



3-BOYUTLU WALKER MANİFOLDLARDA REGLE YÜZEYLER

Alev ABEŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NİSAN 2023

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Alev ABEŞ

25/04/2023

3-BOYUTLU WALKER MANİFOLDLARDA REGLE YÜZEYLER
(Yüksek Lisans Tezi)

Alev ABEŞ

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
NİSAN 2023

ÖZET

Bu tezde strict Walker manifoldlarda timelike regle yüzeylerin şekil operatörü, Gauss eğriliği, ortalama eğriliği, Riemann eğriliği, kesit eğriliği hesaplandı. Bu hesaplama yapılırken regle yüzeyin doğrultmanı null (lightlike) olacak şekilde regle yüzeyin dayanak eğrisinin spacelike, timelike veya null (lightlike) olma durumu dikkate alınarak teoremler ve sonuçlar elde edildi. Ayrıca bu yüzeyler ile ilgili örnekler verildi.

Bilim Kodu : 20402
Anahtar Kelimeler : Walker manifoldlar, strict Walker, regle yüzeyler, timelike, null dağılım
Sayfa Adedi : 65
Danışman : Prof. Dr. Aysel TURGUT VANLI

THE RULED SURFACES ON 3-DIMENSIONAL WALKER MANIFOLDS
(M. Sc. Thesis)

Alev ABEŞ

GAZİ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
April 2023

ABSTRACT

In this thesis, the shape operator, Gaussian curvature, mean curvature, Riemann curvature, section curvature of timelike ruled surfaces are calculated in 3-dimensional strict Walker manifolds. While making this calculation, theorems and results were obtained by taking into account the spacelike, timelike or null (lightlike) condition of the base curve of the ruled surface, with the direction of the ruled surface being null (lightlike). In addition, the theorems and results related to the subject were obtained by giving examples about these surfaces.

Science Code : 20402
Keywords : Walker manifold, strict Walker, ruled surfaces, timelike, null distribution
Number of pages : 65
Supervisor : Prof. Dr. Aysel TURGUT VANLI

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim sürecinde tez çalışmalarımın planlanıp yürütülmesi aşamasında her an engin bilgi ve deneyimlerine başvurduğum, desteğini benden esirgemeyen, kıymetli vaktini bana ayıran saygıdeğer hocam Prof. Dr. Aysel TURGUT VANLI'ya, kıymetli annem Fatma ABEŞ'e, kardeşim Arzu ATALAY ve eŐi Hüseyin ATALAY'a, eğitimim süresince varlıkları ile cesaret ve huzur bulduğum, gurur duyduğum, her açıdan desteklerini benden esirgemeyen kıymetli oğullarım Furkan Şamil SEVİM ve Yusuf Asım SEVİM'e, sonsuz sevgi, saygı ve teşekkürlerimi sunarım.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİLLERİN LİSTESİ	viii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	ix
1.GİRİŞ.....	1
2.TEMEL KAVRAMLAR.....	3
2.1.Simetrik Bilineer Formlar	3
2.2. Yarı-Riemann Manifoldlar	7
3. WALKER MANİFOLDLAR.....	13
3.1. Null Dağılım	13
3.2. Walker Manifoldlar	14
3.3. 3-Boyutlu Walker Manifold.....	17
3.4. 3-Boyutlu Strict Walker Manifold	22
3.5. 3-Boyutlu Walker Manifoldda Yüzeyleyler	25
3.6. 3-Boyutlu Walker Manifoldda RegleYüzeyleyler.....	29
4.3-BOYUTLU STRICT WALKER MANIFOLDLARDAN REGLE YÜZEYLEYLER.....	33
4.1.Örnekler	53
5.SONUÇ VE ÖNERİLER.....	61
KAYNAKLAR	63

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil		Sayfa
Şekil 3.1.	$\Pi_1: TM \rightarrow V_1$ ve $\Pi_2: TM \rightarrow V_2$ ile tanımlanan projeksiyon dönüşümü.....	14
Şekil 3.2.	Dayanak eğrisi $\alpha(t)$ ve doğrultmanı $X(t)$ olan regle yüzey	30
Şekil 4.1.	$\Phi(x,y)=(x,y,xy)$ parametrizasyonu ile gösterilen yüzey	59



SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılan simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklamalar
E, F, G	1.temel formun katsayıları
ε	$g_f^\varepsilon(N, N) = \mp 1$
$\mathbf{f}(x, y, z)$	x, y, z ye bağlı f fonksiyonu
\mathbf{g}_f^ε	Walker metriği
H	Ortalama eğrilik
K	Gauss eğriliği
$\mathbf{K}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$	Walker manifoldunun kesitsel eğriliği
$\mathbf{K}^{\bar{M}}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$	\bar{M} nin kesitsel eğriliği
L, M, N	2. temel formun katsayıları
\bar{M}	Regle yüzeyi
N	Yüzeyin birim normal vektör alanı
φ_x	φ nin x e göre türevi
φ_{xx}	φ nin x e göre ikinci mertebeden türevi
$\varphi(x, y)$	Yüzeyin parametrizasyonu
$\mathbf{R}^{\bar{M}}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{X}$	\bar{M} regle yüzeyinin eğriliği
S	Yüzeyin şekil operatörünün matrisi

1. GİRİŞ

Lorentz geometrisinin genel görelilik başta olmak üzere birçok araştırma alanında faydalı olduğu bilinmektedir. Verilen bir ambient uzayın alt manifoldunda çalışmak bu uzayın geometrisini anlamak açısından çok önemli bir rol oynamaktadır. Walker, yarı-Riemann manifoldlarını çalışmış ve bir kanonik form elde etmiştir. Null dağılımları içeren bu yarı-Riemann manifoldlara Walker manifoldu adını vermiştir. Yani paralel dağılımların oluşturduğu Walker manifoldlar da Lorentz manifoldlardan elde edilen manifoldlardır. Daha spesifik olarak paralel null dağılımların oluşturduğu Walker manifoldlar strict Walker manifoldlar olarak bilinir ve çalışmamızdaki incelemeler strict Walker manifoldlarda yapılacaktır.

Regle yüzey; bir doğrunun bir eğri boyunca hareket ettirilmesi ile elde edilen bir yüzeydir. Regle yüzeylerin Minkowski uzayındaki yapısal özellikleri daha önceden kapsamlı olarak incelenmiş ve yüzeyin karakterizasyonunun (spacelike, timelike ya da lightlike) regle yüzeylerde ana doğru ve dayanak eğrisinin karakterizasyonu ile ilişkisi ele alınmıştır.

Bu çalışmada 3-boyutlu bir strict Walker manifoldda timelike regle yüzeyler incelenmektedir. Minkowski uzayındaki regle yüzeyler Walker manifoldlara taşınarak Walker manifoldlara bağlı yapısal özellikleri araştırılmaktadır. 3-boyutlu bir Walker manifoldda timelike regle yüzeylerin şekil operatörü, Gauss eğriliği, ortalama eğrilik, Riemann eğriliği ve kesitsel eğrilikleri araştırılmakta ve timelike regle yüzeylere örnekler verilerek örneklerde bu eğriliklerin hesabı yapılmaktadır.

Sonuç olarak bu çalışma 3-boyutlu bir strict Walker manifoldda timelike regle yüzeyler için, yüzeyin şekil operatörü, 1.temel form ve 2. temel formların katsayıları, Gauss eğriliği, ortalama eğriliği, Riemann eğriliği ve kesitsel eğriliği hesaplaması yapılarak ve bulunan eşitliklerin örneklerde kullanılması ile tamamlanacaktır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Simetrik Bilineer Formlar

2.1.1. Tanım

V bir vektör uzayı ve

$$b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(u, v) \rightarrow b(u, v)$$

olmak üzere $\forall u, v, w \in V$ ve $\forall k \in K$ için

$$(i) \ b(u + v, w) = b(u, w) + b(v, w)$$

$$(ii) \ b(u, v + w) = b(u, v) + b(u, w)$$

$$(iii) \ b(ku, v) = kb(u, v)$$

$$(iv) \ b(u, kv) = kb(u, v)$$

koşullarını sağlıyorsa b ye bilinear form denir. Eğer $u, v \in V$ için $b(u, v) = b(v, u)$ ise b ye simetrik bilinear form denir [1].

2.1.2. Tanım

V vektör uzayı üzerinde bir b bilinear formu

$$(i) \ \forall v \in V \text{ için } v \neq 0 \text{ için } b(v, v) > 0 \text{ ve ise } b \text{ ye pozitif tanımlı bilinear form}$$

$$(ii) \ \forall v \in V \text{ için } v \neq 0 \text{ için } b(v, v) < 0 \text{ ve ise } b \text{ ye negatif tanımlı bilinear form}$$

$$(iii) \ \forall v \in V \text{ için } b(v, v) \geq 0 \text{ ve ise } b \text{ ye yarı-pozitif tanımlı bilinear form}$$

$$(iv) \ \forall v \in V \text{ için } b(v, v) \leq 0 \text{ ve ise } b \text{ ye yarı-negatif tanımlı bilinear form}$$

$$(v) \ \forall w \in V \text{ ve için } b(v, w) = 0 \text{ iken } v = 0 \text{ ise } b \text{ ye nondegenere bilinear form}$$

denir.

$W \subseteq V$ alt vektör uzayı olmak üzere $b|_W : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$ kısıtlanmış bilinear formu için

yukarıdaki özellikler geçerlidir. Fakat b , V üzerinde nondegenere iken kısıtlanmış uzayda nondegenere olmak zorunda değildir [1].

2.1.3. Tanım

V vektör uzayında simetrik, bilinear form b olsun. $\forall w \in V$ ve için $b(v, w) = 0$ iken $v \neq 0$ ise b ye degenere bilinear form denir [1].

2.1.4. Tanım

V vektör uzayı üzerinde tanımlı simetrik bilinear form b olmak üzere $b|_W$ negatif tanımlı olacak şekilde W alt uzayının boyutlarının en büyüğüne b nin indeksi denir ve v ile gösterilir.

n -boyutlu V vektör uzayının bir ortonormal bazı $\{e_1, \dots, e_n\}$ olsun. $b(e_i, e_j) = b_{ij}$ olmak üzere b simetrik bilinear forma karşılık gelen matris $[b_{ij}]$ dir [1].

2.1.1. Teorem

n -boyutlu bir V vektör uzayında simetrik bilinear form b olsun. b simetrik, bilinear formu nondegenere $\Leftrightarrow [b_{ij}]$ matrisinin tersi vardır [1].

2.1.5. Tanım

V vektör uzayı üzerinde simetrik, nondegenere bir g bilinear formuna V üzerinde bir skaler çarpım ve (V, g) ikilisine de bir skaler çarpım uzayı denir [1].

2.1.6. Tanım

V vektör uzayında

$$q : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$v \rightarrow q(v) = g(v, v), \quad v \neq 0$$

olmak üzere $q(v) = g(v, v) = 0$ ise v vektörüne null (lightlike) vektör denir [1].

2.1.7. Tanım

V bir vektör uzayı olsun. $v, w \in V$ için $g(v, w) = 0$ ise v ile w vektörlerine birbirine diktir denir ve $v \perp w$ ile gösterilir [1].

2.1.8. Tanım

V bir vektör uzayı, A ve B vektör uzayları V nin iki alt vektör uzayı olsun.

(i) $\forall a \in A$ için $g(v, a) = 0$ olacak şekilde $\exists v \in V$ ise A alt vektör uzayı V vektör uzayına diktir.

(ii) $\forall a \in A, \forall b \in B$ için $g(a, b) = 0$ ise A ile B alt vektör uzayları diktir denir ve $A \perp B$ ile gösterilir [1].

2.1.9. Tanım

$W \subset V$ bir alt vektör uzayı olsun.

$W^\perp = \{v \in V \mid g(v, w) = 0, \forall w \in W\}$ şeklinde tanımlı kümeye W nin diki denir [1].

2.1.2. Teorem

V skaler çarpım uzayı ve V nin bir alt vektör uzayı W olsun. Bu durumda

(i) $\dim W + \dim W^\perp = \dim V$

(ii) $(W^\perp)^\perp = W$

dir [1].

2.1.10. Tanım

V vektör uzayının bir alt vektör uzayı W olsun. $g|_W$ simetrik bilinear formu nondegenere ise W ya nondegenere alt uzay denir. Eğer $g|_W$ simetrik bilinear formu degenere ise W ya degenere alt uzay denir [1].

Eğer W ya ait vektör uzayı nondegenere (degenere) ise W^\perp uzayı da nondegenere (degenere) dir.

2.1.3. Teorem

V vektör uzayının bir alt vektör uzayı W olmak üzere W nondegenere dir $\Leftrightarrow V=W \oplus W^\perp$ dir [1].

2.1.11. Tanım

(V, g) skaler çarpım uzayı olsun. $v \in V$ olmak üzere $\|v\| = \sqrt{|g(v, v)|}$ ifadesine V nin normu ve $\|v\| = 1$ ise v ye birim vektör denir [1].

2.1.4. Teorem

$v \neq \{0\}$ olmak üzere (V, g) skaler çarpım uzayı ise V nin bir ortonormal bazı vardır [1].

2.1.5. Teorem

V nin ortonormal bazı $\{e_1, \dots, e_n\}$ olsun. $\forall v \in V$ için

$$v = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i g(v, e_i) e_i$$

şeklinde tek türlü yazılabilir [1].

2.1.12. Tanım

(V, g) bir skaler çarpım uzayı olmak üzere g nin indeksine V nin indeksi denir [1].

2.1.6. Teorem

(V, g) bir skaler çarpım uzayı olsun. V nin bir $\{e_1, \dots, e_n\}$ ortonormal bazı için $\{e_1, \dots, e_n\}$ deki negatif sayıların sayısı V nin indeksine eşittir [1].

2.2. Yarı-Riemann Manifolddar

2.2.13. Tanım

M bir diferensiyellenebilir manifold olsun.

$$g_p : T_p(M) \times T_p(M) \rightarrow f(M)$$

bilineer dönüşümü simetrik, nondegenere ve indeksi sabit ise g ye M manifoldu üzerinde bir metrik tensör ve (M, g) ikilisine de bir yarı-Riemann manifoldu denir [1].

2.2.14. Tanım

Bir (M, g) yarı-Riemann manifoldunun indeksi, üzerinde tanımlı g metrik tensörünün indeksi olarak tanımlanır ve v ile gösterilir. boy $M \geq 2$ ise (M, g) manifolduna Lorentz manifoldu denir [1].

(M, g) bir n -boyutlu yarı-Riemann manifoldu olsun.

$$g : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, R)$$

$$(V, W) \rightarrow g(V, W), \quad V = \sum_{i=1}^n v^i \partial_i, \quad W = \sum_{j=1}^n w^j \partial_j$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} g(V, W) &= g \left(\sum_{i=1}^n v^i \partial_i, \sum_{j=1}^n w^j \partial_j \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n v^i w^j g(\partial_i, \partial_j), \quad g(\partial_i, \partial_j) = g_{ij} \\ &= \sum_{i,j=1}^n v^i w^j g_{ij} \\ &= \sum_{i,j=1}^n g_{ij} v^i w^j \end{aligned}$$

dir. g metrik tensörüne karşılık gelen matris $[g_{ij}]$ dir. g nondegenere olduğundan $[g_{ij}(p)]$ matrisinin tersi vardır ve matrisin tersi $[g_{ij}(p)]^{-1} = [g^{ij}(p)]$ dir. g metrik tensör olduğundan g_{ij} fonksiyonları M üzerinde diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. Ayrıca g simetrik olduğundan $g_{ij} = g_{ji}$ ve $g^{ij} = g^{ji}$ dir.

$\forall V, W \in \chi(M)$ için

$$\left(\sum_{i,j=1}^n g_{ij} dx^i \otimes dx^j \right) (V, W) = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} dx^i(V) dx^j(W) = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} v^i w^j = g(V, W)$$

dir. O halde

$$g = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} dx^i \otimes dx^j$$

olur. Özel olarak $M = \mathbb{R}^n$ alınırsa \mathbb{R}^n manifoldu üzerinde $\forall V, W \in \chi(M)$ için

$$g(V, W) = - \sum_{i=1}^v v_i w_i + \sum_{j=v+1}^n v_j w_j$$

olup (\mathbb{R}^n, g) bir yarı-Riemann manifoldudur ve \mathbb{R}_v^n ile gösterilir. $v = 1$ ise \mathbb{R}_1^n 'e n -boyutlu Minkowski uzayı denir.

$g(V, W)$ ifadesi bazen $\langle V, W \rangle$ ile gösterilecektir.

2.2.15. Tanım

(M, g) bir yarı-Riemann manifoldu olsun. $V \in \chi(M)$ olmak üzere

- (i) $g(V, V) > 0$ veya $V = 0$ ise V ye spacelike vektör alanı
- (ii) $g(V, V) = 0$ veya $V \neq 0$ ise V ye null (lightlike) vektör alanı
- (iii) $g(V, V) < 0$ veya $V \neq 0$ ise V ye timelike vektör alanı

denir [1].

2.2.16. Tanım

M yarı-Riemann manifoldu üzerinde bir eğri $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ olsun. T, α eğrisinin teğet vektör alanı olmak üzere:

- (i) $g(T, T) > 0$ ise α eğrisine spacelike eğri,
- (ii) $g(T, T) < 0$ ise α eğrisine timelike eğri,
- (iii) $g(T, T) = 0$ ve $T \neq 0$ ise α eğrisine null eğri denir [1].

Benzer durum eğrinin özel hali olan doğru için de geçerlidir. Doğrunun doğrultman vektörü spacelike ise doğru spacelike, timelike ise doğru timelike null ise doğru null olur.

2.2.17. Tanım

M yarı-Riemann manifoldunun bir alt manifoldu \bar{M} olsun. j inclusion dönüşümü $j : \bar{M} \rightarrow M$ olmak üzere her $p \in \bar{M}$ için

$$(j^*(g))(p) = g(j(p))$$

şeklinde tanımlı $j^*(g)$ dönüşümü \bar{M} üzerinde metrik tensör ise \bar{M} ye M nin bir yarı-Riemann alt manifoldu denir [2].

2.2.18. Tanım

Bir (M, g) yarı-Riemann manifoldu üzerindeki koneksiyon D olsun. $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$

$$(i) [X, Y] = D_X Y - D_Y X$$

$$(ii) Xg(Y, Z) = g(D_X Y, Z) + g(X, D_Y Z)$$

özellikleri sağlanıyorsa D koneksiyonuna M üzerinde Levi-Civita koneksiyonu denir [1].

