GAZİ ÜNİVERSİTESİ

Gazi

1926

GENELLEŞTİRİLMİŞ BALAZS OPERATÖRLERİNİN YAKLAŞIMI

Gözde AKSOY

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MAYIS 2023

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Gözde AKSOY

24/05/2023

GENELLEŞTİRİLMİŞ BALAZS OPERATÖRLERİNİN YAKLAŞIMI

(Doktora Tezi)

Gözde AKSOY

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Mayıs 2023

ÖZET

Bu tezde, klasik Bernstein tipi rasyonel fonksiyondan daha iyi tahminlere sahip olan Bernstein tipi rasyonel fonksiyonun yeni bir genellemesi tanımlandı. Tanımlanan operatörün yaklaşım özellikleri süreklilik modülü cinsinden ve Lipschitz fonksiyonları yardımı ile verildi. Tensör çarpım tip iki değişkenli operatör tanımlandı ve tensör çarpım tip iki değişkenli operatörün GBS (Genelleştirilmiş Boolean Toplamı) operatörü tanımlanarak yakınsaklık oranları elde ederek yaklaşım özellikleri incelendi. Ayrıca tensör çarpım tip iki değişkenli operatör ve GBS operatörünün yakınsaması grafikler yardımıyla gösterildi.

Bilim Kodu	: 20404
Anahtar Kelimeler	: Lineer Pozitif Operatör, Yakınsaklık Oranı, Bernstein Tip Rasyonel Fonksiyon
Sayfa Adedi	: 45
Danışman	: Doç. Dr. Esma YILDIZ ÖZKAN

APPROXIMATION OF GENERALIZED BALAZS OPERATORS

(Ph. D. Thesis)

Gözde AKSOY

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

May 2023

ABSTRACT

In this thesis, we introduce a new generalization of a Bernstein type rational function possessing better estimates than the classical Bernstein type rational function. We investigate its error of approximation globally and locally in terms of the first and second modulus of continuity and a class of Lipschitz-type functions. We introduce a tensor-product kind bivariate operator of a new generalization of Bernstein type rational functions and its GBS (Generalized Boolean Sum) operator, and we investigate their approximation properties by obtaining their rates of convergence. Moreover, we present some graphical comparisons visualizing the convergence of tensor-product kind bivariate operator and its GBS operator.

Science Code	: 20404
Key Words	: Linear positive operator, rate of convergence, Bernstein Type Rational Function
Page Number	: 45
Supervisor	: Assoc. Prof. Dr. Esma YILDIZ ÖZKAN

TEŞEKKÜR

Doktora çalışmamda bana yön gösteren, destek ve emeklerini esirgemeyen, beni yüreklendiren ve öğrencisi olmaktan her zaman gurur duyacağım kıymetli danışmanım Sayın Doç. Dr. Esma YILDIZ ÖZKAN'a, destekleri ve katkıları için tez izleme komite üyelerine teşekkürlerimi sunarım.

Hayatım boyunca beni destekleyen, maddi manevi her zaman yanımda olan ve haklarını asla ödeyemeyeceğim aileme teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca doktora eğitimim boyunca desteklerini esirgemeyen ve her zaman yanımda olan dostlarım Alime KADAKAL'a, Sibel ALTÜRK KARACA'ya, Mustafa KARATAŞ'a ve son olarak görevlendirme olarak görev yaptığım ve her zaman destek olan Kars Selim Şehit Teğmen Gökhan Yaşartürk Çok Programlı Anadolu Lisesi öğretmenlerine teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklamalar**
$\boldsymbol{B_n(f;x)}$	Bernstein Polinomu
$\boldsymbol{B_{n,m}^G(f;x)}$	Tensör Çarpım tip İki Değişkenli Operatörün GBS (Genelleştirilmiş Boolean Toplam) Operatörü
$\boldsymbol{C([0,r_1]\times[0,r_2])}$	$[0,r_1]\times[0,r_2]$ Üzerinde Tanımlı Sürekli Fonksiyonlar Uzayı
$\boldsymbol{C_B([0,\infty))}$	[0,∞) Üzerinde Tanımlı Reel Değerli Sürekli ve Sınırlı Fonksiyonların Banach Uzayı
$\boldsymbol{C_{\mathcal{B}}(A)}$	A Üzerindeki Bögel Sürekli Fonksiyonlar Uzayı
$\boldsymbol{Lip_M(\alpha)}$	Lipschitz Sınıfından Fonksiyonlar
$\boldsymbol{Lip_M(a,b)}$	İki Değişkenli Lipschitz Sınıfından Fonksiyonlar
$\boldsymbol{Lip_M^{\mathcal{B}}(f;a,b)}$	Lipschitz Sınfından Bögel Sürekli Fonksiyon
$\boldsymbol{R_n(f;x)}$	Bernstein Tip Rasyonel Fonksiyon
$\boldsymbol{R_n^G(f;x)}$	Genelleştirilmiş Bernstein tip Rasyonel Fonksiyon
$\boldsymbol{R_{n,m}(f;u,v)}$	İki Değişkenli Bernstein tip Rasyonel Fonksiyon
$\boldsymbol{R_{n,m}^G(f;u,v)}$	İki Değişkenli Bernstein tip Rasyonel Fonksiyon
$\boldsymbol{\omega(f;\delta)}$	f Fonksiyonunun Süreklilik Modülü
$\boldsymbol{\omega(f;\mu_1,\mu_2)}$	İki Değişkenli f Fonksiyonunun Tam Süreklilik Modülü
$\boldsymbol{\omega^{(1)}(f;\mu_1)}$	f Fonksiyonunun x'e Göre Kısmi Süreklilik Modülü
$\boldsymbol{\omega^{(2)}(f;\mu_2)}$	f Fonksiyonunun y'ye Göre Kısmi Süreklilik Modülü
$\boldsymbol{\omega_{mixed}(f;u,v)}$	f Fonksiyonunun Bögel (karma) Süreklilik Modülü
$\boldsymbol{\Delta_{(u,v)}f[\tau,\varsigma;u,v]}$	Karma Fark Fonksiyonu

1. GİRİŞ

Bernstein polinomları, Weierstrass Teoremini ispatlamak amacıyla 1912 yılında [0,1] aralığında tanımlı reel değerli f fonksiyonları için

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \quad ,n = 1,2,\dots \tag{1.1}$$

olarak tanımlanır. Eğer f, [0,1] aralığında sürekli bir fonksiyon ise, bu durumda $B_n(f;x)$ polinomlar dizisi [0,1] üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsar [14].

f, $[0,\infty)$ üzerinde reel değerli bir fonksiyon olmak üzere, Bernstein tip rasyonel fonksiyonlar

$$R_n(f;x) = \frac{1}{(1+a_nx)^n}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{b_n}\right)(a_nx)^k \quad ,n = 1,2,\dots \tag{1.2}$$

İle tanımlanır [10]. Burada, (a_n) ve (b_n), her $n \in \mathbb{N}$ için uygun olarak seçilmiş dizilerdir [10].

$k = 1,2,\dots,n$ için

$$P_k(x) = x^k(1-x)^{n-k}$$

$$r_k(x) = \frac{(a_nx)^k}{(1+a_nx)^n}$$

olarak alındığında

$$r_k(x) = P_k\left(\frac{a_nx}{1+a_nx}\right)$$

bağıntısı elde edilir. $b_n = n$ için

$$R_n(f;x) = B_n\left(f;\frac{a_n x}{1+a_n x}\right)$$

eşitliği elde edilir. (1.2) ile tanımlanan operattör, Bernstein-tip rasyonel fonksiyon olarak bilinir. Balázs [2], $[0,\infty)$ üzerinde tanımlı her reel değerli f fonksiyonu için yakınsama oranını elde etmiş ve bazı reel τ sayıları için, $f(x) = O(e^{\tau x}), x \to \infty$ koşulu altında asimptotik yaklaşım teoremini ispatlamıştır.

1982 de Balázs ve Szabados [11], (1.2) ile tanımlanan operatör için f, [0,∞) üzerinde düzgün sürekli olmak üzere $0 < \zeta \leq \frac{2}{3}, n = 1,2, \ldots$ için $a_n = n^{\zeta-1}$ ve $b_n = n^{\zeta}$ dizilerini ele alarak daha kısıtlanmış şartlarda pozitif reel eksende Bernstein tip rasyonel fonksiyonların yakınsama oranı vermişlerdir. Yaklaşım Teorisinin en önemli problemlerinden biri de bir operatörün doymuşluk sınıfını elde etme problemidir. Totik [40], Bernstein tip rasyonel fonksiyonların doyma(saturation) özelliklerini incelemiştir. 1985'de Balázs [12], $[-A-\varepsilon, A+\varepsilon]$ üzerinde tanımlı sürekli reel değerli fonksiyonların süreklilik modülü yardımıyla Bernstein tip rasyonel fonksiyonlar için yakınsama oranları elde etmiştir. 2000 yılında Abel ve Vecchia [1], Balázs-Szabados operatörleri için Voronovskaja tip asimptotik sonuçlar elde etti.

Holhoş [26], Balázs-Szabados operatörleri için süper-üstel fonksiyonlar aracılığıyla yeni yaklaşım sonuçlarını göstermiştir.

İspir ve Atakut [8], Bernstein tip rasyonel fonksiyonların bir genellemesini

$$G_n(f;x) = \frac{1}{\phi_n(a_n x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{{\phi_n}^{(k)}}{k!}(a_n x)^k f\left(\frac{k}{b_n}\right) \quad , n \in \mathbb{N},\ x \geq 0$$

olarak tanımlamışlardır. Burada, a_n ve b_n, pozitif reel sayı dizileri ve ϕ_n de belirli koşulları sağlayan bir fonksiyon dizisidir. Son zamanlarda, Agratini [11], Bernstein tip rasyonel fonksiyonların bir sınıfını, (λ_n) dizisi olmak üzere $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$ koşulunu sağlayan kesin azalan pozitif reel sayılar dizisi

$$L_n(f;x) = \frac{1}{(1+\lambda_n x)^n}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n\lambda_n}\right)\binom{n}{k}(\lambda_n x)^k \quad ,n = 1,2,\dots \tag{1.3}$$

tanımlayarak, bu operatör ile ilgili yaklaşım sonuçlarını elde etmiştir. Burada, f, belirli bir büyüme koşulunu sağlayan [0,∞) üzerinde sürekli fonksiyondur. Agratini, yakınsama oranını hem lokal hem de global bir tahminini araştırmış ve ağırlıklı süreklilik modülünü kullanarak ağırlıklı bir yaklaşım sonucunu bulmuştur. Diğer Bernstein tip rasyonel fonksiyonların yaklaşım özellikleri ile ilgili sonuçlar [22-25, 28, 31-36] referanslarında bulunabilir.

$C_B([0,\infty))$, [0,∞) üzerinde reel değerli sürekli ve sınırlı fonksiyonların uzayı olmak üzere bu uzayda norm $\|f\|_\infty = sup_{x\in[0,\infty]}|f(x)|$ olarak tanımlanır.

$[a,b] \subset [0,\infty)$ kapalı bir alt aralığı için bu norm $\|f\|_{[a,b]} = sup_{x\in[\mathrm{a,b}]}|f(x)|$ ile ifade edilir.

Bu tez, birinci bölüm giriş bölümü olmak üzere beş bölümden oluşmaktadır.

İkinci bölümde, tezin anlaşılırlığını kolaylaştıracak temel kavramlar verilerek tanımladığımız R_n^G genelleştirilmiş Bernstein tip rasyonel fonksiyonun test fonksiyonuna ilişkin sonuçlar elde edilmiştir ve Bohman-Korovkin teoreminin koşullarının sağlandığı gösterilmiştir. Ayrıca lokal ve global yaklaşım sonuçları elde edilmiştir.

Üçüncü bölümde, R_n^G operatörünün tensör çarpım tip iki değişkenli operatörü tanımlanarak bu operatörün $[0,r_1]\times[0,r_2], r_1, r_2 > 0$, dikdörtgensel bölge üzerinde yaklaşım özellikleri ile ilgili sonuçlarına yer verilmiştir. Daha sonrasında, tensör çarpım tip iki değişkenli operatörün GBS (Genelleştirilmiş Boolean Toplamı) operatörünü tanımlayıp bu operatörün dikdörtgensel bölge üzerinde yaklaşım sonuçları incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, önceki bölümlerde verilen operatörlerin belirli fonksiyonlara yaklaşımlarını veren grafiklere yer verilmiştir.

Beşinci bölümde, bu çalışmamızdan elde ettiğimiz sonuçlar verilmiştir.

2. GENELLEŞTİRİLMİŞ BALAZS OPERATÖRLERİNİN YAKLAŞIMI

Bu bölümde, (1.2) ve (1.3)'e indirgenebilen Bernstein tip rasyonel fonksiyonun yeni bir genellemesi tanımlanıp yaklaşım özellikleri incelenecektir.

