T. C.
SİVAS CUMHURİYET ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MV-CEBİRLERDE TÜREVLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SAMET KOÇ
(20209237003)

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. HASRET DURNA

SİVAS
NİSAN 2023

Samet Koç'un hazırladığı ve **"MV-CEBİRLERDE TÜREVLER"** adlı bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından **MATEMATİK ANABİLİM DALI**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı :	**Prof. Dr. Hasret DURNA** Sivas Cumhuriyet Üniversitesi	**……………...**
Jüri Üyesi :	**Doç Dr. Serkan ATMACA** Sivas Cumhuriyet Üniversitesi	**……………...**
Jüri Üyesi :	**Dr. Öğr. Üyesi Damla YILMAZ** Erzurum Teknik Üniversitesi	**……………...**

Bu tez, Sivas Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak onaylanmıştır.

Prof. Dr. Nevcihan GÜRSOY

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

Bu tez, Cumhuriyet Üniversitesi Senatosu'nun 20.08.2014 tarihli ve 7 sayılı kararı ile kabul edilen Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Tez Yazım Kılavuzu (Yönerge)'nda belirtilen kurallara uygun olarak hazırlanmıştır.

ETİK

Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Tez Yazım Kılavuzu (Yönerge)'nda belirtilen kurallara uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- ✓ Bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- ✓ Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- ✓ Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere, bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu ve atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- ✓ Bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- ✓ Tezin herhangi bir bölümünü, Cumhuriyet Üniversitesi veya bir başka üniversitede, bir başka tez çalışması olarak sunmadığımı; beyan ederim.

17.04.2023

Samet KOÇ

ÖZET

MV-CEBİRLERDE TÜREVLER

Samet KOÇ

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Hasret DURNA

2023, 31+ix sayfa

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır:

Birinci bölümde, tezde kullanılan temel tanım ve teoremler örnekleri ile birlikte verilmiştir.

İkinci bölümde, 2010 da N. O. Alshehri tarafından çalışılan MV-cebirlerde türev hakkındaki makale incelenmiştir.

Üçüncü bölümde, 2013 te H. Yazarlı tarafından çalışılan MV-cebirlerde simetrik bi-türev hakkındaki makale incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, 2013 te H. Yazarlı tarafından çalışılan MV-cebirlerde genelleştirilmiş türevler hakkındaki makale incelenmiştir.

Beşinci bölümde, genelleştirilmiş simetrik bi-türevler tanımlanmış ve bazı özellikleri incelenmiştir.

Anahtar kelimeler: MV-Cebir, simetrik bi-türev, genelleştirilmiş simetrik bi-türev.

ABSTRACT

DERIVATIONS ON MV-ALGEBRAS

Samet KOÇ

Faculty of Science, Department of Mathematics
Supervisor: Prof. Dr. Hasret DURNA
2023, 36+ix pages

This thesis consist of five parts:

In the first part, we recall basic concepts and theorems with examples of MV-algebra.

In the second part, we investigate paper about derivation on MV-algebra, which was studied by N. O. Alshehri,in 2010.

In the third part, we investigate paper about symmetric bi-derivation on MV-algebra, which was studied by H. Yazarli, in 2013.

In the fourth part, we investigate paper about generalized derivation on MV-algebra, which was studied by H. Yazarli, in 2013.

In the fifth part, we define generalized symmetric bi-derivation on MV-algebra and investigate some properties.

Key Words: MV-algebra, symmetric bi-derivation, generalized symmetric bi-derivation.

KATKI BELİRTME VE TEŞEKKÜR

Tez çalışmam boyunca, sabır ve emek harcayan, gerek bilimsel gerekse manevi yönde desteğini benden esirgemeyen değerli hocam, Sayın Prof. Dr. Hasret DURNA' ya en derin teşekkür ve saygılarımı sunarım. Hayatım her döneminde yanımda olan ve bana desteklerini esirgemeyen babam Aydın KOÇ ve annem Hülya KOÇ'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

GİRİŞ

C. Chang 1958 yılında $\aleph_0$-değerli önermesel hesaplamaya karşılık gelecek biçimde cebirsel sistemler teorisini geliştirmek istedi ([3]). Bu cebirsel sistemlere çok değerli mantık (many valued logic) olmalarından dolayı MV-cebirler ismini verdi. Bilindiği gibi klasik iki değerli mantık Boolean cebirlerdir. Her Boolean cebiri bir MV-cebirdir. Ancak tersi doğru değildir.Boolean cebirleri için birçok sonuç MV-cebirlere taşınabilir fakat ispatlar biraz daha karışıktır. Bu çalışmanın arkasındaki motivasyon MV-cebirlerle ilgili bazı cebirsel sonuçları kullanarak $\aleph_0$-değerli mantığın tamlık teoremlerinin ispatını bulmaktır. Özellikle iki değerli mantığın tamlığı Boolean asal ideal teoreminin sonucudur. MV-cebirler Boolean cebirlerinin bir genelleştirmesi olduğundan çok fazla uygulamaya sahiptir ve birçok araştırmacı tarafından MV-cebirlerin farklı özellikleri incelenmiştir. ([2], [4], [5], [7]).

Halkada türev kavramı 1957 de Posner tarafından verilmiştir ([6]). Bu çalışmadan sonra birçok araştırmacı genelleştirilmiş türev, simetrik bi-türev, permuting tri-türev, ters türev, çarpımsal türev gibi türev çeşitlerini kullanarak halkanın özelliklerini incelemiştir. Örneğin türev kullanılarak halkanın değişmeliliği araştırılmıştır.

1975 te Szasz latislerde türev tanımladı ([8]). Xin ve arkadaşları latislerde türevin özelliklerini incelediler ve latislerin bazı karakterizasyonlarını verdiler. Örneğin, türev kullanarak modüler ve dağılmalı latisler arasında bağıntı kurdular ve latislerin elemanlarını sıraladılar. Daha sonra, pekçok yazar halkadaki gibi türev çeşitleri tanımladı. Benzer şekilde, birçok türev çeşidi farklı cebirsel yapılara taşındı ve türev yardımıyla bu cebirsel yapıların özellikleri incelendi.

2010 da N. O. Alshehri, türev kavramını MV-cebirlerde tanımlamış ([1]), 2013 te H. Yazarlı MV-cebirlerde simetrik bi-türevi tanımlamıştır ([10]). Biz bu çalışmada MV-cebirlerde genelleştirilmiş simetrik bi-türevi tanımlayıp bazı özelliklerini araştıracağız.

1.BÖLÜM

TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tezde ihtiyacımız olan temel tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 1.1. $\emptyset \neq B$ kümesi üzerinde $\vee$ ve $\wedge$ ikili işlemleri tanımlansın. Her $x, y, z \in B$ için aşağıdaki koşullar sağlanırsa $(B, \vee, \wedge)$ sistemine bir Boole cebiri denir.

(1) $x \wedge x = x$, $x \vee x = x$

(2) $x \wedge y = y \wedge x$, $x \vee y = y \vee x$

(3) $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$, $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$

(4) $(x \wedge y) \vee z = x$, $(x \vee y) \wedge x = x$

(5) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$, $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

(6) $0 \in B$, $1 \in B$ vardır ve $x \wedge 0 = 0$, $x \vee 0 = x$, $x \wedge 1 = x$, $x \vee 1 = 1$.

(7) $x \in B$ için $x \wedge x^{'} = 0$ ve $x \vee x^{'} = 1$ olacak biçimde en az bir $x^{'} \in B$ vardır.

Örnek 1.2. $X \neq \emptyset$ bir küme ve $P(X)$, X in kuvvet kümesi olsun. $0 = \emptyset$, $1 = X$ ve $A \in P(X)$ için $A^{'} = X \setminus A$ alınırsa, "$\cup$" kümelerdeki birleşim ve "$\cap$" kümelerdeki kesişim işlemi olmak üzere $(P(X), \cup, \cap)$ bir Boole cebiridir.

Boole cebirleri ile latisler arasında yakın bir ilişki vardır.

Tanım 1.3. $L \neq \emptyset$ bir küme olsun. L üzerindeki "$\leq$" bağıntısı bir kısmi sıralama bağıntısı olsun. Eğer her $x, y \in L$ için $\inf\{x, y\}$ ve $\sup\{x, y\}$ varsa $(L, \leq)$ ikilisine bir latis denir.

