



T.C.
EGE ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü



DİNAMİK DENKLEMLERİN SİMETRİK ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI ÜZERİNE

Yüksek Lisans Tezi

Ceylan ÖĞMEN

Matematik Anabilim Dalı

İzmir
2023

T.C.
EGE ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü

DİNAMİK DENKLEMLERİN SİMETRİK ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI ÜZERİNE

Ceylan ÖĞMEN

Danışman: Prof. Dr. Fatma Serap TOPAL

Matematik Anabilim Dalı
Matematik Yüksek Lisans Programı

İzmir
2023

Ceylan ÖĞMEN tarafından YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak sunulan “**Dinamik Denklemlerin Simetrik Çözümlerinin Varlığı Üzerine**” başlıklı bu çalışma E.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönergesi’nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve 08.02.2023 tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği/oyçokluğu ile başarılı bulunmuştur.

Jüri Üyeleri:

İmza

Jüri Başkanı : Prof. Dr. F. Serap TOPAL

Raportör : Doç. Dr. Erbil ÇETİN

Üye : Doç. Dr. Derya DOĞAN DURGUN

EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI**

EÜ Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin ilgili hükümleri uyarınca Yüksek Lisans Tezi / Doktora Tezi olarak sunduğum “**Dinamik Denklemlerin Simetrik Çözümlerinin Varlığı Üzerine**” başlıklı bu tezin kendi çalışmam olduğunu, sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi, tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını, bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı, bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

08 / 02 / 2023

İmzası

Adı-Soyadı

Ceylan ÖĞMEN

ÖZET
DİNAMİK DENKLEMLERİN SİMETRİK ÇÖZÜMLERİNİN
VARLIĞI ÜZERİNE

ÖĞMEN, Ceylan

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Tez Yöneticisi: Prof. Dr. F. Serap TOPAL

Şubat 2023, 63 sayfa

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, tez konusu ve tezde yapılan çalışmalar hakkında kısaca bilgi verilmiştir.

İkinci bölümde, zaman skalası teorisi ile ilgili temel tanım ve teoremlere yer verilerek, zaman skalası teorisi tanıtılmıştır.

Üçüncü bölümde, zaman skalasında dördüncü mertebe sınır değer problemi ele alınmıştır. İlk olarak, Green fonksiyonu ve sınır değer probleminin çözümü incelenmiştir. Daha sonra simetrik pozitif çözümlerin varlığı için gerekli koşullar oluşturulup, ispatlanmıştır. Bu bölümün devamında dördüncü mertebe sınır değer problemi için Krasnosel'skii sabit nokta teoremi ile bir veya daha çok pozitif çözümlerin varlığı ispatlanmıştır.

Anahtar sözcükler: Zaman skalası, İkinci ve Dördüncü Mertebe Sınır Değer Problemleri, Simetrik Pozitif Çözümler, Sabit Nokta Teoremleri.

ABSTRACT

ON EXISTENCE OF SYMETRIC SOLUTIONS FOR DYNAMIC EQUATIONS

ÖĞMEN, Ceylan

MSc. Thesis, Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. F. Serap TOPAL

February 2023, 63 pages

This thesis consists of four chapters.

In the first chapter, the subject of the thesis and the work done in the thesis are briefly introduced.

In the second chapter, basic definitions and theorems about time scale theory are given and time scale theory is introduced.

In the third chapter, the fourth order boundary value problem on time scales is discussed. First, Green's function and the solution of the boundary value problem are analyzed. Then the necessary conditions for the existence of symmetric positive solutions are established and proved. In the rest of this section, Krasnosel'skii fixed point theorem is used to prove the existence of one or more positive solutions for the fourth order boundary value problem.

Keywords: Time Scale, Second and Fourth Order Boundary Value Problems, Symmetric Positive Solutions, Fixed Point Theorems.

TEŞEKKÜR

Hepimiz için hayatımızın en zor dönemlerinden birisi olan pandemi döneminde başladığım yüksek lisans sürecimde tez çalışmam boyunca benden başta manevi olarak desteğini esirgemeyen, her sorunumda çözüm bulmaya çalışan, bana destek veren, her yanına gittiğimde beni gülümseyerek karşılayan, bıkmadan yorulmadan elinden geldiği kadar benimle çalışan ve anlatan, yol gösteren, lisans döneminden bu yana üzerimde emeği büyük olan çok değerli ve kıymetli hocam Prof. Dr. Fatma Serap Topal'a sonsuz teşekkürler.

Daha sonra, bu uzun ve yorucu dönemde zorlanıp yorulduğumda elimden tutan bilgisini, hoşgörüsünü esirgemeyen, benimle ilgilenen, kendi lisansüstü öğrencilerinden ayırmayan değerli hocam Doç. Dr. Erbil Çetin'e ayrıca çok zorlandığım bir zamanda beni yeniden ayağa kaldıran, devam etmem için bana güç veren, yol gösteren sevgili hocam Doç. Dr. Şerife Müge Ege' ye gönülden teşekkürler.

Son olarak iyi ve kötü günümde yanımda olan aileme ve her zaman desteğini hissettiğim yol arkadaşım Ahmet Kılıç'a ve bu yolda bende emeği olan herkese sonsuz teşekkürler.

SİMGELER DİZİNİ

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar
$\mathbb{Z}$	Tamsayılar
$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar
$\mathbb{N}_0$	Negatif olmayan tamsayılar
$\mathbb{T}$	Zaman Skalası
$\mathbb{T}^k$	Δ -türevlenebilirlik bölgesi
$\mathbb{T}_k$	∇ - türevlenebilirlik bölgesi
$\mathbb{T}_k^k$	$\mathbb{T}^k \cap \mathbb{T}_k$
$U_\delta(t)$	t noktasının δ komşuluğu
σ	İleriye sıçrama operatörü
ρ	Geriye sıçrama operatörü
μ	İleri tanecik operatörü
ν	Geri tanecik operatörü
f^Δ	f fonksiyonunun Δ -türevi
f^∇	f fonksiyonunun ∇ -türevi
f'	f fonksiyonunun türevi
Δf	f fonksiyonunun ileri fark operatörü
∇f	f fonksiyonunun geri fark operatörü
$\mathcal{C}_{rd}([0, b])$	$[0, b]$ aralığındaki sağ yoğun sürekli fonksiyonlar kümesi
$\mathcal{C}_{ld}([0, b])$	$[0, b]$ aralığındaki sol yoğun sürekli fonksiyonlar kümesi
$\mathcal{C}([0, b])$	$[0, b]$ aralığındaki reel değerli fonksiyonlar kümesi
$\mathcal{C}^1([0, b])$ kümesi	$[0, b]$ aralığındaki sürekli türeve sahip olan fonksiyonlar kümesi



İçindekiler

ÖZET	v
ABSTRACT	vi
TEŞEKKÜR.....	vii
SİMGELER DİZİNİ.....	viii
1.GİRİŞ.....	1
2. ZAMAN SKALASI İLE İLGİLİ TEMEL BİLGİLER.....	5
2.1 Zaman Skalasında Türev	8
2.2 Zaman Skalasında İntegral	15
2.3 Problemin Çözümünde Kullanılacak Temel Bilgiler	22
3. ZAMAN SKALASINDA DÖRDÜNCÜ MERTEBEDEN SINIR DEĞER PROBLEMİ	25
3.1 Zaman Skalasında İkinci Mertebe ve Dördüncü Mertebe Sınır Değer Probleminin Simetrik Çözümlerinin Varlığı.....	25
3.2 Tek Simetrik Pozitif Çözümün Varlığı	43
3.3 Birçok Pozitif Çözümlerin Varlığı Ve Sabit Nokta Teoreminin Genelleştirilmesi.....	49
4. SONUÇ.....	56
KAYNAKLAR.....	57
ÖZGEÇMİŞ.....	63

1.GİRİŞ

Zaman skalası teorisi, sürekli analiz ve diskret analizi birleştiren ve genelleyen bir teori olarak, 1988 yılında Stefan Hilger'in doktora tezinde (Hilger, 1988) tanıtılmıştır. Aulbach ve Hilger tarafından bilim dünyasına sunulmasının ardından ilk çalışmalar diferansiyel denklemlerin, fark denklemlerinin ve kuantum denklemlerinin zaman skalasına taşınması olmuştur. Bu yeni fikir uygulamalı bilimlerde bir çok alanda kendini göstermektedir. Bu alanlardan birisi de zaman skalasında dinamik denklemlerdir. Yukarıdaki üç türde denklemin genelleştirilmesi dinamik denklem olarak adlandırılır. Diferansiyel denklem ve fark denkleminin dinamik denklem çatısı altında toplanması zaman skalasının *birleştirme*, ek olarak kuantum denklemlerinin de dinamik denklem olarak düşünülmesi ise zaman skalasının *genişletme* özelliğini ortaya koyar. Zaman skalası teorisi dinamik denklemlere Agarwal R.P, L. Erbe, Guseinov, Kaymakçalan, tarafından ilk olarak aktarıldı. Bu yazarlar zaman skalasında dinamik denklemlerin salınım özellikleri ile ilgili ilk çalışmaları verdiler. Zaman skalası teorisi ile ilgili ilk kitap Kaymakçalan, Lakshmikantham ve Sivasundaram tarafından yazıldı. Sonrasında Bohner ve Peterson zaman skalası ile ilgili ilk kitaplarını yazıp sürekli ve ayrık analizle ilgili yapılan çalışmaların birçoğunu derlediler. İleriki yıllarda Saker, S.H, Şahiner, Y. 2. ve 3. Mertebeden dinamik denklemlerin çözümlerinin davranışlarını incelediler. Bu incelemeler dinamik denklemlerin salınımlı özellikleri ve asimtotik özellikleri ile ilgili yapılan çalışmalardır.

Ayrıca zaman skalasında sınır değer problemlerinin pozitif çözümlerinin araştırılması ile ilgili birçok çalışma yapılmıştır. (Atıcı ve Guseinov, 2002; Wang and Weng, 2008; Su Li and Sun, 2008; Pei and Chang, 2010). Fakat simetrik pozitif çözümlerin varlığı ile ilgili çalışmalar az sayıdadır. (Fang, 2008; Hamal ve Yörük, 2010; Çetin ve Topal, 2012; Anand, Murali and Prasad, 2012). İki noktalı, üç noktalı, dört noktalı ve m noktalı sınır değer probleminin pozitif çözümlerinin incelendiği, birçok diferansiyel ve dinamik denklem için; koni teorisi tekniğini kullanılmakta ve sabit nokta teoremlerinden faydalanılmaktadır. Sınır değer problemleri birçok fiziksel, biyolojik ve kimyasal olayın modellenmesine ve bu modeller üzerinde çalışmalar yapılabilmesine olanak sağlar.

Bu çalışmalarda temel amaç bilinmeyen fonksiyonu zaman skalası olarak adlandırılan reel sayıların kapalı bir alt kümesi üzerinde tanımlı, bir dinamik denklem için sonuç ispatlamaktır. Bu elde edilen sonuç, zaman skalasını reel sayılar kümesi seçerek, adi diferansiyel denklem ile ilgili bir sonucu; zaman skalasını tam sayılar kümesi seçerek, fark denklemleri için bir sonucu ortaya koyar. Bununla birlikte, reel sayılar ve tam sayılar kümelerinden başka birçok zaman skalası olduğundan elde edilen sonuç, sürekli ve diskret hali genellememize yardımcı olur.

Son zamanlarda yapılan çalışmalar zaman skalasında dinamik denklemler konusunun büyük bir uygulama alanı olduğunu göstermiştir. Örnek vermek gerekirse bir canlı türüne ait olan popülasyonu modelleyebiliriz. Bu türe ait yaşam süresi bir birim zaman olsun. Ayrıca bu tür ölmeden hemen önce yumurtlasın ve iki birim zaman sonra yavrular yumurtadan çıksın. Bu durumda örtüşmeyen bir popülasyon ortaya çıkar. Bu bize kapalı aralıkların birleşimini verir ve bu zaman skalasının tanımıdır [M. Tamer Şenel (Proje yürütücüsü), Mart 2016, Kayseri, Proje no: FDA-2015-5841, Zaman Skalasında Tümör Büyümesi Modellemeleri, *Erciyes Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimi*]. Doğa olayları ne tam olarak sürekli ne de tam olarak kesiklidir. Bu tür olaylara ilişkin denklemlerin modellemelerinde zaman skalası teorisi kullanılır. Zaman skalasında dinamik denklem modellemeleri yeni yeni verilmeye başlamıştır ve literatürde bu konudaki çalışmalar oldukça azdır. Örneğin;

Zhuang, K zaman skalasında ilk olarak ekolojik modelleme ve besin zinciri yapılarını incelemiştir.

Wang, Y.L., Ai, L. Zaman skalasında örümcek ağı modellemesi üzerinde çalışma yapmıştır.

Eggensperger , M. Zaman skalasında biyolojik popülasyon modelleme çalışması yapmıştır.

Zhuang, K., Wen, Z. Zaman skalasına gecikmeli nüfus modellemesinin periyodik çözümlerini incelemişlerdir.

Ek olarak Bohner, M., Gelles, G., Heim, J., Li, Y., Yang, L., Zhang , H. Zaman skalasında modelleme çalışmaları yapmışlardır.

Burada bahsedilen modellemeler ile ilgili daha detaylı bilgi için kaynakça kısmına bakılabilir.

Yukarıda yapılan çalışmalarla birlikte Asaduzzaman ve Zulfikar Ali, ‘Lineer olmayan dördüncü mertebeden adi diferansiyel denklemlerin dört noktalı sınır koşulları altında simetrik pozitif çözümlerinde sabit nokta teorisi yaklaşımı’ çalışmalarında,

$$\begin{cases} -u^{(4)}(t) = f(t, v) \\ -v^{(4)}(t) = g(t, u), \end{cases} \quad t \in [0,1]$$

dördüncü mertebeden adi diferansiyel denklem sisteminin,

$$\begin{cases} u(t) = u(1-t), & u'''(0) - u'''(1) = u''(t_1) + u''(t_2), \\ v(t) = v(1-t), & v'''(0) - v'''(1) = v''(t_1) + v''(t_2), \end{cases} \quad 0 < t_1 < t_2 < 1$$

dört noktalı sınır değer koşulları altında simetrik pozitif çözümlerin varlığını araştırmışlardır. Çalışmalarının devamında Krasnosel'skii Sabit Nokta Teoremi ile uygun koşullar altında, yukarıdaki problemin koni içinde en az bir veya en az iki simetrik pozitif çözümünün varlığı gösterilmiş, ve çalışmalarını birkaç örnek ile tamamlamışlardır.

Yongping Sun ve Xiaoping Zhang,

$$\begin{cases} u''(t) + a(t)f(t, u(t)) = 0, & 0 < t < 1 \\ u(0) = u(1) = \sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i u(\eta_i), \end{cases}$$

Burada $0 < \eta_1 < \eta_2 < \dots < \eta_{m-2} \leq 1/2$, $\alpha_i > 0$; $i = 1, 2, 3, \dots, m-2$

$$\sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i < 1, m \geq 3. \quad a: (0,1) \rightarrow [0, \infty), \quad f: [0,1] \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$$

m noktalı sınır değer probleminin simetrik pozitif çözümlerinin varlığı hakkında çalışmalar yapmışlardır. Bu makalede tek pozitif çözümlerin varlığı ve birden çok pozitif çözümlerinin varlığı ile ilgili gerekli koşulları belirlediler.

Yukarıdaki çalışmaları göz önüne alarak, ikinci bölümünde ilk olarak zaman skalası kavramı, ileriye ve geriye sıçrama operatörlerinin tanımları verilmiştir. Daha sonra bu tanımlamalar ışığında Δ – ve ∇ – türev ile Δ – ∇ – integral tanım ve teoremleri ve birkaç örneğe yer verilmiştir.

İkinci bölümün son kısmında sınır değer probleminin çözümlerinin varlığını ispatlamakta daha sonra kullanılacak ve sonuçların oluşturulmasına yardımcı olacak temel tanım ve teoremler ele alınmış, lemmalar verilmiştir. Dinamik denklemlerin çözümlerinin varlığını ispatlamakta kullandığımız Krasnosel'skii Sabit Nokta Teoremi, Schauder Sabit Nokta Teoremi gibi önemli teoremlere verilmiştir.

Yukarıda incelediğimiz makaleler ışığında, tez çalışmamızda,

$$\begin{cases} u^{\Delta \nabla}(t) = -f(t, u(t)), & t \in [0, b]_k^k \\ u(t) = u(b-t), \\ u^{\Delta}(0) - u^{\Delta}(b) = u(t_1) + u(t_2) \end{cases}$$

Zaman skalasında ikinci mertebeden sınır değer problemi ile $u(t)$ çözümünün varlığı, Green fonksiyonunun özelliklerini kullanarak gösterilmiştir.