$(\alpha_n), (\beta_n)$ ve (γ_n) negatif olmayan reel dizileri $\gamma_n = n\alpha_n$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0\,, \lim_{n\to\infty} \beta_n = 1 \text{ ve } \lim_{n\to\infty} \gamma_n = \infty \tag{2.1}$$

koşulları sağlansın. f, $[0,\infty)$ için genelleştirilmiş Bernstein tip rasyonel fonksiyon

$$R_n^G(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{\gamma_n}\right)\binom{n}{k}\frac{(\alpha_n x)^k(\beta_n)^{n-k}}{(\beta_n+\alpha_n x)^n}\,, x > 0, n \in \mathbb{N} \tag{2.2}$$

ile tanımlayalım. R_n^G operatörü, iyi tanımlı, lineer ve pozitif bir operatördür. $\beta_n = 1$, $\alpha_n = a_n$ ve $\gamma_n = b_n$ olarak alındığında bazı reel τ sayıları için $f(x) = O(e^{\tau x}), x \to \infty$ koşulu altında R_n^G operatörü, (1.2)'de verilen Bernstein tip rasyonel fonksiyona indirgenir. $\alpha_n := \gamma_n$ kesin azalan pozitif reel bir dizi ve $\beta_n = 1$ olduğunda (2.2) operatörü, (1.3)'de verilen Agratini'nin modifikasyonuna indirgenir. Ayrıca, (1.1)'de verilen Bernstein polinomu ile arasındaki bağıntı, $\beta_n = 1$ için $\gamma_n = n$ olduğunda

$$R_n^G(f;x) = B_n\left(f;\frac{\alpha_n x}{\beta_n + \alpha_n x}\right)$$

eşitliği ile verilebilir. R_n^G operatörüne, genelleştirilmiş Bernstein tip rasyonel fonksiyon adı verilir [37].

2.1. Lemma

$e_i(t) = t^i, i = 0,1,2,$ dizileri (2.1) koşulları sağlansın. Bu durumda, R_n^G operatörü için aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$$R_n^G(e_0;x) = 1, \tag{2.3}$$

$$R_n^G(e_1;x) = \frac{x}{\beta_n+\alpha_n x}, \tag{2.4}$$

$$R_n^G(e_2;x) = \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)x^2}{(\beta_n+\alpha_n x)^2} + \frac{x}{\gamma_n(\beta_n+\alpha_n x)}. \tag{2.5}$$

İspat

$$1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}(\alpha_n x)^k(\beta_n)^{n-k}}{(\beta_n+\alpha_n x)^n} \tag{2.6}$$

eşitliğini dikkate alarak aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$R_n^G(e_0;x) = R_n^G(1;x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(\alpha_n x)^k(\beta_n)^{n-k}}{(\beta_n+\alpha_n x)^n} = 1$$

$$R_n^G(e_1;x) = R_n^G(t;x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{\gamma_n}\binom{n}{k}\frac{(\alpha_n x)^k(\beta_n)^{n-k}}{(\beta_n+\alpha_n x)^n}$$

$$= \frac{n\alpha_n x}{\gamma_n(\beta_n+\alpha_n x)} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \frac{(\alpha_n x)^k(\beta_n)^{n-1-k}}{(\beta_n+\alpha_n x)^{n-1}} = \frac{n\alpha_n x}{\gamma_n(\beta_n+\alpha_n x)}$$

$$= \frac{x}{\beta_n+\alpha_n x}$$

$$R_n^G(e_2;x) = R_n^G(t^2;x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{\gamma_n^2}\binom{n}{k}\frac{(\alpha_n x)^k(\beta_n)^{n-k}}{(\beta_n+\alpha_n x)^n}$$

$$= \frac{n(n-1)\alpha_n^2 x^2}{\gamma_n^2(\beta_n+\alpha_n x)^2} \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} \frac{(\alpha_n x)^k(\beta_n)^{n-2-k}}{(\beta_n+\alpha_n x)^{n-2}}$$

$$+\frac{n\alpha_n x}{\gamma_n^2(\beta_n+\alpha_n x)}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\frac{(\alpha_n x)^k(\beta_n)^{n-1-k}}{(\beta_n+\alpha_n x)^{n-1}}$$

$$=\frac{n(n-1)\alpha_n^2x^2}{\gamma_n^2(\beta_n+\alpha_n x)^2}+\frac{n\alpha_n x}{\gamma_n^2(\beta_n+\alpha_n x)}$$

$$=\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)x^2}{(\beta_n+\alpha_n x)^2}+\frac{x}{\gamma_n(\beta_n+\alpha_n x)}$$

2.2. Lemma

(2.2) ile tanımlanmış R_n^G operatörü için 2.1. Lemma göz önünde bulundurularak operatörün birinci ve ikinci momenti aşağıdaki gibi ifade edilir[37].

$$R_n^G(e_1-x;x)=\frac{(1-\beta_n)x}{\beta_n+\alpha_n x}-\frac{\alpha_n x^2}{\beta_n+\alpha_n x} \quad (2.7)$$

$$R_n^G((e_1-x)^2;x)=\frac{\beta_n x}{\gamma_n(\beta_n+\alpha_n x)^2}+\frac{\left(1-\frac{1}{n}+\alpha_n+\beta_n(\beta_n-2)\right)x^2}{(\beta_n+\alpha_n x)^2}+\frac{2\alpha_n(1-\beta_n)x^3}{(\beta_n+\alpha_n x)^2}+\frac{\alpha_n^2x^4}{(\beta_n+\alpha_n x)^2} \quad (2.8)$$

İspat

(2.3), (2.4) ve (2.5) eşitlikleri dikkate alındığında,

$$R_n^G(e_1-x;x)=R_n^G(e_1;x)-xR_n^G(e_0;x)=\frac{x}{\beta_n+\alpha_n x}-x$$

$$=\frac{x-x\beta_n-\alpha_n x^2}{\beta_n+\alpha_n x}=\frac{(1-\beta_n)x}{\beta_n+\alpha_n x}-\frac{\alpha_n x^2}{\beta_n+\alpha_n x}$$

$$R_n^G((e_1-x)^2;x)=R_n^G(e_2;x)-2xR_n^G(e_1;x)+x^2R_n^G(e_0;x)$$

$$=\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)x^2}{(\beta_n+\alpha_n x)^2}+\frac{x}{\gamma_n(\beta_n+\alpha_n x)}-2x\frac{x}{\beta_n+\alpha_n x}+x^2$$

$$= \frac{\beta_n x}{\gamma_n(\beta_n + \alpha_n x)^2} + \frac{\left(1 - \frac{1}{n} + \alpha_n + \beta_n(\beta_n - 2)\right)x^2}{(\beta_n + \alpha_n x)^2} + \frac{2\alpha_n(1 - \beta_n)x^3}{(\beta_n + \alpha_n x)^2} + \frac{\alpha_n^2 x^4}{(\beta_n + \alpha_n x)^2}$$

olur.

2.3. Teorem

R_n^G, (2.2)'de tanımlanmış genelleştirilmiş Bernstein tip rasyonel fonksiyon olsun. Eğer $(\alpha_n), (\beta_n)$ ve (γ_n), her $n \in \mathbb{N}$ için (2.1)'deki koşulları sağlayan negatif olmayan reel dizileri ise o halde, $[0, r] \subset [0, \infty)$ $(r > 0)$ olmak üzere $f \in C([0, r])$ için $R_n^G(f; x)$, $f(x)$'e $[0, r]$ aralığı üzerinde düzgün yakınsaktır [37].

İspat

Bu teoremin ispatı için Bohman-Korovkin teoreminin koşullarının sağlandığını göstermek yeterlidir. 2.1. Lemma'daki (2.3)'den

$$\lim_{n\to\infty} \|R_n^G(e_0; .) - e_0(.)\|_{[0,r]} = 0 \tag{2.9}$$

dir. Her bir $x \in [0, r]$ için $\frac{1}{\beta_n + \alpha_n x} \leq \frac{1}{\beta_n}$ olduğundan 2.2. Lemma'dan

$$|R_n^G(e_1; x) - e_1(x)| = |R_n^G(e_1 - x; x)| = \left|\frac{(1-\beta_n)x}{\beta_n + \alpha_n x} - \frac{\alpha_n x^2}{\beta_n + \alpha_n x}\right|$$

$$\leq \frac{|1-\beta_n| r}{\beta_n} + \frac{\alpha_n r^2}{\beta_n} := \mu_n^1 \tag{2.10}$$

olup (2.1)'deki koşullar göz önüne alındığında $\lim_{n\to\infty} \mu_n^1 = 0$ olur. O halde, (2.10)'dan

$$\lim_{n\to\infty} \|R_n^G(e_1; .) - e_1(.)\|_{[0,r]} = 0 \tag{2.11}$$

bulunur. 2.1. Lemma'daki (2.5) eşitliğinden

$$|R_n^G(e_2;x) - e_2(x)| = \left| \frac{x}{\gamma_n(\beta_n + \alpha_n x)} + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) x^2}{(\beta_n + \alpha_n x)^2} - x^2 \right|$$

$$\leq \frac{x}{\gamma_n(\beta_n + \alpha_n x)} + \frac{\left|1 - \frac{1}{n} - \beta_n^2\right| x^2}{(\beta_n + \alpha_n x)^2} + \frac{2\beta_n \alpha_n x^3}{(\beta_n + \alpha_n x)^2} + \frac{\alpha_n^2 x^4}{(\beta_n + \alpha_n x)^2}$$

$$\leq \frac{r}{\gamma_n \beta_n} + \frac{\left|1 - \frac{1}{n} - \beta_n^2\right| r^2}{\beta_n^2} + \frac{2\alpha_n r^3}{\beta_n} + \frac{\alpha_n^2 r^4}{\beta_n^2} := \mu_n^2 \tag{2.12}$$

elde edilir. (2.1)'deki koşullar göz önüne alındığında $\lim_{n\to\infty} \mu_n^2 = 0$ olur. O halde, (2.12)'den

$$\lim_{n\to\infty} \|R_n^G(e_2;.) - e_2(.)\|_{[0,r]} = 0 \tag{2.13}$$

elde edilir. (2.9), (2.11) ve (2.13) eşitliklerinden Bohman-Korovkin teoreminin şartları sağlanmış olur. O halde,

$$\lim_{n\to\infty} \|R_n^G(f) - f\|_{[0,r]} = 0$$

dir. Yani, $R_n^G(f;x)$, $f(x)$'e düzgün olarak yakınsar.

2.4. Tanım

Herhangi bir $\mu > 0$ için $f \in C_B([0,\infty))$ olsun.

$$\omega(f;\mu) = sup_{0<h\leq\mu} sup_{x\in[0,\infty)} |f(x+h) - f(x)| \tag{2.14}$$

ifadesine f fonksiyonunun süreklilik modülü denir ve $\kappa, \mu > 0$ için

$$\omega(f;\kappa\mu) \leq (\kappa+1)\omega(f;\mu) \tag{2.15}$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca f, $[0,\infty)$ aralığı üzerinde düzgün sürekli ise $\lim_{\mu\to 0^+} \omega(f;\mu) = 0$ dır [21].

2.5. Teorem

$(\alpha_n), (\beta_n)$ ve (γ_n) dizileri için (2.1)'deki koşullar sağlansın. Her $f \in C_B([0,\infty))$ için

$$|R_n^G(f;x) - f(x)| \leq 2\omega(f;\sqrt{\mu_n^x})$$

dir. Burada,

$$\mu_n^x := \frac{\beta_n x}{\gamma_n(\beta_n+\alpha_n x)^2} + \frac{\left(1-\frac{1}{n}+\alpha_n+\beta_n(\beta_n-2)\right)x^2}{(\beta_n+\alpha_n x)^2} + \frac{2\alpha_n(1-\beta_n)x^3}{(\beta_n+\alpha_n x)^2} + \frac{\alpha_n^2 x^4}{(\beta_n+\alpha_n x)^2} \tag{2.16}$$

dir [37].

