  $\Gamma : S \rightarrow 2^T$

$$\Gamma(s) = \begin{cases} [0, s] \cup \{\frac{1}{s}\}, & s > 0 \\ \{0\}, & s = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlı fonksiyonu kompakt değerli ve kapalıdır fakat  $s = 0$  noktasında üstten yarı-sürekli değildir.

**Önerme 4.1.20.**  $\Gamma : S \rightarrow 2^T$  ve  $s \in S$  olsun.  $\Gamma$  fonksiyonunun kompakt değerli ve  $s$  noktasında üstten yarı-sürekli olması için gerek ve yeter koşul  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$  olan herhangi bir  $(s_n, t_n) \subseteq Gr\Gamma$  dizisi için  $(t_n)$  dizisinin  $\Gamma(s)$  içinde yığılma noktasına sahip olmasıdır ([18].)

**İspat.**  $\Gamma$  kompakt değerli ve  $s$  noktasında üstten yarı-sürekli olsun.  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$  olan herhangi bir  $(s_n, t_n) \subseteq Gr\Gamma$  dizisi alalım ve kabul edelim ki  $(t_n)$  dizisi  $\Gamma(s)$  içinde yığılma noktasına sahip olmasın. Bu durumda

$$\forall t \in \Gamma(s) \quad \exists V_t \in \mathcal{V}(t) \quad \exists p \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq p \quad t_n \notin V_t$$

gerçeklenir.

$$\Gamma(s) \subseteq \bigcup_{t \in \Gamma(s)} V_t$$

özelliği ve  $\Gamma(s)$  kompakt değerli olması göz önüne alındığında

$$\exists \{t_1, t_2, \dots, t_k\} \subseteq \Gamma(s) \quad \Gamma(s) \subseteq V_{t_1} \cup V_{t_2} \cup \dots \cup V_{t_k}$$

bulunur. Şimdi

$$V = \bigcup_{i=1}^k V_{t_i}$$

gösterimini kullanalım. Bu durumda,

$$\exists p \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq p \quad t_n \notin V \quad (4.3)$$

olur. Hipotezden ötürü  $x \in (\Gamma^+(V))^\circ$  elde edilir. O halde  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$  olduğundan

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad s_n \in (\Gamma^+(V))^\circ$$

sağlanır. Buradan,  $m = \max\{N, p\}$  alınırsa ,

$$\forall n \geq m \quad t_n \in V$$

elde edilir. Bu ise (4.3) ile çelişir.

Tersine hipotez gerçeklensin. Her  $n \in \mathbb{N}$  için  $s_n = s$  alırsak hipotezden  $\Gamma$  fonksiyonu dizisel kompakt olur. Kabul edelim ki  $\Gamma$  fonksiyonu  $s$  noktasında üstten yarı sürekliliği olsun. Bu durumda,  $\Gamma(s) \subseteq V$  olacak şekilde  $V \in \tau_T$  vardır ve

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists p \geq n \quad \Gamma(s_p) \not\subseteq V$$

gerçeklenir. O halde  $\Gamma(s_p) \cap V^c \neq \emptyset$  olur. Bu durumda,

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad t_{n_k} \in \Gamma(s_{n_k}) \cap V^c$$

olacak şekilde  $(t_{n_k})$  alt dizisi vardır.  $\lim_{k \rightarrow \infty} s_{n_k} = s$  ve  $(s_{n_k}, t_{n_k}) \in Gr\Gamma$  olduğundan hipotez gereği bir  $t \in \Gamma(s)$  için  $\lim_{p \rightarrow \infty} t_p = t$  olacak şekilde  $(t_{n_k})$  dizisinin bir  $(t_p)$  alt dizisi vardır.

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad t_p \in \Gamma(s_p) \cap V^c$$

ve  $\Gamma(s_p) \cap V^c$  kapalı olduğundan  $y \in \Gamma(s_p) \cap V^c$  elde edilir. Bu ise  $y \in \Gamma(s)$  ve  $\Gamma(s) \subseteq V$  özellikleri ile çelişir.

**Önerme 4.1.21.**  $\Gamma : S \rightarrow 2^T$  fonksiyonu kompakt değerli olsun.  $\Gamma$  üstten yarı-sürekliliği ve  $K \subseteq S$  kümesi kompakt ise  $\Gamma(K)$  kompakttır ([18]).

**İspat.** Herhangi bir  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \Gamma(K)$  alalım ve bu dizinin  $\Gamma(K)$  içinde yakınsak bir alt dizisi

olduğunu gösterelim. Bu durumda,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists s_n \in K \quad t_n \in \Gamma(s_n)$$

sağlanır.  $K$  kompakt olduğundan,

$$\exists s \in K \quad \exists (s_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} s_{n_k} = s$$

gerçeklenir.  $(s_{n_k}, t_{n_k}) \in Gr\Gamma$  ve  $\Gamma$  fonksiyonunun üstten yarı-sürekli olması özelliklerinden  $(t_{n_k})$  alt dizisi  $\Gamma(s)$  içinde yığılma noktasına sahip olur ve  $\Gamma(s) \subseteq \Gamma(K)$  özelliği dikkate alındığında  $(t_{n_k})$  alt dizisi  $\Gamma(K)$  içinde yığılma noktasına sahip olur. Böylece kümesi  $\Gamma(K)$  dizisel kompakt bulunur.

**Not 4.1.22.** Yukarıdaki önermenin üstten yarı-süreklilik koşulu yerine alttan yarı-süreklilik koşulu alındığında önermenin sonucunun her zaman doğru olması gerekmez.

**Örnek 4.1.23.**  $S = T = [0, 1]$ ,  $\Gamma : S \rightarrow 2^T$

$$\Gamma(s) = \begin{cases} [0, s], & s \in [0, 1[ \\ \{0\}, & s = 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlı fonksiyonu kompakt değerli, alttan yarı-sürekli fakat  $[0, 1]$  kümesi için  $\Gamma([0, 1]) = [0, 1[$  kompakt değildir [18].

**Önerme 4.1.24.**  $\Gamma : S \rightarrow 2^T$  kapalı değerli fonksiyon olsun.  $\Gamma$  fonksiyonu kapalı ve yerel kompakt ise üstten yarı-sürekli ([18]).

**İspat.** Herhangi bir  $s \in S$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$  olacak şekilde  $(s_n) \subseteq S$  dizisi ve her  $n \in \mathbb{N}$  için  $t_n \in \Gamma(s_n)$  olacak şekilde  $(t_n)$  dizisi alalım.  $\Gamma$  yerel kompakt olduğundan  $\overline{\Gamma(U)}$ ,  $Y$  içinde kompakt olacak şekilde bir  $U \in \mathcal{V}(s)$  vardır.  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$  ve  $U \in \mathcal{V}(x)$  özelliklerinden

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad s_n \in U$$

sağlanır. Bu durumda,

$$\forall n \geq N \quad t_n \in \Gamma(U) \subseteq \overline{\Gamma(U)}$$

Yani

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad t_{n_k} \in \overline{\Gamma(U)}$$

olur.  $\overline{\Gamma(U)}$  kompakt olduğundan

$$\exists t \in \overline{\Gamma(U)}$$

$\lim_{p \rightarrow \infty} t_p = t$  olacak şekilde  $(t_{n_k})$  dizisinin bir  $(t_p)$  alt dizisi vardır. Buradan,

$$(s_p, t_p) \in Gr\Gamma \quad \lim_{p \rightarrow \infty} (s_p, t_p) = (s, t)$$

olur ve  $Gr\Gamma$  kapalı olduğundan  $t \in \Gamma(s)$  olur.

**Önerme 4.1.25.**  $\Gamma : S \rightarrow 2^T$  olsun.  $\Gamma$  fonksiyonu üstten yarı-süreklili ve kompakt değerli ise yerel sınırlıdır ([18]).

**İspat.** Herhangi bir  $s \in S$  alalım.  $\Gamma(s)$  kompakt olduğundan herhangi bir  $\varepsilon$  pozitif sayısı için  $\cup\{B_\varepsilon(t) : t \in \Gamma(s)\}$  açık örtülüşünün sonlu alt örtülüşü vardır. Dolayısıyla

$$\Gamma(s) \subseteq B_\varepsilon(t_1) \cup B_\varepsilon(t_2) \cup \dots \cup B_\varepsilon(t_k)$$

olacak şekilde  $\{t_1, t_2, \dots, t_k\} \subseteq \Gamma(s)$  sonlu alt kümesi vardır. Her  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$  için  $B_\varepsilon(t_i)$  sınırlı olduğundan  $B_\varepsilon(t_1) \cup B_\varepsilon(t_2) \cup \dots \cup B_\varepsilon(t_k)$  sonlu birleşimi sınırlıdır.  $V = B_\varepsilon(t_1) \cup B_\varepsilon(t_2) \cup \dots \cup B_\varepsilon(t_k)$  diyelim.  $\Gamma$  fonksiyonu  $s$  noktasında üstten yarı-süreklili olduğundan  $s \in (\Gamma^+(V))^\circ$  olur. Dolayısıyla  $\Gamma(U) \subseteq V$  olacak şekilde  $U \in \mathcal{V}(s)$  vardır.  $V$  kümesinin yerel sınırlılığından  $\Gamma(U)$  sınırlı olur. Böylece  $\Gamma$  fonksiyonunun yerel sınırlı olduğu elde edilir.

**Önerme 4.1.26.**  $\Gamma : S \rightarrow 2^T$  olsun. Aşağıdakiler gerçekleşir.

(i)  $\Gamma$  fonksiyonu üstten yarı-süreklili ise Hausdorff üstten yarı-süreklidir.

(ii)  $\Gamma$  fonksiyonu Hausdorff alttan yarı-süreklili ise alttan yarı-süreklidir ([18]).

**İspat. (i):**  $\Gamma$  fonksiyonu üstten yarı-süreklili olsun. Herhangi bir  $\varepsilon > 0$  ve  $s \in S$  alalım.  $\Gamma$  fonksiyonunun üstten yarı-sürekliliği,  $B_\varepsilon(\Gamma(x))$  açık küme olması ve  $s \in \Gamma^+(B_\varepsilon\Gamma(s))$  özelliklerinden  $\Gamma^+(B_\varepsilon\Gamma(s))$  kümesi açık olur. Buradan,

$$\exists \delta > 0 \quad B_\delta(s) \subseteq \Gamma^+(B_\varepsilon\Gamma(s))$$

bulunur. Böylece  $\Gamma$  Hausdorff üstten yarı-sürekli olur.

(ii)  $\Gamma$  fonksiyonu Hausdorff alttan yarı-sürekli olsun. Herhangi bir  $s \in S$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$  olacak şekilde  $(s_n) \subseteq S$  dizisi ve herhangi bir  $t \in \Gamma(s)$  noktası alalım. Hipotez ve  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$  özelliği kullanılırsa,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad s_n \in B_\delta(s) \quad \Gamma(s) \subseteq B_\varepsilon(\Gamma(s_n))$$

sağlanır. Dolayısıyla,  $d(t, \Gamma(s_n)) < \varepsilon$  bulunur. Buradan

$$\exists t_n \in \Gamma(s_n) \quad d(t, t_n) < \varepsilon$$

gerçeklenir. O halde  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t$  olur. Bu durumda Önerme 4.1.6 dikkate alındığında  $\Gamma$  fonksiyonu alttan yarı-sürekli olur.

**Not 4.1.27.** Yukarıdaki önermede (i) ve (ii) ifadelerinin terslerinin her zaman doğru olması gerekmez.

**Örnek 4.1.28.**  $S = [0, 1]$ ,  $T = \mathbb{R}$ ,  $\Gamma : S \rightarrow 2^T$

$$\Gamma(s) = \begin{cases} [0, 1], & 0 \leq s < 1 \\ [0, 1[, & s = 1 \end{cases}$$

olsun.  $\Gamma$  fonksiyonu Hausdorff üstten yarı-sürekli fakat  $s = 1$  noktasında üstten yarı-sürekli değildir [18].

**Örnek 4.1.29.**  $S = [0, 1]$ ,  $T = \mathbb{R}^2$ ,  $\Gamma : S \rightarrow 2^T$ ,

$$\Gamma(s) = \{(t, st) : t \in \mathbb{R}\}$$

olsun.  $\Gamma$  fonksiyonu alttan yarı-sürekli fakat Hausdorff alttan yarı-sürekli değildir. Dolayısıyla zayıf Hausdorff alttan yarı-sürekli değildir [18].