Tez çalışmamızın devamında,

$$\left\{ \begin{array}{l} (u^{\Delta \nabla}(t))^{\Delta \nabla} = f(t, u(t)), \quad t \in [0, b]^{k^2} \\ u(t) = u(b - t), \\ u^{\Delta}(0) - u^{\Delta}(b) = u(t_1) + u(t_2) \\ u^{\Delta \nabla \Delta}(0) - u^{\Delta \nabla \Delta}(b) = u^{\Delta \nabla}(t_1) + u^{\Delta \nabla}(t_2) \end{array} \right. \quad (1.1)$$

Dördüncü mertebeden sınır değer probleminin $u(t)$ çözümü elde edilmiş; bu çözümün $[0, b]$ aralığında, varlığı ve simetrikliği ve gerekli birkaç özelliği incelendikten sonra bu bilgiler doğrultusunda koni teorisi tekniği kullanılmış ayrıca farklı sabit nokta teoremlerinden yararlanılmıştır. Son bölümlerde bu teknik ve teoremler ışığında dördüncü mertebeden sınır değer probleminin sabit noktaları elde edilerek simetrik pozitif çözümlere ulaşılmış ve çalışma tamamlanmıştır.

2. ZAMAN SKALASI İLE İLGİLİ TEMEL BİLGİLER

Bu bölümde Zaman Skalası üzerinde analiz ile ilgili temel bilgiler verilmiştir. Zaman skalası üzerinde Δ ve ∇ türev kavramları tanıtılmıştır ve örnekleri incelenmiştir. Zaman skalasında integral kavramları tanıtılarak bazı temel özellikler açıklanmış ve örnekler ele alınmıştır.

Tanım 2.1 Reel sayıların boştan farklı kapalı alt kümesine zaman skalası denir ve $\mathbb{T}$ ile gösterilir. Örneğin; $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$, $[0,1] \cup [2,3]$, Cantor kümesi birer zaman skalası örnekleridir. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $(0,1)$, $\mathbb{Q}$ zaman skalası değildir.

Tanım 2.2 $\mathbb{T}$ bir zaman skalası olsun.

$$\forall t \in \mathbb{T}, t < \max \mathbb{T} \text{ için } \sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\}$$

olarak tanımlanan $\sigma: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ operatörüne ileriye sıçrama operatörü (forward jump) denir.

$$\forall t \in \mathbb{T}, t > \min \mathbb{T} \text{ için } \rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\}$$

olarak tanımlanan $\rho: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ operatörüne geriye sıçrama operatörü (backward jump) denir.

- $\sigma(t) \in \mathbb{T}$ dir.

$A = \{s \in \mathbb{T} : s > t\}$ olsun. $A \subset \mathbb{R}$ olduğundan $\sigma(t) = \inf A \in \bar{A}$ dir. $\mathbb{T}$ reel sayıların kapalı alt kümesi olduğundan $\bar{A} \subset \mathbb{T}$ dir. Buradan $\sigma(t) \in \mathbb{T}$ olduğu görülür.

- $\rho(t) \in \mathbb{T}$ dir.

$B = \{s \in \mathbb{T} : s < t\}$ olsun. Benzer şekilde, $B \subset \mathbb{R}$ olduğundan $\rho(t) = \sup B \in \bar{B}$ dir. $\mathbb{T}$ reel sayıların kapalı alt kümesi olduğundan $\bar{B} \subset \mathbb{T}$ dir. Buradan $\rho(t) \in \mathbb{T}$ olduğu görülür.

- $\sigma(t) \geq t$ ve $\rho(t) \leq t$ dir.

Ayrıca, $\sigma(\max \mathbb{T}) = \max \mathbb{T}$ ve $\rho(\min \mathbb{T}) = \min \mathbb{T}$ ile tanımlanır. $t \in \mathbb{T}$ noktası, σ ve ρ operatörleri altındaki görüntülerinin durumlarına göre aşağıdaki gibi sınıflandırılır:

- $\sigma(t) > t$ ise t noktası sağ yayılmış (right scattered) nokta,
- $\sigma(t) = t$ ise t noktası sağ yoğun (right dense) nokta,
- $\rho(t) < t$ ise t noktası sol yayılmış (left scattered) nokta,
- $\rho(t) = t$ ise t noktası sol yoğun (left dense) nokta,
- $\rho(t) = t = \sigma(t)$ ise t noktası yoğun (dense) nokta,
- $\rho(t) < t < \sigma(t)$ ise t noktası ayrık (isolated) noktadır.

Tanecik fonksiyonları ise,

$$\mu : \mathbb{T} \rightarrow [0, \infty) \quad \text{ve} \quad v : \mathbb{T} \rightarrow [0, \infty)$$

$$t \rightarrow \mu(t) = \sigma(t) - t \quad \quad \quad t \rightarrow v(t) = t - \rho(t)$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.3 Eğer $\max \mathbb{T} < \infty$ ve $\max \mathbb{T}$ sol yayılmış ise $\mathbb{T}^k = \mathbb{T} - \{\max \mathbb{T}\}$ ile tanımlanır, aksi durumda $\mathbb{T}^k = \mathbb{T}$ olur.

Eğer $\min \mathbb{T} > -\infty$ ve $\min \mathbb{T}$ sağ yayılmış ise $\mathbb{T}^k = \mathbb{T} - \{\min \mathbb{T}\}$ ile tanımlanır, aksi durumda $\mathbb{T}_k = \mathbb{T}$ olur.

Son olarak $\mathbb{T}^* = \mathbb{T}^k \cap \mathbb{T}_k$ ile tanımlanır.

Örnek 2.1 Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise herhangi bir $t \in \mathbb{R}$ için

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\} = \inf(t, \infty) = t$$

$$\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\} = \sup(-\infty, t) = t$$

bulunur. O halde, her $t \in \mathbb{R}$ noktası yoğun noktadır. Ayrıca, her $t \in \mathbb{R}$ noktası için $\mu(t) = 0$ ve $v(t) = 0$ dır.

Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise herhangi bir $t \in \mathbb{Z}$ için

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{Z} : s > t\} = \{t + 1, t + 2, \dots\} = t + 1$$

$$\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{Z} : s < t\} = \{\dots, t - 2, t - 1\} = t - 1$$

olur. O zaman, her $t \in \mathbb{Z}$ noktası ayrık noktadır. Ayrıca, her $t \in \mathbb{Z}$ noktası için $\mu(t) = 1$ ve $v(t) = 1$ bulunur.

Örnek 2.2 $\mathbb{T} = \{2^n : n \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$ olsun ve $t \in \mathbb{T} - \{0\}$ alalım. O zaman $t = 2^n$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{Z}$ vardır.

$$\mathbb{T} = \{2^n : n \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\} = \{\dots, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^1}, 1, 2, 2^2, 2^3, \dots\} \cup \{0\}$$

- $\sigma(t) = \sigma(2^n) = \inf\{s \in \mathbb{T} : s > 2^n\} = \inf\{2^{n+1}, 2^{n+2}, 2^{n+3}, \dots\}$

$$= 2^{n+1} = 2^n \cdot 2^1 = 2t > t$$

O halde, t sağ yayılmıştır.

$$\bullet \quad \rho(t) = \rho(2^n) = \sup\{s \in \mathbb{T} : s < 2^n\} = \sup\{\dots, 2^{n-2}, 2^{n-1}\}$$

$$= 2^{n-1} = \frac{1}{2} \cdot 2^n = \frac{t}{2} < t$$

O halde, t sol yayılmıştır.

$t = 0$ alalım.

- $\sigma(0) = \inf\{s \in \mathbb{T} : s > 0\} = 0$ olur. Bunu görmek için, $S = \{s \in \mathbb{T} : s > 0\}$ olsun. Bu durumda $\inf S = 0$ olduğunu gösterelim.

S kümesinin tanımlanışından $\forall s \in S, 0 < s$ olur. O halde,

$\forall \varepsilon > 0$ için $0 < s < \varepsilon$ olacak şekilde bir $s \in S$ var olduğunu görelim.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$ 'dır. Limit tanımından,

$\forall \varepsilon > 0$ için $\exists N \in \mathbb{N}$ vardır ki $\forall n > N$ için $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ olur.

O zaman $n > N$ olmak üzere $s = \frac{1}{2^n} \in S$ alabiliriz.

$\forall \varepsilon > 0$ için $0 < s < \varepsilon$ olacak şekilde bir $s \in S$ vardır.

Buradan $\inf S = 0$ olduğu görülür.

- $0 = \min \mathbb{T}$ olduğundan $\rho(0) = 0$ dır.

O halde,

- $\forall t \in \mathbb{T} - \{0\}$ noktası ayık noktadır.
- 0 noktası yoğun noktadır.

Ayrıca,

- $\forall t \in \mathbb{T}$ noktası için $\mu(t) = t$ olur.
- $\forall t \in \mathbb{T}$ noktası için $\nu(t) = \frac{t}{2}$ olur.

Tanım 2.4 $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. O zaman

$f^\sigma : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, $\forall t \in \mathbb{T}$ için, $f^\sigma(t) = f(\sigma(t)) = (f \circ \sigma)(t)$

$f^\rho : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, $\forall t \in \mathbb{T}$ için, $f^\rho(t) = f(\rho(t)) = (f \circ \rho)(t)$

ile tanımlanır. Yani,

$$f^\sigma = f \circ \sigma \text{ ve } f^\rho = f \circ \rho$$

olur.

Bir $\mathbb{T}$ zaman skalasına ait $[a, b]$ kapalı aralığı $a, b \in \mathbb{T}$ olmak üzere,

$$[a, b] := \{t \in \mathbb{T} : a \leq t \leq b\}$$

olarak tanımlanır. Diğer aralıklar da benzer şekilde tanımlanır.

Zaman skalasında limit, süreklilik ve türev tanımlarını vermeden önce zaman skalasında komşuluk kavramına ihtiyacımız olacaktır.

Tanım 2.5 $U \subset \mathbb{T}$ olsun. $\delta > 0$ için

$$U_\delta(t) = \{s \in \mathbb{T} : |s - t| < \delta\} \text{ kümesine } t \text{ nin } \delta \text{ komşuluğu denir.}$$

$$t \text{ nin sağ komşuluğu} : U_s^+(t) = \{s \in \mathbb{T} : t < s < t + \delta\}$$

$$t \text{ nin sol komşuluğu} : U_s^-(t) = \{s \in \mathbb{T} : t - \delta < s < t\}$$

ile tanımlanır.

Tanım 2.6 $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t_0 \in \mathbb{T}$ olsun. Eğer sonlu bir $l \in \mathbb{R}$ sayısı için, $\varepsilon > 0$ verildiğinde t_0 noktasının

$$|f(t) - l| < \varepsilon, \forall t \in U_\delta(t_0)$$

olacak şekilde bir $U_\delta(t_0)$ komşuluğu bulunabiliyorsa, l reel sayısına ' f fonksiyonunun t_0 noktasındaki limiti' denir ve $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = l$ ile gösterilir.

Tanım 2.7 $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t_0 \in \mathbb{T}$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için t_0 noktasının

$$|f(t) - f(t_0)| < \varepsilon, \forall t \in U_\delta(t_0)$$

olacak şekilde bir $U_\delta(t_0)$ komşuluğu bulunabiliyorsa, f fonksiyonuna ' t_0 noktasında sürekli' denir.

Eğer, f fonksiyonu $\mathbb{T}$ zaman skalasının her noktasında sürekli ise f fonksiyonuna $\mathbb{T}$ üzerinde sürekli fonksiyon denir.

2.1 Zaman Skalasında Türev

Zaman skalasında Δ -türev kavramını tanımlayabilmek için $\mathbb{T}$ den elde edilen

Δ -türevlenebilirlik bölgesi $\mathbb{T}^k$ tanımlanması gerekmektedir.

Δ -türevlenebilirlik bölgesi $\mathbb{T}^k$ aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 2.1.1 Eğer $\max \mathbb{T} < \infty$ ve $\max \mathbb{T}$ sol yayılmış ise $\mathbb{T}^k = \mathbb{T} - \{\max \mathbb{T}\}$ ile tanımlanır, aksi halde $\mathbb{T}^k = \mathbb{T}$ dir.

Tanım 2.1.2 $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}^k$ olsun. Eğer sonlu bir $a \in \mathbb{R}$ sayısı için, $\varepsilon > 0$ verildiğinde t noktasının

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - a(\sigma(t) - s)| \leq \varepsilon |\sigma(t) - s|, \quad \forall s \in U_\delta(t)$$

olacak şekilde bir $U_\delta(t)$ komşuluğu varsa, f fonksiyonuna ' t noktasında Δ -türevlenebilirdir' denir. $a \in \mathbb{R}$ sayısına ' f fonksiyonunun t noktasındaki Δ -türevi' denir ve $a = f^\Delta(t)$ ile gösterilir.

Bu tanıma göre,

$$f^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s}$$

yazılabilir.

Eğer, f fonksiyonu $\mathbb{T}^k$ nın her noktasında Δ -türevlenebilirse f fonksiyonuna ' $\mathbb{T}^k$ üzerinde Δ -türevlenebilirdir' denir.

Örnek 2.1.1 $\mathbb{T}$ herhangi bir zaman skalası olsun.

- i. $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunu, $a \in \mathbb{R}$ sabit olmak üzere, $f(t) = a$ şeklinde tanımlayalım. Bu durumda $\forall t \in \mathbb{T}^k$ için,

$$f^\Delta = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} = \lim_{s \rightarrow t} \frac{a - a}{\sigma(t) - s} = 0$$

olur.

- ii. $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunu $\forall t \in \mathbb{T}$ için $f(t) = t$ şeklinde tanımlayalım. Bu durumda $\forall t \in \mathbb{T}^k$ için,

$$f^\Delta = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} = \lim_{s \rightarrow t} \frac{\sigma(t) - s}{\sigma(t) - s} = 1$$

olur.

- iii. $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunu $\forall t \in \mathbb{T}$ için $f(t) = t^2$ şeklinde tanımlayalım. Bu durumda $\forall t \in \mathbb{T}^k$ için,

$$f^\Delta = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} = \lim_{s \rightarrow t} \frac{(\sigma(t))^2 - s^2}{\sigma(t) - s} = \lim_{s \rightarrow t} \sigma(t) + s$$

$$= \sigma(t) + t$$

olur.

Özel olarak :

- $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ alınırsa, $\forall t \in \mathbb{R}$ için $f^\Delta(t) = 2t$,
- $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ alınırsa, $\forall t \in \mathbb{Z}$ için $f^\Delta(t) = 2t + 1$,
- $\mathbb{T} = \{\frac{n}{2} : n \in \mathbb{N}_0\}$ alınırsa, $\forall t \in T$ için $f^\Delta(t) = 2t + \frac{1}{2}$

olur.

Aşağıda ispatsız olarak verilecek olan teoremler; Agarwal and Boher (1999) ; Atici and Guseinov (2002) ; Bohner and Peterson (2001, 2003); Guseinov (2000-2001) ; Guseinov and Kaymakçalan (2002) ; Hilger (1990) referanslarında bulunabilir.

Teorem 2.1.1 $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}^k$ olsun.

- i. f fonksiyonu t de Δ –türevlenebilir ise, f fonksiyonu t de süreklidir.
- ii. f fonksiyonu t de sürekli ve t noktası sağ yayılmış ise, f fonksiyonu t de Δ –türevlenebilirdir ve t deki Δ –türevi

$$f^\Delta(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}$$

ile verilir.

- iii. Eğer t sağ yoğun nokta ise, f fonksiyonunun t de Δ –türevlenebilir olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

limit değerinin sonlu olmasıdır. Bu durumda

$$f^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

olur.

- iv. f fonksiyonu t de Δ –türevlenebilir ise

$$f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t)f^\Delta(t)$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 2.1.2 $f, g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları $t \in \mathbb{T}^k$ noktasında Δ –türevlenebilir fonksiyonlar olsunlar. Bu durumda,

- i. $f + g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu da t de Δ –türevlenebilirdir ve

$$(f + g)^\Delta(t) = f^\Delta(t) + g^\Delta(t)$$

olur.

- ii. Herhangi bir α sabiti için αf fonksiyonu da t de Δ –türevlenebilirdir ve

$$(\alpha f)^\Delta(t) = \alpha f^\Delta(t)$$

şeklindedir.

- iii. $fg: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu da t de Δ –türevlenebilirdir ve

$$(fg)^\Delta(t) = f^\Delta(t)g(t) + f(\sigma(t))g^\Delta(t) = f(t)g^\Delta(t) + f^\Delta(t)g(\sigma(t))$$

ile verilir.

- iv. Eğer $g(t)g(\sigma(t)) \neq 0$ ise, o zaman $\frac{f}{g}$ fonksiyonu da t de

Δ – türevlenebilirdir ve

$$\left(\frac{f}{g}\right)^\Delta(t) = \frac{f^\Delta(t)g(t) - f(t)g^\Delta(t)}{g(t)g(\sigma(t))}$$

eşitliği doğrudur.

