T.C.
AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİR (κ, μ) KONTAK METRİK MANİFOLDUN KONTAK PSEUDO SLANT ALTMANİFOLDLARININ GEOMETRİSİ ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

VEZİR ÇETİN

HAZİRAN

VEZİR ÇETİN	**MATEMATİK ANABİLİM DALI**	**HAZİRAN 2023**

BİR (κ , μ) KONTAK METRİK MANİFOLDUN KONTAK PSEUDO SLANT ALTMANİFOLDLARININ GEOMETRİSİ ÜZERİNE

Vezir ÇETİN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman
Doç. Dr. Süleyman DİRİK

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HAZİRAN 2023

Yüksek Lisans Tezi Kabul ve Onay Sayfası

Vezir ÇETİN tarafından hazırlanan "Bir (κ, μ) Kontak Metrik Manifoldun Kontak Pseudo Slant Altmanifoldlarının Geometrisi Üzerine" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ/OY ÇOKLUĞU ile Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Süleyman DİRİK

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum ………………

Başkan : Prof. Dr. Mehmet ATÇEKEN

Matematik Anabilim Dalı, Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum ………………

Üye : Doç. Dr. Ümit YILDIRIM

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum ………………

Tez Savunma Tarihi: 09/06/2023

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

……………………………

Doç. Dr. Ümit YILDIRIM

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

(İmza)
Vezir ÇETİN
09/06/2023

BİR (κ, μ) KONTAK METRİK MANİFOLDUN

KONTAK PSEUDO SLANT ALTMANİFOLDLARININ GEOMETRİSİ ÜZERİNE

(Yüksek Lisans Tezi)

Vezir ÇETİN

AMASYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HAZİRAN 2023

ÖZET

Bu çalışmada, (κ, μ) −kontak metrik manifoldun kontak pseudo-slant altmanifoldlarının diferansiyel geometrisi çalışıldı. Bir (κ, μ) −kontak metrik manifoldun altmanifoldlarının kontak pseudo-slant altmanifold olması için gerek ve yeterli şartlar verilip, bir (κ, μ) −kontak metrik manifoldun kontak pseudo-slant altmanifoldunun tanımından ortaya çıkan distribüsyonların integrallenebilirliği için gerek ve yeter şartlar araştırıldı. Son olarak, distribüsyonların geodeziklik kavramları tanımlandı ve bazı sonuçlar elde edildi.

Sayfa Adedi : 57

Anahtar Kelimeler : Kontak metrik manifold, (κ, μ) −Kontak metrik manifold, Slant altmanifold ve Kontak pseudo-slant altmanifold.

Danışman : Doç. Dr. Süleyman DİRİK

ON THE GEOMETRY OF CONTACT PSEUDO-SLANT SUBMANIFOLDS OF A (κ, μ) CONTACT METRIC MANIFOLD

(M. Sc. Thesis)

Vezir ÇETİN

AMASYA UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

June 2023

ABSTRACT

In this study, the differential geometry of the contact pseudo-slant submanifolds of the (κ, μ) -contact metric manifold was studied. The necessary and sufficient conditions were given for the submanifolds of a (κ, μ) -contact metric manifold to be a contact pseudo-slant submanifold, and the necessary and sufficient conditions for the integrability of distributions arising from the definition of a contact pseudo-slant submanifold of a (κ, μ) -contact metric manifold were investigated. Finally, geodesic concepts of distributions were defined and some results were obtained.

Page Number : 57

Keywords : Contact metric manifold, (κ, μ) -Contact metric manifold - slant submanifold and Contact Pseudo-slant submanifold.

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Süleyman DİRİK

ÖN SÖZ ve TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmamın danışmanlığını kabul ederek bana bu tezi hazırlama olanağını sağlayan, çalışmalarımı yönlendiren, araştırmalarımın her aşamasında bilgi, öneri ve yardımlarını esirgemeyen, kıymetli hocam, tez danışmanım Doç. Dr. Süleyman DİRİK'e en derin saygılarımı sunar ve çok teşekkür ederim. Ayrıca Amasya Üniversitesi Matamatik Anabilim dalı Öğretim üyeleri ile çalışmalarımda beni daima destekleyen Batman Üniversitesi öğretim elemanlarından Ümit ÇELİK'e, eşime ve çocuklarıma teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

1. GİRİŞ VE LİTERATÜR ÖZETİ

Son yıllarda, matematik ve fizik alanında kontak geometri geniş uygulama alanı nedeniyle geometricilerin zengin bir araştırma konusu olmuştur. Altmanifoldların geometrisi kavramı yüzeyin dışsal geometrisi fikri ile başlamış olup zamanla ortam uzayı için geliştirilmiştir. Günümüzde bu teori, bilgisayar tasarımında, görüntü işlemede, ekonomik modellemede olduğu kadar matematiksel fizik ve mekanikte de önemli rol oynar.

Bir manifoldu formal olarak şu şekilde tanımlayabiliriz. $\widetilde{M}$ bir topolojik uzay olsun. $\widetilde{M}$ deki her noktanın bir komşuluğu $n-$boyutlu Öklid uzayındaki bir açık komşuluğa homeomorf oluyorsa $\widetilde{M},\ n-$boyutlu manifold olarak adlandırılır. Bir $\widetilde{M}$ manifoldunun herbir x noktasının komşuluğunda manifolda teğet olan vektör uzayı manifoldun tanjant uzayı olarak adlandırılır ve $T_{\widetilde{M}}(x)$ ile gösterilir. Eğer $\widetilde{M}$ üzerinde bir metrik tanımlı olması durumunda $\widetilde{M}$'ye bir Riemann manifoldu denir. Bazı şartlar altında bir Riemann manifoldu Öklid uzayının bir alt kümesi olarak düşünülebilir, bu durum Riemann manifoldunun Öklid uzayına gömülmesi olarak adlandırılır. Öklid uzayının yapısal durumları Riemann metriği yardımı ile manifold yapısı üzerine indirgenebilir.

Manifold yapısı bizlere metrikden ve topolojiden bağımsız geometri yapma olanağı sağlar. Bu duruma örnek verecek olursak bir vektör uzayı bir manifolddur, bir eğri 1-boyutlu bir manifolddur, orijinden geçen doğrular kümesi bir manifolddur. Bu örnekler genişletilebilir. Burada ilginç olan bir durum ise bu manifoldların hepsinin kendine has geometrisinin olmasıdır. Cebiri geometri ile, geometriyi cebir ile; analizi geometri ile geometriyi analiz ile… birbirinden farklı gibi görünseler de ortak yönleri söz konusudur.

Öklid uzayında iki nokta arasındaki en kısa uzaklık bir doğru parçası belirttiğini biliyoruz. Oysa küre de doğrular, kürenin büyük çemberleri olup küre üzerinde iki nokta arasındaki en kısa uzaklığını gösterir. Burada bir manifoldun doğrularına geodezikler denir.

Slant altmanifoldlar, invariant ve anti-invariant altmanifoldların bir genellemesi olarak 1990 yılında B.Y. Chen tarafından tanıtıldı. İlerleyen zamanlarda bu konu birçok geometricinin ilgisini çekmiş olup geniş çapta incelendi. Diferansiyellenebilir manifoldların farklı türlerinde slant altmanifoldlar, semi-slant, pseudo slant, bi-slant altmanifoldlar başlığı altında genelleştirildi.

Hemen hemen bir Hermityen manifoldunun slant altmanifoldları konusunu B. Y. Chen tarafından ortaya atılmıştır (Chen 1990). $\mathbb{C}^2$ ile $\mathbb{C}^4$ kompleks manifoldların slant altmanifold örnekleri B. Y. Chen ile Y. Tazawa vermiştir (Chen ve Tazawa 1990). İlk olarak A. Lotta hemen hemen kontak metrik manifoldunun slant altmanifoldunu tanımlamış ve incelemiştir (Lotta, 1996). Lotta aynı zamanda bir K Kontak manifoldun anti-invaryant olmayan 3 boyutlu slant altmanifoldlarının geometrisinde çalışmışır (Lotta, 1998). L. Cabrerizo ve arkadaşları da bir Sasakian manifoldun slant altmanifoldunu incelemiş ve çok sayıda enteresan sonuçlar elde etmiştir (Cabrerizo, Carriazo, Fernandez ve Fernandez 2000; Cabrerizo, Carriazo, Fernandez ve Fernandez, 2000). M. Atçeken de Riemanniann product, paracontact metrik manifold ile Kenmotsu manifoldlarında Semi - slant altmanifoldlarının geometrisi üzerinde çalışmalar yürütmüştür (Atçeken, 2010). 2007 ile 2011 yıllında M. Khan ile arkadaşları, çalışmlarını proper slant ve pseudo slant altmanifoldları üzerinde yürüterek bilim dünyasına kazandırmışlardır (Khan ve Arkadaşları 2011; Khan ve Khan 2007). 2013 yılında da M. Atçeken $(\mathrm{LCS})_{\mathrm{n}} -$ bir manifoldun kontak pseudo slant altmanifoldu üzerinde çalışmıştır (Atçeken ve Hui. 2012; Atçeken, Dirik ve Yıldırım, 2015). S. Dirik son zamanlarda kontak pseudo-slant altmanifoldlar üzerinde çok sayıda çalışma yapmıştır (Dirik ve Cetin, 2022; Dirik, 2019; Dirik, 2019; Dirik ve Atçeken 2014; Dirik ve Atçeken 2016; Dirik, Atçeken, ve Yildirim, 2016).

Tezimizde, bu bilgiler ışığında, $(\kappa\,,\mu)\,-$kontak metrik manifoldun kontak pseudo-slant altmanifoldlarının diferansiyel geometrisi çalışıldı. Bir $(\kappa\,,\mu)\,-$kontak metrik manifoldun altmanifoldlarının kontak pseudo-slant altmanifold olması için gerek ve yeterli şartlar verilip, bir $(\kappa\,,\mu)\,-$kontak metrik manifoldun kontak pseudo-slant altmanifoldunun tanımından ortaya çıkan distribüsyonların integrallenebilirliği için gerek ve yeter şartlar araştırıldı. Son olarak, distribüsyonların geodeziklik kavramları tanımlandı ve bazı sonuçlar elde edildi.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Manifoldlar

Bu bölümde, öncelikle koordinat komşuluğu kavramı tanıtıldıktan sonra topolojik manifoldlar tanıtılacaktır. Sonra da manifold üzerinde diferansiyellenebilir atlas tanımlandıktan sonra r'inci mertebeden diferansiyellenebilir manifold tanıtılıp bir manifoldun diferansiyellenebilir yapısı anlatılacak ve manifoldun Lie braketi, diferansiyel formu, tensör, vektör alanı, türev dönüşümü, kovaryant türev v.s. birçok kavram tanımlanacaktır.

2.1.1.Tanım X bir hausdorff uzayı olmak üzere herhangi bir $U \subset X$ açık kümesinden $V \subset \mathbb{R}^n$ bölgesinde tanımlı

$$\phi : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$$

homeomorfizmine X de tanımlı $n-$*boyutlu harita* veya *koordinat sistemi* denir. U açık cümlesine de ϕ *koordinat sisteminin koordinat bölgesi* veya *koordinat komşuluğu* olarak adlandırılır. Bu koordinat sistemi (U, ϕ) biçiminde tanımlanır. Şayet, x U'nun elemanı ise

$$\phi(x) = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

dir. Burada ϕ haritasında x noktasının koordinatları $x_1, x_2, \dots, x_n$ Reel sayıları şeklindedir.

2.1.2. Tanım $\widetilde{M}$ boştan farklı bir küme olmak üzere $\widetilde{M}$ nin her noktasının E^n'e veya E^n'in bir U açık altkümesine homeomorf olan bir koordinat komşuluğu varsa $\widetilde{M}$'ya $n-$*boyutlu topolojik manifold* adı verilir (Hacısalihoğlu, 1980).

2.1.3. Tanım $\mathbb{R}^n$ uzayına ait açık bir U cümlesinde tanımlanan Reel değerli sürekli bir fonksiyon f olsun. $k \leq r$ olmak şartıyla sürekli f fonksiyonunun $k-$inci mertebeden kısmi türevleri varsa o zaman f fonksiyonu $r-$*inci mertebeden diferansiyellenebilirdir* denir ve bu $f \in C^r(U, \mathbb{R})$ şeklinde gösterilir. Şayet her $r \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $f \in C^r(U, \mathbb{R})$

oluyorsa f fonksiyonu diferansiyellenebilirdir denir. Bu $f \in C^{\infty}(U, \mathbb{R})$ şeklinde belirtilir (Hacısalihoğlu, 1980).

2.1.4. Tanım $\widetilde{M}$ topolojik manifoldunun bir açık örtüsü $\{U_\alpha\}$ olmak üzere $\{U_\alpha\}$ açık örtüsü için U_α açık kümelerinin α indislerinin kümesi A oluyorsa $\{U_\alpha\}_\alpha \in A$ şeklinde yazılır. E^n'de tanımlı U_α'ya bir ϕ_α homeomorfizmi altında homeomorf olan açık küme ϕ_α olmak üzere oluşan (ϕ_α, U_α) haritalarının $\{(\phi_\alpha, U_\alpha)\}\alpha \in A$ koleksiyonuna bir *atlas* (*koordinat komşuluğu sistemi)* adı verilir.

2.1.5. Tanım $n-$boyutlu $\widetilde{M}$ topolojik manifoldunun bir atlası $S = \{U_\alpha, \psi_\alpha\}_\alpha$ olsun. $r \geq 1$ olup, $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ olacak şekilde S atlası her $\alpha, \beta \in A$ için

$$\phi_{\beta\alpha} = \psi_\beta o \psi_\alpha^{-1} : \psi_\alpha(U_\beta \cap U_\alpha) \rightarrow \psi_\beta(U_\beta \cap U_\alpha)$$

ve

$$\phi_{\alpha\beta} = \psi_\alpha o \psi_\beta^{-1} : \psi_\beta(U_\beta \cap U_\alpha) \rightarrow \psi_\alpha(U_\beta \cap U_\alpha)$$

özelliğini sağlıyorsa S'ye C^r- sınıfındandır denir. Burada $\phi_{\beta\alpha}$ ile $\phi_{\alpha\beta}$ fonksiyonları da ikişerli homeomorfizmaların bileşkesi olduğu için birer homeomorfizmadır. Tanımlanan $\phi_{\beta\alpha}$ ile $\phi_{\alpha\beta}$ fonksiyonları C^r- sınıfından diferansiyellenebiliyor ise S atlasına C^r- *Sınıfından diferansiyellenebilirdir* denir.

Eğer $\widetilde{M}$ üzerindeki S atlası C^r- sınıfından ise o zaman S'ye bir C^r- *sınıfından diferansiyellenebilir yapı* denir.

Şayet $\widetilde{M}$ manifoldu üzerindeki r'inci mertebeden diferansiyellenebilir bir atlas var ise $\widetilde{M}$ manifolduna *r'inci mertebeden diferansiyellenebilir manifold* denir (Hacısalihoğlu, 1980).

2.1.6. Tanım $\widetilde{M}$ ile $\widetilde{N}$ iki manifold ve $\phi: \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{N}$ diferansiyellenebilir bir dönüşümün tersi var ve tersi de diferansiyellenebilir oluyorsa ϕ dönüşümüne *diffeomorfizma* denir. Ayrıca $\widetilde{M}'$den $\widetilde{N}'$ye bir diffeomorfizma varsa $\widetilde{M}$ ile $\widetilde{N}$ manifoldlarına *diffeomorfiktirler* denir.

