



**LOBATTO-CHEBYSHEV YÖNTEMİNİN
İKİ ÇATLAK İÇEREN BİR ELASTİSİTE
PROBLEMİNE UYGULAMASI**

(Yüksek Lisans Tezi)

Sabahat ÖZKAN

Kütahya - 2023

T.C.
KÜTAHYA DUMLUPINAR ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
Matematik Ana Bilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

**LOBATTO-CHEBYSHEV YÖNTEMİNİN İKİ ÇATLAK İÇEREN
BİR ELASTİSİTE PROBLEMİNE UYGULAMASI**

Danışman:
Dr. Öğr. Üyesi İlkem Turhan ÇETİNKAYA

Hazırlayan:
Sabahat ÖZKAN

Kütahya - 2023

Kabul ve Onay

KÜTAHYA DUMLUPINAR ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

Matematik Ana bilim dalında, 202085211017 öğrenci numaralı, Sabahat ÖZKAN'nın hazırlamış olduğu "LOBATTO-CHEBYSHEV YÖNTEMİNİN İKİ ÇATLAK İÇEREN BİR ELASTİSİTE PROBLEMİNE UYGULAMASI" başlıklı yüksek lisans tez çalışması ile ilgili tez savunma sınavı jüri tarafından yapılmış ve adayın tezinin OY BİRLİĞİ ile kabul edilmesine karar verilmiştir.

27/01/2023

Tez Jürisi	İmza	
	Kabul	Red
Dr. Öğr. Üyesi İlkem Turhan ÇETİNKAYA (Danışman)		
Prof. Dr. Elçin YUSUFOĞLU		
Dr. Öğr. Üyesi Hüseyin OĞUZ		

Doç. Dr. Arif KOLAY

Enstitü Müdürü

Bilimsel Etik Bildirimi

Yüksek Lisans tezi olarak hazırladığım “*Lobatto-Chebyshev Yönteminin İki Çatlak İçeren Bir Elastisite Problemine Uygulaması*” adlı çalışmanın öneri aşamasından sonuçlandığı aşamaya kadar geçen süreçte bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle uyduğumu, tez içindeki tüm bilgileri bilimsel ahlak ve gelenek çerçevesinde elde ettiğimi, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığımı, bu çalışmamda doğrudan veya dolaylı olarak yaptığım her alıntıya kaynak gösterdiğimi ve yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu beyan ederim.

27/01/2023

Sabahat ÖZKAN

Özgeçmiş

Rasim Dokur Anadolu Lisesi'nden 2015 yılında mezun oldu. Lisans eğitimini Kütahya Dumlupınar Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde tamamladı.



ÖZET**LOBATTO-CHEBYSHEV YÖNTEMİNİN İKİ ÇATLAK İÇEREN BİR
ELASTİSİTE PROBLEMİNE UYGULAMASI****ÖZKAN, Sabahat****Yüksek Lisans Tezi, Matematik Ana Bilim Dalı****Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi İlkem Turhan ÇETİNKAYA****Ocak, 2023, 50 sayfa**

Bu tez çalışmasında homojen olmayan bir ortamda iki çatlak içeren bir elastisite problemi ele alınmıştır. Problem elastisite teorisinin temel denklemleri, problemin sınır koşulları, Airy gerilme fonksiyonunun Fourier dönüşüm tekniği kullanılarak bir singüler integral denklem sistemine indirgenmiştir. Elde edilen singüler integral denklem sistemi Gauss-Chebyshev ve Lobatto-Chebyshev yöntemi yardımıyla çözülmüştür. Böylece çatlak uçlarındaki normalize edilmiş gerilme şiddet faktörleri (GŞF) farklı yükleme şartları altında belirlenmiştir. Sonuçlar ayrıntılı bir şekilde analiz edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Çatlak problemleri, Gauss-Chebyshev Yöntemi, Gerilme Şiddet Faktörü, Lobatto-Chebyshev Yöntemi, Singüler İntegral Denklem

ABSTRACT**AN APPLICATION OF LOBATTO-CHEBYSHEV METHOD ON AN
ELASTICITY PROBLEM WITH TWO CRACKS****ÖZKAN, Sabahat****Master Thesis, Department of Mathematics****Supervisor: Asst. Prof. İlker Turhan ÇETİNKAYA****January, 2023, 50 pages**

In this thesis study, an elasticity problem with two cracks in a nonhomogeneous medium is considered. The problem is reduced to a system of singular integral equations with the help of the basic equations of the elasticity theory, boundary conditions of the problem and Fourier transform of Airy stress function. The reduced system of singular integral equations is solved by Gauss-Chebyshev method and Lobatto-Chebyshev method. Normalized stress intensity factors (SIFs) are determined under different loading conditions. The numerical results are analyzed in detail.

Keywords: Crack Problems, Gauss-Chebyshev Method, Lobatto-Chebyshev Method, Singular Integral Equation, Stress Intensity Factor

Önsöz

Yüksek Lisans Tez Çalışması sürecim boyunca tüm bilgi birikimi, deneyim ve desteği ile beni sabırla yönlendiren benden hiç yardımını esirgemeyen tez danışmanım Dr. Öğr. Üyesi İlkem Turhan ÇETİNKAYA'ya en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Maddi ve manevi desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen çalışma azmim ve gayretimın kaynağı olan annem Selver, babam Ercan ve abim Onur ÖZKAN'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Sabahat ÖZKAN



İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET.....	v
ABSTRACT	vi
TABLolar LİSTESİ.....	x
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	xi
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ	xii
GİRİŞ	1

BİRİNCİ BÖLÜM

SİNGÜLER İNTEGRAL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

1.1. ÖN BİLGİLER	6
1.2. SİNGÜLER İNTEGRAL DENKLEMLERİN GAUSS İNTEGRASYON FORMÜLLERİ İLE NÜMERİK ÇÖZÜMÜ	8
1.2.1. $\kappa = 0$ İçin Gauss-Jacobi İntegrasyon Formülü	9
1.2.2. $\kappa = 1$ İçin Gauss-Chebyshev İntegrasyon Formülü	10
1.2.3. $\kappa = -1$ İçin Gauss-Chebyshev İntegrasyon Formülü.....	10
1.3. SİNGÜLER İNTEGRAL DENKLEMLERİN LOBATTO-CHEBYSHEV YÖNTEMİ İLE NÜMERİK ÇÖZÜMÜ	11

İKİNCİ BÖLÜM

HOMOJEN OLMAYAN ORTAMDA İKİ ÇATLAK PROBLEMİ

2.1. HOMOJEN OLMAYAN ORTAMDA İKİ ÇATLAK PROBLEMİ.....	16
2.2. PROBLEMİN SİNGÜLER İNTEGRAL DENKLEM SİSTEMİNE İNDİRGENMESİ.....	16
2.3. SİNGÜLER İNTEGRAL DENKLEM SİSTEMİNİN GAUSS-CHEBYSHEV YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ	30
2.4. SİNGÜLER İNTEGRAL DENKLEM SİSTEMİNİN LOBATTO- CHEBYSHEV YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ	31

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

GERİLME ŞİDDET FAKTÖRÜNÜN HESAPLANMASI VE NÜMERİK SONUÇLAR

3.1. GERİLME ŞİDDET FAKTÖRÜNÜN HESAPLANMASI VE NÜMERİK SONUÇLAR	35
--	----

SONUÇ	46
KAYNAKÇA	47
DİZİN	50



TABLOLAR LİSTESİ

Sayfa

Tablo 3.1: Düzgün Yayılı Yük Durumunda Normalize Edilmiş GŞF Değerlerinin Tek Çatlak Durumuyla Karşılaştırılması.....	38
Tablo 3.2: Eksponansiyel Yayılı Yük Durumunda Normalize Edilmiş GŞF Değerlerinin Tek Çatlak Durumuyla Karşılaştırılması.....	38
Tablo 3.3: Düzgün Yayılı Yük Altında Çatlak Uçlarındaki Normalize Edilmiş GŞF Değerleri. ($q_1 = -p_0$, $q_2 = -p_0$, $\nu = 0.3$, $\beta a = 0$)	40
Tablo 3.4: Düzgün Yayılı Yük Altında Çatlak Uçlarındaki Normalize Edilmiş GŞF Değerleri. ($q_1 = -p_0$, $q_2 = -p_0$, $\nu = 0.3$, $\beta a = 0$)	40
Tablo 3.5: Düzgün Yayılı Yük Altında Çatlak Uçlarındaki Normalize Edilmiş GŞF Değerleri ($q_1 = -p_0$, $q_2 = -p_0$, $\nu = 0.3$, $\beta a = 0.5$).....	41
Tablo 3.6: Düzgün Yayılı Yük Altında Çatlak Uçlarındaki Normalize Edilmiş GŞF Değerleri ($q_1 = -p_0$, $q_2 = -p_0$, $\nu = 0.3$, $\beta a = 0.5$).....	41
Tablo 3.7: Eksponansiyel Yayılı Yük Altında Çatlak Uçlarındaki Normalize Edilmiş GŞF Değerleri ($q_1 = -\varepsilon_0 E_0 e^{\beta x}$, $q_2 = -\varepsilon_0 E_0 e^{\beta x}$, $\nu = 0.3$, $\beta a = 0$)	42
Tablo 3.8: Eksponansiyel Yayılı Yük Altında Çatlak Uçlarındaki Normalize Edilmiş GŞF Değerleri ($q_1 = -\varepsilon_0 E_0 e^{\beta x}$, $q_2 = -\varepsilon_0 E_0 e^{\beta x}$, $\nu = 0.3$, $\beta a = 0$)	42

ŞEKİLLER LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 2.1: Problemin Geometrisi	16
Şekil 3.1: Homojen Olmayan Bir Ortamda Düzgün Yayılı Yük Altında $(c_1+c_2)/d$ Parametresinin Normalize Edilmiş GŞF Üzerindeki Etkisi	39
Şekil 3.2: Non Homojenlik Parametresinin Düzgün Yayılı Yük Altında Çatlak Uçlarındaki Normalize Edilmiş GŞF Üzerindeki Etkisi ($\nu = 0.3$)	43
Şekil 3.3: Homojen Bir Ortamda Düzgün Yayılı Yük Altında Poisson Oranı ν 'nün Normalize Edilmiş GŞF Üzerindeki Etkisi	43
Şekil 3.4: Homojen Olmayan Bir Ortamda Düzgün Yayılı Yük Altında Poisson Oranı ν 'nün Normalize Edilmiş GŞF Üzerindeki Etkisi	44
Şekil 3.5: Non Homojenlik Parametresinin Eksponansiyel Yayılı Yük Altında Çatlak Uçlarındaki Normalize Edilmiş GŞF Üzerindeki Etkisi ($\nu = 0.3$).....	45
Şekil 3.6: Homojen Olmayan Bir Ortamda Eksponansiyel Yayılı Yük Altında Poisson Oranı ν 'nün Normalize Edilmiş GŞF Üzerindeki Etkisi	45

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

<u>Simge</u>	<u>Açıklama</u>
$T_n(x)$	Birinci Çeşit Chebyshev polinomları
$U_{n-1}(x)$	İkinci Çeşit Chebyshev polinomları
u	Yatay yer değiştirme bileşeni
v	Düşey yer değiştirme bileşeni
σ_x, σ_y	Sırasıyla x- ve y- doğrultularındaki normal gerilme bileşenleri
σ_{xy}	Kayma gerilme bileşeni
ϕ	Airy fonksiyonu
$\varepsilon_x, \varepsilon_y$	Sırasıyla , x- ve y- doğrultusundaki şekil değiştirme bileşenleri
E	Elastisite (Young) modülü
G	Kayma modülü
γ_{xy}	Teğetsel şekil değiştirme bileşeni
ν	Poisson oranı
<u>Kısaltmalar</u>	<u>Açıklama</u>
GŞF	Gerilme Şiddet Faktörü



TEZ METNİ

GİRİŞ

İntegral denklemler ile ilgili ilk çalışmalar 19.yy'ın başlarında başlamış olmakla beraber aynı yüzyılın ortasından itibaren araştırmalara daha çok önem verilerek elde edilen verilerden sonuçlar alınmaya başlanmıştır. İntegral denklemler çok geniş kapsamlı bir konu olduğu için denklem sınıflarına ayrılmıştır. Singüler integral denklemler teorisi ise Poincare ve Hilbert tarafından başlatılmış olup Mikhlin, Muskhelishvili ve arkadaşları tarafından hidrodinamik ve elastisite teorisindeki problemlerin uygulamaları için geliştirilmiştir. Singüler integral denklemler, aerodinamik, hidrodinamik, elastisite ve plastisite ile ilgili problemlerin çözümünde yaygın olarak kullanılmıştır. Uygulamalı fizik ve mühendislikte kullanılan karma tip sınır değer problemlerin formülasyonunda ise birinci ve ikinci çeşit Cauchy tipli singüler integral denklem ve denklem sistemleri elde edilmektedir. Bu tür denklemler katı mekaniğindeki çatlak problemlerinin büyük bir çoğunluğunun çözümünde önemli bir etkiye sahiptir.

Şimdi de singüler integral denklemler ve çatlak problemleriyle ilgili yapılan bazı çalışmalardan bahsedelim.

Özellikle mekanik problemlerin modellenmesinde karşımıza çıkan singüler integral denklemlerle ilgili literatürde birçok çalışma yapılmıştır. Bunlardan bazıları aşağıda özetlenmiştir.

Krenk (1975) de singüler integral denklemler probleminin farklı indeks değerler için Gauss-Jacobi kuadratur formülü verilmiştir. Yöntemin farklı indeks değerleri için yakınsaması incelenmiştir. Bir elastisite problemi örnek verilerek sayısal sonuçlar gösterilmiştir. Theocaris ve Ioakimidis (1977) de sonsuz izotropik ve elastik bir ortamda çatlak problemi ele alınmıştır. Lobatto-Chebyshev ve Gauss-Chebyshev kuadratur yöntemleri probleme uygulanmış, çatlak uçlarındaki GŞF değerleri hesaplanmıştır. Lobatto-Chebyshev yönteminin daha hassas sonuçlar verdiği ve daha hızlı yaklaşım gösterdiği sonucuna varılmıştır. Gerasoulis ve Srivastav (1981) de Cauchy çekirdekli singüler integral denklemlerin çözümü için alternatif bir teknik verilmiştir. Elde edilen sonuçlar Gauss-Chebyshev, Lobatto-Chebyshev kuadratur yöntemleri ve gerçek çözüm ile karşılaştırılmıştır. Ioakimidis (1981) de bir elastisite problemi üzerinde Gauss-Jacobi, Radau-Jacobi ve Lobatto-Jacobi kuadratur yöntemleri kullanılarak $\kappa = -1$ indis durumu için singüler integral denklem sistemi, lineer denklem

sistemine indirgenmiştir. Gerekli düzenlemeler yapılarak özel olarak, Gauss-Chebyshev, Radau-Chebyshev ve Lobatto-Chebyshev kuadratur yöntemlerinin de probleme uygulanabilirliği açıklanmıştır. Ioakimidis (1983) de çatlak problemlerindeki GŞF değerlerini hesaplamak için Cauchy tip singüler integral denklemlere Lobatto-Chebyshev yöntemi ile yaklaşıldığındaki yakınsaklık durumu incelenmiştir. Venturino (1993) de singüler integral denklemlerin çözümünde kullanılabilmesi için bir kuadratur yöntem geliştirilmiştir. Yöntemi destekleyecek sayısal örnekler verilmiştir ve farklı indeks değerleri için yakınsama değerleri bulunmuştur. Abdou ve Nasr (2003) da bir temas probleminden elde edilen Cauchy çekirdekli ikinci çeşit Fredholm integral denkleme Legendre polinomları yardımıyla yaklaşmıştır. Problem bir lineer denklem sistemine indirgenmiştir. Yöntemin sayısal uygulaması yapılmıştır. Okecha (2007) de birinci çeşit Cauchy singüler integral denklemlerin çözümüne Lagrange enterpolasyonu ve Gauss-Jacobi kuadratur yöntemine dayanan bir yöntemle yaklaşmıştır. Yöntemin doğruluğunu göstermek için sayısal örnekler verilmiş ve yakınsaklık analizi yapılmıştır. Jin, Keer ve Wang (2008) de ikinci çeşit singüler integral denklemler ele alınmış, pratik bir yaklaşım verilmiştir. Çözüme, Cauchy singüler terimin bir kısmı kapalı formda belirlenerek, diğer kısmı da Gauss Jacobi kuadraturüyle hesaplanacak şekilde ikiye ayrılarak yaklaşmıştır. Uygulaması ve programlaması kolay bir algoritma sunmuşlardır.

Bizim de tez konumuz olan ve mekanikte çok önemli bir yere sahip olan çatlak problemleri ile ilgili bazı çalışmalar aşağıda özetlenmiştir.