Zaman skalasında ∇ –türev kavramını açıklayabilmek için, öncelikle $\mathbb{T}$ den elde edilen ∇ –türevlenebilirlik bölgesi $\mathbb{T}_k$ tanımlanması gerekmektedir.

∇ –türevlenebilirlik bölgesi $\mathbb{T}_k$ aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 2.1.3 Eğer $\min \mathbb{T} > -\infty$ ve $\min T$ sağ yayılmış ise $\mathbb{T}_k = \mathbb{T} - \{\min \mathbb{T}\}$ ile tanımlanır, aksi halde $\mathbb{T}_k = \mathbb{T}$ olur.

Tanım 2.1.4 $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}_k$ olsun. Eğer sonlu bir $a \in \mathbb{R}$ sayısı için, $\varepsilon > 0$ verildiğinde t noktasının

$$|f(\rho(t)) - f(s) - a(\rho(t) - s)| \leq \varepsilon |\rho(t) - s|, \quad \forall s \in U_\delta(t)$$

olacak şekilde bir $U_\delta(t)$ komşuluğu varsa, f fonksiyonuna ‘ t noktasında ∇ –türevlenebilirdir ‘ denir. $a \in \mathbb{R}$ sayısına ‘ f fonksiyonunun t noktasındaki ∇ –türevi ‘ denir ve $a = f^\nabla(t)$ ile gösterilir.

Bu tanıma göre,

$$f^\nabla(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(\rho(t)) - f(s)}{\rho(t) - s}$$

yazılabilir.

Eğer, f fonksiyonu $\mathbb{T}_k$ nın her noktasında ∇ – türevlenebilirse f fonksiyonuna ‘ $\mathbb{T}_k$ üzerinde ∇ –türevlenebilir ’ denir.

Teorem 2.1.3 $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}_k$ olsun.

- i. f fonksiyonu t de ∇ –türevlenebilir ise, f fonksiyonu t de sürekli.
- ii. f fonksiyonu t de sürekli ve t noktası sol yayılmış ise, f fonksiyonu t de ∇ –türevlenebilirdir ve t deki ∇ –türevi

$$f^\nabla(t) = \frac{f(t) - f(\rho(t))}{v(t)}$$

ile verilir.

- iii. Eğer t sol yoğun nokta ise, f fonksiyonunun t de ∇ –türevlenebilir olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

limit değerinin sonlu olmasıdır. Bu durumda

$$f^\nabla(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

olur.

- iv. f fonksiyonu t de ∇ – türevlenebilir ise

$$f(\rho(t)) = f(t) + v(t)f^\nabla(t)$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 2.1.4 $f, g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları $t \in \mathbb{T}_k$ noktasında ∇ –türevlenebilir

fonksiyonlar olsunlar. Bu durumda

- i. $f + g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu da t de ∇ –türevlenebilirdir ve

$$(f + g)^\nabla(t) = f^\nabla(t) + g^\nabla(t)$$

şeklindedir.

- ii. Herhangi bir α sabiti için αf fonksiyonu da t de ∇ – türevlenebilirdir ve

$$(\alpha f)^\nabla(t) = \alpha f^\nabla(t)$$

olur.

iii. $fg : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu da t de ∇ – türevlenebilirdir ve

$$(fg)^\nabla(t) = f^\nabla(t)g(t) + f(\rho(t))g^\nabla(t) = f(t)g^\nabla(t) + f^\nabla(t)g(\rho(t))$$

ile verilir.

iv. Eğer $g(t)g(\rho(t)) \neq 0$ ise , o zaman $\frac{f}{g}$ fonksiyonu da t de ∇ –türevlenebilirdir ve

$$\left(\frac{f}{g}\right)^\nabla(t) = \frac{f^\nabla(t)g(t) - f(t)g^\nabla(t)}{g(t)g(\rho(t))}$$

eşitliği doğrudur.

Önerme 2.1.1 $f, [a, b] \subset \mathbb{T}$ de monoton artan bir fonksiyon olsun. Bu durumda

- i. $\forall t \in [a, b]$ için $f^\Delta(t) \geq 0$ dır.
- ii. $\forall t \in (a, b]$ için $f^\nabla(t) \geq 0$ dır.

Önerme 2.1.2 $f, [a, b] \subset \mathbb{T}$ de monoton azalan bir fonksiyon olsun. Bu halde

- i. $\forall t \in [a, b]$ için $f^\Delta(t) \leq 0$ dır.
- ii. $\forall t \in (a, b]$ için $f^\nabla(t) \leq 0$ dır.

Teorem 2.1.5 $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde sürekli ve $[a, b]$ üzerinde Δ ve ∇ – türevlenebilir olsun. Eğer $f(a) = f(b)$ ise $\exists \xi, \tau \in [a, b]$ vardır ki

$$f^\Delta(\xi) \leq 0 \leq f^\Delta(\tau)$$

$$f^\nabla(\xi) \leq 0 \leq f^\nabla(\tau)$$

eşitsizlikleri doğrudur.

Teorem 2.1.6 (Ortalama Değer Teoremi) $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde sürekli ve $[a, b]$ üzerinde Δ – türevlenebilir olsun. Bu durumda $\exists \xi, \tau \in [a, b]$ vardır ki

$$f^\Delta(\xi) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f^\Delta(\tau)$$

eşitsizliği doğrudur.

Önerme 2.1.3 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ve $[a, b)$ üzerinde Δ –türevlenebilir olsun. Eğer her $t \in [a, b)$ için $f^\Delta(t) \geq 0$ ise, f fonksiyonu artandır.

Önerme 2.1.4 f fonksiyonu $t \in \mathbb{T}_k^k$ noktasında yerel ekstremuma sahip olsun. Bu durumda

$$f^\Delta(t)f^\nabla(t) \leq 0$$

eşitsizliği sağlanır.

Önerme 2.1.5 $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{T}^k$ üzerinde Δ –türevlenebilir ve f^Δ fonksiyonu $\mathbb{T}^k$ üzerinde sürekliyse bu durumda f fonksiyonu $\mathbb{T}_k$ üzerinde ∇ –türevlenebilirdir ve

$$f^\nabla(t) = f^\Delta(\rho(t))$$

eşitsizliği sağlanır.

Önerme 2.1.6 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ve $[a, b)$ üzerinde Δ –türevlenebilir ve f^Δ fonksiyonu $\mathbb{T}^k$ üzerinde sürekli olsun. O zaman öyle bir $c \in (a, b)$ vardır ki,

$$f(c) = \max\{f(t): t \in [a, b]\}$$

ve her $t \in (c, b]$ için

$$f(t) < f(c),$$

ve

$$f^\Delta(c) \leq 0, \quad f^\Delta(\rho(c)) \leq 0$$

olur.

Tanım 2.1.5 $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{T}^k$ üzerinde Δ – türevlenebilir olsun. Eğer $f^\Delta: \mathbb{T}^k \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{T}^{k^2} = (\mathbb{T}^k)^k$ da Δ –türevlenebilir ise f fonksiyonuna “ikinci mertebeden Δ –türevlenebilirdir denir ve

$$f^{\Delta\Delta} = (f^\Delta)^\Delta: \mathbb{T}^{k^3} \rightarrow \mathbb{R}$$

olur. Benzer şekilde, f fonksiyonunun n.mertebeden Δ –türevleri $f^{\Delta^n}: \mathbb{T}^{k^n} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlanır.

Ayrıca, her $t \in \mathbb{T}$ için, $\sigma^2(t) = \sigma(\sigma(t))$ ve $\rho^2(t) = \rho(\rho(t))$ ve böylece her $n \in \mathbb{N}$ için $\sigma^n(t)$ ve $\rho^n(t)$ tanımlanır.

2.2 Zaman Skalasında İntegral

Tanım 2.2.1 $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu $\mathbb{T}$ zaman skalasının tüm sağ yoğun noktalarından sürekli ve tüm sol yoğun noktalarında sonlu limite sahipse, bu fonksiyona sağ yoğun sürekli veya $rd - \text{sürekli}$ fonksiyon denir.

Sağ yoğun sürekli fonksiyonların kümesi $\mathcal{C}_{rd}$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.2 $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu $\mathbb{T}$ zaman skalasının tüm sol yoğun noktalarından sürekli ve tüm sağ yoğun noktalarında sonlu limite sahipse, bu fonksiyona sol yoğun sürekli veya $ld - \text{sürekli}$ fonksiyon denir.

Sol yoğun sürekli fonksiyonların kümesi $\mathcal{C}_{ld}$ ile gösterilir.

Ayrıca, türevlenebilir ve türevi $rd - \text{sürekli}$ fonksiyonların kümesi

$$\mathcal{C}_{rd}^{\Delta} = \mathcal{C}_{rd}^1 = \mathcal{C}_{rd}^1(\mathbb{T}) = \mathcal{C}_{rd}^1(\mathbb{T}, \mathbb{R})$$

ve türevlenebilir ve türevi $ld - \text{sürekli}$ fonksiyonların kümesi

$$\mathcal{C}_{ld}^{\nabla} = \mathcal{C}_{ld}^1 = \mathcal{C}_{ld}^1(\mathbb{T}) = \mathcal{C}_{ld}^1(\mathbb{T}, \mathbb{R})$$

ile gösterilir.

Tanım 2.2.3 $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyon olsun. Eğer $F: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{T}^k$ üzerinde Δ -türevlenebilir ve her $t \in \mathbb{T}^k$ için $F^{\Delta}(t) = f(t)$ ise F fonksiyonuna

“ f fonksiyonunun Δ -anti türevi veya Δ -ilkeli” denir.

Tanım 2.2.4 Eğer $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun Δ -anti türevi varsa f fonksiyonuna Δ -integrallenebilir fonksiyon denir ve $a, b \in \mathbb{T}$ olmak üzere f fonksiyonuna a dan b ye Δ -integrali

$$\int_a^b f(t) \Delta t = F(b) - F(a)$$

olarak tanımlanır.

Teorem 2.2.1 Her sağ yoğun sürekli fonksiyonun bir Δ -anti türevi vardır.

Teorem 2.2.2 $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları $rd - \text{sürekli}$ fonksiyonlar olsunlar. Bu durumda her $a, b, c, d \in \mathbb{T}$ için aşağıdaki formüller geçerlidir.

$$\text{i) } \int_a^b (f(t) \pm g(t)) \Delta t = \int_a^b f(t) \Delta t \pm \int_a^b g(t) \Delta t$$

$$ii) \text{ Her } k \text{ sabiti için } \int_a^b k f(t) \Delta t = k \int_a^b f(t) \Delta t$$

$$iii) \int_a^a f(t) \Delta t = 0$$

$$iv) \int_a^b f(t) \Delta t = - \int_b^a f(t) \Delta t$$

$$v) \int_a^b f(t) \Delta t = \int_a^c f(t) \Delta t + \int_c^b f(t) \Delta t$$

$$vi) \int_a^b f(\sigma(t)) g^\Delta(t) \Delta t = f(t) g(t) \Big|_a^b - \int_a^b f^\Delta(t) g(t) \Delta t$$

$$vii) \int_a^b f(t) g^\Delta(t) \Delta t = f(t) g(t) \Big|_a^b - \int_a^b f^\Delta(t) g(\sigma(t)) \Delta t$$

Teoremdaki vi) ve vii) formüllerine kısmi integrasyon formülleri denir.

Sonuç 2.2.1 $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu rd –süreklili olsun. Bu durumda her $t \in \mathbb{T}^k$ için

$$\int_t^{\sigma(t)} f(s) \Delta s = \mu(t) f(t)$$

eşitliği doğrudur.

Sonuç 2.2.2 a ve b , $\mathbb{T}$ içinde $a < b$ olacak şekilde iki nokta olsun. Eğer f fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde sürekli ise aşağıdaki eşitlikler doğrudur.

$$i) \int_a^b f(t) \Delta t = \int_a^{\rho(b)} f(t) \Delta t + \nu(b) f(\rho(b))$$

$$ii) \int_a^b f(t) \Delta t = \int_{\sigma(a)}^b f(t) \Delta t + \mu(a) f(a)$$

Örnek 2.2.1 $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ rd –sürekli fonksiyon ve $a, b \in \mathbb{T}$ olsun.

- Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise

$$\int_a^b f(t) \Delta t = \int_a^b f(t) dt$$

olur.

- Eğer $[a, b]$ aralığı sadece ayırık noktaları içeriyorsa

$$\int_a^b f(t) \Delta t = \begin{cases} \sum_{t \in [a, b)} \mu(t) f(t), & a < b \\ 0, & a = b \\ - \sum_{t \in [b, a)} \mu(t) f(t) & a > b \end{cases}$$

elde edilir. Böylece, $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise,

$$\int_a^b f(t) \Delta t = \begin{cases} \sum_{t=a}^{b-1} f(t), & a < b \\ 0 & a = b \\ - \sum_{t=b}^{a-1} f(t), & a > b \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.2.3 $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları rd – sürekli fonksiyonlar ve a ve b , $\mathbb{T}$ içinde $a < b$ olacak şekilde iki nokta olsun. O halde her $t \in [a, b]$ için

$$i) \quad f(t) \geq 0 \text{ ise } \int_a^b f(t) \Delta t \geq 0$$

$$ii) \quad f(t) \geq g(t) \text{ ise } \int_a^b f(t) \Delta t \geq \int_a^b g(t) \Delta t$$

$$iii) \quad \left| \int_a^b f(t) \Delta t \right| \leq \int_a^b |f(t)| \Delta t$$

eşitsizlikleri doğrudur.

Tanım 2.2.5 $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyon olsun. Eğer $F: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{T}_k$ üzerinde Δ –türevlenebilir ve her $t \in \mathbb{T}_k$ için $F^\nabla(t) = f(t)$ ise F fonksiyonuna “ f fonksiyonunun ∇ –anti türevi veya ∇ –ilkeli” denir.

Tanım 2.2.6 $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun ∇ –anti türevi varsa f fonksiyonuna ∇ –integrallenebilir fonksiyon denir ve $a, b \in \mathbb{T}$ olmak üzere f fonksiyonunun a dan b ye ∇ –integrali

$$\int_a^b f(t) \nabla t = F(b) - F(a)$$

olarak tamamlanır.

Teorem 2.2.4 Her sol yoğun sürekli fonksiyonun bir ∇ – anti türevi vardır.

Teorem 2.2.5 $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları ld – sürekli fonksiyonlar olsunlar. Bu durumda her $a, b, c \in \mathbb{T}$ için aşağıdaki formüller geçerlidir.

$$i) \quad \int_a^b (f(t) \pm g(t)) \nabla t = \int_a^b f(t) \nabla t \pm \int_a^b g(t) \nabla t$$

ii) Her k sabiti için,

$$\int_a^b kf(t) \nabla t = k \int_a^b f(t) \nabla t$$

$$iii) \quad \int_a^a f(t) \nabla t = 0$$

$$iv) \quad \int_a^b f(t) \nabla t = - \int_b^a f(t) \nabla t$$

$$v) \quad \int_a^b f(t) \nabla t = \int_a^c f(t) \nabla t + \int_c^b f(t) \nabla t$$

$$vi) \quad \int_a^b f(\rho(t)) g^\nabla(t) \nabla t = f(t) g(t) \Big|_a^b - \int_a^b f^\nabla(t) g(t) \nabla t$$

$$vii) \quad \int_a^b f(t) g^\nabla(t) \nabla t = f(t) g(t) \Big|_a^b - \int_a^b f^\nabla(t) g(\rho(t)) \nabla t$$

Örnek 2.2.2 $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}_k$ olsun. $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ alırsak bu durumda her $t \in \mathbb{Z}$ noktası sol yayılmış nokta olduğundan Teorem 2.1.3 ii) şikkından f fonksiyonu t de ∇ –türevlenebilirdir ve

$$f^\nabla(t_0) = \frac{f(t_0) - f(\rho(t_0))}{v(t_0)} = \frac{f(t) - f(t-1)}{1} = f(t) - f(t-1) = \nabla f(t)$$

olur. Buradaki ∇ , fark denklemlerinde kullanılan geri fark operatörüdür.

Örnek 2.2.3

$\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ için $a \neq 0$ sabit olmak üzere

$$\int a' \nabla t$$

belirsiz integralini ele alalım. Örnek 2.2.2 den $\left(\frac{a^{t+1}}{a-1}\right)^\nabla = \nabla \left(\frac{a^{t+1}}{a-1}\right)$ olduğunu biliyoruz.

Buradan

$$\left(\frac{a^{t+1}}{a-1}\right)^\nabla = \nabla \left(\frac{a^{t+1}}{a-1}\right) = \frac{a^{t+1} - a^t}{a-1} = a^t$$

elde edilir. Böylece c keyfi bir sabit olmak üzere

$$\int a' \nabla t = \frac{a^{t+1}}{a-1} + c$$

olduğu görülür.

