

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Devirli Modüllerin Alt Projektif Bölgelerinin İncelenmesi

Şiar KALIR

Matematik Anabilim Dalı

Haziran, 2023

İÇİNDEKİLER

ÖZ	I
ABSTRACT	II
TEŞEKKÜR	III
SİMGELER VE KISALTMALAR	IV
1.GİRİŞ	1
2.TEMEL KAVRAMLAR	3
2.1. Halkalar	3
2.2 Modüller.....	5
2.3 Modül Homomorfizmaları	8
2.4 Hom FUNKTORU.....	9
2.5 Tam Diziler ve Parçalanabilir Tam Diziler	11
2.6 Serbest Modüller.....	12
2.7 Projektif Modüller	12
2.8 İnjektif Modüller ve Düz Modüller.....	14
2.9 Tekil ve Tekilsiz Modüller.....	15
2.10 Noetherian ve Artinian Modüller	15
3. MODÜLLERİN ALT PROJEKTİF BÖLGESİ	17
4. DEVİRLİ MODÜLLERİN ALT PROJEKTİF BÖLGELERİ.....	21
5. SONUÇ	31
KAYNAKLAR	33
ÖZGEÇMİŞ	35

Devirli Modüllerin Alt Projektif Bölgelerinin İncelenmesi

Şiar KALIR

Danışman: Prof. Dr. Yılmaz DURĞUN

Matematik Anabilim Dalı

ÖZ

Bu tez çalışmasında, devirli modüllerin alt projektiflik bölgeleri incelenmiştir. Devirli modüllerin alt projektif bölgeleri aracılığıyla, PP -halkası, CF -halkası ve Kasch halkası gibi iyi bilinen cebirsel yapıların yeni karakterizasyonlarını elde edilmiştir. M devirli bir sağ R -modül ve N herhangi bir tekli-projektif sağ R -modül olmak üzere, M modülü N -alt projektiftir. Dolayısıyla, bir devirli sağ R -modülün alt projektif bölgesi tüm tekli-projektif modüllerin sınıfını içermektedir. Alt projektif bölgesi tam olarak tüm tekli-projektif modüllerden oluşan devirli modülleri *singp – yoksun* olarak adlandırdık. Projektif olmayan her devirli sağ R -modülün *singp – yoksun* olduğu halkaların karakterizasyonları incelenmiştir. *Singp – yoksun* modüllerin yapısı belirli halkalar üzerinde incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Tekli-projektif modül; alt projektif bölge; *singp – yoksun*; CF -halka; PP -halka.

Investigation Of Subprojectivity Of Cyclic Modules

Şiar KALIR

Advisor: Prof. Dr. Yılmaz DURĞUN

Department Of Mathematics

ABSTRACT

In this thesis, subprojectivity domains of cyclic modules is investigated. Through the subprojective domains of cyclic modules, new characterizations of well-known algebraic structures such as *PP*-ring, *CF*-ring and Kasch's ring have been obtained. When M is a cyclic right R -module and N is any singly-projective right R -module, M is an N -subprojective module. Thus, the subprojectivity domain of a cyclic right R -module includes the class of all singly-projective modules. We have named cyclic modules whose subprojective domain consists precisely of all singly-projective modules as *singp – indigent*. The characterizations of rings over which each non-projective cyclic right R -module is *singp – indigent* is investigated. The structure of *singp – indigent* modules is studied on certain rings.

Keywords: Singly-projective module; subprojectivity domain; *singp – indigent*; *CF*-ring; *PP*-ring

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca bilgi ve tecrübesinden yararlandığım, sabrı ve yol göstericiliği ile kendisi ile çalışmaktan onur duyduğum, yüksek lisans tezimin oluşmasında büyük katkısı olan değerli danışmanım Prof. Dr. Yılmaz DURĞUN'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Hayatımın her anında varlığını hissettiren, bugüne dek desteğini esirgemeyen babam Celal KALIR'a, annem Arife KALIR'a, tüm kardeşlerime ve yeğenlerime teşekkürlerimi sunarım.