Erdogan ve Biricikoglu (1973) de Cauchy singüler integral denklemleri yardımıyla elastik yarı düzlem üzerinde ele aldıkları arayüzeyden geçen sonlu bir çatlak içeren iki bağlı elastik yarı düzlem problemi modellenmiştir. Çatlak uçlarındaki GŞF, singüler noktadaki normal ve kayma bileşenleri, çatlak yüzeyi yer değiştirmeleri bulunmuştur. Ratwani ve Gupta (1974) de paralel çatlaklara sahip çok katmanlı bir kompozitin düzlem şekil değiştirme problemi ele alınmıştır. Problem, singüler integral denklem sistemine indirgenmiştir. Birbirinden farklı iki örnek verilerek paralel ve eşdoğrusal çatlaklar arasındaki etkileşim incelenmiştir. Malzeme özelliklerinin çatlak uçlarındaki GŞF değerlerine etkisi incelenmiştir. Krenk (1975) de elastik bir şeritte eğik çatlak içeren bir çatlak problemi ele almıştır. Çatlak içeren bir düzlem ve çatlak içermeyen bir şerit için bir metot sunmuştur. Erdol ve Erdogan (1976) da pertürbasyon probleminin çözümü için kullanılan çatlak yüzey çekmelerinin değerlendirilmesinde iki

boyutlu sürekli bir şerit ele alınarak eğilme etkisindeyken GŞF değerleri belirlenmiştir. Adams (1980) da sonsuz elastik bir şerit yüzeyine yerleştirilmiş Griffith çatlakları içeren bir problem ele alınmıştır. Problem singüler integral denkleme indirgenmiştir. Farklı durumlar için GŞF değerleri, çatlak yer değiştirmeleri ve çatlak enerjileri bulunmuş ve karşılaştırılmıştır. Ioakimidis ve Theocaris (1980) de izotropik bir düzlemde köşe noktası olan bir çatlak problemi ele alınmıştır. Cauchy tipli singüler integral denklem Lobatto –Chebyshev yöntemi ile çözdürülmüştür. Problemin çatlak uçlarındaki GŞF değerlerinin elde edilebilmesi için bir yöntem önerilmiştir ve bu yöntemin geçerliliğini gösterebilmek için sayısal sonuçlar tablo ile verilmiştir. Gerasoulis (1986) da Gauss-Chebyshev ve Lobatto-Chebyshev yöntemleri için tekil değer ayrıştırması ele alınmıştır. Gauss-Chebyshev ve Lobatto-Chebyshev matrislerinin tekil değerleri ve tekil vektörleri için kapalı form ifadeleri bulunmuştur. Tekil değer ayrışmaları elde edilmiştir. Ioakimidis (1981) tarafından önerilen iteratif bir yöntemin yakınsaklığını araştırmak için bu ayrıştırma farklı örnek problemler üzerinde kullanılarak çözümlenmiş, sonuçlar karşılaştırılmıştır. Ladopoulos, Zisis ve Wang (1988) de daha önce integral dönüşüm tekniği kullanılarak Hilbert uzayında çözümlenen sabit bir p gerilmesine maruz kalan sonsuz bir düzlemde simetrik olmayan bir çatlak problemi ele alınmıştır. Daha önceki yapılan çalışmalarla karşılaştırmak için problemin simetrik hali de incelenmiştir. Çatlak uçlarındaki GŞF değerleri bulunmuştur. Delale ve Erdogan (1988) da daha önce ele alınmış olan homojen olan ve homojen olmayan iki yarı düzlem arasında bir arayüz çatlağı içeren elastisite problemi ele alınmıştır. Problem singüler integral denklemler sistemine indirgenmiştir. Problemin çatlak uçlarındaki asimptotik davranışı incelenmiştir. Problemin GŞF değerleri bulunmuştur. Elde edilen sonuçların birbirlerini nasıl etkiledikleri açıklanmıştır. Suo ve Hutchinson (1990) da genel kenar yüklerine maruz kalan iki sonsuz elastik tabakanın ara yüzü boyunca uzanan yarı sonsuz çatlak problemi için temel çözüm yöntemi sunulmuştur. Yöntemin uygulanabilirliği gösterilmiştir. (Yusufoğlu ve Turhan 2012, 2013) de, ortotrop bir şeritte tek çatlak içeren bir karma tip sınır değer problemine sırasıyla, iteratif yöntem ve Gauss-Chebyshev yöntemleri uygulanmıştır. Galybin (2018) de bir düzlem boyunca örtüşmeyen dikdörtgen çatlaklar durumu için standart integral denklem sistemi, singüler integral denklem sistemine indirgenmiştir. Kesme yüklemesi için integral denklemlerin normal yüklemesindeki forma dönüştürülebileceği gösterilmiştir. Gauss-Chebyshev kuadratür yöntemi kullanılarak çatlak problemleri çözülmüştür. Çatlak açılmaları

hesaplanmıştır. Geliştirilen yaklaşımın hidrolik kırılma yayılımının modellenmesinde önemli olan süreksiz yükleri kaldırabildiği gösterilmiştir.

Bu tez çalışması üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, singüler integraller denklemlerin Gauss kuadratür formülleri ve Lobatto-Chebyshev yöntemi ile çözümleri hakkında bilgi verilmiştir. İkinci bölümde, homojen olmayan ortamdaki bir elastisite problemi, elastisite teorisinin temel denklemleri ve Airy gerilme fonksiyonunun Fourier dönüşümü kullanılarak Cauchy tür singüler integral denklem sistemine dönüştürülmüştür. Elde edilen singüler integral denklem sistemi Gauss-Chebyshev ve Lobatto-Chebyshev yöntemi ile bir lineer denklem sistemine indirgenmiştir. Üçüncü bölümde normalize edilmiş GŞF için nümerik çözümler verilmiş, bu çözümler grafiklerle sunulmuş ve yorumlanmıştır. Son olarak sonuç bölümünde, elde edilen nümerik sonuçlar mekaniğin ışığında yorumlanmıştır.



BİRİNCİ BÖLÜM

SİNGÜLER İNTEGRAL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

1.1. ÖN BİLGİLER

Uygulamalı fizik ve mühendislikteki problemlerin modellenmesinde singüler integral denklemler ortaya çıkar. Özellikle katı mekaniğindeki çatlak ve temas problemlerinin çözümünde önemli bir rol oynar. Bu bölümde, (1.1) denklemi ile verilen birinci çeşit Cauchy çekirdekli singüler integral denklem ele alınmıştır (Erdogan, Gupta ve Cook, 1973).

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\phi(t) dt}{t-x} + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 K(x,t) \phi(t) dt = f(x) \quad , \quad (-1 < x < 1) \quad (1.1)$$

burada $\phi(x)$ bilinmeyen fonksiyon, $f(x)$ ve $K(x,t)$ $[-1,1]$ aralığında H-sürekli bilinen fonksiyonlardır. (1.1) singüler integral denklemi bir Riemann-Hilbert problemine indirgenebilir. Plemelj formülleri yardımıyla elde edilen Riemann-Hilbert probleminin çözümü

$$X(z) = (z-1)^{\frac{1}{2}+N} (z+1)^{\frac{-1}{2}+M}$$

olarak ifade edilebilir (Erdogan, Gupta ve Cook, 1973; Muskhelishvili, 1953).

$z \rightarrow \infty$ iken $Z^{-N-M} X(z) \rightarrow 1$ ve $N, M \in \mathbb{C}$ dir. Burada N ve M genellikle aşağıdaki şekilde seçilebilir:

$$-1 < \frac{1}{2} + N < 1 \quad , \quad -1 < \frac{-1}{2} + M < 1 \quad (1.2)$$

Bu durum, -1 ya da 1 uçlarında ϕ bilinmeyen fonksiyonunun ya sınırlı ya da integrallenebilir singülerliğe sahip olduğunu vurgular. (1.2) denklemindeki keyfi N ve M tamsayılarının seçimi, problemin indeksi tanımını doğurur yani;

$$\kappa = -(N + M)$$

şeklindedir. Böylece, fundamental fonksiyon

$$\omega(x) = (1-x)^{\frac{1}{2}+N} (1+x)^{\frac{-1}{2}+M} \quad (-1 < x < 1)$$

olarak ifade edilir.

İndeks teorisine göre (Erdogan, Gupta ve Cook, 1973; Muskhelishvili, 1953), eğer ϕ fonksiyonu her iki uçta da integrallenebilir singülerliğe sahipse, (1.2) denkleminde $N = -1$, $M = 0$ dir. Böylece

$$\kappa = 1, X(z) = (z^2 - 1)^{-1/2}, \omega(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$$

dir. Bu durumda, tek çözüm elde edebilmek için, ϕ aşağıdaki ek şartı sağlamalıdır;

$$\int_{-1}^1 \phi(x) dx = A \quad (1.3)$$

burada A sıfırda olabilen bilinen bir sabittir.

Eğer ϕ fonksiyonu bir uçta sınırlı ve bir diğer uçta integrallenebilir singülerliğe sahipse,

$$N = 0, M = 0, \kappa = 0 \text{ için}$$

$$X(z) = (z-1)^{1/2} (z+1)^{-1/2}, \omega(x) = (1-x)^{1/2} (1+x)^{-1/2}$$

ya da,

$$N = -1, M = 1, \kappa = 0 \text{ için}$$

$$X(z) = (z-1)^{-1/2} (z+1)^{1/2}, \omega(x) = (1-x)^{-1/2} (1+x)^{1/2}$$

dir.

Eğer ϕ fonksiyonu her iki uçta da sınırlı ise (1.2) denkleminde $N = 0$, $M = 1$ dir. Böylece

$$\kappa = -1, X(z) = (z^2 - 1)^{1/2}, \omega(x) = (1 - x^2)^{1/2}$$

dir. Bu durum, ek olarak çözümün aşağıdaki tutarlılık denklemini sağlamasını gerektirir:

$$\int_{-1}^1 \frac{F(t) dt}{\omega(t)} = 0 \quad (1.4)$$

1.2. SİNGÜLER İNTEGRAL DENKLEMLERİN GAUSS İNTEGRASYON FORMÜLLERİ İLE NÜMERİK ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde (1.1) singüler integral denkleminin çözümü Gauss kuadratr formülleriyle belirlenecektir (Erdogan, Gupta ve Cook, 1973).

$$\phi(x) = \omega(x)g(x) \quad , \quad (-1 < x < 1) \quad (1.5)$$

şeklinde çözüm aransın. Burada

$$\omega(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta \quad , \quad -1 < (\alpha, \beta) < 1 \quad , \quad |x| < 1$$

ve

$$g(x) \quad , \quad -1 \leq x \leq 1 \quad \text{kapalı aralığında sınırlı sürekli bir fonksiyondur.} \quad (1.5)$$

denklemi (1.1) denkleminde yazılarak

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{g(t)}{t-x} \omega(t) dt + \int_{-1}^1 k(x,t) g(t) \omega(t) dt = f(x) \quad , \quad (-1 < x < 1) \quad (1.6)$$

elde edilir. Böylece (1.6) denklemini bilinmeyen $g(t_j)$, $(j=1, \dots, n)$ olan

$$\frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^n W_j g(t_j) \left[\frac{1}{t_j - x_i} + \pi k(x_i, t_j) \right] = f(x_i) \quad (i=1, \dots, n-\kappa)$$

lineer cebirsel denklem sistemine indirgenebilir. Burada t_j , $(j=1, \dots, n)$ Gauss kuadratrle ilgili ortogonal polinomların sıfırları ve W_j ağırlıklardır. t_j ve x_i , $[-1, 1]$ de ortogonal olan $P_k^{(\alpha, \beta)}(x)$ Jacobi polinomları aracılığıyla aşağıdaki şekilde belirlenir:

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(t_j) = 0,$$

$$P_{n-\kappa}^{(\alpha+\kappa, \beta+\kappa)}(x_i) = 0 \quad \kappa = \pm 1$$

için,

$$P_n^{(\alpha+1, \beta-1)}(x_i) = 0 \quad , \quad \kappa = 0 \quad , \quad -1 < \alpha < 0 \quad , \quad 0 < \beta < 1$$

için,

$$P_n^{(\alpha-1, \beta+1)}(x_i) = 0 \quad , \quad \kappa = 0 \quad , \quad 0 < \alpha < 1 \quad , \quad -1 < \beta < 0$$

için, Gauss kuadratür formülleriyle ilgili ayrıntılı bilgi için (Hochstrasser,1964) e bakınız.

Farklı indeks durumları için, (1.1) singüler integral denkleminin çözümleri aşağıdaki şekilde özetlenebilir.

1.2.1. $\kappa = 0$ İçin Gauss-Jacobi İntegrasyon Formülü

(1.1) singüler integral denkleminin çözümü sol uçta integrallenebilir singülerliğe sahip, sağ uçta ise sınırlı olsun. Bu durumda

$$\kappa = 0, \alpha = -\frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{2} \text{ ve } \omega(t) = (1-t)^{-1/2} (1+t)^{1/2}$$

olduğu biliniyor. (1.6) integral denklemi aşağıdaki lineer cebirsel denklem sistemine indirgenebilir:

$$\sum_{i=1}^n \frac{2(1+t_i)}{2n+1} g(t_i) \left[\frac{1}{t_i - x_k} + \pi k(x_k, t_i) \right] = f(x_k) \quad (k = 1, \dots, n)$$

burada t_i ve x_k

$$P_n^{(-1/2, 1/2)}(t_i) = 0, \quad t_i = \cos\left(\frac{2i-1}{2n+1}\pi\right), \quad (i = 1, \dots, n)$$

$$P_n^{(1/2, -1/2)}(x_k) = 0, \quad x_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{2n+1}\right), \quad (k = 1, \dots, n)$$

ile verilir.

(1.1) singüler integral denkleminin çözümü sağ uçta integrallenebilir singülerliğe sahip, sol uçta ise sınırlı olsun. Bu durumda,

$$\kappa = 0, \alpha = \frac{1}{2}, \beta = -\frac{1}{2} \text{ ve } \omega(t) = (1-t)^{1/2} (1+t)^{-1/2}$$

olduğu biliniyor. (1.4) denklemi

$$\sum_{i=1}^n \frac{2(1-t_i)}{2n+1} g(t_i) \left[\frac{1}{t_i - x_k} + \pi k(x_k, t_i) \right] = f(x_k), \quad (k = 1, \dots, n)$$

lineer cebirsel denklem sistemine indirgenebilir, burada t_i ve x_k

$$P_n^{(1/2, -1/2)}(t_i) = 0, \quad t_i = \cos\left(\frac{2i\pi}{2n+1}\right), \quad (i=1, \dots, n)$$

$$P_n^{(-1/2, 1/2)}(x_k) = 0, \quad x_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n+1}\pi\right), \quad (k=1, \dots, n)$$

ile verilir (Erdogan, Gupta ve Cook, 1973).

1.2.2. $\kappa = 1$ İçin Gauss-Chebyshev İntegrasyon Formülü

(1.1) singüler integral denkleminin çözümü uç noktalarda integrallenebilir singülerliğe sahip olsun. Bu durumda

$$\kappa = 1, \quad \alpha = \beta = -\frac{1}{2} \text{ ve } \omega = (1-t^2)^{-1/2}$$

olduğu biliniyor. Bu durumda ilgili ortogonal polinomlar $P_n^{(\alpha, \beta)}(t)$, birinci çeşit Chebyshev polinomu olan $T_n(t)$ ye indirgenir. Böylece (1.6) singüler integral denklemi ve (1.3) ek şartı

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} g(t_i) \left[\frac{1}{t_i - x_k} + \pi k(x_k, t_i) \right] = f(x_k)$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\pi}{n} g(t_i) = A$$

lineer cebirsel denklem sistemine indirgenir, burada

$$T_n(t_i) = 0, \quad t_i = \cos\left(\pi \frac{2i-1}{2n}\right), \quad (i=1, \dots, n)$$

$$U_{n-1}(x_k) = 0, \quad x_k = \cos\left(\frac{\pi k}{n}\right), \quad (k=1, \dots, n-1)$$

olarak ifade edilebilir (Erdogan, Gupta ve Cook, 1973).

1.2.3. $\kappa = -1$ İçin Gauss-Chebyshev İntegrasyon Formülü

(1.1) singüler integral denkleminin çözümü olan $\phi(t)$ fonksiyonu her iki uçta da sınırlı olsun. Bu durumda

$$\kappa = -1, \quad \alpha = \beta = \frac{1}{2} \text{ ve } \omega = (1-t^2)^{1/2}$$

olduğu biliniyor. Burada ilgili $P_n^{(1/2,1/2)}(t)$ Jacobi polinomları, ikinci çeşit $U_n(t)$ Chebyshev polinomlarına indirgenebilir ve ağırlık fonksiyonu içeren singüler integral için bir Gauss-Chebyshev integrasyon formülü geliştirilebilir. (1.6) singüler integral denklemi

$$\sum_{i=1}^n \frac{1-t_i^2}{n+1} g(t_i) \left[\frac{1}{t_i-x_k} + \pi k(x_k, t_i) \right] = f(x_k)$$

lineer cebirsel denklem sistemine indirgenir, burada

$$U_n(t_i) = 0, \quad t_i = \cos\left(\frac{i\pi}{n+1}\right), \quad (i=1, \dots, n)$$

$$T_{n+1}(x_k) = 0, \quad x_k = \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{2k-1}{n+1}\right), \quad (k=1, \dots, n+1)$$

dir. Mevcut yöntem kullanılarak (1.4) tutarlılık denkleminin otomatik olarak sağlandığı görülür (Erdogan, Gupta ve Cook, 1973).