Sonuç 2.2.3 $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ld –süreklili olsun. Bu durumda her $t \in \mathbb{T}_k$ için

$$\int_{\rho(t)}^t f(s) \nabla s = v(t)f(t)$$

eşitliği doğrudur.

Sonuç 2.2.4 a ve b , $\mathbb{T}$ içinde $a < b$ olacak şekilde iki nokta olsun. Eğer f fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde sürekli ise aşağıdaki eşitlikler doğrudur.

$$\begin{aligned} i) \quad \int_a^b f(t) \nabla t &= \int_a^{\rho(b)} f(t) \nabla t + v(b)f(b) \\ ii) \quad \int_a^b f(t) \nabla t &= \int_{\sigma(a)}^b f(t) \nabla t + \mu(a)f(\sigma(a)). \end{aligned}$$

Teorem 2.2.6 $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları ld – sürekli fonksiyonlar ve a ve b , $\mathbb{T}$ içinde $a < b$ olacak şekilde iki nokta olsun. O halde her $t \in [a, b]$ için

$$i) \quad f(t) \geq 0 \text{ ise } \int_a^b f(t) \nabla t \geq 0$$

$$ii) \quad f(t) \geq g(t) \text{ ise } \int_a^b f(t) \nabla t \geq \int_a^b g(t) \nabla t$$

$$iii) \quad \left| \int_a^b f(t) \nabla t \right| \leq \int_a^b |f(t)| \nabla t$$

eşitsizlikleri doğrudur.

Teorem 2.2.7 Eğer f , f^Δ , f^∇ iki değişkenli fonksiyon olarak sürekli ise, bu durumda aşağıdaki formüller doğrudur. Burada $f^\Delta(t, s)$ ve $f^\nabla(t, s)$ ile s değişkeni sabit tutularak $f(t, s)$ fonksiyonunun t ye göre sırasıyla Δ ve ∇ türevleri belirtilmiştir.

$$i) \quad \left(\int_a^t f(t, s) \Delta s \right)^\Delta = f(\sigma(t), t) + \int_a^t f^\Delta(t, s) \Delta s$$

$$ii) \quad \left(\int_a^t f(t, s) \Delta s \right)^\nabla = f(\rho(t), \rho(t)) + \int_a^t f^\nabla(t, s) \Delta s$$

$$iii) \quad \left(\int_a^t f(t, s) \nabla s \right)^\Delta = f(\sigma(t), \sigma(t)) + \int_a^t f^\Delta(t, s) \nabla s$$

$$iv) \quad \left(\int_a^t f(t, s) \nabla s \right)^\nabla = f(\rho(t), t) + \int_a^t f^\nabla(t, s) \nabla s .$$

Sonuç 2.2.5 h fonksiyonu $\mathbb{T}$ üzerinde sürekli fonksiyon ise aşağıdaki formüller doğrudur.

$$i) \left(\int_a^t h(s) \Delta s \right)^\Delta = h(t)$$

$$ii) \left(\int_a^t h(s) \Delta s \right)^\nabla = h(\rho(t))$$

$$iii) \left(\int_a^t h(s) \nabla s \right)^\Delta = h(\sigma(t))$$

$$iv) \left(\int_a^t h(s) \nabla s \right)^\nabla = h(t)$$

Önerme 2.2.1 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $ld -$ sürekli ve her $t \in [a, b]$ için $f(t) \geq 0$ olsun.

Eğer $\int_a^b f(t) \nabla t = 0$ ise her $t \in (a, b]$ için $f(t) = 0$ dir.

Sonuç 2.2.6 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $ld -$ sürekli ve her $t \in [a, b]$ için $f(t) \geq 0$ olsun.

Eğer $\exists t_0 \in (a, b]$ için $f(t_0) \neq 0$ ise $\int_a^b f(t) \nabla t > 0$ dir.

Not Sonuç 2.2.6 da $(a, b]$ aralığını $[a, b]$ olarak almalıyız.

Yani $\exists t_0 \in [a, b]$ için $f(t_0) \neq 0$ ise $\int_a^b f(t) \nabla t \neq 0$ olmayabilir.

2.3 Problemin Çözümünde Kullanılacak Temel Bilgiler

Bu kısımda, problemimizin pozitif çözümlerinin varlığının ispatında kullanacağımız bazı temel tanım ve teoremleri, ayrıca sonuçlarımızı oluşturmamıza yardımcı olacak bazı lemmaları vereceğiz.

Tanım 2.3.1 Eğer bir kümenin elemanlarının her dizisinden yakınsak bir alt dizi seçilebiliyorsa bu kümeye pre kompakt küme denir. Yakınsadığı değer, küme içinde ise bu kümeye kompakt küme denir.

Tanım 2.3.2 X ve Y normlu uzaylar olsun. Eğer $M \subset X$ sınırlı kümesinin $T : X \rightarrow Y$ operatörü altındaki görüntüsünün kapanışı kompakt ise T operatörüne kompakt operatör denir.

Tanım 2.3.3 $(B, \|\cdot\|)$ bir reel Banach uzayı ve K, B nin boştan farklı, kapalı, konveks bir alt kümesi olsun.

- i) $u \in K$ ise $\mu \geq 0$ olmak üzere $\mu u \in K$;
- ii) $u \in K, -u \in K$ ise $u = 0$

Koşulları sağlanıyorsa K kümesine B Banach uzayı üzerinde bir *koni* denir.

Örnek 2.3.1 $B = \mathbb{R}$ için,

$$P_1 = \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \quad \text{ve} \quad P_2 = \mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$$

kümeleri konidir.

Örnek 2.3.2 $B = \mathbb{R}^2$ için,

$$P = \mathbb{R}_+^2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$$

kümesi konidir.

Tanım 2.3.4 Ω , $\mathbb{R}$ vektör uzayı üzerinde konveks bir küme ve $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. Her $x, y \in \Omega$ ve $\lambda \in (0,1)$ için

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna konkav fonksiyon denir.

Tanım 2.3.5 (Schauder Sabit Nokta Teoremi) E bir Banach uzay ve $A : E \rightarrow E$ tamamen sürekli bir operatör olsun. $K \subset E$ sınırlı, kapalı ve konveks bir küme olmak üzere A operatörü K kümesini invaryant bırakıyorsa ($A(K) \subset K$) ise bu durumda A operatörünün K içinde en az bir sabit noktası vardır.

Tanım 2.3.6 Eğer bir dönüşüm her sınırlı kümeyi pre kompakt bir kümeye dönüştürüyorsa bu dönüşüme kompakt dönüşüm denir.

Tanım 2.3.7 $M, C[a, b]$ içinde bir küme olsun.

- $\forall x \in M, \forall t \in [a, b]$ için $|x(t)| \leq c$ olacak şekilde bir c sayısı varsa M kümesine ait fonksiyonlara aynı dereceden sınırlı fonksiyonlar denir.
- $\varepsilon > 0$ verilsin, $\forall t_1, t_2 \in [a, b]$ ve $\forall x \in M$ için $|t_1 - t_2| < \delta$ eşitsizliği sağlandığında $|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı bulunabiliyorsa M kümesine ait fonksiyonlara aynı dereceden sürekli fonksiyonlar denir.

Tanım 2.3.8 (Arzela-Ascoli Teoremi) Bir $M \subset C[a, b]$ kümesinin sürekli fonksiyonlar ailesinin pre-kompakt olması için gerek ve yeter koşul M ye ait fonksiyonların aynı dereceden sınırlı (equi-bounded) ve aynı dereceden sürekli (equi-continuous) olmasıdır.

Tanım 2.3.9 Eğer bir dönüşüm sürekli ve kompakt ise bu dönüşüme tamamen sürekli denir.

Tanım 2.3.10 E_1 ve E_2 uzayları K cismi üzerinde lineer uzaylar olsun. Eğer $T: D \subset E_1 \rightarrow E_2$ operatörü $\forall x, y \in D$ ve $\alpha, \beta \in K$ için

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

sağlıyor ise T operatörüne lineer operatör adı verilir.

Teorem 2.3.1 (Krasnosel'skii Sabit Nokta Teoremi) E bir Banach uzay ve $K \subset E$ bir koni olsun. Ω_1 ve Ω_2, E uzayının $0 \in \Omega_1$ ve $\overline{\Omega_1} \subset \Omega_2$ koşullarını sağlayan açık ve sınırlı alt kümeleri olsunlar. Eğer $T: K \cap (\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1) \rightarrow K$ tamamen sürekli operatörü

- i) $u \in K \cap \partial\Omega_1$ için $\|Tu\| \leq \|u\|$ ve $u \in K \cap \partial\Omega_2$ için $\|Tu\| \geq \|u\|$,
- ii) $u \in K \cap \partial\Omega_1$ için $\|Tu\| \geq \|u\|$ ve $u \in K \cap \partial\Omega_2$ için $\|Tu\| \leq \|u\|$,

şartlarından birini sağlarsa T operatörünün $K \cap (\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1)$ içinde sabit noktası vardır.

Tanım 2.3.11 $\mathbb{T} = [a, b]_{\mathbb{T}}$ zaman skalası aşağıdaki koşulu sağlıyorsa simetrik zaman skalası olarak adlandırılır.

$$t \in \mathbb{T} \Leftrightarrow a + b - t \in \mathbb{T}$$

Tanım 2.3.12 $u: [0, b]_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki koşulu sağlıyorsa $[0, b]_{\mathbb{T}}$ üzerinde simetrik fonksiyon olarak adlandırılır.

$$u(t) = u(b - t), \quad t \in [0, b]_{\mathbb{T}}$$

Tanım 2.3.13 Bir zaman skalasına ait $[0, b]_{\mathbb{T}}$ aralığı için $t \in [0, b]_{\mathbb{T}}$ iken

$b - t \in [0, b]_{\mathbb{T}}$ oluyorsa $[0, b]_{\mathbb{T}}$ aralığı simetrik aralık olarak adlandırılır.

Örnek 2.3.3 $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ve $\mathbb{T} = k\mathbb{Z}$, ($k > 0$) zaman skalası örnekleri, simetri tanımını daima sağlar.



3. ZAMAN SKALASINDA DÖRDÜNCÜ MERTEBEDEN SINIR DEĞER PROBLEMİ

Bu bölümde dördüncü mertebeden sınır değer probleminin simetrik pozitif çözümlerinin varlığını elde etmek için gerekli koşullar verilmiştir. Bu amaçla Green fonksiyonu, operatör özellikleri ve sınır koşulları kullanılarak dördüncü mertebe sınır değer problemi bir integral denkleme indirgenmiş ve problemin çözümünün varlığı, bir operatörün sabit noktalarının bulunması problemine dönüştürülmüştür. Bu amaçla tanımlanan operatörün tamamen sürekli olduğu gösterilmiştir. Ayrıca bölümün devamında integral denkleminin bir, iki ve daha çok simetrik pozitif çözümünün varlığı için sabit nokta teoremi uygulanmıştır.

3.1 Zaman Skalasında İkinci Mertebe ve Dördüncü Mertebe Sınır Değer Probleminin Simetrik Çözümlerinin Varlığı

Öncelikle çözümün yapısını belirleyen lemmaları vereceğiz.

Lemma 3.1.1 t_1 ve t_2 nin $0 \leq t_1 < t_2 \leq b$ eşitsizliğini sağlayan iki negatif olmayan sabit olduğunu varsayalım. $[0, b]$ üzerinde $h(t) \in C[0, b]$ simetrik ise, o zaman

$$\begin{cases} u^{\Delta \nabla}(t) = -h(t), & t \in [0, b]_k^k, \\ u(t) = u(b-t), \quad u^{\Delta}(0) - u^{\Delta}(b) = u(t_1) + u(t_2) \end{cases} \quad (3.1.1)$$

ikinci mertebeden dört noktalı lineer sınır değer problemi

$$u(t) = \int_0^b G(t, s)h(s)\nabla s$$

ile gösterilen bir tek simetrik çözüme sahiptir,

burada $G(t, s)$

$$\begin{cases} u^{\Delta \nabla}(t) = 0, & t \in [0, b]_k^k, \\ u(t) = u(b-t), \quad u^{\Delta}(0) - u^{\Delta}(b) = u(t_1) + u(t_2) \end{cases}$$

homojen sınır değer probleminin Green fonksiyonudur ve

$$G(t, s) = G_1(t, s) + G_2(s)$$

olmak üzere

$$G_1(t, s) = \frac{1}{b} \begin{cases} s(b-t), & 0 \leq s \leq t \leq b \\ t(b-s), & 0 \leq t \leq s \leq b \end{cases} \quad (3.1.2)$$

$$G_2(s) = \frac{1}{2} \begin{cases} t_1 + t_2 - 2s - \frac{(b-s)}{b}(t_1 + t_2) + 1, & 0 \leq s \leq t_1 \\ t_2 - s - \frac{(b-s)}{b}(t_1 + t_2) + 1, & t_1 \leq s \leq t_2 \\ -\frac{(b-s)}{b}(t_1 + t_2) + 1, & t_2 \leq s \leq b \end{cases} \quad (3.1.3)$$

şeklindedir.

İspat: (3.1.1) den $u^{\Delta \nabla}(t) = -h(t)$ eşitliğinin her iki tarafının 0 dan t ye ∇ integrali alınarak,

$$\int_0^t u^{\Delta \nabla}(s) \nabla s = - \int_0^t h(s) \nabla s$$

yani

$$u^{\Delta}(t) - u^{\Delta}(0) = - \int_0^t h(s) \nabla s$$

dolayısıyla

$$u^{\Delta}(t) = - \int_0^t h(s) \nabla s + u^{\Delta}(0) \quad (3.1.4)$$

elde ederiz.

$u(t) = u(b-t)$ olduğundan $u^{\Delta}(t) = -u^{\Delta}(b-t)$ 'dir.

Böylece $u^{\Delta}(0) = -u^{\Delta}(b)$ elde edilir. (3.1.4) den,

$$\int_0^{b-t} h(s) \nabla s - u^{\Delta}(0) = - \int_0^t h(s) \nabla s + u^{\Delta}(0)$$

eşitliği yazılır. Eğer $u^{\Delta}(0) = a_1$ alınırsa,

$$2a_1 = \int_0^t h(s) \nabla s + \int_0^{b-t} h(s) \nabla s$$

olur. Burada gerekli dönüşümler ile,

$$2a_1 = \int_0^t h(s) \nabla s + \int_t^b h(s) \nabla s$$

eşitliği elde edilir. Böylece

$$a_1 = \frac{1}{b} \int_0^b (b-s)h(s)\nabla s$$

olur. (3.1.4) de yerine yerleştirilerek,

$$u^\Delta(t) = - \int_0^t h(s)\nabla s + a_1$$

$$u^\Delta(t) = - \int_0^t h(s)\nabla s + \frac{1}{b} \int_0^b (b-s)h(s)\nabla s$$

elde edilir. Tekrar her iki taraf integre edilerek,

$$u(t) = - \int_0^t (t-s)h(s)\nabla s + \frac{1}{b} t \int_0^b (b-s)h(s)\nabla s + u(0) \quad (3.1.5)$$

sonucuna ulaşılır. Bu eşitlikte $u(0) = a_2$ diyelim.

O halde

$$u^\Delta(t) = - \int_0^t h(s)\nabla s + \frac{1}{b} \int_0^b (b-s)h(s)\nabla s$$

olduğu görülür. Bu eşitliği $t = 0$ ve $t = b$ için yazarsak,

$$u^\Delta(0) = - \int_0^0 h(s)\nabla s + \frac{1}{b} \int_0^b (b-s)h(s)\nabla s$$

ve

$$u^\Delta(b) = - \int_0^b h(s)\nabla s + \frac{1}{b} \int_0^b (b-s)h(s)\nabla s$$

olduğundan,

$$u^\Delta(0) - u^\Delta(b) = \int_0^b h(s)\nabla s$$

elde edilir.

$u^\Delta(0) - u^\Delta(b) = u(t_1) + u(t_2)$ sınır koşullarından,

$$\begin{aligned} \int_0^b h(s) \nabla s &= - \int_0^{t_1} (t_1 - s) h(s) \nabla s + \frac{1}{b} t_1 \int_0^b (b - s) h(s) \nabla s + a_2 \\ &\quad - \int_0^{t_2} (t_2 - s) h(s) \nabla s + \frac{1}{b} t_2 \int_0^b (b - s) h(s) \nabla s + a_2 \end{aligned}$$

elde edilir. Hepsini bir tarafa toplar ve a_2 yi yalnız bırakırsak,

$$\begin{aligned} 2a_2 &= \int_0^b h(s) \nabla s + \int_0^{t_1} (t_1 - s) h(s) \nabla s - \frac{1}{b} t_1 \int_0^b (b - s) h(s) \nabla s \\ &\quad + \int_0^{t_2} (t_2 - s) h(s) \nabla s - \frac{1}{b} t_2 \int_0^b (b - s) h(s) \nabla s \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{1}{2} \int_0^b h(s) \nabla s + \frac{1}{2} \int_0^{t_1} (t_1 - s) h(s) \nabla s - \frac{1}{2b} t_1 \int_0^b (b - s) h(s) \nabla s \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^{t_2} (t_2 - s) h(s) \nabla s - \frac{1}{2b} t_2 \int_0^b (b - s) h(s) \nabla s \end{aligned}$$

elde edilir.