İspat

$f \in C_B([0,\infty))$ olsun. (2.15)'den

$$|f(t) - f(x)| \leq \left(1 + \frac{|t-x|}{\mu}\right)\omega(f;\mu) \tag{2.17}$$

yazılır. (2.17)'ye R_n^G, lineer ve pozitif operatörü uygulanırsa

$$|R_n^G(f;x) - f(x)| \leq |R_n^G(f(t);x) - R_n^G(f(x);x)|$$

$$= |R_n^G(f(t) - f(x);x)|$$

$$\leq R_n^G(|f(t) - f(x)|;x)$$

$$\leq R_n^G\left(\left(1 + \frac{|t-x|}{\mu}\right)\omega(f;\mu);x\right)$$

$$\leq \omega(f;\mu)\left(1 + \frac{1}{\mu}R_n^G(|e_1 - x|;x)\right)$$

eşitsizliği elde edilir. $R_n^G(|e_1 - x|, x)$ ifadesine Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa

$$|R_n^G(f;x) - f(x)| \leq \omega(f;\mu)\left(1 + \frac{1}{\mu}\sqrt{R_n^G((e_1 - x)^2;x)}\right) \tag{2.18}$$

eşitsziliği bulunur. 2.2. Lemma'daki (2.8)'den

$$\mu_n^x := R_n^G((e_1 - x)^2;x)$$

$$= \frac{\beta_n x}{\gamma_n(\beta_n + \alpha_n x)^2} + \frac{\left(1 - \frac{1}{n} + \alpha_n + \beta_n(\beta_n - 2)\right)x^2}{(\beta_n + \alpha_n x)^2} + \frac{2\alpha_n(1 - \beta_n)x^3}{(\beta_n + \alpha_n x)^2} + \frac{\alpha_n^2 x^4}{(\beta_n + \alpha_n x)^2}$$

olarak alınıp, $\mu := \sqrt{\mu_n^x}$ seçilirse

$$|R_n^G(f;x) - f(x)| \leq 2\omega(f;\sqrt{\mu_n^x})$$

eşitsizliği elde edilip ispat tamamlanır.

2.6. Sonuç

2.5. Teorem'de μ_n^x, x'e ve seçilen $(\alpha_n), (\beta_n)$ ve (γ_n)'e bağlıdır. $(\alpha_n), (\beta_n)$ ve (γ_n), $\mu_n^x \geq 0$ eşitsizliğini sağlayan negatif olmayan reel diziler olmalıdır. Örneğin, $\beta_n \geq 1$ ve $\alpha_n + (\beta_n - 1)^2 \geq \frac{1}{n}$ ise $\mu_n^x \geq 0$ olur.

Ayrıca, $f \in C_B([0,r])$ için 2.5. Teorem aşağıdaki eşitsizliğe indirgenir:

$|R_n^G(f;x) - f(x)| \leq 2\omega(f;\sqrt{\mu_n})$, burada

$$\mu_n := \frac{r}{\gamma_n\beta_n} + \frac{\left(\alpha_n + (\beta_n - 1)^2 - \frac{1}{n}\right)r^2}{\beta_n^2} + \frac{2\alpha_n(\beta_n - 1)r^3}{\beta_n^2} + \frac{\alpha_n^2 r^4}{\beta_n^2} \tag{2.19}$$

dir.

2.7. Tanım

$f \in C_B([0,\infty))$ olsun.

$$C_B^{(2)}\big([0,\infty)\big) := \big\{g \in C_B\big([0,\infty)\big): g', g'' \in C_B\big([0,\infty)\big)\big\}$$

olmak üzere

$$K_2(f;\mu) = inf_{g\in C_B^{(2)}([0,\infty))}\{\|f-g\|_\infty + \mu\|g''\|_\infty\} \tag{2.20}$$

ifadesine Petree K-fonksiyoneli denir. Petree K-fonksiyoneli ve

$$\omega_2(f;\sqrt{\mu}) = sup_{0<h\leq\sqrt{\mu}} sup_{x\in[0,\infty)}|f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)| \tag{2.21}$$

ile tanımlı $\omega_2(f;.)$ ikinci süreklilik modülü arasındaki bağıntı

$$K_2(f;\mu) \leq 2\omega_2(f;\sqrt{\mu}) \tag{2.22}$$

dir [15].

2.8. Teorem

(2.1)'deki koşulları sağlayan $(\alpha_n), (\beta_n)$ ve (γ_n) reel dizileri $\gamma_n = n\alpha_n$ olsun. Her $f \in C_B([0,\infty))$ ve $x \geq 0$ için

$$|R_n^G(f;x) - f(x)| \leq C\left\{\omega_2\left(f;\sqrt{\mu_n^x}\right) + \sqrt{\mu_n^x}\right\}$$

olacak şekilde bir $C > 0$ vardır. Burada, μ_n^x, (2.16)'da verilmiştir [37].

İspat

Herhangi bir $g \in C_B^{(2)}\big([0,\infty)\big)$ için Taylor formülünden

$$g(t) - g(x) = g'(x)(t - x) + \int_x^t (t - u) g''(u)\, du \tag{2.23}$$

yazılabilir. (2.23) eşitliğinin her iki tarafına R_n^G operatörü uygulanırsa

$$|R_n^G(g;x) - g(x)| \leq |g'(x)||R_n^G(t - x;x)| + \left| R_n^G \left(\int_x^t (t-u) g''(u)\, du\,; x \right) \right|$$

$$\leq \|g'\|_\infty R_n^G(|t - x|;x) + \|g''\|_\infty |R_n^G((t - x)^2;x)| \tag{2.24}$$

elde edilir. $g' \in C_B([0,\infty))$ olduğunda $\|g'\|_\infty = k_0$ olacak şekilde bir $k_0 > 0$ vardır. Bu nedenle, Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulandığında

$$|R_n^G(g;x) - g(x)| \leq k_0 \sqrt{R_n^G((t - x)^2;x)} + \|g''\|_\infty R_n^G((t - x)^2;x) \tag{2.25}$$

bulunur.

Ek olarak, $f \in C_B([0,\infty))$ için

$$|R_n^G(f;x)| \leq \sum_{k=0}^{n} \left| f\left(\frac{k}{\gamma_n}\right) \right| \binom{n}{k} \frac{(\alpha_n x)^k (\beta_n)^{n-k}}{(\beta_n + \alpha_n x)^n}$$

$$\leq \|f\|_\infty R_n^G(e_0;x) = \|f\|_\infty \tag{2.26}$$

dir. (2.24) ve (2.26) eşitsizlikleri dikkate alınarak

$$|R_n^G(f;x) - f(x)| \leq |R_n^G(f - g;x) - (f - g)(x)| + |R_n^G(g;x) - g(x)|$$

$$\leq |R_n^G(|f - g|;x)| + |(f - g)(x)| + |R_n^G(g;x) - g(x)|$$

$$\leq 2\|f - g\|_\infty + \|g''\|_\infty R_n^G((e_1 - x)^2;x) + k_0 \sqrt{R_n^G((e_1 - x)^2;x)} \tag{2.27}$$

yazılabilir. (2.27)'de, 2.2. Lemma'yı göz önünde bulundurup μ_n^x'i (2.16)'daki gibi seçerek son eşitsizliğin sağ tarafında infimum alınırsa, $g \in C_B^{(2)}([0,\infty))$ için

$$|R_n^G(f;x) - f(x)| \leq 2K_2(f;\mu_n^x) + k_0\sqrt{\mu_n^x} \tag{2.28}$$

elde edilir.

Son olarak, (2.22)-(2.28)'den

$$|R_n^G(f;x) - f(x)| \leq c_0\omega_2\left(f;\sqrt{\mu_n^x}\right) + k_0\sqrt{\mu_n^x}$$

olup burada, $c_0 > 0$ vardır. $C = max\{k_0, c_0\}$ seçilerek teorem ispatlanmış olur.

2.9. Sonuç

$f \in C_B([0,r])$ için 2.8. Teorem, $C > 0$ için

$$\|R_n^G(f;.) - f\|_{[0,r]} \leq C\{\omega_2(f;\sqrt{\mu_n}) + \sqrt{\mu_n}\}$$

eşitsizliğine indirgenip burada, μ_n, (2.19)'daki gibidir.

2.10. Tanım

$f \in C_B([0,r])$ olsun. E, $\mathbb{R}$'nin herhangi bir alt kümesi ve $\theta \in (0,1]$ olsun. $t \in \bar{E}$ ve $x \geq 0$ için

$$|f(t) - f(x)| \leq M_f|t-x|^\theta$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlara Lipschitz sınıfındandır, denir ve $f \in Lip_{M_f}(E,\theta)$ ile gösterilir. Burada, M_f, f'ye bağlı bir sabit ve $\bar{E}$, $[0,\infty)$ üzerinde E'nin kapanışıdır.

2.11. Teorem

$(\alpha_n), (\beta_n)$ ve (γ_n) dizileri (2.1)'deki koşulları sağlasın. Her $f \in Lip_{M_f}(E,\theta)$ için

$$|R_n^G(f;x) - f(x)| \leq M_f \left\{ \left(\sqrt{\mu_n^x}\right)^\theta + 2(d(x,E))^\theta \right\}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada, μ_n^x, (2.16)'da verildiği gibidir [37].

İspat

$t \in [0,\infty)$ ve $x \in \bar{E}$, $d(x,x_0) = |x - x_0|$ olsun. Bu durumda

$$|f(.) - f(x)| \leq |f(.) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(x)| \tag{2.29}$$

yazılabilir. R_n^G operatörünün (2.29)'a uygulanarak Lipschitz sınıfından fonksiyonun tanımı ve R_n^G operatörünün lineerliği ve pozitifliği dikkate alınarak

$$|R_n^G(f;x) - f(x)| \leq R_n^G(|f(.) - f(x_0)|;x) + R_n^G(|f(x) - f(x_0)|;x)$$

$$\leq M_f\left\{R_n^G\left(|e_1 - x_0|^\theta e_0;x\right) + R_n^G\left(|x - x_0|^\theta e_0;x\right)\right\}$$

$$= M_f\left\{R_n^G\left(|e_1 - x_0|^\theta e_0;x\right) + |x - x_0|^\theta R_n^G(e_0;x)\right\} \tag{2.30}$$

elde edilir. (2.30)'da, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olacak şekilde $p = \frac{2}{\theta}$ ve $q = \frac{2}{2-\theta}$ için Hölder eşitsizliği uygulayıp, 2.1. Lemma ve 2.2. Lemma'nın (2.8) eşitliği dikkate alınırsa

$$|R_n^G(f;x) - f(x)| \leq M_f\left\{(R_n^G(|e_1 - x|^{\theta p};x))^{1/p} + (R_n^G((e_0)^q;x))^{1/q} + 2(d(x,E))^\theta\right\}$$

$$= M_f\left\{(R_n^G((e_1 - x)^2;x))^{\theta/2}(1)^{(2-\theta)/2} + 2(d(x,E))^\theta\right\}$$

$$= M_f \left\{ \left(\sqrt{\mu_n^x}\right)^\theta + 2(d(x,E))^\theta \right\}$$

olup teorem ispatlanmış olur.

2.12. Sonuç

$x \in [0, r] := E \subset [0, \infty)$ olduğunda $d(x, E) = 0$ dır. 2.11. Teorem'den

$$\|R_n^G(f;.) - f\|_{[0,r]} \leq M_f\left(\sqrt{\mu_n}\right)^\theta$$

olup, burada μ_n, (2.19)'daki gibidir.

3. TENSÖR ÇARPIM TİP İKİ DEĞİŞKENLİ OPERATÖR

Atakut ve İspir [7]'de, (1.2) ile tanımlanan Bernstein tip rasyonel fonksiyonun iki değişkenli operatörünü $u, v \geq 0$ ve $m, n \in \mathbb{N}$ için

$$R_{n,m}(f; u, v) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{m} \left(\frac{j}{b_n}, \frac{k}{b_m}\right) \binom{n}{j} \binom{m}{k} \frac{(a_n u)^j (a_m v)^k}{(1+a_n u)^n (1+a_m v)^m} \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlamışlardır. Burada, $h = n, m \in \mathbb{N}$ için $b_h = h a_h$ olacak şekilde a_n, a_m, b_n ve b_m negatif olmayan diziler ve f, $[0,\infty) \times [0,\infty)$ üzerinde reel değerli fonksiyondur. Atakut ve İspir, f fonksiyonunun tam süreklilik modülü yardımıyla, $R_{n,m}$ operatörü için yakınsaklık oranı elde edip; bu operatör için asimptotik yaklaşım teoremini ispatlamışlardır. Ayrıca Atakut [8]'da, $R_{n,m}$ operatörünün türeviyle ilgili bazı yaklaşım sonuçlarını elde etmiştir.

Bu bölümde, tensör çarpım tip iki değişkenli operatörü tanımlayıp bu operatörün $[0, r_1] \times [0, r_2], r_1, r_2 > 0$, dikdörtgensel bölge üzerinde yaklaşım özellikleri elde edilecektir. Daha sonra bu operatörün Genelleştirilmiş Boolean Toplam (GBS) operatörünü tanımlayıp yaklaşım özelliklerini inceleyeceğiz.