2.2.19. Tanım

(M, g) yarı-Riemann manifoldunun bir alt manifoldu \bar{M} ve D de M üzerinde bir Levi-Civita koneksiyonu olsun. Bu durumda

$$D : \chi(\bar{M}) \times \chi(\bar{M}) \rightarrow \chi(\bar{M})$$

dönüşümüne M den \bar{M} yarı-Riemann alt manifolduna indirgenmiş koneksiyon denir [1].

Buradaki $\bar{\chi}(\bar{M})$ ile her $p \in M$ noktasına $T_p M$ de bir tanjant vektör karşılık getiren vektör alanlarının modülü ifade edilmektedir.

2.2.7. Teorem

M nin bir yarı-Riemann alt manifoldu \bar{M} ve M üzerinde Levi-Civita konneksiyonu D olmak üzere $\forall V, W \in \chi(\bar{M})$ için

$$\bar{D}_V W = \text{tan} D_V W$$

şeklinde tanımlı \bar{D} dönüşümüne \bar{M} üzerinde bir Levi-Civita konneksiyonu denir [1].

2.2.20. Tanım

$\{x_1, \dots, x_n\}$ bir M yarı-Riemann manifoldunun U açığı üstünde yerel koordinat sistemi olsun.

$$D_{\partial_i}(\partial_j) = \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k, \quad (1 \leq i, j \leq n)$$

eşitliği ile belirli Γ_{ij}^k fonksiyonlarına, U üstünde $\{x_1, \dots, x_n\}$ koordinat sisteminden elde edilen Christoffel fonksiyonları denir.

$[\partial_i, \partial_j] = 0$ olduğundan $D_{\partial_i}(\partial_j) = D_{\partial_j}(\partial_i)$ olur. Buna göre, $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ elde edilir [1].

2.2.21. Tanım

M nin bir yarı-Riemann alt manifoldu \bar{M} olsun.

$$\Pi : \chi(\bar{M}) \times \chi(\bar{M}) \rightarrow \chi(\bar{M})^\perp$$

$$(V, W) \rightarrow \Pi(V, W) = \text{nor} D_V W$$

şeklinde tanımlı Π bilinear ve simetrik fonksiyonuna \bar{M} nün ikinci temel form tensörü denir [1].

2.2.22. Tanım

Boyutu n olan bir M yarı-Riemann manifoldunun bir yarı-Riemann alt manifoldu \bar{M} olsun. \bar{M} nin boyutu $n - 1$ ise \bar{M} ye, M nin bir yarı-Riemann hiperyüzeyi denir [1].

2.2.23. Tanım

\bar{M} yüzeyi üzerinde N birim normal vektör alanı ve D Riemann koneksiyonu olmak üzere $\forall V \in \chi(\bar{M})$ için

$$S(V) = -D_V N \quad (2.1)$$

eşitliği ile tanımlı fonksiyonuna \bar{M} yüzeyinin N vektör alanına bağlı şekil operatörü (Weingarten dönüşümü) denir [1].

2.2.24. Tanım

M nin bir yarı-Riemann hiperyüzeyi \bar{M} ve N de \bar{M} nin birim normal vektör alanı olsun. $\forall U, W \in \chi(\bar{M})$ için

$$g(S(U), W) = g(\Pi(U, W), N)$$

eşitliğinde S (1,1) tipinden tensör alanı olup, S ye M nin normal vektör alanı N den elde edilen şekil operatörü denir [1].

Kısaca S şekil operatörü $\forall p \in \bar{M}$ için

$$S : T_p(\bar{M}) \rightarrow T_p(\bar{M})$$

bir lineer operatördür.

2.2.8. Teorem

M nin bir yarı-Riemann hiperyüzeyi \bar{M} olmak üzere S , \bar{M} nin birim normalini N den elde edilen şekil operatörü olsun. Bu durumda $V \in \chi(\bar{M})$ için

$$S(V) = -D_V N \quad (2.2)$$

eşitliği vardır ve S operatörü self-adjointtir.

M nin yarı-Riemann hiperyüzeyi \bar{M} olmak üzere, \bar{M} nin N normalinden elde edilen şekil operatörü S olsun. $\forall U, V \in \chi(\bar{M})$ için

$$\Pi(U, V) = \varepsilon g(S(U), V)N \quad (2.3)$$

eşitliği vardır. Burada $\varepsilon = g(N, N)$ dir. Yarı-Riemann hiperyüzeyler için Gauss denklemi $\forall U, V \in \chi(\bar{M})$ için

$$D_U V = \bar{D}_U V + \varepsilon g(S(U), V)N \quad (2.4)$$

eşitliği ile verilir [1].

3. WALKER MANİFOLDLAR

Bir ambient uzayın alt uzayını incelemek uzayın geometrisini anlamak açısından önemlidir. 3-boyutlu geometri Riemann ve Lorentz geometrisindeki bir çok durum için önemli yere sahiptir. Walker manifoldlar pozitif tanımlı olmayan metriklerde geometrik özellikleri oluşturabilmek için oldukça faydalıdır. Eğrilik özellikleri ve lokal conformally flat 3-boyutlu Walker manifoldların özellikleri M. Chaichi, E. Garcia-Rio and M.E. Vazquez-Abal tarafından çalışılmıştır. G. Calvaruso and J. Van der Veken ise bir Lorentz 3-boyutlu manifoldda paralel yüzeylerin sınıflandırmasını incelemiştir. A. S. Diallo, A. Ndiaye and A. Niang 3-boyutlu Walker manifoldda minimal graphslarla ilgili bazı sonuçlar elde etmiştir. Bu çalışmada, bir paralel null vektör alanı tarafından gerilen strict Walker manifold olarak adlandırılan 3-boyutlu Lorentz manifold ele alınacaktır.

3.1. Null Dağılım

3.1.1. Tanım

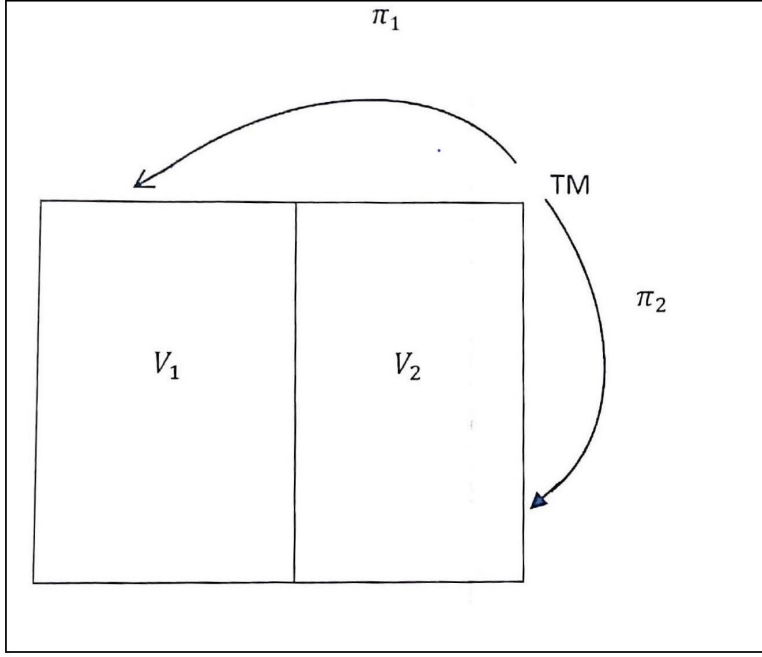
Bir (M, g) yarı-Riemann manifoldunun tanjant demeti $TM = V_1 \oplus V_2$ olsun. Projeksiyon dönüşümleri

$$\pi_1 : TM \rightarrow V_1 \quad \text{ve} \quad \pi_2 : TM \rightarrow V_2$$

tanımlansın.

Eğer X_1, V_1 üzerinde bir düzgün vektör alanı iken ∇X_1 de V_1 üzerinde ise yani $\nabla \pi_1 = 0$ ise bu durumda V_1 e paralel dağılım denir. V_1 paralel dağılım olsun. V_1 e kısıtlanan metriğin rankı sabit ise V_1 e bir null paralel dağılımdır denir [3].

Eğer V_1 bir null paralel dağılım ise V_1 dağılımına metriğin kısıtlanması sıfırdır. V_1 i boyu 1 olan bir dağılım olduğunu kabul edelim, o zaman bir doğru belirtir. Eğer V_1 null ise, M nin yönlendirdiği bir paralel taşıma vardır V_1 in null olması durumunda paralel vektör alanı tarafından gerilmesine gerek yoktur [3].



Şekil 3.1. $\pi_1 : TM \rightarrow V_1$ ve $\pi_2 : TM \rightarrow V_2$ ile tanımlanan projeksiyon dönüşümü

3.2. Walker Manifolds

Walker, D null düzleminin bir paralel alanlı yarı-Riemann M manifoldları üzerinde çalışarak bir kanonik form elde etmiştir. Yaptığı çalışmasında bir D null paralel yani degenere dağılımı üzerinde bulunduran bir yarı-Riemann manifold M ye Walker manifold adını vermiştir. Kanonik formlar degenere olmayan dağılımlar için biliniyordu. Bu durumda metrik tensörün matris kanonik formu

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

şeklinde ifade edilir. $boyM = m$ ve $boyD = r$ olmak üzere A matrisi bileşenleri (x_1, \dots, x_r) olan $r \times r$ tipinde bir simetrik matris, B ise $(m - r) \times (m - r)$ tipinde ve bileşenleri (x_{r+1}, \dots, x_m) olan simetrik matrislerdir [3].

3.2.1. Teorem

r -boyutlu null D dağılımının oluşturduğu m -boyutlu M yarı-Riemann manifoldu için metrik

tensörünün matris ifadesi

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & Id_r \\ 0 & A & H \\ Id_r & H^t & B \end{pmatrix}$$

biçimindedir. Burada Id_r $r \times r$ tipinde birim matris; A, B, H koordinatları aşağıdaki gibi olan matrislerdir:

1) A ve B sırasıyla $(m-2r) \times (m-2r)$ ve $r \times r$ tipindedir. H matrisi $(m-2r) \times r$ tipinde bir matris olup H^t matrisi H matrisinin transpozudur.

2) A ve H nin koordinatları (x_1, \dots, x_r) den bağımsızdır.

Ayrıca null paralel r -düzlem D dağılımı $\{\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_r}\}$ koordinat vektör alanları tarafından gerilirler [3].

İspat Teoremdeki koşulları sağlayan D null dağılımı $\{\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_r}\}$ tarafından gerilsin. D nin paralel olduğunu göstermek için $\forall i \in 1, \dots, r$ ve $a \in 1, \dots, m$ için $\nabla_{\partial_{x_a}} \partial_{x_i}$ değerlerini hesaplamak gerekir. $j \in \{1, \dots, r\}$, $l \in \{r+1, \dots, m-r\}$ ve $v \in \{m-r+1, \dots, m\}$ olmak üzere

$$\nabla_{\partial_{x_a}} \partial_{x_i} = \Gamma_{ai}^j \partial_{x_j} + \Gamma_{ai}^l \partial_{x_l} + \Gamma_{ai}^v \partial_{x_v}.$$

A ve H matrislerinin (x_1, \dots, x_r) den bağımsız olması Γ_{ai}^l ve Γ_{ai}^v nün sıfıra eşit olduğunu gösterir. Dolayısıyla D paralel düzlem alanıdır.

Aksine D nin r - boyutlu paralel düzlem alanı olduğunu kabul edelim. Bu durumda ortogonal vektör alanı D^\perp de paraleldir $D \subset D^\perp$ olduğundan $\text{boy} D^\perp = m - r$, olup

$$(x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_{m-r}, x_{m-r+1}, \dots, x_m) \quad (3.1)$$

şeklinde bir koordinat sistemi mevcuttur. D ve D^\perp sırasıyla $\{\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_r}\}$, $\{\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_{m-r}}\}$ tarafından gerilir. D degenere olduğundan ve D^\perp ise D nin ortogonal tümleyeni olduğundan $g(D, D) = 0$ ve $g(D, D^\perp) = 0$ dir, buradan $i, j \in (1, \dots, r)$, $l \in (r+1, \dots, m-r)$ için

$$g(\partial_{x_i}, \partial_{x_j}) = 0, \quad g(\partial_{x_i}, \partial_{x_l}) = g(\partial_{x_l}, \partial_{x_i}) = 0$$

dir. Koordinat fonksiyonları x_{m-r+i} ve gradiyentleri $E_i = \nabla x_{m-r+i}$, $i \in \{1, \dots, r\}$ olacak şekilde

$$(E_i, \partial x_a) = dx_{m-r+i}(\partial x_a) = \gamma_a^{m-r+i}$$

eşitliği elde edilir. Bu durumda $g(E_i, D^\perp) = 0$ dır dolayısıyla $\forall i$ için $E_i \in D$ dir. Bütün gradientler lineer bağımsız olduğundan paralel dağılım E_i ler tarafından yerel olarak gerilirler. Her i, j için $[E_i, E_j] = 0$ olduğundan (3.1) deki koordinatlar $E_i = \partial_{x_i}$, $\forall i \in \{1, \dots, r\}$ şeklinde özelleştirilir. Bu durumda elde edilen koordinatlar ile metriğin matris formu ifade edilirse

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & Id_r \\ 0 & A & H \\ Id_r & H^t & B \end{pmatrix}$$

dir, buradaki Id_r matrisi $r \times r$ tipinde birim matristir. İspatın devamında A ve H matrislerinin (x_1, \dots, x_r) koordinatlarından bağımsız olduğu gösterilecektir. $i \in \{1, \dots, r\}$ ve $\alpha, \beta \in \{r+1, \dots, m-r\}$ alalım. D paralel dağılım olduğundan $(g(\nabla D, D^\perp) = 0)$, A matrisi (x_1, \dots, x_r) koordinatlarından bağımsızdır.

$$\begin{aligned} \partial_{x_i} g_{\alpha\beta} &= g(\nabla_{\partial_{x_i}} \partial_{x_\alpha}, \partial_{x_\beta}) + g(\partial_{x_\alpha}, \nabla_{\partial_{x_i}} \partial_{x_\beta}) \\ &= g(\nabla_{\partial_{x_\alpha}} \partial_{x_i}, \partial_{x_\beta}) + g(\partial_{x_\alpha}, \nabla_{\partial_{x_\beta}} \partial_{x_i}) = 0, \end{aligned}$$

Benzer şekilde $i \in \{x_1, \dots, x_r\}$, $\alpha \in \{x_{r+1}, \dots, x_{m-r}\}$, $t \in \{m-r+1, \dots, m\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \partial_{x_i} g_{\alpha t} &= g(\nabla_{\partial_{x_i}} \partial_{x_\alpha}, \partial_{x_t}) + g(\partial_{x_\alpha}, \nabla_{\partial_{x_i}} \partial_{x_t}) \\ &= g(\nabla_{\partial_{x_\alpha}} \partial_{x_i}, \partial_{x_t}) + g(\partial_{x_\alpha}, \nabla_{\partial_{x_t}} \partial_{x_i}) \\ &= -g(\partial_{x_t}, \nabla_{\partial_{x_\alpha}} \partial_{x_i}) \\ &= -g(\partial_{x_t}, \nabla_{\partial_{x_t}} \partial_{x_\alpha}) = 0 \end{aligned}$$

elde edilir, böylece H matrisinin (x_1, \dots, x_r) koordinatlarından bağımsızdır [3].

3.3. 3-Boyutlu Walker Manifolddar

3.3.2. Tanım

3-boyutlu bir yarı-Riemann manifoldu M ve D de 1-boyutlu bir null paralel dağılım olsun. M manifoldu üzerinde tanımlı Walker metriği g_f^ε ile gösterilsin. Koordinatları (x, y, z) olan 3-boyutlu bir (M, g_f^ε) Walker manifoldunun metrik ifadesi

$$g_f^\varepsilon = dx.dz + dz.dx + \varepsilon dy^2 + f(x, y, z)dz^2. \quad (3.2)$$

eşitsiği ile verilir, bu metriğin matris formu ve matrisinin tersi ise

$$g_f^\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 1 & 0 & f \end{pmatrix}, \quad (g_f^\varepsilon)^{-1} = \begin{pmatrix} -f & 0 & 1 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklindedir. $f(x, y, z)$ fonksiyonu için $\varepsilon = \mp 1$ dir ve bu durumda $D = Sp\{\partial_x\}$ dağılımı bir paralel degenere doğru belirtir. $\varepsilon = 1$ ya da $\varepsilon = -1$ olduğunda Walker manifoldunun işaretinin sırasıyla $(2, 1)$ ve $(1, 2)$ olduğuna ve her iki durumda da Lorentzian olduğuna dikkat ediniz [3].

Çalışmamızda g_f^ε un indeksi 1 olarak alınacaktır yani Walker manifoldun işareti $(2, 1)$ dir. Dolayısıyla $\varepsilon = 1$ olacaktır. Bu kısımdan itibaren $f > 0$ kabul edilecektir. $f < 0$ koşulu benzer şekilde çalışılabilir. $f > 0$ için e_1 timelike, e_2 ve e_3 spacelike olacak şekilde ortonormal bazlar vardır [4].

Bu bazlar (e_1, e_2, e_3) olmak üzere,

$$e_1 = -\sqrt{|f|}sgnf\partial_x + \frac{1}{\sqrt{|f|}}\partial_z, \quad e_2 = \partial_y, \quad e_3 = \frac{1}{\sqrt{|f|}}\partial_z$$

$$g_f(e_1, e_1) = -sgnf, \quad g_f(e_2, e_2) = \varepsilon, \quad g_f(e_3, e_3) = sgnf$$

şeklindedir [5].

3.3.3. Tanım

U ve V, M üzerinde iki vektör olsun. $U = (u_1, u_2, u_3)$ ve $V = (v_1, v_2, v_3)$ olmak üzere U ve V nin vektörel çarpımı

$$U \times V = \left(\begin{array}{c|c|c} u_1 & v_1 & -f \\ \hline u_2 & v_2 & \\ \hline u_3 & v_3 & \end{array} \right) e_1 - \varepsilon \begin{array}{c|c|c} u_1 & v_1 & \\ \hline u_3 & v_3 & \\ \hline \end{array} e_2 + \begin{array}{c|c|c} u_2 & v_2 & \\ \hline u_3 & v_3 & \\ \hline \end{array} e_3$$

ile tanımlanır [3].