1.3. SİNGÜLER İNTEGRAL DENKLEMLERİN LOBATTO-CHEBYSHEV YÖNTEMİ İLE NÜMERİK ÇÖZÜMÜ

Çatlak problemlerinde sıklıkla karşılaşılan birinci çeşit singüler integral denklemlerin çözümüne, yaygın olarak literatürde Gauss-Chebyshev yöntemi ile yaklaşılır. Elastik bir ortamda çatlak uçlarındaki gerilme şiddet faktörlerinin belirlenmesi bazı durumlarda daha yüksek doğruluk ve çok daha az hesaplama ile Lobatto-Chebyshev yöntemi ile yapılabilir. Yöntemi özetlemek için aşağıdaki singüler integral denklem sistemi ele alınsın (Theocaris ve Ioakimids, 1977):

$$\sum_{i=1}^N c_{ij}(x) \int_{-1}^1 \frac{\varphi_j(t)}{t-x} dt + \sum_{j=1}^N \int_{-1}^1 K_{ij}(t,x) \varphi_j(t) dt = f_i(x), \quad i=1,2,\dots,N, \quad (1.7)$$

burada bilinmeyen $\varphi_j(t)$ fonksiyonunun $t \rightarrow \pm 1$ iken integrallenebilir singülerliğe sahip olduğu varsayılınsın. Bu durumda

$$\varphi_j(t) = (1-t^2)^{-1/2} g_j(t) \quad j=1,2,\dots,N$$

şeklinde çözüm aranacaktır.

Erdogan ve Gupta (1972), tarafından Gauss-Chebyshev yöntemine uygulanan aşağıdaki basit kesirlere açılımı ele alalım:

$$\frac{T_{n-h-1}}{(1-x^2)U_{n-2}(x)} = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{t_k - x}, \quad (1-t_k^2)U_{n-2}(t_k) = 0, \quad (1.8)$$

burada,

$$\alpha_k = -\frac{T_{n-h-1}(t_k)}{\left[(1-t_k^2)U_{n-2}(t_k)\right]'}, \quad (1.9)$$

dir.

(1.8) denkleminin sol tarafındaki kesrin açılımında, payın polinomunun derecesi, paydanın polinomunun derecesinden küçük olmalıdır, yani

$$0 \leq n-h-1 \leq n-1 \quad \text{ya da} \quad 0 \leq h \leq n-1.$$

Birinci çeşit Chebyshev polinomu $T_n(x)$ ve ikinci çeşit Chebyshev polinomu $U_{n-1}(x)$ 'i tanımlayan

$$T_n(x) = \cos(n\vartheta), \quad U_{n-1}(x) = \frac{\sin(n\vartheta)}{\sin\vartheta}, \quad x = \cos(\vartheta),$$

formüller yardımıyla,

$$\left[(1-x^2)U_{n-2}(x)\right]' = -xU_{n-2}(x) - (n-1)T_{n-1}(x),$$

$$T_{n-h-1}(x) = T_h(x)T_{n-1}(x) + U_{h-1}(x)(1-x^2)U_{n-2}(x), \quad h \geq 0$$

eşitliklerinin sağlandığı aşıkardır.

$$t_1 = -1, \quad t_n = 1, \quad U_{n-2}(t_k) = 0, \quad k = 2, 3, \dots, n-1,$$

$$T_{n-1}(1) = 1, \quad T_{n-1}(-1) = (-1)^{n-1}, \quad U_{n-2}(1) = n-1, \quad U_{n-2}(-1) = (-1)^n(n-1)$$

olduğu göz önünde bulundurularak, α_k katsayıları için (1.8) ifadelerinden

$$\alpha_1 = \frac{T_h(-1)}{2(n-1)}, \quad \alpha_n = \frac{T_h(1)}{2(n-1)}, \quad \alpha_k = \frac{T_h(t_k)}{n-1}$$

elde edilir. Böylece (1.8) denkleminin seri açılımı

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \frac{T_h(t_k)}{(n-1)(t_k-x)} = U_{h-1} + \frac{T_h(x)T_{n-1}(x)}{(1-x^2)U_{n-2}(x)} \quad (1.10)$$

$$\lambda_k = \begin{cases} \frac{1}{2}, & k=1, n \\ 1, & k=2, 3, \dots, n-1 \end{cases}$$

şeklinde yazılabilir. x_r noktaları

$$T_{n-1}(x_r) = 0, \quad r=1, 2, \dots, n-1$$

eşitliğinden seçilerek ve (1.10) seri açılımı uygulanarak,

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \frac{T_h(t_k)}{(n-1)(t_k-x_r)} = U_{h-1}(x_r), \quad U_{-1}(x) \equiv 0, \quad h=0, 1, \dots, n-1 \quad (1.11)$$

elde edilir. (1.11) denklemi ve

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{t-x} \frac{T_h(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = U_{h-1}(x), \quad U_{-1}(x) \equiv 0$$

bağıntısı karşılaştırılarak, singüler integraller için

$$I = \int_{-1}^1 \frac{1}{t_k-x_r} \frac{g(t_k)}{(1-t_k^2)^{1/2}} dt; \quad \frac{\pi}{n-1} \sum_{k=1}^n \lambda_k \frac{g(t_k)}{t_k-x_r}$$

şeklinde verilen nümerik integrasyon yöntemi elde edilir. Böylece, regüler kısma da Lobatto-Chebyshev yönteminin uygulanmasıyla, (1.7) singüler integral denklem sistemi aşağıdaki lineer denklem sistemine indirgenir.

$$\frac{\pi}{n-1} \sum_{j=1}^N c_{ij}(x_r) \sum_{k=1}^n \lambda_k \frac{g_j(t_k)}{t_k-x_r} + \frac{\pi}{n-1} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^n \lambda_k K_{ij}(t_k, x_r) g_j(t_k) = f_i(x_r). \quad (1.12)$$

(1.7) singüler integral denklem sistemindeki bilinmeyen $\varphi_j(t)$ fonksiyonunun $t \rightarrow \pm 1$ iken integrallenebilir singülerliğe sahip olduğu varsayımından ek koşula ihtiyaç vardır. Bu ek koşul

$$\int_{-1}^1 \varphi(x) dx = A$$

şeklindedir. Burada A sıfır da olabilen bir keyfi sabittir. $A=0$ alınarak, benzer prosedür uygulanırsa

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k g_j(t_k) = 0 \quad (1.13)$$

denklemini bulunur. Böylece (1.7) singüler integral denklem sisteminin çözümü (1.12)-(1.13) lineer cebirsel denklem sisteminin çözümüne indirgenir.





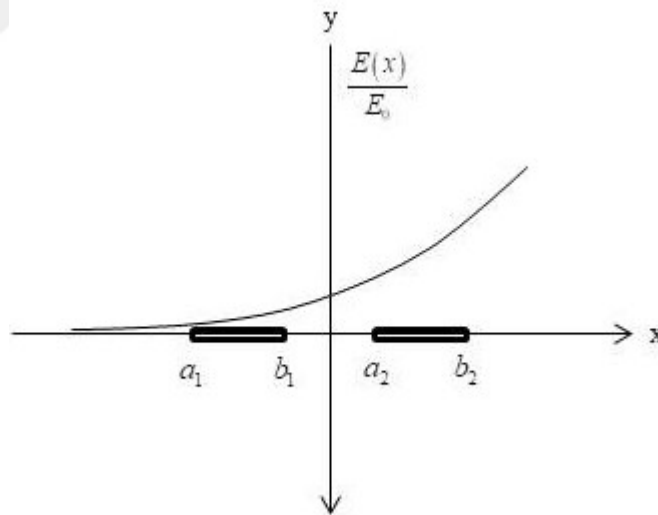
İKİNCİ BÖLÜM

HOMOJEN OLMAYAN ORTAMDA İKİ ÇATLAK PROBLEMİ

2.1. HOMOJEN OLMAYAN ORTAMDA İKİ ÇATLAK PROBLEMİ

Delale ve Erdogan (1983) çalışmasında homojen olmayan izotrop bir ortamda tek çatlak içeren bir elastisite problemini incelemiştir. GŞF değerlerini elde etmek için elde edilen singüler integral denkleme Gauss integrasyon yöntemiyle yaklaşılacağı söylenmiştir. Ayrıca (Delale ve Erdogan, 1983) de ele alınan tek çatlak probleminin singüler integral denkleminin türetilmesi için ayrıntılı bir analiz (Chan ve Koshkin, 2019) tarafından verilmiştir. Ayrıca (Ozturk ve Erdogan, 2001) ortotrop bir ortamdaki kolinear çatlak problemini ele almıştır. Bu tez çalışmasında ise (Delale ve Erdogan, 1983) de ele alınan homojen olmayan ortamda bir çatlak içeren bir elastisite problemi x-ekseni üzerine yerleşen iki çatlak durumuna genelleştirilmiştir (Şekil 2.1). Bu izotrop problem elastisite teorisinin temel denklemleri, Airy gerilme fonksiyonunun Fourier dönüşümü ve problemin sınır koşulları yardımıyla birinci çeşit Cauchy tip bir singüler integral denklem sistemine indirgenmiştir. Farklı yükleme şartları altında çatlak uçlarındaki Mod I GŞF değerleri Gauss-Chebyshev ve Lobatto-Chebyshev yöntemleri kullanılarak hesaplanmıştır

Şekil 2.1: Problemin Geometrisi.



2.2. PROBLEMİN SİNGÜLER İNTEGRAL DENKLEM SİSTEMİNE İNDİRGENMESİ

Bu bölümde, ele alınan elastisite problemi, elastisite teorisinin temel denklemleri, Airy gerilme fonksiyonu ve problemin sınır koşulları yardımıyla singüler integral denklem sistemine indirgenecektir. Öncelikle, uzama-yer değiştirme bağıntıları, uygunluk denklemi ve Genelleştirilmiş Hooke yasası sırasıyla

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (2.2)$$

ve

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} - \nu \frac{\sigma_{yy}}{E}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\sigma_{yy}}{E} - \frac{\nu \sigma_{xx}}{E}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{G} \quad (2.3)$$

ile verilir. Burada, Young modülü $E = E(x, y)$ ve kayma modülü

$G = G(x, y) = \frac{E(x, y)}{2(1+\nu)}$ ile tanımlanır. Şimdi gerilme bileşenleri, $\phi = \phi(x, y)$ Airy

gerilme fonksiyonu yardımıyla

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad (2.4)$$

şeklinde tanımlansın. (2.4) denklemini, (2.3) ile verilen Hooke yasasında yerine yazıldığında elde edilen

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{\nu}{E} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\nu}{E} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= -\frac{1}{G} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \end{aligned}$$

denklemleri (2.2) uygunluk denkleminde yerine yazılırsa

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{E} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{\nu}{E} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{E} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\nu}{E} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) \right] = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(-\frac{1}{G} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \right)$$

ve

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{2}{E^3} \left(\frac{\partial E}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{1}{E^2} \left(\frac{\partial^2 E}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial E}{\partial y} \frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3} \right) + \frac{1}{E} \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} - \nu \left(\frac{2}{E^3} \left(\frac{\partial E}{\partial y} \right)^2 \right. \right. \\
& \times \left. \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{E^2} \left(\frac{\partial^2 E}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial E}{\partial y} \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial y} \right) + \frac{1}{E} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} \right) + \frac{2}{E^3} \left(\frac{\partial E}{\partial x} \right)^2 \\
& \times \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{1}{E^2} \left(\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial E}{\partial x} \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \right) + \frac{1}{E} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} - \nu \left(\frac{2}{E^3} \left(\frac{\partial E}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{E^2} \left(\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial E}{\partial x} \frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial y^2} \right) + \frac{1}{E} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} \right) \right] = - \frac{2}{G^3} \frac{\partial G}{\partial x} \frac{\partial G}{\partial y} \\
& \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + \frac{1}{G^2} \left(\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial G}{\partial y} \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial G}{\partial x} \frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial y^2} \right) - \frac{1}{G} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2}
\end{aligned}$$

olarak bulunur. $G = G(x, y) = \frac{E(x, y)}{2(1+\nu)}$ bağıntısı göz önünde tutularak sadeleştirilirse,

düzlemsel gerilme durumu için

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{2}{E^3} \left(\frac{\partial E}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{E^2} \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} - \frac{2\nu}{E^3} \left(\frac{\partial E}{\partial x} \right)^2 + \frac{\nu}{E^2} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{2}{E^2} \frac{\partial E}{\partial y} \frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3} \\
& + \left(\frac{1}{E} \right) \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} + \left(-\frac{2\nu}{E^3} \left(\frac{\partial E}{\partial y} \right)^2 + \frac{\nu}{E^2} \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{2}{E^3} \left(\frac{\partial E}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{E^2} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \\
& + \left(-\frac{2}{E^2} \frac{\partial E}{\partial y} \right) \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial y} + \frac{2}{E} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \left(-\frac{2}{E^2} \frac{\partial E}{\partial x} \right) \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} + \frac{1}{E} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} \\
& + \left(\frac{2\nu}{E^2} \frac{\partial E}{\partial x} - \frac{2(1+\nu)}{E^2} \frac{\partial E}{\partial x} \right) \frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial y^2} + \left(\frac{4(1+\nu)}{E^3} \frac{\partial E}{\partial x} \frac{\partial E}{\partial y} - \frac{2(1+\nu)}{E^2} \right. \\
& \left. \times \frac{\partial^2 E}{\partial x \partial y} \right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = 0
\end{aligned} \tag{2.5}$$

elde edilir. Düzlemsel deformasyon durumu için, $E = \frac{E}{1-\nu^2}$ ve $\nu = \frac{\nu}{1-\nu}$ yazılabilir.

$E = E_0 e^{\beta x + \gamma y}$ kullanılarak (2.5) denklemi aşağıdaki gibi olur:

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{2}{E_0^3} e^{-3\beta x - 3\gamma y} \left(E_0 \gamma e^{\beta x + \gamma y} \right)^2 - \frac{1}{E_0^2} e^{-2\beta x - 2\gamma y} E_0 \gamma^2 e^{\beta x + \gamma y} - \frac{2\nu}{E_0^3} e^{-3\beta x - 3\gamma y} \right. \\
& \times \left. \left(E_0 \beta e^{\beta x + \gamma y} \right)^2 + \frac{\nu e^{-2\beta x - 2\gamma y}}{E_0^2} E_0 \beta^2 e^{\beta x + \gamma y} \right] \frac{\gamma^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{2}{E_0^2} e^{-2\beta x - 2\gamma y} E_0 \gamma e^{\beta x + \gamma y} \\
& \times \frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3} + \frac{1}{E_0} e^{-2\beta x - 2\gamma y} \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} + \left[-\frac{2\nu}{E_0^3} e^{-3\beta x - 3\gamma y} \times \left(E_0 \gamma e^{\beta x + \gamma y} \right)^2 + \frac{\nu}{E_0} e^{-2\beta x - 2\gamma y} E_0 \gamma^2 e^{\beta x + \gamma y} \right. \\
& + \frac{2}{E_0^3} e^{-3\beta x - 3\gamma y} \left(E_0 \beta e^{\beta x + \gamma y} \right)^2 - \frac{1}{E_0^2} e^{-2\beta x - 2\gamma y} E_0 \beta^2 e^{\beta x + \gamma y} \left. \right] \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \left[\frac{2\nu}{E_0^2} e^{-2\beta x - 2\gamma y} E_0 \gamma e^{\beta x + \gamma y} \right. \\
& - \frac{2(1+\nu)}{E_0^2} \times e^{-2\beta x - 2\gamma y} E_0 \gamma e^{\beta x + \gamma y} \left. \right] \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial y} + \left[-\frac{2\nu}{E_0} e^{-\beta x - \gamma y} + \frac{2(1+\nu)}{E_0} e^{-\beta x - \gamma y} \right] \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} \\
& - \frac{2}{E_0^2} e^{-2\beta x - 2\gamma y} E_0 \beta e^{\beta x + \gamma y} \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} + \frac{1}{E_0} e^{-\beta x - \gamma y} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + \left[\frac{2\nu}{E_0^2} e^{-2\beta x - 2\gamma y} E_0 \beta e^{\beta x + \gamma y} \right. \\
& - \frac{2(1+\nu)}{E_0^2} e^{-2\beta x - 2\gamma y} E_0 \beta e^{\beta x + \gamma y} \left. \right] \frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial y^2} + \left[\frac{4(1+\nu)}{E_0^3} e^{-3\beta x - 3\gamma y} E_0 \beta e^{\beta x + \gamma y} E_0 \gamma e^{\beta x + \gamma y} \right. \\
& - \frac{2(1+\nu)}{E_0^2} e^{-2\beta x - 2\gamma y} E_0 \beta \gamma e^{\beta x + \gamma y} \left. \right] \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = 0
\end{aligned}$$

ve yeniden düzenlenirse, $E_0 \neq 0$, $e^{\beta x + \gamma y} \neq 0$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{2}{E_0} \gamma^2 e^{-\beta x - \gamma y} - \frac{1}{E_0} e^{-\beta x - \gamma y} \gamma^2 - \frac{2\nu}{E_0} e^{-\beta x - \gamma y} \beta^2 + \frac{\nu}{E_0} \beta^2 e^{-\beta x - \gamma y} \right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \\
& - \frac{2\gamma e^{-\beta x - \gamma y}}{E_0} \frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3} + \frac{1}{E_0} e^{-\beta x - \gamma y} \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} + \left(-\frac{2\nu}{E_0} \gamma^2 e^{-\beta x - \gamma y} + \frac{\nu}{E_0} \gamma^2 e^{-\beta x - \gamma y} \right. \\
& + \frac{2}{E_0} \beta^2 e^{-\beta x - \gamma y} - \frac{1}{E_0} \beta^2 e^{-\beta x - \gamma y} \left. \right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \left(\frac{-2\gamma e^{-\beta x - \gamma y}}{E_0} \right) \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial y} + \frac{2}{E_0} e^{-\beta x - \gamma y} \\
& \times \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} - \frac{2}{E_0} \beta e^{-\beta x - \gamma y} \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} + \frac{1}{E_0} e^{-\beta x - \gamma y} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} - \frac{2}{E_0} \beta e^{-\beta x - \gamma y} \frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial y^2} \\
& + \left(\frac{4(1+\nu)}{E_0} \beta \gamma e^{-\beta x - \gamma y} - \frac{2(1+\nu)}{E_0} \beta \gamma e^{-\beta x - \gamma y} \right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = 0
\end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned}
& (\gamma^2 - \nu \beta^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - 2\gamma \frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} + (-\nu \gamma^2 + \beta^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - 2\gamma \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial y} \\
& (\gamma^2 - \nu \beta^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - 2\gamma \frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} + (-\nu \gamma^2 + \beta^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - 2\gamma \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial y} = 0
\end{aligned} \tag{2.6}$$

bulunur. Problemin geometrisinden $E(x, y) = E(x)$ olduğu söylenebilir. Böylece $\gamma = 0$ alınır (2.6) denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$-v\beta^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} + \beta^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} - 2\beta \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} - 2\beta \frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial y^2} = 0 \quad (2.7)$$