$0 \leq t_1 \leq t_2 \leq b$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{1}{2} \int_0^{t_1} h(s) \nabla s + \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} h(s) \nabla s + \frac{1}{2} \int_{t_2}^b h(s) \nabla s + \frac{1}{2} \int_0^{t_1} (t_1 - s) h(s) \nabla s \\ &\quad - \frac{t_1}{2b} \int_0^{t_1} (b - s) h(s) \nabla s - \frac{t_1}{2b} \int_{t_1}^{t_2} (b - s) h(s) \nabla s - \frac{t_1}{2b} \int_{t_2}^b (b - s) h(s) \nabla s \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^{t_1} (t_2 - s) h(s) \nabla s + \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s) h(s) \nabla s \\ &\quad - \frac{t_2}{2b} \int_0^{t_1} (b - s) h(s) \nabla s - \frac{t_2}{2b} \int_{t_1}^{t_2} (b - s) h(s) \nabla s - \frac{t_2}{2b} \int_{t_2}^b (b - s) h(s) \nabla s \end{aligned}$$

şeklinde parçalarsak,

$$\begin{aligned}
a_2 &= \frac{1}{2} \int_0^{t_1} \left[1 + (t_1 - s) - \frac{t_1}{b}(b - s) + (t_2 - s) - \frac{t_2}{b}(b - s) \right] h(s) \nabla s \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left[1 - \frac{t_1}{b}(b - s) + (t_2 - s) - \frac{t_2}{b}(b - s) \right] h(s) \nabla s \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{t_2}^b \left[1 - \frac{t_1}{b}(b - s) - \frac{t_2}{b}(b - s) \right] h(s) \nabla s \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{t_1} \left[(t_1 - s) - (t_2 - s) - \frac{t_1}{b}(b - s) - \frac{t_2}{b}(b - s) + 1 \right] h(s) \nabla s \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left[(t_2 - s) - \frac{t_1}{b}(b - s) - \frac{t_2}{b}(b - s) + 1 \right] h(s) \nabla s \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{t_2}^b \left[-\frac{t_1}{b}(b - s) - \frac{t_2}{b}(b - s) + 1 \right] h(s) \nabla s
\end{aligned}$$

elde edilir. a_2 yi (3.1.5) da yerine yazarsak,

$$\begin{aligned}
u(t) &= - \int_0^t (t - s) h(s) \nabla s + \frac{t}{b} \int_0^b (b - s) h(s) \nabla s \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_0^{t_1} \left[(t_1 - s) - (t_2 - s) - \frac{t_1}{b}(b - s) - \frac{t_2}{b}(b - s) + 1 \right] h(s) \nabla s \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left[(t_2 - s) - \frac{t_1}{b}(b - s) - \frac{t_2}{b}(b - s) + 1 \right] h(s) \nabla s \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{t_2}^b \left[-\frac{t_1}{b}(b - s) - \frac{t_2}{b}(b - s) + 1 \right] h(s) \nabla s
\end{aligned}$$

olup, $G(t, s)$ tanımı kullanılarak

$$u(t) = \int_0^b G_1(t, s)h(s)\nabla s + \int_0^b G_2(s)h(s)\nabla s = \int_0^b [G_1(t, s) + G_2(s)]h(s)\nabla s$$

yazılır, burada $G_1(t, s)$ ve $G_2(s)$ lemmada verildiği gibidir.

Sonuç olarak, buradan

$$u(t) = \int_0^b G(t, s)h(s)\nabla s$$

çözümü olduğu görülür. ■

Lemma 3.1.2 $G(t, s)$ Green fonksiyonu simetriktir. Yani, her $t, s \in \mathbb{T}$ için

$$G(b - t, b - s) = G(t, s)$$

dir.

İspat: Simetriklik tanımından $G_1(t, s)$ için, $u(b + a - t) = u(t)$, $t \in [a, b]$ olur ve dolayısıyla özel halde $u(b - t) = u(t)$, $t \in [0, b]$ eşitliğinin sağlandığını göstermeliyiz. Burada

$s \leq t$ için $-s \geq -t$ ve $b - s \geq b - t$ olduğundan,

$$G_1(b - t, b - s) = (b - t)(b - (b - s)) = (b - t)s = G_1(t, s)$$

olarak bulunur. Ayrıca

$s \geq t$ için $-s \leq -t$ ve $b - s \leq b - t$ olduğundan,

$$G_1(b - t_1, b - s) = (b - s)(b - (b - t)) = (b - s)t = G_1(t, s)$$

elde edilir. O halde $G_1(t, s)$, $\mathbb{T}$ üzerinde simetriktir.

$G_2(s)$, $\mathbb{T}$ üzerinde simetriktir. Bu durumun kanıtı (Kuyumcu C., 2021) yüksek lisans tezinde varsayılan kabullerle benzer olarak gösterilir.

O halde $G(t, s)$, $\mathbb{T}$ üzerinde simetrik fonksiyondur. İspat böylece tamamlanmış olur. ■

Lemma 3.1.3 $G(t, s)$ Green fonksiyonu pozitiftir.

İspat: $G_1(t, s)$ ve $G_2(s)$ pozitif olduğunu göstermeliyiz.

Burada $G_1(t, s) \geq 0$ olduğunu gösterebilmemiz için $s \leq t$ ve $t \leq s$ durumlarını incelemeliyiz.

$$G_1(t, s) = \frac{1}{b} \begin{cases} s(b-t), & 0 \leq s \leq t \leq b \\ t(b-s), & 0 \leq t \leq s \leq b \end{cases}$$

$s \leq t$ için; $s \geq 0$, $b > 0$ ve $b-t \geq 0$ olduğundan bu koşul altında Green fonksiyonu pozitiftir.

$t \leq s$ için; $t \geq 0$, $b > 0$ ve $b-s \geq 0$ olduğundan bu koşul altında Green fonksiyonu pozitiftir.

$G_2(s) \geq 0$ olduğunu gösterebilmemiz için üç durum incelemeliyiz.

1.DURUM: $0 \leq s \leq t_1$ için;

$0 \leq s$ koşulundan $0 \geq -s$ ve $0 \geq -2s$ olur. Ayrıca $t_1, t_2 \in [0, b]$ için $t_1 > 0$ ve $t_2 > 0$ olduğundan $t_1 + t_2 > 0$ elde edilir. Burada $0 \geq -2s$ eşitsizliğinin her iki yanına $t_1 + t_2$ eklenirse $t_1 + t_2 \geq t_1 + t_2 - 2s$ olur.

$b > b-s > 0$ olduğundan eşitsizliğin her tarafı $b-s$ sayısına bölünürse $\frac{b}{b-s} > 1$ olur. Burada $\frac{b-s}{b} < 1$ olduğundan $-\frac{b-s}{b} > -1$ elde edilir.

Bu eşitsizlikler birleştirilirse $-\frac{b-s}{b}(t_1 + t_2) > -(t_1 + t_2 - 2s)$ olur düzenlenirse son durumda $t_1 + t_2 - 2s - \frac{b-s}{b}(t_1 + t_2) + 1 > 1$ olduğu görülür.

2.DURUM: $t_1 \leq s \leq t_2$ için;

İlk durumda elde edilen eşitsizlikler sağlanır. Ek olarak elimizdeki sınırlardan $t_2 - s \geq 0$ ve $s - t_1 \geq 0$ olur. $-\frac{b-s}{b}(t_1 + t_2) > -(t_1 + t_2 - 2s)$ eşitsizliği düzenlenirse $t_2 - s - \frac{b-s}{b}(t_1 + t_2) > -t_1 + s > 0$ olur buradan ikinci durumun pozitifliğini de göstermiş oluruz.

3.DURUM: $t_2 \leq s \leq b$ için;

İlk durumdaki elde edilen eşitsizlikler sağlanır. Buradan $-\frac{b-s}{b}(t_1 + t_2) > 0$ olduğundan $-\frac{b-s}{b}(t_1 + t_2) + 1 > 1$ elde edilir, buradan pozitif olduğunu göstermiş oluruz.

O halde $G_1(t, s)$ ve $G_2(s)$ pozitiftir. Buradan Green fonksiyonu pozitiftir.

■

Lemma 3.1.4 t_1, t_2 ler $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq b$ eşitsizliğini sağlayan iki negatif olmayan sabit olsun. $[0, b]$ üzerinde $h^*(t) \in C[0, b]$ simetrik ise dördüncü mertebeden sınır değer probleminin

$$\begin{cases} (u^{\Delta\nabla}(t))^{\Delta\nabla} = h^*(t), & t \in [0, b]_{k^2} \\ u(t) = u(b-t), & u^{\Delta}(0) - u^{\Delta}(b) = u(t_1) + u(t_2) \\ u^{\Delta\nabla\Delta}(0) - u^{\Delta\nabla\Delta}(b) = u^{\Delta\nabla}(t_1) + u^{\Delta\nabla}(t_2), & 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq b \end{cases} \quad (3.1.6)$$

bir tek simetrik çözümü,

$$u(t) = \int_0^b G(t, s) \left(\int_0^b G(s, r) h^*(r) \nabla r \right) \nabla s,$$

olur, burada $G(t, s) = G_1(t, s) + G_2(s)$ dir. $G_1(t, s)$ ve $G_2(s)$, (3.1.2) ve (3.1.3) lerde tanımlandığı gibidir.

İspat: Bu lemmayı kanıtlamak için $u^{\Delta\nabla}(t) = w(t)$ kabul edelim. O zaman (3.1.6) ile verilen sınır değer problemi,

$$\begin{cases} w^{\Delta\nabla} = h^*(t), & 0 \leq t \leq b \\ w(t) = w(b-t), & w^{\Delta}(0) - w^{\Delta}(b) = w(t_1) + w(t_2) \end{cases}$$

homojen olmayan ikinci mertebe sınır değer problemine dönüşür. Lemma 3.1.1 den bu problemin çözümü

$$w(t) = - \int_0^b G(t, r) h^*(r) \nabla r \quad (3.1.7)$$

şeklindedir ve burada $G(t, r)$

$$\begin{cases} w^{\Delta\nabla} = 0, & 0 \leq t \leq b \\ w(t) = w(b-t), & w^{\Delta}(0) - w^{\Delta}(b) = w(t_1) + w(t_2) \end{cases}$$

homojen problemin çözümünün Green fonksiyonudur.

Aynı zamanda,

$$\begin{cases} u^{\Delta\nabla}(t) = w(t), & t \in [0, b]_k^k, \\ u(t) = u(b-t), & u^{\Delta}(0) - u^{\Delta}(b) = u(t_1) + u(t_2) \end{cases}$$

probleminin çözümü için Lemma 3.1.1 kullanılarak

$$u(t) = - \int_0^b G(t, s) w(s) \nabla s$$

elde edilir. Böylece

$$u(t) = - \int_0^b G(t, s) \left\{ - \int_0^b G(s, r) h^*(r) \nabla r \right\} \nabla s$$

$$u(t) = \int_0^b G(t, s) \left(\int_0^b G(s, r) h^*(r) \nabla r \right) \nabla s$$

olur. ■

Burada $h > 0$ ise $G(t, s) > 0$ olduğundan ve (3.1.7) den $w(t) < 0$ elde edilir. $u^{\Delta \nabla}(t) = w(t)$ ve $w(t) < 0$ sağlandığından $u(t)$ konkavdır, böylece problemin çözümünün konkav olduğu ispatlanmış olur.

Lemma 3.1.5 $m_{G_2} = \min_{s \in [0, b]} G_2(s)$ ve $\ell = \frac{4m_{G_2}}{4m_{G_2} + b}$ olsun.

O zaman her $t, s \in [0, b]$ için $G(t, s)$ Green fonksiyonu,

$$\ell G(s, s) \leq G(t, s) \leq G(s, s)$$

eşitsizliğini sağlar, burada $G(t, s)$, $G(s, s)$, $G_2(s)$ ' ler Lemma 3.1.1 deki gibi tanımlanır.

İspat: Her $t, s \in [0, b]$ için $G_1(t, s) = \frac{1}{b} \begin{cases} s(b-t), & 0 \leq s \leq t \leq b \\ t(b-s), & 0 \leq t \leq s \leq b \end{cases}$

olduğundan $G_1(s, s) = \frac{1}{b} s(b-s)$ dir.

Aynı zamanda

$$\left(\frac{1}{b} s(b-s) \right)' = \frac{1}{b} [1(b-s) + s(-1)]$$

$$= \frac{1}{b} (b-s-s) \text{ olduğundan,}$$

$$= \frac{1}{b} (b-2s) = 0 \text{ için } \frac{b}{2} = s \text{ elde edilir.}$$

Aynı zamanda $\left(\frac{1}{b} s(b-s) \right)'' = \frac{-2}{b} < 0$ olduğundan $s = \frac{b}{2}$ yerel maksimum noktadır. Böylece

$$\begin{aligned}
G_1(s, s) &< G_1\left(\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right) \\
&= \frac{1}{b} \left[\frac{b}{2} \left(b - \frac{b}{2} \right) \right] \\
&= \frac{1}{b} \left[\frac{b}{2} \cdot \frac{b}{2} \right] = \frac{b^2}{4b} = \frac{b}{4} \\
G_1(s, s) &< \frac{b}{4}
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
G(t, s) = G_1(t, s) + G_2(s) &\geq G_2(s) = \frac{b}{4m_{G_2} + b} \cdot G_2(s) + \frac{4m_{G_2}}{4m_{G_2} + b} \cdot G_2(s) \\
&\geq \frac{b \cdot m_{G_2}}{4m_{G_2} + b} + \frac{4m_{G_2}}{4m_{G_2} + b} \cdot G_2(s) \\
&= \frac{b}{4} \cdot \frac{4m_{G_2}}{4m_{G_2} + b} + \frac{4m_{G_2}}{4m_{G_2} + b} \cdot G_2(s)
\end{aligned}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}
G(t, s) &\geq G_1(s, s) \cdot \ell + \ell \cdot G_2(s) \\
&= \ell [G_1(s, s) + G_2(s)] \\
&= \ell \cdot G(s, s)
\end{aligned}$$

dolayısıyla

$$\ell G(s, s) \leq G(t, s)$$

elde edilir.

Green fonksiyonunun tanımından

$$t \leq s \Rightarrow G_1(t, s) = \frac{1}{b} t(b - s) \leq \frac{1}{b} s(b - s) = G_1(s, s)$$

$$t \geq s \Rightarrow G_1(t, s) = \frac{1}{b} s(b - t) \leq \frac{1}{b} s(b - s) = G_1(s, s)$$

sağlandığından,

$$G(t, s) = G_1(t, s) + G_2(s) \leq G_1(s, s) + G_2(s) = G(s, s)$$

olur ve buradan

$$G(t, s) \leq G(s, s)$$

elde edilir. O halde

$$\ell G(s, s) \leq G(t, s) \text{ ve } G(t, s) \leq G(s, s)$$

eşitsizliklerinden,

$$\ell G(s, s) \leq G(t, s) \leq G(s, s)$$

olur.

■

Lemma 3.1.6 $h^*(t) \in C[0, b]$ olsun. O halde (3.1.6) ile verilen sınır değer probleminin tek simetrik çözümü $u(t)$, $[0, b]$ üzerinde negatif değildir.

İspat: $h^*(t) \in C[0, b]$ olduğunu varsayalım. $t \in [0, b]$,

$$u^{\Delta \nabla}(t) = w(t) = - \int_0^b G(t, s) h^*(s) \nabla s \leq 0$$

ile birlikte $G(t, s) \geq 0$ ve $h^*(s) \geq 0$ olduğundan $u(t)$ konkavdır.

(3.1.6) ile verilen problemin sınır noktalarından,

$$\begin{aligned} u(0) = u(b) &= \int_0^b G(b, s) \left(\int_0^b G(b, r) h^*(r) \nabla r \right) \nabla s \\ &= \int_0^b G(b, s) \left(\frac{1}{2} \int_0^b (t_1 + t_2 - 2r - (b-r)(t_1 + t_2) + 1) h^*(r) \nabla r \right) \nabla s \\ &\quad + \int_0^b G(b, s) \left(\frac{1}{2} \int_0^b (t_1 - r - (b-r)(t_1 + t_2) + 1) h^*(r) \nabla r \right) \nabla s \\ &\quad + \int_0^b G(b, s) \left(\frac{1}{2} \int_0^b (-(b-r)(t_1 + t_2) + 1) h^*(r) \nabla r \right) \nabla s \geq 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$u(t) = \int_0^b G(t, s) \int_0^b G(s, r) h^*(r) \nabla r \nabla s \geq 0$$

olur. Bu ispatı tamamlar.