3.1. Tanım

$(\alpha_1^n), (\alpha_2^m), (\beta_1^n), (\beta_2^m), (\gamma_1^n)$ ve (γ_2^m) negatif olmayan reel dizileri, $(\phi, h) = (1, n), (2, m)$ için $\gamma_\phi^h = h\alpha_\phi^h$ olmak üzere

$$\lim_{n,m\to\infty} \alpha_\phi^h = 0\,,\ \lim_{n,m\to\infty} \beta_\phi^h = 1 \text{ ve } \lim_{n,m\to\infty} \gamma_\phi^h = \infty \tag{3.2}$$

koşullarını sağlasınlar.

f, $[0,\infty) \times [0,\infty)$ üzerinde reel değerli sürekli bir fonksiyon olmak üzere genelleştirilmiş Bernstein tip rasyonel fonksiyonların tensör çarpım tip iki değişkenli operatörü: $u, v \geq 0$, $n, m \in \mathbb{N}$ için

$$R_{n,m}^{G}(f;u,v) = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{m} f\left(\frac{j}{\gamma_1^n},\frac{k}{\gamma_2^m}\right) s_{n,j}(u)s_{m,k}(v) \tag{3.3}$$

olacak şekilde tanımlayalım. Burada, $s_{n,j}(u) = \binom{n}{j}\frac{(\alpha_1^n u)^j(\beta_1^n)^{n-j}}{(\beta_1^n+\alpha_1^n u)^n}$, $s_{m,k}(v) = \binom{m}{k}\frac{(\alpha_2^m v)^k(\beta_2^m)^{m-k}}{(\beta_2^m+\alpha_2^m v)^m}$ dir. Her $\phi,\varphi \in \mathbb{R}$ ve f,h, $[0,\infty)\times[0,\infty)$ üzerinde reel değerli sürekli fonksiyonları için

$$R_{n,m}^{G}(\phi f + \varphi h;u,v) = \phi R_{n,m}^{G}(f;u,v) + \varphi R_{n,m}^{G}(h;u,v)$$

sağlandığından iki değişkenli $R_{n,m}^{G}$ operatörü lineerdir. Eğer f, $[0,\infty)\times[0,\infty)$ üzerinde $f(u,v)\geq 0$ koşulunu sağlıyor ise $R_{n,m}^{G}(f;.)\geq 0$ dır, yani $R_{n,m}^{G}$ pozitif operatördür. Bu nedenle $R_{n,m}^{G}$ iki değişkenli operatörü lineer ve pozitif bir operatördür [38].

$${}_xR_{n,m}^{G}(f(\tau,\varsigma);u,\varsigma) := \sum_{j=0}^{n} f\left(\frac{j}{\gamma_1^n},\varsigma\right) s_{n,j}(u),$$

$${}_yR_{n,m}^{G}(f(\tau,\varsigma);\tau,v) := \sum_{k=0}^{m} f\left(\tau,\frac{k}{\gamma_2^m}\right) s_{m,k}(v),$$

$R_{n,m}^{G}$ iki değişkenli operatörü ${}_xR_{n,m}^{G}$, ${}_yR_{n,m}^{G}$ operatörlerinin tensör çarpımıdır. Yani,

$$R_{n,m}^{G} = {}_xR_n^{G} \circ {}_yR_m^{G} = {}_yR_m^{G} \circ {}_xR_n^{G}$$

dir. Gerçekten de, $g(\tau,u) := {}_yR_m^{G}(f(\tau,\varsigma);\tau,v)$ dersek,

$${}_xR_n^{G}\left({}_yR_m^{G}(f(\tau,\varsigma);\tau,v);u,v\right) = {}_xR_n^{G}(g(\tau,u);u,v)$$

$$=\sum_{j=0}^{n} g\left(\frac{j}{\gamma_1^n},v\right) s_{n,j}(u)$$

$$= \sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{k=0}^{m} f\left(\frac{j}{\gamma_1^n},\frac{k}{\gamma_2^m}\right) s_{m,k}(v)\right) s_{n,j}(u)$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{m} f\left(\frac{j}{\gamma_1^n}, \frac{k}{\gamma_2^m}\right) s_{n,j}(u) s_{m,k}(v)$$

$$= R_{n,m}^{G}(f(\tau,\varsigma); u, v)$$

elde edilir [37]. Benzer şekilde,

$${}_{y}R_{m}^{G}\left({}_{x}R_{n}^{G}(f(\tau,\varsigma); u, \varsigma); u, v\right) = R_{n,m}^{G}(f(\tau,\varsigma); u, v)$$

olduğu gösterilebilir. Eğer $(\phi, h) = (1, n), (2, m)$ için $\alpha_{\phi}^{h} = a_h$, $\gamma_{\phi}^{h} = b_h$ ve $\beta_h = 1$ ise tensör çarpım tip $R_{n,m}^{G}$ operatörü, (3.1)'de tanımlanan iki değişkenli $R_{n,m}$ operatörüne indirgenir. Bu nedenle, tensör çarpım tip $R_{n,m}^{G}$ operatörü, (3.1)'de tanımlanan iki değişkenli $R_{n,m}$ operatörünün bir genelleştirmesidir [38].

3.2. Lemma

$\psi_{i,j}(\tau,\varsigma) = \tau^{i}\varsigma^{j}, i, j = 0,1,2,$ iki değişkenli test fonksiyonları olsun. (3.3) ile tanımlanan $R_{n,m}^{G}$ operatörü için aşağıdaki eşitlikler sağlanır [38].

$$R_{n,m}^{G}\left(\psi_{0,0}; u, v\right) = 1,$$

$$R_{n,m}^{G}\left(\psi_{1,0}; u, v\right) = \frac{u}{\beta_1^n + \alpha_1^n u},$$

$$R_{n,m}^{G}\left(\psi_{0,1}; u, v\right) = \frac{v}{\beta_2^m + \alpha_2^m v},$$

$$R_{n,m}^{G}\left(\psi_{2,0}; u, v\right) = \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)u^2}{(\beta_1^n + \alpha_1^n u)^2} + \frac{u}{\gamma_1^n(\beta_1^n + \alpha_1^n u)},$$

$$R_{n,m}^{G}\left(\psi_{0,2}; u, v\right) = \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)v^2}{(\beta_2^m + \alpha_2^m v)^2} + \frac{v}{\gamma_2^m(\beta_2^m + \alpha_2^m v)}$$

İspat

[37]'de Lemma 1'in ispatından,

$R_{n,m}^{G}\big(\psi_{0,0};u,v\big)=\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{m}s_{n,j}(u)s_{m,k}(v)=1$

$$R_{n,m}^{G}\big(\psi_{1,0};u,v\big)=\sum_{j=0}^{n}\frac{j}{\gamma_1^n}s_{n,j}(u)\sum_{k=0}^{m}s_{m,k}(v)$$

$$=\frac{u}{\beta_1^n+\alpha_1^n u}\sum_{j=0}^{n-1}s_{n-1,j}(u)\sum_{k=0}^{m}s_{m,k}(v)$$

$=\frac{u}{\beta_1^n+\alpha_1^n u}$

$$R_{n,m}^{G}\big(\psi_{2,0};u,v\big)=\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{m}\left(\frac{j}{\gamma_1^n}\right)^2 s_{n,j}(u)s_{m,k}(v)$$

$$=\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{j}{\gamma_1^n}\right)^2 s_{n,j}(u)\sum_{k=0}^{m}s_{m,k}(v)$$

$$=\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)u^2}{(\beta_1^n+\alpha_1^n u)^2}\sum_{j=0}^{n-2}s_{n-2,j}(u)\sum_{k=0}^{m}s_{m,k}(v)+\sum_{j=0}^{n-1}s_{n-1,j}(u)\sum_{k=0}^{m}s_{m,k}(v)$$

$$=\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)u^2}{(\beta_1^n+\alpha_1^n u)^2}+\frac{u}{\gamma_1^n(\beta_1^n+\alpha_1^n u)}$$

elde edilir.

Benzer şekilde, $R_{n,m}^{G}\big(\psi_{0,1};u,v\big)$ ve $R_{n,m}^{G}\big(\psi_{0,2};u,v\big)$, $s_{n,j}(u)$'de j,n ve u bileşenlerinin yerine k,m ve v ile ve $s_{m,k}(v)$' de k,m ve v bileşenlerinin sırasıyla j,n ve u ile yer değiştirerek kolayca hesaplanabilir.

Not

3.2. Lemma'dan

$R_{n,m}^{G}(\tau-u;u,v)=\frac{(1-\beta_1^n)u}{\beta_1^n+\alpha_1^n u}-\frac{\alpha_1^n u^2}{\beta_1^n+\alpha_1^n u},$

$R_{n,m}^{G}(\varsigma-v;u,v)=\frac{(1-\beta_2^m)v}{\beta_2^m+\alpha_2^m v}-\frac{\alpha_1^m v^2}{\beta_2^m+\alpha_2^m v},$

$R_{n,m}^{G}((\tau-u)^2;u,v)=\frac{\beta_1^n u}{\gamma_1^n(\beta_1^n+\alpha_1^n u)^2}+\frac{\left(\alpha_1^n+(\beta_1^n-1)^2-\frac{1}{n}\right)u^2}{(\beta_1^n+\alpha_1^n u)^2}+\frac{2\alpha_1^n(\beta_1^n-1)u^3}{(\beta_1^n+\alpha_1^n u)^2}+\frac{\alpha_1^n u^4}{(\beta_1^n+\alpha_1^n u)^2},$

$R_{n,m}^{G}((\varsigma-v)^2;u,v)$

$$=\frac{\beta_2^m}{\gamma_2^m(\beta_2^m+\alpha_2^m v)^2}+\frac{\left(\alpha_2^m+(\beta_2^m-1)^2-\frac{1}{m}\right)v^2}{(\beta_2^m+\alpha_2^m v)^2}+\frac{2\alpha_2^m(\beta_2^m-1)v^3}{(\beta_2^m+\alpha_2^m v)^2}+\frac{\alpha_2^m v^4}{(\beta_2^m+\alpha_2^m v)^2}$$

elde edilir.

3.3. Tanım

$A\subset[0,\infty)\times[0,\infty)$, $\mathbb{R}^2$'nin kompakt bir alt kümesi ve $C(A)$, A üzerinde reel değerli sürekli f fonksiyonlarının uzayı olsun. Bu uzayda $\|f\|=sup\{|f(u,v)|:(u,v)\in A\}$ normu tanımlanabilir.

3.4. Teorem

$R_{n,m}^{G}$, $n,m\in\mathbb{N}$, (3.3)'de tanımlanan tensör çarpım tip iki değişkenli operatör ve $(\alpha_1^n),(\alpha_2^m),(\beta_1^n),(\beta_2^m),(\gamma_1^n)$ ve (γ_2^m), (3.2)'deki koşulları sağlayan diziler olsun. O halde, her $f\in C([0,r_1]\times[0,r_2])$, $r_1,r_2>0$, için $R_{n,m}^{G}(f),[0,r_1]\times[0,r_2]$ üzerinde f'ye düzgün olarak yakınsar [38].

İspat

Bu teoremin ispatı, $R_{n,m}^{G}$ operatörünün [41]'de verilen Volkov Teoremi'nin koşullarını sağladığı 3.2. Lemma'da elde edilen eşitlikler yardımıyla kolayca gösterilebilir.

3.5. Tanım

$\mu_1, \mu_2 > 0$ olsun.

$$\omega(f; \mu_1, \mu_2) = sup\{|f(\tau, \varsigma) - f(u, v)| : |\tau - u| \leq \mu_1, |\varsigma - v| \leq \mu_2, (\tau, \varsigma), (u, v) \in A\}$$

ifadesine iki değişkenli fonksiyon için tam süreklilik modülü denir. Ayrıca,

$$\omega^{(1)}(f; \mu_1) = sup\{|f(\tau, v) - f(u, v)| : |\tau - u| \leq \mu_1; (\tau, v), (u, v) \in A\},$$

$$\omega^{(2)}(f; \mu_2) = sup\{|f(u, \varsigma) - f(u, v)| : |\varsigma - v| \leq \mu_2; (\tau, \varsigma), (u, v) \in A\}$$

ifadelerine ise sırasıyla x ve y'ye göre kısmi süreklilik modülü denir ve tam süreklilik modülünün özelliklerini sağlar. İki değişkenli fonksiyonların süreklilik modülleri ile ilgili detaylı sonuçlar [6]'da bulunabilir.

3.6. Teorem

$f \in C([0, r_1] \times [0, r_2]),]), r_1, r_2 > 0$, olsun. O halde,

$$\left|R_{n,m}^{G}(f; u, v) - f(u, v)\right| \leq 4\omega(f; \mu_n^u, \mu_m^v)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada, $\mu_n^u := \left(R_{n,m}^{G}((\tau - u)^2; u, v)\right)^{1/2}$ ve $\mu_m^v := \left(R_{n,m}^{G}((\varsigma - v)^2; u, v)\right)^{1/2}$ dir [38].