Tez çalışmalarım süresince aldığım lisansüstü bursu için, Türkiye Bilimler ve Teknolojik Araştırma Kurumuna (TÜBİTAK, Proje No: 122F130) teşekkürlerimi sunarım.

Şiar KALIR

Haziran-2023, Adana

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar halkası
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel sayılar halkası
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar halkası
$\mathbb{C}$	: Karmaşık sayılar halkası
R	: Aksi belirtilmedikçe birleşmeli ve birimli halka
1_R	: R halkasının birimi
0_R	: R halkasının sıfırı
M_R	: M birimsel sağ R -modül
$\text{Mod} - R$	: Sağ R -modüllerin kategorisi
$\leq$	: Alt modül
$\subsetneq$	: Öz alt modül
$\trianglelefteq$	: Büyük alt modül
$\cong$	: İzomorf
$\langle x \rangle$	: x elemanı tarafından üretilen devirli alt modül
$\langle A \rangle$	: A kümesi tarafından üretilen sonlu modül
$\sum_{i \in I} A_i$	: $\{A_i\}_{i \in I}$ alt modüller ailesinin toplamı
$\bigoplus_{i \in I} A_i$	: $\{A_i\}_{i \in I}$ alt modüller ailesinin direkt toplamı
$\prod_{i \in I} A_i$	: $\{A_i\}_{i \in I}$ alt modüller ailesinin direkt çarpımı
$\text{Çek}(f) = \text{Ker}(f)$	: f homomorfizmasının çekirdeği
$\text{Gör}(f)$	: f homomorfizmasının görüntü kümesi
$\text{End}(M)$	: M modülünün endomorfizmalarının kümesi
M/N	: M modülünün N alt modülüne göre bölüm modülü
$\text{Hom}_R(M, N) = \text{Hom}(M, N)$	: M R -Modülünden N R -Modülüne homomorfizmalar grubu
$\mathfrak{Br}^{-1}(M)$	: M modülünün alt projektiflik bölgesi
$\text{ann}_r(m)$	: m 'nin sağ sıfırlayıcısı
$\text{ann}_l(m)$	: m 'nin sol sıfırlayıcısı
$Z(M)$	: M 'nin tekil elemanlarının kümesi
$Z_r(R)$	: R 'nin sağ tekil ideali
$J(R)$	: R 'nin Jacobson radikali
$\text{Soc}(M)$	: $\sum \{K : K, M \text{ nin basit alt modülü}\}$
$\text{Ext}_R(A, B) = \text{Ext}_R^1(A, B)$	: A R -modülünün B R -modülü aracılığıyla olan tüm genişlemelerinin denklik sınıfları kümesi

1.GİRİŞ

Bu tez çalışması boyunca R , birleşmeli halka ve aksi belirtilmediği sürece modüller üniter sağ R -modül olarak alınmaktadır. Sağ R -modüllerin kategorisi ise $Mod - R$ ile gösterilecektir. M sağ R -modül olmak üzere $x \in M$ elemanı ile üretilen devirli alt modül

$$\langle x \rangle = \{x.r \mid r \in R\} \text{ dir.}$$

Eğer bir $x \in M$ için $\langle x \rangle = M$ ise, M 'ye devirli R -modül denir. M devirli bir sağ R -modüldür ancak ve ancak R 'nin bazı sağ I idealleri için, R/I sağ R -modülüne izomorfiktir. R halkası bir sağ R -modül olarak devirli sağ R -modüldür. M sağ R -modülünün kendisinden ve $\{0\}$ dan başka alt modülü yok ise, M modülüne basit modül denir. M bir basit modüldür ancak ve ancak sıfırdan farklı her $x \in M$ için $\langle x \rangle = M$ dir. Bir R halkasının her sağ devirli (sırasıyla, basit) ideali projektif ise, R halkasına PP -halkası (sırasıyla, PS) halkası denir. Bir R halkasının her sağ devirli (sırasıyla, basit) R -modülü, bir serbest sağ R -modüle gömülebiliyor ise, R halkasına CF -halkası (sırasıyla, Kasch) halkası denir (Nicholson ve Yousif , 2003).