Burada $\inf\{x, y\} = x \wedge y$ ve $\sup\{x, y\} = x \vee y$ gösterimleri de kullanılabilir.

Örnek 1.4. $(\mathbb{R}, \leq)$ kısmi sıralı kümesi x,$y \in \mathbb{R}$ için $\sup\{x, y\} = \max\{x, y\}$ ve $\inf\{x, y\} = \min\{x, y\}$ olduğundan bir latistir.

Tanım 1.5. $(L, \leq, \vee, \wedge)$ latisine dağılmalı latis denir$\Leftrightarrow$ $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee$

$(x \wedge z)$, $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ dır.

Örnek 1.6. $\emptyset \neq X$ bir küme olmak üzere $(P(X), \subseteq, \cup, \cap)$ dağılmalı latistir.

Tanım 1.7. $(L, \leq)$ latisinde her $x \in L$ için $0 \leq x \leq 1$ olacak biçimde $1, 0 \in L$ varsa L ye sınırlı latis denir.

Örnek 1.8. $\emptyset \neq X$ bir küme olmak üzere $(P(X), \subseteq, \cup, \cap)$ sınırlı latistir.

Tanım 1.9. $G \neq \emptyset$ bir küme ve $\cdot : G \times G \to G$ ye bir ikilli işlem olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanırsa $(G, \cdot)$ ya monoid denir.

(i) Her $a, b, c \in G$ için $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

(ii) Her $a \in G$ için $a \cdot e = e \cdot a$ olacak biçimde $e \in G$ vardır.

$(G, \cdot)$ bir monoid olsun. Her $a, b \in G$ için $a \cdot b = b \cdot a$ ise $(G, \cdot)$ değişmeli monoiddir, denir.

Örnek 1.10. $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi üzerinde tanımlı bilinen toplama işlemi ile değişmeli monoddir.

Tanım 1.11. $\emptyset \neq A$ kümesi üzerinde " $+$ " ikili işlemi, "$'$" tekli işlemi tanımlasın ve 0, A da sabit eleman olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanırsa $(A, +, ', 0)$ cebirsel yapısına MV-cebir denir: herhangi $a, b \in A$ için,

$(MV1)$ $(A, +, 0)$ değişmeli monoid,

$(MV2)$ $\left(a'\right)' = a$,

$(MV3)$ $0' + a = 0'$,

$(MV4)$ $\left(a' + b\right)' + b = \left(b' + a\right)' + a$.

Örnek 1.12. $S_7 = \left\{0, \frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}, 1\right\}$ kümesi üzerinde " $+$ " ve "$'$" işlemleri aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$\frac{p}{7} + \frac{q}{7} := \min\left\{\frac{p+q}{7}, 1\right\} \text{ ve } \left(\frac{p}{7}\right)' := \frac{7-p}{7}.$$

Bu durumda $(S_7, +, ', 0)$ bir MV-cebirdir.

Örnek 1.13. $A = [0,1] \subset \mathbb{R}$ ve her $x, y \in [0,1]$ için $x \oplus y = \min\{1, x+y\}$ ve $x' = 1 - x$ olsun. $([0,1], \oplus, ', 0)$ yapısı bir MV-cebiridir.

$1 = 0^{'}$ ile gösterilir ve $+, '$ işlemleri yardımıyla

$$a \cdot b = \left(a^{'} + b^{'}\right)^{'}$$
$$a \vee b = a + \left(b \cdot a^{'}\right)$$
$$a \wedge b = a \cdot \left(b + a^{'}\right)$$

biçiminde tanımlanırsa $(A, \cdot, 1)$ değişmeli monoid ve $(A, \vee, \wedge, 0, 1)$ sınırlı dağılmalı latistir.

A MV-cebir ve $\emptyset \neq B \subseteq A$ olsun. B, A nın altcebiridir ancak ve ancak B, A deki işlemler altında kapalıdır.

Herhangi bir A MV-cebirinde, "$\leq$ " kısmi sıralama bağıntısı

$$a \leq b \text{ dir ancak ve ancak } a \wedge b = a,\ a, b \in A$$

biçiminde tanımlanır. $\leq$, A üzerinde tam sıralama bağıntısı ise A ya lineer sıralıdır, denir.

A MV-cebir ve $B(A) = \{a \in A : a + a = a\} = \{a \in A : a \cdot a = a\}$ ile tanımlansın. Bu durumda $(B(A), +, ', 0)$ A nın en geniş altcebiridir ve bir Boole cebirdir.

Bir A MV-cebirinde aşağıdaki özellikler sağlanır: her $a, b, c \in A$ için

(1) $a + 1 = 1$,

(2) $a + a^{'} = 1$,

(3) $a \cdot a^{'} = 0$,

(4) $a + b = 0$ ise $a = b = 0$,

(5) $a \cdot b = 1$ ise $a = b = 1$,

(6) $a \leq b$ ise $a \vee c \leq b \vee c$ ve $a \wedge c \leq b \wedge c$,

(7) $a \leq b$ ise $a + c \leq b + c$ ve $a \cdot c \leq b \cdot c$,

(8) $a \leq b$ ancak ve ancak $b^{'} \leq a^{'}$,

(9) $a + b = b$ ancak ve ancak $a \cdot b = a$.

Teorem 1.14. [3] Bir A MV-cebirinde aşağıdaki özellikler denktir: $a, b \in A$ için,

(i) $a \leq b$,

(ii) $b + a^{'} = 1$,

(iii) $a \cdot b^{'} = 0$.

Tanım 1.15. [3] A bir MV-cebir ve $\emptyset \neq X \subseteq A$ olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanırsa X e A nın ideali denir.

(i) $0 \in X$,

(ii) $a, b \in X$ iken $a + b \in X$,

(iii) $a \in X$ ve $b \leq a$ iken $b \in X$.

Önerme 1.16. A lineer sıralı bir MV-cebiri olsun. Bu durumda herhangi a, b, $c \in A$ için $a + b = a + c$ ve $a + c \neq 1$ ise $b = c$ dir.

2. BÖLÜM

MV-CEBİRLERİNİN TÜREVLERİ

Bu bölümde "N. O. Alshehri, (2010), Derivations of MV-algebras, Int. J. Math. Math. Sci., Article ID 312027, 7 pages, doi:10.1155/2010/312027. " çalışmasına yer verilecektir. Bu çalışmada yazar, MV-cebirlerde türev kavramını tanımlayarak bazı özelliklerini incelemiştir. İzoton türev kavramını kullanarak MV-cebirlerde türevi karakterize etmiştir. Ayrıca MV-cebirlerde toplamsal türevi tanımlayıp lineer sıralı bir MV-cebirde toplamsal türevin izoton olduğunu göstermiştir.

Tanım 2.1. A bir MV-cebir ve $f : A \to A$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in A$ için

$$f(x \cdot y) = (fx \cdot y) + (x \cdot fy)$$

koşulu sağlanıyorsa f ye A da türev denir.

Genellikle $f(x)$, fx şeklinde kullanılır.

Örnek 2.2 $A = \{0, a, b, 1\}$ olsun. A kümesi üzerinde aşağıdaki biçimde tanımlanan işlemler ile bir MV-cebirdir.

$+$	0	a	b	1
0	0	a	b	1
a	a	a	1	1
b	b	1	b	1
1	1	1	1	1

$'$	0	a	b	1
	1	b	a	0

ve

$\cdot$	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	a	0	a
b	0	0	b	b
1	0	a	b	1

dir.

$f : A \to A$ dönüşümü

$$fx = \begin{cases} 0, & x = 0, a, 1 \\ a, & x = b \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın.

$$\begin{aligned} f(a \cdot b) &= f((a' + b')') = f\left((b + a)'\right) \\ &= f1' = f0 = 0 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} (fa \cdot b) + (a \cdot fb) &= (0 \cdot b) + (a \cdot a) \\ &= (0' + b')' + (a' + a')' \\ &= (1 + a)' + (b + b)' \\ &= 1' + b' = 0 + a = a \end{aligned}$$

olduğundan f bir türev değildir.

Örnek 2.3. $A = \{0, a, b, c, d, 1\}$ kümesi üzerinde $+$, $'$ işlemleri aşağıdaki tablolarda tanımlansın.