**Önerme 4.1.30.** Kompakt değerli olan küme değerli fonksiyonlar için Hausdorff üstten yarı-süreklilik ile üstten yarı-süreklilik; Hausdorff alttan yarı-süreklilik ile alttan-yarı-süreklilik kavramları birbiriyle örtüşür ([18]).

**İspat.**  $\Gamma : S \rightarrow 2^T$  fonksiyonu kompakt değerli ve Hausdorff üstten yarı-sürekli olsun.

$\Gamma$  fonksiyonunun üstten yarı-sürekli olduğunu gösterelim. Herhangi bir  $s \in S$  noktası,  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$  olacak şekilde  $(s_n, t_n) \subseteq Gr\Gamma$  dizisi alalım ve  $(t_n)$  dizisinin  $\Gamma(s)$  içinde yığılma noktası olduğunu gösterelim. Hipotez ve  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$  özelliği kullanılırsa

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad h^*(\Gamma(s_n), \Gamma(s)) \leq \varepsilon$$

sağlanır. Dolayısıyla  $\lim_{n \rightarrow \infty} h^*(\Gamma(s_n), \Gamma(s)) = 0$  elde edilir. Herhangi bir  $t \in T$  için  $\gamma_t : \Gamma(s) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\gamma_t(z) \mapsto d(t, z)$  fonksiyonu sürekli ve  $\Gamma(s)$  kompakt olduğundan

$$\inf \gamma_t(\Gamma(s)) = d(t, \Gamma(s)) \in \gamma_t(\Gamma(s))$$

olur. O halde

$$\forall n \geq N \quad \exists z_n \in \Gamma(s) \quad d(t_n, \Gamma(s)) = d(t_n, z_n)$$

gerçeklenir.  $\Gamma(s)$  kompakt olduğundan  $\lim_{k \rightarrow \infty} z_{n_k} = z \in \Gamma(s)$  olacak şekilde  $(z_n)$  dizisinin  $(z_{n_k})$  alt dizisi vardır. Bu durumda,  $d(t_{n_k}, z_{n_k}) \leq h^*(t_{n_k}, \Gamma(s))$  ve  $\lim_{k \rightarrow \infty} h^*(t_{n_k}, \Gamma(s)) = 0$  özellikleri kullanılırsa  $\lim_{k \rightarrow \infty} d(t_{n_k}, z_{n_k}) = 0$  elde edilir. Dolayısıyla  $\lim_{k \rightarrow \infty} t_{n_k} = z$  bulunur. Yani  $(t_n)$  dizisi  $\Gamma(s)$  içinde yığılma noktasına sahiptir.

Şimdi  $\Gamma$  fonksiyonu alttan yarı-sürekli ise Hausdorff alttan yarı-sürekli olduğunu gösterelim.  $\Gamma$ , fonksiyonunun  $s_0 \in S$  noktasında Hausdorff alttan yarı-sürekli olmadığını kabul edelim. Bu durumda,

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists s \in B_\delta(s_0) \quad h^*(\Gamma(s_0), \Gamma(s)) \geq \varepsilon$$

sağlanır. Dolayısıyla,

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \exists z_n \in B_{\frac{1}{n}}(s_0) \quad h^*(\Gamma(s_0), \Gamma(z_n)) \geq \varepsilon$$

olur. Böylece  $h^*$  fonksiyonunun tanımı gereği,

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \exists t_n \in \Gamma(s_0) \quad d(t_n, \Gamma(z_n)) \geq \varepsilon \quad (4.4)$$

sağlanır.  $\Gamma(s_0)$  kompakt olduğundan  $\lim_{k \rightarrow \infty} t_{n_k} = t$  olacak şekilde  $(t_n)$  dizisinin bir  $(t_{n_k})$  alt dizisi ve  $t \in \Gamma(s_0)$  vardır.  $\Gamma(s_0) \cap B_{\frac{\varepsilon}{2}}(t) \neq \emptyset$  özelliği ve hipotez kullanılırsa

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall k \geq N \quad \Gamma(z_{n_k}) \cap B_{\frac{\varepsilon}{2}}(t) \neq \emptyset$$

bulunur.  $\lim_{k \rightarrow \infty} t_{n_k} = t$  özelliği de göz önüne alındığında

$$\exists N' \in \mathbb{N} \quad \forall k \geq N' \quad d(t_{n_k}, t) < \frac{\varepsilon}{2}$$

sağlanır. O halde  $m = \max\{N, N'\}$  alındığında

$$d(t_{n_k}, \Gamma(z_{n_k})) \leq d(t_{n_k}, y) + d(t, \Gamma(z_{n_k})) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

elde edilir. Bu ise (4.4) ile çelişir. Önerme 4.1.26'da dikkate alındığında istenilen sonuç elde edilir.

**Sonuç 4.1.31.**  $\Gamma : S \rightarrow 2^T$  kompakt değerli fonksiyonun sürekli olması için gerek ve yeter koşul Hausdorff sürekli olmasıdır.

**Önerme 4.1.32.**  $\Gamma : S \rightarrow 2^T$  kapalı değerli fonksiyon olsun.  $\Gamma$  Hausdorff üstten yarı-sürekli ise kapalıdır ([18]).

**İspat.** Herhangi bir  $(s, t) \in \overline{Gr\Gamma}$  alalım. Bu durumda  $\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n, t_n) = (s, t)$  olacak şekilde  $(s_n, t_n) \subseteq Gr\Gamma$  dizisi vardır.  $\Gamma$  fonksiyonu Hausdorff üstten yarı-sürekli olduğundan

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \Gamma(B_\delta(s)) \subseteq B_\varepsilon(\Gamma(s))$$

sağlanır.  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$  özelliği göz önüne alındığında  $\delta$  pozitif sayısı için

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad s_n \in B_\delta(s)$$

gerçeklenir. O halde hipotez kullanılırsa

$$\forall n \geq N \quad \Gamma(s_n) \subseteq B_\varepsilon(\Gamma(s))$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} \forall n \geq N \quad t_n \in \Gamma(s_n) &\Leftrightarrow d(t_n, \Gamma(s)) < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow d(t, \Gamma(s)) = 0 \\ &\Leftrightarrow t \in \overline{\Gamma(s)} \end{aligned}$$

sağlanır ve  $\Gamma$  kapalı değerli olduğundan  $t \in \Gamma(s)$  bulunur. Dolayısıyla  $Gr\Gamma$  kapalıdır.

**Önerme 4.1.33.**  $A, B \subseteq Y$  olsun. Bu durumda,

$$h^*(A, B) = h^*(\bar{A}, \bar{B})$$

eşitliği gerçekleşir([18]).

**İspat.** Herhangi bir  $a \in A$  alalım.  $B \subseteq \bar{B}$  olduğundan her  $b \in B$  için  $d(a, \bar{B}) \leq d(a, b)$  sağlanır. Dolayısıyla,  $d(a, \bar{B})$  değeri  $\{d(a, b) : b \in B\}$  kümesi için bir alt sınır olur. O halde,

$$d(a, \bar{B}) \leq d(a, B) \tag{4.5}$$

elde edilir. Şimdi herhangi bir  $b' \in \bar{B}$  alalım. Bu durumda,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b'$  olacak şekilde  $(b_n) \subseteq B$  dizisi vardır. Bu durumda,

$$d(a, B) \leq d(a, b_n) \leq d(a, b') + d(b', b_n)$$

sağlanır ve buradan limite geçilirse  $d(a, B) \leq d(a, b')$  elde edilir. Dolayısıyla  $d(a, B)$  değeri  $\{d(a, b) : b' \in \bar{B}\}$  kümesi için alt sınır olur. O halde

$$d(a, B) \leq d(a, \bar{B}) \tag{4.6}$$

elde edilir. (4.5) ve (4.6)'dan  $d(a, B) = d(a, \bar{B})$

bulunur. Bu eşitlik her  $a \in A$  için sağlandığından

$$h^*(A, B) = h^*(A, \bar{B})$$

gerçeklenir.

$A \subseteq \bar{A}$  kapsaması göz önüne alındığında herhangi bir  $a \in A$  için  $d(a, B) \leq h^*(\bar{A}, \bar{B})$  sağlanır. Dolayısıyla  $h^*(\bar{A}, \bar{B})$  değeri  $\{d(a, B) : a \in A\}$  kümesi için bir üst sınır olur. O halde

$$h^*(A, B) \leq h^*(\bar{A}, \bar{B}) \tag{4.7}$$

gerçeklenir. Şimdi herhangi bir  $a' \in \bar{A}$  alalım. Bu durumda,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a'$  olacak şekilde

bir  $(a_n) \subseteq A$  dizisi vardır. Buradan,

$$d(a', \bar{B}) \leq d(a', a_n) + d(a_n, \bar{B}) \leq d(a', a_n) + h^*(A, B)$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin her iki tarafından limite geçilirse  $d(a', \bar{B}) \leq h^*(A, B)$  bulunur. Dolayısıyla  $h^*(A, B)$  değeri  $\{d(a', \bar{B}) : a' \in \bar{A}\}$  kümesi için üst sınır olur. Böylece

$$h^*(\bar{A}, \bar{B}) \leq h^*(A, B) \tag{4.8}$$

eşitsizliği sağlar. (4.7) ve (4.8)'den

$$h^*(\bar{A}, \bar{B}) = h^*(A, B)$$

elde edilir.

**Sonuç 4.1.34.**  $\Gamma : S \rightarrow 2^T$  olsun.  $\Gamma$  fonksiyonu Hausdorff üstten yarı-sürekli olması için gerek ve yeter koşul  $\bar{\Gamma}$  fonksiyonunun da Hausdorff üstten yarı-sürekli olmasıdır. Bu durum Hausdorff alttan yarı-süeklilik ve Hausdorff süreklilik için de geçerlidir.

**Önerme 4.1.35.**  $\Gamma : S \rightarrow 2^T$  olmak üzere  $t \in T$  için  $\varphi_t : S \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varphi_t(s) = d(t, \Gamma(s))$  şeklinde fonksiyon tanımlansın. Bu durumda aşağıdakiler gerçekleşir [18].

(i)  $\Gamma$  fonksiyonu Hausdorff üstten yarı-sürekli ise her  $t \in T$  için  $\varphi_t$  fonksiyonu alttan yarı-sürekli.

(ii)  $\Gamma$  fonksiyonunun alttan yarı-sürekli olması için gerek ve yeter koşul her  $t \in T$  için  $\varphi_t$  fonksiyonunun üstten yarı-sürekli.

(iii) Eğer  $\Gamma$  fonksiyonu yerel kompakt ve kompakt değerli ve  $\varphi_t$  fonksiyonu alttan yarı süreklili ise  $\Gamma$  fonksiyonu Hausdorff üstten yarı-sürekli.

**İspat. (i):** Herhangi bir  $t \in T$  ve  $r \in \mathbb{R}$  alalım ve

$$A := \{x \in X : \varphi_t(s) \leq r\}$$

kümesinin kapalı olduğunu gösterelim.  $x_0 \in \bar{A}$  alalım. O halde  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$  olacak şekilde

$(x_n) \subseteq A$  dizisi vardır. Bu durumda

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \varphi_t(x_n) \leq r$$

sağlanır. Dolayısıyla

$$\exists t_n \in \Gamma(x_n) \quad d(y, y_n) \leq r$$

olur.

$$\varphi_t(x_0) = d(t, \Gamma(x_0)) \leq d(t, y_n) + d(t_n, \Gamma(x_n)) \leq r + h^*(\Gamma(x_n), \Gamma(x_0))$$

eşitsizliği ve hipotezden elde edilen  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, \Gamma(x_0)) = 0$  eşitliği göz önüne alındığında  $d(t, \Gamma(x_0)) \leq r$  elde edilir. Dolayısıyla  $x_0 \in A$  bulunur.