(2.7) denkleminin çözümü Fourier integrali yardımıyla ifade edilsin:

$$\phi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(y, \alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (2.8)$$

(2.8) denklemi (2.7) denkleminde yerine yazılırsa

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[-v\beta^2 \frac{d^2 \Phi}{dy^2} + \frac{d^4 \Phi}{dy^4} - \beta^2 \alpha^2 \Phi - 2\alpha^2 \frac{d^2 \Phi}{dy^2} - 2\beta i \alpha^3 \Phi + \alpha^4 \Phi + 2\beta i \alpha \frac{d^2 \Phi}{dy^2} \right] e^{-i\alpha x} d\alpha = 0$$

bulunur. Ters Fourier dönüşümünden

$$\frac{d^4 \Phi}{dy^4} + (-v\beta^2 - 2\alpha^2 + 2i\alpha\beta) \frac{d^2 \Phi}{dy^2} + (-\alpha^2 \beta^2 - 2i\alpha^3 \beta + \alpha^4) \Phi = 0 \quad (2.9)$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Bu diferansiyel denklemin çözümünü bulmak için öncelikle karakteristik denklem yazılsın:

$$m^4 + (-v\beta^2 - 2\alpha^2 + 2i\alpha\beta)m^2 + (-\alpha^2 \beta^2 - 2i\alpha^3 \beta + \alpha^4) = 0.$$

Elde edilen karakteristik denklemin kökleri,

$$m^2 = t \Rightarrow t^2 + (-v\beta^2 - 2\alpha^2 + 2i\alpha\beta)t + (-\alpha^2 \beta^2 - 2i\alpha^3 \beta + \alpha^4) = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{v\beta^2 + 2\alpha^2 - 2i\alpha\beta \pm \sqrt{v^2 \beta^4 + 4\alpha^2 v \beta^2 - 4i\alpha v \beta^3}}{2}$$

olduğundan

$$m_{1,3} = \sqrt{\frac{v\beta^2 + 2\alpha^2 - 2i\alpha\beta + \sqrt{v^2 \beta^4 + 4\alpha^2 v \beta^2 - 4i\alpha v \beta^3}}{2}}$$

$$m_{2,4} = \sqrt{\frac{v\beta^2 + 2\alpha^2 - 2i\alpha\beta - \sqrt{v^2 \beta^4 + 4\alpha^2 v \beta^2 - 4i\alpha v \beta^3}}{2}}$$

olarak bulunur. Burada m_i , $i=1, \dots, 4$, α, β ve v nin fonksiyonudur. Böylece, (2.9) diferansiyel denkleminin çözümü

$$\Phi(y, \alpha) = c_1(\alpha)e^{m_1 y} + c_2(\alpha)e^{m_2 y} + c_3(y)e^{m_3 y} + c_4(y)e^{m_4 y}$$

olarak elde edilir. $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$ iken gerilmeler ve yer deđiřtirmeler yok olacađından çözüm

$$\Phi(y, \alpha) = c_3(\alpha)e^{m_3 y} + c_4(\alpha)e^{m_4 y} \quad (2.10)$$

olarak yeniden yazılabilir. (2.10) denklemini (2.8) denkleminde yerine yazılırsın:

$$\phi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [c_3(\alpha)e^{m_3 y} + c_4(\alpha)e^{m_4 y}] e^{-i\alpha x} d\alpha.$$

Bu ifade (2.4) denkleminde yazılırsa, gerilmeler

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [c_3(\alpha)m_3^2 e^{m_3 y} + c_4(\alpha)m_4^2 e^{m_4 y}] e^{-i\alpha x} d\alpha \\ \sigma_{yy} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} -\alpha^2 [c_3(\alpha)e^{m_3 y} + c_4(\alpha)e^{m_4 y}] e^{-i\alpha x} d\alpha \\ \sigma_{xy} &= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha [c_3(\alpha)m_3 e^{m_3 y} + c_4(\alpha)m_4 e^{m_4 y}] e^{-i\alpha x} d\alpha \end{aligned} \quad (2.11_{a,b,c})$$

şeklinde yeniden ifade edilebilir. şimdi problemin sınır şartları tanımlansın:

$$\begin{aligned} \sigma_{xy}(x, 0) &= 0, \quad -\infty < x < \infty \\ \sigma_{yy}(x, 0) &= \beta(x), \quad \beta(x) = \begin{cases} p_i(x) & , \quad x \in (a_i, b_i), \quad i=1, 2 \\ 0 & , \quad x \notin (a_i, b_i), \quad i=1, 2 \end{cases} \\ v(x, 0) &= 0, \quad x \notin (a_i, b_i) \end{aligned} \quad (2.12_{a,b,c})$$

ve yarı düzlem çekme gücüne maruz kalsın:

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}(x, 0) &= \sigma(x), \quad (-\infty < x < \infty) \\ \sigma_{xy}(x, 0) &= \tau(x), \end{aligned} \quad (2.13_{a,b})$$

burada,

$$P_x = \int_{-\infty}^{\infty} \tau(x) dx, \quad P_y = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(x) dx$$

dir. Şimdi ilgili sınır şartları kullanılarak c_3 ve c_4 katsayıları belirlenecektir. Bunun için (2.11_b) ve (2.13_a) denklemleri birlikte kullanıldığında

$$\sigma_{yy}(x,0) = \sigma(x) \Rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} -\alpha^2 (c_3(\alpha) + c_4(\alpha)) e^{-i\alpha x} dx = \sigma(x)$$

bulunur. Ters Fourier dönüşümünden

$$-\alpha^2 (c_3(\alpha) + c_4(\alpha)) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(x) e^{i\alpha x} dx \quad (2.14)$$

elde edilir. Benzer şekilde (2.11_c) ve (2.13_b) denklemleri denklemlerinden

$$\sigma_{xy}(x,0) = \tau(x) \Rightarrow \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha (c_3(\alpha) m_3 + c_4(\alpha) m_4) e^{-i\alpha x} d\alpha = \tau(x)$$

bulunur ve ters Fourier dönüşümü alınarak

$$i\alpha (c_3(\alpha) m_3 + c_4(\alpha) m_4) = \int_{-\infty}^{\infty} \tau(x) e^{i\alpha x} dx \quad (2.15)$$

elde edilir. (2.11_c) ve (2.12_a) denklemlerinden

$$\sigma_{xy}(x,0) = 0 \Rightarrow \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha (c_3(\alpha) m_3 + c_4(\alpha) m_4) e^{-i\alpha x} d\alpha = 0$$

ve ters Fourier dönüşümünden

$$c_3(\alpha) m_3 + c_4(\alpha) m_4 = 0 \quad (2.16)$$

bulunur.

$$\text{Şimdi } g(x) = \frac{\partial}{\partial x} v(x, +0) \text{ yardımcı fonksiyonu tanımlansın.} \quad (2.1)$$

denkleminde $\frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_{yy}$ olduğu göz önünde tutularak ve (2.3) denklemi kullanılarak

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\sigma_{yy}}{E} - \nu \frac{\sigma_{xx}}{E}$$

yazılabilir. (2.11_{a,b}) denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{1}{2\pi E} \int_{-\infty}^{\infty} -\alpha^2 (c_3(\alpha) e^{m_3 y} + c_4(\alpha) e^{m_4 y}) e^{-i\alpha x} d\alpha \\ &\quad - \frac{v}{2\pi E} \int_{-\infty}^{\infty} (c_3(\alpha) m_3^2 e^{m_3 y} + c_4(\alpha) m_4^2 e^{m_4 y}) e^{-i\alpha x} d\alpha\end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu ifade integrallenirse düşey yer değiştirme bileşeni

$$\begin{aligned}v(x, y) &= \frac{1}{2\pi E} \int_{-\infty}^{\infty} -\alpha^2 \left(\frac{c_3(\alpha)}{m_3} e^{m_3 y} + \frac{c_4(\alpha)}{m_4} e^{m_4 y} \right) e^{-i\alpha x} d\alpha \\ &\quad - \frac{v}{2\pi E} \int_{-\infty}^{\infty} (c_3(\alpha) m_3 e^{m_3 y} + c_4(\alpha) m_4 e^{m_4 y}) e^{-i\alpha x} d\alpha + c(x)\end{aligned}\quad (2.17)$$

olarak elde edilir. $E = E_0 e^{\beta x}$ olmak üzere (2.17) denkleminin x e göre türevi,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} v(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} -\alpha^2 \left(\frac{c_3 \alpha}{m_3} e^{m_3 y} + \frac{c_4 \alpha}{m_4} e^{m_4 y} \right) \left(-\frac{\beta}{E_0} e^{-\beta x} e^{-i\alpha x} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{E_0} e^{-\beta x} i\alpha e^{-i\alpha x} \right) d\alpha - \frac{v}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (c_3 \alpha m_3 e^{m_3 y} + c_4 \alpha m_4 e^{m_4 y}) \\ &\quad \times \left(-\frac{\beta}{E_0} e^{-\beta x} e^{-i\alpha x} - \frac{1}{E_0} e^{-\beta x} i\alpha e^{-i\alpha x} \right) d\alpha + c'(x)\end{aligned}$$

olarak bulunur. $\frac{\partial}{\partial x} v(x, 0) = g(x)$ olduğundan

$$\begin{aligned}g(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ -\alpha^2 \left[\frac{c_3(\alpha)}{m_3} + \frac{c_4(\alpha)}{m_4} \right] \frac{1}{E_0} e^{-\beta x - i\alpha x} (-\beta - i\alpha) \right. \\ &\quad \left. - v \left[(c_3(\alpha) m_3 + c_4(\alpha) m_4) \left(\frac{1}{E_0} e^{-\beta x - i\alpha x} \right) (-\beta - i\alpha) \right] \right\} d\alpha + c'(x)\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Ters Fourier dönüşümünden

$$\frac{\alpha^2 (\beta + i\alpha)}{E_0} \left[\frac{c_3(\alpha)}{m_3} + \frac{c_4(\alpha)}{m_4} \right] + \frac{v(\beta + i\alpha)}{E_0} [c_3(\alpha) m_3 + c_4(\alpha) m_4] = \int_{-\infty}^{\infty} (g(t) - c'(t)) e^{(\beta + i\alpha)t} dt$$

bulunur. Bu denklemin düzenlenmesiyle

$$\frac{\beta + i\alpha}{E_0} \left[c_3(\alpha) \left(\frac{\alpha^2}{m_3} + v m_3 \right) + c_4(\alpha) \left(\frac{\alpha^2}{m_4} + v m_4 \right) \right] = \int_{-\infty}^{\infty} (g(t) - c'(t)) e^{(\beta + i\alpha)t} dt \quad (2.18)$$

elde edilir. (2.16) ve (2.18) denklemlerini kullanarak $c_3(\alpha)$ ve $c_4(\alpha)$ katsayıları

$$c_3(\alpha) = -\frac{E_0 m_4^2 m_3}{(\beta + i\alpha)\alpha^2(m_3^2 - m_4^2)} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{(\beta+i\alpha)t} dt$$

$$c_4(\alpha) = \frac{E_0 m_4 m_3^2}{(\beta + i\alpha)\alpha^2(m_3^2 - m_4^2)} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{(\beta+i\alpha)t} dt$$

olarak elde edilir. Şimdi bu ifadeler göz önünde tutularak (2.12b) koşulu yardımıyla singüler integral denklem sistemi türetilcektir. (2.12b) den $\sigma_{yy}(x,0) = \beta(x)$ olduğu biliniyor. Bu şart kullanılarak,

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} -\alpha^2 [c_3(\alpha) e^{m_3 y} + c_4(\alpha) e^{m_4 y}] e^{-i\alpha x} d\alpha = \beta(x)$$

ve böylece

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} -\alpha^2 \left[\frac{E_0 m_4^2 m_3 e^{m_3 y}}{(\beta + i\alpha)\alpha^2(m_3^2 - m_4^2)} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{(\beta+i\alpha)t} dt + e^{m_4 y} \frac{E_0 m_3^2 m_4}{(\beta + i\alpha)\alpha^2(m_3^2 - m_4^2)} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{(\beta+i\alpha)t} dt \right] e^{-i\alpha x} d\alpha = \beta(x)$$

bulunur. İntegrasyon sırası değiştirilerek

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{\beta t} dt \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E_0 m_4 m_3}{(\beta + i\alpha)(m_3^2 - m_4^2)} (m_4 e^{m_3 y} - m_3 e^{m_4 y}) e^{i\alpha(t-x)} d\alpha = \beta(x) \quad (2.19)$$

elde edilir. Singüler terimi çıkarmak için asimptotik davranışın incelenmesi gerekmektedir. $|\alpha| \rightarrow \infty$ iken

$$m_3 = -\sqrt{\frac{v\beta^2 + 2\alpha^2 - 2i\alpha\beta + \sqrt{v^2\beta^4 + 4\alpha^2 v\beta^2 - 4i\alpha v\beta^3}}{2}}$$

$$m_3 = -|\alpha| \sqrt{\frac{v\beta^2 + 2 - \frac{2i\beta}{\alpha} + \frac{|\alpha|}{\alpha^2} \sqrt{v^2\beta^4 + 4v\beta^2 - \frac{4i}{\alpha} v\beta^3}}{2}}$$

ve böylece $m_3 \rightarrow -|\alpha|$ olduğu görülür. Benzer şekilde $m_4 \rightarrow -|\alpha|$ olur. (2.19)

denkleminin iç integrali aşağıdaki şekilde yeniden yazılsın:

$$h(x, y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(y, \alpha) e^{i(t-x)\alpha} d\alpha,$$

burada

$$K(y, \alpha) = \frac{E_0 m_4 m_3}{(\beta + i\alpha)(m_3^2 - m_4^2)} (m_4 e^{m_3 y} - m_3 e^{m_4 y})$$

dir. Böylece $h(x, y, t)$ fonksiyonu

$$h(x, y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} [K(y, \alpha) - K_{\infty}(y, \alpha)] e^{i(t-x)\alpha} d\alpha + \int_{-\infty}^{\infty} K_{\infty}(y, \alpha) e^{i(t-x)\alpha} d\alpha, \quad (2.20)$$

şekilde yeniden ifade edilebilir. Burada $K_{\infty}, K(y, \alpha)$ 'nın asimptotik değeridir.