İspat

$R_{n,m}^{G}$ operatörünün lineerliği ve pozitifliği kullanılarak ve tam süreklilik modülünün özellikleri uygulanarak

$$\left|R_{n,m}^{G}(f;u,v)-f(u,v)\right| \leq R_{n,m}^{G}(|f(\tau,\varsigma)-f(u,v)|;u,v)$$

$$\leq \omega(f;\mu_1,\mu_2)\left[1+\frac{1}{\mu_1}R_{n,m}^{G}(|\tau-u|;u,v)+\frac{1}{\mu_2}R_{n,m}^{G}(|\varsigma-v|;u,v)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\mu_1\mu_2}R_{n,m}^{G}(|\tau-u||\varsigma-v|;u,v)\right] \quad (3.4)$$

yazılabilir. (3.4)’e Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa

$$\left|R_{n,m}^{G}(f;u,v)-f(u,v)\right| \leq \omega(f;\mu_1,\mu_2)\left[1+\frac{1}{\mu_1}\left(R_{n,m}^{G}((\tau-u)^2;u,v)\right)^{1/2}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\mu_2}R_{n,m}^{G}((\varsigma-v)^2;u,v)^{1/2}+\frac{1}{\mu_1\mu_2}\left(R_{n,m}^{G}((\tau-u)^2(\varsigma-v)^2;u,v)\right)^{1/2}\right] \quad (3.5)$$

elde edilir. (3.5)’de 3.2. Lemma dikkate alınarak ve $\mu_1 := \mu_n^u := \left(R_{n,m}^{G}((\tau-u)^2;u,v)\right)^{1/2}$ ve $\mu_2 := \mu_m^v := \left(R_{n,m}^{G}((\varsigma-v)^2;u,v)\right)^{1/2}$ seçildiğinde ispat tamamlanmış olur.

3.7. Teorem

$f \in C([0,r_1]\times[0,r_2]),]), r_1, r_2 > 0$, olsun. O halde,

$$\left|R_{n,m}^{G}(f;u,v)-f(u,v)\right| \leq 2\left[\omega^{(1)}(f;\mu_n^u)+\omega^{(2)}(f;\mu_m^v)\right]$$

eşitsizliği sağlanır [38].

İspat

Kısmi süreklilik modülünün tanımı dikkate alınarak ve Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa,

$$\left|R_{n,m}^{G}(f;u,v)-f(u,v)\right| \leq R_{n,m}^{G}(|f(\tau,\varsigma)-f(u,v)|;u,v)$$

$$\leq R_{n,m}^{G}(|f(\tau,\varsigma)-f(u,\varsigma)|;u,v)+R_{n,m}^{G}(|f(u,\varsigma)-f(u,v)|;u,v)$$

$$\leq R_{n,m}^{G}(|\tau-u|;u,v)+R_{n,m}^{G}(|\varsigma-v|;u,v)$$

$$\leq \omega^{(1)}(f;\mu_1)\left[1+\frac{1}{\mu_1}R_{n,m}^{G}(|\tau-u|;u,v)\right]+\omega^{(2)}(f;\mu_2)\left[1+\frac{1}{\mu_2}R_{n,m}^{G}(|\varsigma-v|;u,v)\right]$$

$$\leq \omega^{(1)}(f;\mu_1)\left[1+\frac{1}{\mu_1}\left(R_{n,m}^{G}((\tau-u)^2;u,v)\right)^{1/2}\right]$$

$$+\omega^{(2)}(f;\mu_2)\left[1+\frac{1}{\mu_2}\left(R_{n,m}^{G}((\varsigma-v)^2;u,v)\right)^{1/2}\right]$$

yazılabilir. Burada, $\mu_1 := \mu_n^u := \left(R_{n,m}^{G}((\tau-u)^2;u,v)\right)^{1/2}$ ve $\mu_2 := \mu_m^v := \left(R_{n,m}^{G}((\varsigma-v)^2;u,v)\right)^{1/2}$ seçildiğinde ispat tamamlanmış olur. Şimdi, $R_{n,m}^{G}$ operatörünün yakınsaklık oranını Lipschitz sınıfından fonksiyonlar yardımıyla bulalım.

3.8. Tanım

$M>0$ ve $0<a,b\leq 1$ olsun. $(\tau,\varsigma),(u,v)\in A$ için

$$|f(\tau,\varsigma)-f(u,v)|\leq M|\tau-u|^a|\varsigma-v|^b$$

koşulu sağlanıyor ise $f\in C(A)$ fonksiyonuna Lipschitz sınıfındandır, denir ve $f\in Lip_M(a,b)$ ile gösterilir.

3.9. Teorem

$f \in Lip_M(a,b)$ olsun. O halde, her $(x,y) \in [0,r_1] \times [0,r_2]$ ve $M > 0$ için

$$\left|R_{n,m}^G(f;u,v) - f(u,v)\right| \leq M(\mu_n^u)^a(\mu_m^v)^b$$

olup burada, $\mu_n^u := \left(R_{n,m}^G((\tau-u)^2;u,v)\right)^{1/2}$ ve $\mu_m^v := \left(R_{n,m}^G((\varsigma-v)^2;u,v)\right)^{1/2}$ dir [38].

İspat

Teoremin hipotezinde $f \in Lip_M(a,b)$ olduğundan,

$$\left|R_{n,m}^G(f;u,v) - f(u,v)\right| \leq R_{n,m}^G(|f(\tau-\varsigma) - f(u,v)|;u,v)$$

$$\leq MR_{n,m}^G(|\tau-u|^a|\varsigma-v|^b;u,v)$$

$$= MR_{n,m}^G(|\tau-u|^a;u,v)R_{n,m}^G(|\varsigma-v|^b;u,v)$$

yazılabilir. Eşitsizliğe $\frac{1}{p_i}+\frac{1}{q_i}=1, i=1,2,$ olacak şekilde $p_1=\frac{2}{a}$, $q_1=\frac{2}{2-a}$, $p_2=\frac{2}{b}$ ve $q_2=\frac{2}{2-b}$ için Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\left|R_{n,m}^G(f;u,v) - f(u,v)\right| \leq M\left(R_{n,m}^G((\tau-u)^2;u,v)\right)^{a/2}\left(R_{n,m}^G(1;u,v)\right)^{(2-a)/2}$$

$$\times\left(R_{n,m}^G((\varsigma-v)^2;u,v)\right)^{b/2}\left(R_{n,m}^G(1;u,v)\right)^{(2-b)/2}$$

$$= M(\mu_n^u)^a(\mu_m^v)^b$$

olup, böylece teorem ispatlanmış olur.

3.1. GBS Operatörü

Şimdi, Bögel'in GBS operatörü ile ilgili verdiği bazı temel gösterimleri verelim. Konu ile ilgili ayrıntılı bilgiler [16-18] kaynaklarında bulunabilir.

3.1.1. Tanım

A, $\mathbb{R}^2$ nin kompakt bir alt kümesi olsun.

$$\Delta_{(u,v)} f[\tau, \varsigma; u, v] = f(u, v) - f(u, \varsigma) - f(\tau, v) + f(\tau, \varsigma)$$

ifadesine karma fark denir ve

$$\Delta_{(u,v)} f[\tau, \varsigma; u, v] = 0$$

ise $(\tau, \varsigma) \in A$ için A üzerindeki reel değerli bir fonksiyona Bögel sürekli fonksiyon denir.

3.1.2. Tanım

A, $\mathbb{R}^2$ nin bir alt kümesi olsun. Eğer $M > 0$ ve her $(\tau, \varsigma), (u, v) \in A$ için

$$\left|\Delta_{(u,v)} f[\tau, \varsigma; u, v]\right| \leq M$$

koşulu sağlanıyorsa, f fonksiyonuna A üzerinde Bögel sınırlı fonksiyon denir. A, $\mathbb{R}^2$ nin kompakt bir alt kümesi olsun. Bu durumda, her bir Bögel sürekli fonksiyon Bögel sınırlı fonksiyondur.

$C_{\mathcal{B}}(A)$, A üzerinde tanımlanmış reel değerli Bögel sürekli fonksiyonların uzayı olsun. Bu uzay üzerindeki norm,

$$\|f\|_{\mathcal{B}} = sup\left\{\left|\Delta_{(u,v)} f[\tau, \varsigma; u, v]\right| : (u, v), (\tau, \varsigma) \in A\right\}$$

olarak tanımlanır. Burada, $C(A) \subset C_{\mathcal{B}}(A)$ olduğu açıktır.

Şimdi, $R_{n,m}^{G}$ operatörünün Genelleştirilmiş Boolean Toplamı (GBS) operatörünü tanımlayalım.

$f \in C([0,r_1] \times [0,r_2])$, $r_1, r_2 > 0$, her $(u,v),(\tau,\varsigma) \in [0,r_1] \times [0,r_2]$ ve $m,n \in \mathbb{N}$ için

$$B_{n,m}^{G}(f(\tau,\varsigma);u,v) = R_{n,m}^{G}(f(u,\varsigma) + f(\tau,v) - f(\tau,\varsigma);u,v) \tag{3.6}$$

ile tanımlanan operatörüne $R_{n,m}^{G}$ operatörünün Genelleştirilmiş Boolean Toplamı (GBS) denir [38]. Dolayısıyla,

$$B_{n,m}^{G}(f(\tau,\varsigma);u,v) = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{m} s_{n,j}(u)s_{m,k}(v)$$

$$\times \left[f\left(u,\frac{k}{\gamma_2^m}\right) + f\left(\frac{j}{\gamma_1^n},v\right) - f\left(\frac{j}{\gamma_1^n},\frac{k}{\gamma_2^m}\right)\right] \tag{3.7}$$

yazılabilir [37]. Burada, $s_{n,j}(u) = \binom{n}{j}\frac{(\alpha_1^n u)^j(\beta_1^n)^{n-j}}{(\beta_1^n+\alpha_1^n u)^n}$, $s_{m,k}(v) = \binom{m}{k}\frac{(\alpha_2^m v)^k(\beta_2^m)^{m-k}}{(\beta_2^m+\alpha_2^m v)^m}$ ve $(\alpha_1^n),(\alpha_2^m),(\beta_1^n),(\beta_2^m),(\gamma_1^n)$ ve (γ_2^m), (3.1)'deki koşulları sağlayan ve $(\phi,h) = (1,n),(2,m)$ için $\gamma_\phi^h = h\alpha_\phi^h$ eşitliği ile verilen negatif olmayan reel sayı dizileridir. $B_{n,m}^{G}$ operatörü, $B_{n,m}^{G}: C_{\mathcal{B}}([0,r_1] \times [0,r_2]) \to C([0,r_1] \times [0,r_2])$ dönüşümü yapan lineer ve pozitif bir operatördür [38].

3.1.3. Tanım

$f \in C_{\mathcal{B}}(A)$ fonksiyonu için

$$\omega_{mixed}(f;u,v)$$

$$= sup\left\{\left|\Delta_{(u,v)}f[\tau,\varsigma;u,v]\right|: |\tau-u| \le \mu_1, |\varsigma-v| \le \mu_2, (u,v),(\tau,\varsigma) \in A\right\} \tag{3.8}$$

ifadesine karma süreklilik modülü denir [9].

$\lambda_1, \lambda_2 > 0$ ve her $(u,v),(\tau,\varsigma) \in [0,r_1] \times [0,r_2]$ için

$$\omega_{mixed}(f;\ \lambda_1\mu_1, \lambda_2\mu_2) \leq (1+\lambda_1)(1+\lambda_2)\ \omega_{mixed}(f;\mu_1,\mu_2)$$

özelliğini sağlar.

3.1.4. Teorem

Her $f \in C_{\mathcal{B}}([0,r_1] \times [0,r_2])$ için

$$\left|B_{n,m}^{G}(f;u,v) - f(u,v)\right| \leq 4\omega_{mixed}(f;\mu_n^u,\mu_m^v)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada, $\mu_n^u := \left(R_{n,m}^{G}((\tau-u)^2;u,v)\right)^{1/2}$ ve $\mu_m^v := \left(R_{n,m}^{G}((\varsigma-v)^2;u,v)\right)^{1/2}$ dir [38].