$+$	0	a	b	c	d	1
0	0	a	b	c	d	1
a	a	c	d	c	1	1
b	b	d	b	1	d	1
c	c	c	1	c	1	1
d	d	1	d	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

$'$	0	a	b	c	d	1
	1	d	c	b	a	0

Bu durumda $(A, +, ', 0)$ bir MV-cebirdir. $f : A \to A$ dönüşümü

$$fx = \begin{cases} 0, & x = 0, a, c \\ d, & x = 1, b, d \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. f, A üzerinde bir türevdir. Örneğin;

$$\begin{aligned} f(a.b) &= f\left(\left(a^{'}+b^{'}\right)^{'}\right) = f\left((d+c)'\right) \\ &= f1' = f0 = 0 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} (fa \cdot b) + (a \cdot fb) &= 0 \cdot b + a \cdot d \\ &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

dır.

Önerme 2.4. A bir MV-cebir ve d, A nin bir türevi olsun. Her $x \in A$ için aşağıdakiler geçerlidir.

(i) $f0 = 0$,

(ii) $fx \cdot x' = x \cdot fx' = 0$,

(iii) $fx = fx + (x \cdot f1)$,

(iv) $fx \leq x$,

(v) Eğer X, A nın bir ideali ise $f(X) \subseteq X$ dir.

İspat. (i) Her $x \in A$ için,

$$f0 = f(x \cdot 0) = (fx \cdot 0) + (x \cdot f0) = x \cdot f0$$

olur. Burada $x = 0$ yazılırsa $f0 = 0$ bulunur.

(ii) Her $x \in A$ için,

$$0 = f0 = f(x \cdot x') = (fx \cdot x') + (x \cdot fx')$$

dır. Buradan $fx \cdot x' = 0$ ve $x \cdot fx' = 0$ bulunur.

(iii) Her $x \in A$ için

$$\begin{aligned} fx &= f(x \cdot 1) = (fx \cdot 1) + (x \cdot f1) \\ &= fx + (x \cdot f1) \end{aligned}$$

bulunur.

(iv) Her $x \in A$ için,

$$\begin{aligned} 1 &= 0' = (fx \cdot x')' = \left[((fx)' + (x')')'\right]' \\ &= (fx)' + x \end{aligned}$$

olur. Teorem 1.14 den, her $x \in A$ için $fx \leq x$ olur.

(v) $y \in f(X)$ ve $x \in X$ için $y = f(x)$ olsun. $y = f(x) \leq x \in X$ olduğundan $y \in X$ ve bu yüzden $f(X) \subseteq X$ dir.

Önerme 2.5. A MV-cebir ve f, A da türev olsun. $x, y \in A$ için $x \leq y$ ise aşağıdakiler sağlanır:

(i) $f(x \cdot y') = 0$

(ii) $fy' \leq x'$

(iii) $fx \cdot fy' = 0$.

İspat. (i) $x, y \in A$ için $x \leq y$ olsun. Teorem 1.14. den $x \cdot y' = 0$ dir. Buradan $f(x \cdot y') = f0 = 0$ bulunur.

(ii) $x, y \in A$ için $x \leq y$ olsun. $x \cdot fy' \leq y \cdot fy' \leq y \cdot y' = 0$ dır. Buradan $x \cdot fy' = 0$ olur. Böylece $fy' \leq x'$ bulunur.

(iii) $x, y \in A$ için $x \leq y$ olsun. $fx \leq x$ olduğundan $fx \leq y$ dir. Dolayısıyla $fx \cdot fy' \leq y \cdot fy' \leq y \cdot y' = 0$ olur. Böylece $fx \cdot fy' = 0$ olur.

Önerme 2.6. A bir MV-cebiri ve f, A da türev olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır:

(i) $fx \cdot fx' = 0$

(ii) $fx' = (fx)'$ ancak ve ancak f, A da birim dönüşümdür.

İspat. (i) $x \leq x'$ olduğundan Önerme 2.5. (iii) den $fx \cdot fx' = 0$ bulunur.

(ii) Her $x \in A$ için $x \leq x'$ olduğundan, $x \cdot fx' = x \cdot (fx)' = 0$ olur. Buradan $x \leq fx$ dir ve $fx \leq x$ olduğundan $x = fx$ bulunur. Dolayısıyla f, A üzerinde birim dönüşümdür.

Eğer f, A da birim dönüşüm ise , her $x \in A$ için $fx' = (fx)'$ olur.

Tanım 2.7. A bir MV-cebir ve f, A da bir türev olsun. Eğer $x, y \in A$ için $x \leq y$ iken $fx \leq fy$ sağlanıyorsa f ye izoton türev denir.

Örnek 2.8. $A = \{0, a, b, c, d, 1\}$ kümesi

$+$	0	a	b	c	d	1
0	0	a	b	c	d	1
a	a	c	d	c	1	1
b	b	d	b	1	d	1
c	c	c	1	c	1	1
d	d	1	d	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

$'$	0	a	b	c	d	1
	1	d	c	b	a	0

işlemleri ile MV-cebirdir ve

$\cdot$	0	a	b	c	d	1
0	0	0	0	0	0	0
a	0	0	0	a	0	a
b	0	0	b	0	b	b
c	0	a	0	c	a	c
d	0	0	b	a	b	d
1	0	a	b	c	d	1

olur. $f : A \to A$,

$$fx = \begin{cases} 0, & x = 0, a, c \\ c, & x = 1, b, d \end{cases}$$

dönüşümünün A üzerinde bir türev olduğunu biliyoruz. f nin A üzerinde bir izoton türev olduğu kolaylıkla kontrol edilebilir. Örneğin; $a \leq d$ dır ve $fa = 0 \leq c = fd$ dir.

Önerme 2.9. A bir MV-cebir ve f, A da bir türev olsun. Her $x \in A$ için $fx' = fx$ ise aşağıdaki özellikler sağlanır.

(i) $f1 = 0$

(ii) $fx \cdot fx = 0$

(iii) Eğer f, A da bir izoton türev ise f sıfırdır.

İspat. (i) Her $x \in A$ için $fx' = fx$ olsun. $x = 0$ yazılırsa $f0' = f0$ ve $f1 = 0$ elde edilir.

(ii) Her $x \in A$ için $fx' = fx$ olsun. $fx \cdot fx = fx \cdot fx' = 0$ bulunur.

(iii) f bir izoton türev olduğundan her $x \in A$ için $fx \leq f1$ dir. (i) den $fx \leq 0$ olacağından f sıfırdır.

Tanım 2.10. A bir MV-cebir ve f, A da bir türev olsun. Her $x, y \in A$ için $f(x + y) = fx + fy$ oluyorsa f ye toplamsal türev denir.

Örnek 2.11. $A = \{0, a, b, c, d, 1\}$ kümesi

$+$	0	a	b	c	d	1
0	0	a	b	c	d	1
a	a	c	d	c	1	1
b	b	d	b	1	d	1
c	c	c	1	c	1	1
d	d	1	d	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

$'$	0	a	b	c	d	1
	1	d	c	b	a	0

işlemleri ile MV-cebir ve $f : A \to A$,

$$fx = \begin{cases} 0, & x = 0, a, c \\ c, & x = 1, b, d \end{cases}$$

dönüşümünün A üzerinde bir türev olduğunu biliyoruz. f nin A da bir toplamsal türev olduğu kolaylıkla kontrol edilebilir. Örneğin;

$$f\,(b + c) = f1 = c$$

ve

$$fb + fc = c + 0 = c$$

dir.

Teorem 2.12. *A bir MV-cebir ve f, A da sıfırdan farklı bir toplamsal türev olsun. Bu durumda $f(B(A)) \subseteq B(A)$ olur.*

İspat. $y \in f(B(A))$ ve $x \in B(A)$ için $y = fx$ olsun.

$$y + y = fx + fx = f(x + x) = fx = y$$

olduğundan $y \in B(A)$ dir.