2.1.7. Tanım $\widetilde{M}$ topolojik manifold ve $p \in \widetilde{M}$ olsun. $\widetilde{M}$ manifoldunun p noktasının bir komşuluğu U olmak üzere

$$C^{\infty}(U,\mathbb{R}) = \{f \mid f : U \xrightarrow{dif-bilir} \mathbb{R}\}$$

cümlesini ele alırsak bu cümlede her $f\ ve\ g \in C^{\infty}(U, \mathbb{R})$ ve $k\ ve\ t \in \mathbb{R}$ için

i) Lineerlik

$$V_p\,(kf + tg) = kV_p(f) + tV_p(g)$$

ii) Leibnitz

$$V_p\,(f.g) = V_p(f)g(p) + f(p)V_p(g)$$

özellikleri sağlanıyorsa V_p fonksiyonuna $\widetilde{M}$'nin p noktasındaki *tanjant vektörü* adı verilir. $T_{\widetilde{M}}(p)$, $\widetilde{M}$ manifoldunun p noktasındaki tanjant vektörlerinin kümesi olsun. O zaman

$$T_{\widetilde{M}}(p) = \{V_p \mid V_p : C^{\infty}(\widetilde{M},\mathbb{R}) \xrightarrow{lineer\ ,\ Leibnitz} \mathbb{R}\}$$

dir. Bu cümlede iç işlem

$$\begin{aligned} \oplus :\ & T_{\widetilde{M}}(p) \times T_{\widetilde{M}}(p) \to T_{\widetilde{M}}(p) \\ & (V_p, W_p) \to V_p \oplus W_p :\ C^{\infty}(\widetilde{M},\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \end{aligned}$$

ve $f \in C^{\infty}(\widetilde{M},\mathbb{R})$ için

$$(V_p + W_p)[f] = V_p[f] + W_p[f]$$

biçiminde tanımlanır. Böylece $(T_{\widetilde{M}}(p),\oplus)$ ikilisi değişmeli grup adını alır. Bu cümlede dış çarpım işlemi

$$\odot : \mathbb{R} \times T_{\widetilde{M}}(p) \to T_{\widetilde{M}}(p)$$

$$(\lambda, V_p) \to \lambda \odot V_p:\ C^\infty(\widetilde{M}, R) \to \mathbb{R}$$

ve $f \in C^\infty(\widetilde{M}, \mathbb{R})$ için,

$$(\lambda \odot V_p)[f] = \lambda\, V_p[f]$$

şeklinde tanımlanır. Böylece $T_{\widetilde{M}}(p)$, reel sayılar cisminde bir vektör uzayı olduğu görülür. Bu uzay $\widetilde{M}$'nın p noktalarındaki *tanjant uzayı* olarak adlandırılır (Hacısalihoğlu, 1980).

2.1.8. Tanım $f: E^n \to \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $\vec{V_p} \in \mathrm{T}_{E^n}(p)$ olsun. Bu halde $\vec{V}_p = \overrightarrow{PQ}$ olacak şekilde,

$$\vec{V}_p[f] = \frac{d}{dt}\big(f(P_1 + t(Q_1 - P_1)\big), \ldots, f(P_n + t(Q_n - P_n)))_{t=0}$$

reel sayısına f fonksiyonunun $\vec{V}_p$ *vektör yönündeki türevi* olarak adlandırılır (Hacısalihoğlu, 1980).

2.1.9. Tanım Reel sayılar cismindeki r adet vektör uzayı $V_1,\ V_2,\ V_3, \ldots, V_r$ olsun.

$$f: V_1 \times V_2 \times V_3, \ldots, V_r \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu $u_i,\ v_i \in V_i$ ve $a, b\ \in \mathbb{R}$ olmak üzere $1\ \leq\ \mathrm{i}\ \leq\ \mathrm{r}$ için

$$f\big(u_1, \ldots, u_{i-1}, av_i + bu_i, , v_{i+1}, \ldots, , v_r\big) = af(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i, \ldots, , v_r)$$
$$+bf(v_1, \ldots, v_{i-1}, u_i, \ldots, , v_r)$$

koşulları sağlanıyorsa f fonksiyonuna $r-$*lineer fonksiyonu* adı verilir (Hacısalihoğlu, 1983).

2.1.10. Tanım $n-$boyutlu diferansiyellenebilir bir manifold $\widetilde{M}$ olsun. $\widetilde{M}$'nın p noktasındaki tanjant uzayını $T_{\widetilde{M}}(p)$ olarak adlandıralım. Bu durumda $T_{\widetilde{M}}(p)$ tanjant uzayının dual uzayına $\widetilde{M}$ manifoldunun p'deki *kotanjant uzayı* denir ve kotanjant uzayı $T^*_{\widetilde{M}}(p)$ ile gösterilir. O halde,

$$T^*_{\widetilde{M}}(p) = \{\omega | \omega : \mathrm{T}_{\widetilde{M}}(p) \xrightarrow{lineer} \mathbb{R}\}$$

dir. $T^*_{\widetilde{M}}(p)$ kotanjant uzayının elemanlarına da $\widetilde{M}$ manifoldunun p'deki *kotanjant vektörü* denir.

2.1.11. Tanım V reel sayılar cisminde vektör uzayı olsun. Bu durumda V'nin dual uzayı V^* olmak üzere,

$$L(V^r, V^{s*}; \mathbb{R}) = \{f | f : V^r \times V^{s*} \xrightarrow{r+s-lineer} \mathbb{R}\}$$

uzayındaki iç ve dış işlemlerini tanımlarsak sırasıyla

$$(f \oplus g)(a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s) = f(a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s) + g(a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s)$$

ve

$$(\lambda f)(a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s) = \lambda f(a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s)$$

biçiminde tanımlayabiliriz. Bu uzaya r*-inci mertebeden kovaryant* ve s*-inci mertebeden kontravaryant tensör uzayı* adı verilir. Bu uzayın elemanlarına da (r, s)*−tipinde bir tensör* denir (Boothby, 1986).

2.1.12. Tanım $\widetilde{M}$ diferansiyellenebilir herhangi bir manifold ve $\widetilde{M}$ üzerindeki diferansiyellenebilir fonksiyonların cümlesi $C^\infty(\widetilde{M}, \mathbb{R})$ olsun. Her $f, g \in C^\infty(\widetilde{M}, \mathbb{R})$ ve $k, t \in \mathbb{R}$ olmak üzere $X : C^\infty(\widetilde{M}, \mathbb{R}) \to C^\infty(\widetilde{M}, \mathbb{R})$ dönüşümü

i) $X(kf + tg) = kX(f) + tX(g)$

ii) $X(fg) = X(f)g + fX(g)$

şartlarını sağlıyorsa X'e $\widetilde{M}$ manifoldunda *vektör alanı* adı verilir. $\widetilde{M}$ manifolduna ait tüm vektör alanlarının kümesi $\chi(\widetilde{M})$ şeklinde gösterilir (Boothby, 1986).

Bu kapsamda herhangi bir manifolda ait bir vektör alanı, bu manifoldun her bir noktasını birer tanjant uzayı ile karşılık getirir.

2.1.13. Tanım $\widetilde{M}$ diferansiyellenebilir manifoldunun vektör alanlarının kümesi $\chi(\widetilde{M})$ olsun. Bu durumda $X_1, Y_1 \in \chi(\widetilde{M})$ için,

$$[\,,]: \chi(\widetilde{M}) \times \chi(\widetilde{M}) \to \chi(\widetilde{M})$$
$$(X_1, Y_1) \to [X_1, Y_1]$$

dönüşümünde

i) 2 - lineer, yani her $k, t \in \mathbb{R}$ ile $X_1, Y_1, Z_1 \in \Gamma(T\widetilde{M})$ için

$$[kX_1 + tY_1, Z_1] = k[X_1, Z_1] + t[Y_1, Z_1]$$

ii) Anti-simetrik yani her $X_1, Y_1 \in \Gamma(T\widetilde{M})$ için

$$[X_1, Y_1] = -[Y_1, X_1]$$

iii) Her X_1, Y_1 ve $Z_1 \in \Gamma(T\widetilde{M})$ olacak şekilde

$$\big[[X_1, Y_1], Z_1\big] + \big[[Z_1, X_1], Y_1\big] + \big[[Y_1, Z_1], X_1\big] = 0$$

şartları sağlanıyorsa $[\,,]$ fonksiyonuna $\widetilde{M}$ manifoldu üzerindeki bir *Lie operatörü* denir (Boothby, 1986).

Lie operatörü dönüşümü, $\widetilde{M}$ diferansiyellenebilir manifoldu üzerindeki vektör alanlarının cümlesi $\chi(\widetilde{M})$ olsun. Her $X_1, Y_1 \in \chi(\widetilde{M})$ ve $f \in C^\infty(\widetilde{M}, \mathbb{R})$ fonksiyonu için,

$$[\,,]: \chi(\widetilde{M}) \times \chi(\widetilde{M}) \to \chi(\widetilde{M})$$
$$(X_1, Y_1) \to [X_1, Y_1]$$
$$[X_1, Y_1](f) = X_1\big(Y_1(f)\big) - Y_1(X_1(f)) \tag{2.1.1}$$

biçiminde tanımlanır. Burada $X_1(f)$, f fonksiyonunun X_1 vektör alanının yöne göre türevidir.

$\widetilde{M}$ herhangi bir diferansiyellenebilir manifold ve her $X_1, Y_1 \in \chi(\widetilde{M})$ olmak üzere $f, g \in C^\infty(\widetilde{M}, \mathbb{R})$ iki fonksiyon ve $\lambda \in \mathbb{R}$ reel sayısı için Lie operatörü,

i) $[X_1, Y_1](f + g) = [X_1, Y_1](f) + [X_1, Y_1](g)$

ii) $[X_1, Y_1](\lambda f) = \lambda[X_1, Y_1](f)$

iii) $[X_1, Y_1](fg) = g[X_1, Y_1](f) + f[X_1, Y_1](g)$

eşitliklerini sağlar (Lotta, 1998).

2.1.1. Teorem $\widetilde{M}$ diferansiyellenebilir manifold olması durumunda her $X_1, Y_1 \in \chi(\widetilde{M})$ ile $f, g \in C^\infty(\widetilde{M}, \mathbb{R})$ için,

$$[fX_1, gY_1] = (fg)[X_1, Y_1] + fX_1 g(Y_1) - gY_1(f)X_1 \tag{2.1.2}$$

eşitliği vardır (Yano ve Kon 1984).

2.1.14. Tanım $\widetilde{M}$ ile $\widetilde{N}$ sırasıyla m ile $n-$boyutlu diferansiyellenebilir manifoldlar ve $f: \widetilde{M} \to \widetilde{N}$ fonksiyonu p noktasındaki diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere,

$$f_*: T_{\widetilde{M}}(p) \to T_{\widetilde{N}}\big(f(p)\big)$$
$$V_p \to f_*|_p\big(V_p\big) = \left(\overrightarrow{V}_p[f_1]|_{f(p)}, \dots, \overrightarrow{V}_p[f_n]|_{f(p)}\right)$$

biçiminde tanımlı f_* operatörüne f fonksiyonunun türev operatörü denir. Şayet $g \in C^\infty(\widetilde{M}, \mathbb{R}), f(p)$'nin komşuluğunda diferansiyellenebilir bir fonksiyonsa

$$\Big(f_*\big(V_p\big)\Big)\, g = V_p(gof)$$

biçiminde verilir *(Fidan 2019).*

2.1.2. Teorem $\widetilde{M}$ ile $\widetilde{N}$ diferansiyellenebilir iki manifold ve $f\colon \widetilde{M} \to \widetilde{N}$ diferansiyellenebilir bir dönüşüm olsun. O zaman f_* türev dönüşümü lineerdir. Bu dönüşüm $\widetilde{M}$ manifoldunda seçilen eğriden bağımsızdır (Yano ve Kon 1984).

2.1.15. Tanım $\widetilde{M}$ herhangi bir diferansiyellenebilir manifold ve $\widetilde{M}$ üzerindeki C^∞ vektör alanlarının cümlesi $\chi(\widetilde{M})$ olsun. $\widetilde{M}$ manifoldundan $\mathbb{R}$'ye C^∞ fonksiyonlarının cümlesi $C^\infty(\widetilde{M}, \mathbb{R})$ olması durumda her $X_1, Y_1, Z_1 \in \chi(\widetilde{M})$ ile $k, t \in \mathbb{R}$ için,

$$g\colon \chi(\widetilde{M}) \times \chi(\widetilde{M}) \to C^\infty(\widetilde{M}, \mathbb{R})$$

dönüşümü,

i) Simetrik,

$$g(Y_1, X_1) = g(X_1, Y_1)$$

ii) Pozitif tanımlılık

$$X_1 \neq 0 \text{ için } g(X_1, X_1) > 0 \text{ ve } g(X_1, X_1) = 0 \Leftrightarrow X_1 = 0,$$

iii) Bilineer;

$$g(kX_1 + tY_1, Z_1) = kg(X_1, Z_1) + tg(Y_1, Z_1),$$

eşitliklerini sağlıyorsa g fonksiyonuna $\widetilde{M}$ manifoldu üzerinde (2, 0) *mertebeli metrik tensör* veya bir *Riemann metriği* ve ($\widetilde{M}$,g)'ye de bir *Riemann manifoldu* denir (O'Neill 1983).

2.1.16. Tanım $\widetilde{M}$ herhangi bir diferansiyellenebilir manifold ve $\widetilde{M}$ manifoldu üzerindeki C^∞ vektör alanlarının cümlesi $\chi(\widetilde{M})$ olmak üzere,

$$\widetilde{\nabla}\colon \chi(\widetilde{M}) \times \chi(\widetilde{M}) \xrightarrow{2-lineer} \chi(\widetilde{M})$$
$$(X_1, Y_1) \to \widetilde{\nabla}(X_1, Y_1) = \widetilde{\nabla}_{X_1} Y_1$$

dönüşümü her $X_1, Y_1, Z_1 \in \chi(\widetilde{M})$ ile $f \; ve \; g \in C^\infty(\widetilde{M}, \mathbb{R})$ için, *i)* $\tilde{\nabla}_{X_1}(Y_1 + Z_1) = \tilde{\nabla}_{X_1}Y_1 + \tilde{\nabla}_{X_1}Z_1$

ii) $\tilde{\nabla}_{fX_1+gY_1}Z_1 = f\tilde{\nabla}_{X_1}Z_1 + g\tilde{\nabla}_{Y_1}Z_1$

iii) $\tilde{\nabla}_{X_1}(fY_1) = f\tilde{\nabla}_{X_1}Y_1 + X_1(f)Y_1$

eşitlikleri sağlıyorsa $\tilde{\nabla}$'ya $\tilde{M}$'da bir *afin konneksiyon* ve $\tilde{\nabla}_{X_1}$'e de X_1'e göre *kovaryant türev operatörü* adı verilir (Yano ve Kon, 1979).

2.1.17. Tanım $\tilde{M}$ n −boyutlu bir manifold olmak üzere $\tilde{M}$ manifoldu üzerindeki konneksiyon da $\tilde{\nabla}$ olsun. Bu durumda

$$T: \chi(\tilde{M}) \times \chi(\tilde{M}) \to \chi(\tilde{M})$$
$$(X_1, Y_1) \to T(X_1, Y_1) = \tilde{\nabla}_{X_1}Y_1 - \tilde{\nabla}_{Y_1}X_1 - [X_1, Y_1]$$

şeklinde tanımlanan vektör değerindeki tensöre $\tilde{M}$ manifoldunda tanımlı $\tilde{\nabla}$ konneksiyonunun *torsiyon tensörü* adı verilir. Torsiyon tensörünün anti-simetrik olduğu kolayca görülebilir.

2.1.18. Tanım Bir Riemann manifoldu $(\tilde{M}, g)$ ve $\tilde{\nabla}$'da $\tilde{M}$ manifoldu üzerinde tanımlanan herhangi bir afin konneksiyon olsun. Bu durumda her $X_1, Y_1, Z_1 \in \chi(\tilde{M})$ olmak şartıyla $\tilde{\nabla}$ dönüşümü

i) $\tilde{\nabla}_{X_1}Y_1 - \tilde{\nabla}_{Y_1}X_1 = [X_1, Y_1]$ (Konneksiyonun sıfır torsiyon eşitliği)

ii) $X_1 g(Y_1, Z_1) = g(\tilde{\nabla}_{X_1}Y_1, Z_1) + g(Y_1, \tilde{\nabla}_{X_1}Z_1)$ (Konneksiyonun metrikle bağdaşma kuralı)

özelliklerini sağlıyorsa, $\tilde{\nabla}$ konneksiyonuna $\tilde{M}$ manifoldunda *Riemann konneksiyonu* yani *sıfır torsiyonlu konneksiyon* ya da *Levi-Civita konneksiyonu* adı verilir (Yano ve Kon, 1979).

n –boyutlu Riemann manifoldu $(\tilde{M}, g)$ ve $\tilde{\nabla}$ konneksiyonu $\tilde{M}$ manifoldunda tanımlı Levi-Civita konneksiyonu olsun. Her $X_1, Y_1, Z_1 \in \chi(\tilde{M})$ için,

$$2g\left(\widetilde{\nabla}_{X_1}Y_1, Z_1\right) = X_1 g(Y_1, Z_1) + Y_1 g(Z_1, X_1) - Z_1 g(X_1, Y_1)$$
$$-g(X_1, [Y_1, Z_1]) - g(Y, [X_1, Z_1]) + g(Z_1, [X_1, Y_1]) \qquad (2.1.3)$$

ile verilen eşitliğe *Kozsul formülü* denir.