Verilen M ve N sağ- R -modülleri için, her $f : A \rightarrow N$ epimorfizmi ve herhangi bir $g : M \rightarrow N$ homomorfizmi için, $g = fh$ olacak şekilde bir $h : M \rightarrow A$ homomorfizması var ise, M modülüne N -alt projektiftir denir. Alt projektiflik notasyonu, yakın tarihte, projektif olmayan modüllerin projektif olmaya ne kadar yakın (veya uzak) olduğunu ölçmek için tanımlanmıştır. M modülünün N -alt projektif olduğu tüm N modüllerinin sınıfına M modülün alt projektiflik bölgesi denir. Modüllerin alt projektiflik bölgesi yardımıyla kalıtsal halka, QF -halka, mükemmel halka gibi literatürde iyi bilinen birçok cebirsel yapının yeni karakterizasyonları elde edilmiştir (Durğun, 2015; Holston, ve ark., 2016).

N bir projektif sağ R -modül olmak üzere, her M sağ R -modülü N -alt projektiftir. Dolayısıyla, her sağ R -modülün alt projektif bölgesi tüm projektif sağ R -modüllerin sınıfını içerir. Alt projektif bölgesi tam olarak tüm projektif sağ R -modüller olan sağ R -modüllere projektif *yoksun* veya kısaca $p - yoksun$ denir. $P - yoksun$ modüllerin varlığı genel olarak bilinmese de, mükemmel halkalar üzerinde var oldukları gösterilmiştir (Durğun, 2015).

$P - yoksun$ modüller üzerine yapılan çalışmalarda, ağırlıklı olarak, projektif olmayan belirli tipteki sağ R -modüllerin $p - yoksun$ olduğu halkaların karakterize edilmesi üzerinedir. Bugüne kadar yapılan çalışmalar, her projektif olmayan (sırasıyla, basit, saf-projektif, goldie-burulma, yarı-artinian) sağ R -modüllerin $p - yoksun$ olduğu halkaların karakterize edilmesi üzerinedir. (Durğun, ve ark., 2015; Durğun, 2020; Durğun, 2022; Holston ve ark., 2016).

Bugüne kadar alt projektiflik notasyonu kullanılarak yapılan çalışmalardan farklı olarak, devirli modüllerin projektifliğini alt projektiflik notasyonu aracılığıyla inceledik. Her C devirli sağ R -modülü, her $f : N \rightarrow M$ epimorfizmi, ve herhangi bir $g : C \rightarrow M$ homomorfizmi için, $g = fh$ olacak şekilde bir $h : C \rightarrow N$ homomorfizması var ise, M modülüne tekli-projektif modül denir

(Azumaya G., 1987). Her bir devirli sağ R -modülün alt projektiflik bölgesi, tüm tekli-projektif modüllerin sınıfını içerir. P – *yoksun* modüllerden esinlenerek, alt projektif bölgesi tam olarak tüm tekli-projektif modüllerin sınıfı olan devirli sağ R -modülleri *singp* – *yoksun* olarak adlandırdık.

Tezimizde, devirli sağ R -modüllerin alt projektiflik bölgelerini inceledik. Devirli sağ R -modüllerin alt projektiflik bölgeleri yardımıyla bilinen bazı halkaların yeni karakterizasyonlarını elde ettik. Tüm projektif olmayan devirli (sırasıyla, basit) sağ R -modüllerin p – *yoksun* olduğu halkalar için gerek ve yeter koşulları belirledik. Ayrıca, bazı halka aileleri üzerinde, *singp* – *yoksun* modüllerin yapısını inceledik. Bu çalışma kapsamında elde edilen tüm sonuçlar (Durğun, Y., 2023) çalışmada yayınlanmıştır.