■

Lemma 3.1.7 $h^*(t) \in C[0, b]$ olsun.

$$\min_{t \in [0, b]} u(t) \geq \ell^2 \|u\| \quad (3.1.8)$$

eşitsizliğini sağlayan (3.1.6) ile verilen sınır değer probleminin tek simetrik çözümü $u(t)$ dir, burada ℓ ; Lemma 3.1.5 deki gibi tanımlanmıştır.

İspat: Herhangi $t \in [0, b]$ için, Lemma 3.1.5 den, $G(t, s) \leq G(s, s)$ olduğunu biliyoruz. Buradan

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_0^b G(t, s) \left(\int_0^b G(s, r) h^*(r) \nabla r \right) \nabla s \\ &\leq \int_0^b G(s, s) \left(\int_0^b G(r, r) h^*(r) \nabla r \right) \nabla s \end{aligned}$$

olur. O halde

$$\|u\| \leq \int_0^b G(s, s) \left(\int_0^b G(r, r) h^*(r) \nabla r \right) \nabla s$$

elde edilir. Herhangi $t \in [0, b]$ için, Lemma 3.1.5 de $\ell G(s, s) \leq G(t, s)$ eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_0^b G(t, s) \left(\int_0^b G(s, r) h^*(r) \nabla r \right) \nabla s \\ &\geq \ell \int_0^b G(s, s) \left(\int_0^b G(r, r) h^*(r) \nabla r \right) \nabla s \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\min_{t \in [0, b]} u(t) \geq \ell^2 \|u\|$ olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanmış olur.

■

Bu bilgiler ışığında problemin çözümünün varlığını gösteren teoremi ifade edeceğiz.

Teorem 3.1.1 $f(t, u(t))$, $[0, b] \times \mathbb{R}$ sürekli olsun. $Q > 0$ sayısı için

$$Q \geq \max\{|f(t, u(t))| : t \in [0, b], \|u\| \leq M\}$$

eşitsizliği sağlansın; eğer $M > 0$ sayısı $\Lambda^2 \cdot Q \leq M$ eşitsizliğini sağlarsa, (1.1) ile verilen dördüncü mertebe sınır değer probleminin bir $u(t)$ çözümü vardır, burada

$$\Lambda = \int_0^b G(s, s) \nabla s \quad (3.1.9)$$

olarak tanımlanmıştır.

İspat: $\|u\| := \max_{t \in [0, b]} |u(t)|$ ile normlanmış $B = C[0, b]$ Banach uzayını alalım.

$K_1 := \{u \in B, \|u\| \leq M\}$ olsun. K_1 , B nin kapalı, sınırlı ve konveks bir alt kümesidir. Dördüncü mertebe sınır değer problemini çözmek

$$Tu(t) = \int_0^b G(t, s) \left(\int_0^b G(s, r) f(r, u(r)) \nabla r \right) \nabla s$$

ile tanımladığımız $T: K_1 \rightarrow B$ operatörün sabit noktasını bulmaya denktir. Öncelikle $T: K_1 \rightarrow B$ sürekli olduğunu gösterelim.

$\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ vardır öyleki, $\|u - u_0\| < \delta$ eşitsizliği sağlandığında $\|Tu - Tu_0\| < \varepsilon$ olur.

$$\begin{aligned} & |Tu(t) - Tu_0(t)| \\ &= \left| \int_0^b G(t, s) \int_0^b G(s, r) f(r, u(r)) \nabla r \nabla s - \int_0^b G(t, s) \int_0^b G(s, r) f(r, u_0(r)) \nabla r \nabla s \right| \\ &\leq \left| \int_0^b G(s, s) \int_0^b G(r, r) [f(r, u(r)) - f(r, u_0(r))] \nabla r \nabla s \right| \end{aligned}$$

elde edilir. $\|u - u_0\| < \delta$ olduğundan $\max_{t \in [0, b]} |u(t) - u_0(t)| < \delta$ eşitsizliği doğrudur. O zaman her $t \in [0, b]$ için $|u(t) - u_0(t)| < \delta$ elde edilir.

$\|u_0\| = \max_{t \in [0, b]} |u_0(t)| = c_1$ ise her $t \in [0, b]$ için $|u_0(t)| \leq c_1$ olur.

$|u - u_0| < \delta$ ise norm özelliğinden $||u| - |u_0|| < \delta$ elde edilir ki buradan $t \in [0, b]$ için

$$-\delta < \|u\| - \|u_0\| < \delta$$

olur.

$\|u_0\| = c_1$ olmak üzere; $-\delta + c_1 < \|u\| < \delta + c_1$ elde edilir.

Kapalı ve sınırlı,

$$E = \{(t, \tau) : 0 \leq t \leq b, |\tau| < 1 + c_1\} \subset [0, b] \times \mathbb{R}$$

kümesini alalım. $f(t, \tau)$ fonksiyonu E bölgesi üzerinde sürekli olduğundan bu bölgede de sürekli olur.

O halde başta ele aldığımız her ε 'a göre öyle bir $\delta > 0$ ($\delta < b$) bulunabilir ki $|t_1 - t_2| < \delta$, $|\tau_1 - \tau_2| < \delta$ olmak üzere her $(t_1, \tau_1), (t_2, \tau_2) \in B$ için $|f(t_1, \tau_1) - f(t_2, \tau_2)| < \varepsilon$ elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} |Tu(t) - Tu_0(t)| &\leq \int_0^b |G(t, s)| \int_0^b |G(s, r)| |f(r, u(r)) - f(r, u_0(r))| \nabla r \nabla s \\ &\leq \varepsilon \int_{s=0}^b |G(t, s)| \int_{r=0}^b |G(s, r)| \nabla r \nabla s \\ &\leq \varepsilon \int_0^b G(s, s) \int_0^b G(r, r) \nabla r \nabla s \leq \varepsilon \cdot \Lambda^2 = \varepsilon_1 \end{aligned}$$

olur.

Bu eşitsizlikte her iki taraftan maksimuma geçilirse,

$$\|Tu(t) - Tu_0(t)\| \leq \varepsilon_1$$

eşitsizliği elde edilir ve bu eşitsizlik T operatörünün sürekli olduğunu gösterir. Şimdi T operatörünün kompakt olduğunu gösterelim. Bu amaçla herhangi sınırlı $K_1 \subset [0, b]$ kümesi ele alınsın. $T(K_1)$ kümesinin $C[0, b]$ içinde pre-kompakt olduğu gösterilmelidir. Bunu göstermek için Arzela-Ascoli Teoreminden yararlanılacaktır.

$$\begin{aligned} |Tu(t)| &= \left| \int_0^b G(t, s) \int_0^b G(s, r) f(r, u(r)) \nabla r \nabla s \right| \\ &\leq \int_0^b |G(t, s)| \int_0^b |G(s, r)| |f(r, u(r))| \nabla r \nabla s \end{aligned}$$

eşitsizliğinde

$$Q \geq \max\{ |f(t, u(t))| : t \in [0, b], \|u\| \leq M \}$$

olduğu için

$$\begin{aligned} |Tu(t)| &= Q \int_0^b |G(t, s)| \int_0^b |G(s, r)| \nabla r \nabla s \leq Q \int_0^b G(s, s) \int_0^b G(r, r) \nabla r \nabla s \\ &\leq Q \Lambda^2 \leq M \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte her iki taraftan maksimuma geçilirse her $u \in K_1$ için $\|Tu(t)\| < M$ olur. Buradan $T(K_1)$ ya ait fonksiyonların aynı dereceden sınırlı ve T operatörünün K_1 kümesini invaryant bıraktığı görülür. $u \in K_1$ alınırsa verilen her $\varepsilon > 0$ sayısı için öyle $\delta > 0$ bulunabilir ki $|t_1 - t_2| < \delta$ için;

$$\begin{aligned} &|Tu(t_1) - Tu(t_2)| \\ &= \left| \int_0^b G(t_1, s) \int_0^b G(s, r) f(r, u(r)) \nabla r \nabla s - \int_0^b G(t_2, s) \int_0^b G(s, r) f(r, u(r)) \nabla r \nabla s \right| \\ &\leq \int_0^b |G(t_1, s) - G(t_2, s)| \int_0^b |G(s, r)| |f(r, u(r))| \nabla r \nabla s \end{aligned}$$

elde edilir. $f(r, u(r))$ fonksiyonu sürekli olduğundan kapalı bölgede sınırlıdır. Bu nedenle

$$\max_{r \in [0, b], \|u\| \leq M} |f(r, u(r))| := c_2$$

olarak tanımlanırsa,

$$|Tu(t_1) - Tu(t_2)| \leq \varepsilon^* c_2 b^2 \Lambda$$

elde edilir. Böylece $T(K_1)$ ya ait fonksiyonlar aynı dereceden süreklidir. Arzelo-Ascoli Teoremi ile $T : K_1 \rightarrow K_1$ kompakt bir operatördür. Schauder Sabit Nokta Teoreminden T operatörü, K_1 da bir sabit noktaya sahiptir.

■

Sonuç: $f(t, u(t)), [0, b] \times \mathbb{R}$ de sınırlı ve sürekli ise dördüncü mertebe sınır değer probleminin bir çözümü vardır.

İspat: $f(t, u(t))$ sınırlı olduğundan supremum değeri vardır. Bu nedenle,

$$P > \sup\{ |f(t, u(t))| : 0 \leq t \leq b, u \in \mathbb{R} \}$$

olacak şekilde bir P ve $P \Lambda^2 < M$ olacak şekilde yeterince büyük M sayısı seçebiliriz.

Böylece, $Q \geq \max \{|f(t, u(t))| : t \in [0, b], \|u\| \leq M\}$ olmak üzere $P \geq Q$ olacak şekilde bir Q sayısı vardır ve $\Lambda^2 < \frac{M}{P} < \frac{M}{Q}$ eşitsizliği sağlanır. Böylece Teorem 3.1 den dolayı sınır değer probleminin bir çözümü vardır.

■

Problemin çözümünün varlığını gösteren diğer teoremleri ifade edebilmek amacı ile yine $\|u\| := \max_{t \in [0, b]} |u(t)|$ normu ile normlanmış $B = C[0, b]$ Banach uzayı ve bu uzayda

$$K = \left\{ u \in C^+[0, b] : u(t), [0, b] \text{ üzerinde simetrik, konkav, pozitif ve} \right. \\ \left. \min_{t \in [0, b]} u(t) \geq \ell^2 \|u\| \right\}$$

konusini tanımlayalım. B Banach uzayı içinde

$$Tu(t) = \int_0^b G(t, s) \left(\int_0^b G(s, r) f(r, u(r)) \nabla r \right) \nabla s \quad (3.1.10)$$

şeklinde tanımlı $T: K \rightarrow C[0, b]$ integral operatörünü alalım. $u = u(t)$ nin (1.1) ile verilen sınır değer probleminin bir simetrik çözümü olması için gerek ve yeter koşul u ' nun, (3.1.10) da tanımlanan T integral operatörünün de bir sabit noktası olmasıdır.

Öncelikle T operatörünün tamamen sürekli olduğunu gösterelim.

Lemma 3.1.8 (3.1.10) de tanımlanan $T: K \rightarrow K$ operatörü tamamen süreklidir.

İspat : Burada $[0, b]$ üzerinde Tu simetriktir çünkü,

$$\begin{aligned} Tu(b-t) &= \int_0^b G(b-t, s) \int_0^b G(s, r) f(r, u(r)) \nabla r \nabla s \\ &= \int_0^b G(t, s) \int_0^b G(s, r) f(r, u(r)) \nabla r \nabla s = Tu(t) \end{aligned}$$

olduğu kolayca görülür. Ayrıca

$$(Tu)^{\Delta \nabla}(t) = - \int_0^b G(t,s)f(s,u(s))\nabla s \leq 0$$

sağlandığından Tu konkavdır. Tu için Lemma 3.1.6 i uygularsak $Tu \in C^+[0, b]$ sağlanır o halde Tu kapalıdır. Böylece Lemma 3.1.5 den ve f nun negatif olmamasından,

$$\begin{aligned} Tu(t) &= \int_0^b G(t,s) \left(\int_0^b G(s,r)f(r,u(r))\nabla r \right) \nabla s \\ &\leq \int_0^b G(s,s) \left(\int_0^b G(s,r)f(r,u(r))\nabla r \right) \nabla s \\ &\leq \int_0^b G(s,s) \left(\int_0^b G(r,r)f(r,u(r))\nabla r \right) \nabla s \end{aligned}$$

elde edilir, buradan

$$\|Tu\| \leq \int_0^b G(s,s) \left(\int_0^b G(r,r)f(r,u(r))\nabla r \right) \nabla s$$

eşitsizliğine ulaşılır. Lemma 3.1.5 nin diğer kısmından,

$$\begin{aligned} Tu(t) &= \int_0^b G(t,s) \left(\int_0^b G(s,r)f(r,u(r))\nabla r \right) \nabla s \\ &\geq \ell \int_0^b G(s,s) \left(\int_0^b G(s,r)f(r,u(r))\nabla r \right) \nabla s \\ &\geq \ell \int_0^b G(s,s) \left(\ell \int_0^b G(r,r)f(r,u(r))\nabla r \right) \nabla s \end{aligned}$$

olur ve böylece

$$Tu \geq \ell^2 \int_0^b G(s,s) \left(\int_0^b G(r,r)f(r,u(r))\nabla r \right) \nabla s$$

eşitsizliği elde edilir. Ulaşılan bu eşitsizlikler ile $Tu \geq \ell^2 \|Tu\|$ olduğu görülür. Böylece $\forall t \in \mathbb{T}$ için $\min_{t \in \mathbb{T}} Tu(t) \geq \ell^2 \|Tu\|$ olduğu görülür. Diğer bir deyişle

$T[K] \subset K$ elde edilir. Buradan $G(t, s)$, $f(t, u(t))$ sürekli olduğundan T operatörü sürekli dir. K kümesi kapalı ve sınırlı olduğundan T operatörü kompaktır. Böylece $T : K \rightarrow K$ operatörünün tamamen sürekli olduğu ispatlanmış olur.

■

Bu kısımda (1.1) sınır değ er probleminin pozitif ve simetrik çözümlerinin varlığı üzerine farklı sonuçları vereceğiz. Bu amaçla,

(A) $\forall t \in [0, b]$ için $u(t)$ simetrik, sonlu, pozitif ve konkav olsun,

koşulunun sağlandığını kabul edeceğiz. Ayrıca $T:K \rightarrow K$ operatörünü ve K konisini Lemma 3.1.8 deki gibi alacağız. Bu kısımda (1.1) probleminin tek ve çok sayıda pozitif, simetrik çözümlerinin varlığını inceleyeceğiz.

Aşağıda çalışmamızın devamında kullanacağımız gösterimleri vereceğiz:

$$f_0 = \lim_{u \rightarrow 0} \inf_{t \in [0, b]} \frac{f(t, u)}{u} = \infty, \quad f_\infty = \lim_{u \rightarrow \infty} \inf_{t \in [0, b]} \frac{f(t, u)}{u} = \infty$$

$$f^0 = \lim_{u \rightarrow 0} \sup_{t \in [0, b]} \frac{f(t, u)}{u} = 0, \quad f^\infty = \lim_{u \rightarrow \infty} \inf_{t \in [0, b]} \frac{f(t, u)}{u} = 0$$

3.2 Tek Simetrik Pozitif Çözümün Varlığı

Bu kısımda (1.1) sınır değer probleminin bir simetrik çözümünün varlığı Krasnosel'skii Sabit Nokta Teoremi yardımıyla gösterilecektir.

Teorem 3.2.1 Kabul edelim ki **(A)** koşulu sağlansın. Λ , (3.1.9) ile verilen sayı ve R_1 ve R_2 ler $0 < R_1 < \ell^2 R_2$ olacak şekilde iki sabit olmak üzere

$$(D_1) \quad f(t, u) \leq \frac{1}{\Lambda^2} R_1, \quad \forall (t, u) \in [0, b] \times [\ell^2 R_1, R_1] \quad \text{ve}$$

$$f(t, u) \geq \frac{1}{\ell^2 \Lambda^2} R_2, \quad \forall (t, u) \in [0, b] \times [\ell^2 R_2, R_2];$$

veya

$$(D_2) \quad f(t, u) \geq \frac{1}{\ell^2 \Lambda^2} R_1, \quad \forall (t, u) \in [0, b] \times [\ell^2, R_1] \quad \text{ve}$$

$$f(t, u) \leq \frac{1}{\Lambda^2} R_2, \quad \forall (t, u) \in [0, b] \times [\ell^2 R_2, R_2];$$

koşullarından biri sağlanıyorsa (1.1) sınır değer probleminin

$R_1 \leq \|u\| \leq R_2$ eşitsizliğini sağlayan en az bir u simetrik pozitif çözümü vardır.

İspat: Kabul edelim ki (D_1) koşulu sağlansın.

$$\Omega_1 = \{u: u \in E, \|u\| < R_1\}$$

ve

$$\Omega_2 = \{u: u \in E, \|u\| < R_2\}$$

yuvarlarını tanımlayalım.