İspat

Karma süreklilik modülünün özelliğinden,

$$\left|\Delta_{(u,v)}f[\tau,\varsigma;u,v]\right| \leq |f(u,v) - f(u,\varsigma) - f(\tau,v) + f(\tau,\varsigma)|$$

$$\leq \omega_{mixed}(f;|\tau-u|,|\varsigma-v|)$$

$$\leq \left(1+\frac{|\tau-u|}{\mu_1}\right)\left(1+\frac{|\varsigma-v|}{\mu_2}\right)\omega_{mixed}(f;\mu_1,\mu_2) \tag{3.9}$$

elde edilir. (3.6)’dan

$$f(u,\varsigma) + f(\tau,v) - f(\tau,\varsigma) = f(u,v) - \Delta_{(u,v)}f[\tau,\varsigma;u,v]$$

yazabiliriz. Dolayısıyla, $R_{n,m}^{G}$ ve $B_{n,m}^{G}$ operatörlerinin tanımları göz önünde bulundurulduğunda

$B^G_{n,m}(f(\tau,\varsigma);u,v) = R^G_{n,m}(f(u,\varsigma)+f(\tau,v)-f(\tau,\varsigma);u,v)$

$= f(u,v)R^G_{n,m}(\psi_{0,0};u,v) - R^G_{n,m}(\Delta_{(u,v)}f[\tau,\varsigma;u,v];u,v)$

elde edilir. (3.9) ve Cauchy-Schwarz eşitsizliği dikkate alınırsa

$\left|B^G_{n,m}(f(\tau,\varsigma);u,v) - f(u,v)\right| \leq [R^G_{n,m}(1;u,v) + \frac{1}{\mu_1}\left(R^G_{n,m}((\tau-u)^2;u,v)\right)^{1/2}$

$+\frac{1}{\mu_2}\left(R^G_{n,m}((\varsigma-v)^2;u,v)\right)^{1/2} + \frac{1}{\mu_1\mu_2}\left(R^G_{n,m}((\tau-u)^2;u,v)R^G_{n,m}((\varsigma-v)^2;u,v)\right)^{1/2}]$

$\times\, \omega_{mixed}(f;\mu_1,\mu_2)$

bulunur. $\mu_1 := \mu^u_n := \left(R^G_{n,m}((\tau-u)^2;u,v)\right)^{1/2}$ ve $\mu_2 := \mu^v_m := \left(R^G_{n,m}((\varsigma-v)^2;u,v)\right)^{1/2}$ seçildiğinde istenilen sonuç elde edilir.

3.1.5. Tanım

$f \in C_{\mathcal{B}}(A)$, $(u,v),(\tau,\varsigma) \in A$ ve $0 < a,b \leq 1$ için eğer

$\left|\Delta_{(u,v)}f[\tau,\varsigma;u,v]\right| \leq M|\tau-u|^a|\varsigma-v|^b$

olacak şekilde $M > 0$ mevcut ise f fonksiyonuna Lipschitz sınıfından Bögel sürekli fonksiyon denir ve $Lip^{\mathcal{B}}_M(a,b)$ ile gösterilir.

3.1.6. Teorem

$f \in Lip^{\mathcal{B}}_M(a,b)$ olsun. O halde, her $(u,v) \in [0,r_1]\times[0,r_2]$ ve $M > 0$ için

$\left|B^G_{n,m}(f;u,v) - f(u,v)\right| \leq M(\mu^u_n)^a(\mu^v_m)^b$

eşitsizliği sağlanır. Burada $\mu_n^u := \left(R_{n,m}^G((\tau-u)^2;u,v)\right)^{1/2}$ ve $\mu_m^v := \left(R_{n,m}^G((\varsigma - v)^2;u,v)\right)^{1/2}$ dir [38].

İspat

$B_{n,m}^G(f;u,v) = R_{n,m}^G(f(u,\varsigma)+f(\tau,v)-f(\tau,\varsigma);u,v)$

$= R_{n,m}^G(f(u,v)-\Delta_{(u,v)}f[\tau,\varsigma;u,v];u,v)$

$= f(u,v)R_{n,m}^G(\psi_{0,0};u,v) - R_{n,m}^G(\Delta_{(u,v)}f[\tau,\varsigma;u,v];u,v)$

olduğundan

$\left|B_{n,m}^G(f;u,v)-f(u,v)\right| \le R_{n,m}^G(\left|\Delta_{(u,v)}f[\tau,\varsigma;u,v]\right|;u,v)$

$\le MR_{n,m}^G(|\tau-u|^a|\varsigma-v|^b;u,v)$

$= MR_{n,m}^G(|\tau-u|^a;u,v)R_{n,m}^G(|\varsigma-v|^b;u,v)$

yazabiliriz. Eşitsizliğe $\frac{1}{p_i}+\frac{1}{q_i}=1, i=1{,}2$, olacak şekilde $p_1=\frac{2}{a}$, $q_1=\frac{2}{2-a}$, $p_2=\frac{2}{b}$ ve $q_2=\frac{2}{2-b}$ için Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$\left|B_{n,m}^G(f;u,v)-f(u,v)\right| \le M\left(R_{n,m}^G((\tau-u)^2;u,v)\right)^{a/2}\left(R_{n,m}^G(1;u,v)\right)^{(2-a)/2}$

$\times\left(R_{n,m}^G((\varsigma-v)^2;u,v)\right)^{b/2}\left(R_{n,m}^G(1;u,v)\right)^{(2-b)/2}$

$= M(\mu_n^u)^a(\mu_m^v)^b$

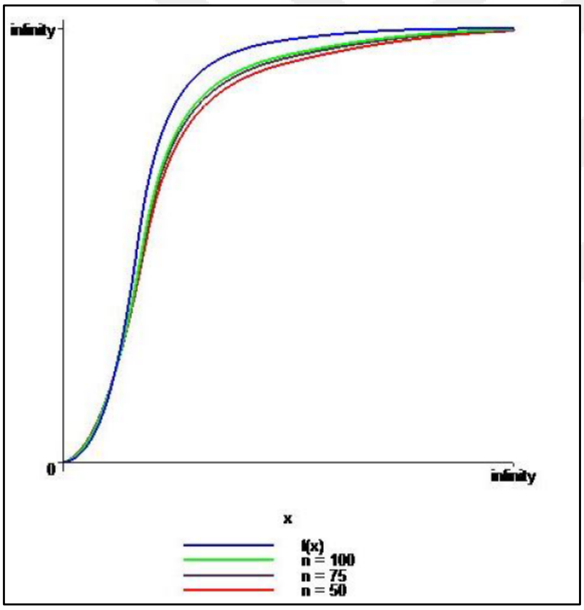
olup teorem ispatlanmış olur.

4. GRAFİK KARŞILAŞTIRMALARI

4.1. Örnek

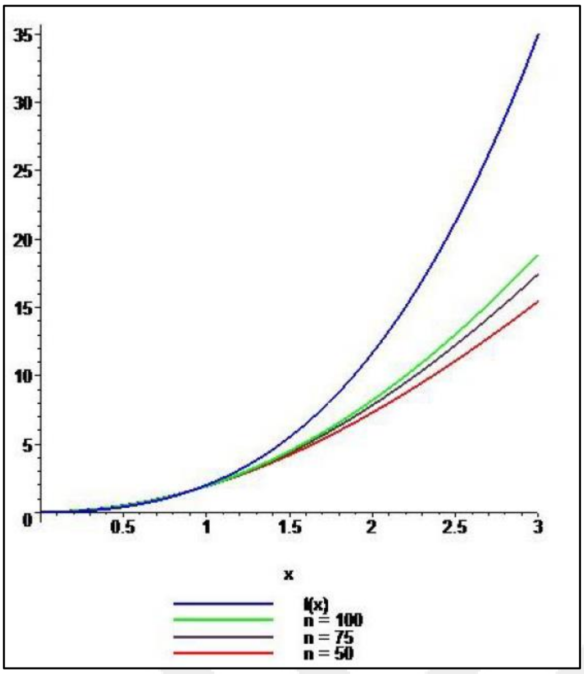
$x \geq 0$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $f(x) = x\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)$, $\alpha_n = \frac{1}{n}$, $\gamma_n = \sqrt{n}$ seçelim.

Şekil 4.1 ve Şekil 4.2'de, $\beta_n = 1 - \frac{1}{n}$ seçilerek n =50, 75 ve 100 için $R_n^G(f;x)$'in $f(x)$'e yaklaşımının grafik karşılaştırması $[0,\infty)$ ve $[0,3]$ üzerinde gösterilmiştir. $R_n^G(f;x)$'in $f(x)$'e yaklaşımı, n'nin artan değerleri için diğerlerinden daha iyi olduğu görülmektedir [37].



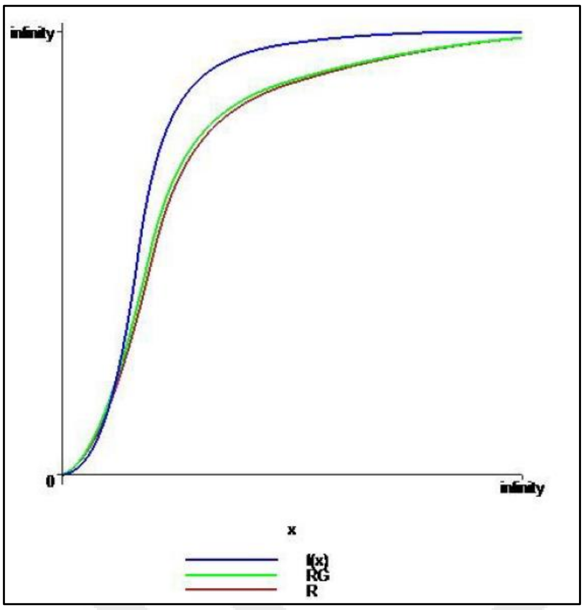
Şekil 4.1. $[0,\infty)$ üzerinde $\beta_n = 1 - \frac{1}{n}$ ve n =50, 75 ve 100 için $R_n^G(f;x)$ operatörünün $f(x)$'e yaklaşımı

Bu bölümde, grafikler E. Y. Özkan tarafından Maple Software yazılımı kullanılarak çizilmiştir.

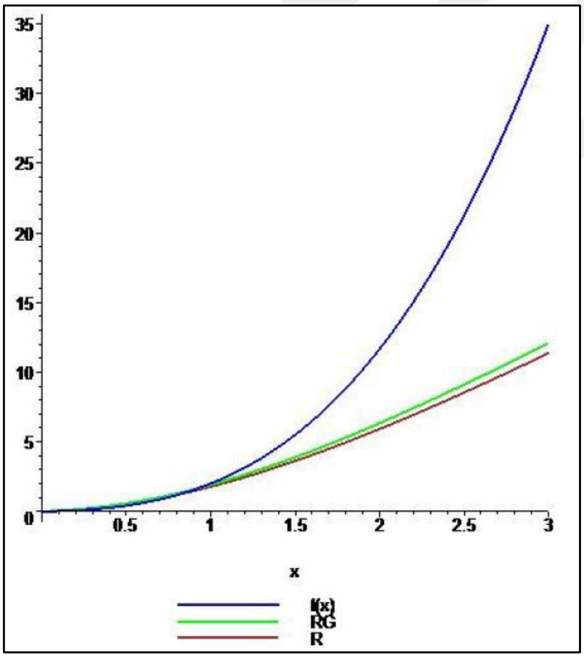


Şekil 4.2. [0,3] üzerinde $\beta_n = 1 - \frac{1}{n}$ ve n =50, 75 ve 100 için $R_n^G(f;x)$ operatörünün $f(x)$'e yaklaşımı

Şekil 4.3 ve Şekil 4.4'de, $\beta_n = 1 - \frac{1}{n}$ seçilerek $[0,\infty)$ ve [0,3] üzerinde n =25 için $R_n^G(f;x)$'in (1.2) ile verilen klasik Bernstein tip rasyonel fonksiyon ile $f(x)$'e yaklaşımları grafik olarak karşılaştırılmıştır. $R_n^G(f;x)$ operatörünün $f(x)$'e yaklaşımı, $[0,\infty)$ ve [0,3] üzerinde $R_n^G(f;x)$'in $f(x)$'e yaklaşımından diğerlerine göre daha iyi olduğu görülmektedir [37].