Metrik tensöre karşılık gelen matris

$$g_f^\varepsilon = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{32} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 1 & 0 & f \end{pmatrix}$$

olmak üzere bu matrisin tersi

$$(g_f^\varepsilon)^{-1} = \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ g^{31} & g^{31} & g^{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f & 0 & 1 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dir. Buradan

$$\partial_x[g_f^\varepsilon] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_x \end{pmatrix}, \quad \partial_y[g_f^\varepsilon] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_y \end{pmatrix}, \quad \partial_z[g_f^\varepsilon] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_z \end{pmatrix}$$

dir. Christoffel sembollerinin sıfırdan farklı bileşenleri aşağıdaki gibidir.

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^3 g^{kr} [g_{rj,i} + g_{ri,j} - g_{ij,r}]$$

$$\Gamma_{13}^1 = \Gamma_{31}^1 = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^3 g^{kr} [g_{rj,i} + g_{ri,j} - g_{ij,r}] = \frac{1}{2} f_x$$

$$\Gamma_{23}^1 = \Gamma_{32}^1 = \frac{1}{2} f_y, \quad \Gamma_{33}^1 = \frac{1}{2} (f_z + f_{xx}), \quad \Gamma_{33}^2 = \frac{1}{2} f_y, \quad \Gamma_{33}^3 = -\frac{1}{2} f_x.$$

Buradan

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma_{ij}^1 \partial_x + \Gamma_{ij}^2 \partial_y + \Gamma_{ij}^3 \partial_z \quad (3.3)$$

kullanılarak hesaplandığında

$$\nabla_{\partial_x} \partial_z = \frac{1}{2} f_x \partial_x, \quad \nabla_{\partial_y} \partial_z = \frac{1}{2} f_y \partial_x, \quad \nabla_{\partial_z} \partial_z = \frac{1}{2} (f f_x + f_z) \partial_x - \frac{\varepsilon}{2} f_y \partial_y - \frac{1}{2} f_x \partial_z, \quad (3.4)$$

olarak elde edilir [3].

(M, g_f^ε) in eğrilik tensörünün sıfıra eşit olmayan bileşenleri ise

$$\begin{aligned} R(\partial_x, \partial_z) \partial_x &= \frac{1}{2} f_{xx} \partial_x, & R(\partial_x, \partial_z) \partial_y &= \frac{1}{2} f_{xy} \partial_x, & R(\partial_y, \partial_z) \partial_y &= \frac{1}{2} f_{yy} \partial_x, \\ R(\partial_x, \partial_z) \partial_z &= \frac{1}{2} f f_{xx} \partial_x - \frac{\varepsilon}{2} f_{xy} \partial_y - \frac{1}{2} f_{xx} \partial_z, & R(\partial_y, \partial_z) \partial_x &= \frac{1}{2} f_{xy} \partial_x, \\ R(\partial_y, \partial_z) \partial_z &= \frac{1}{2} f f_{xy} \partial_x - \frac{\varepsilon}{2} f_{yy} \partial_y - \frac{1}{2} f_{xy} \partial_z \end{aligned} \quad (3.5)$$

dir [3].

3.3.2. Teorem

3-boyutlu (M, g_f^ε) Walker manifoldu üzerinde iki vektör alanları U ve V olsun. Eğer $g_f^\varepsilon(U, V) = 0$ olan iki spacelike olmayan vektör alanları ise U ve V lightlike vektörlerdir.

İspat

Timelike vektör alanları uzayı 1 boyutlu olduğundan birbirine dik iki timelike vektör yoktur. Dolayısıyla burada birbirine dik vektör alamayız. Bu teorem için vektörler timelike olamayacağından ve teoremin ifadesinden vektörler spacelike da olamayacağı için U ve V lightlike vektörlerdir.

3.3.3. Teorem

3-boyutlu (M, g_f^ε) Walker manifoldunda iki timelike vektör alanları U ve V ise $g_f^\varepsilon(U, V) \neq 0$ dır.

İspat

U ve V iki timelike vektör ise $\langle V \rangle^\perp$ spacelike bir alt uzaydır. Buradan $U = X + \lambda V$ yazılabilir. ($\lambda > 0$)

$g_f^\varepsilon(U, U) < 0$ olduğundan $g_f^\varepsilon(X, X) < -\lambda^2 g_f^\varepsilon(V, V)$

$$\begin{aligned} g_f^\varepsilon(U, V) &= g_f^\varepsilon(X + \lambda V, V) \\ &= g_f^\varepsilon(X, V) + g_f^\varepsilon(\lambda V, V) \\ &= g_f^\varepsilon(X, V) + \lambda g_f^\varepsilon(V, V) \\ &= \lambda g_f^\varepsilon(V, V) \end{aligned}$$

V timelike olduğundan $g_f^\varepsilon(V, V) \neq 0$ dır. Bu durumda $g_f^\varepsilon(U, V) = \lambda g_f^\varepsilon(V, V) \neq 0$. Sonuç olarak $g_f^\varepsilon(U, V) \neq 0$ elde edilerek ispat tamamlanır.

3.3.4. Teorem

3-boyutlu bir (M, g_f^ε) Walker manifoldunda iki lightlike vektör alanları U ve V olsunlar. U ve V vektörlerinin lineer bağımlı olması için gerek ve yeter koşul $g_f^\varepsilon(U, V) = 0$ olmasıdır.

İspat

(\Rightarrow) U ve V birbiriyle orantılı iki lightlike vektör olsunlar. Bu durumda $U = (u_1, u_2, u_3)$ ve $V = c.U = (cu_1, cu_2, cu_3)$, $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} g_f^\varepsilon(U, U) &= 2u_1u_3 + \varepsilon u_2^2 + f u_3^2 = 0 \\ g_f^\varepsilon(V, V) &= 2cu_1cu_3 + \varepsilon cu_2cu_2 + fcu_3cu_3 \\ &= 2u_1u_3c^2 + \varepsilon u_2^2c^2 + f u_3^2c^2 \end{aligned}$$

$$= c^2(2u_1u_3 + \varepsilon u_2^2 + f u_3^2)$$

$$= 0$$

$$g_f^\varepsilon(U, V) = u_1cu_3 + u_3cu_1 + \varepsilon u_2cu_2 + fu_3cu_3$$

$$= cu_1u_3 + cu_3u_1 + \varepsilon u_2^2c + fcu_3^2$$

$$= 2cu_1u_3 + \varepsilon cu_2^2 + fcu_3^2$$

$$= c \cdot 0$$

$$= 0$$

$g_f^\varepsilon(U, V) = 0$ elde edilir. Dolayısıyla U ve V ortogonaldir.

(\Leftarrow) : Kabul edelim ki U ve V ortogonal iki lightlike vektör alanları olsun. $U = X + W$ ve $V = Y + W$ olarak yazalım. Bu durumda U ve V lightlike olduğundan

$$g_f^\varepsilon(U, U) = 2(x_1 + w_1)(x_3 + w_3) + \varepsilon(x_2 + w_2)^2 + f(x_3 + w_3)^2 = 0 \quad (3.6)$$

$$g_f^\varepsilon(V, V) = 2(y_1 + w_1)(y_3 + w_3) + \varepsilon(y_2 + w_2)^2 + f(y_3 + w_3)^2 = 0 \quad (3.7)$$

olur. (3.6) ve (3.7) eşitlikleri düzenlenirse

$$2x_1x_3 + 2x_1w_3 + 2w_1x_3 + 2w_1w_3 + \varepsilon(x_2 + w_2)^2 + f(x_3 + w_3)^2 + 2y_1y_3 + 2y_1w_3 + 2w_1y_3$$

$$+ 2w_1w_3 + \varepsilon(y_2 + w_2)^2 + f(y_3 + w_3)^2 = 0,$$

$$2x_1x_3 + \varepsilon x_2^2 + f x_3^2 + 2y_1y_3 + \varepsilon y_2^2 + f y_3^2 + 2x_1w_3 + 2w_1x_3 + 2\varepsilon x_2w_2 + 2f w_3x_3 + 2w_1w_3$$

$$+ \varepsilon w_2^2 + f w_3^2 + 2w_1w_3 + \varepsilon w_2^2 + f w_3^2 + 2y_1w_3 + 2w_1y_3 + 2\varepsilon f y_3w_3 = 0$$

bulunur. (3.6) ve (3.7) taraf tarafa toplanırsa

$$g_f^\varepsilon(X, X) + g_f^\varepsilon(Y, Y) + 2g_f^\varepsilon(X, W) + 2g_f^\varepsilon(W, W) + 2g_f^\varepsilon(Y, W) = 0$$

elde edilir. Bu da

$$\|X\|^2 + \|Y\|^2 + 2g_f^\varepsilon(X + Y, W) + 2g_f^\varepsilon(W, W) = 0$$

olur. $W = U - X$ alınırsa,

$$\|X\|^2 + \|Y\|^2 + 2g_f^\varepsilon(X+Y, U-X) + 2g_f^\varepsilon(U-X, U-X) = 0$$

$$\|X\|^2 + \|Y\|^2 + 2g_f^\varepsilon(X, U-X) + 2g_f^\varepsilon(Y, U-X) + 2g_f^\varepsilon(U, U-X) + 2g_f^\varepsilon(-X, U-X) = 0$$

$$\|X\|^2 + \|Y\|^2 + 2g_f^\varepsilon(X, U) + 2g_f^\varepsilon(X, -X) + 2g_f^\varepsilon(Y, U) + 2g_f^\varepsilon(Y, -X) + 2g_f^\varepsilon(U, U)$$

$$+ 2g_f^\varepsilon(U, -X) + 2g_f^\varepsilon(-X, U) + 2g_f^\varepsilon(-X, -X) = 0$$

$$\|X\|^2 + \|Y\|^2 + 2g_f^\varepsilon(Y-X, U) - 2g_f^\varepsilon(X, Y) = 0$$

elde edilir. $Y-X = V-U$ olduğundan

$$\|X\|^2 + \|Y\|^2 + 2g_f^\varepsilon(V-U, U) - 2g_f^\varepsilon(X, Y) = 0$$

$$\|X\|^2 + \|Y\|^2 + 2g_f^\varepsilon(U, V) - 2g_f^\varepsilon(U, U) - 2g_f^\varepsilon(X, Y) = 0$$

$$\|X\|^2 + \|Y\|^2 - 2g_f^\varepsilon(X, Y) = 0$$

$$\|X-Y\|^2 = 0$$

$$X = Y$$

dir. Dolayısıyla $U = V$ dir. Bu ise ispatı tamamlar.

3.4. 3-Boyutlu Strict Walker Manifold

3.4.4. Tanım

Walker manifoldunu oluşturan paralel dağılımlar bir null vektör tarafından geriliyorsa manifolda strict Walker manifold denir [3].

Strict Walker manifoldlar $f = f(y, z)$ olacak şekilde iki değişkene bağlıdır. Bir önceki bölümdeki ifadelerden 3-boyutlu bir Walker manifoldunun metrik tensörünün ifadesi,

$$g_f^\varepsilon = \varepsilon dy^2 + 2dx dz + f dz^2 \quad (3.8)$$

olup burada $\varepsilon = \pm 1$ dir [3].

Ayrıca Christoffel sembollerinin sıfırdan farklı olan değerleri

$$\Gamma_{23}^1 = \Gamma_{32}^1 = \frac{1}{2}f_y, \quad \Gamma_{33}^1 = \frac{1}{2}f_z, \quad \Gamma_{33}^2 = -\frac{\varepsilon}{2}f_y, \quad (3.9)$$

ve Levi-Civita koneksiyonun baz vektörlerinde aldığı değerler

$$\nabla_{\partial_2} \partial_3 = \frac{1}{2} f_2 \partial_1, \quad \nabla_{\partial_3} \partial_3 = \frac{1}{2} f_3 \partial_3 - \frac{\epsilon}{2} f_2 \partial_2 \quad (3.10)$$

dir. Eğriliğin baz vektörlerinde aldığı değerlerden sıfır olmayanlar

$$R(\partial y, \partial z) \partial y = -\frac{1}{2} f f_{yy} \partial x, \quad R(\partial y, \partial z) \partial z = -\frac{\epsilon}{2} f_{yy} \partial y \quad (3.11)$$

dir.

3-boyutlu bir strict Walker manifold üzerinde iki vektör alanı

$$X = \sum_{i=1}^3 X_i \partial_i \quad \text{ve} \quad Y = \sum_{j=1}^3 Y_j \partial_j$$

olsun. Bu durumda Y nin X e göre kovaryant türevi hesaplanacaktır.

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \sum_{m=1}^3 \left(\sum_{k=1}^3 X_k \partial_k [Y_m] + \sum_{k,l=1}^3 X_k Y_l \Gamma_{kl}^m \right) \partial_m \\ &= \left(\sum_{k=1}^3 X_k \partial_k [Y_1] + \sum_{k,l=1}^3 X_k Y_l \Gamma_{kl}^1 \right) \partial_1 + \left(\sum_{k=1}^3 X_k \partial_k [Y_2] + \sum_{k,l=1}^3 X_k Y_l \Gamma_{kl}^2 \right) \partial_2 \\ &\quad + \left(\sum_{k=1}^3 X_k \partial_k [Y_3] + \sum_{k,l=1}^3 X_k Y_l \Gamma_{kl}^3 \right) \partial_3 \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} &= \{ X_1 \partial_1 [Y_1] + X_1 Y_1 \Gamma_{11}^1 + X_1 Y_2 \Gamma_{12}^1 + X_1 Y_3 \Gamma_{13}^1 + X_2 \partial_2 [Y_1] + X_2 Y_1 \Gamma_{21}^1 + X_2 Y_2 \Gamma_{22}^1 \\ &\quad + X_2 Y_3 \Gamma_{23}^1 + X_3 \partial_3 [Y_1] + X_3 Y_1 \Gamma_{31}^1 + X_3 Y_2 \Gamma_{32}^1 + X_3 Y_3 \Gamma_{33}^1 \} \partial_1 + \{ X_1 \partial_1 [Y_2] + X_1 Y_1 \Gamma_{11}^2 \\ &\quad + X_1 Y_2 \Gamma_{12}^2 + X_1 Y_3 \Gamma_{13}^2 + X_2 \partial_2 [Y_2] + X_2 Y_1 \Gamma_{21}^2 + X_2 Y_2 \Gamma_{22}^2 + X_2 Y_3 \Gamma_{23}^2 + X_3 \partial_3 [Y_2] \\ &\quad + X_3 Y_1 \Gamma_{31}^2 + X_3 Y_2 \Gamma_{32}^2 + X_3 Y_3 \Gamma_{33}^2 \} \partial_2 + \{ X_1 \partial_1 [Y_3] + X_1 Y_1 \Gamma_{11}^3 + X_1 Y_2 \Gamma_{12}^3 + X_1 Y_3 \Gamma_{13}^3 \\ &\quad + X_2 \partial_2 [Y_3] + X_2 Y_1 \Gamma_{21}^3 + X_2 Y_2 \Gamma_{22}^3 + X_2 Y_3 \Gamma_{23}^3 + X_3 \partial_3 [Y_3] + X_3 Y_1 \Gamma_{31}^3 + X_3 Y_2 \Gamma_{32}^3 \\ &\quad + X_3 Y_3 \Gamma_{33}^3 \} \partial_3 \end{aligned} \quad (3.13)$$

dir. 3-boyutlu strict Walker manifoldunda Christoffel sembollerinin değerleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\nabla_X Y &= \left\{ X_1 \partial_1 [Y_1] + X_2 \partial_2 [Y_1] + X_3 \partial_3 [Y_1] + (X_2 Y_3 + X_3 Y_2) \frac{1}{2} f_2 + X_3 Y_3 \frac{1}{2} f_3 \right\} \partial_1 \\ &+ \left\{ X_1 \partial_1 [Y_2] + X_2 \partial_2 [Y_2] + X_3 \partial_3 [Y_2] + X_3 Y_3 \left(-\frac{\varepsilon}{2}\right) f_2 \right\} \partial_2 \\ &+ \left\{ X_1 \partial_1 [Y_3] + X_2 \partial_2 [Y_3] + X_3 \partial_3 [Y_3] \right\} \partial_3\end{aligned}\quad (3.14)$$

elde edilir.