$u \in K$ için Lemma 3.1.7 dan $\min_{t \in [0, b]} u(t) \geq \ell^2 \|u\|$ olduğunu biliyoruz.

Böylece $u \in K \cap \partial\Omega_1$ için $u(s) \in [\ell^2 R_1, R_1]$ ve $s \in [0, b]$ için

$$f(s, u(s)) \leq \frac{1}{\Lambda^2} R_1$$

elde ederiz. Burada, (3.1.10) ve Lemma 3.1.8 ile birlikte

$$\begin{aligned} Tu(t) &= \int_0^b G(t, s) \int_0^b G(s, r) f(r, u(r)) \nabla r \nabla s \\ &\leq \int_0^b G(s, s) \int_0^b G(r, r) f(r, u(r)) \nabla r \nabla s \end{aligned}$$

olur. (D_2) koşulundan

$$\leq \frac{R_1}{\Lambda^2} \int_0^b G(s, s) \int_0^b G(r, r) \nabla r \nabla s$$

elde edilir. (3.1.9) da Λ tanımlamasını kullanarak

$$Tu(t) = \frac{R_1}{\Lambda^2} \Lambda^2 = R_1 = \|u\|$$

olur ki, her iki taraftan norma geçerse,

$$\|Tu\| \leq \|u\|, \quad u \in K \cap \partial\Omega_1$$

elde edilir.

Diğer taraftan, $u \in K \cap \partial\Omega_2$ için $u(s) \in [\ell^2 R_2, R_2]$ olduğu görülür.

O halde,

$$f(s, u(s)) \geq \frac{1}{\ell^2 \Lambda^2} R_2$$

elde edilir. $t \in [0, b]$ için,

$$\begin{aligned} Tu(t) &= \int_0^b G(t, s) \int_0^b G(s, r) f(r, u(r)) \nabla r \nabla s \\ &\geq \frac{R_2}{\ell^2 \Lambda^2} \int_0^b G(t, s) \int_0^b G(s, r) \nabla r \nabla s \\ &\geq \frac{R_2}{\ell^2 \Lambda^2} \int_0^b \ell G(s, s) \int_0^b \ell G(r, r) \nabla r \nabla s \end{aligned}$$

eşitsizliğinden

$$Tu(t) \geq \frac{R_2}{\Lambda^2} \Lambda^2 = R_2 = \|u\|$$

olur.

Benzer şekilde yine her iki taraftan norma geçerse;

$$\|Tu\| \geq \|u\|, \quad u \in K \cap \partial\Omega_2$$

elde edilir. Yukarıda elde edilen eşitsizlikler ve Teorem 2.3.1 den T operatörü $u \in K \cap (\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1)$ gibi bir sabit noktaya sahiptir. Böylece u , (1.1) sınır değer probleminin bir simetrik pozitif çözümüdür. ■

Teorem 3.2.2 Kabul edelim ki **(A)** koşulu sağlansın ve Λ , (3.1.9) daki gibi tanımlansın.

$$(D_3) \quad f_0 > \frac{1}{\ell^4 \Lambda^2} \quad \text{ve} \quad f^\infty < \frac{1}{\Lambda^2}$$

(diğer bir değişle; $f_0 = \infty$, $f^\infty = 0$)

veya

$$(D_4) \quad f^0 < \frac{1}{\Lambda^2} \quad \text{ve} \quad f_\infty > \frac{1}{\ell^4 \Lambda^2}$$

(diğer bir deyişle; $f^0 = 0$, $f_\infty = \infty$)

koşullarından biri sağlanıyorsa o zaman (1.1) sınır değer probleminin en az bir simetrik pozitif çözümü vardır.

İspat: (D_3) durumunu kullanarak kanıtlayalım. $f_0 > \frac{1}{\ell^4 \Lambda^2}$ olsun.

$(t, u) \in [0, b] \times [0, R_1]$ için $f(t, u) \geq \frac{1}{\ell^4 \Lambda^2} u$ olacak şekilde $R_1 > 0$ varlığını limit tanımından biliyoruz. $\forall t \in [0, b]$ için $u \in K \cap \partial\Omega_1$ olarak alalım. $\Omega_1 = \{u: u \in E, \|u\| < R_1\}$, Lemma 3.1.5 ve Lemma 3.1.8 den;

$$\begin{aligned} Tu(t) &= \int_0^b G(t, s) \int_0^b G(s, r) f(r, u(r)) \nabla r \nabla s \\ &\geq \frac{1}{\ell^4 \Lambda^2} \int_0^b G(t, s) \int_0^b G(s, r) u(r) \nabla r \nabla s \\ &\geq \frac{1}{\ell^4 \Lambda^2} \int_0^b \ell G(s, s) \int_0^b \ell G(r, r) \ell^2 \|u\| \nabla r \nabla s \\ &= \frac{1}{\ell^4 \Lambda^2} \ell^4 \int_0^b G(s, s) \int_0^b G(r, r) \|u\| \nabla r \nabla s \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece,

$$Tu(t) = \frac{1}{\Lambda^2} \Lambda^2 \|u\| = \|u\|$$

olur.

Buradan,

$$\|Tu\| \geq \|u\|, \quad u \in K \cap \partial\Omega_1$$

sağlandığı görülür.

Diğer taraftan, $f^\infty < \frac{1}{\Lambda^2}$ olsun. $\bar{R} > 0$ olacak şekilde $f(t, u) \leq \frac{1}{\Lambda^2} u$,

$(t, u) \in [0, b] \times (\bar{R}, \infty)$ için, $R_2 > \max\{R_1, \frac{\bar{R}}{\ell^2}\}$ olsun.

$\Omega_2 = \{u: u \in E, \|u\| \leq R_2\}$ alalım. $u \in K \cap \partial\Omega_2$ olduğundan, $u(t) \geq \ell^2 \|u\| = \ell^2 R_2 > \bar{R}$ elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} Tu(t) &= \int_0^b G(t, s) \int_0^b G(s, r) f(r, u(r)) \nabla r \nabla s \\ &\leq \int_0^b G(s, s) \int_0^b G(r, r) \frac{1}{\Lambda^2} u(r) \nabla r \nabla s \\ &\leq \frac{1}{\Lambda^2} \|u\| \int_0^b G(s, s) \int_0^b G(r, r) \nabla r \nabla s \end{aligned}$$

elde ederiz. O halde,

$$Tu(t) = \frac{1}{\Lambda^2} \|u\| \Lambda^2 = \|u\|$$

olur.

Buradan,

$$\|Tu\| \leq \|u\|, \quad u \in K \cap \partial\Omega_2$$

elde edilir.

Yukarıda elde edilen eşitsizliklerden ve Krasnosel'skii sabit nokta teoreminden T operatörü $u \in K \cap (\bar{\Omega}_2 \setminus \Omega_1)$ gibi bir sabit noktaya sahiptir. Böylece u , (1.1) sınır değer probleminin bir simetrik pozitif çözümüdür.

■

Teorem 3.2.3 Kabul edelim ki (A) nın koşulları sağlansın. Ek olarak $0 < R_1 \leq R_2$ olacak şekilde R_1 ve R_2 sabitlerini alalım. Eğer

$(D_5) \forall t \in [0, b]$ için $[0, R_2]$ aralığında $f(t, \cdot)$ azalmayan,

$(D_6) \forall t \in [0, b]$ için $f(s, \ell^2 R_1) \geq \frac{1}{\ell^2 \Lambda^2} R_1$ ve $f(t, R_2) \leq \frac{1}{\Lambda^2} R_2$,

sağlanıyorsa, o halde (1.1) sınır değer probleminin

$$R_1 \leq \|u\| \leq R_2$$

eşitsizliğini sağlayan en az bir u simetrik pozitif çözümü vardır.

İspat: $\Omega_1 = \{u: u \in E, \|u\| < R_1\}$

ve

$$\Omega_2 = \{u: u \in E, \|u\| < R_2\}$$

yuvarlarını alalım. Lemma 3.1.7 dan $\min_{t \in [0, b]} u(t) \geq \ell^2 \|u\|$ olduğunu biliyoruz.

Böylece,

$u \in K \cap \partial\Omega_1$ için, $s \in [0, b]$ üzerinde;

$$u(s) \geq \ell^2 \|u\| = \ell^2 R_1$$

elde edilir ve burada (D_5) ve (D_6) koşulları ile birlikte,

$$Tu(t) = \int_0^b G(t, s) \int_0^b G(s, r) f(r, u(r)) \nabla r \nabla s$$

olur. Burada $u > \ell^2 R_1$ iken $f(s, \ell^2 R_1)$ artandır. O halde,

$$\geq \int_0^b G(t, s) \int_0^b G(s, r) f(r, \ell^2 R_1) \nabla r \nabla s$$

elde ederiz. $G(t, s) \geq \ell G(s, s)$ olduğundan ve (D_6) koşulundan

$$\begin{aligned} &\geq \int_0^b \ell G(s, s) \int_0^b \ell G(r, r) \frac{1}{\ell^2 \Lambda^2} R_1 \nabla r \nabla s \\ &= \ell^2 \frac{R_1}{\ell^2 \Lambda^2} \int_0^b G(s, s) \int_0^b G(r, r) \nabla r \nabla s \end{aligned}$$

elde edilir. Burada (3.1.9) ile

$$Tu(t) = \ell^2 \frac{R_1}{\ell^2 \Lambda^2} \Lambda^2 = R_1 = \|u\|$$

olur.

O halde,

$$\|Tu\| \geq \|u\|, \quad u \in K \cap \partial\Omega_1$$

sağlandığı görülür.

Diğer taraftan $u \in K \cap \partial\Omega_2$ için $s \in [0, b]$ de $u(s) \leq R_2$ olur.

(D_5) ve (D_6) koşullarından, $u \leq R_2$ iken $f(s, u) \leq f(s, R_2)$ elde edilir. Bu koşullar ve Lemma 3.1.6 ile birlikte

$$\begin{aligned} Tu(t) &= \int_0^b G(t, s) \int_0^b G(s, r) f(r, u(r)) \nabla r \nabla s \\ &\leq \int_0^b G(t, s) \int_0^b G(s, r) f(r, R_2) \nabla r \nabla s \end{aligned}$$

olur. Böylece (3.1.9) ile

$$\begin{aligned} Tu(t) &\leq \int_0^b G(s, s) \int_0^b G(r, r) \frac{1}{\Lambda^2} R_2 \nabla r \nabla s \\ &= \Lambda^2 \frac{1}{\Lambda^2} R_2 = R_2 = \|u\| \end{aligned}$$

eşitliğine ulaşılır. Buradan

$$\|Tu\| \leq \|u\|, \quad u \in K \cap \partial\Omega_2$$

elde edilir.

O halde, Teorem 2.3.1 den ve yukarıda elde edilen eşitsizliklerden, T operatörünün $u \in K \cap (\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1)$ olacak şekilde $R_1 \leq \|u\| \leq R_2$ eşitsizliğini sağlayan bir sabit noktası vardır. Böylece (1.1) sınır değer probleminin $R_1 \leq \|u\| \leq R_2$ eşitsizliğini sağlayan pozitif ve simetrik bir çözümünün var olduğu kanıtlanmış olur.

■

3.3 Birçok Pozitif Çözümlerin Varlığı Ve Sabit Nokta Teoreminin Genelleştirilmesi

Bu bölümde (1.1) sınır değer probleminin en az iki pozitif çözümünün varlığı Teorem 2.3.1 yardımıyla f fonksiyonu üzerinde uygun koşullar verilerek incelenecektir.

Teorem 3.3.1 Kabul edelim ki (A) koşulu sağlansın. Ek olarak, aşağıdaki koşulları sağlayacak şekilde

$$(D_7) \quad f_0 > \frac{1}{\ell^4 \Lambda^2} \text{ ve } f_\infty > \frac{1}{\ell^4 \Lambda^2}$$

(Diğer bir deyişle $f_0 = f_\infty = \infty$);

$$(D_8) \quad f(s, u) \leq \frac{1}{\Lambda^2} \rho_1, \quad (s, u) \in [0, b] \times [\ell^2 \rho_1, \rho_1]$$

bir ρ_1 sabiti var olsun. O zaman (1.1) sınır değer probleminin

$$0 < \|u_1\| \leq \rho_1 \leq \|u_2\|$$

eşitsizliğini gerçekleyen en az iki simetrik pozitif u_1 ve u_2 çözümü vardır.

İspat: (D_7) koşulunun sağlandığını varsayalım. O halde

$$f_0 > \frac{1}{\ell^4 \Lambda^2} \text{ için } f(r, u) \geq \frac{1}{\ell^4 \Lambda^2} u, \quad (r, u) \in [0, b] \times [0, R_1]$$

eşitsizliğini sağlayan $R_1 \in (0, \rho_1)$ sayısı vardır.

$\Omega_{R_1} = \{u: u \in E, \|u\| < R_1\}$ yuvarını alalım. O zaman $u \in K \cap \partial\Omega_{R_1}$ için

$$\begin{aligned} Tu(t) &= \int_0^b G(t, s) \int_0^b G(s, r) f(r, u(r)) \nabla r \nabla s \\ &\geq \int_0^b G(t, s) \int_0^b G(s, r) \frac{1}{\ell^4 \Lambda^2} u(r) \nabla r \nabla s \end{aligned}$$

olur. Burada Lemma 3.1.5 ve Lemma 3.1.7 ile

$$Tu(t) \geq \frac{1}{\ell^4 \Lambda^2} \int_0^b \ell G(s, s) \int_0^b \ell G(r, r) \ell^2 \|u\| \nabla r \nabla s$$

$$= \frac{1}{\ell^4 \Lambda^2} \ell^4 \|u\| \int_0^b G(s, s) \int_0^b G(r, r) \nabla r \nabla s$$

olur. Burada (3.1.9) ile

$$Tu(t) = \frac{1}{\ell^4 \Lambda^2} \ell^4 \Lambda^2 \|u\| = \|u\|$$

elde edilir. Her iki taraftan norma geçerse

$$\|Tu\| \geq \|u\|, \quad u \in K \cap \partial\Omega_{R_1}$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$f_\infty > \frac{1}{\ell^4 \Lambda^2} \text{ için } f(r, u) \geq \frac{1}{\ell^4 \Lambda^2} u, \quad (r, u) \in [0, b] \times [0, R_2]$$

olacak şekilde $R_2 \in (\rho_1, \infty)$ seçelim. $\Omega_{R_2} = \{u : u \in E, \|u\| < R_2\}$ olarak alalım.

$u \in K$ için, Lemma 3.1.7 dan, $r \in [0, b]$ için $u(r) \geq \ell^2 \|u\|$ dir.

Ayrıca, $u \in K \cap \partial\Omega_{R_2}$ için, $r \in [0, b]$, $u(r) \in [\ell^2 R_2, R_2]$ dir yani

$$f(r, u(r)) \geq \frac{1}{\ell^4 \Lambda^2} u(r) \geq \frac{1}{\ell^4 \Lambda^2} \ell^2 \|u\| = \frac{1}{\ell^2 \Lambda^2} \|u\|$$

eşitsizliği sağlanır. Buradan

$$\begin{aligned} Tu(t) &= \int_0^b G(t, s) \int_0^b G(s, r) f(r, u(r)) \nabla r \nabla s \\ &\geq \int_0^b G(t, s) \int_0^b G(s, r) \frac{1}{\ell^2 \Lambda^2} \|u\| \nabla r \nabla s \end{aligned}$$

olur ve Lemma 3.1.5 ile

$$\begin{aligned} Tu(t) &\geq \frac{1}{\ell^2 \Lambda^2} \int_0^b \ell G(s, s) \int_0^b \ell G(r, r) \|u\| \nabla r \nabla s \\ &= \frac{1}{\ell^2 \Lambda^2} \ell^2 \int_0^b G(s, s) \int_0^b G(r, r) \|u\| \nabla r \nabla s \end{aligned}$$

olur. Yani

$$Tu(t) \geq \frac{1}{\ell^2 \Lambda^2} \ell^2 \Lambda^2 \|u\| = \|u\|$$

elde edilir. Böylece

$$u \in K \cap \partial\Omega_{R_2} \text{ için } \|Tu\| \geq \|u\|$$

eşitsizliği sağlanır.

Son olarak, $R_1 < \rho_1 < R_2$ olacak şekilde $\Omega_{\rho_1} = \{u: u \in E, \|u\| < \rho_1\}$ kümesini alalım.

Herhangi $u \in K \cap \partial\Omega_{\rho_1}$ için, $r \in [0, b]$ olmak üzere $u(r) \in [\ell^2 \rho_1, \rho_1]$ olur.