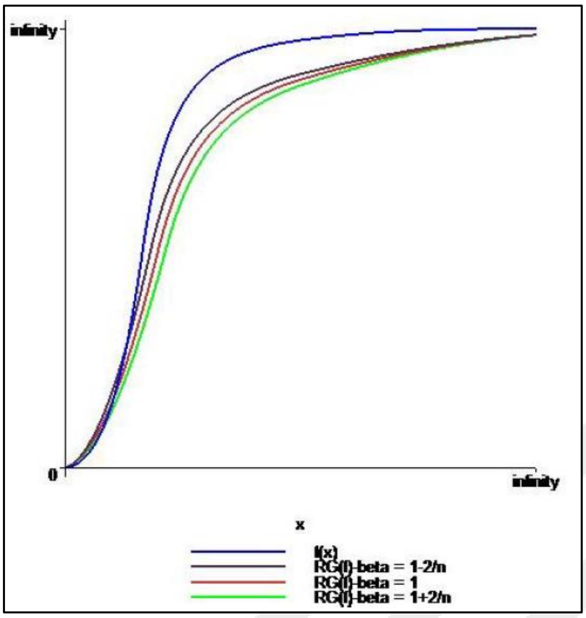
Şekil 4.3. $[0,\infty)$ üzerinde $\beta_n = 1 - \frac{1}{n}$ ve $n = 25$ için $R_n^G(f;x)$ ve $R_n(f;x)$ operatörlerinin $f(x)$'e yaklaşımlarının karşılaştırılması



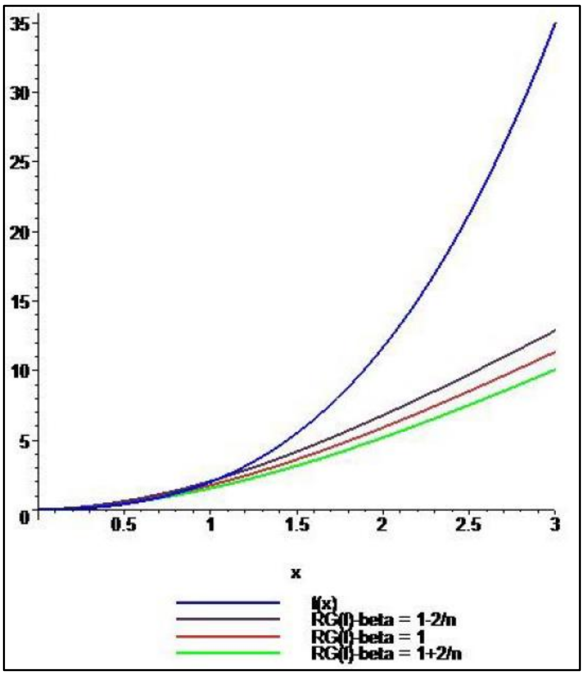
Şekil 4.4. $[0,3]$ üzerinde $\beta_n = 1 - \frac{1}{n}$ ve $n = 25$ için $R_n^G(f;x)$ ve $R_n(f;x)$ operatörlerinin $f(x)$'e yaklaşımlarının karşılaştırılması

Şekil 4.5 ve Şekil 4.6'da, $R_n^G(f;x) := R_n^G(f;x,\beta_n)$ belirterek ve $\beta_n = 1 - \frac{2}{n}, 1, 1 + \frac{2}{n}$ seçilerek $R_n^G\left(f;x,1-\frac{2}{n}\right)$, $R_n^G(f;x,1)$ ve $R_n^G\left(f;x,1+\frac{2}{n}\right)$ grafik olarak karşılaştırılmıştır. Burada, $R_n^G(f;x,1)$ ve $\beta_n = 1$ için $R_n(f;x)$'e indirgendiği açıktır. Eğer β_n'i, $\lim_{n\to\infty} \beta_n = 1$

ve β_n'in sabit olmadığı bir reel dizi olarak seçersek o halde, $[0,\infty)$ ve $[0,3]$ üzerinde $R_n^G\left(f;x,1-\frac{2}{n}\right)$'in yaklaşımı, $R_n^G(f;x,1)=R_n(f;x)$ ve $R_n^G\left(f;x,1+\frac{2}{n}\right)$'den diğerlerine göre daha iyi olduğu grafiklerden görülmektedir [37].



Şekil 4.5. $[0,\infty)$ üzerinde $\beta_n=1-\frac{2}{n},1,1+\frac{2}{n}$ ve $n=25$ için $R_n^G(f;x)$ operatörünün $f(x)$'e yaklaşımı



Şekil 4.6. $[0,3]$ üzerinde $\beta_n=1-\frac{2}{n},1,1+\frac{2}{n}$ ve $n=25$ için $R_n^G(f;x)$ operatörünün $f(x)$'e yaklaşımı

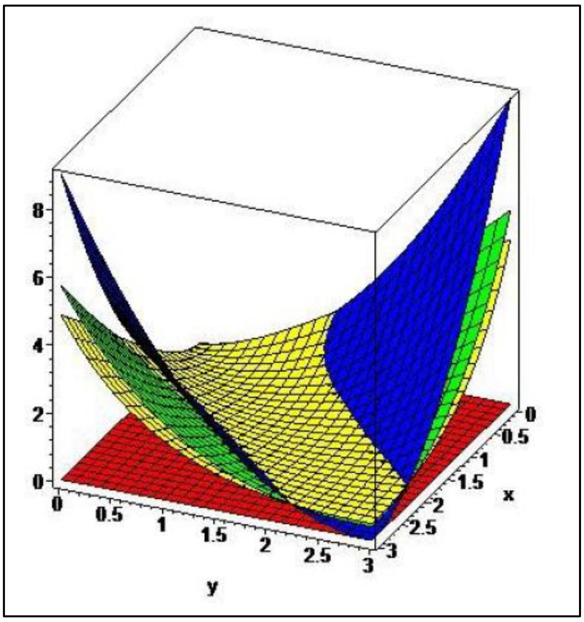
4.2. Örnek

$(u,v) \in [0,3] \times [0,3]$ için $\varphi(u,v) = (u-v)^2$ alalım.

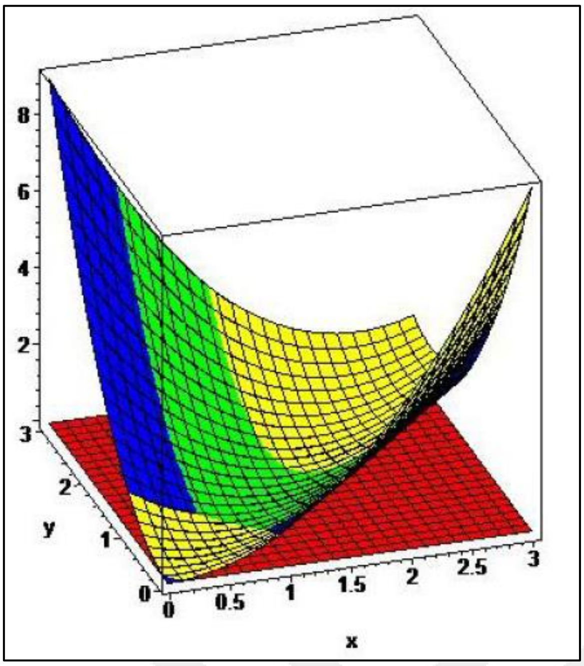
$(\phi,h) = (1,n),(2,m), n,m = 1,2,\dots$ için $n = m$, $\alpha_\phi^h = n^{-1/2}, \gamma_\phi^h = n^{1/2}$ ve $\beta_\phi^h = 1 - 5n^{-1}$ seçelim [38].

Şekil 4.7'de $R_{5,5}^G(\varphi;u,v)$ (kırmızı), $R_{25,25}^G(\varphi;u,v)$ (sarı) ve $R_{75,75}^G(\varphi;u,v)$ (yeşil) operatörlerinin $\varphi(u,v)$ (mavi)'ye yaklaşımının grafik olarak karşılaştırması $[0,3] \times [0,3]$ üzerinde gösterilmiştir. n'nin artan değerleri için $R_{n,n}^G(\varphi;u,v)$ operatörünün $\varphi(u,v)$'ye yaklaşımı diğerlerine göre daha iyidir [38].

Şekil 4.8'de $B_{5,5}^G(\varphi;u,v)$ (kırmızı), $B_{25,25}^G(\varphi;u,v)$ (sarı) ve $B_{75,75}^G(\varphi;u,v)$ (yeşil) operatörlerinin $\varphi(u,v)$ (mavi)'ye yaklaşımının grafik olarak karşılaştırması $[0,3] \times [0,3]$ üzerinde gösterilmiştir. n'nin artan değerleri için $B_{n,n}^G(\varphi;u,v)$ operatörünün $\varphi(u,v)$'ye yaklaşımı diğerlerine göre daha iyidir [38].



Şekil 4.7. $[0,3] \times [0,3]$ üzerinde $n = 5$ (kırmızı), $n = 25$ (sarı) ve $n = 75$ (yeşil) için $R_{n,n}^G(\varphi)$ operatörünün φ (mavi)'ye yaklaşımı



Şekil 4.8. $[0,3] \times [0,3]$ üzerinde $n = 5$ (kırmızı), $n = 25$ (sarı) ve $n = 75$ (yeşil) için $B_{n,n}^{G}(\varphi)$ operatörünün φ (mavi)'ye yaklaşımı

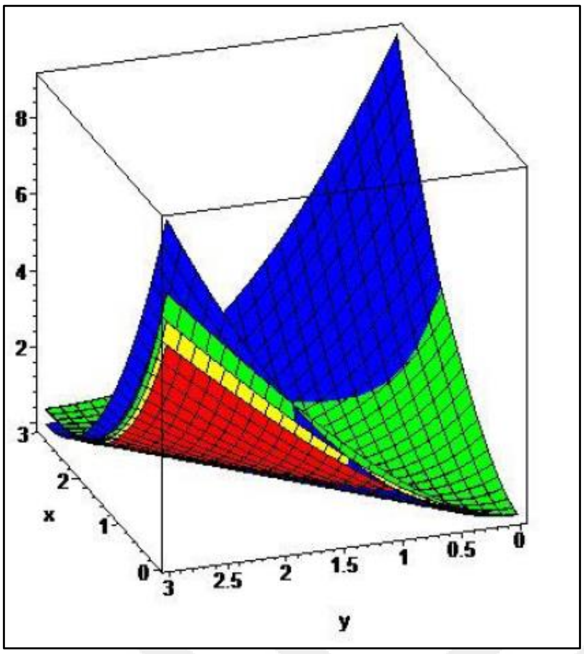
4.3. Örnek

$(u, v) \in [0,3] \times [0,3]$ için $\varphi(u, v) = (u - v)^2$ alalım.

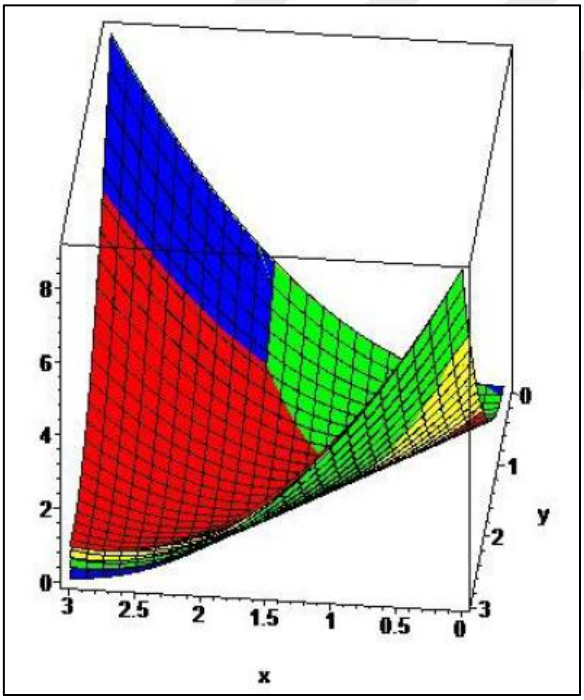
$(\phi, h) = (1, n), (2, m), n, m = 1,2, \ldots$ için $n = m = 75$, $\alpha_{\phi}^{h} = n^{-1/2}, \gamma_{\phi}^{h} = n^{1/2}$ ve $\beta_1 = \beta_{\phi}^{h} = 1 - 5n^{-1}$ $\beta_2 = \beta_{\phi}^{h} = 1 - 10n^{-1}$ ve $\beta_3 = \beta_{\phi}^{h} = 1 - 15n^{-1}$ seçelim [38].

Şekil 4.9'da $R_{75,75}^{G}(\varphi; u, v; \beta_1)$ (kırmızı), $R_{75,75}^{G}(\varphi; u, v; \beta_2)$ (sarı) ve $R_{75,75}^{G}(\varphi; u, v; \beta_3)$ (yeşil) operatörlerinin $\varphi(u, v)$ (mavi)'ye yaklaşımının grafik olarak karşılaştırması $[0,3] \times [0,3]$ üzerinde gösterilmiştir. $R_{75,75}^{G}(\varphi; u, v; \beta_3)$ operatörünün $\varphi(u, v)$'ye yaklaşımının diğerlerine göre daha iyi olduğu görülebilir [38].

Şekil 4.10'da $B_{75,75}^{G}(\varphi; u, v; \beta_1)$ (kırmızı), $B_{75,75}^{G}(\varphi; u, v; \beta_2)$ (sarı) ve $B_{75,75}^{G}(\varphi; u, v; \beta_3)$ (yeşil) operatörlerinin $\varphi(u, v)$ (mavi)'ye yaklaşımının grafik olarak karşılaştırması $[0,3] \times [0,3]$ üzerinde gösterilmiştir. $B_{75,75}^{G}(\varphi; u, v; \beta_1)$ (kırmızı) ve $B_{75,75}^{G}(\varphi; u, v; \beta_3)$ (yeşil) operatörünün $\varphi(u, v)$'ye yaklaşımları bölgenin alt kısımlarında $B_{75,75}^{G}(\varphi; u, v; \beta_2)$ (sarı) operatörünün (u, v) (mavi)'ye yaklaşımından diğerlerine göre daha iyidir [38].