2.1.19. Tanım $(\widetilde{M}, g$ bir Riemann manifoldu olsun. $\chi(\widetilde{M})'$nin elemanı X_1 için L_{X_1} operatörü, keyfi (r, s) tipinden bir tensör alanını tekrar (r, s) tipinden bir tensör alanına dönüştütüyorsa, X_1 vektör alanı cinsinden *Lie türev operatörü* denir.

$$(L_{X_1}\phi)(X_1, \dots, X_r, Y_1, \dots, Y_s) = X_1\phi(X_1, \dots, X_r, Y_1, \dots, Y_s)$$
$$-\phi\left(L_{X_1}X_1, \dots, X_r, Y_1, \dots, Y_s\right) - \phi\left(X_1, \dots, X_r, Y_1, \dots, L_{X_1}Y_s\right)$$

şeklinde gösterilir. Özel olarak $Y_1 \in \chi(\widetilde{M})$ olmak üzere,

$$L_{X_1}Y_1 = [X_1, Y_1]$$

biçiminde tanımlıdır. Ayrıca $f \in C(\widetilde{M}, \mathbb{R})$ için, $L_{X_1}f = X_1(f)$ şeklindedir. Her $X_1, Y_1, Z_1 \in \chi(\widetilde{M})$ olmak üzere g Riemann metrik tensörünün X_1 vektör alanı cinsinden Lie- türev operatörü de,

$$\begin{aligned}(L_{X_1}g)(Y_1, Z_1) &= L_{X_1}g(Y_1, Z_1) - g\left(L_{X_1}Y_1, Z_1\right) - g(Y_1, L_{X_1}Z_1)\\
&= X_1\left(g(Y_1, Z_1)\right) - g([X_1, Y_1], Z_1) - g(Y_1, [X_1, Z_1])\\
&= g\left(\nabla_{X_1}Y_1, Z_1\right) + g\left(Y_1, \nabla_{X_1}Z_1\right) - g\left(\nabla_{X_1}Y_1, Z_1\right)\\
&\quad + g\left(\nabla_{Y_1}X_1, Z_1\right) - g\left(Y_1, \nabla_{X_1}Z_1\right) + g\left(Y_1, \nabla_{Z_1}X_1\right)\\
&= g\left(\nabla_{Y_1}X_1, Z_1\right) + g\left(Y_1, \nabla_{Z_1}X_1\right)\end{aligned}$$

biçiminde tanımlanır. Şayet $L_{X_1}g = 0$ oluyorsa X_1 vektör alanına bu durumda *Killing vektör alanı* adı verilir (Chen, 1973; Uygun, 2019).

2.1.20. Tanım $(\widetilde{M}, g)$ Bir Riemann manifoldu olsun. $\widetilde{M}$ manifoldu üzerinde tanımlanan her bir diferensiyel r-forma bir diferensiyel $(r+1)$-form karşılık getiren diferensiyel operatöre *dış türev operatörü* denir ve d şeklinde gösterilir. Şayet ω bir $r-$form ise, $X_0,\ X_1,\dots,X_r \in \chi(\widetilde{M})$ için,

$$d\omega(X_0,\ X_1,\dots,X_r) = \frac{1}{r+1}\{\sum_{i=1}^{r}(-1)^i X_i(\omega(X_0,\dots,X_{i-1},X_i,\dots,X_r)$$

$$+\frac{1}{r+1}\sum_{i,j=0}^{r}(-1)^{i+j}\omega\big([X_i,X_j],X_0,\dots,X_{i-1},X_i,\dots,X_r\big)\}$$

,

biçiminde tanımlanır. Özel olarak 1−form ile 2−formun dış türev operatörü $X_1,Y_1,Z_1 \in \chi(\widetilde{M})$ için,

$$2d\omega(X_1,Y_1) = X_1(\omega(Y_1)) - Y_1\big(\omega(X_1)\big) - \omega([X_1,Y_1]) \qquad (2.1.4)$$

ve

$$3d\phi(X_1,Y_1,Z_1) = X_1\big(\phi(Y_1,Z_1)\big) + Y_1\big(\phi(Z_1,X_1)\big) + Z_1(\phi(X_1,Y_1)$$
$$-\phi([X_1,Y_1],Z_1) - \phi([Y_1,Z_1],X_1) - \phi([Z_1,X_1],Y_1) \qquad (2.1.5)$$

biçiminde tanımlanır (Yano ve Kon 1984).

2.1.21. Tanım $(\widetilde{M},g)$ bir Riemann manifold ve $\widetilde{\nabla}$ konneksiyonu da $\widetilde{M}$ manifoldu üzerinde Levi-Civita konneksiyonu olsun. Her $X_1,Y_1,Z_1 \in \chi(\widetilde{M})$ için

$$\widetilde{\mathrm{R}}: \chi(\widetilde{M}) \times \chi(\widetilde{M}) \times \chi(\widetilde{M}) \to \chi(\widetilde{M})$$
$$(X_1,Y_1,Z_1) \to \tilde{R}(X_1,Y_1)Z_1$$

olmak üzere

$$\tilde{R}(X_1,Y_1)Z_1 = \widetilde{\nabla}_{X_1}\widetilde{\nabla}_{Y_1}Z_1 - \widetilde{\nabla}_{Y_1}\widetilde{\nabla}_{X_1}Z_1 - \widetilde{\nabla}_{[X_1,Y_1]}Z_1 \qquad (2.1.6)$$

olarak tanımlanan $\tilde{R}$ fonksiyonu $\widetilde{M}$ manifoldunda $(3,1)-$ tipinde bir tensör alanıdır. $(3,1)-$ tipindeki bu tensör alanına $\widetilde{M}$ manifoldunun *Riemann eğrilik tensörü* denir. Ayrıca $X_1, Y_1, Z_1, W_1 \in \chi(\widetilde{M})$ olmak üzere $\widetilde{K}(X_1, Y_1, Z_1, W_1) = g\big(\tilde{R}(X_1, Y_1)\, Z_1, W_1\big)$ biçiminde tanımlanan $\widetilde{K}$ tensörüne, $\widetilde{M}$ manifoldunun *Riemann-Christoffel eğrilik tensörü* denir. Riemann eğrilik tensörü sıfıra eşit olan manifolda *flat manifold* adı verilir. $(\widetilde{M}, g)$ Riemann manifoldunun üzerindeki konneksiyon $\widetilde{\nabla}$ olsun. Şayet $\widetilde{\nabla}\tilde{R} = 0$ oluyorsa $\widetilde{M}$ manifolduna *lokal simetrik manifold* adı verilir. Bu durumda $X_1, Y_1, Z_1, W_1 \in \chi(\widetilde{M})$ için Riemann eğrilik tensörü $\tilde{R}$,

i) $\tilde{R}(X_1, Y_1)Z_1 = -\tilde{R}(Y_1, X_1)Z_1$

ii) $g\big(\tilde{R}(X_1, Y_1)Z_1, W_1\big) = -g\big(\tilde{R}(X_1, Y_1)W_1, Z_1\big)$

iii) $\tilde{R}(X_1, Y_1)Z_1 + \tilde{R}(Y_1, Z_1)X_1 + \tilde{R}(Z_1, X_1)Y_1 = 0$ (I. Bihanchi özdeşliği)

iv) $g\big(\tilde{R}(X_1, Y_1)Z_1, W_1\big) = g\big(\tilde{R}(Z_1, W_1)X_1, Y_1\big)$

özelliklerini sağlar (O'Neill 1983).

2.1.22. Tanım Bir *n*−boyutlu Riemann manifold $(\widetilde{M}, g)$, ve $\chi(\widetilde{M})$'in bir bazı $\{e_1,\ e_2, \dots, e_n\}$ lokal ortonormal vektör alanları olsun.

$$Q: \Gamma(T\widetilde{M}) \to \Gamma(T\widetilde{M})$$
$$X_1 \to Q(X_1) = QX_1 = \textstyle\sum_{i=1}^{n} \tilde{R}(X_1, e_i)e_i \qquad (2.1.7)$$

eşitliği ile verilen Q operatörüne $\widetilde{M}$ manifoldunun *Ricci operatörü* denir (Khan ve Arkadaşları 2011).

$(\widetilde{M}, g), n-$boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. $\tilde{R}$ da $\widetilde{M}$ Riemann manifoldunun Riemann eğrilik tensörü olsun. Bu durumda $\{e_1,\ e_2, \dots, e_n\}$ cümlesi $\chi(\widetilde{M})$ vektör alanının ortonormal vektör alanları olacak şekilde her $X_1, Y_1 \in \chi(\widetilde{M})$ için,

$$S: \chi(\widetilde{M}) \times \chi(\widetilde{M}) \to C^{\infty}(\widetilde{M}, \mathbb{R})$$
$$(X_1, Y_1) \to S(X_1, Y_1) = \textstyle\sum_{i=1}^{n} g(\tilde{R}(Y_1, e_i)e_i\, , X_1) \qquad (2.1.8)$$

biçiminde tanımlı $(2,0)$ $-$tipindeki bu tensöre $\widetilde{M}$ manifoldunun *Ricci tensörü* denir. Burada Ricci tensörünün simetrik olduğu kolayca görülebilir. Ayrıca $\widetilde{M}$ manifoldunun Ricci operatörü Q olmak kaydıyla,

$$S(X_1, Y_1) = g(QX_1, Y_1) \tag{2.1.9}$$

şeklinde tanımlanabilir (Yano ve Kon 1984).

n $-$boyutlu $(\widetilde{M}, g)$ manifoldu bir Riemann manifoldu ve lokal ortonormal vektör alanları da $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ olsun. O zaman

$$\rho = \sum_{i=1}^{n} S(e_i, e_i) \tag{2.1.10}$$

eşitliğine $\widetilde{M}$ manifoldunun *skaler eğrilik fonksiyonu* denir (Yano ve Kon 1984).

Öte yandan bir $(\widetilde{M}, g)$, Riemann manifoldunun X_1 yönündeki Ricci eğriliği,

$$k(X_1) = \frac{S(X_1, X_1)}{g(X_1, X_1)} \tag{2.1.11}$$

eşitliği ile tanımlanır.

$(\widetilde{M}, g)$ n $-$boyutlu bir Riemann manifold olsun. Her $X_1, Y_1 \in \chi(\widetilde{M})$ için,

$$S(X_1, Y_1) = \lambda g(X_1, Y_1) \tag{2.1.12}$$

olacak şekilde bir λ fonksiyonu $\widetilde{M}$ manifoldu üzerinde varsa, yani $\widetilde{M}$ manifoldunun S Ricci tensörü, g metrik tensörünün bir katı oluyorsa $\widetilde{M}$'ye *Einstein manifoldu* denir. Burada ortonormal baz olarak $X_1 = Y_1 = e_i,\ 1 \leq i \leq n$ alınırsa $\lambda = \frac{\rho}{n}$ olduğu görülür.

$(\widetilde{M}, g)$ $n-$boyutlu bir Riemann manifold olsun. Şayet S Ricci tensörü olacak şekilde $X_1, Y_1 \in \chi(\widetilde{M})$ olmak üzere,

$$S(X_1, Y_1) = ag(X_1, Y_1) + b\eta(X_1)\eta(Y_1) \tag{2.1.13}$$

eşitliği sağlanıyorsa $\widetilde{M}$'ye η *−Einstein manifoldu* denir. Bu eşitlikteki a ile b, $\widetilde{M}$ manifoldu üzerinde birer fonksiyon ve η da $1-$ *formdur* (Yano ve Kon, 1979).

2.1.23. Tanım $(\widetilde{M}, g)$ bir Riemann manifoldu ve Π de $T_{\widetilde{M}}(p)$ tanjant uzayında iki boyutlu alt uzay olsun. Π de alınan X_1, Y_1 tanjant vektörleri için,

$$g(X_1, X_1)g(Y_1, Y_1) - g(X_1, Y_1)^2 \neq 0$$

olmak üzere

$$K(X_1 \wedge Y_1) = \frac{g(R(X_1, Y_1)Y_1, X_1)}{g(X_1, X_1)g(Y_1, Y_1) - g(X_1, Y_1)^2} \tag{2.1.14}$$

eşitliğiyle tanımlanan $K(X_1 \wedge Y_1)$'e *Π'nin kesit eğriliği* adı verilir ve bu $K(\Pi)$ şeklinde belirtilir. Kesit eğriliğinin, $T_{\widetilde{M}}(p)$ tanjant uzayının iki boyutlu alt uzayı Π'nin bazlarından bağısızdır.

X_{1_p}, $Y_{1_p} \in T_{\widetilde{M}}(p)$ ve her $p \in \widetilde{M}$ için $K(X_{1_p}, Y_{1_p})$ sabit oluyorsa $\widetilde{M}$ manifolduna *reel uzay form* veya c *−sabit kesit eğrilikli uzay* denir. $n-$boyutlu bir $\widetilde{M}$ manifoldunun uzay formu $\widetilde{M}^n(c)$ sembolü ile belirtilir. Bu durumda $\widetilde{M}$ Riemann manifoldu $c-$ sabit eğrilikli reel uzay formsa; $\widetilde{M}$'nın Riemann eğrilik tensörü $\tilde{R}$, $\forall\, X_1, Y_1, Z_1, W_1 \in \chi(\widetilde{M})$ için

$$g\big(\tilde{R}(X_1, Y_1)Z_1, W_1\big) = c\{g(Y_1, Z_1)g(X_1, W_1) - g(X_1, Z_1)g(Y_1, W_1)\} \tag{2.1.15}$$

biçimindedir. Eğer

i- $c = 0$ oluyorsa $\widetilde{M}^n(c) \approx E^n$ öklit uzayıdır.

ii- $c = \frac{1}{r^2}$ oluyorsa $\widetilde{M}^n(c) \approxeq S^n(r)$ küresidir.

iii- $c = -\frac{1}{r^2}$ oluyorsa $\widetilde{M}^n(c) \approxeq H^n(r)$ Hiperbolik uzayıdır.

Burada, eğer sabit eğrilikli bir Riemann manifoldun eğriliği sıfırdan büyükse eliptik, sıfırdan küçükse hiperbolik ve sıfıra eşitse düzlemsel (flat) yada lokal öklidyen manifold olarak adlandırılır. Böylece Riemann eğrilik tensörü sıfıra eşit olan manifoldlara flat manifoldlar denir.

2.2 Altmanifoldlar

2.2.1. Tanım $\widetilde{M}$ ile M sırasıyla n ve m boyutlu birer Riemann manifoldu olsun.

$$f: M \to \widetilde{M}$$

diferansiyellenebilir dönüşümü için, $boy\big(f_*(T_M(p))\big) = q$ ise bu durumda f'nin $p \in M$ noktasındaki rankı q'dur denir. f'nin $p \in M$ noktasındaki rankı da $rank_p(f) = q$ şeklinde belirtilir.

Şayet $boy(M) = rank(f)$ oluyorsa f fonksiyonuna *daldırma (immersiyon)* denir. O zaman $f(M)'$ye de $\widetilde{M}$ manifoldunun *gömülmüş (immersed)* altmanifoldu adı verilir. f daldırması bire-bir oluyorsa f fonksiyonuna *gömme (imbeding)* denir. Bu durumda M'ye de $\widetilde{M}$ manifoldunun gömülen altmanifoldu veya sadece *altmanifoldu* olarak adlandırılır (Fidan 2019).

2.2.2. Tanım $(\widetilde{M}, g)$ ile (M, g) sırasıyla n ile m boyutlu birer Riemann manifold, $f: M \to \widetilde{M}$ bir daldırma olsun. Her $X_1, Y_1 \in T_M(p)$ için,

$$\tilde{g}(f_{*p}X_1, f_{*P}Y_1) = g(X_1, Y_1)$$

oluyorsa f'ye *metrik koruyan immersiyon (izometrik immersiyon)* denir (Chen, 1973).

2.2.3. Tanım m −boyutlu bir $\widetilde{M}$ manifoldunun bir p noktasındaki tanjant vektör uzayı $T_{\widetilde{M}}(p)$ olsun.

$$D: \widetilde{M} \to T_{\widetilde{M}}(p)$$
$$p \to D_p \subset T_{\widetilde{M}}(p)$$

ile tanımlanan D dönüşümüne bir distribüsyon adı verilir. Yani, $\widetilde{M}$ manifoldu üzerindeki bir r −boyutlu D distribüsyonu, her $p \in \widetilde{M}$ noktasını r −boyutlu altuzaya götürür. Her $X_1 \in \chi(\widetilde{M})$ vektör alanı için, p $\widetilde{M}$ nın elemanı olmak üzere $X_{1_p} \in D_p$,ifadesi X_1 vektör alanının D distribüsyonuna ait olduğunu gösterir. Eğer $\widetilde{M}$'nın her p noktası için D distribüsyonunun r tane diferansiyellenebilir lineer bağımsız vektörü varsa D distribüsyonuna *diferansiyellenebilir distribüsyon* denir (Duggal ve Bejancu, 1996).