**(ii):** Her  $t \in T$  için  $\varphi_t$  fonksiyonunun alttan yarı-sürekli olduğunu kabul edelim ve  $\Gamma$  fonksiyonunun kapalı olduğunu gösterelim. Herhangi bir  $(s, t) \in \overline{Gr\Gamma}$  alalım. Bu durumda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n, t_n) = (s, t)$$

olacak şekilde  $(s_n, t_n) \subseteq Gr\Gamma$  dizisi vardır.  $\varphi_t$  fonksiyonu  $s \in S$  noktasında alttan yarı-sürekli olduğundan

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall s_0 \in B_\delta(s) \quad \varphi_t(s) - \varepsilon < \varphi_t(s_0)$$

ve  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$  olduğu göz önüne alındığında

$$\delta > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad s_n \in B_\delta(s)$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\forall n \geq N \quad \varphi_t(s) - \varepsilon \leq \varphi_t(s_n)$$

gerçeklenir. Buradan

$$d(t, \Gamma(s)) - \varepsilon \leq d(t, \Gamma(s_n)) \leq d(t, t_n)$$

ve  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t$  özellikleri kullanılırsa

$$d(t, \Gamma(s)) < \varepsilon \Leftrightarrow t \in \overline{\Gamma(s)}$$

ve  $\Gamma$  kapalı değerli olması dikkate alındığında  $(s, t) \in Gr\Gamma$  elde edilir. Önerme 4.1.24 ten  $\Gamma$  fonksiyonu üstten yarı-sürekli. Böylece Önerme 4.1.26 göz önüne alındığında  $\Gamma$

fonksiyonu Hausdorff üstten yarı-sürekli bulunur.

**(iii):**  $\Gamma$  fonksiyonu alttan yarı-sürekli olsun ve her  $r \in \mathbb{R}$  için

$$A := \{s \in S : \varphi_t(s) \geq r\}$$

kümesinin kapalı olduğunu gösterelim.  $x_0 \in \bar{A}$  alalım. Bu durumda  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$  olacak şekilde  $(x_n) \subseteq A$  dizisi vardır. Dolayısıyla

$$d(t, \Gamma(x_n)) \geq r$$

sağlanır. Şimdi herhangi bir  $t_0 \in \Gamma(x_0)$  alalım.  $\Gamma$  fonksiyonu  $x_0$  noktasında alttan yarı-sürekli olduğundan Önerme 4.1.6'dan  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t_0$  ve her  $n \in \mathbb{N}$  için  $t_n \in \Gamma(x_n)$  olacak şekilde bir  $(t_n)$  dizisi vardır. Bu durumda

$$r \leq d(t, \Gamma(x_n)) \leq d(t, t_n) + d(t_n, \Gamma(x_n)) = d(t, t_n) \leq d(t, t_0) + d(t_0, t_n)$$

eşitsizliği her  $t_0 \in \Gamma(x_0)$  için gerçekleştiğinden

$$r \leq d(t, \Gamma(x_0))$$

elde edilir. Dolayısıyla  $x_0 \in A$  bulunur.

Tersine, her  $t \in T$  için  $\varphi_t$  fonksiyonu üstten yarı-sürekli olsun. Herhangi bir  $V \subseteq T$  açık kümesi alalım ve  $\Gamma^-(V)$  kümesinin açık olduğunu gösterelim.  $s_0 \in \Gamma^-(V)$  alalım. Bu durumda  $t_0 \in \Gamma(s_0) \cap V$  noktası vardır.  $V$  kümesi açık olduğundan

$$\exists \varepsilon > 0 \quad B_\varepsilon(t_0) \subseteq V$$

sağlanır.  $\varphi_{t_0}$  fonksiyonu  $s_0$  noktasında üstten yarı-sürekli olduğundan

$$\exists \delta > 0 \quad \forall s \in B_\delta(s_0) \quad \varphi_{t_0}(s) < \varphi_{t_0} + \varepsilon$$

sağlanır. Dolayısıyla

$$\exists t \in \Gamma(s) \quad d(t_0, t) < d(t_0, \Gamma(s_0)) + \varepsilon = \varepsilon$$

bulunur. Buradan  $\Gamma(s) \cap B_\delta(t_0) \neq \emptyset$  ve  $B_\delta(t_0) \subseteq V$  özellikleri kullanılırsa

$$\Gamma(s) \cap V \neq \emptyset$$

elde edilir. O halde  $s_0 \in (\Gamma^-(V))^\circ$  bulunur.

**Önerme 4.1.36.**  $\Gamma_1, \Gamma_2 : S \rightarrow 2^T$  olsun. Aşağıdakiler gerçekleşir ([18]).

(i)  $\Gamma_1$  ve  $\Gamma_2$  fonksiyonları Hausdorff üstten yarı-sürekli ise  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$  fonksiyonu Hausdorff üstten yarı-sürekli dir.

(ii)  $\Gamma_1$  ve  $\Gamma_2$  fonksiyonları Hausdorff alttan yarı-sürekli ise  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$  fonksiyonu Hausdorff alttan yarı-sürekli dir.

**İspat.**

(i):  $\Gamma_1$  ve  $\Gamma_2$  fonksiyonları Hausdorff üstten yarı-sürekli olsun. Herhangi bir  $s \in S$  ve  $\varepsilon > 0$  alalım.  $\Gamma_1$  fonksiyonu Hausdorff üstten yarı-sürekli olduğundan

$$\exists \delta_1 > 0 \quad \Gamma_1(B_{\delta_1}(s)) \subseteq B_\varepsilon(\Gamma_1(s))$$

sağlanır. Benzer şekilde  $\Gamma_2$  fonksiyonu Hausdorff üstten yarı - sürekli olduğundan

$$\exists \delta_2 > 0 \quad \Gamma_2(B_{\delta_2}(s)) \subseteq B_\varepsilon(\Gamma_2(s))$$

sağlanır. O halde  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$  alınırsa

$$(\Gamma_1 \cup \Gamma_2)(B_\delta(s)) = \Gamma_1(B_\delta(s)) \cup \Gamma_2(B_\delta(s)) \subseteq B_\varepsilon(\Gamma_1(s)) \cup B_\varepsilon(\Gamma_2(s)) \subseteq B_\varepsilon(\Gamma_1 \cup \Gamma_2)(s)$$

elde edilir.

(ii):  $\Gamma_1$  ve  $\Gamma_2$  fonksiyonları Hausdorff alttan yarı-sürekli olsun. Herhangi bir  $s \in S$  ve  $\varepsilon > 0$  alalım.  $\Gamma_1$  fonksiyonu  $s$  noktasında Hausdorff alttan yarı-sürekli olduğundan

$$\exists \delta_1 > 0 \quad \forall s_1 \in B_{\delta_1}(s) \quad \Gamma_1(s) \subseteq B_\varepsilon(\Gamma_1(s_1))$$

sağlanır ve benzer şekilde  $\Gamma_2$  fonksiyonu  $s$  noktasında Hausdorff alttan yarı-sürekli

oluğundan

$$\exists \delta_2 > 0 \quad \forall s_2 \in B_{\delta_2}(s) \quad \Gamma_2(s) \subseteq \Gamma_2(s_2)$$

sağlanır.  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$  alınırsa her  $y \in B_\delta(s)$  için

$$\Gamma_1(s) \subseteq B_\varepsilon(\Gamma_1(y))$$

$$\Gamma_2(s) \subseteq B_\varepsilon(\Gamma_2(y))$$

gerçeklenir. Dolayısıyla

$$(\Gamma_1 \cup \Gamma_2)(s) \subseteq B_\varepsilon(\Gamma_1 \cup \Gamma_2)(y)$$

elde edilir.

**Önerme 4.1.37.**  $\Gamma_1 : S \rightarrow 2^T$  kapalı değerli ve  $\Gamma_2 : S \rightarrow 2^T$  kompakt değerli olsun.  $\Gamma_1$  ve  $\Gamma_2$  Hausdorff üstten yarı-sürekli ise  $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$  fonksiyonu  $\Gamma_1(s) \cap \Gamma_2(s) \neq \emptyset$  olacak şekilde her  $s \in S$  noktasında Hausdorff üstten yarı-sürekli'dir ([18]).

**İspat.**  $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$  fonksiyonunun  $s_0 \in S$  noktasında Hausdorff üstten yarı-sürekli olmadığını kabul edelim. Bu durumda

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad (\Gamma_1 \cap \Gamma_2)(B_\delta(s_0)) \not\subseteq B_\varepsilon(\Gamma_1 \cap \Gamma_2)(s_0)$$

sağlanır. O halde

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \exists s_n \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2(B_{\frac{1}{n}}(s_0)) \quad (\Gamma_1 \cap \Gamma_2)(s_n) \not\subseteq B_\varepsilon(\Gamma_1 \cap \Gamma_2)(s_0)$$

gerçeklenir. Dolayısıyla

$$\exists t_n \in (\Gamma_1 \cap \Gamma_2)(s_n) \quad d(t_n, \Gamma_1 \cap \Gamma_2(s_0)) \geq \varepsilon$$

olur. Önerme 4.1.30'dan  $\Gamma_2$  fonksiyonu üstten yarı-sürekli'dir.  $\Gamma_1, s_0$  noktasında Hausdorff üstten yarı-sürekli olduğundan

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad h^*(\Gamma_1(s_n), \Gamma_1(s_0)) < \varepsilon$$

sağlanır. Buradan

$$\varepsilon = \frac{1}{k} \quad \exists N_k \in \mathbb{N} \quad m_k \geq N_k \quad t_{m_k} \in \Gamma_1(s_{m_k}) \quad d(t_{m_k}, \Gamma_1(s_0)) < \frac{1}{k} \quad m_k < m_{k+1} < \dots$$

elde edilir. Dolayısıyla  $\lim_{k \rightarrow \infty} s_{m_k} = s_0$ ,  $t_{m_k} \in \Gamma_2(s_{m_k})$  ve Önerme 4.1.20 kullanılırsa  $(t_{m_k})$  dizisi  $\Gamma_2(s_0)$  kümesinde yığılma noktasına sahip olur. O halde  $\lim_{p \rightarrow \infty} t_p = t$  olacak şekilde  $(t_{m_k})$  dizisinin bir  $(t_p)$  alt dizisi ve  $t \in \Gamma_2(s_0)$  noktası vardır. Dolayısıyla

$$d(t_p, \Gamma_1(s_0)) < \frac{1}{k}$$

eşitsizliği,  $\lim_{p \rightarrow \infty} t_p = t$  ve  $\Gamma_1$  fonksiyonunun kapalı değerli olması kullanılırsa  $t \in \Gamma_1(s_0)$  bulunur. Buradan

$$d(t_p, \Gamma_1 \cap \Gamma_2(s_0)) \leq d(t_p, t) < \varepsilon$$

olduğundan  $d(t_p, \Gamma_1 \cap \Gamma_2(s_0)) < \varepsilon$  çelişkisi elde edilir.

**Önerme 4.1.38.**  $\Gamma : S \rightarrow 2^T$  olsun.  $\Gamma$  fonksiyonu Kuratowski alttan yarı-sürekli olması için gerek ve yeter koşul alttan yarı-sürekli olmasıdır ([32]).

**İspat.**  $\Gamma$  fonksiyonu Kuratowski alttan yarı-sürekli olsun. Herhangi bir  $s_0 \in S$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s_0$  olacak şekilde bir  $(s_n) \subseteq S$  dizisi ve  $t \in \Gamma(s)$  alalım. Hipotezden  $t \in \liminf_{s \rightarrow s_0} \Gamma(s)$  olur. Dolayısıyla her  $n \in \mathbb{N}$  için  $t_n \in \Gamma(s_n)$  ve  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t$  olacak şekilde bir  $(t_n) \subseteq T$  dizisi vardır. Önerme 4.1.6dan  $\Gamma$  fonksiyonu alttan yarı-sürekli olur.

Tersine,  $\Gamma$  fonksiyonu  $s_0 \in S$  noktasında alttan yarı-sürekli olsun. Herhangi bir  $t \in \Gamma(s_0)$  alalım. Önerme 4.1.6 gereği  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s_0$  olacak şekilde her  $(s_n)$  dizisi için  $t \in \lim_{s \rightarrow s_0} \Gamma(s)$  elde edilir. Dolayısıyla  $\Gamma$  fonksiyonu Kuratowski alttan yarı-sürekli olur.

**Önerme 4.1.39.**  $\Gamma : S \rightarrow 2^T$  olsun.  $\Gamma$  fonksiyonunun Kuratowski üstten yarı-sürekli olması için gerek ve yeter koşul bu fonksiyonun kapalı olmasıdır ([32]).

**İspat.**  $\Gamma$  fonksiyonu Kuratowski üstten yarı-sürekli olsun.  $(s, t) \in \overline{Gr\Gamma}$  alalım. Bu durumda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n, t_n) = (s, t)$$

olacak şekilde  $(s_n, t_n) \subseteq Gr\Gamma$  dizisi vardır. Dolayısıyla  $t \in \limsup_{s' \rightarrow x} \Gamma(s')$  gerçekleşir.  $\Gamma$  Kuratowski üstten yarı-sürekli olduğundan  $t \in \Gamma(s)$  olur. Dolayısıyla  $(s, t) \in Gr\Gamma$  elde edilir.