Walker manifoldunda tanımlanan metriğin ve vektörel çarpımın \mathbb{R}_1^3 dekinden farklı olmasından dolayı ikinci türev hesaplaması da farklıdır. Yukarıdaki (3.14) denklemini kullanarak ikinci türev hesaplaması yapıldığında 3-boyutlu bir strict Walker manifold üzerinde ikinci türev hesaplamaları aşağıdaki eşitliklerle elde edilecektir.

$$\begin{aligned}\varphi_{xx} &= \left\{ \frac{\partial x^1}{\partial x} \partial_1 \left[\frac{\partial x^1}{\partial x} \right] + \frac{\partial x^2}{\partial x} \partial_2 \left[\frac{\partial x^1}{\partial x} \right] + \frac{1}{2} \left(f_y \frac{\partial x^2}{\partial x} \frac{\partial x^3}{\partial x} + f_y \frac{\partial x^3}{\partial x} \frac{\partial x^2}{\partial x} + f_z \frac{\partial x^3}{\partial x} \frac{\partial x^3}{\partial x} \right) \right\} \partial x \\ &+ \left\{ \frac{\partial x^1}{\partial x} \partial_1 \left[\frac{\partial x^2}{\partial x} \right] + \frac{\partial x^2}{\partial x} \partial_2 \left[\frac{\partial x^2}{\partial x} \right] - \frac{\varepsilon}{2} f_y \frac{\partial x^3}{\partial x} \frac{\partial x^3}{\partial x} \right\} \partial y \\ &+ \left\{ \frac{\partial x^1}{\partial x} \partial_1 \left[\frac{\partial x^3}{\partial x} \right] + \frac{\partial x^2}{\partial x} \partial_2 \left[\frac{\partial x^3}{\partial x} \right] \right\} \partial z\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_{xy} &= \left\{ \frac{\partial x^1}{\partial y} \partial_1 \left[\frac{\partial x^1}{\partial x} \right] + \frac{\partial x^2}{\partial y} \partial_2 \left[\frac{\partial x^1}{\partial x} \right] + \frac{1}{2} \left(f_y \frac{\partial x^2}{\partial y} \frac{\partial x^3}{\partial x} + f_y \frac{\partial x^3}{\partial y} \frac{\partial x^2}{\partial x} + f_z \frac{\partial x^3}{\partial y} \frac{\partial x^3}{\partial x} \right) \right\} \partial x \\ &+ \left\{ \frac{\partial x^1}{\partial y} \partial_1 \left[\frac{\partial x^2}{\partial x} \right] + \frac{\partial x^2}{\partial y} \partial_2 \left[\frac{\partial x^2}{\partial x} \right] - \frac{\varepsilon}{2} f_y \frac{\partial x^3}{\partial y} \frac{\partial x^3}{\partial x} \right\} \partial y \\ &+ \left\{ \frac{\partial x^1}{\partial y} \partial_1 \left[\frac{\partial x^3}{\partial x} \right] + \frac{\partial x^2}{\partial y} \partial_2 \left[\frac{\partial x^3}{\partial x} \right] \right\} \partial z\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_{yy} &= \left\{ \frac{\partial x^1}{\partial y} \partial_1 \left[\frac{\partial x^1}{\partial y} \right] + \frac{\partial x^2}{\partial y} \partial_2 \left[\frac{\partial x^1}{\partial y} \right] + \frac{1}{2} \left(f_y \frac{\partial x^2}{\partial y} \frac{\partial x^3}{\partial y} + f_y \frac{\partial x^3}{\partial y} \frac{\partial x^2}{\partial y} + f_z \frac{\partial x^3}{\partial y} \frac{\partial x^3}{\partial y} \right) \right\} \partial x \\ &+ \left\{ \frac{\partial x^1}{\partial y} \partial_1 \left[\frac{\partial x^2}{\partial y} \right] + \frac{\partial x^2}{\partial y} \partial_2 \left[\frac{\partial x^2}{\partial y} \right] - \frac{\varepsilon}{2} f_y \frac{\partial x^3}{\partial y} \frac{\partial x^3}{\partial y} \right\} \partial y \\ &+ \left\{ \frac{\partial x^1}{\partial y} \partial_1 \left[\frac{\partial x^3}{\partial y} \right] + \frac{\partial x^2}{\partial y} \partial_2 \left[\frac{\partial x^3}{\partial y} \right] \right\} \partial z\end{aligned}\quad (3.15)$$

$\varphi_{xx} = \varphi_s$ ve $\varphi_{xy} = \varphi_w$ diyelim. Bu ifadeler yukarıda yerine yazılırsa aşağıdaki eşitlikler bulunur.

$$\begin{aligned} \varphi_{xyx} = & \left\{ \frac{\partial x^1}{\partial x} \partial_1 \left[\frac{\partial x^1}{\partial w} \right] + \frac{\partial x^2}{\partial x} \partial_2 \left[\frac{\partial x^1}{\partial w} \right] + \frac{1}{2} \left(f_y \frac{\partial x^2}{\partial x} \frac{\partial x^3}{\partial w} + f_y \frac{\partial x^3}{\partial x} \frac{\partial x^2}{\partial w} + f_z \frac{\partial x^3}{\partial x} \frac{\partial x^3}{\partial w} \right) \right\} \partial x \\ & + \left\{ \frac{\partial x^1}{\partial x} \partial_1 \left[\frac{\partial x^2}{\partial w} \right] + \frac{\partial x^2}{\partial y} \partial_2 \left[\frac{\partial x^2}{\partial w} \right] - \frac{\varepsilon}{2} f_y \frac{\partial x^3}{\partial x} \frac{\partial x^3}{\partial w} \right\} \partial y \\ & + \left\{ \frac{\partial x^1}{\partial x} \partial_1 \left[\frac{\partial x^3}{\partial w} \right] + \frac{\partial x^2}{\partial x} \partial_2 \left[\frac{\partial x^3}{\partial w} \right] \right\} \partial z \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{xyy} = & \left\{ \frac{\partial x^1}{\partial y} \partial_1 \left[\frac{\partial x^1}{\partial s} \right] + \frac{\partial x^2}{\partial y} \partial_2 \left[\frac{\partial x^1}{\partial s} \right] + \frac{1}{2} \left(f_y \frac{\partial x^2}{\partial y} \frac{\partial x^3}{\partial s} + f_y \frac{\partial x^3}{\partial y} \frac{\partial x^2}{\partial s} + f_z \frac{\partial x^3}{\partial y} \frac{\partial x^3}{\partial s} \right) \right\} \partial x \\ & + \left\{ \frac{\partial x^1}{\partial y} \partial_1 \left[\frac{\partial x^2}{\partial s} \right] + \frac{\partial x^2}{\partial y} \partial_2 \left[\frac{\partial x^2}{\partial s} \right] - \frac{\varepsilon}{2} f_y \frac{\partial x^3}{\partial y} \frac{\partial x^3}{\partial s} \right\} \partial y \\ & + \left\{ \frac{\partial x^1}{\partial y} \partial_1 \left[\frac{\partial x^3}{\partial s} \right] + \frac{\partial x^2}{\partial y} \partial_2 \left[\frac{\partial x^3}{\partial s} \right] \right\} \partial z. \end{aligned} \quad (3.17)$$

3.5. 3-Boyutlu Walker Manifoldda Yüzeyler

Turgut (1995), Turgut ve Hacısalihoğlu (1997) referanslarında \mathbb{R}_1^3 deki yüzey ve yüzeylere ait bazı kavramlar verilmiştir. Bu kavramlar (M, g_f^ε) Walker manifolduna uyarlanacaktır.

3-boyutlu bir (M, g_f^ε) Walker manifoldu göz önüne alınırsa,

$$\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$$

$$(x, y) \rightarrow \varphi(x, y) = (\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y), \varphi_3(x, y))$$

parametrizasyonu ile tanımlı bir $\varphi(U)$ yüzeyi göz önüne alınsın. Burada

$$\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} = \varphi_x(x, y), \quad \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} = \varphi_y(x, y)$$

lineer bağımsız olsun. Bu durumda yüzeyin normali $N = \varphi_x \times \varphi_y$ olup yüzeyin 1. temel formunun bileşenleri

$$E = g_f^\varepsilon(\varphi_x, \varphi_x), \quad F = g_f^\varepsilon(\varphi_x, \varphi_y), \quad G = g_f^\varepsilon(\varphi_y, \varphi_y).$$

Yüzeyin 2. temel formunun bileşenleri

$$L = g_f^\varepsilon(\varphi_{xx}, N), \quad M = g_f^\varepsilon(\varphi_{xy}, N), \quad N = g_f^\varepsilon(\varphi_{yy}, N).$$

dir.

3.5.5. Tanım

3-boyutlu bir (M, g_f^ε) Walker manifoldunda bir yüzey \bar{M} olsun. g_f^ε Walker metriğinin \bar{M} yüzeyine kısıtlanmış nondegenere ise \bar{M} yüzeyi üzerinde metrik tensör nondegenere olduğundan 1. temel forma karşılık gelen matrisin tersi vardır. Bir başka deyişle matrisin determinantı sıfırdan farklıdır. Yani

$$\det \begin{bmatrix} E & G \\ G & F \end{bmatrix} \neq 0$$

dır. Diğer bir ifade ile \bar{M} yüzeyinin normalinin null olmayan bir vektör alanı olmasıdır.

3.5.6. Tanım

3-boyutlu bir (M, g_f^ε) Walker manifoldunda bir yüzey \bar{M} olsun. \bar{M} yüzeyi üzerine indirgenmiş metrik pozitif tanımlı ise \bar{M} ye (M, g_f^ε) de bir spacelike yüzey denir.

3.5.5. Teorem

3-boyutlu bir (M, g_f^ε) Walker manifoldunda spacelike yüzey \bar{M} olsun. Bu durumda \bar{M} nin spacelike yüzey olması için yeterli ve gerekli koşul \bar{M} nin normal vektör alanının timelike yani $g_f^\varepsilon(N, N) < 0$ olmasıdır.

3.5.7. Tanım

3-boyutlu bir (M, g_f^ε) Walker manifoldunda bir yüzey \bar{M} olsun. \bar{M} yüzeyi üzerine indirgenmiş metrik negatif tanımlı ise \bar{M} yüzeyine timelike yüzey denir.

3.5.6. Teorem

(M, g_f^ε) Walker manifoldunda U, φ parametrizasyonu ile verilen bir \bar{M} yüzeyinin timelike olması için gerek ve yeter koşul yüzeyin normalinin spacelike bir vektör alanı olmasıdır, yani $g_f^\varepsilon(N, N) > 0$ olmasıdır.

3.5.8. Tanım (Gauss Eğriliği)

(M, g_f^ε) Walker manifoldunda bir \bar{M} yüzeyinin şekil operatörüne karşılık gelen matris S olmak üzere

$$K : \bar{M} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$p \rightarrow K(p) = \varepsilon \det S$$

dönüşümüne \bar{M} yüzeyinin Gauss fonksiyonu ve $K(p)$ reel sayısına da \bar{M} nin p noktasındaki Gauss eğriliği denir. Burada $\varepsilon = g_f^\varepsilon(N, N) = \pm 1$ dir.

$g_f^\varepsilon(N, N)$ yüzeyi spacelike ise $\varepsilon = g_f^\varepsilon(N, N) = -1$ dir. Bu durumda

$$K(p) = -\det S$$

dir. \bar{M} yüzeyi timelike ise $\varepsilon = g_f^\varepsilon(N, N) = 1$ dir bu durumda

$$K(p) = \det S$$

dir.

3.5.9. Tanım

(M, g_f^ε) Walker manifoldunda bir yüzey \bar{M} olsun.

$$H : \bar{M} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$p \rightarrow H(p) = \varepsilon \frac{1}{2} i_z S(p)$$

(3.18)

dönüşümüne \bar{M} nin ortalama eğrilik fonksiyonu ve $H(p)$ değerine de \bar{M} nin p noktasındaki ortalama eğriliği denir [6].

3.5.10. Tanım

3-boyutlu bir (M, g_f^ε) Walker manifoldunda bir yüzey \bar{M} olsun. Levi-Civita koneksiyonu ∇ ile ve \bar{M} yüzeyi üzerindeki koneksiyonu da D ile gösterilirse her X, Y ve Z vektör alanları için Gauss ve Weingarten denklemleri aşağıdaki eşitliklerle ifade edilir:

$$\begin{aligned}\nabla_X Y &= D_X Y + h(X, Y)N \\ -\nabla_X N &= SX\end{aligned}\tag{3.19}$$

burada h ve S , \bar{M} nin sırasıyla ikinci temel form ve şekil operatörüdür ve aralarındaki ilişki aşağıdaki denklemlerle verilir:

$$g_f^\varepsilon(SX, Y) = h(X, Y)\varepsilon_1 = g_f^\varepsilon(\nabla_X N, N)\tag{3.20}$$

(M, g_f^ε) nin eğriliği R^M ile ve \bar{M} nin eğriliği R ile gösterilirse,

$$g_f^\varepsilon(R^M(X, Y), Z, W) = g_f^\varepsilon(R(X, Y), Z, W) + \varepsilon_1 (h(Y, Z)h(X, W) - h(X, Z)h(Y, W))\tag{3.21}$$

$$g_f^\varepsilon(R^M(X, Y), Z, N) = \varepsilon_1 ((\nabla h)(Y, X, Z) - (\nabla h)(X, Y, Z))\tag{3.22}$$

dir [4].

Eşitlik (3.21) ve (3.22) (Gauss-Codazzi) den

$$R^M(X, Y)X = \varphi_{xy} - \varphi_{yx}\tag{3.23}$$

$$R^M(Y, X)Y = \varphi_{yx} - \varphi_{yy}\tag{3.24}$$

elde edilir [4].

M manifoldunun kesit eğriliği K ve \bar{M} yüzeyinin kesitsel eğriliği $K^{\bar{M}}(X, Y)$ ile gösterilirse,

$$K(X, Y) = \frac{g_f^\varepsilon(R^M(X, Y)X, Y)}{g_f^\varepsilon(X, X)g_f^\varepsilon(Y, Y) - (g_f^\varepsilon)^2(X, Y)}$$

olup buradan

$$K^{\bar{M}}(X, Y) = K(X, Y) + \varepsilon_1 \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \quad (3.25)$$

dir [4].

3.6. 3-Boyutlu Walker Manifoldda Regle Yüzeyler

Turgut (1995), Turgut ve Hacısalihoğlu (1997) ve Turgut ve Hacısalihoğlu (1998) referanslarında \mathbb{R}_1^3 deki regle yüzey ve regle yüzeylere ait bazı kavramlar verilmiştir. Bu kavramları (M, g_f^ε) Walker manifolduna uyarlanacaktır.

3.6.11. Tanım

3-boyutlu Walker manifoldda verilen bir l doğrusunun bir α doğrusu boyunca hareket ettirilmesi ile elde edilen yüzeylere 3-boyutlu Walker manifoldda bir regle yüzey denir. Buradaki l doğrusu yüzeyin anadoğrusu (doğrultman) ve α eğrisi yüzeyin dayanak eğrisi olarak adlandırılır.

3.6.12. Tanım

3-boyutlu Walker manifoldunda $0 \in I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere diferensiyallenebilir birim hızlı bir α eğrisi alınsın.

$$\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$$

$$t \rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$$

olsun. Her $t \in I$ için $\alpha(t)$ noktasındaki $T_{\alpha(t)}$ teğet vektörü ile ana doğrunun doğrultman

vektörü lineer bağımsız olacak şekilde

$$I : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$$

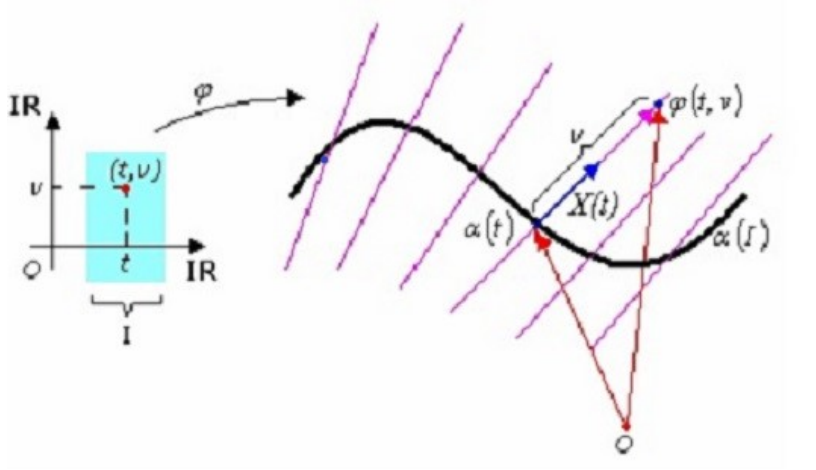
$$v \rightarrow v(I) = (\alpha_1(t) + av_1(t), \alpha_2(t) + av_2(t), \alpha_3(t) + av_3(t))$$

doğrusu seçilsin. I doğrusunun bir α eğrisi boyunca hareket ettirilmesi ile elde edilen ve $(I \times \mathbb{R})$ parametrizasyonu ile ifade edilen regle yüzey

$$\varphi : I \times \mathbb{R} \rightarrow M$$

$$(t, v) \rightarrow \varphi(t, v) = (\alpha_1(t) + av_1(t), \alpha_2(t) + av_2(t), \alpha_3(t) + av_3(t))$$

elde edilir ve bu regle yüzey \bar{M} ile gösterilecektir [6].



Şekil 3.2. Dayanak eğrisi $\alpha(t)$ ve doğrultmanı $X(t)$ olan regle yüzey

Bir \bar{M} yüzeyi

$$\varphi : I \times \mathbb{R} \rightarrow M$$

$$(t, v) \rightarrow \varphi(t, v) = \alpha(t) + vX(t)$$

parametrizasyonu ile verilsin.

$$\varphi_t = \alpha'(t) + vX'(t)$$

$$\varphi_v = X(t)$$

ve yüzeyin 1. temel formunun bileşenleri olan E, F, G değerleri

$$E = g_f^{\mathcal{E}}(\varphi_t, \varphi_t), \quad F = g_f^{\mathcal{E}}(\varphi_t, \varphi_v), \quad G = g_f^{\mathcal{E}}(\varphi_v, \varphi_v).$$

2. temel formun bileşenleri L, M, N değerleri ise

$$L = g_f^{\mathcal{E}}(\varphi_{tt}, N), \quad M = g_f^{\mathcal{E}}(\varphi_{tv}, N), \quad N = g_f^{\mathcal{E}}(\varphi_{vv}, N),$$

ile hesaplanır.





4. 3-BOYUTLU STRICT WALKER MANIFOLDLARDA REGLE YÜZEYLER

(M, g_f^ε) 3-boyutlu strict Walker manifoldu göz önüne alınsın.

$$\varphi : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y) \rightarrow \varphi(x, y) = \alpha(x) + yA(x)$$

regle yüzeyinde doğrultman vektörü $A(x)$ null dağılım olacak şekilde önce $A(x) = (1, 0, 0)$, olma durumunu daha sonra $A(x) = (x, 0, 0)$ olma hali ve en son olarak da $A(x) = (A_1(x), 0, 0)$ halleri incelenecektir.