$|\alpha| \rightarrow \infty$ iken

$$K_{\infty}(y, \alpha) = \frac{E_0 |\alpha|^2 (m_4 e^{-|\alpha|y} - m_3 e^{-|\alpha|y})}{-2(\beta + i\alpha)(m_3 - m_4)|\alpha|}$$

olarak bulunur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa $K(y, \alpha)$ nın asimptotik davranışı

$$K_{\infty}(y, \alpha) = \frac{E_0 |\alpha| e^{-|\alpha|y}}{2\alpha i}$$

olarak elde edilir. (2.20) denkleminin ikinci integralini yeniden ele alınsın:

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_{\infty}(y, \alpha) e^{i(t-x)\alpha} d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E_0 |\alpha| e^{-|\alpha|y}}{2\alpha i} (\cos((t-x)\alpha) + i \sin((t-x)\alpha)) d\alpha.$$

Kosinüs ve sinüs fonksiyonlarının çiftlik ve teklik özelliklerinden,

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_{\infty}(y, \alpha) e^{i(t-x)\alpha} d\alpha = \int_0^{\infty} \frac{E_0 |\alpha|}{\alpha} e^{-|\alpha|y} \sin((t-x)\alpha) d\alpha$$

olarak elde edilir. Bu integralin çözümü Laplace dönüşümünden faydalanılarak,

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_{\infty}(y, \alpha) e^{i(t-x)\alpha} d\alpha = \frac{E_0 (t-x)}{(t-x)^2 + y^2}$$

bulunur. Böylece (2.19) denklemi $y \rightarrow 0$ iken limit durumu da göz önüne alınarak

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{\beta t} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{E_0 m_3 m_4}{-(\beta + i\alpha)(m_3 + m_4)} - \frac{E_0 |\alpha|}{2\alpha i} \right) e^{i(t-x)\alpha} d\alpha + \frac{E_0}{t-x} \right\} dt = \beta(x)$$

şeklinde elde edilir.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{E_0 m_3 m_4 e^{i(t-x)\alpha}}{-(\beta + i\alpha)(m_3 + m_4)} d\alpha = \int_{-\infty}^0 \frac{E_0 m_3 m_4 e^{i(t-x)\alpha}}{-(\beta + i\alpha)(m_3 + m_4)} d\alpha + \int_0^{\infty} \frac{E_0 m_3 m_4 e^{i(t-x)\alpha}}{-(\beta + i\alpha)(m_3 + m_4)} d\alpha$$

integralinde $\alpha = -\alpha \Rightarrow d\alpha = -d\alpha$ değişken dönüşümü yapılarak,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{E_0 m_3 m_4 e^{i(t-x)\alpha}}{-(\beta + i\alpha)(m_3 + m_4)} d\alpha = -\int_0^{\infty} \frac{E_0 m_3 m_4 e^{-i(t-x)\alpha}}{(\beta - i\alpha)(m_3 + m_4)} + \int_0^{\infty} \frac{E_0 m_3 m_4 e^{i(t-x)\alpha}}{-(\beta + i\alpha)(m_3 + m_4)}$$

bulunur.

$$M(\alpha) = \frac{m_3 m_4 e^{i(t-x)\alpha}}{-(\beta + i\alpha)(m_3 + m_4)}$$

olarak tanımlanırsa,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{E_0 m_3 m_4 e^{i(t-x)\alpha}}{-(\beta + i\alpha)(m_3 + m_4)} d\alpha = E_0 \int_0^{\infty} (M(\alpha) + M(-\alpha)) d\alpha$$

olur. Böylece

$$\int_{-\infty}^{\infty} -\frac{E_0 |\alpha|}{2\alpha i} e^{i(t-x)\alpha} d\alpha = -\int_0^{\infty} E_0 \sin((t-x)\alpha) d\alpha$$

olmak üzere

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{\beta t} \left[E_0 \int_0^{\infty} (M(\alpha) + M(-\alpha) - \sin(\alpha(t-x))) d\alpha + \frac{E_0}{t-x} \right] dt = \beta \phi(x) \quad (2.21)$$

olarak bulunur.

$$\frac{E_0}{2} = \frac{4\mu_0}{1+\kappa}$$

eşitlięi göz önünde bulundurularak

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{\beta t} \left(\int_0^{\infty} [M(\alpha) + M(-\alpha) - \sin(\alpha(t-x))] d\alpha + \frac{1}{t-x} \right) dt = \frac{1+\kappa}{4\mu_0} \beta \phi(x)$$

elde edilir. Böylece (2.21) denklemini

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{\beta t} \left(k(x,t) + \frac{1}{t-x} \right) dt = \frac{1+\kappa}{4\mu_0} \beta \phi(x) \quad (2.22)$$

olarak yeniden yazılabilir. Burada,

$$k(x,t) = \int_0^{\infty} (M(\alpha) + M(-\alpha) - \sin(\alpha(t-x))) d\alpha$$

dir. Şimdi problemin konumu gereği, (2.22) singüler integral denklemi,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{a_1}^{b_1} g_1(t) e^{\beta t} k(x,t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{a_1}^{b_1} \frac{g_1(t) e^{\beta t}}{t-x} dt + \frac{1}{\pi} \int_{a_2}^{b_2} g_2(t) e^{\beta t} k(x,t) dt \\ & + \frac{1}{\pi} \int_{a_2}^{b_2} \frac{g_2(t) e^{\beta t}}{t-x} dt = \frac{1+\kappa}{4\mu_0} p_1(x), \quad x \in (a_1, b_1) \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{a_1}^{b_1} g_1(t) e^{\beta t} k(x,t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{a_1}^{b_1} \frac{g_1(t) e^{\beta t}}{t-x} dt + \frac{1}{\pi} \int_{a_2}^{b_2} g_2(t) e^{\beta t} k(x,t) dt \\ & + \frac{1}{\pi} \int_{a_2}^{b_2} \frac{g_2(t) e^{\beta t}}{t-x} dt = \frac{1+\kappa}{4\mu_0} p_2(x), \quad x \in (a_2, b_2) \end{aligned} \quad (2.24)$$

singüler integral denklem sistemine dönüştürülür. (2.23) ve (2.24) denklem sisteminde

$$\begin{aligned} x &= \frac{b_1 - a_1}{2} r + \frac{b_1 + a_1}{2}, \quad x \in (a_1, b_1) \\ t &= \frac{b_1 - a_1}{2} s + \frac{b_1 + a_1}{2} \\ dt &= \frac{b_1 - a_1}{2} ds \\ t = a_1 &\Rightarrow s = -1 \\ t = b_1 &\Rightarrow s = 1 \end{aligned} \quad (2.25)$$

ve

$$\begin{aligned} x &= \frac{b_2 - a_2}{2} r + \frac{b_2 + a_2}{2}, \quad x \in (a_2, b_2) \\ t &= \frac{b_2 - a_2}{2} s + \frac{b_2 + a_2}{2} \\ dt &= \frac{b_2 - a_2}{2} ds \\ t = a_2 &\Rightarrow s = -1 \\ t = b_2 &\Rightarrow s = 1 \end{aligned}$$

değişken dönüşümlerinin yerine yazılmasıyla $x \in (a_1, b_1)$ için,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 g_1 \left(\frac{b_1 - a_1}{2} s + \frac{b_1 + a_1}{2} \right) e^{\beta \left(\frac{b_1 - a_1}{2} s + \frac{b_1 + a_1}{2} \right)} k \left(\frac{b_1 - a_1}{2} r + \frac{b_1 + a_1}{2}, \frac{b_1 - a_1}{2} s + \frac{b_1 + a_1}{2} \right) \frac{b_1 - a_1}{2} ds \\
& + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{g_1 \left(\frac{b_1 - a_1}{2} s + \frac{b_1 + a_1}{2} \right) e^{\beta \left(\frac{b_1 - a_1}{2} s + \frac{b_1 + a_1}{2} \right)}}{\frac{b_1 - a_1}{2} s + \frac{b_1 + a_1}{2} - \frac{b_1 - a_1}{2} r - \frac{b_1 + a_1}{2}} \frac{b_1 - a_1}{2} ds + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 g_2 \left(\frac{b_2 - a_2}{2} s + \frac{b_2 + a_2}{2} \right) \\
& \times e^{\beta \left(\frac{b_2 - a_2}{2} s + \frac{b_2 + a_2}{2} \right)} k \left(\frac{b_1 - a_1}{2} r + \frac{b_1 + a_1}{2}, \frac{b_2 - a_2}{2} s + \frac{b_2 + a_2}{2} \right) \frac{b_2 - a_2}{2} ds \\
& + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{g_2 \left(\frac{b_2 - a_2}{2} s + \frac{b_2 + a_2}{2} \right) e^{\beta \left(\frac{b_2 - a_2}{2} s + \frac{b_2 + a_2}{2} \right)} \frac{(b_2 - a_2)}{2}}{\frac{b_2 - a_2}{2} s + \frac{b_2 + a_2}{2} - \frac{b_1 - a_1}{2} r - \frac{b_1 + a_1}{2}} ds = \frac{1 + \kappa}{4\mu_0} p_1 \left(\frac{b_1 - a_1}{2} r + \frac{b_1 + a_1}{2} \right)
\end{aligned}$$

ve $x \in (a_2, b_2)$ için,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 g_1 \left(\frac{b_1 - a_1}{2} s + \frac{b_1 + a_1}{2} \right) e^{\beta \left(\frac{b_1 - a_1}{2} s + \frac{b_1 + a_1}{2} \right)} k \left(\frac{b_2 - a_2}{2} r + \frac{b_2 + a_2}{2}, \frac{b_1 - a_1}{2} s + \frac{b_1 + a_1}{2} \right) \frac{b_1 - a_1}{2} ds \\
& + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{g_1 \left(\frac{b_1 - a_1}{2} s + \frac{b_1 + a_1}{2} \right) e^{\beta \left(\frac{b_1 - a_1}{2} s + \frac{b_1 + a_1}{2} \right)}}{\frac{b_1 - a_1}{2} s + \frac{b_1 + a_1}{2} - \frac{b_2 - a_2}{2} r - \frac{b_2 + a_2}{2}} \frac{b_1 - a_1}{2} ds + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 g_2 \left(\frac{b_2 - a_2}{2} s + \frac{b_2 + a_2}{2} \right) \\
& \times e^{\beta \left(\frac{b_2 - a_2}{2} s + \frac{b_2 + a_2}{2} \right)} k \left(\frac{b_2 - a_2}{2} r + \frac{b_2 + a_2}{2}, \frac{b_2 - a_2}{2} s + \frac{b_2 + a_2}{2} \right) \frac{b_2 - a_2}{2} ds \\
& + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{g_2 \left(\frac{b_2 - a_2}{2} s + \frac{b_2 + a_2}{2} \right) e^{\beta \left(\frac{b_2 - a_2}{2} s + \frac{b_2 + a_2}{2} \right)}}{\frac{b_2 - a_2}{2} (s - r)} \frac{b_2 - a_2}{2} ds = \frac{1 + \kappa}{4\mu_0} p_2 \left(\frac{b_2 - a_2}{2} r + \frac{b_2 + a_2}{2} \right)
\end{aligned}$$

bulunur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa, $x \in (a_1, b_1)$ için,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \phi_1(s) k_{11}(r, s) ds + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\phi_1(s)}{s - r} ds \\
& + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \phi_2(s) k_{12}(r, s) ds + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\phi_2(s) ds}{s - \frac{b_1 - a_1}{2} r + \frac{b_2 + a_2 - b_1 - a_1}{b_2 - a_2}} = \frac{1 + \kappa}{4\mu_0} q_1(r) \quad (2.26)
\end{aligned}$$

ve $x \in (a_2, b_2)$ için,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \phi_1(s) k_{21}(r, s) ds + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\phi_1(s) ds}{s - \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1} r + \frac{b_1 + a_1 - b_2 - a_2}{b_1 - a_1}} \\ & + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \phi_2(s) k_{22}(r, s) ds + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\phi_2(s)}{s - r} ds = \frac{1 + \kappa}{4\mu_0} q_2(r) \end{aligned} \quad (2.27)$$

singüler integral denklem sistemi elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} \phi_1(s) &= e^{\beta \left(\frac{b_1 - a_1}{2} s + \frac{b_1 + a_1}{2} \right)} g_1 \left(\frac{b_1 - a_1}{2} s + \frac{b_1 + a_1}{2} \right), \\ \phi_2(s) &= e^{\beta \left(\frac{b_2 - a_2}{2} s + \frac{b_2 + a_2}{2} \right)} g_2 \left(\frac{b_2 - a_2}{2} s + \frac{b_2 + a_2}{2} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{11}(r, s) &= k \left(\frac{b_1 - a_1}{2} r + \frac{b_1 + a_1}{2}, \frac{b_1 - a_1}{2} s + \frac{b_1 + a_1}{2} \right) \frac{b_1 - a_1}{2}, \\ k_{12}(r, s) &= k \left(\frac{b_1 - a_1}{2} r + \frac{b_1 + a_1}{2}, \frac{b_2 - a_2}{2} s + \frac{b_2 + a_2}{2} \right) \frac{b_2 - a_2}{2}, \\ k_{21}(r, s) &= k \left(\frac{b_2 - a_2}{2} r + \frac{b_2 + a_2}{2}, \frac{b_1 - a_1}{2} s + \frac{b_1 + a_1}{2} \right) \frac{b_1 - a_1}{2}, \\ k_{22}(r, s) &= k \left(\frac{b_2 - a_2}{2} r + \frac{b_2 + a_2}{2}, \frac{b_2 - a_2}{2} s + \frac{b_2 + a_2}{2} \right) \frac{b_2 - a_2}{2}, \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} q_1(r) &= p_1 \left(\frac{b_1 - a_1}{2} r + \frac{b_1 + a_1}{2} \right) \\ q_2(r) &= p_2 \left(\frac{b_2 - a_2}{2} r + \frac{b_2 + a_2}{2} \right) \end{aligned}$$

dir. Ayrıca, ek koşullar

$$\int_{-1}^1 \phi_1(s) ds = 0 \quad (2.28)$$

$$\int_{-1}^1 \phi_2(s) ds = 0 \quad (2.29)$$

olarak verilir.

2.3. SİNGÜLER İNTEGRAL DENKLEM SİSTEMİNİN GAUSS-CHEBYSHEV YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde, (2.26)-(2.29) singüler integral denklem sisteminin Gauss Chebyshev yöntemi ile çözümü verilecektir. Bunun için

$$\phi_i(s) = \frac{\psi_i(s)}{\sqrt{1-s^2}}, \quad i=1,2$$

şeklinde çözüm arayalım.

$$\psi_i(s) = \sum_{j=0}^p B_{ij} P_j^{(\alpha,\beta)}(s)$$

olarak alalım. Bu durumda ilgili ortogonal polinomlar birinci çeşit Chebyshev polinomu olan $T_j(t)$ ye indirgenir. Yani

$$\psi_i(s) = \sum_{j=0}^{\infty} B_{ij} T_j(s)$$

olarak yazılır. Aşağıdaki bilinen bağlantılar ele alınsın (Erdogan ve Gupta, 1972):

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_j(s) ds}{(s-r)\sqrt{1-s^2}} = U_{j-1}(r), \quad j > 0, \quad -1 < r < 1$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{T_m(s_k)}{n(s_k - r_l)} = \begin{cases} 0 & , \quad m = 0 \\ U_{m-1}(r_l) & , \quad 0 < m < n \end{cases}$$

Burada $U_{m-1}(x)$, $(m-1)$. mertebeden ikinci çeşit Chebyshev polinomlarıdır

ve

$$T_n(s_k) = 0, \quad s_k = \cos\left(\pi \frac{2k-1}{2n}\right), \quad k=1, \dots, n$$

$$U_{n-1}(r_l) = 0, \quad r_l = \cos\left(\frac{\pi l}{n}\right), \quad l=1, \dots, n-1$$

dir. Böylece singüler integraller

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi_i(s)}{(s-r)\sqrt{1-s^2}} dr = \sum_{j=0}^p B_{ij} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_j(s)}{(s-r)\sqrt{1-s^2}} ds = \sum_{j=1}^p B_{ij} U_{j-1}(r)$$

olarak yeniden ifade edilebilir. $r = r_l$ yazılırsa, singüler integral

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi_i(s)}{(s-r_l)\sqrt{1-s^2}} ds = \sum_{j=1}^p B_{ij} U_{j-1}(r_l) = \sum_{k=1}^n \frac{\sum_{j=1}^p B_{ij} T_j(s_k)}{m(s_k-r_l)} = \sum_{k=1}^n \frac{\psi_i(s_k)}{n(s_k-r_k)}$$

olarak bulunur. İlgili singüler integral denklemin regüler kısımlarına da bilinen Gauss-Chebyshev polinomları uygulanarak

$$\sum_{k=1}^n \left\{ \left(\frac{\psi_1(s_k) k_{11}(r_l, s_k)}{n} \right) + \frac{\psi_1(s_k)}{n(s_k-r_k)} + \frac{\psi_2(s_k) k_{12}(r_l, s_k)}{n} + \frac{1}{n} \frac{\psi_2(s_k)}{s_k - \frac{b_1-a_1}{b_2-a_2} r_l + \frac{b_2+a_2-b_1-a_1}{b_2-a_2}} \right\} = \frac{1+\kappa}{4\mu_0} q_1(r_l) \quad (2.30)$$

$$\sum_{k=1}^n \left\{ \psi_1(s_k) k_{21}(r_l, s_k) + \frac{\psi_1(s_k)}{s_k - \frac{b_2-a_2}{b_1-a_1} r_l + \frac{b_1+a_1-b_2-a_2}{b_1-a_1}} + \psi_2(s_k) k_{22}(r_k, s_l) + \frac{\psi_2(s_k)}{s_k-r_l} \right\} = \frac{1+\kappa}{4\mu_0} q_2(r_l) \quad (2.31)$$

bulunur. Benzer prosedür (2.28)-(2.29) ek koşuluna uygulanırsa

$$\sum_{k=1}^n \frac{\pi}{n} \psi_1(s_k) = 0 \quad (2.32)$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{\pi}{n} \psi_2(s_k) = 0 \quad (2.33)$$

elde edilir. Böylece (2.26)-(2.29) singüler integral denklem sisteminin çözümü (2.30)-(2.33) lineer cebirsel denklem sisteminin çözümüne indirgenir.