(3.1.10) ve (D_8) den,

$$\begin{aligned} Tu(t) &= \int_0^b G(t, s) \left(\int_0^b G(s, r) f(r, u(r)) \nabla r \right) \nabla s \\ &\leq \int_0^b G(t, s) \int_0^b G(s, r) \frac{1}{\Lambda^2} u(r) \nabla r \nabla s \\ &\leq \frac{1}{\Lambda^2} \int_0^b G(s, s) \int_0^b G(r, r) \|u\| \nabla r \nabla s \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$Tu(t) \leq \frac{1}{\Lambda^2} \Lambda^2 \|u\| = \|u\|$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$\|Tu\| \leq \|u\|, \quad u \in K \cap \partial\Omega_{\rho_1}$$

eşitsizliği sağlanır.

Burada yukarıda elde edilen eşitsizliklerden ve Teorem 2.3.1 den T operatörünün $R_1 < \rho_1 < R_2$ eşitsizliğini sağlayan; $u_1 \in K \cap (\overline{\Omega_{\rho_1}} \setminus \Omega_{R_1})$ ve $u_2 \in K \cap (\overline{\Omega_{R_2}} \setminus \Omega_{\rho_1})$ iki sabit noktasıdır. Hem u_1 hem de u_2 (1.1) sınır değer probleminin simetrik pozitif çözümleridir ve $0 < \|u_1\| \leq \rho_1 \leq \|u_2\|$ eşitsizliği sağlanır.

■

Teorem 3.3.2 Kabul edelim ki (A) koşulu sağlansın. Ek olarak aşağıdaki koşullar;

$$(D_9) \quad f^0 < \frac{1}{\Lambda^2} \quad \text{ve} \quad f^\infty < \frac{1}{\Lambda^2}$$

(diğer bir deyişle $f^0 = f^\infty = 0$)

$$(D_{10}) \quad f(s, u) > \frac{1}{\ell^4 \Lambda^2} \rho_2, \quad (s, u) \in [0, b] \times [\ell^2 \rho_2, \rho_2]$$

sağlanıyorsa o zaman (1.1) sınır değer probleminin

$$0 < \|u_1\| < \rho_2 < \|u_2\|$$

eşitsizliğini gerçekleyen en az iki simetrik pozitif u_1 ve u_2 çözümü vardır.

İspat: (D_9) koşulunun gerçekleştiğini varsayalım. O halde $f^0 < \frac{1}{\Lambda^2}$ için $f(r, u) \leq \frac{1}{\Lambda^2} u$ eşitsizliğini sağlayan $R_1 \in (0, \rho_2)$ sayısı vardır.

$\Omega_{R_1} = \{u: u \in E, \|u\| \leq R_1\}$ alalım o halde $u \in K \cap \partial\Omega_{R_1}$ için,

$$\begin{aligned} Tu(t) &= \int_0^b G(t, s) \int_0^b G(s, r) f(r, u(r)) \nabla r \nabla s \\ &\leq \int_0^b G(t, s) \int_0^b G(s, r) \frac{1}{\Lambda^2} u(r) \nabla r \nabla s \\ &\leq \frac{1}{\Lambda^2} \|u\| \int_0^b G(s, s) \int_0^b G(r, r) \nabla r \nabla s \end{aligned}$$

olur ayrıca (3.1.9) dan

$$Tu(t) = \frac{1}{\Lambda^2} \|u\| \Lambda^2 = \|u\|$$

şeklinde düzenlenir. Böylece,

$$u \in K \cap \partial\Omega_{R_1} \text{ için } \|Tu\| \leq \|u\|$$

eşitsizliği elde edilir. Diğer taraftan

$f^\infty < \frac{1}{\Lambda^2}$ için $f(t, u) \leq \frac{1}{\Lambda^2} u$, $(t, u) \in [0, b] \times [\bar{R}, \infty)$ ve $\bar{R} > 0$ olacak şekilde R_2 seçelim. $R_2 > \max\{R_1, \frac{\bar{R}}{\ell^2}\}$ olsun.

$\Omega_{R_2} = \{u: u \in E, \|u\| \leq R_2\}$ olarak alalım.

$u \in K \cap \partial\Omega_{R_2}$ için, Lemma 3.1.7 den $u(s) \geq \ell^2 \|u\| = \ell^2 R_2 > \bar{R}$ olur.

Böylece,

$$\begin{aligned} Tu(t) &= \int_0^b G(t,s) \int_0^b G(s,r) f(r, u(r)) \nabla r \nabla s \\ &\leq \int_0^b G(s,s) \int_0^b G(r,r) \frac{1}{\Lambda^2} u(r) \nabla r \nabla s \\ &\leq \frac{1}{\Lambda^2} \|u\| \int_0^b G(s,s) \int_0^b G(r,r) \nabla r \nabla s \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$Tu(t) = \frac{1}{\Lambda^2} \|u\| \Lambda^2 = \|u\|$$

sağlanır. O halde,

$$\|Tu\| \leq \|u\|, \quad u \in K \cap \partial\Omega_{R_2}$$

eşitsizliği gerçekleşmiş olur.

Son olarak, $R_1 < \rho_2 < R_2$ olacak şekilde $\Omega_{\rho_2} = \{u: u \in E, \|u\| \leq \rho_2\}$ alalım.

Herhangi $u \in K \cap \partial\Omega_{\rho_2}$ için, $u(r) \in [\ell^2 \rho_2, \rho_2]$, $r \in [0, b]$ olsun.

(3.1.10) ve (D_{10}) dan,

$$\begin{aligned} Tu(t) &= \int_0^b G(t,s) \int_0^b G(s,r) f(r, u(r)) \nabla r \nabla s \\ &\geq \int_0^b G(t,s) \int_0^b G(s,r) \frac{1}{\ell^4 \Lambda^2} u(r) \nabla r \nabla s \end{aligned}$$

elde edilir. Lemma 3.1.5 ve Lemma 3.1.7 kullanılarak

$$Tu(t) \geq \int_0^b \ell G(s,s) \int_0^b \ell G(r,r) \frac{1}{\ell^4 \Lambda^2} \ell^2 \|u\| \nabla r \nabla s$$

$$= \frac{1}{\ell^4 \Lambda^2} \ell^4 \|u\| \int_0^b G(s, s) \int_0^b G(r, r) \nabla r \nabla s$$

şeklinde düzenlenebilir. Böylece

$$Tu(t) = \frac{1}{\Lambda^2} \Lambda^2 \|u\| = \|u\|$$

olur. Buradan,

$$u \in K \cap \partial\Omega_{\rho_2} \text{ için } \|Tu\| \geq \|u\|$$

eşitsizliği sağlanır.

O halde yukarıda elde edilen eşitsizlikler ve Teorem 2.3.1 ile T operatörünün $R_1 < \rho_2 < R_2$ eşitsizliğini sağlayan; $u_1 \in K \cap (\overline{\Omega_{\rho_2}} \setminus \Omega_{R_1})$ ve $u_2 \in K \cap (\overline{\Omega_{R_2}} \setminus \Omega_{\rho_2})$ iki sabit noktası vardır. Burada u_1 ve u_2 (1.1) sınır değer probleminin simetrik pozitif çözümleridir ve $0 < \|u_1\| < \rho_2 < \|u_2\|$ eşitsizliğini sağlar.

■

Teorem 3.3.3 Kabul edelim ki (A) koşulu sağlansın. Ek olarak

$$(D_{11}) \quad f(s, u) \leq \frac{1}{\Lambda^2} r_k, \quad (s, u) \in [0, b] \times [\ell^2 r_k, r_k] \text{ ve}$$

$$f(s, u) \geq \frac{1}{\ell^2 \Lambda^2} R_k, \quad (s, u) \in [0, b] \times [\ell^2 R_k, R_k], \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

veya

$$(D_{12}) \quad f(s, u) \geq \frac{1}{\ell^2 \Lambda^2} r_k, \quad (s, u) \in [0, b] \times [\ell^2 r_k, r_k] \text{ ve}$$

$$f(s, u) \leq \frac{1}{\Lambda^2} R_k, \quad (s, u) \in [0, b] \times [\ell^2 R_k, R_k], \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

olacak şekilde $r_1 < \ell^2 R_1 < r_2 < \ell^2 R_2 < \dots < r_n < \ell^2 R_n$ eşitsizliğini sağlayan $r_k, R_k, (k = 1, 2, \dots, n)$; pozitif sayıları mevcut ise o zaman (1.1) sınır değer probleminin, $r_k \leq \|u_k\| \leq R_k, k = 1, 2, \dots, n$ eşitsizliğini sağlayan n simetrik pozitif u_k çözümü vardır.

Teorem 3.3.4 Kabul edelim ki (A) koşulu sağlansın. Ek olarak

(D₁₃) $f(t, \cdot)$, tüm $t \in [0, b]$ için, $[0, R_n]$ üzerinde azalmayan;

(D₁₄) $f(s, \ell^2 r_k) \geq \frac{1}{\ell^2 \Lambda^2} r_k$ ve $f(s, R_k) \leq \frac{1}{\Lambda^2} R_k$, ($k = 1, 2, \dots, n$) $\forall s \in [0, b]$ için $r_1 < R_1 < r_2 < R_2 < \dots < r_n < R_n$ olacak şekilde $2n$ tane pozitif sayıları varsa, o zaman (1.1) sınır değer probleminin $r_k \leq \|u_k\| \leq R_k$, ($k = 1, 2, \dots, n$) eşitsizliğini sağlayan n tane simetrik pozitif u_k çözümü vardır.



4. SONUÇ

Bu tez çalışmasında, herhangi bir $\mathbb{T}$ simetrik zaman skalasında 4. Mertebeden dört noktalı sınır değer probleminin simetrik pozitif çözümlerinin varlığını göstermek için çeşitli yaklaşımlar oluşturulmuştur. Ele alınan problemin tek pozitif çözümlerinin varlığı ve birçok pozitif çözümlerinin varlığı ispatlanmıştır.



KAYNAKLAR

Anand, p.V.s., Murali, P. and Prasad, K.R. , 2012, Multiple symmetric positive solutions for systems of higher order boundary- value problems on time scales. *Electron. J. Differential Equations*, 102-12p.

Agarwal, R.P. and Bohner, M. , 1999, Basic calculus on time scales and some of its applications , *Results in Mathematics*, 35 , 3-22 p.

Agarwal, R. P. , O'Regan, D. and Saker, S.H. , 2006, Properties of bounded solutions of nonlinear dynamic equations on time scales, *Canadian applied mathematics Quarterly*, 14 (1), 1-10p.

Agarwal, R. P. , Bohner, M. and Peterson, A. , 2002, Time scale boundary value problems on infinite intervals, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 141, 27-34p.

Atici, F. M. and Guseinov, G. S. , 2002, On Green's functions and positive solutions for boundary value problems on time scales, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 75-99p.

Atici, F. M. Guseinov, G. Sh. and Kaymakçalan B. , 2000, On Lyapunov inequality in stability theory for Hill's equation on time scales, *Journal of Inequalities and Applications*, 6(6), 603-620p.

Aulbach, B. and **Hilger, S.** , 1990, Linear dynamic processes with inhomegeneous time scala, *Nonlinear Dynamics and Quantum Dynamical Systems*, Akademie Vetlag, Berlin.

Akin-Bohner, E, Bohner, M. and **Akin, F.** , 2005, Pachpate inequalities on time scale, *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, 6(1) , 1-50p.

Aulbach, B. and **Neidhard, L.** , 2004, Integration on measure chains, Conference Proceedings of the Sixth International Conference on Difference Equations, CRC, Boca Raton, FL 239-252p.

Bohner, M. and **Peterson, A.** , 2001, Dynamic Equations on Time Scales, An Introduction with Applications, Birkhauser, Boston.

Bohner, M. and **Peterson, A.** , 2003 ‘Advances in Dynamic Equations on Time Scales’ , Birkhauser , Boston.

Bohner, M., Gelles, G., Heim, J. 2010. Multiplier-accelerator models on time scales. *Int. J. Stat. Econ.* 4, no. S10, 1-12.

Çetin, E. and **Topal, F.S.** , 2012, Symmetric positive solutions of fourth order boundary value problems for an increasing homeomorphism and homomorphism on time scales, *Computers and Mathematics with Applications*, 63(3), 669-678p.

Eggensperger, M. 2008. Matematical models: A generalization from population biology and time scales. Thesis (Ph. D.)-University of Arkansas at Little Rock.

Fang, H. , 2008, Existence of symmetric positive solutions for m-point boundary value problems for second-order dynamic equations on time scales, *Math. Theory Appl.* , 28: 65,68 pp.

Guseinov, G. S., 2000-2001 Zaman skalasında dinamik sistemler I – II, Ders Notları

Guseinov, G. Sh. , 2003, Integration on time scales, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 285 (1), 107-127p.

Guseinov, G. S. and Kaymakçalan, B., 2002, On a disconjugacy criterion for second order dynamic equations on time scales. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 141(1), 187-196.

Hamal, N. A. and Yoruk, F. , 2010, Symmetric positive solutions of fourth order integral BVP for an increasing homeomorphism and homomorphism with sign-changing nonlinearity on time scales, *Computers and Mathematics with Applications*, 59, 3603-3611p.

Hilger, S. , 1988, Ein Maßkettenkalkül mit Anwendung auf Zentrumsmannigfaltigkeiten, , Phd thesis, Universität Eürzburg.

Hilger, S. , 1990, Analysis on measure chains- a unified approach to continuous and discrete calculus, *Results in Mathematics* 18, 18-56p.

Kaymakçalan, B. , Lakshmikantham, V. and Sivasundaram, S., 1996, *Dynamical Systems on Measure Chains*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Krasnosel'skii, M.A. , 1964, Positive Solutions of Operator Equations, Nordhoff, Groningen.

Kuyumcu C., Çetin E. ,2021, Zaman Skalasında İkinci Mertebeden Sınır Değer Probleminin Simetrik Çözümlerinin Varlığı, yüksek lisans tezi ,47.

L. Erbe , A. Peterson , R. Mathsen , 2000, Existence, multiplicity and noneexistence of positive solutions to a differential equation on a measure chain, *J. Comput. Appl. Math.* , 113 , 365-380.

Li, Y., Yang, L., Zhang, H. 2014. Permanence and uniformly asymptotical stability of almost periodic solutions for a single-species model with feedback control on time scales. *Asian-Eur. J. Math.* 7, no. 1,1450004, 15 pp.

Md. Asaduzzaman, Md. Zulfikar Ali , 2020 , On the symmetric positive solutions of nonlinear fourth order ordinary differential equations with four-point boundary value conditions: a fixed point theory approach.

M. Tamer Şenel (Proje yürütücüsü), Mart 2016, Kayseri, Proje no: FDA-2015-5841, Zaman Skalasında Tümör Büyümesi Modellemeleri, *Erciyes Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimi*.

Pei, M. and Chang, S.K. ,2010, Monotone iterative technique and symmetric positive solutions for a fourth-order boundary value problem, *Math. and Comp. Modelling*, 51:1260-1267pp.

Sahiner, Y. ,2005, Oscillation of second- order delay dynamic equations on time scales, *Nonlinear Analysis: Th. Math. Appl.* 63, 1073-1080.

Saker, S.H. ,2005, Oscillation criteria of second-order half-linear dynamic equations on time scales, *J.Comp. Appl. Math.* 177, 375-387.

S. Chen, W. Ni and **C. Wang**, 2006, Positive solution of fourth order ordinary differential equation with four-point boundary conditions, *Appl. Math. Lett.* , 19, 161-168.

Su, Y.-H. , W.T and Sun, H.R. , 2008, Triple positive pseudo-symmetric solutions of three-point BVPs for p-Laplacian dynamic equations on time scale, *Nonlinear Anal.*, 68:1442-1452pp.

Wang, Z. And Weng, P., 2008, Existence of solutions for first order PBVPs with impulses on time scales, *Comput. And Math. with Appl.*, 56:2010-2018pp.

Wang, Y. L., Ai, L. 2007. Cobweb models on time scales. (Chinese) *J. Shandong Univ. Nat. Sci.* 42 (2007), no. 7,4 pp.

Yantir, A. and Topal, S. G., 2008, Positive solutions of nonlinear m-point BVP on time scales, *International Journal of Difference Equations*, 3(1), 179-197p.

Yongping Sun and Xiaoping Zhang , 2007 , Existence of Symmetric Positive Solutions for an m-Point Boundary Value Problem

Zhuang, K. 2007 Periodic solutions for a stage-structure ecological model on time scales. Electron. J. Differential Equation, No. 88, 7 pp.

Zhuang, K. 2008. Periodicity for a food chain model with functional responses on time scales. Int. J. Comput. Math. Sci. 2, no. 3, 157-160.

Zhuang, K., Wen, Z. 2010. Periodic solutions for a delayed population model on time scales. Int. J. Comput. Math. Sci. 4, no. 3, 166-168.



ÖZGEÇMİŞ

İlköğretimini, ortaöğretimini ve lise öğrenimini Muğla’da tamamladı. 2019 yılında Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü, Uygulama Ağırlıklı Matematik Lisans öğretim programından mezun oldu. 2019 yılında Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Anabilim dalında yüksek lisansa başladı.