Teorem 2.13. *A lineer sıralı MV-cebir ve f, A da toplamsal türev olsun. Bu durumda $f = 0$ veya $f1 = 1$ olur.*

İspat. A lineer sıralı MV-cebir ve f, A da toplamsal türev olsun. Bu durumda,

$$f1 = f(x + x') = fx + fx'$$

dir. Ayrıca her $x \in A$ için

$f1 \neq 1$ ise

$$f1 = f(x + 1) = fx + f1$$

olduğundan Önerme 1.16 dan $fx' = f1$ dir. $x = 1$ yazılırsa $f1 = 0$ elde edilir. Bu durumda her $x \in A$ için

$$0 = f1 = fx + f1 = fx$$

dır. Dolayısıyla f sıfırdır.

Önerme 2.14. *A lineer sıralı MV-cebir ve f_1, f_2 A da toplamsal türev olsun. Her $x \in A$ için $f_1f_2(x) = f_1(f_2x)$ biçiminde tanımlansın. $f_1f_2 = 0$ ise $f_1 = 0$ veya $f_2 = 0$ olur.*

İspat. $f_1f_2 = 0$ ve $f_2 \neq 0$ olduğunu varsayalım. Buradan

$$0 = f_1f_2x = f_1(f_2x + (x \cdot f_21)) = f_1f_2x + f_1x = f_1x$$

olur. Böylece $f_1 = 0$ dır. Benzer şekilde $f_2 = 0$ olduğu da ispatlanabilir.

Önerme 2.15. A lineer sıralı MV-cebir ve f, A da sıfırdan farklı toplamsal türev olsun. Her $x \in A$ için

$$f(x \cdot x) = x + x$$

dır.

İspat. Önerme 2.4. (iii) ve Teorem 2.13. den $fx = fx + x$ elde edilir. (9) uygulandığında $fx \cdot x = x$ bulunur. Böylece;

$$\begin{aligned} f(x \cdot x) &= (fx \cdot x) + (fx \cdot x) \\ &= x + x \end{aligned}$$

dir.

Teorem 2.16. A lineer sıralı MV-cebir olsun. A daki sıfırdan farklı her toplamsal türev bir izoton türevdir.

İspat. f, A da türev ve $x, y \in A$ olsun. $x \leq y$ ise $x' + y = 1$ dir. Buradan

$$1 = f1 = f(x' + y) = fx' + fy$$

dir. Böylece $(fy)' \leq fx'$ ve **(8)** den $(fx')' \leq fy$ dir. $fx' \leq x'$ olduğundan yine **(8)** den $x \leq (fx')'$ bulunur. $fx \leq x$ olduğundan $fx \leq fy$ bulunur.

Teorem 2.17. A lineer sıralı bir MV-cebir ve f, A da sıfırdan farklı toplamsal türev olsun. Bu durumda $f^{-1}(0) = \{x \in A : fx = 0\}$ A nın bir idealidir.

İspat. Önerme 2.4. (i) den $0 \in f^{-1}(0)$ elde edilir. $x, y \in f^{-1}(0)$ olsun. Yani $fx = 0$ ve $fy = 0$ dır. f toplamsal olduğundan $f(x + y) = fx + fy = 0$ dır. Böylece $x + y \in f^{-1}(0)$ dır.

Şimdi $x \in f^{-1}(0)$ ve $y \leq x$ olsun. Teorem 2.16. kullanılırsa $fy \leq fx$ olur. Buradan $fy = 0$ olduğundan $y \in f^{-1}(0)$ dır..

3.BÖLÜM

MV-CEBİRLERDE SİMETRİK Bİ-TÜREVLER

Bu bölümde, "H. Yazarli, (2013), A note on derivations in MV-algebras, Miskolc Mathematical Notes, Vol. 14, No 1, pp. 345-354." çalışmasının simetrik bi-türevler kısmı verilecektir. Bu çalışmada yazar, MV-cebirlerde simetrik bi-türevi tanımlamış ve ikinci bölümde verilen çalışmada geçen problemleri simetrik bi-türevler ve onların izi için incelemiştir.

A bir MV-cebir ve $D : M \times M \to M$ dönüşüm olsun. Her $x, y \in A$ için $D(x, y) = D(y, x)$ ise D ye simetrik bi-dönüşüm denir.

Tanım 3.1. A bir MV-cebir ve $D : M \times M \to M$ simetrik dönüşüm olsun. Her $x, y, z \in A$ için aşağıdaki koşul sağlanırsa D ye A üzerinde simetrik bi-türev denir.

$$D(x \cdot y, z) = (D(x, z) \cdot y) + (x \cdot D(y, z))$$

D, A üzerinde simetrik bi-türev ise her $x, y, z \in A$ için

$$D(x, y \cdot z) = (D(x, y) \cdot z) + (y \cdot D(x, z))$$

koşulu sağlanır.

$d : M \to M$, $d(x) = D(x, x)$ ile tanımlı dönüşüme D nin izi denir.

Örnek 3.2. $A = \{0, a, b, 1\}$ kümesinin aşağıda verilen işlemlerle bir MV-cebiri olduğunu biliyoruz.

$+$	0	a	b	1
0	0	a	b	1
a	a	a	1	1
b	b	1	b	1
1	1	1	1	1

$'$	0	a	b	1
	1	b	a	0

Bu durumda $(A, +, ', 0)$ bir MV-cebirdir. $D : A \times A \to A$,

$$D(x,y) = \begin{cases} b, & (x,y) = (b,b),(b,1),(1,b) \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

dönüşümü tanımlansın. Bu durumda D, A da simetrik bi-türevdir.

Önerme 3.3. A bir MV-cebir, D A da simetrik bi-türev ve d, D nin izi olsun. Bu durumda her $x \in A$ için aşağıdaki özellikler sağlanır.

(i) $d0 = 0$

(ii) $dx \cdot x' = x \cdot dx' = 0$

(iii) $dx = dx + (x \cdot D(x,1))$

(iv) $dx \leq x$

(v) X bir MV-cebirin ideali ise, $d(X) \subseteq X$ dir.

İspat. (i) Her $x \in A$ için,

$$\begin{aligned} D(x,0) &= D(x, 0 \cdot 0) = (D(x,0) \cdot 0) + (0 \cdot D(x,0)) \\ &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

olur.

d, D nin izi olduğundan

$$\begin{aligned} d0 &= D(0,0) = D(0 \cdot 0, 0) = (D(0,0) \cdot 0) + (0 \cdot D(0,0)) \\ &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

dır.

(ii) Her $x \in A$ için,

$$\begin{aligned} 0 &= D(x,0) = D(x, x \cdot x') \\ &= (D(x,x) \cdot x') + (x \cdot D(x,x')) \end{aligned}$$

ve buradan, $dx \cdot x' = 0$ ve $x \cdot D(x,x') = 0$. Sonuç olarak her $x \in A$ için $x \cdot dx^{'} = 0$ bulunur.

(iii) Her $x \in A$ için,

$$\begin{aligned} dx &= D(x,x) = D(x, x \cdot 1) = (D(x,x) \cdot 1) + (x \cdot D(x,1)) \\ &= dx + (x \cdot D(x,1)) \end{aligned}$$

olur.

(iv) Her $x \in A$ için,

$$\begin{aligned} 1 &= 0' = (dx \cdot x^{'})' = \left[((dx)^{'} + (x^{'})^{'})^{'}\right] \\ &= (dx)^{'} + x \end{aligned}$$

dır. Böylece her $x \in A$ için Teorem 1.14. (ii) den $dx \leq x$ dır.

(v) $y \in d(X)$ olsun. Bu durumda $y = d(x)$ olacak biçimde $x \in X$ vardır. $y = d(x) \leq x \in X$ olduğundan $y \in X$ dir ve bu yüzden $d(X) \subseteq X$ dır.

Sonuç 3.4. Her $x \in A$ için $x \cdot D(x, x') = 0$ olduğundan $D(x, x') \leq x'$ ve $x \leq (D(x, x'))'$ bulunur. Ayrıca

$$0 = D(x \cdot x', y) = (D(x,y) \cdot x') + (x \cdot D(x', y))$$

ifadesinden $D(x,y) \leq x$ ve $D(x', y) \leq x'$ dir. Benzer şekilde her $x, y \in A$ için $D(x,y) \leq y$ ve $D(x,y) \leq y'$ bulunur.

Önerme 3.5. A bir MV-cebir, D A da simetrik bi-türev ve d, D nin izi olsun. Eğer $x, y \in A$ için $x \leq y$ ise aşağıdaki özellikler sağlanır,

(i) $d(x \cdot y') = 0$,

(ii) $dy' \leq x'$,

(iii) $dx \cdot dy' = 0$ dır.