2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tezin anlaşılabilirliğini kolaylaştırmak ve tez çalışması boyunca ihtiyacımız olan cebirsel yapılar ile ilgili tanım, teorem ve temel kavramlar verilecektir. Bu bölümde verilen bilgiler için (Goodearl, 1976; Alizade ve Pancar, 1999; Lam, 1991; Wisbauer, 1991) önerilir. Bu tez çalışmasında halkalar birimli, birleşmeli, aşikar olmayan; modüller aksi belirtilmedikçe sağ R-modüller olacaktır.

2.1. Halkalar

Tanım 2.1.1 $(R, +)$ değişmeli bir grup ve $\cdot$ işlemi R üzerinde tanımlı bir ikili işlem olsun. Aşağıdaki koşullar sağlandığı takdirde $(R, +, \cdot)$ cebirsel yapısına **halka** denir.

- i) $\forall a, b, c \in R$ için $(ab)c = a(bc)$ dir.
- ii) $a(b + c) = ab + bc$ ve $(a + b)c = ac + bc$ dir (Wisbauer, 1991).

Genellikle $(R, +, \cdot)$ ifadesi yerine “ R halkası” ifadesi kullanılır.

Tanım 2.1.2 $(R, +, \cdot)$ bir halka olmak üzere;

- i) Eğer $\forall a, b \in R$ için $ab = ba$ oluyorsa R ye **değişmeli halka** denir.
- ii) Eğer $\forall a, b \in R$ için $ea = a = ae$ oluyorsa $e \in R$ ye **birim eleman** denir ve $e = 1_R$ ile gösterilir. Eğer R halkası birim elemana sahipse R ye **birimli halka** denir (Wisbauer, 1991).

R bir halka ve $x, y \in R$ olmak üzere $x + (-y)$ elemanı $x - y$ ile, $x \cdot y$ elemanı da xy ile gösterilir. Halkanın toplamaya göre birimi “ 0_R ” ile gösterilir ve bu elemana halkanın sıfırı denir. Ayrıca birimli bir halkada birim eleman taktır. Birimli bir R halkasının birimi 1_R ile gösterilebilir.

Örnek 2.1.3 $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ kümeleri alışılmış “ $+$ ”, “ $\cdot$ ” ikili işlemlerine göre birer değişmeli halkadırlar.

Örnek 2.1.4 Bir R halkasının elemanlarından oluşturulan tüm $n \times n$ li matrisleri kümesi olan $\text{Mat}(n, R)$, bilinen matrisler toplamı ve çarpımı işlemlerine göre halkadır (Alizade ve Pancar, 1999).

Tanım 2.1.5 R birimli bir halka ve $1_R \neq 0_R$ olsun. $0 \neq a \in R$ için $ab = ba = 1_R$ olacak şekilde bir $b \in R$ varsa b ye a ’nın **çarpımsal tersi** denir.

Birimli bir R halkasında $0 \neq a \in R$ elemanın çarpımsal tersi varsa taktır, ve a^{-1} ile gösterilir.

Örnek 2.1.6 $\mathbb{Z}_{10}$ halkası için $1^{-1} = 1$, $3^{-1} = 7$, $7^{-1} = 3$, $9^{-1} = 9$ dur.

Tanım 2.1.7 R bir halka S, R nin boştan farklı olan bir alt kümesi olsun. Eğer S, R deki işlemlere göre bir halka ise S ye R nin bir **alt halkası** denir (Alizade ve Pancar, 1999).

Tanım 2.1.8 $I, (R, +)$ nin bir alt grubu olmak üzere $RI \subset I$ oluyorsa I ya R nin **sol ideali** ve $IR \subset I$ oluyorsa I ya R nin **sağ ideali** denir. I hem sağ hem de sol ideal ise I ya R nin **ideali** denir (Wisbauer, 1991).