2.4. SİNGÜLER İNTEGRAL DENKLEM SİSTEMİNİN LOBATTO-CHEBYSHEV YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde, (2.26)-(2.29) singüler integral denklem sisteminin Lobatto-Chebyshev yöntemi ile çözümü verilecektir.

$$\phi_i(s) = \frac{\psi_i(s)}{\sqrt{1-s^2}}, \quad i = 1, 2 \quad (2.34)$$

şeklinde çözüm aransın. (2.34) denklemini (2.26) ve (2.27) denklemlerinde yerine yazılırsa, sırasıyla

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi_1(s)}{\sqrt{1-s^2}} k_{11}(r,s) ds + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi_1(s)}{(s-r)\sqrt{1-s^2}} ds + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi_2(s)}{\sqrt{1-s^2}} k_{12}(r,s) ds \\ & + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi_2(s) ds}{\left(s - \frac{b_1 - a_1}{b_2 - a_2} r + \frac{b_2 + a_2 - b_1 - a_1}{b_2 - a_2} \right) \sqrt{1-s^2}} = \frac{1+\kappa}{4\mu_0} q_1(r) \end{aligned} \quad (2.35)$$

ve

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi_1(s)}{\sqrt{1-s^2}} k_{21}(r,s) ds + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi_1(s) ds}{\left(s - \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1} r + \frac{b_1 + a_1 - b_2 - a_2}{b_1 - a_1} \right) \sqrt{1-s^2}} \\ & + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi_2(s)}{\sqrt{1-s^2}} k_{22}(r,s) ds + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi_2(s)}{(s-r)\sqrt{1-s^2}} ds = \frac{1+\kappa}{4\mu_0} q_2(r) \end{aligned} \quad (2.36)$$

olarak ifade edilebilir. Bölüm 1.2 de anlatılan Lobatto-Chebyshev yönteminin uygulanmasıyla (2.35) ve (2.36) denklem sistemi $x \in (a_1, b_1)$ için

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{\lambda_k \psi_1(s_k)}{n-1} \left[k_{11}(r_m, s_k) + \frac{1}{s_k - r_m} \right] + \frac{\lambda_k \psi_2(s_k)}{n-1} \left[k_{12}(r_m, s_k) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{s_k - \frac{b_1 - a_1}{b_2 - a_2} r_m + \frac{b_2 + a_2 - b_1 - a_1}{b_2 - a_2}} \right] \right\} = \frac{1+\kappa}{4\mu_0} q_1(r_m) \end{aligned} \quad (2.37)$$

ve $x \in (a_2, b_2)$ için

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{\lambda_k \psi_1(s_k)}{n-1} \left[k_{21}(r_m, s_k) + \frac{1}{s_k - \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1} r_m + \frac{b_1 + a_1 - b_2 - a_2}{b_1 - a_1}} \right] \right. \\ & \left. + \frac{\lambda_k \psi_2(s_k)}{n-1} \left[k_{22}(r_m, s_k) + \frac{1}{s_k - r_m} \right] \right\} = \frac{1+\kappa}{4\mu_0} q_2(r_m) \end{aligned} \quad (2.38)$$

lineer cebirsel denklem sistemine indirgenir. Benzer şekilde (2.28) ve (2.29) ek koşullarından

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \psi_1(s_k) = 0 \quad (2.39)$$

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \psi_2(s_k) = 0 \quad (2.40)$$

denklem sistemi bulunur. Burada

$$\lambda_k = \begin{cases} \frac{1}{2}, & k = 1, n \\ 1, & k = 2, 3, \dots, n-1 \end{cases}$$

ve

$$T_{n-1}(r_m) = 0 \quad , \quad m = 1, \dots, n-1$$

$$(1 - s_k^2) U_{n-2}(s_k) = 0$$

dir. Böylece (2.26)-(2.29) singüler integral denklem sisteminin çözümü (2.37)-(2.40) lineer cebirsel denklem sisteminin çözümüne indirgenir.



ÜÇÜNCÜ BÖLÜM
GERİLME ŞİDDET FAKTÖRÜNÜN HESAPLANMASI VE NÜMERİK
SONUÇLAR

3.1. GERİLME ŞİDDET FAKTÖRÜNÜN HESAPLANMASI VE NÜMERİK SONUÇLAR

Bu bölümde, mekanikte önemli bir yere sahip olan çatlak uçlarındaki normalize edilmiş GŞF değerleri çatlak yüzeyine düzgün yayılı yük ($\beta(x) = -p_0$) ve eksponansiyel fonksiyonla değişen yayılı yük $\beta(x) = -\varepsilon_0 E_0 e^{\beta x}$ olmak üzere iki farklı yükleme şartı altında hesaplanacaktır. Çatlak uçlarındaki mod I GŞF değerleri

$$k_1(b_1) = \lim_{x \rightarrow b_1^+} \sqrt{2(x-b_1)} \sigma_{yy}(x, 0)$$

$$k_1(a_1) = \lim_{x \rightarrow a_1^-} \sqrt{2(a_1-x)} \sigma_{yy}(x, 0) \quad (3.1_{a,b,c,d})$$

$$k_1(b_2) = \lim_{x \rightarrow b_2^+} \sqrt{2(x-b_2)} \sigma_{yy}(x, 0)$$

$$k_1(a_2) = \lim_{x \rightarrow a_2^-} \sqrt{2(a_2-x)} \sigma_{yy}(x, 0)$$

formülleriyle belirlenir (Ozturk ve Erdogan, 1999).

Delale ve Erdogan (1977) de verilen teknik kullanılarak mod I GŞF değerleri yeniden ifade edilecektir. İlk olarak b_1 ucundaki GŞF ifadesi yeniden elde edilsin.

Bunun için

$$\psi_1(s) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n T_n(s) \text{ ve } \psi_2(s) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n T_n(s)$$

şeklinde tanımlansın. Bu ifadeleri (2.35) denkleminde yazarak

$$\sum_{n=0}^{\infty} [A_n (G_{n1}(r) + G_{n2}(r)) + B_n (G_{n3}(r) + G_{n4}(r))] = \frac{1+\kappa}{4\mu_0} q_1(r)$$

elde edilir, burada

$$G_{n1}(r) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_n(s) k_{11}(r, s) ds}{\sqrt{1-s^2}},$$

$$G_{n2}(r) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_n(s) ds}{\sqrt{1-s^2} (s-r)},$$

$$G_{n3}(r) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_n(s) k_{12}(r, s) ds}{\sqrt{1-s^2}}$$

ve

$$G_{n4}(r) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_n(s) ds}{\left(s - \frac{b_1 - a_1}{b_2 - a_2} r + \frac{b_2 + a_2 - b_1 - a_1}{b_2 - a_2} \right) \sqrt{1-s^2}}$$

dir. $G_{n1}(r)$, $G_{n3}(r)$ ve $G_{n4}(r)$ sınırlı fonksiyonlar olduğu için sadece $G_{n2}(r)$ fonksiyonunun asimptotik davranışı incelenecektir. Bilinen

$$\frac{1}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{T_n(r) dr}{(r-z)\sqrt{r^2-1}} = \frac{(z - \sqrt{z^2-1})^n}{\sqrt{z^2-1}}$$

bağıntısından

$$G_{n2}(r) = -\frac{(r - \operatorname{sgn}(r)\sqrt{r^2-1})^n}{\operatorname{sgn}(r)\sqrt{r^2-1}}$$

olarak ifade edilebilir. Böylece $r \rightarrow \mathfrak{m}$ iken $G_{n2}(r)$ nin asimptotik davranışı sırasıyla,

$$G_{n2}(r) = -\frac{1}{\sqrt{r^2-1}} + R_1(r)$$

ve

$$G_{n2}(r) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{r^2-1}} + R_2(r)$$

olarak bulunur. $G_{n1}(r)$, $G_{n3}(r)$ ve $G_{n4}(r)$ ifadelerinin \mathfrak{m} de sonlu olduğu ve birinci çeşit Chebyshev polinomlarının $T_n(1)=1$ ve $T_n(-1)=(-1)^n$ olduğu göz önünde tutularak (2.35) denkleminde $r \rightarrow \mathfrak{m}$ iken sırasıyla,

$$\frac{1+\kappa}{4\mu_0} q_1(r) = -\frac{\psi_1(1)}{\sqrt{r^2-1}} + R_3(r)$$

ve

$$\frac{1+\kappa}{4\mu_0}q_1(r) = \frac{\psi_1(1)}{\sqrt{r^2-1}} + R_4(r)$$

elde edilir. (2.25) ile verilen değişken dönüşümü kullanılarak

$$\frac{1+\kappa}{4\mu_0}\sigma_{yy}(x,0) = -\frac{\psi_1(1)}{\sqrt{\left[\left(x-\frac{b_1+a_1}{2}\right)\frac{2}{b_1+a_1}\right]^2-1}} + R_3^o(x)$$

bulunur, burada

$$R_3^o(x) = R_3\left(\left(x-\frac{b_1+a_1}{2}\right)\frac{2}{b_1+a_1}\right)$$

dir. $x \rightarrow b_1^+$ iken

$$\frac{1+\kappa}{4\mu_0}\sigma_{yy}(x,0) = -\frac{\psi_1(1)\sqrt{\frac{b_1-a_1}{2}}}{\sqrt{2(x-b_1)}} + R_3^o(x)$$

olarak yeniden ifade edilebilir. Bu ifade (3.1_a) de yerine yazılırsa, b_1 ucundaki GŞF

$$k_1(b_1) = -\frac{4\mu_0}{1+\kappa}\psi_1(1)\sqrt{\frac{b_1-a_1}{2}}$$

olarak elde edilir. Diğer uçlardaki GŞF ifadeleri benzer yaklaşımla,

$$k_1(a_1) = \frac{4\mu_0}{1+\kappa}\psi_1(-1)\sqrt{\frac{b_1-a_1}{2}}$$

$$k_1(b_2) = -\frac{4\mu_0}{1+\kappa}\psi_2(1)\sqrt{\frac{b_2-a_2}{2}}$$

ve

$$k_1(a_2) = \frac{4\mu_0}{1+\kappa}\psi_2(-1)\sqrt{\frac{b_2-a_2}{2}}$$

olarak bulunur.

Ayrıntılı analizlere geçmeden önce çalışmanın doğruluğunu kanıtlamak için iki çatlak durumunda iç noktalar birbirine yeterince yakın seçilerek tek çatlak problemine yaklaştığı durum için elde edilen sonuçlar Tablo 3.1 ve Tablo 3.2 ile verilecektir.

Tablo 3.1 ve Tablo 3.2 oluşturulurken (Delale ve Erdogan, 1983) de verilen sonuçlarla karşılaştırmak amacıyla $-a_1 = b_2 = a$ olarak seçilmiştir.

Tablo 3.1: Düzgün Yayılı Yük Durumunda Normalize Edilmiş GŞF Değerlerinin Tek Çatlak Durumuyla Karşılaştırılması.

βa	$k_1(a_1)/(p_0\sqrt{a})$			$k_1(b_2)/(p_0\sqrt{a})$		
	Gauss-Chebyshev	Lobatto-Chebyshev	(Delale, Erdogan; 1983)	Gauss-Chebyshev	Lobatto-Chebyshev	(Delale, Erdogan; 1983)
0	1	1	1	1	1	1
0.25	0.91563	0.94158	0.931	1.04569	1.05918	1.067
0.50	0.84265	0.88274	0.863	1.09563	1.11849	1.117
0.75	0.78065	0.83004	0.801	1.15692	1.17742	1.170
1	0.72214	0.77714	0.745	1.20563	1.23553	1.222

Tablo 3.2: Eksponansiyel Yayılı Yük Durumunda Normalize Edilmiş GŞF Değerlerinin Tek Çatlak Durumuyla Karşılaştırılması.

βa	$k_1(a_1)/(\varepsilon_0 E_0 \sqrt{a})$			$k_1(b_2)/(\varepsilon_0 E_0 \sqrt{a})$		
	Gauss-Chebyshev	Lobatto-Chebyshev	(Delale, Erdogan; 1983)	Gauss-Chebyshev	Lobatto-Chebyshev	(Delale, Erdogan; 1983)
0	1	1	1	1	1	1
0.25	0.80456	0.82891	0.821	1.18056	1.19918	1.203
0.50	0.64568	0.67727	0.667	1.41647	1.43446	1.439
0.75	0.51575	0.54507	0.539	1.70659	1.71556	1.721
1	0.41156	0.42021	0.433	2.04579	2.05424	2.063

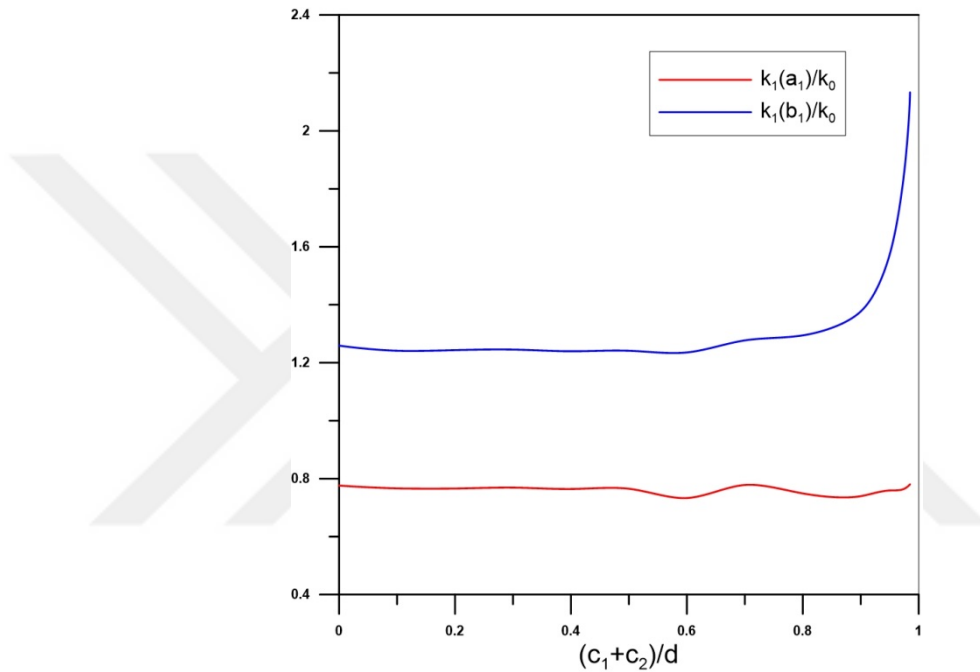
Tablo 3.1 ve Tablo 3.2'den görüldüğü gibi iki çatlak içeren problem içteki uçlar birbirine yeterince yaklaştığında tek çatlak içeren problemdeki GŞF değerlerine yeterince yaklaşır. Ayrıca βa non homojenlik parametresi arttığında a_1 ucundaki normalize edilmiş GŞF değeri azalırken b_2 ucundaki normalize edilmiş GŞF değerleri artar.

Ozturk ve Erdogan (2001) çalışmasında, homojen olmayan ortotrop bir ortamdaki çoklu çatlak problemini incelemiştir. İkincil çatlağın yerinin ve bağlı boyunun dominant çatlak içeren ortotrop non homojen bir ortamdaki GŞF değerleri üzerine etkisi araştırılmıştır. Ayrıca özel bir durum olarak, izotrop durum nümerik sonuçlar kısmında bazı grafikler ve tablolar da yer almıştır. Bu da bize elde ettiğimiz sonuçları karşılaştırma olanağı sunar. Şekil 3.1 de temsili olarak düzgün yayılı yük ($\beta(x) = -p_0$) altında $(c_1 + c_2)/d$ parametresinin normalize edilmiş GŞF üzerindeki

etkisi hesaplanmış ve (Ozturk ve Erdogan, 2001) de verilen grafikte uyumlu olduğu görülmüştür. Burada c_1 ve c_2 sırasıyla birinci ve ikinci çatlakların boylarının yarısı, d ise çatlakların orta noktaları arasındaki uzaklıktır.

Buradan sonra tüm hesaplamalar Lobatto-Chebyshev yöntemi kullanılarak yapılmıştır.

Şekil 3.1: Homojen Olmayan Bir Ortamda Düzgün Yayılı Yük Altında $(c_1 + c_2)/d$ Parametresinin Normalize Edilmiş GŞF Üzerindeki Etkisi.



Şekil 3.1'den görüldüğü gibi $(c_1 + c_2)/d \rightarrow 1$ iken, yani iki çatlak, tek çatlığa yaklaşırken, iç uçlardaki GŞF değerleri $(k_1(b_1)/k_0)$ sonsuza gider.