2.2.4. Tanım Bir $\widetilde{M}$ C^∞ manifoldunun alt manifoldu M olmak üzere, D distribüsyonu M manifoldu üzerinde q −boyutlu bir C^∞ distribüsyon olsun. Eğer M manifoldunun her p noktasındaki tanjant uzayıyla D_p aynı oluyorsa M manifolduna D'nin integral manifoldu denir. Bu halde,

$$f: M \to \widetilde{M}$$

bir gömme (imbedding) olacak şekilde her $p \in M$ için,

$$f_*(T_M(p)) = D_p$$

dir. Şayet M manifoldundan başka D distribüsyonunu kapsayan bir integral manifoldu yoksa M manifoldu D distribüsyonunun *bir maksimal integral manifoldu* olarak adlandırılır.

$\widetilde{M}$ diferansiyellenebilir manifoldunun bir alt manifoldu M olmak üzere her $p \in M$ için D nin p noktasını içeren bir maksimal integral manifoldu mevcutsa *D integrallenebilirdir* denir (Duggal ve Bejancu, 1996).

$\widetilde{M}$ manifoldunun lineer konneksiyonu $\widetilde{\nabla}$ olmak üzere $X_1, Y_1 \in \Gamma(D)$ için $\widetilde{\nabla}_{X_1} Y_1 \in \Gamma(D)$ oluyorsa *D paralel distribüsyondur* denir.

D, n −boyutlu bir $\widetilde{M}$ Riemann manifoldu üzerindeki distribüsyon olmak üzere $[X_1, Y_1] \in \Gamma(D)$ olacak şekilde $X_1, Y_1 \in \Gamma(D)$ vektör alanları varsa D'ye involutive distribüsyon adı verilir. M manifoldu üzerindeki bir distribüsyon integrallenebilmesi için gerekli ve yeterli şart D'nin involutive olmasıdır (Duggal ve Bejancu, 1996).

2.2.5. Tanım Bir Riemann manifoldu $(\widetilde{M}, \tilde{g})$ ve $\widetilde{M}$ manifoldunun bir altmanifoldu da M olsun. M nin her p noktası için,

$$T^{\perp}M = \{V_p \in T_{\widetilde{M}}(p) : \tilde{g}\left(X_{1_p}, V_p\right) = 0,\ \forall X_{1_p} \in T_M(p)\}$$

biçiminde tanımlanan altuzaya $\widetilde{M}$ manifoldunun *normal uzayı* denir. V_p vektörüne M manifoldunun normal vektörü, V_p vektörünün birim vektör olması durumunda V_p'ye M manifoldunun *birim normal vektörü* adı verilir. M manifoldunun her normal vektörünü içeren $T^{\perp}M$ uzayına da M manifoldunun *normal demeti* denir.

2.2.1.Not Bir Riemann manifoldu $\widetilde{M}$'nın altmanifoldu M olsun. Bu durumda M altmanifoldunun tanjant demeti TM ve tüm normal vektörlerinin vektör demeti de $T^{\perp}M$ ile gösterilsin. O zaman, $\widetilde{M}$ nın tanjant demeti

$$T\widetilde{M} = TM \oplus T^{\perp}M$$

biçiminde yazılabilir.

2.2.6. Tanım $(\widetilde{M}, \tilde{g})$ bir Riemann manifoldu ve M de $\widetilde{M}$ nın altmanifoldu olsun. $\widetilde{M}$ ve M üzerindeki Riemann konneksiyonlar sırasıyla $\widetilde{\nabla}$ ile ∇ olmak üzere her $X_1, Y_1 \in \chi(M)$ için,

$$\sigma: \chi(M) \times \chi(M) \to \chi^{\perp}(M)$$
$$(X_1, Y_1) \to \sigma(X_1, Y_1) = \widetilde{\nabla}_{X_1} Y_1 - \nabla_{X_1} Y_1$$

biçiminde tanımlı simetrik σ bilineer formuna M nin *ikinci temel formu* adı verilir. Şayet σ= 0 oluyorsa M ye *total geodezik altmanifold* denir.

$$\widetilde{\nabla}_{X_1}Y_1 = \nabla_{X_1}Y_1 + \sigma(X_1, Y_1) \tag{2.2.1}$$

şeklinde verilen formüle de *Gauss formülü* adı verilir. Burada $\widetilde{\nabla}_{X_1}Y_1$ in teğet ve normal bileşenleri sırasıyla $\nabla_{X_1}Y_1$ ve $\sigma(X_1, Y_1)$'dir. M'nin ikinci temel formu σ'nin kovaryant türevi ∇σ'ı da her $X_1, Y_1, Z_1 \in \chi(M)$ için,

$$(\nabla_{X_1}\sigma)(Y_1, Z_1) = \nabla^{\perp}{}_{X_1}\sigma(Y_1, Z_1) - \sigma(\nabla_{X_1}Y_1, Z_1) - \sigma(Y_1, \nabla_{X_1}Z_1) \tag{2.2.2}$$

şeklinde tanımlarız. σ'nun kovaryant türevi $\nabla\sigma$'a M'nin *üçüncü temel formu* denir (Chen, 1973).

n −boyutlu Riemann manifoldu $(\widetilde{M}, \tilde{g})$'nin bir altmanifoldu M ve $p \in M$ noktası için, $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ $T_M(p)$'nin lokal otonormal bazı olsun. O zaman M'nin ikinci temel formu σ'nin normu

$$\|\sigma\|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g\left(\sigma(e_i, e_j), \sigma(e_i, e_j)\right) \tag{2.2.3}$$

şeklinde tanımlıdır.

2.2.7. Tanım n −boyutlu Riemann manifoldu $\widetilde{M}$'nın bir altmanifoldu M olsun. σ, M manifoldunun ikinci temel formu olacak şekilde M üzerindeki bir p noktası için $T_M(p)$'nin $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ lokal ortonormal bazını ele alalım.

$$H = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \sigma(e_i, e_i) \tag{2.2.4}$$

şeklinde tanımlı vektöre M'nin *ortalama eğrilik vektörü* adı verilir. Şayet ortalama eğrilik vektörü sıfır oluyorsa M'ye *minimal altmanifold* adı verilir (Pandey ve Gupta, 2008).

2.2.8. Tanım $n-$boyutlu Riemann manifoldu $\widetilde{M}$'nın bir altmanifoldu M ve σ, M manifoldunun ikinci temel formu, H da ortalama eğrilik vektörü olsun. Her $X_1, Y_1 \in \chi(M)$ için,

$$\sigma(X_1, Y_1) = g(X_1, Y_1)H \tag{2.2.5}$$

oluyorsa M'ye $\widetilde{M}$'nin *total umbilik altmanifoldu* denir. Şayet

$$g(\sigma(X_1, Y_1), H) = \lambda g(X_1, Y_1), \ \ \lambda \in C(M, \mathbb{R}) \tag{2.2.6}$$

eşitliği sağlanıyorsa M'ye $\widetilde{M}$'nin *pseudo-umbilik altmanifoldu* denir. Her total umbilik altmanifold pseudo-umbilik altmanifoldu olduğu kolayca görülebilir. Ancak tersi doğru değildir (Pandey ve Gupta, 2008).

2.2.9. Tanım $n-$boyutlu Riemann manifoldu $\widetilde{M}$'nın bir altmanifoldu M ve $\nabla^{\perp}$ de M'nin normal demetindeki konneksiyon olsun. Her $X_1 \in \chi(M)$ ile $V \in \chi^{\perp}(M)$ için,

$$A: \chi^{\perp}(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$$
$$(V, X_1) \to A(V, X_1) = A_V X_1 = \nabla^{\perp}{}_{X_1} V - \widetilde{\nabla}_{X_1} V$$

ile tanımlanan bilineer dönüşüme M'nin *şekil operatörü* adı verilir (Chen, 1973).

$$\widetilde{\nabla}_{X_1} V = -A_V X_1 + \nabla^{\perp}{}_{X_1} V \tag{2.2.7}$$

formülüne de *Weingarten formülü* adı verilir. M'nin şekil operatörü A_V'nin kovaryant türevi de,

$$(\nabla_{X_1} A)_V Y_1 = \nabla_{X_1} A_V Y_1 - A_{\nabla^{\perp}{}_{X_1} V} Y_1 - A_V \nabla_{X_1} Y_1 \tag{2.2.8}$$

şeklinde tanımlanır (Chen, 1973; Chen 1990).

Her $Y_1 \in \chi(M)$ ile $V \in \chi^{\perp}(M)$ için $g(Y_1, V) = 0$ eşitliğinin $X_1 \in \chi(M)$ ye göre kovaryant türev alınırsa,

$$X_1 g(Y_1, V) = g\left(\widetilde{\nabla}_{X_1} Y_1, V\right) + g\left(Y_1, \widetilde{\nabla}_{X_1} V\right) = 0 \qquad (2.2.9)$$

elde edilir. Burada Gauss ile Weingarten formülleri uygulanırsa

$$g\left(\nabla_{X_1} Y_1, V\right) + g(\sigma(X_1, Y_1), V) - g(Y_1, A_V X_1) + g(Y_1, \nabla^{\perp}{}_{X_1} V) = 0$$

dır. Buradan gerekli sadeleştirmelerle

$$g(A_V Y_1, X_1) = g(\sigma(X_1, Y_1), V) \qquad (2.2.10)$$

eşitliği elde edilir. M'nin A_V şekil operatörü ile ikinci temel formu σ arasındaki bağlantıyı bu son eşitlik verir (Chen, 1973).

3- (κ , μ) KONTAK METRİK MANİFOLDLAR

3.1 Hemen Hemen Kontak Metrik Manifoldlar

3.1.1. Tanım Diferansiyellenebilir bir $\widetilde{M}$ manifoldunun her p noktası için $J^2 = -I$ olacak şekilde $T_{\widetilde{M}}(p)$ tanjant vektör uzayının bir J lineer dönüşümünün olması durumunda J tensör alanına $\widetilde{M}$ manifoldu üzerinde bir hemen hemen kompleks yapı adı verilir. Bir J hemen hemen kompleks yapısıyla belirtilen manifolda da bir hemen hemen kompleks manifold adı verilir.

Diferansiyellenebilir bir $\widetilde{M}$ manifoldu üzerinde $(1,1)$ $-$tipinden tensör alanı J olsun. O zaman her $X_1, Y_1 \in \chi(\widetilde{M})$ için,

$$
\begin{aligned}
N_J(X_1, Y_1) &= J^2[X_1, Y_1] + [JX_1, JY_1] - J[JX_1, Y_1] - J[X_1, JY_1] \\
&= -[X_1, Y_1] + [JX_1, JY_1] - J[JX_1, Y_1] - J[X_1, JY_1]
\end{aligned}
$$

biçiminde tanımlı N_J tensör alanına J hemen hemen kompleks yapısının Nijenhuis tensörü denir (Atçeken ve Arkadaşları 2015).

3.1.2. Tanım Bir hemen hemen kompleks manifold $(\widetilde{M}, J)$'nin Nijenhuis tensörü sıfır oluyorsa yani $\mathrm{N}_J = 0$ ise $\widetilde{M}$ manifolduna bir *kompleks manifold* adı verilir (Yano ve Kon, 1984; Yano ve Kon, 1979).

$\widetilde{M}$ manifoldu üzerinde her $X_1, Y_1 \in \chi(\widetilde{M})$ için,

$$g(JX_1, JY_1) = g(X_1, Y_1)$$

oluyorsa bu duruda g Riemann metriği Hermitian metrik olarak adlandırılır. O halde Hermitian metriği ile verilen hemen hemen kompleks manifolda *hemen hemen Hermitian manifold* denir. Ayrıca, Hermitian metriği ile verilen kompleks manifolda da *Hermitian manifold* denir (Yano ve Kon 1984).

$\widetilde{M}$ hemen hemen Hermitian manifold olmak üzere hemen hemen Hermitian yapısının *temel* 2 *−formu*, aşağıdaki Φ dönüşümü ile verilir.

$$\Phi(X_1, Y_1) = g(X_1, JY_1)$$

$\widetilde{M}$ hemen hemen Kompleks manifold olmak üzere eğer temel 2-formun türevi sıfır, yani ($d\Phi = 0$) oluyorsa o zaman $\widetilde{M}$ manifoldundaki g Hermitian metriği, Kaehlerian metrik olarak adlandırılır. $\widetilde{M}$ kompleks manifoldu Kaehlerian metriğine sahip ise o zaman manifolda *Kaehlerian manifold* denir (Yano ve Kon, 1979).

3.1.3. Tanım $(2n+1)$ −boyutlu diferansiyellenebilir bir manifold $\widetilde{M}$ olsun. φ, $\widetilde{M}$ üzerinde birinci mertebeden kovaryant ve birinci mertebeden kontravaryant yani $(1,1)$ −tipinden bir tensör, ξ bir vektör alanı, η da ξ nin duali (1−form) olmak üzere her $X_1 \in \chi(\widetilde{M})$ için, aşağıdaki eşitlik sağlanıyorsa (φ, ξ, η) yapısına *hemen hemen kontak yapı* denir.

$$\varphi^2 X_1 = -X_1 + \eta(X_1)\xi, \quad \varphi\xi = 0, \quad \eta(\varphi X_1) = 0, \quad \eta(\xi) = 1. \qquad (3.1.1)$$

Hemen hemen kontak yapı ile verilen manifolda da *hemen hemen kontak manifold* denir (Koufogiorgos, 1997; Yano ve Kon 1984).

3.1.4. Tanım (φ, ξ, η) hemen hemen kontak yapısına sahip $(2n+1)$ −boyutlu $\widetilde{M}$ manifoldu, hemen hemen kontak manifold olsun. Bu durumda her $X_1, Y_1 \in \chi(\widetilde{M})$ için

$$g: \chi(\widetilde{M}) \times \chi(\widetilde{M}) \to \mathbb{R}$$

olmak üzere

$$\eta(X_1) = g(X_1, \xi) \qquad (3.1.2)$$

ve

$$g(\varphi X_1, \varphi Y_1) = g(X_1, Y_1) - \eta(X_1)\eta(Y_1) \qquad (3.1.3)$$

koşullarına sahip bir g Riemann metriği varsa $\widetilde{M}$ üzerinde (φ, ξ, η, g) yapısına hemen hemen kontak metrik yapı, bu yapıya sahip $\widetilde{M}$ manifolduna da *hemen hemen kontak metrik manifold* denir (Koufogiorgos, 1997).

3.1.1. Teorem $(2n + 1)-$boyutlu hemen hemen kontak metrik manifold $\widetilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$ olsun. O zaman manifold üzerinde aşağıdaki g Riemann metriği her $X_1, Y_1 \in \chi(\widetilde{M})$ için, daima vardır (Yano ve Kon, 1979).

$$g(\varphi X_1, \varphi Y_1) = g(X_1, Y_1) - \eta(X_1)\eta(Y_1) \tag{3.1.4}$$

3.1.1. *Sonuç* $(2n + 1)-$boyutlu $\widetilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen kontak metrik manifoldu verilmiş olsun. Her $X_1, Y_1 \in \chi(\widetilde{M})$ için $\varphi : \chi(\widetilde{M}) \to \chi(\widetilde{M})$ olmak üzere

$$g(\varphi X_1, Y_1) = -g(X_1, \varphi Y_1), \tag{3.1.5}$$

eşitliği vardır. Bu eşitlik bize φ nin g Riemann metriğine göre anti-simetrik bir tensör alanı olduğunu gösterir (Koufogiorgos, 1997).

3.1.5. Tanım $\widetilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$ $(2n + 1)-$boyutlu diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde, (φ, ξ, η, g) hemen hemen kontak metrik yapısı verilsin. Bu durumda her $X_1, Y_1 \in \chi(\widetilde{M})$ için,

$$\Phi(X_1, Y_1) = g(X_1, \varphi Y_1) \tag{3.1.6}$$

biçimindeki Φ dönüşümü hemen hemen kontak metrik yapının temel $2-$formu olarak adlandırılır. O zaman her $X_1, Y_1 \in \chi(\widetilde{M})$ için

$$\Phi(X_1, Y_1) = g(X_1, \varphi Y_1) = -g(Y_1, \varphi X_1) = -\Phi(Y_1, X_1)$$

dir. Bu da Φ temel $2-$formun anti-simetrik olduğunu gösterir (Yano ve Kon, 1979).