R ve $0, R$ halkasının aşıkır idealleridir. R halkasının kendisinden farklı ideallerine **öz ideal** denir (Pancar ve Türkmen, 2014).

Örnek 2.1.9 $\mathbb{Z}$ halka esas idealinin her alt halkası ve her ideali $n\mathbb{Z}$ formundadır (Alizade ve Pancar, 1999).

Önerme 2.1.10 R halkasının bir I sol ideali halkanın birim elamanını içeriyorsa $R = I$ dir (Alizade ve Pancar, 1999).

Tanım 2.1.11 R ve S iki halka olmak üzere R halkasının S halkasına olan $f: R \rightarrow S$ fonksiyonu $\forall a, b \in R$ için

$$f(a + b) = f(a) + f(b) \text{ ve } f(ab) = f(a)f(b)$$

eşitlikleri gerçekleşirse f ye **homomorfizma** (veya **halka homomorfizması**) denir (Alizade ve Pancar, 1999).

Tanım 2.1.12 R bir halka ve I, R halkasının bir (sağ veya sol) ideali olsun.

Eğer I ideali tek bir $a \in R$ elemanı tarafından üretiliyorsa, I idealine **esas** (sağ veya sol) **ideal** denir. Bu durumda I sağ ideali $I = aR = \{aR | r \in R\}$ şeklindedir.

Her ideali esas sağ (sol) ideal olan R halkasına **sağ (sol) esas ideal halkası** denir (Wisbauer, 1991).

Tanım 2.1.13 R bir halka ve M, R nin bir sağ (sol) ideali olmak üzere şayet $M \neq R$ ve I, R nin $M \subset I \subset R$ olacak şekilde sağ (sol) ideali iken $I = M$ veya $I = R$ ise M idealine R nin **sağ (sol) maksimal ideal** denir (Lam, 1991)

Örnek 2.1.14 $p \in \mathbb{Z}$ asal sayı olmak üzere $p\mathbb{Z} = (p)$ ideali, $\mathbb{Z}$ halkasının bir maksimal idealidir.

Tanım 2.1.15 R bir halka ve $0 \neq a \in R$ olmak üzere $ba = 0$ ($ab = 0$) olacak şekilde bir $0 \neq b \in R$ varsa a elemanına R halkasının bir sağ (sol) **sıfır bölene** denir. Hem sağ hem de sol sıfır bölen olan elemana halkanın sıfır bölene denir (Anderson ve Fuller, 1992).

Tanım 2.1.16 Birimli, değişmeli ve sıfır dışında sıfır bölene olmayan bir halkaya **tamlık bölgesi** (**integral domain**) denir (Çallıalp ve Tekin, 2009).

Tanım 2.1.17 R bir halka ve I, R nin bir ideali olsun. Her $(a + I), (b + I) \in R/I$ ve $a, b \in R$ için

$$(a + I) + (b + I) = (a + b) + I \text{ ve } (a + I).(b + I) = (a.b) + I$$

ile tanımlanan toplama ve çarpma işlemleri ile $(R/I, +, .)$ bir halkadır ve bu halkaya R nin I ya göre **bölüm halkası** denir ($R/I = \{a + I : a \in R\}$) (Wisbauer, 1991).

Tanım 2.1.18 R tamlık bölgesinin sıfırdan farklı her elemanının tersi var ise, R halkasına **cisim** denir.

Örnek 2.1.19 Reel sayılar halkası $\mathbb{R}$ ve rasyonel sayılar halkası $\mathbb{Q}$ birer cisimdirler.

2.2 Modüller

Tanım 2.2.1 R bir halka ve $(M, +)$ değişmeli bir grup olmak üzere, $f : M \times R \rightarrow M$ fonksiyonu verilmiş olsun. $f(m, r) \in M$ elemanı kısaca mr ile gösterilsin. $\forall r, s \in R$ ve $\forall m, n \in M$ için;

- i) $(m + n)r = mr + nr$
- ii) $m(r + s) = mr + ms$
- iii) $m(rs) = (mr)s$

yukarıdaki şartlar sağlanıyorsa M ye **sağ R -Modül** denir ve M_R ile gösterilir.