Tablo 3.3 ve Tablo 3.4 düzgün yayılı yük altında homojen durumdaki bir problemde çatlak uçlarındaki normalize edilmiş GŞF değerlerini gösterir. Tablo 3.3 ve Tablo 3.4 den homojen ortam için iç ve dış uçlardaki normalize edilmiş GŞF

değerlerinin eşit olduğu, yani $\frac{k_1(a_1)}{p_0\sqrt{(b_1-a_1)/2}} = \frac{k_1(b_2)}{p_0\sqrt{(b_2-a_2)/2}}$ ve

$\frac{k_1(b_1)}{p_0\sqrt{(b_1-a_1)/2}} = \frac{k_1(a_2)}{p_0\sqrt{(b_2-a_2)/2}}$ olduğu görülür. Ayrıca çatlak boylarının

büyümesinin normalize edilmiş GŞF değerlerinin büyümesine yol açtığı görülür.

Tablo 3.3: Düzgün Yayılı Yük Altında Çatlak Uçlarındaki Normalize Edilmiş GŞF Değerleri ($q_1 = -p_0$, $q_2 = -p_0$, $\nu = 0.3$, $\beta a = 0$).

a_i, b_i	$\frac{k_1(a_1)}{p_0\sqrt{(b_1-a_1)}/2}$	$\frac{k_1(b_1)}{p_0\sqrt{(b_1-a_1)}/2}$	$\frac{k_1(a_2)}{p_0\sqrt{(b_2-a_2)}/2}$	$\frac{k_1(b_2)}{p_0\sqrt{(b_2-a_2)}/2}$
$a_1=-2a, b_1=-a, a_2=a, b_2=2a$	1.012487644	1.017615972	1.017616019	1.012487651
$a_1=-3a, b_1=-a, a_2=a, b_2=3a$	1.027953087	1.047959978	1.047960004	1.027953188
$a_1=-5a, b_1=-a, a_2=a, b_2=5a$	1.051681214	1.112470131	1.112470163	1.051681571
$a_1=-8a, b_1=-a, a_2=a, b_2=8a$	1.075152573	1.201649996	1.201650028	1.075152581
$a_1=-10a, b_1=-a, a_2=a, b_2=10a$	1.086335361	1.255122228	1.255122219	1.086335259

Tablo 3.4: Düzgün Yayılı Yük Altında Çatlak Uçlarındaki Normalize Edilmiş GŞF Değerleri ($q_1 = -p_0$, $q_2 = -p_0$, $\nu = 0.3$, $\beta a = 0$).

a_i, b_i	$\frac{k_1(a_1)}{p_0\sqrt{(b_1-a_1)}/2}$	$\frac{k_1(b_1)}{p_0\sqrt{(b_1-a_1)}/2}$	$\frac{k_1(a_2)}{p_0\sqrt{(b_2-a_2)}/2}$	$\frac{k_1(b_2)}{p_0\sqrt{(b_2-a_2)}/2}$
$a_1=-10a, b_1=-a, a_2=a, b_2=10a$	1.086335361	1.255122228	1.255122219	1.086335259
$a_1=-10a, b_1=-2a, a_2=2a, b_2=10a$	1.051681494	1.112470133	1.112470223	1.051681576
$a_1=-10a, b_1=-3a, a_2=3a, b_2=10a$	1.032562985	1.058727159	1.058727132	1.032562807
$a_1=-10a, b_1=-5a, a_2=5a, b_2=10a$	1.012487669	1.017615974	1.017615888	1.012487651
$a_1=-10a, b_1=-8a, a_2=8a, b_2=10a$	1.001469578	1.001643107	1.001643172	1.001469767

Tablo 3.5 ve Tablo 3.6 düzgün yayılı yük altında homojen olmayan bir ortamdaki normalize edilmiş GŞF değerleri verilmiştir. Tablo 3.5 ve Tablo 3.6 dan görüldüğü gibi her bir çatlak için sol uçtaki normalize edilmiş GŞF değerleri sağ uçtaki normalize edilmiş GŞF değerlerinden küçüktür. Ayrıca çatlak boyları büyüdükçe b_2 ucundaki normalize edilmiş GŞF değerleri artar.

Tablo 3.5: Düzgün Yayılı Yük Altında Çatlak Uçlarındaki Normalize Edilmiş GŞF Değerleri ($q_1 = -p_0$, $q_2 = -p_0$, $\nu = 0.3$, $\beta a = 0.5$).

a_i, b_i	$\frac{k_1(a_1)}{p_0\sqrt{(b_1-a_1)}/2}$	$\frac{k_1(b_1)}{p_0\sqrt{(b_1-a_1)}/2}$	$\frac{k_1(a_2)}{p_0\sqrt{(b_2-a_2)}/2}$	$\frac{k_1(b_2)}{p_0\sqrt{(b_2-a_2)}/2}$
$a_1=-2a, b_1=-a, a_2=a, b_2=2a$	1.029589130	1.099735950	0.9338733123	0.9739929003
$a_1=-3a, b_1=-a, a_2=a, b_2=3a$	0.7511637204	1.188782686	0.8712305364	1.297551776
$a_1=-5a, b_1=-a, a_2=a, b_2=5a$	0.6045535045	1.276556662	0.7231110866	1.691269375
$a_1=-8a, b_1=-a, a_2=a, b_2=8a$	0.2056800393	1.421656626	0.7354093662	2.101045951
$a_1=-10a, b_1=-a, a_2=a, b_2=10a$	0.4338277174	1.303941182	0.5580088821	2.479358844

Tablo 3.6: Düzgün Yayılı Yük Altında Çatlak Uçlarındaki Normalize Edilmiş GŞF Değerleri ($q_1 = -p_0$, $q_2 = -p_0$, $\nu = 0.3$, $\beta a = 0.5$).

a_i, b_i	$\frac{k_1(a_1)}{p_0\sqrt{(b_1-a_1)}/2}$	$\frac{k_1(b_1)}{p_0\sqrt{(b_1-a_1)}/2}$	$\frac{k_1(a_2)}{p_0\sqrt{(b_2-a_2)}/2}$	$\frac{k_1(b_2)}{p_0\sqrt{(b_2-a_2)}/2}$
$a_1=-10a, b_1=-a, a_2=a, b_2=10a$	0.4338277174	1.303941182	0.5580088821	2.479358844
$a_1=-10a, b_1=-2a, a_2=2a, b_2=10a$	0.2450840280	1.069098896	0.3589073016	2.080141680
$a_1=-10a, b_1=-3a, a_2=3a, b_2=10a$	0.4917573172	1.272651216	0.6534136924	1.854349634
$a_1=-10a, b_1=-5a, a_2=5a, b_2=10a$	0.5619325954	1.555251924	0.6875207118	1.726326400
$a_1=-10a, b_1=-8a, a_2=8a, b_2=10a$	0.9211605772	1.049492621	0.9729507504	1.087194593

Tablo 3.7 ve Tablo 3.8 homojen bir ortamdaki iki çatlak için ekspanansiyel yayılı yük altında çatlak uçlarındaki GŞF değerlerini göstermektedir. Tablo 3.7 den dış uçlardaki normalize edilmiş GŞF değerlerinin eşit olduğu ve çatlak boyları büyüdükçe çatlak uçlarındaki GŞF değerlerinin arttığı görülmektedir. Tablo 3.8 den dış çatlak uçları sabit tutulup, çatlak aralarındaki mesafe arttığında çatlak uçlarındaki normalize edilmiş GŞF değerlerin azaldığı görülmektedir.

Tablo 3.7: Ekspansiyel Yayılı Yük Altında Çatlak Uçlarındaki Normalize Edilmiş GŞF Değerleri ($q_1 = -\varepsilon_0 E_0 e^{\beta x}$, $q_2 = -\varepsilon_0 E_0 e^{\beta x}$, $\nu = 0.3$, $\beta a = 0$).

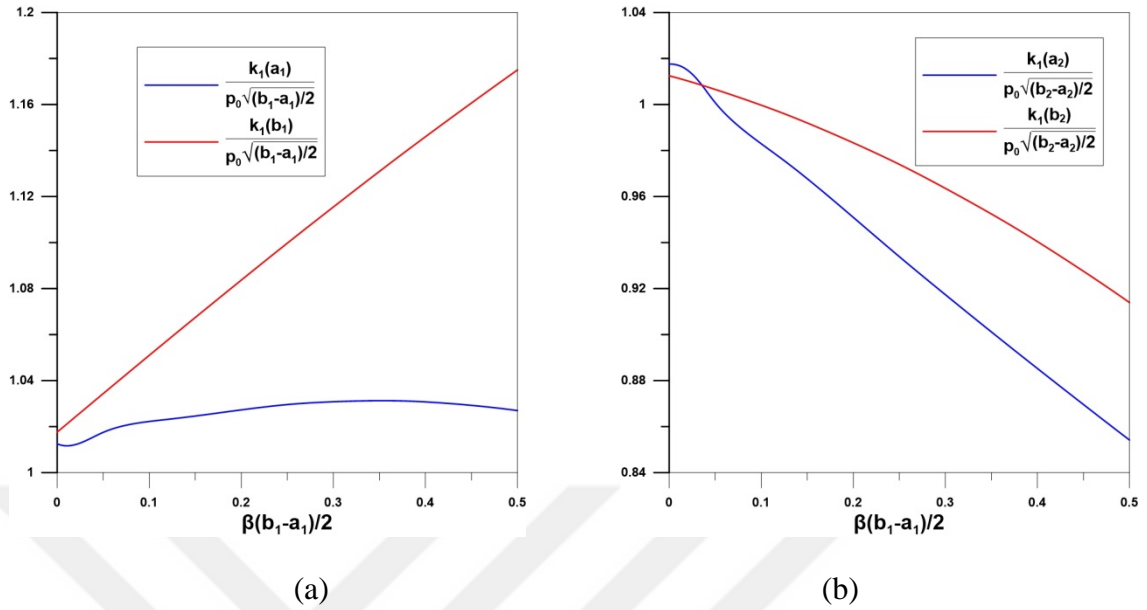
a_i, b_i	$k_1(a_1)$	$k_1(b_1)$	$k_1(a_2)$	$k_1(b_2)$
	$\varepsilon_0 E_0 \sqrt{(b_1 - a_1)} / 2$	$\varepsilon_0 E_0 \sqrt{(b_1 - a_1)} / 2$	$\varepsilon_0 E_0 \sqrt{(b_2 - a_2)} / 2$	$\varepsilon_0 E_0 \sqrt{(b_2 - a_2)} / 2$
$a_1 = -2a, b_1 = -a, a_2 = a, b_2 = 2a$	1.012487644	1.017615972	1.017616019	1.012487651
$a_1 = -3a, b_1 = -a, a_2 = a, b_2 = 3a$	1.027953087	1.047959978	1.047960004	1.027953188
$a_1 = -5a, b_1 = -a, a_2 = a, b_2 = 5a$	1.051681214	1.112470131	1.112470163	1.051681571
$a_1 = -8a, b_1 = -a, a_2 = a, b_2 = 8a$	1.075152573	1.201649996	1.201650028	1.075152581
$a_1 = -10a, b_1 = -a, a_2 = a, b_2 = 10a$	1.086335361	1.255122228	1.255122219	1.086335259

Tablo 3.8: Ekspansiyel Yayılı Yük Altında Çatlak Uçlarındaki Normalize Edilmiş GŞF Değerleri ($q_1 = -\varepsilon_0 E_0 e^{\beta x}$, $q_2 = -\varepsilon_0 E_0 e^{\beta x}$, $\nu = 0.3$, $\beta a = 0$).

a_i, b_i	$k_1(a_1)$	$k_1(b_1)$	$k_1(a_2)$	$k_1(b_2)$
	$\varepsilon_0 E_0 \sqrt{(b_1 - a_1)} / 2$	$\varepsilon_0 E_0 \sqrt{(b_1 - a_1)} / 2$	$\varepsilon_0 E_0 \sqrt{(b_2 - a_2)} / 2$	$\varepsilon_0 E_0 \sqrt{(b_2 - a_2)} / 2$
$a_1 = -10a, b_1 = -a, a_2 = a, b_2 = 10a$	1.086335361	1.255122228	1.255122219	1.086335259
$a_1 = -10a, b_1 = -2a, a_2 = 2a, b_2 = 10a$	1.051681494	1.112470133	1.112470223	1.051681576
$a_1 = -10a, b_1 = -3a, a_2 = 3a, b_2 = 10a$	1.032562985	1.058727159	1.058727132	1.032562807
$a_1 = -10a, b_1 = -5a, a_2 = 5a, b_2 = 10a$	1.012487669	1.017615974	1.017615888	1.012487651
$a_1 = -10a, b_1 = -8a, a_2 = 8a, b_2 = 10a$	1.001469578	1.001643107	1.001643172	1.001469767

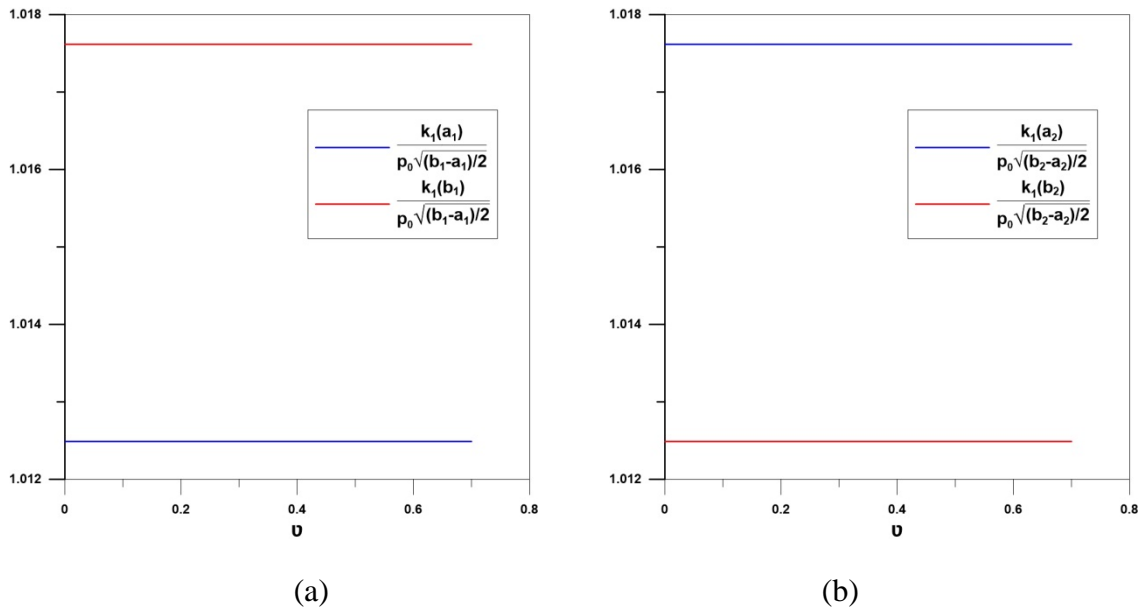
Şekil 3.2’de $a_1 = -2a$, $b_1 = -a$, $a_2 = a$, $b_2 = 2a$ boyunca yerleşen çatlaklar için non homojenlik parametresi $\beta(b_1 - a_1)/2$ nin düzgün yayılı yük altında normalize edilmiş GŞF üzerindeki etkisi verilmiştir. Non homojenlik parametresi arttıkça normalize edilmiş GŞF değerleri birinci çatlakın a_1 ucunda artarken, ikinci çatlak uçlarında azalmaktadır.

Şekil 3.2: Non Homojenlik Parametresinin Düzgün Yayılı Yük Altında Çatlak Uçlarındaki Normalize Edilmiş GŞF Üzerindeki Etkisi ($\nu = 0.3$).