Tersine,  $Gr\Gamma$  kapalı ve  $s \in S$  olsun. Herhangi bir  $t \in \limsup_{s' \rightarrow s} \Gamma(s')$  alalım. Bu durumda  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$  olacak şekilde  $(s_n) \subseteq S$  dizisi ve her  $n \in \mathbb{N}$  için  $t_n \in \Gamma(s_n)$  olmak üzere  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t$  olacak şekilde  $(t_n)$  dizisi vardır. Hipotez göz önüne alındığında  $t \in \Gamma(s)$  olur. O halde  $\limsup_{s' \rightarrow s} \Gamma(s') \subseteq \Gamma(s)$  elde edilir.

**Sonuç 4.1.40.** Önerme 4.1.17'den ötürü eğer  $\Gamma$  fonksiyonu kapalı değerli ve üstten yarı-sürekli ise bu fonksiyon Kuratowski üstten yarı-sürekli'dir ([32]).

**Not 4.1.41.** Yukarıdaki önermenin tersinin her zaman doğru olması gerekmez.

**Örnek 4.1.42.**  $\Gamma : \mathbb{R}^+ \rightarrow 2^{\mathbb{R}}$  olsun.

$$\Gamma(x) = \begin{cases} \{0, \frac{1}{x}\}, & x > 0 \\ \{0\}, & x = 0 \end{cases}$$

fonksiyonu Kuratowski üstten yarı-sürekli'dir fakat  $x = 0$  noktasında üstten yarı-sürekli değildir [23].

**Önerme 4.1.43.**  $\Gamma : S \rightarrow 2^T$  ve  $T$  kompakt metrik uzay olsun.  $\Gamma$  fonksiyonu Kuratowski üstten yarı-sürekli ise üstten yarı-sürekli'dir ([32]).

**İspat.**  $\Gamma$  fonksiyonunun  $s_0 \in S$  noktasında üstten yarı-sürekli olmadığını kabul edelim. Bu durumda  $\Gamma(s_0) \subseteq V$  ve  $s_0 \notin (\Gamma^+(V))^\circ$  olacak şekilde bir  $V \subseteq T$  açık kümesi vardır. Böylece

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad B_{\frac{1}{n}}(s_0) \not\subseteq (\Gamma^+(V))^\circ$$

sağlanır. Buradan

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \exists s_n \in B_{\frac{1}{n}}(s_0) \quad \Gamma(s_n) \not\subseteq V$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \exists t_n \in \Gamma(s_n) \quad t_n \notin V \tag{4.9}$$

sağlanır.  $T$  kompakt olduğundan  $\lim_{k \rightarrow \infty} t_{n_k} = t_0$  olacak şekilde bir  $t_0 \in T$  ve  $(t_n)$  dizisinin bir  $(t_{n_k})$  alt dizisi vardır. Dolayısıyla

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (s_{n_k}, t_{n_k}) = (s_0, t_0)$$

olur. Hipotez ve Önerme 4.1.39 göz önüne alındığında  $t_0 \in \Gamma(s_0)$  elde edilir.  $\Gamma(s_0) \subseteq V$  ve  $V$  kümesi açık olduğu kullanılırsa  $V \in \mathcal{V}(t_0)$  bulunur.  $\lim_{k \rightarrow \infty} t_{n_k} = t_0$  özelliğinden

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall k \geq N \quad t_{n_k} \in V$$

elde edilir. Bu ise (4.9) ile çelişir.

**Önerme 4.1.44.**  $\Gamma : S \rightarrow 2^T$  kapalı değerli fonksiyon ve  $s \in S$  olsun. Bu durumda aşağıdakiler gerçekleşir ([32]).

(i)  $\Gamma$  fonksiyonunun  $s$  noktasında Kuratowski üstten yarı-sürekli olması için gerek ve yeter koşul her  $t \in T$  için  $\varphi_t : S \rightarrow 2^{\mathbb{R}}$ ,  $\varphi_t(s) = d(t, \Gamma(s))$  şeklinde tanımlı fonksiyonunun alttan yarı-sürekli olmasıdır.

(ii)  $\Gamma$  fonksiyonunun  $s$  noktasında Kuratowski alttan yarı - sürekli olması için gerek ve yeter koşul her  $t \in T$  için  $\varphi_t : S \rightarrow 2^{\mathbb{R}}$ ,  $\varphi_t(s) = d(t, \Gamma(s))$  şeklinde tanımlı fonksiyonunun üstten yarı-sürekli olmasıdır.

**İspat. (i):**  $\Gamma$  fonksiyonu  $s_0 \in S$  noktasında üstten yarı sürekli olsun ve  $t_0 \in T$  noktası için  $\varphi_{t_0} : S \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu alttan yarı sürekli olmasın. Bu durumda

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \exists s_n \in B_{\frac{1}{n}}(s_0) \quad \varphi_{t_0}(s_0) - \varepsilon \geq \varphi_{t_0}(s_n)$$

gerçeklenir. Dolayısıyla

$$d(t_0, \Gamma(s_0)) - \varepsilon \geq d(t_0, \Gamma(s_n))$$

olur. Buradan  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(t_0, \Gamma(s_n)) \neq d(t_0, \Gamma(s_0))$  elde edilir. O halde  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma(s_n) \neq \Gamma(s)$  olur.  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s_0$  ve  $\Gamma$  Kuratowski üstten yarı-sürekli olması özellikleri kullanıldığında  $\limsup_{s \rightarrow s_0} \Gamma(s) \subseteq \Gamma(s_0)$  bulunur. Öte yandan  $\overline{\Gamma(s_0)} \subseteq \limsup_{s \rightarrow s_0} \Gamma(s)$  kapsaması her zaman sağlandığından ve  $\Gamma$  kapalı değerli olduğundan  $\limsup_{s \rightarrow s_0} \Gamma(s) = \Gamma(s_0)$  bulunur. Dolayısıyla  $\liminf_{s \rightarrow s_0} \Gamma(s) \neq \Gamma(s_0)$  gerçekleşir.  $\Gamma$  kapalı olduğundan  $\liminf_{s \rightarrow s_0} \Gamma(s) \subseteq \Gamma(s_0)$  kapsaması göz önüne alındığında  $\Gamma(s_0) \not\subseteq \liminf_{s \rightarrow s_0} \Gamma(s)$  elde edilir. Yani  $\exists t \in \Gamma(s_0) \quad t \notin \liminf_{s \rightarrow s_0} \Gamma(s)$  olur.  $\liminf_{s \rightarrow s_0} \Gamma(s)$  tanımı gereği  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$  olan  $(s_n)$  dizisi için  $t \notin \liminf_{n \rightarrow \infty} \Gamma(s_n)$  olur. Buradan her  $n \in \mathbb{N}$  için  $t_n \in \Gamma(s_n)$  olacak şekilde herhangi bir  $(t_n)$  dizisi için  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n \neq t$  elde edilir. Fakat  $\limsup_{s \rightarrow s_0} \Gamma(s) = \Gamma(s_0)$  olduğundan bir çelişki elde edilir.

Tersine her  $t \in T$  için  $\varphi_t : S \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu alttan yarı süreklili olsun.  $Gr\Gamma$  kümesinin kapalı olduğunu gösterelim. Herhangi bir  $(s_0, t_0) \in \overline{Gr\Gamma}$  alalım. Bu durumda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n, t_n) = (s_0, t_0)$$

olacak şekilde  $(s_n, t_n) \subseteq Gr\Gamma$  dizisi vardır. Hipotez göz önüne alındığında herhangi bir  $t_0 \in T$  için

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall s \in B_\delta(s_0) \quad \varphi_{t_0}(s_0) - \varepsilon < \varphi_{t_0}(s)$$

sağlanır.  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s_0$  olduğundan  $\delta$  pozitif sayısı için

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad s_n \in B_\delta(s_0)$$

gerçeklenir. Dolayısıyla

$$\forall n \geq N \quad d(t, \Gamma(s_0)) - \varepsilon < d(t_0, \Gamma(s_n))$$

olur. Her  $n \in \mathbb{N}$  için  $t_n \in \Gamma(s_n)$  ve  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t_0$  olduğu göz önüne alındığında

$$d(t_0, \Gamma(s_0)) - \varepsilon < d(t_0, \Gamma(s_n)) \leq d(t_0, t_n)$$

gerçeklenir ve buradan

$$d(t_0, \Gamma(s_0)) - \varepsilon < 0 \Leftrightarrow t_0 \in \overline{\Gamma(s_0)}$$

olur.  $\Gamma$  fonksiyonu kapalı değerli olduğundan  $t_0 \in \Gamma(s_0)$  elde edilir.

**(ii):** Önerme 4.1.35 ve Önerme 4.1.38 göz önüne alındığında istenen elde edilir.

**Önerme 4.1.45.**  $S$  ve  $T$  herhangi iki normlu uzay ve  $\Gamma : S \rightarrow 2^T$  kapalı değerli fonksiyon,  $s_0 \in S$  olmak üzere  $d_\Gamma : S \times T \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $d_\Gamma(x, y) = d(y, \Gamma(x))$  fonksiyonu tanımlansın. Bu durumda aşağıdakiler gerçekleşir ([24]).

**(i)**  $d_\Gamma$  fonksiyonu  $\{s_0\} \times T$  üzerinde alttan yarı-süreklili ise  $\Gamma$  fonksiyonu  $s_0$  noktasında üstten yarı-süreklilidir.

**(ii)**  $d_\Gamma$  fonksiyonu  $\{s_0\} \times T$  üzerinde üstten yarı-süreklili ise  $\Gamma$  fonksiyonu  $s_0$  noktasında alttan yarı-süreklilidir.

(iii)  $d_\Gamma$  fonksiyonu  $\{s_0\} \times T$  üzerinde sürekli ise  $\Gamma$  fonksiyonu  $s_0$  noktasında sürekli dir.

**İspat.**

(i):  $d_\Gamma$  fonksiyonu  $\{s_0\} \times T$  üzerinde alttan yarı-sürekli olsun.  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s_0$  olacak şekilde herhangi bir  $(s_n) \subseteq S$  dizisi ve herhangi bir  $t_0 \in \limsup \Gamma(s_n)$  alalım. Dolayısıyla

$$\exists t_{n_k} \in \Gamma(s_{n_k}) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} t_{n_k} = t_0$$

olur.  $d_\Gamma$  fonksiyonu  $(s_0, t_0) \in \{s_0\} \times T$  noktasında alttan yarı-sürekli olduğundan

$$d_\Gamma((s_0, t_0) \leq \liminf d_\Gamma(s_{n_k}, t_{n_k})$$

sağlanır. Her  $k \in \mathbb{N}$  için  $t_{n_k} \in \Gamma(s_{n_k})$  olduğundan  $\liminf d_\Gamma(s_{n_k}, t_{n_k}) = 0$  olduğundan  $d_\Gamma((s_0, t_0) = 0 \Leftrightarrow t_0 \in \overline{\Gamma(s_0)} = \Gamma(s_0)$  olur. O halde  $\limsup \Gamma(s_n) \subseteq \overline{\Gamma(s_0)}$  olduğundan  $\Gamma, s_0$  noktasından üstten yarı-sürekli olur.

(ii):  $d_\Gamma$  fonksiyonu  $\{s_0\} \times T$  üzerinde üstten yarı-sürekli olsun.  $\Gamma$  fonksiyonunun  $s_0$  noktasında alttan yarı-sürekli olmadığını kabul edelim. Bu durumda

$$\exists (s_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq S \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s_0 \quad \Gamma(s_0) \not\subseteq \liminf \Gamma(s_n)$$

gerçeklenir. O halde

$$\exists t_0 \in \Gamma(s_0) \quad t_0 \notin \liminf \Gamma(s_n)$$

olur. Dolayısıyla

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists N \geq n \quad t_0 \notin B_\varepsilon(\Gamma(s_n))$$

gerçeklenir. O halde

$$d_\Gamma(s_n, t_0) \geq \varepsilon \tag{4.10}$$

olur ve  $d_\Gamma$  üstten yarı-sürekliliği göz önüne alındığında

$$d_\Gamma(s_n, t_0) < d_\Gamma(s_0, t_0) + \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanır. Buradan (4.10) kullanıldığında

$$\varepsilon \leq d_{\Gamma}(s_n, t_0) < d_{\Gamma}(s_0, t_0) + \varepsilon \Leftrightarrow d_{\Gamma}(s_0, t_0) \neq 0 \Leftrightarrow t_0 \notin \overline{\Gamma(s_0)} = \Gamma(s_0)$$

çelişkisi elde edilir.