1. Durum

(M, g_f^ε) 3-boyutlu strict Walker manifoldunda bir $\varphi(x, y) = \alpha(x) + yA(x)$ regle yüzeyinin doğrultmanı $A(x) = (1, 0, 0)$ null dağılım olmak üzere yüzeyin parametrizasyonu

$$\varphi(x, y) = (\alpha_1(x), \alpha_2(x), \alpha_3(x)) + y \cdot (1, 0, 0)$$

dır. Regle yüzeyin dayanak eğrisi α spacelike, timelike ve null olma halleri ayrı ayrı incelenecektir. İlk olarak;

i) α eğrisi spacelike bir eğri olsun. O zaman,

$$g(\alpha'(x), \alpha'(x)) = 2\alpha_1'(x)\alpha_3'(x) + \varepsilon(\alpha_2')^2 + f \cdot (\alpha_3')^2 > 0$$

dir. Regle yüzeyinin parametrizasyonu göz önüne alınsın. Buradan

$$\varphi_x = (\alpha_1'(x), \alpha_2'(x), \alpha_3'(x)), \quad \varphi_y = (1, 0, 0)$$

olur. Buradan 1. temel formun katsayıları

$$E = g(\varphi_x, \varphi_x) = 2\alpha_1'\alpha_3' + \varepsilon(\alpha_2')^2 + f \cdot (\alpha_3')^2, \quad F = g(\varphi_x, \varphi_y) = \alpha_3' \quad G = g(\varphi_y, \varphi_y) = 0$$

bulunur.

$$\det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2\alpha'_1\alpha'_3 + \varepsilon(\alpha'_2)^2 + f \cdot (\alpha'_3)^2 & \alpha'_3 \\ \alpha'_3 & 0 \end{pmatrix} = -(\alpha'_3)^2 < 0$$

elde edilir. $(\alpha'_3)^2 \neq 0$ olup indirgenmiş metrik tensör negatif tanımlı olduğundan regle yüzey timelikedir. Regle yüzeyin parametrizasyonunun ikinci mertebeden türevleri aşağıdaki formüllerle bulunur.

$$\begin{aligned} \varphi_{xx} = & \left\{ \frac{\partial x^1}{\partial x} \partial_1 \left[\frac{\partial x^1}{\partial x} \right] + \frac{\partial x^2}{\partial x} \partial_2 \left[\frac{\partial x^1}{\partial x} \right] + \frac{1}{2} \left(f_y \frac{\partial x^2}{\partial x} \frac{\partial x^3}{\partial x} + f_y \frac{\partial x^3}{\partial x} \frac{\partial x^2}{\partial x} + f_z \frac{\partial x^3}{\partial x} \frac{\partial x^3}{\partial x} \right) \right\} \partial x \\ & + \left\{ \frac{\partial x^1}{\partial x} \partial_1 \left[\frac{\partial x^2}{\partial x} \right] + \frac{\partial x^2}{\partial x} \partial_2 \left[\frac{\partial x^2}{\partial x} \right] - \frac{\varepsilon}{2} f_y \frac{\partial x^3}{\partial x} \frac{\partial x^3}{\partial x} \right\} \partial y \\ & + \left\{ \frac{\partial x^1}{\partial x} \partial_1 \left[\frac{\partial x^3}{\partial x} \right] + \frac{\partial x^2}{\partial x} \partial_2 \left[\frac{\partial x^3}{\partial x} \right] \right\} \partial z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{xy} = & \left\{ \frac{\partial x^1}{\partial y} \partial_1 \left[\frac{\partial x^1}{\partial x} \right] + \frac{\partial x^2}{\partial y} \partial_2 \left[\frac{\partial x^1}{\partial x} \right] + \frac{1}{2} \left(f_y \frac{\partial x^2}{\partial y} \frac{\partial x^3}{\partial x} + f_y \frac{\partial x^3}{\partial y} \frac{\partial x^2}{\partial x} + f_z \frac{\partial x^3}{\partial y} \frac{\partial x^3}{\partial x} \right) \right\} \partial x \\ & + \left\{ \frac{\partial x^1}{\partial y} \partial_1 \left[\frac{\partial x^2}{\partial x} \right] + \frac{\partial x^2}{\partial y} \partial_2 \left[\frac{\partial x^2}{\partial x} \right] - \frac{\varepsilon}{2} f_y \frac{\partial x^3}{\partial y} \frac{\partial x^3}{\partial x} \right\} \partial y \\ & + \left\{ \frac{\partial x^1}{\partial y} \partial_1 \left[\frac{\partial x^3}{\partial x} \right] + \frac{\partial x^2}{\partial y} \partial_2 \left[\frac{\partial x^3}{\partial x} \right] \right\} \partial z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{yy} = & \left\{ \frac{\partial x^1}{\partial y} \partial_1 \left[\frac{\partial x^1}{\partial y} \right] + \frac{\partial x^2}{\partial y} \partial_2 \left[\frac{\partial x^1}{\partial y} \right] + \frac{1}{2} \left(f_y \frac{\partial x^2}{\partial y} \frac{\partial x^3}{\partial y} + f_y \frac{\partial x^3}{\partial y} \frac{\partial x^2}{\partial y} + f_z \frac{\partial x^3}{\partial y} \frac{\partial x^3}{\partial y} \right) \right\} \partial x \\ & + \left\{ \frac{\partial x^1}{\partial y} \partial_1 \left[\frac{\partial x^2}{\partial y} \right] + \frac{\partial x^2}{\partial y} \partial_2 \left[\frac{\partial x^2}{\partial y} \right] - \frac{\varepsilon}{2} f_y \frac{\partial x^3}{\partial y} \frac{\partial x^3}{\partial y} \right\} \partial y \\ & + \left\{ \frac{\partial x^1}{\partial y} \partial_1 \left[\frac{\partial x^3}{\partial y} \right] + \frac{\partial x^2}{\partial y} \partial_2 \left[\frac{\partial x^3}{\partial y} \right] \right\} \partial z. \end{aligned}$$

Bu formüller kullanarak parametrizasyonun 2. mertebeden türevleri hesaplandığında

$$\varphi_{xx} = \left(\alpha'_1 \alpha''_1 + f_y \alpha'_2 \alpha'_3 + \frac{f_z}{2} (\alpha'_3)^2, \alpha'_1 \alpha''_2 - \frac{\varepsilon}{2} f_y (\alpha'_3)^2, \alpha'_1 \alpha''_3 \right),$$

$$\varphi_{xy} = (\alpha''_1, \alpha''_2, \alpha''_3),$$

$$\varphi_{yy} = (0, 0, 0)$$

bulunur. φ_x ve φ_y nin vektörel çarpımı

$$\varphi_x \times \varphi_y = \left(\left| \begin{array}{cc|c} \alpha'_1 & 1 & -f \\ \alpha'_2 & 0 & \alpha'_3 \end{array} \right| e_1 - \varepsilon \left| \begin{array}{cc|c} \alpha'_1 & 1 & \alpha'_2 \\ \alpha'_3 & 0 & \alpha'_3 \end{array} \right| e_2 + \left| \begin{array}{cc|c} \alpha'_2 & 0 & \alpha'_3 \\ \alpha'_3 & 0 & \alpha'_3 \end{array} \right| e_3 \right)$$

$$\varphi_x \times \varphi_y = (-\alpha'_2, \varepsilon \alpha'_3, 0)$$

dir. Buradan

$$g(\varphi_x \times \varphi_y, \varphi_x \times \varphi_y) = \varepsilon(\varepsilon \alpha'_3)^2 = \varepsilon(\alpha'_3)^2$$

olup regle yüzeyin birim normali

$$\begin{aligned} N &= \frac{\varphi_x \times \varphi_y}{\sqrt{|g_f^\varepsilon(\varphi_x \times \varphi_y, \varphi_x \times \varphi_y)|}} \\ &= \frac{(-\alpha'_2, \varepsilon \alpha'_3, 0)}{\sqrt{|\varepsilon(\alpha'_3)^2|}} \end{aligned}$$

dir. $\sqrt{|\varepsilon(\alpha'_3)^2|} = d$ ile gösterilsin. 2. temel formun katsayıları

$$L = g(\varphi_{xx}, N) = \frac{-\alpha'_1 \alpha'_3 \alpha'_2 + \alpha'_1 \alpha'_2 \alpha'_3 - \frac{\varepsilon}{2} f_y (\alpha'_3)^3}{d}$$

$$M = g(\varphi_{xy}, N) = \left(\alpha'_1 \cdot 0 - \alpha'_3 \alpha'_2 + \varepsilon \alpha'_2 \cdot \alpha'_3 + f \cdot 0 \right) \cdot \frac{1}{d} = \frac{\alpha'_3 \alpha'_2 - \alpha'_3 \alpha'_2}{d}$$

$$N = g(\varphi_{yy}, N) = 0$$

bulunur. Buradan regle yüzeyin şekil operatörüne karşılık gelen matris

$$\begin{aligned} S = \Gamma^{-1} \Pi &= \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} \\ S &= \frac{1}{-(\alpha'_3)^2} \begin{bmatrix} 0 & -\alpha'_3 \\ -\alpha'_3 & 2\alpha'_1 \alpha'_3 + \varepsilon(\alpha'_2)^2 + f \cdot (\alpha'_3)^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{-\alpha'_1 \alpha'_3 \alpha'_2 + \alpha'_1 \alpha'_2 \alpha'_3 - \frac{\varepsilon}{2} f_y (\alpha'_3)^3}{d} & \frac{\alpha'_3 \alpha'_2 - \alpha'_3 \alpha'_2}{d} \\ \frac{\alpha'_3 \alpha'_2 - \alpha'_3 \alpha'_2}{d} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir.

$$S = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$a_{11} = \frac{\alpha_2''(\alpha_3')^2 - \alpha_3'\alpha_2''\alpha_3''}{d(\alpha_3')^2} = \left(\alpha_2'' - \frac{\alpha_2'\alpha_3''}{\alpha_3'}\right) \cdot \frac{1}{d}$$

$$a_{12} = 0$$

$$a_{21} = \frac{(2\alpha_1'\alpha_3' + \varepsilon((\alpha_2')^2 + f \cdot (\alpha_3')^2))(\alpha_3'\alpha_2'' - \alpha_3''\alpha_2') + \alpha_1'\alpha_3'\alpha_3''\alpha_2'' - \alpha_1'\alpha_2''(\alpha_3')^2 + \frac{\varepsilon}{2}f_y(\alpha_3')^4}{d}$$

$$a_{22} = \left(\alpha_2'' - \frac{\alpha_2'\alpha_3''}{\alpha_3'}\right) \frac{1}{d}$$

dir. O halde regle yüzeyin Gauss eğriliği

$$\begin{aligned} K = \det S &= \left(\alpha_2'' - \frac{\alpha_2'\alpha_3''}{\alpha_3'}\right) \cdot \frac{1}{d^2} \cdot \left(\alpha_2'' - \frac{\alpha_2'\alpha_3''}{\alpha_3'}\right) \\ &= \frac{1}{d^2} \left(\alpha_2'' - \frac{\alpha_2'\alpha_3''}{\alpha_3'}\right)^2 \\ &= \left[\frac{1}{d} \left(\alpha_2'' - \frac{\alpha_2'\alpha_3''}{\alpha_3'}\right)\right]^2 \end{aligned} \quad (4.1)$$

dir. Regle yüzeyin ortalama eğriliği

$$H = \frac{1}{d} \left(\alpha_2'' - \frac{\alpha_2'\alpha_3''}{\alpha_3'}\right) \quad (4.2)$$

dir. Regle yüzeyin parametrisasyonunun 3. mertebeden türevleri

$$\begin{aligned} \varphi_{xyx} &= (\alpha_1'\alpha_1''' + \alpha_2' \cdot 0 + \frac{1}{2}(f_y\alpha_2'\alpha_3'' + f_y\alpha_3'\alpha_2'' + f_z\alpha_3'\alpha_3''))\partial_x + (\alpha_1'\alpha_2''' + \alpha_2' \cdot 0 - \frac{\varepsilon}{2}f_y\alpha_3'\alpha_3'')\partial_y \\ &\quad + ((\alpha_1'\alpha_3''' + \alpha_2' \cdot 0)\partial_z, \end{aligned}$$

$$\varphi_{xyx} = (\alpha_1'\alpha_1''' + \frac{1}{2}f_y\alpha_2'\alpha_3'' + \frac{1}{2}f_y\alpha_3'\alpha_2'' + \frac{1}{2}f_z\alpha_3'\alpha_3'')\partial_x + (\alpha_1'\alpha_2''' - \frac{\varepsilon}{2}f_y\alpha_3'\alpha_3'')\partial_y + (\alpha_1'\alpha_3''')\partial_z,$$

$$\begin{aligned} \varphi_{xxy} = & ((\alpha_1'')^2 + \alpha_1''' \alpha_1' + f_{yx} \alpha_2' \alpha_3' + f_y (\alpha_2'' \alpha_3' + \alpha_3'' \alpha_2') + \frac{f_{zx}}{2} (\alpha_3')^2 + \alpha_2' \alpha_3'' f_z) \partial_x \\ & + ((\alpha_1'' \alpha_2'' + \alpha_1' \alpha_2''') - \frac{\varepsilon}{2} f_{yx} (\alpha_3')^2 - \varepsilon f_y \alpha_3' \alpha_3'') \partial_y + (\alpha_1'' \alpha_3'' + \alpha_3''' \alpha_1') \partial_z \end{aligned}$$

bulunur. $f = f(y, z)$ olduğundan $f_{yx} = 0$ ve $f_{zx} = 0$ dır. Regle yüzeyi \bar{M} ile gösterilsin. O zaman regle yüzeyinin eğrilik tensörü

$$\begin{aligned} R^{\bar{M}}(X, Y)X &= \varphi_{xxy} - \varphi_{xyx} \\ &= \left((\alpha_1'')^2 + \frac{1}{2} f_y \alpha_2'' \alpha_3'' + \frac{1}{2} f_y \alpha_2' \alpha_3'' + \alpha_2' \alpha_3'' f_z - \frac{f_z}{2} \alpha_3' \alpha_3'' \right) \partial_x \\ &+ \left(\alpha_1'' \alpha_2'' - \frac{\varepsilon}{2} f_y \alpha_3' \alpha_3'' \right) \partial_y + \left(\alpha_1'' \alpha_3'' \right) \partial_z \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$g_f^\varepsilon(R^{\bar{M}}(X, Y)X, Y) = 0 + \alpha_1'' \alpha_3'' \cdot 1 + \varepsilon \cdot 0 + f \cdot 0 = \alpha_1'' \alpha_3''$$

olup kesitsel eğrilik

$$K^{\bar{M}}(X, Y) = \frac{g_f^\varepsilon(R^{\bar{M}}(X, Y)X, Y)}{EG - F^2} = \frac{\alpha_1'' \alpha_3''}{-(\alpha_3')^2}$$

olur. (M, g_f^ε) Walker manifoldunun kesitsel eğriliği

$$K(X, Y) = -\frac{\alpha_1'' \alpha_3''}{(\alpha_3')^2} + \left(\frac{\alpha_3' \alpha_2'' - \alpha_3'' \alpha_2' \alpha_3'}{d\alpha_3'} \right)^2$$

olarak bulunur.

ii) (M, g_f^ε) 3-boyutlu strict Walker manifoldunda regle yüzeyinin dayanak eğrisi α timelike eğri olsun. O zaman,

$$g_f^\varepsilon(\alpha', \alpha') = 2\alpha_1' \alpha_3' + \varepsilon(\alpha_2')^2 + f \cdot (\alpha_3')^2 < 0$$

olup bir yüzey belirtmez. Çünkü Teorem (3.3.4) den 3-boyutta bir timelike ve bir null vektör lineer bağımsız olamaz.

iii) Regle yüzeyin dayanak eğrisi null olsun.

Yani yüzeyin doğrultmanı $A(x) = \frac{\partial}{\partial x} = (1, 0, 0)$ dır.

$$g_f^\varepsilon(\alpha', \alpha') = 2\alpha'_1\alpha'_3 + \varepsilon(\alpha'_2)^2 + f \cdot (\alpha'_3)^2 = 0$$

olup buradan

$$(\alpha'_3)^2 = \frac{2\alpha'_1\alpha'_3 + \varepsilon(\alpha'_2)^2}{-f}, \quad (f \neq 0) \quad (4.3)$$

bulunur. Regle yüzeyinin parametrizasyonunun 1. mertebeden türevleri

$$\varphi_x = (\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3)$$

$$\varphi_y = (1, 0, 0)$$

dir. Buradan regle yüzeyin 1. temel formunun katsayıları

$$E = g(\varphi_x, \varphi_x) = 2\alpha'_1\alpha'_3 + \varepsilon(\alpha'_2)^2 + f \cdot (\alpha'_3)^2$$

$$F = g(\varphi_x, \varphi_y) = \alpha'_3$$

$$G = g(\varphi_y, \varphi_y) = 0$$

bulunur. Teorem (3.3.4) den $F = \alpha'_3 \neq 0$ olmalıdır.