Şekil 4.9. $[0,3] \times [0,3]$ üzerinde $\beta_1 = 1 - 5n^{-1}$ (kırmızı), $\beta_2 = 1 - 10n^{-1}$ (sarı) ve $\beta_3 = 1 - 15n^{-1}$ (yeşil) için $R^{G}_{75,75}(\varphi)$ operatörünün φ (mavi)'ye yaklaşımlarının karşılaştırılması



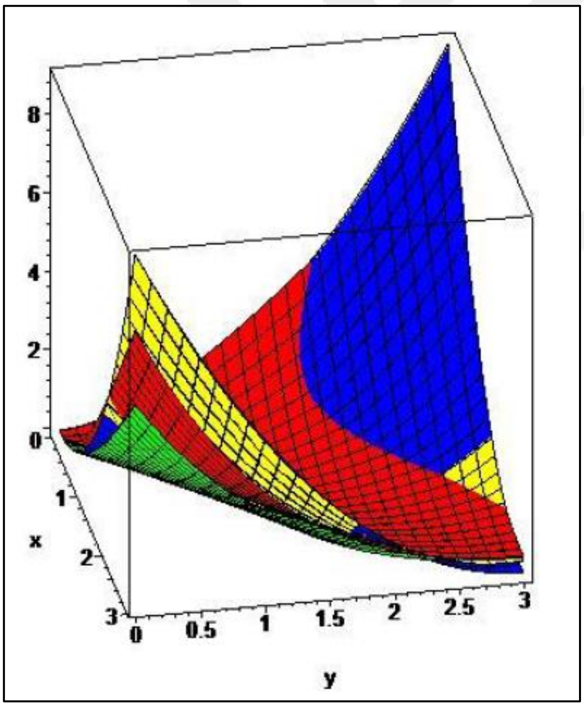
Şekil 4.10. $[0,3] \times [0,3]$ üzerinde $\beta_1 = 1 - 5n^{-1}$ (kırmızı), $\beta_2 = 1 - 10n^{-1}$ (sarı) ve $\beta_3 = 1 - 15n^{-1}$ (yeşil) için $B^{G}_{75,75}(\varphi)$ operatörünün φ (mavi)'ye yaklaşımlarının karşılaştırılması

4.4. Örnek

$(u, v) \in [0,3] \times [0,3]$ için $\varphi(u, v) = (u - v)^2$ alalım.

$(\phi, h) = (1, n), (2, m), n, m = 1,2, \ldots$ için $n = m$, $\alpha_\phi^h = n^{-1/2}, \gamma_\phi^h = n^{1/2}$ ve $\beta_\phi^h = 1 - 5n^{-1}$ seçelim [38].

Şekil 4.11'de $R_{75,75}(\varphi; u, v)$ (yeşil), $R_{75,75}^G(\varphi; u, v)$ (kırmızı) ve $B_{75,75}^G(\varphi; u, v)$ (sarı) operatörlerinin $\varphi(u, v)$ (mavi)'ye yaklaşımının grafik karşılaştırması $[0,3] \times [0,3]$ üzerinde gösterilmiştir. $B_{75,75}^G(\varphi; u, v)$ (sarı) operatörünün $\varphi(u, v)$ (mavi)'ye yaklaşımı diğerlerine göre en iyisidir. $B_{75,75}^G(\varphi; u, v)$ (sarı) operatörü $\varphi(u, v)$ (mavi)'ye çok yakındır [38].



Şekil 4.11. $[0,3] \times [0,3]$ üzerinde $R_{75,75}(\varphi)$ (yeşil), $R_{75,75}^G(\varphi)$ (kırmızı) ve $B_{75,75}^G(\varphi)$ (sarı) operatörlerinin φ (mavi)'ye yaklaşımlarının karşılaştırılması

5. SONUÇ

Bu bölümde çalışmamızda elde ettiğimiz bazı sonuçlardan söz edilecektir.

(1.2) ile tanımlanan klasik Bernstein tip rasyonel fonksiyonunu ve (1.3) ile tanımlanan Agratini'nin modifikasyonunu içeren yeni bir genelleştirilmiş R_n^G Bernstein tip rasyonel fonksiyonu tanımlanmıştır. Yeni tanımladığımız genelleştirilmiş Bernstein tip rasyonel fonksiyonun, seçilen (α_n), (β_n) ve (γ_n) negatif olmayan reel dizileri için (1.2) ile tanımlanan klasik Bernstein tip rasyonel fonksiyondan daha iyi sonuçlar verdiği gösterilmiştir.

[37]'de tanımlanmış R_n^G genelleştirilmiş Bernstein tip rasyonel fonksiyonun, $R_{n,m}^G$ tensör çarpım tip iki değişkenli operatörü tanımlanmıştır ve $[0,r_1]\times[0,r_2], r_1, r_2 > 0$, dikdörtgensel bölge üzerinde bu operatörün yaklaşım özellikleri bulunmuştur. Ayrıca, $R_{n,m}^G$ tensör çarpım tip iki değişkenli operatörünün GBS (Genelleştirilmiş Boolean Toplam) operatörü tanımlanmıştır. GBS operatörünün karma süreklilik modülü ve karma Lipschitz sınıfından fonksiyonu ile yakınsama oranı bulunmuştur. Ayrıca, $R_{n,m}^G$ tensör çarpım tip iki değişkenli operatörünün, $B_{n,m}^G$ GBS operatörünün grafik yardımıyla klasik Bernstein tip rasyonel fonksiyondan daha iyi yaklaşıma sahip olduğu ile ilgili bazı örneklere yer verilmiştir.

KAYNAKLAR

1. Abel, U., ve Vecchia, B. D. (2000). Analysis-Asymptotic approximation by the operators of K Balazs and Szabados. *Acta Scientiarum Mathematicarum*, 66 (1-2), 137-146.

2. Acu, A. M., Acar, T., Muraru, C. V., ve Radu, V. A. (2019). Some approximation properties by a class of bivariate operators. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 42(16), 5551-5565.

3. Agratini, O. (2020). On a class of Bernstein-type rational functions. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 41(4), 483-494.

4. Agrawal, P. N., Kajla, A., and Kumar, D. (2021). Modified ρ-Bernstein operators for functions of two variables. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 42(9), 1073-1095.

5. Agrawal, P. N., Acu, A. M., Chauhan, R., ve Garg, T. (2021). Approximation of Bögel continuous functions and deferred weighted A-statistical convergence by Bernstein-Kantorovich type operators on a triangle. *Journal Mathematics Inequal*, 15(4), 1695-1711.

6. Anastassiou, G. A., ve Gal, S. G. (2012). *Approximation theory: moduli of continuity and global smoothness preservation*. Birkhäuser: Boston, MA, USA: Springer Science & Business Media, 2000.

7. Atakut, Ç., ve İspir, N. (2004). On Bernstein type rational functions of two variables. *Mathematica Slovaca*, 54(3), 291-301

8. Atakut, Ç. (2011). On derivatives of Bernstein type rational functions of two variables. *Applied Mathematics and Computation*, 218(3), 673-677.

9. Badea, C., ve Cottin, C. (1990). Korovkin-type theorems for generalized Boolean sum operators. In *Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai*, 58, 51-67.

10. Balázs, K. (1975). Approximation by Bernstein type rational functions. *Acta Mathematica Hungarica*, 26(1-2), 123-134.

11. Balázs, C., ve Szabados, J. (1982). Approximation by Bernstein type rational functions. II. *Acta Mathematica Hungarica*, 40(3-4), 331-337.

12. Balázs, K. (1985). Approximation by Bernstein type rational functions on the real axis. *Acta Mathematica Hungarica*, 46(1-2), 195-204.

13. Başcanbaz-Tunca, G., Erençin, A., ve Olgun, A. (2019). Quantitative estimates for bivariate Stancu operators. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 42(16), 5241-5250.

14. Bernstein, S.N. (2013). Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul de probabilités, *Computational Society Mathematics. Kharkow,* 13(2), 1-2.

15. Butzer, P. L., ve Berens, H. (2013). *Semi-Groups of Operators and Approximation*. Newyork:Springer Science & Business Media, 196.

16. Bögel, K. (1934). Mehr dimensionale differentiation von funktionen mehrerer veränderlicher. *Journal Reine Angew Mathematical*, 170, 197-217.

17. Bögel, K. (1935). Über die mehrdimensionale Integration und beschränkte Variation. *Journal Reine Angew Mathematical,* 173, 5-29.

18. Bögel, K. (1962). Über die mehrdimensionale differentiation. *Jahresber Dtsch Mathematical* Ver, 65, 45-71.

19. Cai, Q. B., ve Zhou, Z. (2019). Durrmeyer type (p, q)-Baskakov operators for functions of one and two variables. *Journal Computational Analysis and Applications*, 27, 481-501

20. Cai, Q. B., Ansari, K. J., Temizer-Ersoy, M., and Özger, F. (2022). Statistical blending-type approximation by a class of operators that includes shape parameters λ and α. *Mathematics,* 10(7), 1149.

21. De Vore, R. A., ve Lorentz, G. G. (1993). *Constructive Approximation*, Berlin: Springer Science & Business Media, 303.

22. Gupta, V., ve Ispir, N. (2005). On the Bezier variant of generalized Kantorovich type Balázs operators. *Applied Mathematics Letters*, 18(9), 1053-1061.

23. Gupta, V., ve Lupaş, A. (2004). On the rate of approximation for the Bézier variant of Kantorovich-Balazs operators. *General Mathematics,* 12(3), 3-18.

24. Gupta, V., ve Zeng, X. M. (2007). Rate of approximation for the Bézier variant of Balazs Kantorovich operators. *Mathematica Slovaca*, 57, 349-358.

25. Hamal, H., ve Sabancigil, P. (2020). Some approximation properties of new Kantorovich type q-analogue of Balázs–Szabados operators. *Journal of Inequalities and Applications,* 159(1), 1-16.

26. Holhoş, A. (2021). On the Approximation by Balázs–Szabados Operators. *Mathematics,* 9(14), 1588.

27. İspir, N., ve Atakut, Ç. (2003). Approximation by generalized Balasz type rational functions. *International Journal of Computational and Numerical Analysis and Applications*, 4(3), 297-316.

28. Ispir, N., ve Özkan, E.Y. (2013). Approximation properties of complex q-Balázs-Szabados operators in compact disks. *Journal of Inequalities and Applications*, 361(1), 1-12.

29. Ispir, N. (2017). Quantitative estimates for GBS operators of Chlodowsky-Szász type. *Filomat*, 31(5), 1175-1184.

30. Korovkin, P. P. (1953). On convergence of linear positive operators in the space of continuous functions. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 90(953), 961-964.

31. Özkan, E.Y. ve İspir, N. (2018). Approximation by (p, q)-analogue of Balázs-Szabados operators. *Filomat*, 32(6), 2257-2271.

32. Özkan, E.Y. (2014). Approximation properties of bivariate complex q-Balázs-Szabados operators of tensor product kind. *Journal of Inequalities and Applications*, 20(1), 1-12.

33. Özkan, E.Y. (2014). Statistical approximation properties of q-Balázs-Szabados-Stancu operators. *Filomat*, 28(9), 1943-1952.

34. Özkan, E.Y. (2016). Approximation by complex bivariate Balázs-Szabados operators. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 39, 1-16.

35. Özkan, E.Y. (2019). Approximation properties of Kantorovich type q-Balázs-Szabados operators. *Demonstratio Mathematica*, 52(1), 10-19.

36. Özkan, E.Y. (2020). Quantitative estimates for the tensor product (p, q)-Balázs-Szabados operators and associated generalized Boolean sum operators. *Filomat*, 34(3), 779-793.

37. Özkan, E.Y. ve Aksoy, G. (2022a). On a new generalization of Bernstein-type rational functions and its approximation. *Mathematics*, 10(6), 973.

38. Özkan, E.Y. ve Aksoy, G. (2022b). Approximation by tensor-product kind bivariate operator of a new generalization of Bernstein-type rational functions and its GBS operator. *Mathematics*, 10(9), 1418.

39. Srivastava, H. M., Ansari, K. J., Özger, F., ve Ödemiş-Özger, Z. (2021). A link between approximation theory and summability methods via four-dimensional infinite matrices. *Mathematics*, 9(16), 1895.

40. Totik, V. (1984). Saturation for Bernstein type rational functions. *Acta Mathematica Hungarica*, 43(3-4), 219-250.

41. Volkov, V. I. (1957). On the convergence of sequences of linear positive operators in the space of continuous functions of two variables. In *Doklady Akademii Nauk*, 115(1), 17-19.

Gazili olmak ayrıcalıktır