**(iii):** (i) ve (ii) nin bir sonucudur.

**Önerme 4.1.46.**  $\alpha \in ]0, 1]$  ve  $\Gamma : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$  kapalı değerli fonksiyon olsun.  $\Gamma$  fonksiyonu  $\alpha$ -Hölder sürekli olması için gerek ve yeter koşul  $p, r, x, y \in \mathbb{R}^n$  için

$$|d(p, \Gamma(x)) - d(r, \Gamma(y))| \leq |p - r| + H|x - y|^{\alpha} \quad (4.11)$$

gerçeklenmesidir ([24]).

**İspat.**  $\Gamma$  fonksiyonu  $\alpha$ -Hölder sürekli olsun. Herhangi  $p, r, x, y \in \mathbb{R}^n$  ve  $v \in \Gamma(x), z \in \Gamma(y)$  alalım.  $d$  fonksiyonunun tanımı gereği

$$d(p, \Gamma(x)) \leq |p - v|, \quad d(r, \Gamma(y)) \leq |r - z|$$

sağlanır. Bu durumda,

$$\begin{aligned} d(p, \Gamma(x)) - d(r, \Gamma(y)) &\leq |p - v| - |r - z| \\ &\leq |p - r| + |r - v| - |r - z| \\ &\leq |p - r| + |r - z| + |z - v| - |r - z| \\ &= |p - r| + |z - v| \\ &\leq |p - r| + H|x - y|^{\alpha} \end{aligned}$$

ve benzer şekilde,

$$d(r, \Gamma(y)) - d(p, \Gamma(x)) \leq |p - r| + H|x - y|^{\alpha}$$

sağlanır. Böylece (4.11) elde edilir.

Tersine (4.11) sağlansın. (4.11)'de  $p = r$  alınırsa  $\Gamma$  fonksiyonunun  $\alpha$ -Hölder sürekli olduğu elde edilir.

## 4.2 KÜME DEĞERLİ FONKSİYONLARIN SÜREKLİ SEÇİMLERİ İLE İLGİLİ BAZI SONUÇLAR

Bu bölümde öncelikle seçim teoremlerinde kullanılacak zayıf alttan yarı süreklilik kavramının diğer yarı süreklilik kavramları ile ilişkileri ve aksi örnekler verilecektir. Sonrasında bu teoremler için bazı ön sonuçlardan bahsedilecektir.

**Önerme 4.2.1.**  $(S, \tau)$  herhangi bir topolojik uzay,  $(T, d)$  herhangi bir metrik uzay ve  $\Gamma : S \rightarrow 2^T$  olsun. Aşağıdaki ifadeleri göz önüne alalım.

- (i)  $\Gamma$  alttan yarı süreklidir.
- (ii)  $\Gamma$  kuazi alttan yarı-süreklidir.
- (iii)  $\Gamma$  zayıf alttan yarı-süreklidir.

Bu durumda (i)  $\Rightarrow$  (ii)  $\Rightarrow$  (iii) geçişleri sağlanır ([30]).

**İspat.**

(i)  $\Rightarrow$  (ii): Herhangi bir  $\varepsilon$  pozitif sayısı ve  $s \in S$  alalım. Her  $t \in \Gamma(s)$  için  $\Gamma(s) \cap B_\varepsilon(t) \neq \emptyset$  ve  $\Gamma$  alttan yarı-süreklilik özelliği göz önüne alındığında  $s \in (\Gamma^{-1}(B_\varepsilon(t)))^\circ$  elde edilir. Dolayısıyla  $\Gamma$  kuazi alttan yarı-süreklidir.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii): Herhangi bir  $\varepsilon$  pozitif sayısı ve  $s \in S$  alalım.  $\Gamma$  kuazi alttan yarı-süreklilik olduğundan  $s \in (\Gamma^{-1}(B_\varepsilon(t)))^\circ$  olacak şekilde  $t \in T$  vardır. Dolayısıyla  $\Gamma$  zayıf alttan yarı-süreklidir.

**Önerme 4.2.2.**  $(S, \tau)$  herhangi bir topolojik uzay,  $(T, d)$  herhangi bir metrik uzay ve  $\Gamma : S \rightarrow 2^T$  olsun. Aşağıdaki ifadeleri göz önüne alalım.

- (i)  $\Gamma$  Hausdorff alttan yarı-süreklidir.
- (ii)  $\Gamma$  zayıf Hausdorff alttan yarı-süreklidir.
- (iii)  $\Gamma$  kuazi alttan yarı-süreklidir.
- (iv)  $\Gamma$  zayıf alttan yarı-süreklidir.

Bu durumda (i)  $\Rightarrow$  (ii)  $\Rightarrow$  (iii)  $\Rightarrow$  (iv) geçişleri sağlanır ([30]).

**İspat.**

(i)  $\Rightarrow$  (ii): Herhangi bir  $\varepsilon$  pozitif sayısı ve  $s_0 \in S$  alalım. Hipotezden

$$\exists \delta > 0 \quad \forall s \in B_\delta(s_0) \quad h^*(\Gamma(s_0), \Gamma(s)) < \varepsilon$$

sağlanır. Böylece zayıf Hausdorff alttan yarı-süreklilik tanımından  $U = B_\delta(s_0)$  ve  $s = s_0$  alınırsa istenen elde edilir.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii): Tanımdan kolayca görülür.

(iii)  $\Rightarrow$  (iv): Herhangi bir  $s_0 \in S$  noktası alalım. Bu durumda kuazi alttan yarı - süreklilik tanımında yer alan  $t \in \Gamma(s_0)$  elemanlarının  $\varepsilon$  yuvarları için (iv) gerçekleşir.

**Örnek 4.2.3.**  $\Phi : [-1, 1] \rightarrow 2^{\mathbb{R}}$ ,

$$\Phi(x) = \begin{cases} [-\frac{1}{n}, \infty[, & x \in \{-\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\} \\ ]-\infty, n], & x \in \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\} \\ \mathbb{R}, & \text{diğer noktalarda} \end{cases}$$

kapalı değerli fonksiyonu kuazi alttan yarı-süreklilik fakat alttan yarı-süreklilik ve zayıf Hausdorff alttan-yarı süreklilik değildir. [30]

**Örnek 4.2.4.**  $S = [0, 2]$ ,  $T = [0, 1]$  ve  $\Gamma : S \rightarrow 2^T$  olsun.

$$\Gamma(s) = \begin{cases} \{0\}, & s \in [0, 1[ \\ [0, 1], & s = 1 \\ \{1\}, & s \in ]1, 2] \end{cases}$$

fonksiyonu  $s = 1$  noktasında kuazi-alttan yarı süreklilik değildir. Dolayısıyla bu noktada zayıf Hausdorff alttan yarı-süreklilik ve Hausdorff alttan yarı-süreklilik değildir.  $s = 0$  noktasında alttan yarı-süreklilik ve  $\Gamma$  kompakt değerli olduğundan bu noktada Hausdorff alttan yarı-süreklilik [5].

**Örnek 4.2.5.**  $S = \mathbb{R}$ ,  $T = \mathbb{R}^2$ ,  $\Gamma : S \rightarrow 2^T$  olsun.  $\Gamma(s) = \{(s, ts) : t \in \mathbb{R}\}$  fonksiyonu alttan yarı-süreklilik fakat zayıf Hausdorff alttan yarı-süreklilik değildir [30].

**Örnek 4.2.6.**  $S = \mathbb{R}$ ,  $T = \mathbb{R}^2$ ,  $G : S \rightarrow 2^T$  olsun.

$$G(s) = \begin{cases} \{(t, 0) : t \in [0, \infty[), & s = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\} \\ \{(t, st) : t \in [-1, \infty[), & \text{diğer noktalarda} \end{cases}$$

fonksiyonu  $s = 0$  noktasında zayıf Hausdorff alttan yarı-sürekli ve alttan yarı-sürekli değildir fakat aynı noktada kuazi alttan yarı-sürekli'dir [29].

**Örnek 4.2.7.**  $S = T = [0, 1]$   $G : S \rightarrow 2^T$  olmak üzere,

$$G(s) = \begin{cases} [0, \frac{1}{2}], & s \in [0, \frac{1}{3}[ \\ [0, 1], & s \in [\frac{1}{3}, 1] \end{cases}$$

fonksiyonu zayıf alttan yarı-sürekli'dir fakat  $s = \frac{1}{3}$  noktasında kuazi alttan yarı-sürekli değildir.

**Not 4.2.8.** Örnek 4.2.3'de tanımlanan fonksiyon zayıf alttan yarı-sürekli'dir fakat  $x = \frac{1}{3}$  noktasında kuazi alttan yarı-sürekli değildir.

**Lemma 4.2.9.**  $(S, \tau)$  bir topolojik uzay,  $I$  boştan farklı bir indis kümesi ve  $\{U_\alpha : \alpha \in I\}$  topluluğu yerel sonlu olsun. Bu durumda,

$$\overline{\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha} = \bigcup_{\alpha \in I} \overline{U_\alpha}$$

eşitliği gerçekleşir ([28]).

**Lemma 4.2.10.**  $S$  parakompakt Hausdorff uzay ve  $\{U_\alpha : \alpha \in I\}$  topluluğu  $S$  kümesinin herhangi bir açık örtülüğü olsun. Bu durumda,

$$\overline{V_\alpha} \subseteq U_\alpha$$

olacak şekilde  $\{V_\alpha : \alpha \in I\}$  yerel sonlu bir açık örtülüğü vardır ([28]).

**İspat.**  $\mathcal{A} := \{A \in \tau : \exists \alpha \in I \quad \overline{A} \subseteq U_\alpha\}$  kümesini tanımlayalım. Önerme 2.0.7 göz önüne alındığında  $S$  kümesi regülerdir. O halde

$$\forall \alpha \in I \quad \exists A \in \tau \quad A \subseteq \overline{A} \subseteq U_\alpha$$

gerçeklenir. Dolayısıyla  $\mathcal{A}$  topluluğu  $S$  kümesinin bir örtülüğü olur.  $S$  parakompakt olduğundan  $\mathcal{A}$  nin incelmesi olacak şekilde yerel sonlu bir açık örtülüş vardır. Bu örtülüş  $\mathcal{B} := \{B_\beta : \beta \in K\}$  olsun. Şimdi  $\overline{B_\beta} \subseteq U_{\gamma(\beta)}$  olacak şekilde  $\gamma : K \rightarrow I$  fonksiyonunu tanımlayabiliriz. Her  $\alpha \in I$  için  $V_\alpha$  kümesini

$$\mathcal{B}_\alpha := \{B_\beta : \gamma(\beta) = \alpha\}$$

topluluğunun elemanlarının birleşimi şeklinde tanımlayalım. Dolayısıyla her  $B_\beta \in \mathcal{B}_\alpha$  için  $\overline{B_\beta} \subseteq U_\alpha$  olur.  $\mathcal{B}_\alpha$  topluluğu yerel sonlu olduğundan Önerme 4.2.9 dikkate alındığında  $\overline{V_\alpha} \subseteq U_\alpha$  gerçekleşir.

**Önerme 4.2.11.**  $S$  parakompakt Hausdorff uzay,  $I$  boştan farklı bir indis kümesi ve  $\{U_\alpha : \alpha \in I\}$  topluluğu  $S$  kümesinin herhangi bir açık örtülüğü olsun. Bu durumda  $S$  üzerinde  $\{U_\alpha\}$  topluluğunun bir incelmesi olacak şekilde birimin bir parçalanışı vardır ([28]).