$EG - F^2 = -(\alpha'_3)^2 < 0$ olduğundan \bar{M} regle yüzeyi timelike regle yüzeydir. Regle yüzeyin parametrizasyonunun 2. mertebeden türevleri

$$\varphi_{xx} = (\alpha'_1\alpha''_1 + f_y\alpha'_2\alpha'_3 + \frac{f_z}{2}(\alpha'_3)^2)\partial_x + (\alpha'_1\alpha''_2 - \frac{\varepsilon}{2}f_y(\alpha'_3)^2)\partial_y + (\alpha'_1\alpha''_3)\partial_z,$$

$$= \left(\alpha'_1\alpha''_1 + f_y\alpha'_2\alpha'_3 + \frac{f_z}{2}(\alpha'_3)^2, \alpha'_1\alpha''_2 - \frac{\varepsilon}{2}f_y(\alpha'_3)^2, \alpha'_1\alpha''_3 \right)$$

$$\varphi_{xy} = (\alpha''_1, \alpha''_2, \alpha''_3),$$

$$\varphi_{yy} = (0, 0, 0).$$

elde edilir. Buradan φ_x ile φ_y nin vektörel çarpımı

$$\varphi_x \times \varphi_y = (-\alpha'_2, \varepsilon \alpha'_3, 0)$$

olup

$$g_f^\varepsilon(\varphi_x \times \varphi_y, \varphi_x \times \varphi_y) = \varepsilon(\alpha'_3)^2$$

dir. Regle yüzeyin birim normal vektör alanı

$$N = \frac{\varphi_x \times \varphi_y}{\sqrt{g_f^\varepsilon(\varphi_x \times \varphi_y, \varphi_x \times \varphi_y)}} = \frac{(-\alpha'_2, \varepsilon \alpha'_3, 0)}{\sqrt{\varepsilon(\alpha'_3)^2}}$$

olur ve

$$\sqrt{\varepsilon(\alpha'_3)^2} = d$$

ile gösterilsin. (4.3) ile gösterilen eşitliği d cinsinden ifade edersek

$$d^2 = (\alpha'_3)^2 = \frac{2\alpha'_1 \alpha'_3 + \varepsilon(\alpha'_2)^2}{-f}, \quad (f \neq 0), \quad (4.4)$$

olarak yazabiliriz. Regle yüzeyinin 2. temel formunun katsayıları

$$L = g_f^\varepsilon(\varphi_{xx}, N) = \frac{-\alpha'_1 \alpha''_3 \alpha'_2 + \alpha'_1 \alpha''_2 \alpha'_3 - \frac{\varepsilon}{2} f_y (\alpha'_3)^3}{d},$$

$$M = g_f^\varepsilon(\varphi_{xy}, N) = \frac{\alpha''_2 \alpha'_3 - \alpha'_2 \alpha''_3}{d},$$

$$N = g_f^\varepsilon(\varphi_{yy}, N) = 0$$

bulunur. Regle yüzeyinin şekil operatörüne karşılık gelen matris

$$S = I^{-1} \Pi = \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$a_{11} = -\alpha'_3 \left(\frac{\alpha''_2 \alpha'_3 - \alpha'_2 \alpha''_3}{-d^3} \right)$$

$$a_{12} = 0$$

$$a_{21} = -\alpha'_3 \frac{(-\alpha'_1 \alpha''_3 \alpha'_2 + \alpha'_1 \alpha''_2 \alpha'_3 - \frac{\varepsilon}{2} f_y (\alpha'_3)^3)}{-d^3} + \left(2\alpha'_1 \alpha'_3 + \varepsilon (\alpha'_2)^2 + f \cdot (\alpha'_3)^2 \right) \frac{(\alpha''_2 \alpha'_3 - \alpha'_2 \alpha''_3)}{-d^3}$$

$$a_{22} = -\alpha'_3 \left(\frac{\alpha''_2 \alpha'_3 - \alpha'_2 \alpha''_3}{-d^3} \right)$$

elde edilir. Buradan Regle yüzeyinin Gauss ve ortalama eğriliği

$$K = \det S = (\alpha'_3)^2 \left(\frac{\alpha''_2 \alpha'_3 - \alpha'_2 \alpha''_3}{d^3} \right)^2 \quad (4.5)$$

$$H = \frac{1}{2} i_z S = \alpha'_3 \left(\frac{\alpha''_2 \alpha'_3 - \alpha'_2 \alpha''_3}{d^3} \right)$$

olur. Regle yüzeyinin 3. mertebeden türevleri

$$\begin{aligned} \varphi_{xyx} &= \left(\alpha'_1 \alpha'''_1 + \frac{1}{2} f_y \alpha'_2 \alpha''_3 + \frac{f_y}{2} \alpha'_3 \alpha''_2 + \frac{f_z}{2} \alpha'_3 \alpha''_3 \right) \partial_x + \left(\alpha'_1 \alpha'''_2 - \frac{\varepsilon}{2} f_y \alpha'_3 \alpha''_3 \right) \partial_y \\ &\quad + \alpha'_1 \alpha'''_3 \partial_z, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{xyy} &= \left((\alpha''_1)^2 + \alpha'''_1 \alpha'_1 + f_y \alpha''_2 \alpha'_3 + f_y \alpha''_3 \alpha'_2 + f_z \alpha'_3 \alpha''_3 \right) \partial_x + \left(\alpha''_1 \alpha''_2 + \alpha'_1 \alpha'''_2 - \frac{\varepsilon}{2} f_y \alpha'_3 \alpha''_3 \right) \partial_y \\ &\quad + \left(\alpha''_1 \alpha''_3 + \alpha'''_1 \alpha'_1 \right) \partial_z \end{aligned}$$

bulunur. \bar{M} regle yüzeyinin eğriliği

$$R^{\bar{M}}(X, Y)X = \left((\alpha''_1)^2 + \frac{f_y}{2} \alpha''_2 \alpha'_3 + \frac{f_y}{2} \alpha''_3 \alpha'_2 + \frac{f_z}{2} \alpha'_3 \alpha''_3 \right) \partial_x + \left(\alpha''_1 \alpha''_2 - \varepsilon f_y \alpha'_3 \alpha''_3 \right) \partial_y + (\alpha''_1 \alpha''_3) \partial_z$$

olup buradan

$$g_f^\varepsilon(R^{\bar{M}}(X, Y)X, Y) = \alpha''_1 \alpha''_3$$

olur. \bar{M} regle yüzeyinin kesitsel eğriliği

$$K^{\bar{M}}(X, Y) = \frac{g_f^\varepsilon(R^{\bar{M}}(X, Y)X, Y)}{EG - F^2} = \frac{\alpha_1'' \alpha_3''}{-(\alpha_3')^2}$$

ve bu durumda M nin kesitsel eğriliği

$$K(X, Y) = -\frac{\alpha_1'' \alpha_3''}{(\alpha_3')^2} + \left(\frac{\alpha_3' \alpha_2'' - \alpha_3'' \alpha_2'}{d\alpha_3'} \right)^2$$

bulunur.

2.Durum

(M, g_f^ε) 3-boyutlu strict Walker manifoldunda bir $\varphi(x, y) = \alpha(x) + y.A(x)$ parametrizasyonu ile verilen regle yüzeyi doğrultmanı $A(x) = (x, 0, 0)$ olacak şekilde alınsın. Bu durumda regle yüzeyinin parametrizasyonu

$$\varphi(x, y) = (\alpha_1(x), \alpha_2(x), \alpha_3(x)) + y.(x, 0, 0)$$

olur.

i) Regle yüzeyinin dayanak eğrisi α spacelike bir eğri olsun. O zaman

$$g(\alpha', \alpha') = 2\alpha_1' \alpha_3' + \varepsilon(\alpha_2')^2 + f.(\alpha_3')^2 > 0$$

olur. Regle yüzeyinin 1. mertebeden türevleri

$$\varphi_x = (\alpha_1' + y, \alpha_2', \alpha_3')$$

$$\varphi_y = (x, 0, 0) = A(x)$$

bulunur. Regle yüzeyinin 1. temel formunun katsayıları

$$E = g_f^\varepsilon(\varphi_x, \varphi_x) = 2(\alpha_1' + y)\alpha_3' + \varepsilon(\alpha_2')^2 + f.(\alpha_3')^2,$$

$$F = g_f^\varepsilon(\varphi_x, \varphi_y) = \alpha_3'x,$$

$$G = g_f^\varepsilon(\varphi_y, \varphi_y) = 0$$

elde edilir. Buradan regle yüzey üzerine indirgenmiş metrik tensör

$$\det \begin{pmatrix} 2(\alpha'_1 + y)\alpha'_3 + \varepsilon(\alpha'_2)^2 + f \cdot (\alpha'_3)^2 & \alpha'_3 x \\ \alpha'_3 x & 0 \end{pmatrix} = -(\alpha'_3 x)^2 < 0$$

olduğundan \bar{M} regle yüzeyi timelikedir $\varepsilon = 1$ dir. φ_x ile φ_y nin vektörel çarpımı

$$\varphi_x \times \varphi_y = (-x\alpha'_2, x\alpha'_3, 0) \text{ olup } \|\varphi_x \times \varphi_y\| = \sqrt{|\varepsilon x^2 (\alpha'_3)^2|} = d \text{ ile gösterilsin.}$$

Yüzeyin birim normali

$$N = \frac{\varphi_x \times \varphi_y}{\|\varphi_x \times \varphi_y\|} = \left(\frac{-x\alpha'_2}{d}, \frac{x\alpha'_3}{d}, 0 \right).$$

\bar{M} timelike regle yüzeyinin parametrizasyonunun 2. mertebeden türevleri

$$\varphi_{xx} = \left\{ (\alpha'_1 + y)\alpha''_1 + \alpha'_2 + f_y \alpha'_2 \alpha'_3 + \frac{f_z}{2} (\alpha'_3)^2 \right\} \partial_x + \left\{ (\alpha'_1 + y)\alpha''_2 - \frac{\varepsilon}{2} f_y (\alpha'_3)^2 \right\} \partial_y + \left\{ (\alpha'_1 + y)\alpha''_3 \right\} \partial_z,$$

$$\varphi_{xy} = (x\alpha''_1, x\alpha''_2, x\alpha''_3),$$

$$\varphi_{yy} = (x, 0, 0)$$

olur. Timelike regle yüzeyin 2. temel formunun katsayıları

$$L = g_f^\varepsilon(\varphi_{xx}, N) = \frac{-\alpha'_1 \alpha'_2 \alpha'_3 x - xy \alpha'_2 \alpha'_3}{d} + \frac{\alpha'_1 \alpha'_2 \alpha'_3 x + xy \alpha'_2 \alpha'_3 - \frac{\varepsilon}{2} f_y x (\alpha'_3)^3}{d},$$

$$M = g_f^\varepsilon(\varphi_{xy}, N) = \frac{-x^2 \alpha''_3 \alpha'_2}{d} + \frac{x^2 \alpha'_3 \alpha''_2}{d},$$

$$N = g_f^\varepsilon(\varphi_{yy}, N) = 0$$

olur. Regle yüzeyinin şekil operatörüne karşılık gelen matris

$$S = \Gamma^{-1} \Pi = \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix}$$

$$S = \frac{1}{-(\alpha'_3 x)^2} \begin{bmatrix} 0 & -\alpha'_3 x \\ -\alpha'_3 x & 2(\alpha'_1 + y)\alpha'_3 + \varepsilon(\alpha'_2)^2 + f(\alpha'_3)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-\alpha'_3 x M}{-(\alpha'_3 x)^2} & 0 \\ \frac{-\alpha'_3 x L + E M}{-(\alpha'_3 x)^2} & \frac{-\alpha'_3 x M}{-(\alpha'_3 x)^2} \end{bmatrix}$$

olur. Burada

$$S = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$a_{11} = a_{22} = \left(\frac{-x\alpha''_3 \alpha'_2}{\alpha'_3 d} + \frac{x\alpha''_2}{d} \right), \quad a_{12} = 0,$$

$$a_{21} = \frac{1}{\alpha'_3} \left(\frac{-\alpha'_1 \alpha'_2 \alpha''_3 - y\alpha'_2 \alpha''_3 - \alpha'_1 \alpha''_2 \alpha'_3 - y\alpha''_2 \alpha'_3 + \frac{\varepsilon}{2} f_y (\alpha'_3)^3}{d} \right)$$

$$+ \left(\frac{2(\alpha'_1 + y)\alpha'_3 + \varepsilon(\alpha'_2)^2 + f(\alpha'_3)^2}{-(\alpha'_3 x)^2} \right) \left(\frac{-x^2 \alpha''_3 \alpha'_2 - x^2 \alpha'_3 \alpha''_2}{d} \right)$$

dir. Regle yüzeyinin Gauss ve ortalama eğriliği

$$K = \det S = \left(\frac{-x\alpha''_3 \alpha'_2}{\alpha'_3 d} + \frac{x\alpha''_2}{d} \right)^2$$

$$H = \frac{1}{2} i_z S = \left(\frac{-x\alpha''_3 \alpha'_2}{\alpha'_3 d} + \frac{x\alpha''_2}{d} \right)$$

dir. Parametrizasyonun 3. mertebeden türevleri

$$\varphi_{xxy} = \left\{ x \left[(\alpha''_1)^2 + \alpha'''_1 (\alpha'_1 + y) + \alpha''_2 + f_y \alpha'_2 \alpha''_3 + f_y \alpha'_2 \alpha''_3 + f_z \alpha'_3 \alpha''_3 \right] \right\} \partial_x$$

$$+ \left\{ x \left[\alpha''_1 \alpha''_2 + \alpha'''_2 (\alpha'_1 + y - \varepsilon f_y \alpha'_3 \alpha''_3) \right] \right\} \partial_y + \left\{ x \left[\alpha''_1 \alpha''_3 + (\alpha'_1 + y) \alpha'''_3 \right] \right\} \partial_z,$$

$$\varphi_{xyx} = \left\{ (\alpha'_1 + y)(\alpha''_1 + x\alpha'''_1) + \frac{1}{2}(f_y \alpha'_2 \alpha''_3 x + f_y \alpha'_3 \alpha''_2 x + f_z \alpha'_3 \alpha''_3 x) \right\} \partial_x$$

$$+ \left\{ (\alpha'_1 + y)(\alpha''_2 + \alpha'''_2 x) - \frac{\varepsilon}{2} f_y \alpha'_3 \alpha''_3 x \right\} \partial_y + \left\{ (\alpha'_1 + y)(\alpha''_3 + x\alpha'''_3) \right\} \partial_z$$

olup buradan \bar{M} regle yüzeyinin kesitsel eğriliği

$$\begin{aligned}
R^{\bar{M}}(X, Y)X &= \varphi_{xxy} - \varphi_{xyx} \\
&= \left\{ \left[x(\alpha_1'')^2 + x\alpha_1''' \alpha_1' + x\alpha_1''' y + x\alpha_2'' + x f_y(\alpha_2'' \alpha_3' + \alpha_2' \alpha_3'' + x f_z \alpha_3' \alpha_3'') \right] \right\} \partial_x \\
&\quad - \left\{ ((\alpha_1' + y)(\alpha_1'' + x\alpha_1''') + \frac{1}{2}(f_y \alpha_2' \alpha_3'' x + f_y \alpha_3' \alpha_2'' x + f_z \alpha_3' \alpha_3'' x)) \right\} \partial_x \\
&\quad + \left\{ \left[\alpha_1'' \alpha_2'' + \alpha_2''' (\alpha_1' + y - \varepsilon f_y \alpha_3' \alpha_3'') \right] - \left[(\alpha_1' + y)(\alpha_2'' + \alpha_2''' x) - \frac{\varepsilon}{2} f_y \alpha_3' \alpha_3'' x \right] \right\} \partial_y \\
&\quad + \left\{ \left[x\alpha_1'' \alpha_3'' - \alpha_1' \alpha_3'' - y\alpha_3'' \right] \right\} \partial_z
\end{aligned}$$

bulunur. O halde

$$g_f^\varepsilon(R^{\bar{M}}(X, Y)X, Y) = x^2 \alpha_1'' \alpha_3'' - x \alpha_1' \alpha_3'' - xy \alpha_3''$$

olur. \bar{M} regle yüzeyinin kesitsel eğriliği

$$K^{\bar{M}}(X, Y) = \frac{-x\alpha_1'' \alpha_3'' + \alpha_1' \alpha_3'' + y\alpha_3''}{(\alpha_3')^2 x}$$

dir. Codazzi-Mainardi denkleminde M nin kesitsel eğriliği

$$\begin{aligned}
K(X, Y) &= K^{\bar{M}}(X, Y) + \varepsilon_1 \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \\
&= \frac{-x\alpha_1'' \alpha_3'' + \alpha_1' \alpha_3'' + y\alpha_3''}{(\alpha_3')^2 x} + \frac{(-\alpha_3'' \alpha_2' x + \alpha_3' \alpha_2'' x)^2}{(\alpha_3')^2 d^2}
\end{aligned}$$

bulunur.

ii) Regle yüzeyin dayanak eğrisi α timelike bir eğri olsun. O zaman

$$g_f^\varepsilon(\alpha', \alpha') = 2\alpha_1' \alpha_3' + \varepsilon(\alpha_2')^2 + f \cdot (\alpha_3')^2 < 0$$

olup bir yüzey belirtmez. Çünkü Teorem (3.3.4) den 3-boyutta bir timelike ve bir null vektör lineer bağımsız olamaz.

iii) Regle yüzeyinin dayanak eğrisi α bir null eğri olsun . O halde

$$g_f^\varepsilon(\alpha', \alpha') = 2\alpha'_1\alpha'_3 + \varepsilon(\alpha'_2)^2 + f.(\alpha'_3)^2 = 0$$

olup

$$(\alpha'_3)^2 = \frac{2\alpha'_1\alpha'_3 + \varepsilon(\alpha'_2)^2}{-f}, \quad (f \neq 0) \quad (4.6)$$

bulunur. Regle yüzeyinin parametrizasyonunun 1. mertebeden türevleri

$$\varphi_x = (\alpha'_1 + y, \alpha'_2, \alpha'_3),$$

$$\varphi_y = (x, 0, 0)$$

olup, buradan 1. temel formun katsayıları

$$E = g_f^\varepsilon(\varphi_x, \varphi_x) = 2(\alpha'_1 + y)\alpha'_3 + \varepsilon(\alpha'_2)^2 + f.(\alpha'_3)^2,$$

$$F = g_f^\varepsilon(\varphi_x, \varphi_y) = \alpha'_3 x,$$

$$G = g_f^\varepsilon(\varphi_y, \varphi_y) = 0$$

bulunur. Teorem (3.3.4) den $F = \alpha'_3 \neq 0$ olmalıdır.