İspat. (i) Her $x, y \in A$ için $x \leq y$ olsun. **(7)** den

$$x \cdot y' \leq y \cdot y' = 0$$

dır. Buradan $x \cdot y' = 0$ bulunur.

(ii) Her $x, y \in A$ için $x \leq y$ olsun.

$$x \cdot dy' \leq y \cdot dy' \leq y \cdot y' = 0$$

dır. Buradan $x \cdot dy' = 0$ olur. Böylece $dy' \leq x'$ dür.

(iii) $x \leq y$ olduğundan $dx \leq y$ dir. Buradan

$$dx \cdot dy' \leq y \cdot dy' \leq y \cdot y' = 0$$

olur. Yani

$$dx \cdot dy' = 0$$

bulunur.

Önerme 3.6. A bir MV-cebir, D A da simetrik bi-türevi ve d, D nin izi olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır.

(i) $dx \cdot dx' = 0$

(ii) $dx' = (dx)'$ dür ancak ve ancak d, A da birim dönüşümdür.

İspat. (i) $dx \cdot dy' = 0$ ifadesinde y yerine x yazılırsa $dx \cdot dx' = 0$ bulunur.

(ii) Her $x, y \in A$ için $x \cdot dy' = 0$ ifadesinden $x \cdot dx' = x \cdot (dx)' = 0$ bulunur. $x \leq dx$ ve $dx \leq x$ den $x = dx$ elde edilir. Buradan d, A da birim dönüşümdür.

Eğer d A üzerinde birim dönüşüm ise her $x \in A$ için $dx' = (dx)'$ dür.

Tanım 3.7. A bir MV-cebir ve D, A de simetrik bi-türev olsun. Eğer her $x, y, z \in A$ için $x \leq y$ iken $D(x, z) \leq D(y, z)$ ise D izotondur.

Eğer d D nin izi ve D izoton ise her $x, y \in A$ için $x \leq y$ iken $d(x) \leq d(y)$ dir.

Örnek 3.8. A Örnek 3.2. deki MV-cebir olsun. $D : A \times A \to A$ dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlansın,

$$D(x,y) = \begin{cases} 0, & (x,y) \in \{(0,0),(a,0),(0,a),(b,0),(0,b),(1,0),(0,1),(a,b),(b,a)\} \\ b, & (x,y) \in \{(b,b),(b,1),(1,b)\} \\ a, & (x,y) \in \{(a,a),(1,a),(a,1)\} \\ 1, & (x,y) \in \{(1,1)\} \end{cases}$$

Burada D nin A da izoton simetrik bi-türev olduğu görülebilir. Her $x, y \in A$ için $d0 = 0, d1 = 1, da = a, db = b$ ve d A da birimdir ve bu yüzden $x \leq y$ iken $d(x) \leq d(y)$ olur.

Örnek 3.2. de $b \leq 1, D(b,1) = b, D(1,1) = 0$ fakat $0 \leq b$ dir. Yani D izoton değildir.

Önerme 3.9. *A bir MV-cebir, D A üzerinde simetrik bi-türev ve d D nin izi olsun. Her $x \in A$ için $dx' = dx$ ise aşağıdakiler sağlanır.*

(i) $d1 = 0,$

(ii) $dx \cdot dx = 0,$

(iii) $d = 0$ *ancak ve ancak D A da izotondur.*

İspat. (i) $dx' = dx$ de x yerine 0 yazılırsa $d1 = 0$ bulunur.

(ii) Her $x \in A$ için $dx \cdot dx = dx \cdot dx' = 0$ bulunur.

(iii) D A da izoton olsun. Her $x \in A$ için $dx \leq d1 = 0$ dan $dx = 0$ bulunur. Buradan $d = 0$ dır.

Tanım 3.10. A bir MV-cebir ve D A da bir simetrik dönüşüm olsun. Eğer her $x, y, z \in A$ için $D(x+y, z) = D(x, z) + D(y, z)$ ise D bi-toplamsal dönüşümdür.

Teorem 3.11. *A bir MV-cebir, D A üzerinde bi-toplamsal simetrik bi-türev ve d D nin izi olsun. Bu durumda $d(B(A)) \subseteq B(A)$ olur.*

İspat. $y \in d(B(A))$ olsun. Böylece $y = d(x)$ olacak şekilde $x \in B(A)$ vardır. O zaman

$$\begin{aligned} y + y &= dx + dx = D(x,x) + D(x,x) = D(x+x, x) \\ &= D(x,x) = y \end{aligned}$$

Buradan $y \in B(A)$ olur. Yani $d(B(A)) \subseteq B(A)$ dır.

Teorem 3.12. *A lineer sıralı bir MV-cebir, D A da bi-toplamsal simetrik bi-türev ve d D nin izi olsun. Bu durumda $d = 0$ veya $d1 = 1$ dir.*

İspat. Her $x \in A$ için $x + x'$ ve $x + 1 = 1$ den

$$d1 = D(1,1) = D(x + x', 1) = D(x, 1) + D(x', 1)$$

ve

$$\begin{aligned} d1 &= D(1,1) = D(x+1,1) \\ &= D(x,1) + d1 \end{aligned}$$

dır. Eğer $d1 \neq 1$ ise Önerme 1.16. dan $D(x', 1) = d1$ bulunur. Burada x yerine 1 yazılırsa $d1 = 0$ olur. Her $x \in A$ için

$$0 = d1 = D(x,1) + d1 = D(x,1)$$

ve

$$D(x,1) = D(x, x+1) = dx + D(x,1) = dx$$

dir. Böylece her $x \in A$ için $dx = 0$. Yani $d = 0$ dır.

Teorem 3.13. A lineer sıralı MV-cebir, D_1 ve D_2 A da bi-toplamsal simetrik bi-türev ve d_1, d_2 sırasıyla D_1, D_2 nin izi olsun. Eğer her $x \in A$ için $(d_1 d_2)(x) = d_1(d_2 x)$ olmak üzere $d_1 d_2 = 0$ ise $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ dır.

İspat. $d_1 d_2 = 0$ ve $d_2 \neq 0$ olsun. Böylece $d_2 1 = 1$ dir. Her $x \in A$ için

$$0 = (d_1 d_2)(x) = d_1(d_2 x) = d_1(d_2 x) + (x \cdot D_2(x,1))$$

olur. Ayrıca $d_2 1 = 1$ den

$$\begin{aligned} D_2(x,1 &= D_2(x \cdot 1, 1) = (D_2(x,1) \cdot 1) + (x \cdot D_2(1,1)) \\ &= D_2(x,1) + x \end{aligned}$$

bulunur. (9) dan $x \cdot D_2(x,1) = x$ olur. Böylece

$$\begin{aligned} 0 &= d_1(d_2 x + x) = D_1(d_2 x + x,\ d_2 x + x) \\ &= D_1(d_2 x, d_2 x) + D_1(d_2 x, x) + D_1(x, d_2 x) + D_1(x,x) \\ &= D_1(d_2 x, x) + D_1(x, d_2 x) + d_1 x \end{aligned}$$

olur. Her $x \in A$ için (4) den $D_1(d_2x, x) = 0$ veya $d_1x = 0$. Her $x \in A$ için $D_1(d_2x, x) = 0$ olsun. x yerine 1 yazılırsa $D_1(1, 1) = 0$ yani $d_1 1 = 0$ dır. Her $x \in A$ için

$$0 = d_1 1 = D_1(x + 1, 1) = D_1(x, 1) + d_1 1$$

ve bu yüzden $D_1(x, 1) = 0$ dır. O halde

$$0 = D_1(x, 1) = D_1(x, x + 1) = d_1x + d_1 1 = d_1x$$

olduğundan $d_1 = 0$ dır.

4.BÖLÜM

MV-CEBİRLERDE GENELLEŞTİRİLMİŞ TÜREVLER

Bu bölümde, "H. Yazarli, (2013), A note on derivations in MV-algebras, Miskolc Mathematical Notes, Vol. 14, No 1, pp. 345-354." çalışmasının genelleştirilmiş türevler kısmı verilecektir. Bu çalışmada yazar, MV-cebirlerde genelleştirilmiş türevi tanımlamış ve ikinci bölümde verilen çalışmada geçen problemleri genelleştirilmiş türevler için incelemiştir.