Eğer R birimli halka ve $\forall m \in M$ için

- iv) $m1_R = m$ oluyorsa M ye **üniter (birimsel) sağ R -modül** denir.

Sol R -modül benzer şekilde tanımlanır (Facchini, 1998).

Her değişmeli grup bir üniter $\mathbf{Z}$ -modüldür.

Önerme 2.2.2 Birimli her R halkası aynı zamanda bir sağ ve sol R -modüldür (Rotman, 1979).

Tanım 2.2.3 M bir R -modül ve N, M abel grubunun alt grubu olsun. $\forall r \in R$ ve $\forall n \in N$ için $nr \in N$ oluyor ise N ye M modülünün **alt modülü** denir ve $N \leq M$ ile gösterilir (Rotman, 1979).

M modülünün kendisine eşit olmayan alt modüllerine M nin öz alt modülleri denir ve $N \subsetneq M$ şeklinde gösterilir (Rotman, 1979).

Örnek 2.2.4 R sağ modül olarak düşünülürse R nin alt modülleri R nin sağ idealleri olur (Rotman, 1979)

Tanım 2.2.5 $N \leq M$ ve $N \neq M$ olmak üzere M nin N yi öz alt modül olarak içeren öz alt modülü bulunmuyorsa N ye M nin **maksimal alt modülü** denir. Başka bir deyişle $N \leq K \leq M$ durumu sadece $K = N$ ve $K = M$ için gerçekleşirse N ye M nin maksimal alt modülü denir (Alizade ve Pancar, 1999).

Tanım 2.2.6: M bir modül ve $N \leq M$ olsun. M nin sıfırdan farklı her alt modülü ile N nin kesişimi sıfırdan farklı ise, başka bir deyişle her $U \leq M$ için $N \cap U = 0$ iken $U = 0$ oluyorsa, N ye M nin **büyük (essential (large)) alt modülü** denir ve $N \trianglelefteq M$ ile gösterilir. Bu takdirde, M ye N nin bir **büyük genişlemesi** denir (Alizade ve Pancar, 1999).

Örnek 2.2.7 $p \in \mathbb{Z}$ asal sayı olmak üzere, $p\mathbb{Z}$ modülü $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ modülünün bir maksimal alt modülüdür.

Örnek 2.2.8 $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ modülünün bir maksimal alt modülü yoktur.

Tanım 2.2.9 M bir R -modül ve $X \subseteq M$ olsun. M nin X kümesini kapsayan bütün alt modüllerinin arakesitine **X tarafından üretilen alt modül** denir ve $\langle X \rangle$ ile gösterilir.

Eğer X sonlu elemanlı ise, X kümesi tarafından üretilen alt modüle **sonlu üretilmiş alt modül** denir.

$X = \{a\}$ şeklinde tek elemanlı ise,

$$\langle a \rangle = aR = \{ar \mid r \in R\}$$

modülüne **devirli alt modül** denir.

Ayrıca $\{B_i \mid i \in I\}$, M nin alt modüllerinin bir ailesi olmak üzere,

$$\langle X \rangle = \cup_{i \in I} B_i$$

kümesinin ürettiği alt modüle B_i **modüllerinin toplamı** denir ve

$$\langle X \rangle = \cup_{i \in I} B_i = \sum \cup_{i \in I} B_i$$

ile gösterilir (Wisbauer, 1991).

Eğer $M = \langle X \rangle$ ve X sonlu ise, M ye sonlu üretilmiş R –modül denir. Özel olarak, $M = \langle a \rangle$ olacak şekilde $a \in M$ varsa M ye **a tarafından üretilmiş devirli R -modül** denir.