$EG - F^2 = -(\alpha'_3)^2 < 0$ olduğundan \bar{M} regle yüzeyi bir timelike regle yüzeydir. Regle yüzeyin birim normal vektör alanı

$$N = \frac{\varphi_x \times \varphi_y}{\|(\varphi_x \times \varphi_y)\|} = \frac{(-\alpha'_2, \varepsilon\alpha'_3, 0)}{\sqrt{\varepsilon(\alpha'_3)^2}}$$

olur. $\sqrt{\varepsilon(\alpha'_3)^2} = d$ ile gösterilsin. Regle yüzeyin parametrizasyonunun 2. mertebeden türevleri

$$\begin{aligned} \varphi_{xx} = & \left\{ (\alpha'_1 + y)\alpha''_1 + \alpha'_2 + f_y\alpha'_2\alpha'_3 + \frac{f_z}{2}(\alpha'_3)^2 \right\} \partial_x + \left\{ (\alpha'_1 + y)\alpha''_2 - \frac{\varepsilon}{2}f_y(\alpha'_3)^2 \right\} \partial_y \\ & + \left\{ (\alpha'_1 + y)\alpha''_3 \right\} \partial_z, \end{aligned}$$

$$\varphi_{xy} = (x\alpha''_1, x\alpha''_2, x\alpha''_3),$$

$$\varphi_{yy} = (0, 0, 0)$$

bulunur. Buradan 2. temel formun katsayıları

$$L = g_f^\varepsilon(\varphi_{xx}, N) = \frac{-\alpha'_1 \alpha'_2 \alpha''_3 x - xy \alpha'_2 \alpha''_3}{d} + \frac{\alpha'_1 \alpha''_2 \alpha'_3 x + xy \alpha''_2 \alpha'_3 - \frac{\varepsilon}{2} f_{y,x} (\alpha'_3)^3}{d},$$

$$M = g_f^\varepsilon(\varphi_{xy}, N) = \frac{-x^2 \alpha''_3 \alpha'_2}{d} + \frac{x^2 \alpha'_3 \alpha''_2}{d},$$

$$N = g_f^\varepsilon(\varphi_{yy}, N) = 0$$

elde edilir. Regle yüzeyin Gauss ve ortalama eğriliği

$$K = \det S = \left(\frac{-x \alpha''_3 \alpha'_2}{\alpha'_3 d} + \frac{x \alpha''_2}{d} \right)^2 \quad (4.7)$$

$$H = \frac{1}{2} i_z S = \left(\frac{-x \alpha''_3 \alpha'_2}{\alpha'_3 d} + \frac{x \alpha''_2}{d} \right)$$

Regle yüzeyin parametrizasyonunun 3. mertebeden türevleri,

$$\begin{aligned} \varphi_{xxy} &= \left\{ x \left[(\alpha''_1)^2 + \alpha'''_1 (\alpha'_1 + y) + \alpha''_2 + f_y \alpha''_2 \alpha'_3 + f_y \alpha'_2 \alpha''_3 + f_z \alpha'_3 \alpha''_3 \right] \right\} \partial_x \\ &\quad + \left\{ x \left[\alpha''_1 \alpha''_2 + \alpha'''_2 (\alpha'_1 + y - \varepsilon f_y \alpha'_3 \alpha''_3) \right] \right\} \partial_y + \left\{ x \left[\alpha''_1 \alpha''_3 + (\alpha'_1 + y) \alpha'''_3 \right] \right\} \partial_z, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{xyx} &= \left\{ (\alpha'_1 + y) (\alpha''_1 + x \alpha'''_1) + \frac{1}{2} (f_y \alpha'_2 \alpha''_3 x + f_y \alpha'_3 \alpha''_2 x + f_z \alpha'_3 \alpha''_3 x) \right\} \partial_x \\ &\quad + \left\{ (\alpha'_1 + y) (\alpha''_2 + \alpha'''_2 x) - \frac{\varepsilon}{2} f_y \alpha'_3 \alpha''_3 x \right\} \partial_y + \left\{ (\alpha'_1 + y) (\alpha''_3 + x \alpha'''_3) \right\} \partial_z \end{aligned}$$

elde edilir. \bar{M} regle yüzeyinin eğriliği

$$\begin{aligned} R^{\bar{M}}(X, Y)X &= \varphi_{xxy} - \varphi_{xyx} \\ &= \left\{ \left[x (\alpha''_1)^2 + x \alpha'''_1 \alpha'_1 + x \alpha'''_1 y + x \alpha''_2 + x f_y (\alpha''_2 \alpha'_3 + \alpha'_2 \alpha''_3 + x f_z \alpha'_3 \alpha''_3) \right] \right\} \partial_x \\ &\quad - \left\{ \left[(\alpha'_1 + y) (\alpha''_1 + x \alpha'''_1) + \frac{1}{2} (f_y \alpha'_2 \alpha''_3 x + f_y \alpha'_3 \alpha''_2 x + f_z \alpha'_3 \alpha''_3 x) \right] \right\} \partial_x \\ &\quad + \left\{ \left[\alpha''_1 \alpha''_2 + \alpha'''_2 (\alpha'_1 + y - \varepsilon f_y \alpha'_3 \alpha''_3) \right] - \left[(\alpha'_1 + y) (\alpha''_2 + \alpha'''_2 x) - \frac{\varepsilon}{2} f_y \alpha'_3 \alpha''_3 x \right] \right\} \partial_y \end{aligned}$$

$$+ \left\{ \left[x\alpha_1''\alpha_3'' - \alpha_1'\alpha_3'' - y\alpha_3'' \right] \right\} \partial_z$$

bulunur. O halde

$$g_f^\varepsilon(\bar{R}^M(X,Y)X,Y) = x^2\alpha_1''\alpha_3'' - x\alpha_1'\alpha_3'' - xy\alpha_3''$$

olur. \bar{M} regle yüzeyinin kesitsel eğriliği

$$K^{\bar{M}}(X,Y) = \frac{-x\alpha_1''\alpha_3'' + \alpha_1'\alpha_3'' + y\alpha_3''}{(\alpha_3')^2x}$$

dir. Codazzi-Mainardi denkleminde M nin kesitsel eğriliği

$$\begin{aligned} K(X,Y) &= K^{\bar{M}}(X,Y) + \varepsilon_1 \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \\ &= \frac{-x\alpha_1''\alpha_3'' + \alpha_1'\alpha_3'' + y\alpha_3''}{(\alpha_3')^2x} + \frac{(-\alpha_3''\alpha_2'x + \alpha_3'\alpha_2''x)^2}{(\alpha_3')^2d^2} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada (4.6) eşitliği yerine yazılarak eğriliklerin f fonksiyonuna bağlı değerleri elde edilebilir.

3.Durum

(M, g_f^ε) 3-boyutlu strict Walker manifoldunda bir $\varphi(x,y) = \alpha(x) + y.A(x)$ parametrizasyonu ile verilen regle yüzeyinin doğrultmanı $A(x)=(A_1(x),0,0)$ null dağılım olacak şekilde verilsin. Bu durumda yüzeyin parametrizasyonu

$$\varphi(x,y) = (\alpha_1(x), \alpha_2(x), \alpha_3(x)) + y.(A_1(x), 0, 0)$$

olur. Parametrizasyonun 1. mertebeden türevleri

$$\varphi_x = (\alpha_1'(x) + y.A_1', \alpha_2', \alpha_3'), \quad \varphi_y = (A_1, 0, 0)$$

olur.

i) Regle yüzeyinin dayanak eğrisi α spacelike bir eğri olsun. O zaman

$$g_f^\varepsilon(\alpha', \alpha') = 2\alpha_1'\alpha_3' + \varepsilon(\alpha_2')^2 + f.(\alpha_3')^2 > 0$$

olur. Buradan 1. temel formun katsayıları

$$E = g_f^\varepsilon(\varphi_x, \varphi_x) = 2(\alpha'_1 + y.A'_1).\alpha'_3 + \varepsilon(\alpha'_2)^2 + f.(\alpha'_3)^2,$$

$$F = g_f^\varepsilon(\varphi_x, \varphi_y) = \alpha'_3 A_1(x),$$

$$G = g_f^\varepsilon(\varphi_y, \varphi_y) = 0$$

bulunur. Buradan

$$\det \begin{pmatrix} 2(\alpha'_1 + y.A'_1).\alpha'_3 + \varepsilon(\alpha'_2)^2 + f.(\alpha'_3)^2 & \alpha'_3 A_1 \\ \alpha'_3 A_1 & 0 \end{pmatrix} = -(\alpha'_3.A_1)^2 < 0$$

olduğundan \bar{M} regle yüzeyi timelikedir.

$$\begin{aligned} \varphi_x \times \varphi_y &= \left(\begin{vmatrix} \alpha'_1 + y.A'_1 & A_1 \\ \alpha'_2 & 0 \end{vmatrix} - f \begin{vmatrix} \alpha'_2 & 0 \\ \alpha'_3 & 0 \end{vmatrix} \right) e_1 - \varepsilon \begin{vmatrix} \alpha'_1 + y.A'_1 & A_1 \\ \alpha'_3 & 0 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} \alpha'_2 & 0 \\ \alpha'_3 & 0 \end{vmatrix} e_3. \\ &= -\alpha'_2 A_1 e_1 + \varepsilon \alpha'_3 A_1 e_2 + 0.e_3 \\ &= (-\alpha'_2 A_1, \varepsilon \alpha'_3 A_1, 0) \end{aligned}$$

olup buradan

$$g_f^\varepsilon(\varphi_x \times \varphi_y, \varphi_x \times \varphi_y) = -2\alpha'_2.A'_1.0 + \varepsilon(\varepsilon\alpha'_3 A_1)^2 + f.0^2 = \varepsilon(\alpha'_3)^2.A_1^2$$

olur. Yüzeyin birim normal vektör alanı

$$N = \frac{\varphi_x \times \varphi_y}{\sqrt{|g_f^\varepsilon(\varphi_x \times \varphi_y, \varphi_x \times \varphi_y)|}} = \frac{(-\alpha'_2 A_1, \varepsilon \alpha'_3 A_1, 0)}{\sqrt{\varepsilon|(\alpha'_3 A_1)^2|}}$$

$\sqrt{\varepsilon|(\alpha'_3 A_1)^2|} = d$ ile gösterilsin. Regle yüzeyin parametrizasyonunun 2. mertebeden türevleri

$$\begin{aligned} \varphi_{xx} &= \left((\alpha'_1 + y.A'_1)(\alpha''_1 + y.A''_1) + \frac{1}{2}(f_y \alpha'_2 \alpha'_3 + f_y \alpha'_3 \alpha'_2 + f_z (\alpha'_3)^2) \right) \partial_x \\ &\quad + \left((\alpha'_1 + y.A'_1) \alpha''_2 - \frac{\varepsilon}{2} f_y (\alpha'_3)^2 \right) \partial_y + \left((\alpha'_1 + y.A'_1) \alpha''_3 \right) \partial_z, \end{aligned}$$

$$\varphi_{xy} = (A_1 \alpha''_1 + y.A''_1, A_1 \alpha''_2, A_1 \alpha''_3),$$

$$\varphi_{yy} = (A_1 A'_1, 0, 0)$$

dir. Regle yüzeyinin 2. temel formunun katsayıları

$$L = g_f^\varepsilon(\varphi_{xx}, N) = \left(-\alpha'_1 \alpha'_2 A_1 \alpha''_3 - y A_1 A'_1 \alpha''_3 \alpha'_2 + \alpha'_1 \alpha''_2 \alpha'_3 A_1 + y \alpha'_3 \alpha''_2 A_1 A'_1 - \frac{\varepsilon}{2} f_y A_1 (\alpha'_3)^3 \right) \frac{1}{d},$$

$$M = g_f^\varepsilon(\varphi_{xy}, N) = \left(-\alpha'_2 \alpha''_3 (A_1)^2 + \alpha''_2 \alpha'_3 (A_1)^2 \right) \frac{1}{d},$$

$$N = g_f^\varepsilon(\varphi_{yy}, N) = 0$$

olur. Regle yüzeyinin şekil operatörüne karşılık gelen matris

$$S = I^{-1} \Pi = \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$a_{11} = a_{22} = -\alpha'_3 A_1 \frac{\left(-\alpha'_2 \alpha''_3 (A_1)^2 + \alpha''_2 \alpha'_3 (A_1)^2 \right)}{-(\alpha'_3 \cdot A_1)^2 \cdot d},$$

$$a_{12} = 0,$$

$$a_{21} = \frac{-F \cdot L + E \cdot M}{-d \cdot (\alpha'_3 \cdot A_1)^2}$$

bulunur. Buradan Gauss eğriliği ve ortalama eğrilik

$$K = \det S = \left(\frac{A_1}{d} \right)^2 \left(\alpha''_2 - \frac{\alpha'_2 \alpha''_3}{\alpha'_3} \right)^2$$

$$H = \frac{A_1}{d} \left(\alpha''_2 - \frac{\alpha'_2 \alpha''_3}{\alpha'_3} \right)$$

elde edilir. Parametrizasyonun 3. mertebeden türevleri

$$\begin{aligned} \varphi_{xyx} = & \left((\alpha'_1 + y A'_1) (A'_1 \alpha''_1 + \alpha'''_1 A_1 + y A'''_1) + \alpha'_2 A''_1 + \frac{1}{2} f_y \alpha'_2 A_1 \alpha''_3 + \frac{1}{2} f_y \alpha'_3 A_1 \alpha''_2 \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} f_z \alpha'_3 A_1 \alpha''_3 \right) \partial_x + \left((\alpha'_1 + y A'_1) (A'_1 \alpha''_2 + \alpha'''_2 A_1) - \frac{\varepsilon}{2} f_y \alpha'_3 \alpha''_3 A_1 \right) \partial_y \\ & + \left((\alpha'_1 + y A'_1) (A'_1 \alpha''_3 + A_1 \alpha'''_3) \right) \partial_z, \end{aligned}$$

$$\varphi_{xyy} = A_1 \left(\alpha'_1 \alpha''_1 + \alpha'_1 y A''_1 + y A'_1 \alpha''_1 + y^2 A'_1 A''_1 + \frac{1}{2} f_y \alpha'_1 \alpha'_2 \alpha'_3 + \frac{1}{2} f_y y A'_1 \alpha'_2 \alpha'_3 \right)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} f_y \alpha'_3 \alpha'_2 \alpha'_1 + \frac{1}{2} f_y \alpha'_3 \alpha'_2 y A'_1 + \frac{1}{2} f_z (\alpha'_3)^2 \alpha'_1 + \frac{1}{2} A'_1 f_z (\alpha'_3)^2 \Big) \partial_x \\
& + \left(A_1 (\alpha'_1 \alpha''_2 + y A'_1 \alpha''_2) (-f_y \alpha'_3 \alpha''_3) - A_1 \frac{1}{2} f_y (\alpha'_3)^2 (\alpha''_1 \alpha''_2 + \alpha''_3 \alpha'_1 + y A''_1 \alpha''_2 + y \alpha''_3 A'_1) \right) \partial_y \\
& + \left(A_1 (\alpha''_1 \alpha''_3 + \alpha''_3 \alpha'_1 + y \alpha''_3 A'_1 + y) \alpha''_3 A''_1 \right) \partial_z
\end{aligned}$$

bulunur. \bar{M} nin eğriliği

$$R^{\bar{M}}(X, Y)X = \varphi_{xxy} - \varphi_{xyx}$$

olup

$$K^{\bar{M}}(X, Y) = \frac{g_f^{\varepsilon}(R^{\bar{M}}(X, Y)X, Y)}{EG - F^2} = \frac{-A_1 \alpha''_1 \alpha''_3 - A_1 y A''_1 \alpha''_3 + \alpha'_1 A'_1 \alpha''_3 + y (A'_1)^2 \alpha''_3}{(\alpha'_3)^2 A_1^2}$$

bulunur. M nin kesitsel eğriliği

$$K(X, Y) = \frac{-A_1 \alpha''_1 \alpha''_3 - A_1 y A''_1 \alpha''_3 + \alpha'_1 A'_1 \alpha''_3 + y (A'_1)^2 \alpha''_3}{(\alpha'_3)^2 A_1^2} + \frac{\alpha''_2 \alpha'_3 - \alpha'_2 \alpha'_3}{d(\alpha'_3)^2}$$

dir.

ii) α eğrisi timelike eğri olsun. O zaman

$$g_f^{\varepsilon}(\alpha', \alpha') = 2\alpha'_1 \alpha'_3 + \varepsilon (\alpha'_2)^2 + f \cdot (\alpha'_3)^2 < 0$$

olup bir yüzey belirtmez. Çünkü Teorem (3.3.4) den 3-boyutta bir timelike ve bir null vektör lineer bağımsız olamaz.

iii) α eğrisi null eğri olsun. O halde

$$g_f^{\varepsilon}(\alpha', \alpha') = 2\alpha'_1 \alpha'_3 + \varepsilon (\alpha'_2)^2 + f \cdot (\alpha'_3)^2 = 0$$

olup buradan

$$(\alpha'_3)^2 = \frac{2\alpha'_1 \alpha'_3 + \varepsilon (\alpha'_2)^2}{-f}, \quad (f \neq 0)$$

bulunur. Regle yüzeyinin 1. temel formunun katsayıları

$$E = g_f^\varepsilon(\varphi_x, \varphi_x) = 2(\alpha'_1 + y.A'_1).\alpha'_3 + \varepsilon(\alpha'_2)^2 + f.(\alpha'_3)^2,$$

$$F = g_f^\varepsilon(\varphi_x, \varphi_y) = \alpha'_3 A_1(x),$$

$$G = g_f^\varepsilon(\varphi_y, \varphi_y) = 0$$

dir. Teorem (3.3.4) den $F = \alpha'_3 \neq 0$ olmalıdır. Bu durumda

$EG - F^2 = -(\alpha'_3.A_1(x))^2 < 0$ olduğundan \bar{M} regle yüzeyi timelikedir. Ayrıca φ_x ve φ_y nin vektörel çarpımı

$$\begin{aligned} \varphi_x \times \varphi_y &= \left(\left| \begin{array}{cc|c} \alpha'_1 + y.A'_1 & A_1 & -f \\ \alpha'_2 & 0 & \alpha'_3 \end{array} \right| e_1 - \varepsilon \left| \begin{array}{cc|c} \alpha'_1 + y.A'_1 & A_1 & \alpha'_2 \\ \alpha'_3 & 0 & \alpha'_3 \end{array} \right| e_2 + \left| \begin{array}{cc|c} \alpha'_1 + y.A'_1 & A_1 & \alpha'_2 \\ \alpha'_3 & 0 & \alpha'_3 \end{array} \right| e_3 \right) \\ &= -\alpha'_2 A_1 e_1 + \varepsilon \alpha'_3 A_1 e_2 + 0.e_3 \\ &= (-\alpha'_2 A_1, \varepsilon \alpha'_3 A_1, 0) \end{aligned}$$

olur. O halde

$$g_f^\varepsilon(\varphi_x \times \varphi_y, \varphi_x \times \varphi_y) = -2\alpha'_2.A'_1.0 + \varepsilon(\varepsilon \alpha'_3 A_1)^2 + f.0^2 = \varepsilon(\alpha'_3)^2.A_1^2$$

dir. $\sqrt{\varepsilon(\alpha'_3)^2.A_1^2} = d$ ile gösterilsin. Regle yüzeyin parametrizasyonunun 2. mertebeden türevleri

$$\begin{aligned} \varphi_{xx} &= \left((\alpha'_1 + yA'_1)(\alpha''_1 + yA''_1) + \frac{1}{2}(f_y \alpha'_2 \alpha'_3 + f_y \alpha'_3 \alpha'_2 + f_z (\alpha'_3)^2) \right) \partial_x \\ &\quad + \left((\alpha'_1 + yA'_1)\alpha''_2 - \frac{\varepsilon}{2} f_y (\alpha'_3)^2 \right) \partial_y + \left((\alpha'_1 + yA'_1)\alpha''_3 \right) \partial_z, \end{aligned}$$

$$\varphi_{xy} = (A_1 \alpha''_1 + yA''_1, A_1 \alpha''_2, A_1 \alpha''_3),$$

$$\varphi_{yy} = (A_1 A'_1, 0, 0)$$

dir. Regle yüzeyinin 2. temel formunun katsayıları

$$L = g_f^\varepsilon(\varphi_{xx}, N) = \left(-\alpha'_1 \alpha'_2 A_1 \alpha''_3 - yA_1 A'_1 \alpha''_3 \alpha'_2 + \alpha'_1 \alpha'_2 \alpha'_3 A_1 + y\alpha'_3 \alpha''_2 A_1 A'_1 - \frac{\varepsilon}{2} f_y A_1 (\alpha'_3)^3 \right) \frac{1}{d},$$