3.1.6. Tanım $\widetilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen kontak metrik manifold olsun. $\widetilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$ üzerinde tanımlı $(1,1)-$tipindeki φ tensör alanı için her $X_1, Y_1 \in \chi(\widetilde{M})$ olmak üzere

$$N_{\varphi}(X_1, Y_1) = \varphi^2[X_1, Y_1] + [\varphi X_1, \varphi Y_1] - \varphi[\varphi X_1, Y_1] - \varphi[X_1, \varphi Y_1]$$

biçiminde tanımlı $(1,2)$ $-$tipinden N_{φ} tensör alanı varsa bu tensör alanına manifoldun *Nijenhuis tensörü* denir.

3.1.7. Tanım $\widetilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen kontak metrik manifold olsun. Bu durumda $\widetilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g) \times \mathbb{R}$ üzerinde herhangi bir vektör alanı

$$\left(X_1, f\frac{d}{dt}\right)$$

biçiminde tanımlanır. Burada X_1, $\widetilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$ manifolduna teğet bir vektör alanı; t, $\mathbb{R}$ nin bir koordinatıdır. $\widetilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g) \times \mathbb{R}$ deki bir hemen hemen karmaşık yapı

$$J\left(X_1, f\frac{d}{dt}\right) = \left(\varphi X_1 - f\xi, \eta(X_1)\frac{d}{dt}\right)$$

biçiminde tanımlanır. Böylece gerekli işlemler yapılırsa

$$J^2\left(X_1, f\frac{d}{dt}\right) = -\left(X_1, f\frac{d}{dt}\right)$$

olduğu açıktır. Bu durumda J lineer dönüşümünün $\widetilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g) \times \mathbb{R}$ hemen hemen kompleks yapı olması, $J^2 = -\mathrm{I}$ olduğundan kaynaklanıyor (Yano ve Kon 1984).

3.1.8. Tanım $2n$ $-$boyutlu bir Hemen hemen kompleks manifold $\widetilde{M}$ olsun. Bu manifold üzerinde tanımlı J hemen hemen kompleks yapısının Nijenhuis tensörü $N_J = 0$ oluyorsa J dönüşümüne *integrallenebilirdir* adı verilir.

$(2n + 1)$ $-$boyutlu hemen hemen kontak metrik manifold $\widetilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$ ve Reel doğru $\mathbb{R}$ olmak üzere $\widetilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g) \times \mathbb{R}$'deki J ile verilen hemen hemen kompleks yapı integrallenebilirse (φ, ξ, η, g) hemen hemen kontak metrik yapısına *normaldir* denir (Yano ve Kon 1984).

3.1.9. Tanım $\widetilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g), (2n + 1)-$boyutlu hemen hemen kontak metrik manifold olsun. Şayet

$$N_{\varphi} + 2d\eta \otimes \xi = 0$$

oluyorsa $\widetilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$ manifolduna *normaldir* denir. Burada $d\eta$ dış türev operatörü her X_1, $Y_1 \in \chi(\widetilde{M})$ için,

$$2d\eta(X_1, Y_1) = X_1\, \eta(Y_1) - Y_1\eta(X_1) - \eta([X_1, Y_1])$$

ile tanımlıdır (Yano ve Kon 1984).

Bir $\widetilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$ kontak metrik manifoldunda L Lie türevi, h simetrik tensörü olmak üzere;

$$h : \chi(\widetilde{M}) \to \chi(\widetilde{M})$$
$$X_1 \to h(X_1) = \frac{1}{2}(L_{\xi}\varphi)X_1 = \frac{1}{2}\{L_{\xi}\varphi X_1 - \varphi L_{\xi}X_1\}$$

şeklinde tanımlı (1,1) tipinden h tensör alanı verilsin. O zaman h simetrik tensörü aşağıdaki eşitlikleri sağlar.

$$h\varphi = -\varphi h,\ h\xi = 0,\ iz(h) = iz(\varphi h) = 0, \tag{3.1.7}$$

$\widetilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$ kontak metrik manifoldunun Riemann eğrilik tensörü $\tilde{R}$ olmak üzere X_1, $Y_1 \in \chi(\widetilde{M})$ için,

$$\widetilde{R}(X_1, Y_1)\xi = \kappa\{\eta(Y_1)X_1 - \eta(X_1)Y_1\} + \mu\{\eta(Y_1)hX_1 - \eta(X_1)hY_1\}, \tag{3.1.8}$$

eşitliğini sağlanıyorsa manifolda (κ, μ) $-$kontak metrik manifold denir. Burada κ ve μ reel sabitlerdir. Ayrıca (3.1.8) de $\mu = 0$ ve $\kappa = 1$ olması durumunda manifolda Sasakian manifoldu adı verilir.

$\widetilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$, $(2n + 1)$ $-$boyutlu (κ, μ) $-$kontak metrik manifoldu olmak üzere

$$h^2 = (\kappa - 1)\varphi^2, \qquad \kappa \leq 1 \text{ için} \tag{3.1.9}$$

dir. Ayrıca $(2n + 1)$ −boyutlu bir (κ, μ) −kontak metrik manifoldu her X_1, $Y_1 \in \chi(\widetilde{M})$ için,

$$(\widetilde{\nabla}_{X_1}\varphi)Y_1 = g(X_1 + hX_1, Y_1)\xi - \eta(Y_1)(X_1 + hX_1) \tag{3.1.10}$$

eşitliğini sağlar. Burada $\widetilde{\nabla}$, Riemann konneksiyon, g de Riemann metriğidir, (3.1.10)'da $Y_1 = \xi$ alınırsa

$$\widetilde{\nabla}_{X_1}\xi = -\varphi X_1 - \varphi h X_1 \tag{3.1.11}$$

elde edilir (Venkatesha, Srikantha ve Siddesha, 2019).

3.1.10. Tanım M, hemen hemen kontak metrik manifoldu $\widetilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$'nın bir altmanifoldu olsun. O zaman $\widetilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$ deki g Riemann metriği M üzerine indirgenmiş olur. Böylece (M, g) de bir Riemann manifoldu olur (Dirik ve Atçeken 2014) Her $X_1 \in \chi(M)$ ve $V \in (\chi^{\perp}(M)$ için

$$\varphi X_1 = EX_1 + FX_1 \tag{3.1.12}$$

ve

$$\varphi V = BV + CV \tag{3.1.13}$$

şeklinde gösterilebilir. Burada φX_1 in teğet ve normal bileşenleri sırasıyla EX_1 ile FX_1, φV nin teğet ve normal bileşenleri de sırasıyla BV ile CV şeklindedir. Bu durumda alt manifolda indirgenen tensörler,

$$E : \chi(M) \to \chi(M), \qquad F : \chi(M) \to \chi^{\perp}(M)$$

ve

$$B: \chi^{\perp}(M) \to (M)\ , \quad C: \chi^{\perp}(M) \to \chi^{\perp}(M)$$

şeklinde tanımlı lineer dönüşümlerdir. Burada $F = 0$ ise M ye *invaryant*, $E = 0$ ise M ye $\widetilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$ nın *anti-invaryant altmanifoldu* denir (Pandey ve Gupta, 2008).

Şimdi her $X_1 \in \chi(M)$ için, (3.1.12) denklemine φ uygulanırsa

$$\varphi^2 X_1 = \varphi(\varphi X_1) = \varphi(EX_1 + FX_1)$$

yazılır. Burada (3.1.1) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned} -X_1 + \eta(X_1)\xi &= \varphi(EX_1) + \varphi(FX_1) \\ &= EEX_1 + FEX_1 + EFX_1 + FFX_1 \\ &= E^2X_1 + FEX_1 + BFX_1 + CFX_1 \end{aligned} \tag{3.1.14}$$

olduğu görülür. (3.1.14) denkleminin teğet bileşenlerinden

$$E^2X_1 + BFX_1 = -X_1 + \eta(X_1)\xi,$$

yazılır. O halde

$$E^2 = -I + \eta \otimes \xi - BF \tag{3.1.15}$$

dir. Şimdi (3.1.14) eşitliğinin normal bileşenlerinden,

$$FEX_1 + CFX_1 = 0$$

yazılır. Bundan

$$FE + CF = 0 \tag{3.1.16}$$

eşitliği bulunur.

Benzer olarak $V \in \chi^{\perp}(M)$ için,

$$\varphi^2 V = -V + \eta(V)\xi,$$

eşitliği yazılır. Burada (3.1.13) denklemi ve $\eta(V) = 0$ eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} -V = \varphi(\varphi V) &= \varphi(BV) + \varphi(CV) \\ &= EBV + FBV + BCV + C^2V \end{aligned} \tag{3.1.17}$$

bulunur. Böylece (3.1.17) eşitliğin teğet bileşenlerinden

$$EBV + BCV = 0$$

dir. O zaman

$$EB + CB = 0 \tag{3.1.18}$$

eşitliği yazılır. (3.1.17) denkleminin normal bileşenlerinden

$$FBV + C^2V = -V$$

dir. Buradan da

$$FB + C^2 = -I \tag{3.1.19}$$

bulunur.

Ayrıca, her $X_1, Y_1 \in \chi(M)$ için (3.1.5) denkleminden

$$g(\varphi X_1, Y_1) = -g(X_1, \varphi Y_1)$$

yazılabilir. Böylece (3.1.12) denklemi kullanılırsa

$$g(EX_1 + FX_1, Y_1) = -g(X_1, EY_1 + FY_1),$$
$$g(EX_1, Y_1) = -g(X_1, EY_1) \tag{3.1.20}$$

dir. Benzer olarak her $V, W_1 \in \chi^{\perp}(M)$ için (3.1.5) denkleminden

$$g(\varphi V, W_1) = -g(V, \varphi W_1)$$

yazılır. Burada (3.1.13) eşitliği kullanılırsa

$$g(BV + CV, W_1) = -g(V, BW_1 + CW_1),$$
$$g(V, CW_1) = -g(CV, W_1) \tag{3.1.21}$$

dir. Benzer şekilde her $X_1 \in \chi(M)$ ve $V \in (\chi^{\perp}(M)$ için (3.1.5) denkleminden

$$g(\varphi X_1, V) = -g(X_1, \varphi V)$$

yazılır. Böylece (3.1.12) ile (3.1.13) eşitlikleri kullanılırsa

$$g(EX_1 + FX_1, V) = -g(X_1, BV + CV)$$
$$g(FX_1, V) = -g(X_1, BV) \tag{3.1.22}$$

eşitliklerinin olduğu görülür.

Ayrıca, $\widetilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen kontak metrik manifoldu üzerinde $\widetilde{\nabla}$ Levi-Civita konneksiyonunu belirtmek üzere φ tensörünün kovaryant türevi her X_1, $Y_1 \in \chi(\widetilde{M})$ için

$$\left(\widetilde{\nabla}_{X_1}\varphi\right)Y_1 = \widetilde{\nabla}_{X_1}\varphi Y_1 - \varphi\widetilde{\nabla}_{X_1}Y_1 \tag{3.1.23}$$

biçimindedir.

Burada altmanifolda indirgenen tensörlerin kovaryant türevleri de her X_1, $Y_1 \in \chi(M)$ ve $V \in \chi^{\perp}(M)$ için

$$(\nabla_{X_1} E)Y_1 = \nabla_{X_1} EY_1 - E\nabla_{X_1} Y_1 \ \ ve \ \ (\nabla_{X_1} F)Y_1 = \nabla^{\perp}_{X_1} FY_1 - F\nabla_{X_1} Y_1 \qquad (3.1.24)$$

ve

$$(\nabla_{X_1} B)V = \nabla_{X_1} BV - B\nabla^{\perp}_{X_1} V \quad ve \ \ (\nabla_{X_1} C)V = \nabla^{\perp}_{X_1} CV - C\nabla^{\perp}_{X_1} V \qquad (3.1.25)$$

şeklinde tanımlanırlar (Pandey ve Gupta, 2008).

3.1.1 *Yardımcı Teorem* Bir $\widetilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$ $(\kappa\,, \mu)$ $-$kontak metrik manifoldunun altmanifoldu M olması durumunda $X_1, Y_1 \in \chi(M)$ ve $V \in \chi^{\perp}(M)$ için,

$$(\widetilde{\nabla}_{X_1} E)Y_1 = B\sigma(X_1, Y_1) + A_{FY_1} X_1$$
$$+ g(X_1 + hX_1, Y_1)\xi - \eta(Y_1)(X_1 + h\,X_1) \qquad (3.1.26)$$
$$(\widetilde{\nabla}_{X_1} F)\,Y_1 = -\sigma(X_1, E\,Y_1) + C\sigma(X_1, Y_1) \qquad (3.1.27)$$
$$(\widetilde{\nabla}_{X_1} B)V = A_{CV}\,X_1 - EA_V\,X_1 \qquad (3.1.28)$$
$$(\widetilde{\nabla}_{X_1} C)V = -\sigma(X_1, BV) - FA_V\,X_1 \qquad (3.1.29)$$

şeklinde tanımlanır. (2.2.1), (3.1.10) ve (3.1.11) denklemlerinden her $X_1 \in \chi(M)$ ve $V \in \chi^{\perp}(M)$ için

$$\nabla_{X_1}\xi = -EX_1 - EhX_1,$$
$$\sigma(X_1, \xi) = -FX_1 - FhX_1 \qquad (3.1.30)$$

şeklinde verilir.

4 KONTAK PSEUDO-SLANT ALTMANİFOLDLAR

4.1 . (κ, μ) Kontak Metrik Manifoldların Kontak Pseudo-Slant Altmanifoldları

4.1.1. Tanım Bir hemen hemen kontak metrik manifoldu $\widetilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$ nın bir altmanifoldu M olmak üzere, M nin her bir p noktasındaki $T_M(p)$ tanjant uzayını r −boyutlu D_p alt uzaya götüren dönüşüm D olsun. $\xi \in \chi(M)$ olmak üzere her $p \in M$ ve her $X_{1_p} \in \Gamma(\mathrm{D_p})$ vektörü için, φX_{1_p} ve D_p vektör alt uzayının arasındaki $\theta_D(p)$ açısı bağımsız ve sabit yani $p \in M$ ve $X_{1_p} \in \Gamma(\mathrm{D_p})$ seçiminden bağımsız ise M üzerinde D distribüsyonuna *slant distribüsyon* denir. θ_D sabit açısına da D distribüsyonunun *slant açısı* denir. Bundan sonra slant distribüsyon D_θ ile gösterilecektir.

4.1.1. Teorem $\widetilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen kontak metrik manifoldunun bir altmanifoldu M ve $\mathrm{D_\theta}$ da M üzerinde ξ ye ortogonal distribüsyon olsun. O zaman $\mathrm{D_\theta}$ distribüsyonunun slant olması için gerek ve yeter şart her $X_1 \in \Gamma(D_\theta)$ için

$$(PT)^2 X_1 = -\lambda X_1$$

olacak şekilde bir $\lambda \in [0,1]$ ($\lambda = cos^2\,\theta$) sabitinin var olmasıdır. Burada P, D_θ üzerinde bir ortogonal projeksiyondur (Cabrerizo, Carriazo, Fernandez ve Fernandez, 1999).

4.1.2. Tanım $\widetilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen kontak metrik manifoldun bir altmanifoldu M ve $p \in M$ için ξ_p ile lineer bağımlı olmayan sıfırdan farklı bir vektör X_1 olsun. EX_1 ile φX_1 in arasındaki açıya slant açısı denir. Bu açıyı $\theta(p)$ ile gösterirsek $\forall\, p \in M$ noktası ve $\forall X_1 \in T_M(p) - \{\xi_p\}$ için $\theta(p)$ slant açısı sabit ise M ye $\widetilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$ nin slant altmanifoldudur denir. Ayrıca $\theta(p) \in [0, \frac{\pi}{2}]$ dir (Cabrerizo ve Arkadaşları 2000).

Buna göre bir hemen hemen kontak metrik manifoldunun

a) Anti-invaryant altmanifoldları özel olarak $\theta = \frac{\pi}{2}$ slant açılı slant altmanifoldlardır.

b) İnvaryant altmanifoldları ise $\theta = 0$ slant açılı slant altmanifoldlardır.

Bir slant altmanifold ne invaryant ne de anti-invaryant altmanifold ise proper slant altmanifold olarak adlandırılır.

4.1.2. Teorem Bir hemen hemen kontak metrik manifold $\widetilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$ nin ξ ye teğet altmanifoldu M olsun. O zaman M nin slant altmanifold olması için gerekli ve yeterli şart

$$E^2 = -\lambda(I - \eta \otimes \xi) \tag{4.1.1}$$

olacak biçimde bir $\lambda \in [0, 1]$ sabiti vardır. Ayrica M nin slant açısı θ ise $\lambda = cos^2\theta$ dir (Cabrerizo ve Arkadaşları 2000).