Önerme 2.2.10 M bir R -modül olsun. M R -modülünün devirli olması için gerek ve yeter koşul $M \cong R/I$ olacak şekilde R halkasının bir I sağ idealinin olmasıdır (Rotman, 1979).

Tanım 2.2.11 M sıfırdan farklı bir R -modül olsun. M modülünün kendisinden ve sıfırdan farklı bir alt modülü yoksa M ye **basit modül (simple)** denir (Anderson ve Fuller, 1992).

R bir cisim ise, basit R -modülleri tek boyutlu R -vektör uzaylarıdır. Öte yandan, eğer $R = \mathbb{Z}$ ise, o zaman basit R -modülleri basit Abelian gruplardır ve bu nedenle asal mertebeden döngüsel gruplardır, yani, bir A Abelian grubu basit bir $\mathbb{Z}$ -modülüdür ancak ve ancak bir p asal sayısı için $A \cong \mathbb{Z}p$ dir.

Önerme 2.2.12 M bir R -modül olsun. I, R nin bir maksimal sağ ideali olmak üzere M basit R -modüldür ancak ve ancak $M \cong R/I$ dir (Rotman, 1979).

Tanım 2.2.13 Bir M R -modülü için M nin tüm basit alt modüllerinin toplamına M nin **sokulu** denir.

$$Soc(M) = \sum \{K : K, M \text{ nin basit alt modülü}\}$$

şeklinde gösterilir (Anderson ve Fuller, 1992).

Tanım 2.2.14 M bir R -Modül olmak üzere $K \leq M$ olsun. $M/K = \{m + K : m \in M\}$ bölüm grubu $\forall r \in R$ ve $\forall (m + K) \in M/K$ için $(m + K)r = mr + K$ tanımlı işlemiyle bir R -modül olur. Bu M/K R -modülüne **bölüm modülü** denir (Rotman, 1979).

Tanım 2.2.15 T ve S R –modül olsun.

$$S \oplus T = \{(s, t) : s \in S \text{ ve } t \in T\}$$

kümesine **(dış) direk toplam** denir. $\forall x, y \in S, \forall a, b \in T$ ve $\forall r \in R$ için

- i) $(x, a) + (y, b) = (x + y, a + b)$
- ii) $(x, a)r = (xr, ar)$

işlemleri sağlanırsa $S \oplus T$ ye R -modül denir (Atiyah ve Macdonald, 1969).

Tanım 2.2.16 I kümesiyle indekslenmiş R -modüller ailesi $\{M_i\}_I$ olsun. Bu ailenin direk çarpımı

$\prod_{i \in I} M_i = \{f : f : I \rightarrow \cup_{i \in I} M_i, \forall i \in I \text{ için } f(i) \in M_i\}$
 şeklindedir. $f, g \in \prod_{i \in I} M_i$ ve $r \in R$ için

- i) $\forall i \in I \text{ için } (f + g)(i) = f(i) + g(i)$
- ii) $\forall i \in I \text{ için } (fr)(i) = f(i)r$

işlemleri için $\prod_{i \in I} M_i$ bir R -modül olur. Bu modüle $\{M_i\}_I$ R -modüllerin **direkt çarpımı** denir.

$\{\oplus_{i \in I} M_i = \{f : f \in \prod_{i \in I} M_i \forall i \in I \text{ için } f(i) \in M_i \text{ ve } i \text{ dışında sonlu çoklukta } f(i) = 0\}$
 M_i R -modüllerinin dış direk toplamı $\prod_{i \in I} M_i$ R -modülünün bir alt modülüdür.

Eğer I sonlu ise $\prod_{i \in I} M_i = \oplus_{i \in I} M_i$ olur (Rotman, 1979).

Tanım 2.2.17 M bir R -modül, $\{A_i\}_{i \in I}$ alt modüllerinin bir ailesi olsun.