**İspat.** Hipotez gerçekleşsin. Bu durumda Lemma 4.2.10'dan  $\{U_\alpha : \alpha \in I\}$  açık örtülüğü için  $\overline{V_\alpha} \subseteq U_\alpha$  olacak şekilde  $S$  nin yerel sonlu bir  $\{V_\alpha : \alpha \in I\}$  açık örtülüğü vardır. Benzer şekilde Lemma 4.2.10 göz önüne alındığında,  $\{V_\alpha : \alpha \in I\}$  topluluğu için  $\overline{W_\alpha} \subseteq V_\alpha$  olacak şekilde  $S$  nin yerel sonlu bir  $\{W_\alpha : \alpha \in I\}$  açık örtülüğü vardır.  $S$  normal olduğundan  $\overline{W_\alpha}$  ve  $S \setminus V_\alpha$  ayrık, kapalı kümeleri için

$$\psi_\alpha = \begin{cases} 1, & s \in \overline{W_\alpha} \\ 0, & s \in X \setminus V_\alpha \end{cases}$$

şeklinde tanımlı bir  $\psi_\alpha : S \rightarrow [0, 1]$  sürekli fonksiyonu vardır. Her  $s \in V_\alpha$  için  $\psi_\alpha(s) \neq 0$  olduğundan  $V_\alpha = \text{supp}\psi_\alpha$  sağlanır. Buradan  $\text{supp}\psi_\alpha \subseteq \overline{V_\alpha} \subseteq U_\alpha$  elde edilir. Önerme 2.0.5 göz önüne alındığında  $\{\overline{V_\alpha} : \alpha \in I\}$  topluluğu yerel sonlu olur. Dolayısıyla  $\{\text{supp}\psi_\alpha : \alpha \in I\}$  topluluğu da yerel sonlu olur.

$$\Psi : S \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Psi(x) = \sum_{\alpha \in I} \psi_\alpha(s)$$

fonsiyonunu tanımlayalım. Herhangi bir  $s \in S$  alalım. Bu durumda

$$\exists \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\} \subseteq I, \quad \text{supp}\psi_{\alpha_i} \cap U_s \neq \emptyset \quad i \in \{1, 2, \dots, k\}$$

olacak şekilde  $U_s \in \mathcal{V}(s)$  vardır. Dolayısıyla  $\Psi$  fonksiyonu bu komşuluk üzerinde sonlu toplama eşittir ve her  $\alpha \in I$  için  $\text{supp}\psi_\alpha$  sürekli olduğundan  $\Psi$  fonksiyonu  $U_s$  komşuluğu üzerinde süreklidir. O halde  $\Psi$  fonksiyonu  $S$  üzerinde süreklidir. Şimdi

$$\Phi_\alpha(s) = \frac{\psi_\alpha(s)}{\Psi(s)}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Herhangi bir  $s \in S$  için  $\sum_{\alpha \in I} \Phi_\alpha(s) = 1$  olduğunu gösterelim.  $\{\text{supp}\psi_\alpha : \alpha \in I\}$  yerel sonlu olduğundan

$$\Psi(x) = \psi_{\alpha_1}(s) + \psi_{\alpha_2}(s) + \dots + \psi_{\alpha_k}(s)$$

şeklindedir. Dolayısıyla

$$\sum_{\alpha \in I} \Phi_\alpha(s) = 1$$

elde edilir. Böylece istenilen birimin parçalanışı  $\{\Phi_\alpha : \alpha \in I\}$  şeklinde belirlenmiş olur.

**Önerme 4.2.12.** (*Michael Seçim Teoremi*)

$S$  bir metrik uzay,  $T$  bir Banach uzay ve  $\Gamma : S \rightarrow 2^T$  kapalı - konveks değerli alttan yarı-süreklili fonksiyon olsun. Bu durumda  $\Gamma$  küme değerli fonksiyonunun sürekli bir seçimi vardır ([2]).

**İspat.** Bu ispatı üç aşamada yapacağız.

1. *Aşama:* Herhangi bir  $\Phi : S \rightarrow 2^T$  alttan yarı-süreklili ve konveks değerli fonksiyonu ve herhangi bir  $\varepsilon$  pozitif sayısı için

$$\forall s \in S, \quad d(\varphi(s), \Phi(s)) \leq \varepsilon$$

olacak şekilde  $\varphi : S \rightarrow T$  sürekli fonksiyonunun olduğunu gösterelim.  $\Phi$  alttan yarı-süreklili olduğundan herhangi bir  $s \in S$  ve  $t \in \Phi(s)$  alındığında  $B_\varepsilon(t)$  kümesi için

$$\exists \delta_s > 0 \quad \forall z \in B_{\delta_s}(s) \quad \Phi(z) \cap B_\varepsilon(t) \neq \emptyset$$

gerçeklenir. Önerme 2.0.8'den  $S$  kümesi parakompakttır. Dolayısıyla  $\{B_{\delta_s}(s) : s \in S\}$  açık örtülüşünün  $\{U_s : s \in S\}$  yerel sonlu ve  $S$  kümesinin açık örtülüşü olacak şekilde bir incelenmesi vardır. Önerme 4.2.11'den  $\{U_s\}$  topluluğunun incelenmesi olacak şekilde  $S$  üzerinde

$$\{\pi_s(\cdot) : s \in S\}$$

birimin parçalanışı vardır. Şimdi herhangi bir  $\xi \in S$  için

$$\varphi(\xi) = \sum_{s \in S} \pi_s(\xi) t_s$$

şeklinde tanımlı  $\varphi : S \rightarrow T$  fonksiyonunu ele alalım.  $\{\text{supp} \pi_s : s \in S\}$  kümesinin yerel sonlu olmasından dolayı  $\varphi(\xi)$  sonlu toplamdır. Herhangi bir  $\xi \in S$  seçelim. Bu durumda her  $s \in S$  için  $\pi_s(\xi) > 0$  ve  $U_s \subseteq B_{\delta_s}(s)$  özelliklerinden fonksiyonun alttan yarı-sürekliliğinden ötürü

$$t_s \in \Phi(\xi) + \varepsilon B_1(0)$$

sağlanır.  $\Phi(\xi) + \varepsilon B_1(0)$  kümesi konveks olduğundan  $\varphi(\xi) \in \Phi(\xi) + \varepsilon B_1(0)$  olur. Dolayısıyla

$$d(\varphi(\xi), \Phi(\xi)) \leq \varepsilon$$

elde edilir.

2. Aşama: Şimdi aşağıdaki koşulları sağlayan ve her  $n \in \mathbb{N}$  için sürekli olan  $\gamma_n : S \rightarrow T$  fonksiyonlar dizisinin var olduğunu tümevarım yöntemi ile gösterelim.

$$(i) \forall \xi \in S \quad d(\gamma_n(\xi), \Gamma(\xi)) \leq \frac{1}{2^n}$$

$$(ii) \forall \xi \in S \quad \|\gamma_n(\xi) - \gamma_{n-1}(\xi)\| \leq \frac{1}{2^{n-2}}$$

$n = 1$  için 1. Aşamadan  $\varepsilon = \frac{1}{2}$  ve  $\Phi = \Gamma$  alınırsa istenen elde edilir.  $n = v$  için bu sürekli fonksiyon dizisinin var olduğunu kabul edelim ve  $n = v + 1$  için de var olduğunu gösterelim.

$$\Phi(\xi) = (\gamma_v(\xi) + \frac{1}{2^v} B_1(0)) \cap \Gamma(\xi)$$

kümesini tanımlayalım.  $\Gamma$  konveks değerli ve  $\gamma_v(\xi) + \frac{1}{2^v} B_1(0)$  kümesi de konveks olduğundan  $\Phi(\xi)$  konvektir. Şimdi  $\Phi$  fonksiyonunun alttan yarı-sürekliliğini gösterelim. Herhangi bir  $s \in S$  ve  $t \in \Phi(s)$ ,  $\varepsilon$  pozitif sayısı alalım. Bu durumda

$$t \in \gamma_v(\xi) + \frac{1}{2^v} B_1(0)$$

olduğundan

$$d(t, \gamma_v(s)) < \frac{1}{2^v}$$

sağlanır ve böylece

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad d(t, \gamma_v(s)) = \frac{1}{2^v} - \varepsilon_0$$

olur.  $\Gamma$  fonksiyonu alttan yarı-sürekli olduğundan  $k = \min\{\frac{\varepsilon_0}{2}, \varepsilon\}$  için

$$\exists \delta_1 > 0 \quad \forall s' \in B_{\delta_1}(s) \quad \Gamma(s') \cap B_k(t) \neq \emptyset$$

gerçeklenir. Benzer şekilde  $\gamma_v$  fonksiyonu sürekli olduğundan

$$\exists \delta_2 > 0 \quad \forall s' \in B_{\delta_2}(s) \quad d(\gamma_v(s), \gamma_v(s')) < \frac{\varepsilon_0}{2}$$

gerçeklenir. Şimdi  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$  alınırsa

$$t' \in \Gamma(s') \cap B_k(t)$$

noktası için

$$\begin{aligned} d(t', \gamma_v(s')) &< d(t', t) + d(t, \gamma_v(s')) \\ &\leq d(t', t) + d(t, \gamma_v(s)) + d(\gamma_v(s'), \gamma_v(s)) \\ &< k + \frac{1}{2^v} - \varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_0}{2} \\ &\leq \frac{\varepsilon_0}{2} + \frac{1}{2^v} - \varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_0}{2} = \frac{1}{2^v} \end{aligned}$$

olduğundan  $t' \in \Phi(s')$  elde edilir. Dolayısıyla

$$\Phi(s') \cap B_\varepsilon(t) \neq \emptyset$$

bulunur. O halde 1. Aşamadan  $\Phi$  fonksiyonunun

$$d(\varphi(\xi), \Phi(\xi)) \leq \frac{1}{2^{v+1}}$$

olacak şekilde  $\varphi : S \rightarrow T$  sürekli seçimi vardır.  $\varphi(\xi) = \gamma_{v+1}(\xi)$  alınırsa (i) koşulu sağlanır.

Buradan

$$\gamma_{v+1}(\xi) \in \Phi(\xi) + \frac{1}{2^{v+1}}B_1(0) \subseteq \gamma_v + \left(\frac{1}{2^v} + \frac{1}{2^{v+1}}\right)B_1(0)$$

gerçeklendiğinden

$$\|\gamma_{v+1}(\xi) - \gamma_v(\xi)\| \leq \frac{1}{2^{v-1}} \quad (4.12)$$

elde edilir. Böylece  $n = v + 1$  için (ii) sağlanmış olur.

**3. Aşama:** Bu aşamada oluşturulan fonksiyon dizisinin limiti ile seçim fonksiyonunu belirleyeceğiz. (4.12)'den  $\sum_{n=0}^{\infty} \|\gamma_{n+2}(\xi) - \gamma_{n+1}(\xi)\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  elde ederiz ve  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  geometrik serisi yakınsak olduğundan  $\sum_{n=0}^{\infty} \|\gamma_{n+2}(\xi) - \gamma_{n+1}(\xi)\|$  toplamı sonlu olur. Dolayısıyla  $\{\gamma_n : n \in \mathbb{N}\}$  fonksiyon dizisi Cauchy dizisidir.  $C(S)$  sürekli fonksiyonlar uzayı Banach uzayı olduğundan  $\{\gamma_n\}$  fonksiyon dizisi sürekli bir  $\gamma : S \rightarrow T$  fonksiyonuna yakınsar. (i) koşulu gereği her  $\xi \in S$  için  $d(\gamma(\xi), \Gamma(\xi)) = 0$  elde edilir ve  $\Gamma$  fonksiyonu kapalı değerli olduğundan  $\gamma(\xi) \in \Gamma(\xi)$  buluruz. Böylece ispat tamamlanmış olur.

**Lemma 4.2.13.**  $(S, \tau)$  parakompakt uzay,  $(T, \|\cdot\|)$  Banach uzayı ve  $\Gamma : S \rightarrow 2^T$  kapalı-konveks değerli kuazi-alttan yarı sürekli olsun. Herhangi bir  $\varepsilon$  pozitif sayısı,  $S$  in herhangi bir  $\mathcal{U}$  açık örtülüğü ve  $\Gamma$  fonksiyonunun herhangi bir  $g$  seçimi için

$$d(\gamma(s), \Gamma(s)) \leq \varepsilon, \quad \gamma(s) \in co\left\{g\left(\bigcup\{U \in \mathcal{U} : s \in U\}\right)\right\}$$

koşullarını sağlayan sürekli bir  $\gamma : S \rightarrow T$  fonksiyonu elde edilir ([30]).