4.1.1. *Sonuç* Bir hemen hemen kontak metrik manifoldu $\widetilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$ nın θ slant açılı bir slant altmanifoldu M olsun. O halde her $X_1, Y_1 \in \chi(M)$ için

$$g(EX_1, EY_1) = cos^2\theta\{g(X_1, Y_1) - \eta(X_1)\eta(Y_1)\} \tag{4.1.2}$$

ve

$$g(FX_1, FY_1) = sin^2\theta\{g(X_1, Y_1) - \eta(X_1)\eta(Y_1)\} \tag{4.1.3}$$

dir (Cabrerizo ve Arkadaşları 2000).

İspat (3.1.20) denkleminde X_1 yerine EX_1 alınırsa ve (4.1.1) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(EX_1, EY_1) &= -g(E^2X_1, Y_1) \\ &= g(cos^2\theta(X_1 - \eta(X_1)\xi, Y_1) \\ &= cos^2\theta\{g(X_1, Y_1) - \eta(X_1)\eta(Y_1)\} \end{aligned}$$

yazılır. Böylece (4.1.2) eşitliği ispatlanmış olur. Diğer taraftan (4.1.3) eşitliğini ispatlamak için (3.1.3) ve (3.1.12) denklemleri kullanılırsa

$$g(\varphi X_1, \varphi Y_1) = g(X_1, Y_1) - \eta(X_1)\eta(Y_1)$$
$$g(EX_1 + FX_1, EY_1 + FY_1) = g(X_1, Y_1) - \eta(X_1)\eta(Y_1)$$
$$g(EX_1, EY_1) + g(FX_1, FY_1) = g(X_1, Y_1) - \eta(X_1)\eta(Y_1)$$

dir. Burada, (4.1.2) denklemi kullanılırsa

$$g(FX_1, FY_1) = g(X_1, Y_1) - \eta(X_1)\eta(Y_1) - cos^2\theta\{g(X_1, Y_1) - \eta(X_1)\eta(Y_1)\}$$
$$= sin^2\theta\{g(X_1, Y_1) - \eta(X_1)\eta(Y_1)\}$$

dir. Böylece (4.1.3) denklemi de ispatlanmış olur.

4.1.3. Tanım Bir hemen hemen kontak metrik manifoldu $\widetilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$ nin bir altmanifoldu M olsun. Bu durumda

a) $TM = D^{\perp} \oplus D_\theta, \xi \in \Gamma(D_\theta)$

b) $D^{\perp}$ distribüsyonu, anti-invaryant distribüsyon, yani,

$$\varphi D^{\perp} \subset (T^{\perp}M)$$

c) M üzerinde D_θ, $\theta -$slant açılı slant distribüsyon olacak şekilde D_θ ve $\varphi(D_\theta)$ arasındaki sabit slant açı $\theta \neq \pi/2$ dir.

Şartlarını sağlayan iki ortogonal distribüsyon $D^{\perp}$ ve D_θ varsa M ye $\widetilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$ nın kontak psedo-slant alt manifoldu denir (Khan ve Khan 2007).

Bu tanımda $\theta = 0$ ise kontak pseudo slant altmanifold semi-invaryant altmanifold adını alır. Böylece kontak pseudo slant altmanifold semi-invaryant altmanifoldların bir genellemesidir. Diğer taraftan eğer, $boy(D^{\perp}) = d_1$ ve $boy(D_\theta) = d_2$ ile gösterilirse aşağıdaki koşulları elde ederiz.

i) $d_2 = 0$ ise M, bir anti- invaryant altmanifolddur.

ii) $\mathrm{d}_1 = 0$ ve $\theta = 0$ ise M, bir invaryant altmanifolddur.

iii) $\mathrm{d}_1 = 0$ ve $\theta \neq 0$ ise M, θ slant açılı proper-slant altmanifoldur.

iv) Eğer $d_1 . d_2 \neq 0$ ve $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ ise M proper kontak pseudo-slant altmanifolddur.

Bir hemen hemen kontak metrik manifoldu $\widetilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$ nin kontak pseudo-slant altmanifoldu M olsun.

$$P_1 : \chi(M) \rightarrow \Gamma(D^{\perp}), \quad P_2 : \chi(M) \rightarrow \Gamma(D_\theta)$$

ortogonal projeksiyonları göstersinler. Her $X_1 \in \chi(M)$ için

$$X_1 = P_1 X_1 + P_2 X_1 + \eta(X_1)\xi \tag{4.1.4}$$

şeklinde yazılabilir. O halde $P_1 X_1 \in \Gamma(D^{\perp})$ ile $P_2 X_1 \in \Gamma(D_\theta)$ dir.

Şimdi (4.1.4) denklemine φ uygulanırsa,

$$\varphi X_1 = \varphi P_1 X_1 + \varphi P_2 X_1$$

yazılır. Burada (3.1.12) eşitliği kullanılırsa

$$EX_1 + FX_1 = EP_1 X_1 + FP_1 X_1 + EP_2 X_1 + FP_2 X_1$$

olduğu görülür. $P_1 X_1 \in \Gamma(D^{\perp})$ olduğundan $EP_1 X_1 = 0$ dir.

$$EX_1 + FX_1 = EP_2 X_1 + FP_1 X_1 + FP_2 X_1 \tag{4.1.5}$$

olur. Böylece bu denklemin teğet ile normal bileşenleri sırasıyla

$$EX_1 = EP_2 X_1$$

ve

$$FX_1 = FP_1 X_1 + FP_2 X_1$$

olduğu görülür. Burada

$$\varphi P_1X_1 = FP_1X_1, \quad EP_1X_1 = 0$$

ve

$$\varphi P_2X_1 = EP_2X_1 + FP_2X_1, \quad EP_2X_1 \in \Gamma(D_\theta)$$

dir.

$D^\perp$ ve D_θ, M üzerinde ortogonal distribüsyonlar olduğundan her $X_1 \in \Gamma(D_\theta)$ ve $Z_1 \in \Gamma(D^\perp)$ için

$$\varphi X_1 = EX_1 + FX_1 \tag{4.1.6}$$

ve

$$\varphi Z_1 = EZ_1 + FZ_1 = FZ_1 \in F(D^\perp), \quad EZ_1 = 0 \tag{4.1.7}$$

dir. Şimdi (3.1.3) eşitliğinden

$$g(\varphi X_1, \varphi Z_1) = g(X_1, Z_1) - \eta(Z_1)\eta(X_1)$$

yazılır. O halde (4.1.6) ile (3.1.12) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(EX_1 + FX_1, FZ_1) &= g(X_1, Z_1) - \eta(X_1)g(Z_1, \xi) \\ g(EX_1, FZ_1) + g(FX_1, FZ_1) &= g(X_1, Z_1) \\ g(FX_1, FZ_1) &= 0 \end{aligned}$$

olduğu görülür. Burada $FX_1 \in F(D_\theta)$ ve $FZ_1 \in F(D^\perp)$ olduğundan, $F(D^\perp)$ ve $F(D_\theta)$ distribüsyonlarının birbirlerine ortogonal olduğunu gösterir. Böylece $T^\perp M$ −normal uzayını

$$T^{\perp}M = F(D^{\perp}) \oplus \ F(D_{\theta}) \oplus \ \mu'$$

biçiminde ifade edebiliriz. Burada μ', $\varphi(TM)$ nin $T^{\perp}M$ deki ortogonal tümleyenidir.

4.1.3. Teorem M, $\widetilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$ (κ, μ) $-$kontak metrik manifoldunun kontak pseudo-slant altmanifoldu olması durumunda $D^{\perp}$ anti-invaryant distribüsyonu daima integrallenebilirdir (Dirik, 2019).

İspat Her $X_1, Y_1 \in \Gamma(D^{\perp})$ için, eşitlik (3.1.10) kullanılırsa

$$\begin{aligned}\widetilde{\nabla}_{X_1}\varphi Y_1 &= \varphi\widetilde{\nabla}_{X_1}Y_1 + g(X_1 + hX_1, Y_1)\xi - A_{FY_1}X_1 + \nabla^{\perp}_{X_1}FY_1 \\ &= E\nabla_{X_1}Y_1 + F\nabla_{X_1}Y_1 + B\sigma(X_1, Y_1) + C\sigma(X_1, Y_1) + g(X_1 + hX_1, Y_1)\xi\end{aligned}$$

yazılır. Bu denklemin teğet kısımlar alınırsa

$$-A_{FY_1}X_1 = E\nabla_{X_1}Y_1 + B\sigma(X_1, Y_1) + g(X_1 + hX_1, Y_1)\xi \tag{4.1.8}$$

dir. Daha sonra yukarıdaki denklemde X_1 ile Y_1 yer değiştirilirse

$$-A_{FX_1}Y_1 = E\nabla_{Y_1}X_1 + B\sigma(Y_1, X_1) + g(Y_1 + hY_1, X_1)\xi \tag{4.1.9}$$

elde edilir. (4.1.8) ve (4.1.9) den gerekli işlemler yapılırsa,

$$E[Y_1, X_1] = A_{FX_1}Y_1 - A_{FY_1}X_1 \tag{4.1.10}$$

olur. Diğer taraftan, (2.2.1) (2.2.7) (2.2.10) ve (3.1.10) eşitlikleri kullanılırsa ve her $U \in \chi(M)$ için,

$$\begin{aligned}g(A_{FX_1}Y_1 - A_{FY_1}X_1, U) &= g(\sigma(Y_1, U), FX_1) - g(\sigma(X_1, U), FY_1) \\ &= g(\sigma(Y_1, U), FX_1) - g\big(\widetilde{\nabla}_U X_1, FY_1\big) \\ &= g(\sigma(Y_1, U), FX_1) - g\left((\widetilde{\nabla}_U \varphi)Y_1 + \varphi\widetilde{\nabla}_U Y_1, X_1\right)\end{aligned}$$

$$= g(\sigma(Y_1, U), FX_1) - g(g(U + hU, Y_1)\xi, X_1) + g\left(\varphi\widetilde{\nabla}_U Y_1, X_1\right)$$
$$= g(A_{FX_1}Y_1, U) - \ g(\widetilde{\nabla}_U Y_1\,, \varphi X_1)$$
$$= g(A_{FX_1}Y_1, U) - \ g(\sigma(Y_1, U), FY_1) = 0$$

böylece

$$g(A_{FX_1}Y_1 - A_{FY_1}X_1, U) = 0 \qquad (4.1.11)$$

bulunur. Böylece (4.1.10) ve (4.1.11) denklemlerinden

$$E[Y_1, X_1] = 0$$

bulunur. Bu da teoremi ispatlar.

4.1.4. Teorem $\widetilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$ bir $(\kappa\,, \mu)$ $-$kontak metrik manifoldunun kontak pseudo-slant altmanifoldu M olsun. Bu durumunda slant distribüsyon D_θ'nın integrallenebilir olması için gerekli ve yeterli koşullardan biri her $X_1, Y_1 \in \Gamma(D_\theta)$ ve $Z_1 \in \Gamma(D^\perp)$ için

$$g(A_{FCF}Z_1 + EA_{FZ_1}Y_1, X_1) = g(A_{CFX_1}Z_1 + EA_{FZ_1}X_1, Y_1)$$

olmasıdır (Dirik, 2019).

İspat Her $X_1, Y_1 \in \Gamma(D_\theta)$ ve $Z_1 \in \Gamma(D^\perp)$ için, (3.1.3) ve (3.1.29) kullanılarak,

$$g([X_1, Y_1], Z_1) = g\left(\widetilde{\nabla}_{X_1}Y_1, Z_1\right) - g\left(\widetilde{\nabla}_{Y_1}X_1, Z_1\right)$$
$$= g\left(\widetilde{\nabla}_{Y_1}Z_1, X_1\right) - g\left(\widetilde{\nabla}_{X_1}Z_1, Y_1\right)$$
$$= g\left(\varphi\widetilde{\nabla}_{Y_1}Z_1, \varphi X_1\right) - g\left(\varphi\widetilde{\nabla}_{X_1}Z_1, \varphi Y_1\right)$$

(2.2.7), (3.1.23) ve (3.1.10) eşitliği kullanılırsa

$$g([X_1, Y_1], Z_1) \quad = g\left(\widetilde{\nabla}_{Y_1}\varphi Z_1 - (\widetilde{\nabla}_{Y_1}\varphi)Z_1, \varphi X_1\right) - g\left(\widetilde{\nabla}_{X_1}\varphi Z_1 - (\widetilde{\nabla}_{X_1}\varphi)Z_1, \varphi Y_1\right)$$
$$= g\left(\widetilde{\nabla}_{Y_1}\varphi Z_1, \varphi X_1\right) - g(g(Y_1 + hY_1, Z_1)\xi, \varphi X_1)$$

$$-g\left(\widetilde{\nabla}_{X_1}\varphi Z_1,\varphi Y_1\right)+g(g(X_1+hX_1,Z_1)\xi,\varphi Y_1)$$
$$=g\left(\widetilde{\nabla}_{Y_1}\varphi Z_1,EX_1\right)+g\left(\widetilde{\nabla}_{Y_1}\varphi Z_1,FX_1\right)-g\left(\widetilde{\nabla}_{X_1}\varphi Z_1,EY_1\right)-$$
$$g\left(\widetilde{\nabla}_{X_1}\varphi Z_1,FY_1\right)$$
$$=-g\left(A_{\varphi Z_1}EX_1,Y_1\right)+g\left(A_{\varphi Z_1}EY_1,X_1\right)-g\left(\widetilde{\nabla}_{Z_1}X_1,\varphi FY_1\right)-$$
$$g\left(\widetilde{\nabla}_{Y_1}Z_1,\varphi FX_1\right)$$
$$=g\left(A_{\varphi Z_1}EY_1,X_1\right)-g\left(A_{\varphi Z_1}EX_1,Y_1\right)+g\left(\nabla_{X_1}Z_1,BFY_1\right)$$
$$-g\left(\nabla_{Y_1}Z_1,BFX_1\right)+g\left(\widetilde{\nabla}_{X_1}Z_1,CFY_1\right)-g\left(\widetilde{\nabla}_{Y_1}Z_1,CFX_1\right)$$

yazılır. Buradan da (4.1.2) ve (4.1.3) eşitlikleri kullanılırsa

$$=g\left(A_{\varphi Z_1}EY_1+EA_{\varphi Z_1}Y_1,X_1\right)-sin^2\theta g\left(\nabla_{X_1}Z_1,Y_1\right)$$
$$+sin^2\theta g\left(\nabla_{Y_1}Z_1\,,X_1\right)-g(\sigma(X_1,Z_1),CFY_1)$$
$$-g(\sigma(Y_1,Z_1),CFX_1),$$
$$=g\left(EA_{\varphi Z_1}Y_1+A_{\varphi Z_1}EY_1,X_1\right)+sin^2\theta g([X_1,Y_1],Z_1)+g\left(A_{CFY_1}X_1-\right.$$
$$\left.A_{CFX_1}Y_1,Z_1\right).$$

Böylece,

$$cos^2\theta g([X_1,Y_1],Z_1)=g\left(EA_{\varphi Z_1}Y_1+A_{\varphi Z_1}EY_1,X_1\right)+\ g\left(A_{CFY_1}X_1-A_{CFX_1}Y_1,Z_1\right)$$

sonucuna ulaşırız. Bu da ispatı tamamlar.

4.1.4. Tanım Bir $(\kappa\,,\mu)$ $-$kontak metrik manifoldu $\widetilde{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$'nin bir kontak pseudo-slant altmanifoldu M olsun.

i. Her $X_1,\ Y_1\in\Gamma(D_\theta)$ için $\sigma(X_1,Y_1)=0$ ise M'ye D_θ $-$total geodezik altmanifold,

ii. Her $Z_1,W_1\in\Gamma(D^\perp)$ için, $\sigma(Z_1,W_1)=0$ ise M'ye $D^\perp$ $-$total geodezik altmanifold,

iii. Her $X_1\in\Gamma(D_\theta)$ ve $Z_1\in\Gamma(D^\perp)$ için, $\sigma(X_1,Z_1)=0$ ise M'ye mixed-total geodezik altmanifold denir.

4.1.5. Teorem $\widetilde{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$ bir $(\kappa\,,\mu)$ $-$kontak metrik manifoldunun proper kontak pseudo-slant altmanifoldu M olsun. M altmanifoldu ya bir anti-invaryant ya da mixed-total geodezik altmanifolddur (Dirik, 2019).