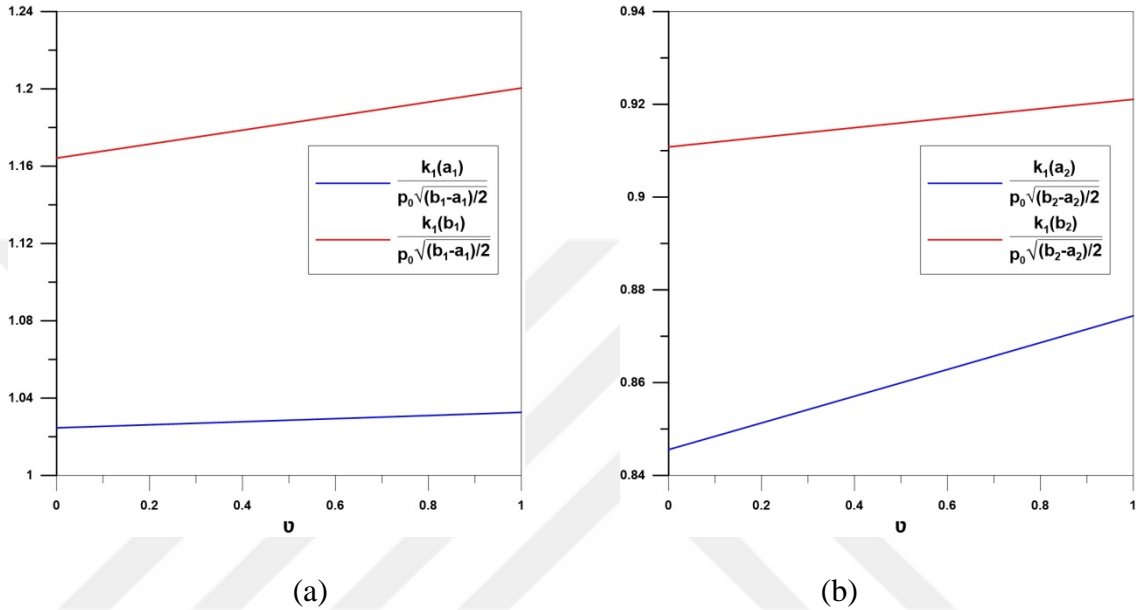
Şekil 3.3'de homojen bir ortam için $a_1 = -2a$, $b_1 = -a$, $a_2 = a$, $b_2 = 2a$ boyunca yerleşen çatlaklar için Poisson oranı ν nün düzgün yayılı yük altında normalize edilmiş GŞF üzerindeki etkisi gösterilmiştir. Şekil 3.3 den görüldüğü gibi Poisson oranı ν nün normalize edilmiş GŞF üzerinde kayda değer bir etkisi yoktur.

Şekil 3.3: Homojen Bir Ortamda Düzgün Yayılı Yük Altında Poisson Oranı ν 'nün Normalize Edilmiş GŞF Üzerindeki Etkisi.



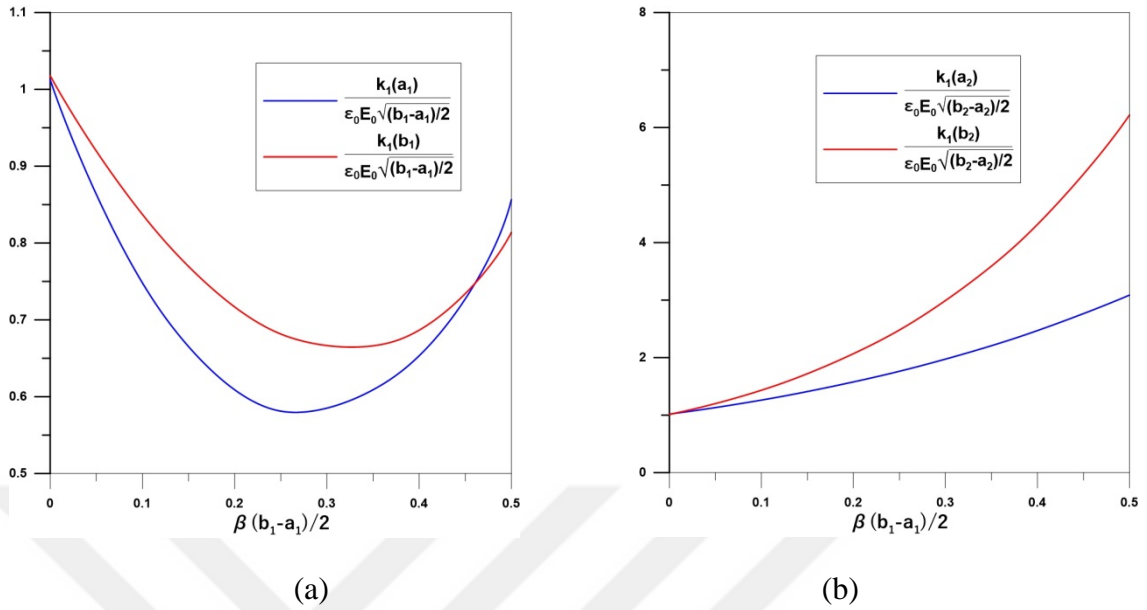
Şekil 3.4'de homojen olmayan bir ortamda $a_1 = -2a$, $b_1 = -a$, $a_2 = a$, $b_2 = 2a$ boyunca yerleşen çatlaklar için Poisson oranı ν nün düzgün yayılı yük altında normalize edilmiş GŞF üzerindeki etkisi gösterilmiştir. Şekil 3.4'ten görüldüğü gibi Poisson oranı ν nün normalize edilmiş GŞF üzerinde kayda değer bir etkisi yoktur.

Şekil 3.4: Homojen Olmayan Bir Ortamda Düzgün Yayılı Yük Altında Poisson Oranı ν 'nün Normalize Edilmiş GŞF Üzerindeki Etkisi.



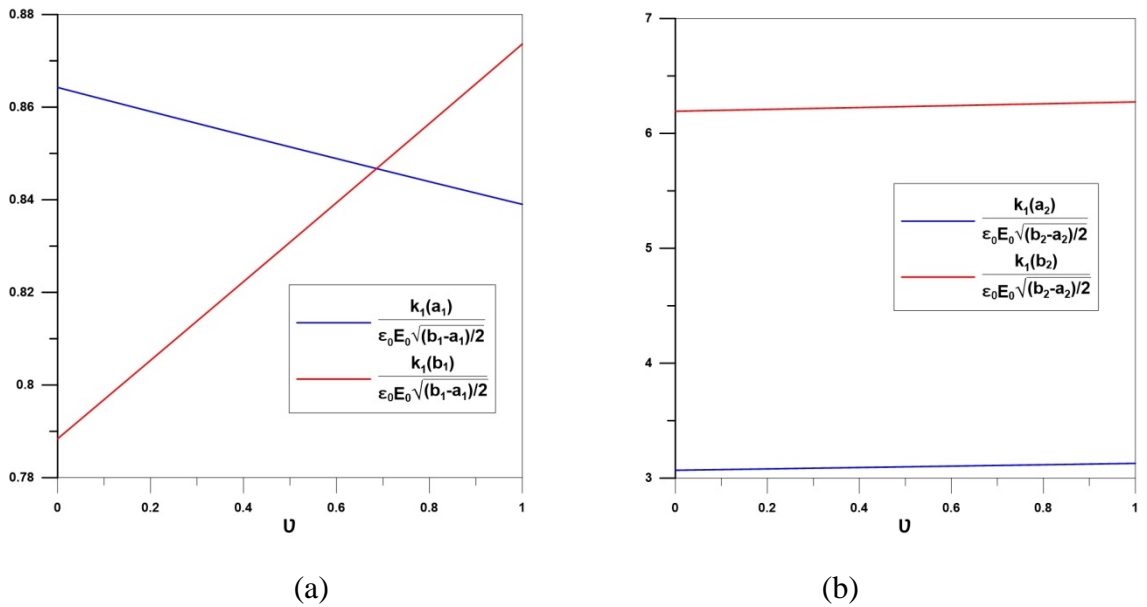
Şekil 3.5'de $a_1 = -2a$, $b_1 = -a$, $a_2 = a$, $b_2 = 2a$ boyunca yerleşen çatlaklar için non homojenlik parametresi $\beta(b_1 - a_1)/2$ nin eksponansiyel yayılı yük altında normalize edilmiş GŞF üzerindeki etkisi verilmiştir.

Şekil 3.5: Non Homojenlik Parametresinin Ekspansiyel Yayılı Yük Altında Çatlak Uçlarındaki Normalize Edilmiş GŞF Üzerindeki Etkisi ($\nu = 0.3$).



Şekil 3.6'da homojen olmayan bir ortamda $a_1 = -2a$, $b_1 = -a$, $a_2 = a$, $b_2 = 2a$ boyunca yerleşen çatlaklar için Poisson oranı ν nün ekspansiyel yayılı yük altında normalize edilmiş GŞF üzerindeki etkisi gösterilmiştir. Şekil 3.6'dan görüldüğü gibi Poisson oranı ν nün normalize edilmiş GŞF üzerinde kayda değer bir etkisi yoktur.

Şekil 3.6: Homojen Olmayan Bir Ortamda Ekspansiyel Yayılı Yük Altında Poisson Oranı ν 'nün Normalize Edilmiş GŞF Üzerindeki Etkisi



SONUÇ

Bu tez çalışmasında, homojen olmayan bir ortamda iki çatlak içeren bir elastisite problemi ele alınmıştır. Ele alınan problem, elastisite teorisinin temel denklemleri yardımıyla modellenmiştir. Singüler integral denklemler tekniğiyle elde edilen singüler integral denklem sistemine Gauss-Chebyshev ve Lobatto-Chebyshev yöntemleriyle yaklaşmıştır. Çalışmanın geçerliliğini göstermek için elde edilen sonuçlar literatürde bulunan tek çatlak problemine yaklaştığı özel bir durumla karşılaştırılmıştır. Mekanikte önemli bir yere sahip olan çatlak uçlarındaki GŞF değerleri için elde edilen sonuçlar aşağıdaki şekilde özetlenebilir:

i) Homojen ortamda düzgün yayılı yük altında elde edilen iç ve dış çatlak uçlarındaki GŞF değerleri eşittir:

$$\frac{k_1(a_1)}{p_0\sqrt{(b_1-a_1)/2}} = \frac{k_1(b_2)}{p_0\sqrt{(b_2-a_2)/2}} \text{ ve } \frac{k_1(b_1)}{p_0\sqrt{(b_1-a_1)/2}} = \frac{k_1(a_2)}{p_0\sqrt{(b_2-a_2)/2}}.$$

Ayrıca çatlak boyları arttıkça normalize edilmiş GŞF değerleri de artar.

ii) Düzgün yayılı yük altında homojen olmayan bir ortamdaki b_2 ucundaki normalize edilmiş GŞF değerleri çatlak boylarının büyümesiyle artar; küçülmesiyle azalır.

iii) Homojen ortamda eksponansiyel yayılı yük altında elde edilen dış çatlak uçlarındaki normalize edilmiş GŞF değerleri eşittir. Ayrıca çatlak boyları arttıkça çatlak uçlarındaki normalize edilmiş GŞF değerleri de artar.

iv) Non homojenlik parametresinin artmasıyla, düzgün yayılı yük altında normalize edilmiş GŞF değerleri birinci çatlak a_1 ucunda artarken, ikinci çatlak uçlarında azalmaktadır.

v) Poisson oranı (ν) nın GŞF üzerinde kayda değer bir etkisi yoktur.

KAYNAKÇA

- Adams, G. G. (1980). Crack interaction in an infinite elastic strip. *International Journal of Engineering Science*, 18(3), 455-462.
- Abdou, M. A., & Nasr, A. A. (2003). On the numerical treatment of the singular integral equation of the second kind. *Applied Mathematics and Computation*, 146(2-3), 373-380.
- Chan, Y. S., & Koshkin, S. (2019). Mathematical Details on singular Integral equation method for solving crack problems. *Journal of Mathematics Research*, 11, 102-117.
- Delale, F., & Erdogan, F. (1977). The problem of internal and edge cracks in an orthotropic strip. *Journal on Applied Mechanics*, 237- 242.
- Delale, F., & Erdogan, F. (1983). The crack problem for a nonhomogeneous plane. *Journal on Applied Mechanics*, 50, 609- 614.
- Delale, F., & Erdogan, F. (1988). Interface crack in a nonhomogeneous elastic medium. *International Journal of Engineering Science*, 26(6), 559-568.
- Erdogan, F., & Gupta, G. D. (1972). On the numerical solution of singular integral equations. *Quarterly of Applied Mathematics*, 30, 525-534.
- Erdogan, F., & Biricikoglu, V. (1973). Two bonded half planes with a crack going through the interface. *International Journal of Engineering Science*, 11(7), 745-766.
- Erdogan, F., Gupta, G., & Cook, T. S. (1973). Numerical solution of singular integral equations. In G.C Sih (Eds.), *Methods of analysis and solutions of crack problems* (pp. 368-425). The Netherlands: Noordhoff International Publishing.
- Erdol, R., & Erdogan, F. (1976). A note on the bending of a cracked strip. Report/Patent Number:NASA-CR-149584. Erişim adresi:
[https:// ntrs.nasa.gov/citations/19770010562](https://ntrs.nasa.gov/citations/19770010562)
- Gerasoulis, A. (1986). The singular value decomposition of the Gauss-Chebyshev and Lobatto-Chebyshev methods for Cauchy singular integral equations. *Computers & Mathematics with Applications*, 12(8), 895-907.

- Gerasoulis, A., & Srivastav, R. P. (1981). A method for the numerical solution of singular integral equations with a principal value integral. *International Journal of Engineering Science*, 19(9), 1293-1298.
- Galybin, A. N. (2018). Integral equations and Gauss–Chebyshev quadrature for planar rectangular cracks. *International Journal of Mechanical Sciences*, 146, 272-279.
- Hochstrasser U.W (1964). Orthogonal Polynomials. In M. Abramowitz & I.A. Stegun (Eds), *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables* (pp.773-792). Washington: US Government printing office.
- Ioakimidis, N. I. (1981). An iterative algorithm for the numerical solution of singular integral equations. *Journal of Computational Physics*, 43(1), 164-176.0
- Ioakimidis, N. I. (1981). Some remarks on the numerical solution of Cauchy-type singular integral equations with index equal to—1. *Computers & Structures*, 14(5-6), 403-407.
- Ioakimidis, N. I. (1983). A strange convergence property of the lobatto-chebyshev method for the numerical determination of stress intensity factors. *Computers & Structures*, 17(2), 205-209.
- Ioakimidis, N. I., & Theocaris, P. S. (1980). The modified Lobatto-Chebyshev method applied to the numerical evaluation of stress intensity factors in cracks with a corner point. *Revue Roumaine des Sciences Techniques, Serie de Mecanique Appliquee*, 25, 151-159.
- Jin, X., Keer, L. M., & Wang, Q. (2008). A practical method for singular integral equations of the second kind. *Engineering Fracture Mechanics*, 75(5), 1005-1014.
- Krenk, S. (1975). On the elastic strip with an internal crack. *International Journal of Solids and Structures*, 11(6), 693-708.
- Krenk, S. (1975). On quadrature formulas for singular integral equations of the first and the second kind. *Quarterly of Applied Mathematics*, 33(3), 225-232.
- Ladopoulos, E. G., Zisis, V. A., & Kravvaritis, D. (1988). Singular integral equations in Hilbert space applied to crack problems. *Theoretical and applied fracture mechanics*, 9(3), 271-281.

- Muskhelishvili, N. I. (1953). *Singular integral equations*. Groningen: Noordhoff.
- Okecha, G. E. (2007). Solution of Cauchy-type singular integral equations of the first kind with zeros of Jacobi polynomials as interpolation nodes. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2007, 12 sayfa. <https://doi.org/10.1155/2007/10957>.
- Ozturk, M., & Erdogan, F. (1999), The mixed mode crack problem in an inhomogeneous orthotropic medium, *International Journal of Fracture*, 98, 243-261.
- Ozturk, M., & Erdogan, F. (2001). The collinear crack problem in a graded medium. Air force office of scientific research grant F49620-98-1-0028, Lehigh University, Bethlehem PA 18015. Eriřimadresi: <https://apps.dtic.mil/sti/citations/ADA388676>
- Ratwani, M., & Gupta, G. D. (1974). Interaction between parallel cracks in layered composites. *International Journal of Solids and Structures*, 10(7), 701-708.
- Suo, Z., & Hutchinson, J. W. (1990). Interface crack between two elastic layers. *International Journal of Fracture*, 43(1), 1-18.
- Theocaris, P. S., & Ioakimidis, N. I. (1977). Numerical integration methods for the solution of singular integral equations. *Quarterly of Applied Mathematics*, 35(1), 173-183.
- Venturino, E. (1993). Simple quadrature for singular integrals. *The Journal of Integral Equations and Applications*, 257-276.
- Yusufoğlu, E., & Turhan, I. (2012). A mixed boundary value problem in orthotropic strip containing a crack. *Journal of the Franklin Institute*, 349(9), 2750-2769.
- Yusufoğlu, E., & Turhan, İ. (2013). A numerical approach for a crack problem by Gauss–Chebyshev quadrature. *Archive of Applied Mechanics*, 83(11), 1535-1547.

DİZİN

-C-

Cauchy, 1, 2, 4, 6, 16, 48, 49

Cauchy Çekirdekli Singüler İntegral

Denklem, 6

-Ç-

Çatlak, v, 1, 2, 3, 6, 11, 35, 38, 40, 41,

42, 43, 45

-E-

Elastisite Problemi, v, 1, 3, 4, 16

-F-

Fourier Dönüşümü, 4, 22

-G-

Gauss-Chebyshev, v, vi, viii, 1, 2, 3, 4,

10, 11, 16, 31, 38, 46, 48

GŞF, v, x, xi, xii, 1, 2, 3, 4, 16, 35, 37,

38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46

-H-

Homojen, v, 3, 4, 39, 43, 44, 45, 46

-L-

Lobatto-Chebyshev , iii, v, vi, 1, 2, 3, 4,

11, 13, 16, 31, 32, 38, 39, 46, 48

-O-

Ortogonal Polinomlar, 10, 30

-S-

Singüler İntegral Denklem, v, 1, 2, 3, 4,

6, 11, 13, 14, 16, 24, 30, 31, 33