Tanım 4.1. A bir MV-cebir ve $d : A \to A$ türev olsun. Her $x, y \in A$ için aşağıdaki özelliği sağlayan $f : A \to A$ dönüşümüne A üzerinde genelleştirilmiş türev denir.

$$f(x \cdot y) = (f(x) \cdot y) + (x \cdot d(y))$$

Örnek 4.2. A Örnek 3.1. deki MV-cebir olsun. $d : A \to A$ dönüşümü

$$d(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, a, 1 \\ b, & x = b \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. d nin A üzerinde türev olduğu açıktır. Eğer f dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlanırsa

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, a \\ b, & x = b, 1 \end{cases},$$

A üzerinde d tarafından belirlenen genelleştirilmiş türevdir. Ayrıca f A üzerinde bir türevdir.

Örnek 4.3. $A = \{0, a, b, c, d, 1\}$ Örnek 2.11 deki MV-cebir olsun. $d : A \to A$,

$$d(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, a, c \\ b, & x = b, d, 1 \end{cases}$$

dönüşüm tanımlansın. d nin A üzerinde türev olduğu açıktır. Eğer her $x \in A$ için f fonksiyonu $f(x) = x$ şeklinde tanımlanırsa f, A üzerinde d tarafından belirlenen genelleştirilmiş türevdir. Ancak

$$\begin{aligned} f(a \cdot c) &= f(a) \cdot c + a \cdot f(c) \\ &= a \cdot c + a \cdot c = a + a = c \end{aligned}$$

ve $f(a \cdot c) = f(c) = a$ olduğundan f A üzerinde türev değildir.

Önerme 4.4. A bir MV-cebir ve f A üzerinde d tarafından belirlenen genelleştirilmiş bir türev olsun. Her $x \in A$ için aşağıdaki özellikler sağlanır.

(i) $f(0) = 0$

(ii) $f(x) \cdot x' = 0$

(iii) $f(x) = f(x) + (x \cdot d(1))$

(iv) $f(x) \leq x$

(v) Eğer I MV-cebirin ideali ise $f(I) \subseteq I$ olur.

İspat. (i) $f(0) = f(0 \cdot 0) = (f(0) \cdot 0) + (0 \cdot d(0)) = 0$ dır.

(ii) Her $x \in A$ için

$$0 = f(0) = f(x \cdot x') = (f(x) \cdot x') + (x \cdot d(x'))$$

ve bu yüzden $f(x) \cdot x' = 0$ dır.

(iii) Her $x \in A$ için

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x \cdot 1) = (f(x) \cdot 1) + (x \cdot d(1)) \\ &= f(x) + (x \cdot d(1)) \end{aligned}$$

olur.

(iv) Her $x \in A$ için

$$1 = 0' = (f(x) \cdot x')' = (f(x))' + x$$

dır. Teorem 1.14 den her $x \in A$ için $f(x) \leq x$ bulunur.

(v) $y \in f(I)$ olsun burada $f(x) = y$ olacak şekilde $x \in I$ vardır. (iv) den $f(x) \leq x$ ve buradan $y \in I$ olduğundan $f(I) \subseteq I$ bulunur.

Sonuç 4.5. A bir MV-cebir ve f A üzerinde d tarafından belirlenen bir genelleştirilmiş türev olsun. Eğer $x, y \in A$ için $x \leq y$ ise aşağıdaki özellikler sağlanır.

(i) $f(x \cdot y') = 0$,

(ii) $f(x) \leq y$,

(iii) $f(x) \cdot f(y') = 0$,

(iv) $f(x') = (f(x))'$ ancak ve ancak f A da birim dönüşümdür.

Tanım 4.6. A bir MV-cebir ve f A üzerinde d tarafından belirlenen bir genelleştirilmiş türev olsun. Her $x, y \in A$ için $x \leq y$ olduğunda $f(x) \leq f(y)$ oluyorsa f izotondur, denir.

Örnek 4.7. Örnek 4.3. te f bir birim dönüşüm olduğundan izotondur.

Önerme 4.8. A bir MV-cebir ve f A üzerinde d tarafından belirlenen bir genelleştirilmiş türev olsun. Eğer her $x \in A$ için $f(x') = f(x)$ oluyorsa aşağıdaki özellikler sağlanır

(i) $f(1) = 0$,

(ii) $f(x) \cdot f(x) = 0$,

(iii) f A üzerinde izoton ise $f = 0$ dır.

İspat. İspat açıktır.

Tanım 4.9. A bir MV-cebir ve f A üzerinde d tarafından belirlenen bir genelleştirilmiş türev olsun. Eğer her $x, y \in A$ için $f(x + y) = f(x) + f(y)$ sağlanıyorsa f A üzerinde toplamsal genelleştirilmiş türevdir, denir.

Örnek 4.10. Örnek 4.2. de f, A üzerinde toplamsal genelleştirilmiş türevdir.

Teorem 4.11. A bir MV-cebir ve f A üzerinde d tarafından belirlenen bir genelleştirilmiş türev olsun. $f(B(A)) \subseteq B(A)$ olur.

İspat. $y \in f(B(A))$ olsun. $y = f(x)$ olacak şekilde $x \in B(A)$ vardır.

Buradan

$$y + y = f(x) + f(x) = f(x + x) = f(x) = y$$

olduğundan $y \in B(A)$ olur. Yani $f(B(A) \subseteq B(A)$ dır.

Teorem 4.12. A lineer sıralı MV-cebir ve f de M de genelleştirilmiş türev olsun. Bu durumda $f = 0$ veya $f(1) = 1$ dir.

İspat. A lineer sıralı MV-cebir ve f de M de genelleştirilmiş türev olsun. Buradan

$$f(1) = f(x + x') = f(x) + f(x')$$

ve her $x \in A$ için

$$f(1) = f(x + 1) = f(x) + f(1)$$

sağlanır. Eğer $f(1) \neq 1$ ise Önerme 1.16. dan $f(1) = 0$ bulunur. Böylece her $x \in A$ için

$$0 = f(1) = f(1) + f(x) = f(x)$$

olduğundan $f = 0$ dır.

Sonuç 4.13. A lineer sıralı bir MV-cebir ve f A üzerinde d tarafından belirlenen toplamsal genelleştirilmiş türev olsun. Eğer $f^2 = 0$ ise buradan her $x \in A$ için $f^2(x) = f(f(x))$ olur. Yani $f = 0$ dır.

5.BÖLÜM

MV-CEBİRLERDE GENELLEŞTİRİLMİŞ SİMETRİK Bİ-TÜREVLER

Bu bölümde, ikinci, üçüncü ve dördüncü bölümlerde yapılan çalışmalar gözönünde bulundurularak MV-cebirlerde genelleştirilmiş simetrik bi-türev tanımlanmış ve diğer bölümlerdeki problemler genelleştirilmiş simetrik bi-türev kavramına taşınmıştır.

Tanım 5.1. A bir MV-cebir, $D : A \times A \to A$ simetrik bi türev ve $\Gamma : A \times A \to A$ simetrik dönüşüm olsun. Her $x, y, z \in A$ için aşağıdaki koşul sağlanırsa Γ ya D ye bağlı genelleştirilmiş simetrik bi-türev denir.

$$\Gamma(x \cdot y, z) = (\Gamma(x, z) \cdot y) + (x \cdot D(y, z))$$

$\gamma : A \to A$, $\gamma(x) = \Gamma(x, x)$ ile tanımlı dönüşüme Γ nın izi denir.

Örnek 5.2. $A = \{0, a, b, 1\}$ kümesinin aşağıda verilen işlemlerle bir MV-cebiri ve

$+$	0	a	b	1
0	0	a	b	1
a	a	a	1	1
b	b	1	b	1
1	1	1	1	1

$'$	0	a	b	1
	1	b	a	0

$D : A \times A \to A$,

$$D(x, y) = \begin{cases} b, & (x, y) = (b, b), (b, 1), (1, b) \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

dönüşümünün simetrik bi-türevdir olduğunu biliyoruz.

$$\Gamma(x,y)=\begin{cases} a, & (x,y)\in\{(a,a),(a,1),(1,a)\} \\ b, & (x,y)\in\{(b,b),(b,1),(1,b)\} \\ 0, & x=0 \text{ veya } y=0 \\ 0, & (x,y)=\{(a,b),(b,a)\} \\ 1, & (x,y)=(1,1) \end{cases}$$

ile tanımlı Γ dönüşümü D ye bağlı genelleştirilmiş simetrik bi-türevdir.