İspat Her $X_1 \in \Gamma(D_\theta)$, $Y_1 \in \Gamma(D^{\perp})$ ve $V \in \chi^{\perp}(M)$ için (3.1.10), (3.1.23), (3.1.25), (3.1.28) ve (3.1.29) kullanarak,

$$
\begin{aligned}
g(A_V X_1, Y_1) &= g\big(\widetilde{\nabla}_{X_1} Y_1, V\big) = -g\big(\widetilde{\nabla}_{X_1} V, Y_1\big) - g\big(\varphi\widetilde{\nabla}_{X_1} V, \varphi X_1\big) \\
&= g\left((\widetilde{\nabla}_{X_1}\varphi)V - \widetilde{\nabla}_{X_1}\varphi V, \varphi X\right) \\
&= g\big((X_1 + hX_1, Y_1)\xi, FX_1\big) - g\big(\widetilde{\nabla}_{X_1} BV + \widetilde{\nabla}_{X_1} CV, FV\big) \\
&= -g(\sigma(X_1, CV), FY_1) - g(\nabla^{\perp}_{X_1} CV, CY_1)
\end{aligned}
$$

Buradan gerekli işlemler yapılırsa

$$
\begin{aligned}
g(A_V X_1, Y_1) &= -g(\sigma(X_1, BV), FY_1) - g\left((\nabla_{X_1} C)V + C\nabla^{\perp}_{X_1} V, FV\right) \\
&= g(\sigma(X_1, BV), FY_1) - g(-\sigma(X_1, BV) - FA_V X_1, FV) \\
&= g(FA_V X_1, FY_1) = -g(BFA_V X_1, Y_1)
\end{aligned}
$$

elde ederiz. Böylece gerekli işlemler yapılır ve (3.1.15) denklemi kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
g(A_V X_1, Y_1) &= -g(-A_V X_1 + \eta(A_V X_1)\xi - E^2 A_V X_1, Y_1) \\
&= g(A_V X_1, Y_1) + g(E^2 A_V X_1, Y_1),
\end{aligned}
$$

yazılır. Yani;

$$
-cos^2\theta g(A_V X_1 + \eta(A_V X_1)\xi, Y_1) = -cos^2\theta g(A_V X_1, Y_1) = 0
$$

dır. Bu bize ya M mixed-total geodezik ya da bir anti-invaryant altmanifold olduğunu gösterir.

4.1.6. Teorem $\widetilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$ bir $(\kappa\,, \mu)$ $-$kontak metrik manifoldunun proper kontak pseudo-slant altmanifoldu M olsun. Bu durumda M, ya bir anti-invaryant ya da $D^{\perp}$ $-$total geodezik altmanifolddur (Dirik, 2019).

İspat $Z_1, W_1 \in \Gamma(D^{\perp})$ ve $V \in \Gamma\chi^{\perp}(M)$ için (3.1.10), (3.1.23), (3.1.25), (3.1.28), (3.1.29) ve (3.1.30) kullanılırsa,

$$\begin{aligned} g(\sigma(Z_1, W_1), V) &= -g\big(\widetilde{\nabla}_{W_1} V, Z_1\big) = -g(\varphi\widetilde{\nabla}_{W_1} V, \varphi Z_1) \\ &= g\left(\big(\widetilde{\nabla}_{W_1}\varphi\big)V - \widetilde{\nabla}_{W_1}\varphi V, \varphi Z_1\right) \\ &= -g\big(\widetilde{\nabla}_{W_1} BV, FZ_1\big) - g\big(\widetilde{\nabla}_{W_1} CV, FZ_1\big) \\ &\quad -g(\sigma(W_1, CV), FZ_1) - g(\nabla^{\perp}_{W_1} CV, FZ_1) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da (3.1.15) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(\sigma(Z_1, W_1), V) &= -g(\sigma(W_1, BV), FZ_1) - g((\nabla_{W_1} C)V, FZ_1 \\ &= -g(\sigma(W_1, BV), FZ_1) + g(\sigma(W_1, BV) + F(A_V W_1, FZ_1) \\ &= g(FA_V W_1, FZ_1) = -g(BFA_V, Z_1) \\ &\quad -g(-A_V W_1 + \eta(A_V W_1)\xi + E^2 A_V W_1, Z_1) \\ &= g(A_V W_1, Z_1) + g(E^2 A_V W_1, Z_1) \end{aligned}$$

veya

$$-cos^2\theta g(A_V W_1 - \eta(A_V W_1)\xi, Z_1) = -cos^2\theta g(A_V W_1, Z_1) = 0$$

elde edilir. Buradan $-cos^2\theta g(\sigma(Z_1, W_1), V) = 0$ dir. Bu da M 'nin $D^{\perp}$ $-$total geodezik ya da bir anti-invaryant altmanifold olduğu anlamına gelir.

4.1.7. Teorem Bir (κ, μ) $-$kontak metrik manifoldu $\widetilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$'nın proper kontak pseudo-slant altmanifoldu M olsun. B paralel ise M ya mixed geodezik ya da anti-invariant altmanifolddur (Dirik ve Cetin, 2022).

İspat Her $X_1 \in \Gamma(D_\theta)$ ve $Y_1 \in \Gamma(D^\perp)$ için, Eşitlik (3.1.27) ve (3.1.28) ve (3.1.22) den B paralelse F paraleldir. Yani $\nabla F = 0$ dir. Buradan

$$C\sigma(X_1, Y_1) - \sigma(X_1, EY_1) = 0$$

yazılır. $Y_1 \in \Gamma(D^\perp), EY_1 = 0$ olduğundan yukarıdaki denklemde X_1'in yerine EX_1 yazılırsa

$$C\sigma(EX_1, Y_1) = 0$$

denklemi elde edilir. Tekrar yukarıdaki denklemde X_1 in yerine EX_1 kullanılır ve (4.1.1) uygulanırsa

$$C\ \sigma(E^2X_1, Y_1) = -C\ cos^2\theta\sigma(X_1, Y_1) = 0$$

eşitliği elde edilir. Dolayısıyla ya $\sigma(X_1, Y_1) = 0$ (M mixed geodezik) ya da $\theta = \frac{\pi}{2}$ (M anti-invariant) dir.

4.1.8. Teorem M bir (κ, μ) $-$kontak metrik manifoldu $\widetilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$'nın proper total umbilik kontak pseudo-slant altmanifold olsun. Bu durumda eğer B paralel ise, M ya minimaldir ya da anti- invaryant altmanifolddur.

İspat Her $X_1 \in \Gamma(D_\theta)$, $Y_1 \in \Gamma(D^\perp)$ için, (3.1.27) ve (3.1.28) dan B paralel ise F paraleldir. Yani $\nabla F = 0$ dır. Bu da

$$C\sigma(X_1, Y_1) - \sigma(X_1, EY_1) = 0$$

anlamına gelir. Buradan $Y_1 \in \Gamma(D^\perp)$ ve $EY_1 = 0$ için

$$C\sigma(X_1, Y_1) = 0$$

olur. Yukarıdaki denklemde X_1 in yerine EX_1 kullanılırsa.

$$C\sigma(EX_1, Y_1) = 0$$

denklemi elde edilir. M total umbilik olduğundan

$$C\ g(EX_1, Y_1)H = 0$$

dir. Tekrar yukarıdaki denklemde X_1 in yerine EX_1 kullanılır ve (4.1.1) uygulanırsa

$$Cg(E^2X_1, Y_1)H = -C\ cos^2\theta g(X_1, Y_1)H = 0$$

elde edilir. Buradan da ya $\theta = \frac{\pi}{2}$ (M anti-invariant) ya da $H = 0$ (M minimal) dir.

4.1.9. Teorem $\widetilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$ bir (κ, μ) $-$kontak metrik manifoldunun kontak pseudo-slant altmanifoldu M olsun. Eğer F tensörü D_θ slant distribüsyon üzerinde paralel ise M D_θ $-$geodeziktir ya da $\sigma(X_1, Y_1)$, D_θ üzerinde $-cos^2\theta$ karakteristik değeri ile C^2'nin bir karakteristik vektörüne sahiptir (Dirik ve Cetin, 2022).

İspat Her $X_1, Y_1 \in$ *$\Gamma(D_\theta)$* için, (3.1.27) den,

$$C\ \sigma(X_1, Y_1) - \sigma(X_1, EY_1) = 0 \qquad (4.1.12)$$

denklemi vardır. Diğer taraftan D_θ slant olduğundan Y_1 yerine $Y_1 - \eta(Y_1)\xi$ yazılırsa

$$C\ \sigma(X_1, Y_1 - \eta(Y_1)\xi) - \sigma(X_1, EY_1) = 0$$

olur. Böylece

$$C\,\sigma(X_1, Y_1 - \eta(Y_1)\xi) = \sigma(X_1, EY_1) \qquad (4.1.13)$$

eşitliğine sahibiz. Şimdi C'yi (4.1.13)'e uygularsak

$$C^2\ \sigma(X_1, Y_1 - \eta(Y_1)\xi) = C\sigma(X_1, EY_1) \qquad (4.1.14)$$

elde ederiz. (4.1.12)'de Y_1 yerine EY_1 alınırsa,

$$\sigma(X_1, E^2 Y_1) = C\sigma(X_1, EY_1) \tag{4.1.15}$$

elde ederiz. Dolayısıyla (4.1.1), (4.1.14) ve (4.1.15)'yı kullanılırsa

$$C^2\ \sigma(X_1, Y_1 - \eta(Y_1)\xi) = C\sigma(X_1, EY_1) = \sigma(X_1, E^2 Y_1) = -\ cos^2\theta\ \sigma(X_1, Y_1 - \eta(Y_1)\xi)$$

eşitliklerini elde ederiz. Burada ya $\sigma = 0$'dır. Bu da M'nin D_θ −geodezik yada σ, $-\ cos^2\theta$ karakteristik değerli C^2 nin bir karakteristik vektörüdür.

4.1.10. Teorem M, bir (κ, μ) −kontak metrik manifoldu $\widetilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$ nın kontak pseudo-slant altmanifoldu olsun. Bu durumda anti-invariant distribüsyonu $D^{\perp}$ daima integrallenebilirdir (Dirik ve Cetin, 2022).

İspat Her $Z_1, W_1 \in \Gamma(D^{\perp})$ için, (3.1.10)'da

$$\begin{aligned}(\widetilde{\nabla}_{Z_1}\varphi)W_1 &= g(Z_1 + hZ_1, W_1)\xi - \eta(W_1)(Z_1 + hZ_1)\\ &= g(Z_1 + hZ_1, W_1)\xi\end{aligned}$$

eşitliği vardır. (3.1.10) denkleminde (2.2.1), (2.2.7), (3.1.12) ve (3.1.13) kullanılırsa

$$\begin{aligned}\widetilde{\nabla}_{Z_1}\varphi W_1 - \varphi\widetilde{\nabla}_{Z_1}W_1 - g(Z_1 + hZ_1, W_1)\xi &= 0,\\ \widetilde{\nabla}_{Z_1}FW_1 - \varphi(\nabla_{Z_1}W_1 + \sigma(Z_1, W_1)) - g(Z_1 + hZ_1, W_1)\xi &= 0,\\ -A_{FW_1}Z_1 + \nabla^{\perp}_{Z_1}W_1 - E\nabla_{Z_1}W_1 - F\nabla_{Z_1}W_1 - B\sigma(Z_1, W_1)&\\ -C\sigma(Z_1, W_1) - g(Z_1 + hZ_1, W_1)\xi &= 0\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Teğet bileşenleri karşılaştırılırsa

$$-A_{FW_1}Z_1 - E\nabla_{Z_1}W_1 - B\sigma(Z_1, W_1) - g(Z_1 + hZ_1, W_1)\xi = 0 \tag{4.1.16}$$

denklemini elde ederiz. Denklemde Z_1 ve W_1 yer değiştirirse

$$-A_{FZ_1}W_1 - E\,\nabla_{W_1}Z_1 - B\sigma(W_1, Z_1) - g(W_1 + hW_1, Z_1)\xi = 0 \qquad (4.1.17)$$

eşitliğini elde ederiz. (4.1.16) denkleminden (4.1.17) denklemini çıkararak ve σ ile h'nin simetrik olduğu kullanılırsa,

$$\begin{aligned} A_{FW_1}Z_1 - A_{FZ_1}W_1 + E\left[\nabla_{Z_1}W_1 - \nabla_{W_1}Z_1\right] &= 0, \\ A_{FW_1}Z_1 - A_{FZ_1}W_1 + E[Z_1, W_1] &= 0, \\ E[W_1, Z_1] &= A_{FW_1}Z_1 - A_{FZ_1}W_1. \end{aligned} \qquad (4.1.18)$$

eşitliği elde edilir. Öte yandan, her $U \in \chi(M)$ için, (2.2.1), (2.2.7), (2.2.10), (3.1.10) ve kullanılırsa,

$$\begin{aligned} g\left(A_{FW_1}Z_1 - A_{FZ_1}W_1, U\right) &= g(\sigma(Z_1, U), FW_1) - g(\sigma(W_1, U), FZ_1) \\ &= g(\sigma(Z_1, U), FW_1) - g(\tilde{\nabla}_U W_1, FZ_1) \\ &= g(\sigma(Z_1, U), FW_1) + g(\varphi\tilde{\nabla}_U W_1, Z_1) \\ &= g(\sigma(Z_1, U), FW_1) + g(\tilde{\nabla}_U \varphi W_1 - (\tilde{\nabla}_U \varphi)W_1, Z_1) \\ &= g(\sigma(Z_1, U), FW_1) + g(-A_{FW_1}U + \nabla_U^{\perp} FW_1, Z_1) \\ &\quad -g(g(U + hU, W_1)\xi, Z_1) \\ &= g(\sigma(Z_1, U), FW_1) - g(A_{FW_1}U, Z_1) \\ &= g(\sigma(Z_1, U), FW_1) + g(\sigma(Z_1, U), FW_1) = 0 \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. Burada

$$A_{FW_1}Z_1 = A_{FZ_1}W_1$$

Sonucu ortaya çıkar. Bu eşitlik gereğince (4.1.18)'da $[W_1, Z_1] \in \Gamma(D^{\perp})$ olduğundan $E[W_1, Z_1] = 0$ dır. Böylece $D^{\perp}$ daima integrallenebilirdir.

4.1.11. Teorem Bir (κ, μ) −kontak metrik manifoldu $\widetilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$ nın kontak pseudo-slant altmanifoldu M olsun. O zaman D_θ slant distribüsyonu integrallenir. Ancak ve ancak her $X_1, Y_1 \in \Gamma(D_\theta)$ için,

$$P_1\{\nabla_{X_1}EY_1 - A_{FY_1}X_1 - E\nabla_{Y_1}X_1 - B\sigma(X_1,Y_1) + \eta(Y_1)(X_1 + hX_1)\}=0$$

dir (Dirik ve Cetin, 2022).

İspat $D^{\perp}$ ve D_θ üzerindeki projeksiyonları sırasıyla P_1 ve P_2 ile gösterelim. Her $X_1, Y_1 \in \Gamma(D_\theta)$ için, (3.1.10) denkleminden

$$\left(\widetilde{\nabla}_{X_1}\varphi\right)Y_1 = g(X_1 + hX_1, Y_1)\xi - \eta(Y_1)(X_1 + hX_1)$$

eşitliği vardır. (3.1.23) uygulanırsa

$$\widetilde{\nabla}_{X_1}\varphi Y_1 - \varphi\widetilde{\nabla}_{X_1}Y_1 - g(X_1 + hX_1, Y_1)\xi + \eta(Y_1)(X_1 + hX_1) = 0$$

yazılır. (2.2.1) ve (3.1.12) kullanılırsa

$$\widetilde{\nabla}_{X_1}EY_1 + \widetilde{\nabla}_{X_1}FY_1 - \varphi\left(\nabla_{X_1}Y_1 + \sigma(X_1,Y_1)\right)$$
$$-g(X_1 + hX_1, Y_1)\xi + \eta(Y_1)(X_1 + hX_1) = 0.$$

Böylece (2.2.1), (2.2.7), (3.1.12) ve (3.1.13) uygulanırsa

$$\nabla_{X_1}EY_1 + \sigma(X_1, EY_1) - A_{FY_1}X_1 + \nabla^{\perp}_{X_1}FY_1 - E\nabla_{X_1}Y_1 - F\nabla_{X_1}Y_1$$
$$-B\sigma(X_1,Y_1) - C\sigma(X_1,Y_1) - g(X_1 + hX_1, Y_1)\xi + \eta(Y)(X_1 + hX_1) = 0$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitliğin teğet bileşenlerini karşılaştırırsak

$$\nabla_{X_1}EY_1 - A_{FY_1}x_1 - E\nabla_{X_1}Y_1 - B\sigma(X_1,Y_1) - g(X_1 + hX_1, Y_1)\xi + \eta(Y_1)(X_1 + hX_1) = 0.$$

Yukarıdaki denklemde gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\nabla_{X_1}EY_1 - A_{FY_1}X - E\nabla_{Y_1}X_1 + E\,\nabla_{Y_1}X_1 - E\nabla_{X_1}Y_1 - B\sigma(X_1,Y_1) -$$
$$g(X_1 + hX_1, Y_1)\xi + \eta(Y_1)(X_1 + hX_1) = 0,$$

elde edilir.

$$E[X_1,Y_1] = \nabla_{X_1}EY_1 - A_{FY_1}X_1 - E\nabla_{Y_1}X_1 - B\sigma(X_1,Y_1)$$
$$-g(X_1 + hX_1,Y_1)\xi + \eta(Y_1)(X_1 + hX_1).$$

Burada X_1, $Y_1 \in \Gamma(D_\theta)$, $[X_1,Y_1] \in \Gamma(D_\theta)$, dir. Böylece, yukarıdaki denklemin her iki tarafına P_1 uygulanırsa $P_1E[X_1,Y_1] = 0$ olduğundan

$$P_1\{\nabla_{X_1}EY_1 - A_{FY_1}X_1 - E\nabla_{Y_1}X_1 - B\sigma(X_1,Y_1) + \eta(Y_1)(X_1 + hX_1)\}=0$$

dir. Bu da teoremi ispatlar.