**İspat.** Herhangi bir  $s \in S$  ve  $U_s \in \mathfrak{U}(s)$  alalım.  $\Gamma$  kuazi alttan yarı - sürekli olduğundan  $\varepsilon$  pozitif sayısı ve  $U_s \in \mathcal{V}(s)$  için

$$\exists q(s) \in U_s \quad \forall t \in \Gamma(q(s)) \quad s \in (\Gamma^{-}(B_\varepsilon(t)))^\circ \quad (4.13)$$

sağlanır.  $h$  fonksiyonu  $\Gamma$  fonksiyonunun seçimi olduğundan  $g(q(s)) \in \Gamma(q(s))$  olur. Dolayısıyla  $y = g(q(s))$  için (4.13) dikkate alındığında

$$\exists V \in \mathcal{V}(s) \quad \forall s' \in V \quad \Gamma(s') \cap B_\varepsilon(g(q(s))) \neq \emptyset$$

sağlanır.  $S \subseteq \{U(s) \cap V(s) : s \in S\}$  ve  $S$  parakompakt uzay olduğundan  $\{U(s) \cap V(s) : s \in S\}$

açık örtülüşünün incelenmesi olacak şekilde  $\{e_\alpha : \alpha \in I\}$  yerel sonlu, birimin parçalanışı vardır. Dolayısıyla

$$\forall \alpha \in I \quad \exists s_\alpha \in S \quad \text{supp } e_\alpha \subseteq U(s_\alpha) \cap V(s_\alpha)$$

olur.

Herhangi bir  $s_0 \in S$  ve  $q(s_\alpha) \in U(s_\alpha)$  olmak üzere,

$$\gamma(s_0) = \sum_{\alpha \in I} e_\alpha(s_0)g(q(s_\alpha))$$

tanımlayalım. Her  $\alpha \in I$  için  $e_\alpha$  fonksiyonu sürekli olduğundan  $\gamma$  fonksiyonu sürekli dir.  $\{e_\alpha : \alpha \in I\}$  sürekli fonksiyonlar topluluğu yerel sonlu olduğundan  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\} \subseteq I$  için

$$\gamma(s_0) = e_{\alpha_1}(s_0)g(q(s_{\alpha_1})) + e_{\alpha_2}(s_0)g(q(s_{\alpha_2})) + \dots + e_{\alpha_k}(s_0)g(q(s_{\alpha_k}))$$

olur. Her  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$  için  $e_{\alpha_i}(s_0) > 0$  olduğundan  $s_0 \in \text{supp } e_{\alpha_i} \subseteq V(s_{\alpha_i})$  ve  $\Gamma$  kuazi-alttan yarı sürekliliği göz önüne alındığında

$$\Gamma(s_0) \cap B_\varepsilon(g(q(s_{\alpha_i}))) \neq \emptyset$$

sağlanır. Dolayısıyla

$$\exists z_{\alpha_i} \in \Gamma(s_0) \quad d((g(q(s_{\alpha_i}))), z_{\alpha_i}) < \varepsilon$$

gerçeklenir. Bu durumda

$$\sum_{i=1}^k e_{\alpha_i}(s_0) = 1$$

ve  $\Gamma(s_0)$  kümesinin konveks olduğu dikkate alındığında  $e_{\alpha_1}(s_0)z_{\alpha_1} + \dots + e_{\alpha_k}(s_0)z_{\alpha_k} \in \Gamma(s_0)$  olur. Buradan

$$\begin{aligned} & \|\gamma(s_0) - (e_{\alpha_1}(s_0)z_{\alpha_1} + \dots + e_{\alpha_k}(s_0)z_{\alpha_k})\| \leq \\ & e_{\alpha_1}(s_0)\|g(q(s_{\alpha_1})) - z_{\alpha_1}\| + \dots + e_{\alpha_k}(s_0)\|g(q(s_{\alpha_k})) - z_{\alpha_k}\| \\ & e_{\alpha_1}(s_0)\varepsilon + \dots + e_{\alpha_k}(s_0)\varepsilon = \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla  $d(\gamma(s_0), \Gamma(s_0)) < \varepsilon$  bulunur.  $\bigcup\{U \in \mathcal{U} : s_0 \in U\} = St(s_0, U)$  diyelim. Şimdi  $\gamma(s_0) \in co\{g(St(s_0, U))\}$  olduğunu gösterelim. Benzer şekilde her  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$  için  $e_{\alpha_i}(s_0) > 0$  olduğundan  $s_0 \in \text{supp } e_{\alpha_i} \subseteq U(s_{\alpha_i}) \cap V(s_{\alpha_i})$  sağlanır. O halde  $U(x_{\alpha_i}) \in St(s_0, U)$

gerçeklenir. Buradan  $q(s_{\alpha_i}) \in U(s_{\alpha_i})$  olması göz önüne alınırsa  $g(q(s_{\alpha_i})) \in g(St(s_0, U))$  elde edilir. Dolayısıyla  $\gamma(s_0) \in co\{g(St(s_0, U))\}$  bulunur.

**Lemma 4.2.14.**  $(S, \tau)$  parakompakt uzay,  $(T, \|\cdot\|)$  Banach uzayı ve  $\Gamma : S \rightarrow 2^T$  kapalı-konveks değerli kuazi-alttan yarı süreklili olsun. Herhangi  $\varepsilon, \delta$  pozitif sayıları ve  $d(g(s), \Gamma(s)) \leq \delta$  olacak şekilde sürekli bir  $g$  fonksiyonu için aşağıdaki koşulları sağlayan sürekli bir  $\gamma : S \rightarrow T$  fonksiyonu vardır ([30]).

$$\|\gamma(s) - g(s)\| < \varepsilon + 2\delta, \quad d(\gamma(s), \Gamma(s)) \leq \delta$$

**İspat.** Herhangi bir  $s \in S$  ve  $\varepsilon$  pozitif sayısını alalım.  $d(g(s), \Gamma(s)) < \varepsilon$  eşitsizliği sağladığından  $h(s) \in B_\varepsilon(g(s))$  olacak şekilde  $h(s) \in \Gamma(s)$  vardır. Dolayısıyla  $h$  fonksiyonu  $\Gamma$  için bir seçim olur.  $w = \{g^{-1}(B_\delta(t)) : t \in T\}$  topluluğu  $S$  için bir açık örtülüdür. Bu durumda  $(h, w, \delta)$  üçlüsü için Önerme 4.2.13 göz önüne alındığında  $\gamma(s) \in co\{h(St(w, s))\}$  ve  $d(\gamma(s), \Gamma(s)) \leq \delta$  özelliklerini sağlayan bir  $\gamma$  sürekli fonksiyonu vardır.

Şimdi herhangi bir  $s \in S$  için  $\|\gamma(s) - g(s)\| < \varepsilon + 2\delta$  eşitsizliğinin sağlandığını gösterelim.  $\gamma(s) \in co\{h(St(w, s))\}$  olduğundan  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$  olacak şekilde  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  pozitif sayıları ve  $s_1, s_2, \dots, s_n \in St(w, s)$  vardır ve  $\gamma(s) = \alpha_1 h(s_1) + \alpha_2 h(s_2) + \dots + \alpha_n h(s_n)$  olur.  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  için  $s_i \in St(w, s)$  olduğundan

$$\exists t_i \in T \quad s_i \in g^{-1}(B_\delta(t_i))$$

ve  $s \in g^{-1}(B_\delta(t_i))$  sağlanır. Bu durumda  $g(s_i), g(s) \in g^{-1}(B_\delta(t_i))$  sağlanır. Buradan

$$\|g(s_i) - g(s)\| \leq \|g(s_i) - t_i\| + \|t_i - g(s)\| < 2\delta$$

elde edilir.

**Önerme 4.2.15.**  $(S, \tau)$  parakompakt uzay,  $(T, \|\cdot\|)$  Banach uzayı ve  $\Gamma : S \rightarrow 2^T$  kapalı-konveks değerli kuazi alttan yarı - süreklili olsun. Bu durumda  $\Gamma$  fonksiyonunun sürekli bir seçimi vardır ([30]).

**İspat.** Lemma 4.2.13'den  $\varepsilon = 1$  için sürekli  $\gamma_1$  seçimi vardır. Lemma 4.2.14 göz önüne

alındığında  $\varepsilon = 1$ ,  $\delta = 2^{-1}$ ,  $\gamma_1$  için  $\gamma_2$  seçimi vardır ve

$$\|\gamma_1 - \gamma_2\|_\infty < 2$$

eşitsizliği sağlanır. Benzer şekilde  $\varepsilon = 2^{-1}$ ,  $\delta = 2^{-2}$ ,  $\gamma_2$  için Lemma 4.2.14'den sürekli bir  $\gamma_3$  seçimi vardır ve

$$\|\gamma_3 - \gamma_2\|_\infty < 1$$

eşitsizliği sağlanır. Adımlara bu şekilde devam edilirse  $\varepsilon = 2^{-n+1}$ ,  $\delta = 2^{-n}$  ve  $\gamma_n$  için Lemma 4.2.14'den sürekli bir  $\gamma_{n+1}$  seçimi vardır ve

$$\|\gamma_{n+1} - \gamma_n\|_\infty < 2^{-n+1}$$

eşitsizliği sağlanır. Buradan  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  geometrik serisi yakınsak olduğundan  $\sum_{n=1}^{\infty} \|\gamma_{n+1} - \gamma_n\| < \infty$  olur. Dolayısıyla  $(\gamma_n)$  sürekli fonksiyon dizisi Cauchy dizisi olur.  $C(S)$ , Banach uzayı olduğundan  $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = \gamma$  olacak şekilde  $\gamma$  sürekli fonksiyon vardır. Şimdi bu fonksiyonun  $\Gamma$  için seçim olduğunu gösterelim. Herhangi bir  $s \in S$  alalım. Her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\gamma_n$ ,  $2^{-n+1}$  seçim olduğundan

$$d(\gamma_n(s), \Gamma(s)) < 2^{-n+1}$$

olur. Dolayısıyla limite geçerse

$$d(\gamma(s), \Gamma(s)) < \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n+1} = 0$$

ve  $\Gamma$  kapalı değerli olduğundan  $\gamma(s) \in \Gamma(s)$  elde edilir. Dolayısıyla  $\gamma$  sürekli fonksiyonu  $\Gamma$  için bir seçim olur.

**Önerme 4.2.16.**  $(S, \tau)$  topolojik uzay,  $(T, d)$  metrik uzay ve  $\Phi : S \rightarrow 2^T$  kapalı değerli kuazi alttan yarı - sürekli fonksiyon olsun.  $\Phi$  fonksiyonunun alttan yarı sürekli bir seçimi vardır ([16]).

### 4.3 BİR DİFERANSİYEL DAHİL ETME PROBLEMİYLE İLGİLİ BAZI SONUÇLAR

Bu bölümde  $G : S \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n} \setminus \{\emptyset\}$  küme değerli fonksiyon ile verilen diferansiyel dahil etme ile ilgili Cauchy problemini göz önüne alalım

$$\dot{x}(s) \in G(s, x(s)) \quad (4.14)$$

$$x(0) = c \quad (4.15)$$

burada  $b > 0, c \in \mathbb{R}^n$  ve  $S$  kümesi  $[0, b] \times \mathbb{R}^n$  uzayının (çarpım topolojisine göre) açık bir alt kümesidir.

(4.15) başlangıç koşulunu ve (4.14) diferansiyel dahil etmesini hemen her yerde  $s \in [0, b]$  için sağlayan bir  $x \in M([0, b])$  fonksiyonuna *problemin mutlak sürekli (Caratheodory tipli) çözümü* denir.

(4.14) - (4.15) problemini sağlayan sürekli diferansiyellenebilir bir  $x$  fonksiyonuna ise problemin *sürekli diferansiyellenebilir çözümü* denir.

**Önerme 4.3.1.**  $v \in M([0, b]), \delta > 0$  ve

$$\Omega_\delta(v) := \{(s, r) \in [0, b] \times \mathbb{R}^n : s \in [0, b], |r - v(s)| \leq \delta\}$$

olmak üzere (4.14) - (4.15) problemi için aşağıdaki hipotezler sağlansın.

(i)  $\Omega_\delta(v) \subseteq S$  ve  $G$  fonksiyonu  $\Omega_\delta(v)$  kümesi üzerinde kompakt değerli olsun.

(ii)  $v \in M([0, b])$  fonksiyonu problemin bir çözümü olsun.