Örnek 5.3. $A=[0,1]\subset R$ açık aralığı olsun. $a,b\in A$ için $a\oplus b=\min\{1,a+b\}$, $a\cdot b=\max\{0,a+b-1\}$ ve $a'=1-a$ işlemleri tanımlanırsa $(A,\oplus,',0)$ bir MV-cebirdir. $n\geq 2$, $n\in Z$ için $A_n=\left\{0,\frac{1}{n-1},....,\frac{n-2}{n-1},1\right\}$ lineer sıralı MV-cebirdir. $A_3=\left\{0,\frac{1}{2},1\right\}$ kümesi alınsın.

$$D(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{2}, & x,y\in\left\{\frac{1}{2}\right\} \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

ve

$$\Gamma(x,y)=\begin{cases} 1, & x,y\in\{1\} \\ \frac{1}{2}, & (x,y)\in\left\{(\frac{1}{2},\frac{1}{2}),(\frac{1}{2},1),(1,\frac{1}{2})\right\} \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

dönüşümleri tanımlansın. Γ, D ye bağlı genelleştirilmiş simetrik bi-türevdir. Fakat Γ simetrik bi-türev değildir. Çünkü

$$\Gamma(\frac{1}{2}\cdot 1,1)=\Gamma(\frac{1}{2},1)=\frac{1}{2}$$

ve

$$(\Gamma(\frac{1}{2},1)\cdot 1)+(\frac{1}{2}\cdot\Gamma(1,1))=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

dir. Bu yüzden

$$\Gamma(\frac{1}{2}\cdot 1,1)\neq(\Gamma(\frac{1}{2},1)\cdot 1)+(\frac{1}{2}\cdot\Gamma(1,1))$$

olur.

Önerme 5.4. A bir MV-cebir, Γ A üzerinde D simetrik bi-türevine bağlı genelleştirilmiş simetrik bi-türev, d D nin izi ve γ Γ nın izi olsun. Bu durumda her $x \in A$ için aşağıdaki özellikler sağlanır.

(i) $\gamma 0 = 0$,

(ii) $\gamma x \cdot x' = x \cdot dx' = 0$,

(iii) $\gamma x = \gamma x + (x \cdot D(x,1)) = (\Gamma(1,x) \cdot x) + dx$,

(iv) $\gamma x \leq x$,

(v) X , MV-cebirin ideali ise $\gamma(X) \subseteq X$ dir.

İspat. (i) Her $x \in A$ için,

$$\begin{aligned} \Gamma(x,0) &= \Gamma(x, 0 \cdot 0) = (\Gamma(x,0) \cdot 0) + (0 \cdot D(x,0)) \\ &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

dır. γ , Γ nın izi olduğundan,

$$\begin{aligned} \gamma 0 &= \Gamma(0,0) = \Gamma(0 \cdot 0, 0) = (\Gamma(0,0) \cdot 0) + (0 \cdot D(0,0)) \\ &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

olur.

(ii) Her $x \in A$ için,

$$\begin{aligned} 0 &= \Gamma(x,0) = \Gamma(x, x \cdot x') \\ &= (\Gamma(x,x) \cdot x') + (x \cdot D(x,x')) \end{aligned}$$

ve buradan $\gamma x \cdot x' = 0$ ve $x \cdot D(x,x') = 0$ dır. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} 0 &= \Gamma(0,x') = \Gamma(x \cdot x', x') \\ &= (\Gamma(x,x') \cdot x') + (x \cdot D(x',x')) \end{aligned}$$

elde edilir. Yani her $x \in A$ için $x \cdot dx' = 0$ ve $\Gamma(x,x') \cdot x' = 0$ olur.

(iii) Her $x \in A$ için,

$$\begin{aligned} \gamma x &= \Gamma(x,x) = \Gamma(x, x \cdot 1) = (\Gamma(x,x) \cdot 1) + (x \cdot D(x,1)) \\ &= \gamma x + (x \cdot D(x,1)) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\gamma x &= \Gamma(x,x) = \Gamma(1\cdot x, x) = (\Gamma(1,x)\cdot x) + (1\cdot D(x,x))\\ &= (\Gamma(1,x)\cdot x) + dx\end{aligned}$$

dır.

(iv) Her $x \in A$ için,

$$\begin{aligned}1 &= 0^{'} = (\gamma x \cdot x^{'})^{'} = \left[((\gamma x)^{'} + (x^{'})^{'})^{'}\right]\\ &= (\gamma x)^{'} + x\end{aligned}$$

olduğundan Teorem 1.12. (ii) den $\gamma x \leq x$ dır.

(v) Eğer $y \in \gamma(X)$ ise $\gamma(x) = y$ olacak biçimde $x \in X$ vardır. Önerme 5.4. (iv) den $\gamma(x) \leq x$ dir ve X A nın ideali olduğundan. $\gamma(X) \subseteq X$ dir.

Sonuç 5.5. A bir MV-cebir, Γ A üzerinde D simetrik bi-türevine bağlı genelleştirilmiş simetrik bi-türev olsun. Her $x \in A$ için $x \cdot \Gamma(x, x') = 0$ olduğundan $\Gamma(x, x') \leq x'$ bulunur. $x \leq (D(x, x'))'$ olduğundan $\Gamma(x, x') \leq (D(x, x'))'$ bulunur. Buradan $D(x, x') \leq (\Gamma(x, x'))'$. Her $x, y \in A$ için

$$0 = \Gamma(x \cdot x', x) = (\Gamma(x, x) \cdot x') + (x \cdot D(x', x))$$

olduğundan $\Gamma(x, y) \leq x$ ve $D(x', y) \leq x'$ bulunur.

Önerme 5.6. A bir MV-cebir, Γ A üzerinde D simetrik bi-türevine bağlı genelleştirilmiş simetrik bi-türev ve γ Γ nın izi olsun. Eğer $x, y \in A$ için $x \leq y$ ise aşağıdakiler sağlanır.

(i) $\gamma(x \cdot y') = 0$

(ii) $\gamma y' \leq x'$

(iii) $\gamma x \cdot \gamma y' = 0$.

İspat. (i) Her $x, y \in A$ için $x \leq y$ olsun. Teorem 1.12. den $x \cdot y' = 0$ bulunur. $\gamma 0 = 0$ olduğundan $\gamma(x \cdot y') = 0$ dır.

(ii) Her $x, y \in A$ için $x \leq y$ olsun. $x \cdot \gamma y' \leq y \cdot \gamma y' \leq y \cdot y' = 0$ olduğundan $x \cdot \gamma y' = 0$ dır ve buradan $\gamma y' \leq x'$ bulunur.

(iii) $x \leq y$ olduğundan $\gamma x \leq y$ dir. Buradan $\gamma x \cdot \gamma y' \leq y \cdot \gamma y' \leq y \cdot y' = 0$ bulunur. Böylece $\gamma x \cdot \gamma y' = 0$ olur.

Önerme 5.7. A bir MV-cebir, Γ A üzerinde D simetrik bi-türevine bağlı genelleştirilmiş simetrik bi-türev ve γ Γ nin izi olsun. Aşağıdakiler sağlanır.

(i) $\gamma x \cdot \gamma x' = 0$

(ii) $\gamma x' = (\gamma x)'$ ancak ve ancak γ , A üzerinde birim dönüşümdür.

İspat. (i) $x \leq x$ olduğunu biliyoruz. Önerme 5.6. (iii) den $\gamma x \cdot \gamma x' = 0$ bulunur.

(ii) $x \in A$ için $x \cdot \gamma x' = 0$ olduğundan $x \cdot \gamma x' = x \cdot (\gamma x)' = 0$ bulunur. $x \leq \gamma x$ ve $\gamma x \leq x$ olduğundan $x = \gamma x$ olur. Buradan γ A üzerinde birim dönüşümdür.

Her $x \in A$ için eğer γ A üzerinde birim dönüşüm ise $\gamma x' = (\gamma x)'$ olur.