4.1.12. Teorem Bir (κ,μ) $-$kontak metrik manifoldu $\widetilde{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$ nın total umbilik kontak pseudo-slant altmanifoldu M olması durumunda aşağıdaki önermelerden en az biri doğru olur (Dirik ve Cetin, 2022).

I- M proper kontak pseudo-slant altmanifolddur.

II- $H \in \Gamma(\mu')$.

III- $boy\ (D^{\perp}) = 1$.

İspat $X_1 \in \Gamma(D^{\perp})$ olsun. (3.1.10) kullanılırsa,

$$(\widetilde{\nabla}_{X_1}\varphi)X_1 = g(X_1 + hX_1,X_1)\xi - \eta(X_1)(X_1 + hX_1)$$

yazılır. Buradan (2.2.1) ve (3.1.12) uygulanırsa

$$\widetilde{\nabla}_{X_1}FX_1 - \varphi\Big(\nabla_{X_1}X_1 + \sigma(X_1,X_1)\Big) - g(X_1 + hX_1,X_1)\xi = 0,$$

yazılır. Buradan (2.2.7) ve (3.1.13), uygulanırsa

$$-A_{FX_1}X_1 + \nabla^{\perp}_{X_1}FX_1 - F\nabla_{X_1}X_1 - B\sigma(X_1,X_1)$$
$$-C\sigma(X_1,X_1) - g(X_1 + hX_1,X_1)\xi = 0$$

denklemleri elde edilir. Bu denkllemin teğet bileşenlerinden

$$-A_{FX_1}X_1 + B\sigma(X_1, X_1) + g(X_1 + hX_1, X_1)\xi = 0.$$

yazılır. Bu denklemin her iki tarafı $W_1 \in \Gamma(D^{\perp})$ ile çarparsak,

$$g(A_{FX_1}X_1, W_1) + g(B\sigma(X_1, X_1), W_1) = 0$$

elde ederiz. M total umbilik altmanifold olduğundan,

$$g(A_{FX_1}W_1, X_1) + g(B\sigma(X_1, X_1), W_1) = 0$$
$$g(\sigma(W_1, X_1), FX_1) - g(\sigma(X_1, X_1), FW_1) = 0$$
$$g(W_1, X_1)g(H, FX_1) - g(X_1, X_1)g(H, FW_1) = 0$$
$$g(X_1, X_1)g(BH, W_1) - g(W_1, X_1)g(BH, X_1) = 0$$

eşitliğini elde ederiz. Yani

$$g(BH, W_1)X_1 - g(BH, X_1)W_1 = 0$$

olur. Burada $BH = 0$ yada X_1 ve W_1 lineer bağımlıdır. Eğer $BH \neq 0$ ise bu $H \in \Gamma(\mu)$ demektir. Eğer X_1 ve W_1 lineer bağımlı ise bu da anti-invaryant distribüsyon $D^{\perp}$'in bir boyutlu olduğunu gösterir. Dolayısıyla boy$(D^{\perp}) = 1$ dir. M kontak pseudo-slant altmanifold olduğundan boy$(D_\theta) \neq 0$ ve $\theta \neq 0$ dir. $d_1 d_2 \neq 0$ ve $\theta \neq 0$ olduğundan M proper kontak pseudo-slant altmanifolddur

4.1.13. Teorem Bir (κ, μ) $-$kontak metrik manifoldu $\widetilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$ nın bir kontak proper pseudo-slant altmanifoldu M olması durumunda

1- F paraleldir,

2- B paraleldir,

3- Herhangi bir $Y_1 \in \chi(M)$ ve $V \in \chi^{\perp}(M)$için $A_{CV}Y_1 + A_V EY_1 = 0.$

ifadeleri eşdeğerdir (Venkatesha ve Arkadaşları, 2019).

İspat F paralel olsun. Herhangi bir $X_1, Y_1 \in \chi^{\perp}(M), V \in \chi^{\perp}(M)$ için (3.1.27) den,

$$g\big((\nabla_{X_1}F)Y_1, V\big) = g(C\sigma(X_1, Y_1), V) - g(\sigma(X_1, EY_1), V) = 0 \qquad (4.1.19)$$

denklemini elde ederiz. (2.2.10) ve (3.1.28) göz önüne alındığında, yukarıdaki denklem;

$$-g(A_{CV}X_1, Y_1) + g(EA_VX_1, Y_1) = -g(A_{CV}X_1 - EA_VX_1, Y_1) = -g\left((\nabla_{X_1}B)V, Y_1\right) = 0$$

dir. Dolayısıyla B paraleldir. Tersi açıktır. Yine, eğer F paralel ise, o zaman (4.1.19)'da (2.2.10) kullanıllırsa,

$$-g(A_{CV}X_1, Y_1) - g(A_VX_1, EY_1) = -g(A_{CV}Y_1 + A_VEY_1, X_1) = 0$$

yazılır. Tersine

$$-g(A_{CV}Y_1 + A_VEY_1, X_1) = 0$$

Buradan

$$-g(A_{CV}X_1, Y_1) - g(A_VX_1, EY_1) = 0$$

yazılır. Bu da bize F ve B tensörlerinin paralel olduğunu söyler.

4.1.14. Teorem Bir (κ, μ) −kontak metrik manifoldu $\widetilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$'nın bir kontak proper pseudo-slant altmanifoldu M olsun. Bu durumda E'nin kovaryant türevi anti-simetriktir (Venkatesha ve Arkadaşları, 2019).

İspat Herhangi bir $X_1, Y_1, Z_1 \in \chi^{\perp}(M)$ için (3.1.26)'dan.

$$g\big((\nabla_{X_1}E)Y_1, Z_1\big) = g\big(A_{FY_1}X_1 + B\sigma(X_1,Y_1) + g(X_1 + hX_1, Y_1)\xi - \eta(Y_1)(X_1 + hX_1), Z_1\big)$$

denklemine sahibiz.

Yukarıdaki denklemde (2.2.10)'u kullanarak;

$$\begin{aligned} g\left(\left(\nabla_{X_1}E\right)Y_1, Z_1\right) &= g(\sigma(X_1,Z_1), FY_1) + g(B\sigma(X_1,Y_1), Z_1) \\ &\quad + g(X_1 + hX_1, Y_1)\eta(Z_1) - \eta(Y_1)g(X_1 + hX_1, Z_1) \\ &= -\{g(B\sigma(X_1,Z_1), Y_1) + g(\sigma(X_1,Y_1), FZ_1) - \\ &\quad g(X_1 + hX_1, Y_1)\eta(Z_1) + \eta(Y_1)g(X_1 + hX_1, Z_1)\} \\ &= -g\big((\nabla_{X_1}E)Z_1, Y_1\big) \end{aligned}$$

denklemini elde ederiz. Böylece teoremimizi ispatlamış oluruz.

4.1.15. Teorem Bir (κ,μ) $-$kontak metrik manifoldu $\widetilde{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$ nın bir kontak proper pseudo-slant altmanifoldu M olsun. Eğer B paralel ise M ya mixed-geodezik yada anti-invaryant altmanifolddur (Venkatesha ve Arkadaşları, 2019).

İspat $X_1 \in \Gamma(D_\theta)$, $Y_1 \in \Gamma(D^\perp)$ ve B paralel olsun. O zaman Teorem 4.1.13’e göre F paraleldir ve dolayısıyla $\left(\nabla_{X_1}F\right)Y_1 = 0$ dir. Bu,

$$C\sigma(X_1,Y_1) - \sigma(X_1,EY_1) = 0$$

olduğu anlamına gelir.

Yukarıdaki denklemde X_1 yerine EX_1 kullanılırsa

$$C\sigma(EX_1,Y_1) - \sigma(EX_1,EY_1) = 0$$

Aynı zamanda $Y_1 \in \Gamma(D^\perp)$ için $EY_1 = 0$ olduğundan

$$C\sigma(EX_1,Y_1) = 0$$

dir. Yukarıdaki denklemde X_1 yerine EX_1 kullanılır ve aynı zamanda eşitlik (4.1.1) uygulanırsa

$$-\sigma(E^2X_1, Y_1) = cos^2\theta\sigma(X_1, Y_1) = 0$$

denklemine indirgenir.

Buradan da ya $\theta = \frac{\pi}{2}$ (M anti-invaryant) ya da $\sigma(X_1, Y_1) = 0$ (M mixed-geodezik) altmanifold olur. Bu da ispatımızı tamamlar.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezimizde, $(\kappa, \mu)-$kontak metrik manifoldun kontak pseudo-slant altmanifoldlarının diferansiyel geometrisi çalışıldı. Bir $(\kappa, \mu)-$kontak metrik manifoldun altmanifoldlarının kontak pseudo-slant altmanifold olması için gerek ve yeterli şartlar verildi. Bir $(\kappa, \mu)-$kontak metrik manifoldun kontak pseudo-slant altmanifoldunun tanımından ortaya çıkan distribüsyonların integrallenebilirliği için gerek ve yeter şartlar araştırıldı. Son olarak, distribüsyonların geodeziklik kavramları tanımlandı ve bazı sonuçlar elde edildi.

Teoremlerde elde edilen sonuçlar başka manifoldlarda da çalışılabilir ve farklı sonçlar elde edilebilir.

KAYNAKLAR

Atçeken, M. (2010). Warped Product Semi-Slant Submanifolds in Kenmotsu Manifold. *Turk J. Mat.* (34), 425-432.

Atçeken, M and S. K. Hui. (2012). Slant and Pseudo-Slant Submanifolds in (LCS)-n Manifolds. *Czechoslovak M. J.,* 63(138), 177-190.

Atçeken, M., Dirik, S. and Yıldırım, U. (2015). Pseudo-Slant Submanifolds Of A Locally Decomposable Riemannian manifold, *J. Ad. Math.,* 11(8), 5587–5599.

Boothby, W. M. (1986). An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry. *Academic Press, Inc.,* London.

Cabrerizo, J. L., Carriazo, A., Fernandez, L. M. and Fernandez, M. (2000). Slant Submanifolds in Sasakian Manifolds. *Glasgow Math., J.* 42, 125-138.

Cabrerizo, J. L., Carriazo, A., Fernandez, L. M and Fernandez, M. (2000). Structure on a Slant Submanifolds of a Contact Manifold. *Indian J. Pure and Appl. Math.,* 31(7),857-864.

Cabrerizo, J. L., Carriazo, A., Fernandez, L. M and Fernandez, M. (1999). Semi-Slant Submanifolds of a Sasakian Manifold. 78, 183-199.

Chen, B. Y. (1973). Geometry of Submanifolds, Pure and Applied Mathematics., No. 22. *Marcel Dekker, Inc.,* New York.

Chen, B. Y. (1990). Geometry of Slant Submanifolds., *Katholieke Universiteit Leuven.*

Chen, B. Y. and Tazawa, Y. (1990). Slant Surfaces With Codimensions. *2, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.* 11(3), 29-43.

Dirik, S. and Cetin, V. (2022). The Geometry of Contact Pseudo-Slant Submanifolds of a $(\kappa, \mu)-$Contact Metric Manifold, *Journal of Engineering Research and Applied Science*, 11(2), 2171-2177.

Dirik, S. (2019). The Integrability Conditations Of Contact Pseudo $-$ Slant Submanifolds In A $(\kappa, \mu)-$Contact Metric Manifold, 2. Uluslararasi 19 Mayis Yenilikçi Bilimsel Yaklaşimlar Kongresi, 331-339.

Dirik, S. (2019). Geodesic Stiuations Of Contact Pseudo-Slant Submanifolds İn A $(\kappa, \mu)-$Contact Metric Manifold, *2. Uluslararasi 19 Mayis Yenilikçi Bilimsel Yaklaşimlar Kongresi*, 340-350

Dirik, S. and Atçeken, M. (2014) On The Geometry of Pseudo-slant submanifolds of a Kenmotsu Manifolds, *Gulf J. Math.,* 2, 51-66, Dirik, S. and Atçeken, M. (2016). Pseudo-Slant Submanifolds In Cosymplectic Space Forms, *Acta Universitatis Sapientiae: Mathematica, 8*, 1, 53-74, doi: 10.1515/ausm-2016-0004.

Dirik, S., Atçeken, M. and Yildirim, U. (2016). Contact Pseudo-Slant Submanifold of A Kenmotsu Manifold. *Journal of Mathematics and Computer Science-ISR Pupliciations*, 16(3), 386-394.

Duggal, K. L. and Bejancu,A. (1996.) Lightlike Submanifolds of Semi-Riemannian Manifold and Applications. *Kluwer, Dordrecht.*

Fidan, B. (2019). *Kosimplektik Manifoldun Kontak Pseudo-Slant Altmanifoldlarinin Geometrisi Üzerine,* Yüksek Lisans Tezi, Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Amasya

Hacısalihoğlu, H. H. (1980). *Yüksek Diferensiyel Geometriye Giriş.* Fırat Universitesi Fen Fakültesi Yayınları.

Hacısalihoğlu, H. H. (1983). *Diferensiyel Geometri.,* İnönü Universitesi Yayınları.

Khan M. A, Uddin S and Singh K. (2011). A Classification on Totally Umbilical Proper Slant and Hemi-Slant Submanifolds of a Nearly Trans-Sasakian Manifold. *Differential Geometry-Dynamical Systems.*, 13, 117-127.

Khan V. A and Khan M. A. (2007). Pseudo-Slant Submanifolds of a Sasakian Manifold., *Indian J. Prue Appl. Math.*, (38)31-42.

Khan V. A and Khan M. A. (2007). Slant and Semi-Slant Submanifolds of a Sasakian Manifold. *Mathematica Slovaca*, Vol. (57)5,483-494.

Lotta, A. (1996). Slant Submanifolds in Contact Geometry. *Bull. Math. Soc. Roumanie*, 39, 183-198.

Lotta, A. (1998). Three-Dimensional Slant Submanifolds of K-Contact Manifolds. *Balkan J. Geom. Appl.*, 3 (1), 37-51.

O'Neill B. (1983). Semi-Riemann Geometry With Applications to Relativit. *Pure and Applied Mathematics,* 103. Acedemic Press, Inc. Newyork.

Pandey, P. K. and Gupta, R. S. (2008). Characterization of a Slant Submanifold of a Kenmotsu Manifold. *Novi. Sad., J. Math,* Vol. 38 (1), 97-102.

Koufogiorgos, T. (1997). Contact Riemannian manifolds with constant sectional curvature, *Tokyo Journal of Mathematics,* 20, 1,13-22.

Uygun, P. (2019). (κ, μ) *−Parakontak Metrik Manifold ve Altmanifoldlarinin Geometrisi Üzerine,* Doktora Tezi, Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Tokat

Venkatesha, V., Srikantha, N. and Siddesha, M.S. (2019). On Pseudo-Slant Submanifolds Of (κ, μ) $-$Contact Space Forms, *Palestine Journal of Mathematics,* Vol. 8(2), 248–257

Yano, K. and Kon, M. (1984). Structures on Manifolds. *Series in Pure Mathematics,* Singapore: 3. World Scientific Publishing Co., 72.

Yano, K. and Kon, M. (1979). Anti-Invariant Submanifolds of Sasakian Space Form. *Kodai Math,* J. 2, 171-186

ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı : Vezir ÇETİN

Bilimsel Faaliyetler (Yayınlar, Bildiriler, Katıldığı Projeler)

1-) Dirik, S. and Cetin, V. 2022. The Geometry of Contact Pseudo-Slant Submanifolds of a (K, μ)-Contact Metric Manifold, *Journal of Engineering Research and Applied Science*, 11(2), 2171-2177.