(iii)  $G(s, r) : s$ -değişkeni üzerinde sürekli ve  $\Omega_\delta(v)$  kümesinde  $r$ -değişkeni üzerinden aşağıdaki şekilde ( $l$  sabiti ile) Lipschitz sürekli olsun.

$$\exists l > 0 \quad \forall (t, x), (s, r) \in \Omega_\delta(v) \quad h(G(t, x), G(s, r)) \leq l|r - x|.$$

Bu durumda aşağıdaki koşulları sağlayan sürekli diferansiyellenebilir bir  $w : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$

fonksiyonu vardır,

$$\|v - w\|_\infty < \delta, \quad \int_0^b d(\dot{w}(s), G(s, v(s))) ds < \delta$$

**İspat.**  $\Omega_\delta(v)$  kümesi kompakt ve  $G$  fonksiyonu  $\Omega_\delta(v)$  kümesi üzerinde üstten yarı-sürekli ve kompakt değerli olduğundan Önerme 4.1.21'den  $G(\Omega_\delta(v)) \subseteq \mathbb{R}^n$  kümesi kompakt olur. Bu durumda

$$\exists k := \sup\{|a| : a \in G(\Omega_\delta(v))\} \in \mathbb{R}$$

sağlanır.  $v \in M([0, b])$  olduğundan

$$\exists \varphi \in L^1[0, b], \quad \forall s \in [0, b], \quad v(s) = c + \int_0^s \varphi(\lambda) d\lambda,$$

bulunur.  $\varphi$  fonksiyonu ve  $\varepsilon \in ]0, \frac{\delta}{2k(1+lb)}[$  için Önerme 2.0.11'de verilen Lusin Teoremi kullanılarak aşağıdaki koşulları sağlayacak şekilde sürekli bir  $\psi : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  fonksiyonu elde edilir,

$$\mu(\{s : \varphi(s) \neq \psi(s)\}) < \varepsilon$$

$$\sup\{|\psi(s)| : s \in [0, b]\} \leq \sup\{|\varphi(s)| : s \in [0, b]\}. \quad (4.16)$$

Üstelik  $v$ , problemin bir çözümü olduğu için (4.16)'dan ötürü

$$|\psi(s)| \leq |\varphi(s)| \leq k, \quad h.h \quad s \in [0, b] \quad (4.17)$$

sağlanır. Şimdi aşağıdaki şekilde  $w : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  sürekli fonksiyonu tanımlayalım,

$$w(s) = c + \int_0^s \psi(\lambda) d\lambda$$

(4.16) ve (4.17) özelliklerinden  $s \in [0, b]$  için aşağıdakiler sağlanır.

$$\begin{aligned}
|w(s) - v(s)| &= \left| \int_0^s (\psi(\lambda) - \varphi(\lambda)) d\lambda \right| \\
&\leq \int_0^b |\psi(\lambda) - \varphi(\lambda)| d\lambda \\
&= \int_{[0, b] \setminus \{s: \varphi(s) \neq \psi(s)\}} |\psi(\lambda) - \varphi(\lambda)| d\lambda \\
&\leq 2k\mu(\{s: \varphi(s) \neq \psi(s)\}) < 2k\varepsilon < \delta
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Böylece  $\{(s, w(s)) : s \in [0, b]\} \subseteq \Omega_{\frac{\delta}{2}}(v)$  elde edilir.  $v$  nin çözüm olması,  $G$  fonksiyonunun Lipschitz özelliği ve (4.18) deki eşitsizlik kullanılarak aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır.

$$\begin{aligned}
\int_0^b d(\dot{w}(\lambda), G(\lambda, w(\lambda))) d\lambda &\leq \int_0^b d(\dot{w}(\lambda), G(\lambda, v(\lambda))) d\lambda + \int_0^b h(G(\lambda, v(\lambda)), G(\lambda, w(\lambda))) d\lambda \\
&\leq \int_0^b |\dot{w}(\lambda) - \dot{v}(\lambda)| d\lambda + l \int_0^b |w(\lambda) - v(\lambda)| d\lambda \\
&\leq \int_0^b |\dot{w}(\lambda) - \dot{v}(\lambda)| d\lambda + l \int_0^b \left( \int_{[0, b] \setminus \{s: \varphi(s) \neq \psi(s)\}} |\psi(\lambda) - \varphi(\lambda)| d\lambda \right) \\
&\leq 2k\varepsilon(1 + lb) < \delta.
\end{aligned}$$

**Not 4.3.2.** Dikkat edilecek olursa, diferansiyel denklem teorisindeki Picard'ın yaklaşımlar yönteminin [16] çalışmasındaki gibi diferansiyel dahil etmeler için kullanımıyla, bu teoremin bir sonucu olarak (4.14)-(4.15) probleminin sürekli diferansiyellenebilir yaklaşımları belirlenecektir. Böylece [19] çalışmasında verilen sonuçlar göz önüne alındığında, bu yaklaşımlar ile problemin sürekli diferansiyellenebilir çözümünün elde edilmesi de mümkün olacaktır.

## 5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında, küme değerli fonksiyonlar için üstten yarı-süreklilik, alttan yarı-süreklilik, Hausdorff yarı-süreklilik, Kuratowski yarı-süreklilik, zayıf yarı-süreklilik gibi bilinen bazı yarı-süreklilik kavramları ve bunlar arasındaki bilinen bazı ilişkiler incelenmiştir. Küme değerli fonksiyonlar için yarı-süreklilik kavramlarının, küme değerli fonksiyonların sürekli seçimleri konusunda bilinen bazı uygulamaları araştırılmıştır. Küme değerli fonksiyonların bir uygulama alanı olan, diferansiyel dahil etmelerle ilgili bir Cauchy probleminin mutlak sürekli çözümü ile sürekli diferansiyellenebilir yaklaşımlarla belirlenebilecek çözümü arasında ilişki niteliğine bir sonuç elde edilmiştir.

## KAYNAKLAR

- [1]. AUBIN, J.P., FRANKOWSKA H., 1990, *Set Valued Analysis*, Birkhauser, Boston.
- [2]. AUBIN, J.P., CELLINA, A., 1984, *Differential Inclusions Set-Valued Maps and Viability Theory*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, Germany.
- [3]. AUMANN, R.J., 1965, *Integrals of Set-Valued Maps*, J. Math. Anal. Appl., 12, 1-12.
- [4]. AUMANN, R.J., 1967, *Measurable Utility and The Measurable Choice Theorem*, La Decision, Actes Coll. Int. du CNRS, AIXen Provence, 15-26.
- [5]. ARUTYUNOV, A.V., OBUKHOVSKII, V. , 2017, *Convex and Set Valued Analysis*, Walter De Gruyter GmbH, Berlin / Boston.
- [6]. BOULIGAND G., 1932, *Introduction á la Geometrie Infinitesimale Directe*, Gauthier, Villars, Paris.
- [7]. CASTAING C.H., VALADIE, M., 1977, *Convex Analysis and Measurable Multifunctions*, Springer-Verlag, Lecture Notes in Math. , 580.
- [8]. CLARKE, F. H., 1990, *Optimization and Nonsmooth Analysis*, SIAM, Philadelphia.
- [9]. DURU, H. , 2023, *Topolojiye Giriş*, Nobel Akademik Yayıncılık, Ankara, Türkiye.
- [10]. DRIVER, B.K., 2003, *Analysis Tools with Applications*, Springer.
- [11]. EDGAR, G., 2008, *Measure Topology and Fractal Geometry*, Springer Science+Business Media , LLC, New York, USA, Second Edition.
- [12]. FILIPPOV, A.F., 1962, *On Certain Questions in the Theory of Optimal Control*, SIAM J. Control, 1, 76-84.
- [13]. FILIPPOV, A.F. , 1967, *Classical Solutions of Differential Equations with Multivalued Right-Hand Side* , SIAM J. Control, Vol. 5, 609-624.
- [14]. FILIPPOV, A.F., 1988, *Differential Equations with Discontinuous Right-Hand Sides*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands.
- [15]. FIORENZA, R., 2016, *Hölder and Locally Hölder Continuous Functions and Open Sets of Class  $C^k$  ,  $C^{k,\lambda}$*  , Springer International Publishing AG.
- [16]. GUTEV, V.G., 1993, *Selection Theorem Under an Assumption Weaker Than Lower Semi-Continuity*, Institute of Mathematics, Bulgarian Academy of Science, 1090 Sofia, Bulgaria.
- [17]. HAUSDORFF, F., 1914, *Grundzuge der Mengenlehre, Von Veit, Leipzig. Published in English as: Set Theory* , 3rd edition, Chelsea, New York.

- [18]. HU, S. PAPAGEORGIOU, N.S., 1997, *Handbook of Multivalued Analysis*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, Vol I. Theory.
- [19]. İLTER, S., DURU, H., ÖZTÜRK, H.N., KOCA, S., 2023, *A Note on Global Classical Solutions to a Cauchy Problem*, Euro-Tbilisi Mathematical Journal, Georgia (baskı aşamasında).
- [20]. KAKUTANI, S., 1941, *A Generalization of Brouwer's Fixed Point Theorem*, Duke Math J., 8, 457-459.
- [21]. KOLMANOVSKII, V., MYSHKIS, A., 1999, *Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, Vol II. Applications.
- [22]. KURATOWSKI, K., 1966, *Topology*, Volume I, Academic Press, New York.
- [23]. KISIELEWICZ, M., 1991, *Differential Inclusions and Optimal Control*, Polish Scientific Publishers, Kluwer Academic Publishers.
- [24]. LUDERER, B., MINCHENKO, L. and SATSURA, T., 2002, *Multivalued Analysis and Nonlinear Programming Problems with Perturbations*, Springer Science+Business Media, Dordrecht, Vol 66.
- [25]. MICHAEL, E., 1956, *Continuous Selections I*, Annals of Math., 63, 361-381.
- [26]. MICHAEL, E., 1956, *Continuous Selections II*, Annals of Math., 64, 562-580.
- [27]. MICHAEL, E., 1957, *Continuous Selections III*, Annals of Math., 65, 375-390.
- [28]. MUNKRES, J. R., 1974, *Topology A First Course*, Prentice Hall Inc.
- [29]. PRZESLAWSKI, K., RYBINSKI, L.E., 1990, *Michael Selection Theorem Under Weak Lower Semicontinuity Assumption*, American Mathematical Society, Vol 109, No 2.
- [30]. REPOVS, D., SEMENOV, P.V., 1998, *Continuous Selections of Multivalued Mappings*, Springer, Vol 455, ISBN: 978-94-017-1162-3.
- [31]. VINTER, R., 2000, *Optimal Control*, Birkhauser, Boston.
- [32]. ROCKAFELLAR, R.T., WETS, R. J-B., 1997, *Variational Analysis*, Springer-Verlag, Vol 317.
- [33]. ROCKAFELLAR, R. T., 1970, *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
- [34]. RUDIN, W., 1987, *Real and Complex Analysis*, Third Edition, McGraw Hill Book Company, Singapore.
- [35]. SMIRNOV, G.V., 2002, *Introduction to the Theory of Differential Inclusions*, American Math. Society Providence, Rhode Island, Vol. 41, 1065-7339.
- [36]. PAINLEVÉ, P., 1909, *C.R.A.S.*, Paris, 148, 1156.

**EKLER**





## ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Havva Nur ÖZTÜRK
Doğum Yeri	
Doğum Tarihi	
Uyruğu	<input checked="" type="checkbox"/> T.C. <input type="checkbox"/> Diğer:
Telefon	
E-Posta Adresi	



Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Fakülte	Fen Fakültesi
Bölümü	Matematik
Mezuniyet Yılı	2020

Yüksek Lisans	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Enstitü Adı	Fen Bilimleri
Anabilim Dalı	Matematik Anabilim Dalı
Programı	Matematik Programı
Mezuniyet Tarihi	2023

Makale ve Bildiriler	
<b>Makaleler</b>	
İlter, S. , Duru,H., ÖZTÜRK, H.N., Koca, S., A Note on Global Classical Solutions to a Cauchy Problem, Euro-Tbilisi Math. Journal, Georgia (baskı aşamasında).	
<b>Bildiriler</b>	
İlter, S. , Duru,H., Öztürk,H., Some Weak Continuity Notions for Set-Valued Functions, The 5th International Conference of Mathematical Sciences (ICMS 2021), İstanbul,Türkiye, 23 - 27 Haziran 2021, ss.100.	
İlter, S., Öztürk, H., Koca,S., A Note on Lusin Theorem and Set-Valued Mappings, Karabakh III. International Congress of Applied Sciences, Susa, Azerbaycan, 7 - 10 Haziran 2022, cilt.9786258323191, sa.2022, ss.257.	
İlter S., Duru H., Öztürk H. N., A Note on Global Classical Solutions to a Cauchy problem, International Conference on Mathematics and Mathematics Education (ICMME 2022), Denizli, Türkiye, 22 - 24 Eylül 2022, sa.2022, ss.100.	