Tanım 5.8. A bir MV-cebir, Γ A üzerinde D simetrik bi-türevine bağlı genelleştirilmiş simetrik bi-türev olsun. Her $x, y, z \in A$ için $x \leq y$ iken $\Gamma(x, z) \leq \Gamma(y, z)$ ise Γ ya izoton denir.

Eğer γ Γ nın izi ve Γ izoton ise her $x, y \in A$ için $x \leq y$ iken $\gamma x \leq \gamma y$ dir.

Örnek 5.9. A bir MV-cebir, D Örnek 5.2. deki simetrik bi-türev olsun. D, D ye bağlı genelleştirilmiş simetrik bi-türevdir. A da $b \leq 1$, $D(b, 1) = b$, $D(1, 1) = 0$ dır fakat $0 \leq b$ dir. Yani D izoton değildir.

Örnek 5.10. Örnek 5.3. de Γ D simetrik bi-türevine bağlı izoton genelleştirilmiş simetrik bi-türevdir.

Önerme 5.11. A bir MV-cebir, Γ A üzerinde D simetrik bi- türevine bağlı genelleştirilmiş simetrik bi-türev ve γ Γ nin izi olsun. Eğer her $x \in A$ için $\gamma x' = \gamma x$ ise aşğıdakiler sağlanır.

(i) $\gamma 1 = 0$

(ii) $\gamma x \cdot \gamma x = 0$

(iii) Eğer A da Γ izoton ise $\gamma = 0$ dır.

İspat. (i) Her $x \in A$ için $\gamma x' = \gamma x$ olduğundan $\gamma 1 = \gamma 1' = \gamma 0 = 0$ bulunur.

(ii) Her $x \in A$ için Önerme 5.6. den $\gamma x \cdot \gamma x = \gamma x \cdot \gamma x' = 0$ olur.

(iii) Γ A da izoton olsun. Her $x \in A$ için $\gamma x \leq \gamma 1 = 0$ olduğundan $\gamma x = 0$ bulunur. Yani $\gamma = 0$.

Tanım 5.12. A bir MV-cebir, Γ A üzerinde D simetrik bi-türevine bağlı genelleştirilmiş simetrik bi-türev olsun. Her $x, y, z \in A$ için $\Gamma(x + y, z) = \Gamma(x, z) + \Gamma(y, z)$ ise Γ ya bi-toplamsal dönüşüm denir.

Teorem 5.13. A bir MV-cebir, Γ A üzerinde D simetrik bi-türevine bağlı bi-toplamsal genelleştirilmiş simetrik bi-türev ve γ Γ nın izi olsun. Bu durumda $\gamma(B(A)) \subseteq B(A)$ dır.

İspat. $y \in \gamma(B(A))$ olsun. Buradan $y = \gamma(x)$ olacak şekilde $x \in B(A)$ vardır. O zaman

$$\begin{aligned} y + y &= \gamma x + \gamma x = \Gamma(x, x) + \Gamma(x, x) = \Gamma(x + x, x) \\ &= \Gamma(x, x) = y. \end{aligned}$$

Buradan $y \in B(A)$ olur. Yani $\gamma(B(A)) \subseteq B(A)$ dır.

Teorem 5.14. A lineer sıralı MV-cebir, Γ A üzerinde D simetrik bi-türevine bağlı bi-toplamsal genelleştirilmiş simetrik bi-türev ve γ Γ nın izi olsun. Bu durumda $\gamma = 0$ veya $\gamma 1 = 1$ dir.

İspat. Her $x \in A$ için $x + x' = 1$ ve $x + 1 = 1$ olduğundan

$$\gamma 1 = \Gamma(1, 1) = \Gamma(x + x', 1) = \Gamma(x, 1) + \Gamma(x', 1)$$

ve

$$\begin{aligned}\gamma 1 &= \Gamma(1,1) = \Gamma(x+1,1) \\ &= \Gamma(x,1) + \gamma 1\end{aligned}$$

dir. Eğer $\gamma 1 \neq 1$ ise $\Gamma(x', 1) = \gamma 1$ bulunur. Her $x \in A$ için

$$0 = \gamma 1 = \Gamma(x,1) + \gamma 1 = \Gamma(x,1)$$

ve

$$\Gamma(x,1) = \Gamma(x,x+1) = \gamma x + \Gamma(x,1) = \gamma x.$$

Böylece her $x \in A$ için $\gamma x = 0$ olur. Yani $\gamma = 0$.

Teorem 5.15. A lineer sıralı MV-cebir, Γ_1,ve Γ_2 A üzerinde D_1 ve D_2 ye bağlı bi-toplamsal genelleştirilmiş simetrik bi-türevler, d_1 ve d_2 sırasıyla D_1 ve D_2 nin, γ_1 ve γ_2 sırasıyla Γ_1,ve Γ_2 nin izleri olsun. Eğer her $x \in A$ için $(\gamma_1\gamma_2)(x) = \gamma_1(\gamma_2 x)$ olmak üzere $\gamma_1\gamma_2 = 0$ ise $\gamma_1 = 0$ veya $\gamma_2 = 0$ dır.

İspat. $\gamma_1\gamma_2 = 0$ ve $\gamma_2 \neq 0$ olsun. Böylece $\gamma_2 1 = 1$ olur. Her $x \in A$ için

$$0 = (\gamma_1\gamma_2)(x) = \gamma_1(\gamma_2 x) = \gamma_1(\gamma_2 x + (x \cdot D_2(x,1)))$$

dır. x yerine 1 yazılırsa

$$\begin{aligned}0 &= \gamma_1(\gamma_2 1 + (1 \cdot d_2 1)) \\ &= \gamma_1(1 + d_2 1) = \gamma_1 1\end{aligned}$$

bulunur. Buradan her $x \in A$ için

$$\begin{aligned}0 &= \gamma_1 1 = \Gamma_1(1,1) = \Gamma_1(x+1,1) = \Gamma_1(x,1) + \gamma_1 1 \\ &= \Gamma_1(x,1)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}0 &= \Gamma_1(x,1) = \Gamma_1(x,x+1) = \Gamma_1(x,x) + \Gamma_1(x,1) \\ &= \gamma_1 x,\end{aligned}$$

yani $\gamma_1 = 0$ dır. Benzer şekilde diğer durumun ispatı da gösterilebilir.

KAYNAKLAR

[1] **N. O. Alshehri, (2010),** Derivations of MV-algebras, Int. J. Math. Math. Sci., Article ID 312027, 7 pages, doi:10.1155/2010/312027.

[2] **G. Cattaneo, R. Giuntini and R. Pilla, (1999),** BZMVdM algebras and Stonian MV-algebras (applications to fuzzy sets and rough approximations)**,** Fuzzy Sets and Systems 108, 201-222**.**

[3] **C. C. Chang, (1958),** Algebraic analysis of many valued logics, Trans. Am. Math. Soc., Vol. 88, pp. 467–490.

[4] **C. C. Chang, (1959)**, A new proof of the completeness of the łukasiewicz axioms, Trans. Am. Math. Soc., Vol. 93, pp. 74–80.

[5] **R. L. O. Cignoli, I. M. L. D'Ottaviano, and D. Mundici, (2000)**, *Algebraic foundations of many-valued reasoning*, ser. Trends in Logic-Studia Logica Library. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, vol. 7

[6] **E. C. Posner, (1957),** Derivations in prime rings, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 8, pp. 1093-1100.

[7] **S.Rasouli and B. Davvaz, (2010),** Roughness in MV-algebras, Inf. Sci., Vol. 180, no.5, pp. 737–747.

[8] **G. Sz´asz, (1975),** Derivations of lattices, Acta Scientiarum Mathematicarum, Vol. 37, pp. 149–154.

[9] **X. L. Xin, T. Y. Li and J. H. Lu**, **(2008),** On derivations of lattices, Inf. Sci. 178 , pp. 307-316.

[10] **H. Yazarli, (2013),** A note on derivations in MV-algebras, Miskolc Mathematical Notes, Vol. 14, No 1, pp. 345-354.

[11] **S. Koç and H. Yazarli, (2022),** Generalized symmetric bi-derivations in MV-algebras, New Trends in Mathematical Sciences, Vol. 10, pp. 107-114