$$M = g_f^\varepsilon(\varphi_{xy}, N) = \left(-\alpha'_2 \alpha''_3 (A_1)^2 + \alpha''_2 \alpha'_3 (A_1)^2 \right) \frac{1}{d},$$

$$N = g_f^\varepsilon(\varphi_{yy}, N) = 0$$

olur. Regle yüzeyinin şekil operatörüne karşılık gelen matris

$$S = \Gamma^{-1}\Pi = \frac{1}{EG-F^2} \begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$a_{11} = a_{22} = -\alpha'_3 A_1 \frac{(-\alpha'_2 \alpha''_3 (A_1)^2 + \alpha''_2 \alpha'_3 (A_1)^2)}{-(\alpha'_3 \cdot A_1)^2 \cdot d},$$

$$a_{12} = 0,$$

$$a_{21} = \frac{-F \cdot L + E \cdot M}{-d \cdot (\alpha'_3 \cdot A_1)^2}$$

bulunur. Buradan Gauss eğriliği ve ortalama eğrilik

$$K = \det S = \left(\frac{A_1}{d}\right)^2 \left(\alpha''_2 - \frac{\alpha'_2 \alpha''_3}{\alpha'_3}\right)^2$$

$$H = \frac{A_1}{d} \left(\alpha''_2 - \frac{\alpha'_2 \alpha''_3}{\alpha'_3}\right)$$

elde edilir. Parametrizasyonun 3. mertebeden türevleri

$$\begin{aligned} \varphi_{xyx} = & \left((\alpha'_1 + yA'_1)(A'_1 \alpha''_1 + \alpha'''_1 A_1 + yA''_1) + \alpha'_2 A''_1 + \frac{1}{2} f_y \alpha'_2 A_1 \alpha''_3 + \frac{1}{2} f_y \alpha'_3 A_1 \alpha''_2 \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} f_z \alpha'_3 A_1 \alpha''_3 \right) \partial_x + \left((\alpha'_1 + yA'_1)(A'_1 \alpha''_2 + \alpha'''_2 A_1) - \frac{\varepsilon}{2} f_y \alpha'_3 \alpha''_3 A_1 \right) \partial_y \\ & + \left((\alpha'_1 + yA'_1)(A'_1 \alpha''_3 + A_1 \alpha'''_3) \right) \partial_z, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{xyy} = & A_1 \left(\alpha'_1 \alpha''_1 + \alpha'_1 y A''_1 + y A'_1 \alpha''_1 + y^2 A'_1 A''_1 + \frac{1}{2} f_y \alpha'_1 \alpha'_2 \alpha'_3 + \frac{1}{2} f_y y A'_1 \alpha'_2 \alpha'_3 \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} f_y \alpha'_3 \alpha'_2 \alpha'_1 + \frac{1}{2} f_y \alpha'_3 \alpha'_2 y A'_1 + \frac{1}{2} f_z (\alpha'_3)^2 \alpha'_1 + \frac{1}{2} A'_1 f_z (\alpha'_3)^2 \right) \partial_x \\ & + \left(A_1 (\alpha'_1 \alpha''_2 + y A'_1 \alpha''_2) (-f_y \alpha'_3 \alpha''_3) - A_1 \frac{1}{2} f_y (\alpha'_3)^2 (\alpha''_1 \alpha''_2 + \alpha''_2 \alpha'_1 + y A''_1 \alpha''_2 + y \alpha''_2 A'_1) \right) \partial_y \end{aligned}$$

$$+ \left(A_1(\alpha_1'' \alpha_3'' + \alpha_3''' \alpha_1' + y \alpha_3''' A_1' + y) \alpha_3'' A_1'' \right) \partial_z$$

bulunur. \bar{M} nin eğriliği

$$R^{\bar{M}}(X, Y)X = \varphi_{xyx} - \varphi_{xyx}$$

olup \bar{M} regle yüzeyinin kesitsel eğriliği

$$K^{\bar{M}}(X, Y) = \frac{g_f^\varepsilon(R^{\bar{M}}(X, Y)X, Y)}{EG - F^2} = \frac{-A_1 \alpha_1'' \alpha_3'' - A_1 y A_1'' \alpha_3'' + \alpha_1' A_1' \alpha_3'' + y(A_1')^2 \alpha_3''}{(\alpha_3')^2 A_1^2}$$

bulunur. M nin kesitsel eğriliği

$$K(X, Y) = \frac{-A_1 \alpha_1'' \alpha_3'' - A_1 y A_1'' \alpha_3'' + \alpha_1' A_1' \alpha_3'' + y(A_1')^2 \alpha_3''}{(\alpha_3')^2 A_1^2} + \frac{\alpha_2'' \alpha_3' - \alpha_2' \alpha_3''}{d(\alpha_3')^2}.$$

4.1. Sonuç

3-boyutlu (M, g_f^ε) strict Walker manifoldunda bir timelike regle yüzeyin Gauss eğriliği K ve ortalama eğriliği H olsun. Bu durumda $K \geq 0$ ve $K = H^2$ dir.

4.1. Örnekler

4.1.1. Örnek

3-boyutlu (M, g_f^ε) Walker manifoldunda $\varphi(x, y) = (0, 0, x) + y(x, 0, 0)$, $x \neq 0$ parametrizasyonu ile verilen regle yüzeyi incelenecektir.

$$\varphi_x = (y, 0, 1), \quad \varphi_y = (x, 0, 0)$$

dir.

i) α dayanak eğrisi spacelike ise

$g_f^\varepsilon(\alpha', \alpha') = f > 0$ dir. Regle yüzeyinin 1. temel formunun katsayıları

$$E = g_f^\varepsilon(\varphi_x, \varphi_x) = 2y + f, \quad F = g_f^\varepsilon(\varphi_x, \varphi_y) = x, \quad G = g_f^\varepsilon(\varphi_y, \varphi_y) = 0$$

dir.

$$\det \begin{pmatrix} 2y + f & x \\ x & 0 \end{pmatrix} = -x^2 < 0$$

olduğundan \bar{M} regle yüzeyi timelikedir ve $\varepsilon = \mp 1$ dir. φ_x ve φ_y nin vektörel çarpımı

$$\varphi_x \times \varphi_y = \left(\begin{vmatrix} y & x \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - f \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right) e_1 - \varepsilon \begin{vmatrix} y & x \\ 1 & 0 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} e_3 = (0, \varepsilon x, 0)$$

olur, buradan

$$\| \varphi_x \times \varphi_y \| = \sqrt{|(\varepsilon x)^2|}$$

dir. Regle yüzeyin normal vektör alanı

$$N = \left(0, \frac{\varepsilon x}{\sqrt{|(\varepsilon x)^2|}}, 0 \right) = \left(0, \frac{x}{|x|}, 0 \right)$$

olur. Parametrizasyonun 2. mertebeden türevleri

$$\varphi_{xx} = \left(\frac{f_z}{2}, \frac{\varepsilon}{2} f_y, 0 \right), \quad \varphi_{xy} = (0, 0, 0), \quad \varphi_{yy} = (x, 0, 0)$$

dir. Buradan 2. temel formun katsayıları

$$L = g_f^\varepsilon(\varphi_{xx}, N) = \frac{-x f_y}{2|x|}, \quad M = g_f^\varepsilon(\varphi_{xy}, N) = 0, \quad N = g_f^\varepsilon(\varphi_{yy}, N) = 0$$

olur. O halde yüzeyin şekil operatörüne karşılık gelen matris

$$S = \frac{1}{-x^2} \begin{bmatrix} 0 & -x \\ -x & 2y+f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-xf_y}{2|x|} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{-f_y}{2|x|} & 0 \end{bmatrix}$$

dır. Buradan timelike regle yüzeyinin Gauss ve ortalama eğriliği

$$K = \det S = 0, \quad H = izS = 0,$$

bulunur. Parametrizasyonun 3. mertebeden türevleri

$$\varphi_{xxy} = (0, 0, 0), \quad \varphi_{xyx} = (0, 0, 0)$$

olup timelike regle yüzeyinin eğriliği ve kesitsel eğriliği

$$R^{\bar{M}}(X, Y)X = (0, 0, 0), \quad g_f^{\varepsilon}(R^{\bar{M}}(X, Y)X, Y) = 0, \quad K^{\bar{M}}(X, Y) = 0$$

elde edilir. M nin kesitsel eğriliği

$$K(X, Y) = 0$$

bulunur.

ii) α eğrisi timelike eğri ise

$g_f^{\varepsilon}(\alpha', \alpha') = f < 0$ olup bir yüzey belirtmez.

iii) α eğrisi null eğri ise

$g_f^{\varepsilon}(\alpha', \alpha') = f = 0$ olmalıdır. Fakat $f \neq 0$ olacak şekilde çalışmaktayız. Bu durum geçerli olmaz.

4.1.2. Örnek

3-boyutlu (M, g_f^ε) strict Walker manifoldda $\varphi(x, y) = (x, 0, 0) + y \cdot (0, 1, x)$, $(x \neq 0)$ parametrisasyonu ile verilen regle yüzeyi incelenecektir. Yüzeyin parametrisasyonu

$$\varphi(x, y) = (x, y, xy)$$

olup

$$\varphi(x, y) = (x, 0, 0) + y \cdot (0, 1, x)$$

dır. Dayanak eğrisinin teğet vektör alanı $\alpha' = (1, 0, 0)$ olup $g(\alpha', \alpha') = 0$ dır, yani dayanak eğrisi nulldur.

$$g_f^\varepsilon(A(x), A(x)) = \varepsilon + fx^2 = 0 \text{ olduğundan}$$

$$f = \frac{-\varepsilon}{x^2} \tag{4.8}$$

elde edilir. Parametrisasyonun 1. mertebeden türevleri

$$\varphi_x = (1, 0, y), \quad \varphi_y = (0, 1, x)$$

olup yüzeyin 1.temel formun katsayıları

$$E = g_f^\varepsilon(\varphi_x, \varphi_x) = 2y + fy^2, \quad F = g_f^\varepsilon(\varphi_x, \varphi_y) = x + fxy, \quad G = g_f^\varepsilon(\varphi_y, \varphi_y) = \varepsilon + fx^2 = 0$$

bulunur.

$EG - F^2 = -(x + fxy)^2 < 0$ olduğundan \bar{M} regle yüzeyi timelikedır $\varepsilon = 1$ dir. Bu durumda normali spacelike olur.

Teorem (3.3.4) den $x + fxy \neq 0$ olmalıdır. O halde

$$f \neq -\frac{1}{y} \tag{4.9}$$

dir. Bu durumda eşitlik (4.8) ve (4.9) den $y \neq \frac{x^2}{\varepsilon}$ elde edilir. φ_x ve φ_y nin vektörel çarpımı

$$\varphi_x \times \varphi_y = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & -f \\ 0 & 1 & y \end{array} \right) e_1 - \varepsilon \begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ y & x & y \end{array} e_2 + \begin{array}{c|c|c} 0 & 1 & 1 \\ y & x & x \end{array} e_3 = (1 + fy, -\varepsilon x, -y).$$

olup buradan

$$g_f^\varepsilon(\varphi_x \times \varphi_y, \varphi_x \times \varphi_y) = -2y(1 + fy) + \varepsilon x^2 + fy^2 = \varepsilon x^2 - fy^2 - 2y$$

ve φ_x ve φ_y nin normu

$$\|g_f^\varepsilon(\varphi_x \times \varphi_y, \varphi_x \times \varphi_y)\| = \sqrt{\varepsilon x^2 - fy^2 - 2y}$$

olur. $\sqrt{\varepsilon x^2 - fy^2 - 2y} = d$

ile gösterilsin. Normal vektör alanı

$$N = \left(\frac{1 + fy}{d}, \frac{-\varepsilon x}{d}, \frac{-y}{d} \right)$$

Bu durumda eşitlik (4.7) ve (4.8) den $\varepsilon = 1$, $y \neq x^2$ dir. Parametrizasyonun 2. mertebeden türevleri

$$\varphi_{xx} = (0, 0, 0), \quad \varphi_{xy} = (0, 0, 1), \quad \varphi_{yy} = (0, 0, 0)$$

dir. 2. temel formun katsayıları

$$L = g_f^\varepsilon(\varphi_{xx}, N) = 0, \quad M = g_f^\varepsilon(\varphi_{xy}, N) = \frac{1}{d}, \quad N = g_f^\varepsilon(\varphi_{yy}, N) = 0$$

bulunur. Yüzeyin şekil operatörüne karşılık gelen matris

$$S = \frac{1}{-x^2(1 + fy)^2} \begin{bmatrix} 0 & -(x + fxy) \\ -(x + fxy) & 2y + fy^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{d} \\ \frac{1}{d} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{d(x+axy)} & 0 \\ \frac{-2y+ay^2}{d(x+axy)^2} & \frac{1}{d(x+axy)} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Yüzeyin Gauss eğriliği,

$$K = \det S = \frac{1}{(d(x+axy))^2}$$

ve ortalama eğriliği

$$H = \text{iz}S = \frac{1}{d(x+axy)}$$

olarak bulunur. Parametrizasyonun 3. mertebeden türevleri

$$\varphi_{xyx} = (0, 0, 0), \quad \varphi_{xyx} = (0, 0, 0)$$

olup yüzeyin eğriliği

$$R^{\bar{M}}(X, Y)X = (0, 0, 0)$$

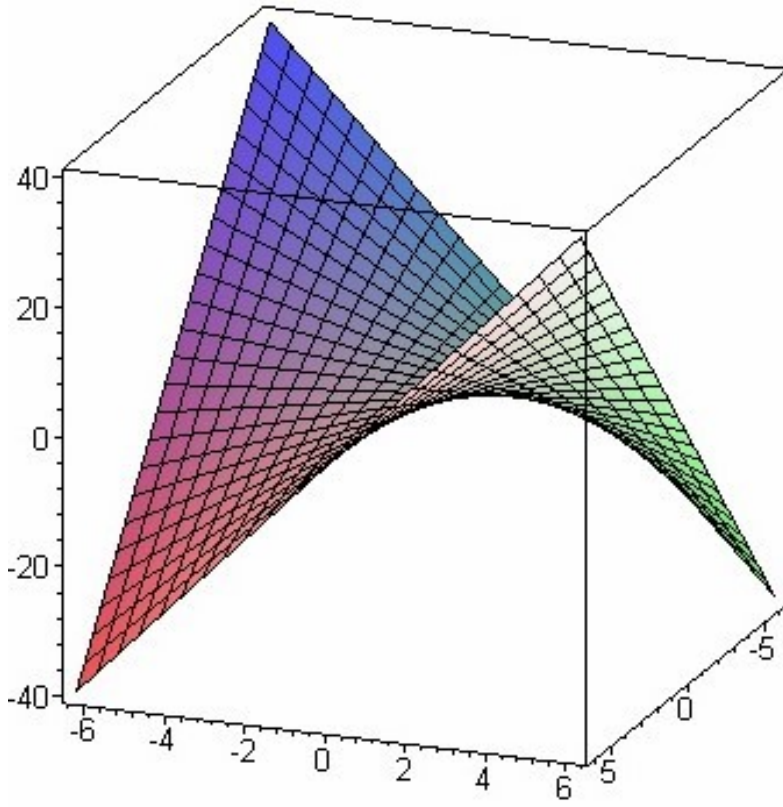
dır. Ayrıca \bar{M} nin kesitsel eğriliği

$$K^{\bar{M}}(X, Y) = 0$$

ve M yüzeyinin eğriliği

$$K(X, Y) = \frac{1}{d^2(x+axy)^2}$$

olur.



Şekil 4.1. $\varphi(x,y) = (x,y,xy)$ parametrizasyonu ile gösterilen yüzey



5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde 3-boyutlu Walker ve strict Walker manifoldlarla ilgili temel kavramlar verilerek 3-boyutlu strict Walker manifoldlarda timelike regle yüzeyler üzerinde çalışıldı. 3-boyutlu strict Walker manifolddaki bir timelike regle yüzeyin incelenmesinde regle yüzeyin doğrultmanının null olması koşulu ile bu null vektörün özel olarak birinci bileşeninin değişmesi ile yüzeydeki eğriliklerin hesaplanmasında kullanılan eşitliklerin ne şekilde değiştiği analiz edildi. Bu inceleme yapılırken regle yüzeyin dayanak eğrisinin spacelike, timelike ve null olma durumları analiz edildi. Ayrıca 3-boyutlu strict Walker manifolddaki timelike regle yüzeylerde yüzeylerin şekil operatörü, Gauss eğriliği ve ortalama eğrilik, Riemann eğriliği ve kesit eğriliklerinin hesaplaması ile Walker geometrisinin irdelenmesi kolaylaşacaktır. Bundan sonraki çalışmalarda 3-boyutlu strict Walker manifoldda lightlike regle yüzeyler incelenerek araştırılabilir.



KAYNAKLAR

1. O'Neill, B. (1983). *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*. New York: Academic Press, 254.
2. Beem, J. K. and Ehrlich, P. E. (1981). *Global Lorentzian Geometry*. New York: Inc., 658.
3. Brozos-Vazquez, M., Garcia-Rio, E., Gilkey, P., Nikčević, S., Vazquez-Lorenzo, R. (2009). *The Geometry of Walker Manifolds*. Washington: Morgan and Claypool Publishers, 177.
4. Niang, A., Ndiaye, A., Diallo, A. S.(2021). A Classification of Strict Walker 3-Manifold. *Konuralp Journal of Mathematics*, 9(1), 148-153.
5. Bejan, C. L., Druta-Romaniuc, S. L., (2014). Walker manifolds and Killing magnetic Curves. *Differential Geometry and its Applications*, 35, 106–116.
6. Turgut, A. (1995). *3-Boyutlu Minkowski Uzayında Spacelike ve Timelike Regle Yüzeyler*. Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 45768.
7. Turgut, A., Hacısalıhoğlu, H. H.(1997). Timelike Ruled Surfaces in the Minkowski 3-Space. *The Far East Journal of Mathematical Sciences*, 5(1), 83-90.
8. Turgut, A., Hacısalıhoğlu, H. H.(1998). Timelike Ruled Surfaces in the Minkowski 3-Space II. *Turkish Journal of Mathematics*, 22(1), 33-46.





Gazili olmak ayrıcalıktır