- i) $\sum_{i \in I} A_i$
- ii) $\forall i \in I \text{ için } A_i \cap \sum_{j \neq i} A_j = 0$

olmak üzere M modülüne $\{A_i\}_{i \in I}$ alt modüller ailesinin bir **iç direkt toplamı** veya **direkt toplamı** denir $M = \oplus_{i \in I} A_i$ ile gösterilir. Her A_i alt modülüne M modülünün **direkt toplam terimi** denir (Wisbauer, 1991).

Özel olarak M modülünün A_1 ve A_2 alt modülleri için

$$M = A_1 \oplus A_2 \text{ dır ancak ve ancak } M = A_1 + A_2 \text{ ve } A_1 \cap A_2 = 0 \text{ dır.}$$

Tanım 2.2.18 M sıfırdan farklı bir R -modül olsun. M nin aşıkâr alt modülleri olan M ve sıfırdan başka direkt toplam terimi olmayan modülüne **parçalanamaz** denir. Parçalanamaz bir modüle izomorf olan her modül de parçalanamazdır (Wisbauer, 1991).

Teorem 2.2.19 $\{K_\alpha\}_{\alpha \in A}$, M nin basit alt modüllerinin bir ailesi olmak üzere

$$M = \oplus_{\alpha \in A} K_\alpha$$

parçalanışı varsa M ye **yarı basit modül (semisimple)** denir (Anderson ve Fuller, 1992).

Bu tanımdan hareketle her basit modülün yarı basit modül olduğu açıktır.

Önerme 2.2.20 M, R halkası üzerinde bir modül olsun. Aşağıdaki koşullar eşdeğerdir:

- i) M yarı basittir;
- ii) M , basit alt modüllerinin bir ailesinin toplamıdır;
- iii) M 'nin her alt modülü, M 'nin direkt toplam terimidir.

Tüm yarı basit sağ R modüllerinin sınıfı, alt modüller, homomorfik görüntüler ve rastgele direkt toplamalar altında kapalıdır.

Örnek 2.2.21 p ve q birer asal sayı olmak üzere $\mathbb{Z}_{pq}$ yarı basit $\mathbb{Z}$ -modüldür (Anderson ve Fuller , 1992).

Tanım 2.2.22 R halkası bir tamlık bölgesi olsun. R nin her öz ideali sonlu sayıda asal idealin çarpımı olarak tek türlü yazılabiliyorsa, R halkasına **Dedekind bölgesi** denir (Hungerford, 1973).

2.3 Modül Homomorfizmaları

Tanım 2.3.1 M ve N iki sağ R -modül olsun. Aşağıda verilen koşulları sağlayan $f : M \rightarrow N$ fonksiyonuna **sağ R -modül homomorfizması** denir.

- i) $\forall a, b \in M$ için $f(a + b) = f(a) + f(b)$
- ii) $\forall a \in M$ ve $\forall r \in R$ için $f(ar) = f(a)r$ (Kasch, 1982).

Tanım 2.3.2 Eğer f homomorfizması;

- i) birebir ise f ye **monomorfizma**,
- ii) örten ise **epimorfizma**,
- iii) birebir ve örten ise **izomorfizma** denir.

$f : M \rightarrow N$ izomorfizma ise M ve N modüllerine **izomorf modüller** denir ve $M \cong N$ ile gösterilir (Kasch, 1982).

Tanım 2.3.3 M bir R - Modül olmak üzere $f : M \rightarrow M$ bir R -modül homomorfizması ise f ye **endomorfizma** denir (Anderson ve Fuller, 1992).

Örnek 2.3.4 R değişmeli halka, M bir R - modül ve $a \in R$ olmak üzere

$$f_a : M \rightarrow M \quad \forall b \in M \text{ için } f_a(b) = ab$$

olarak tanımlanan f_a bir R -modül endomorfizmadır (Anderson ve Fuller, 1992).

Tanım 2.3.5 M bir sağ R -modül modül ve $N \leq M$ olsun.

$$\forall a \in N \text{ için } i(a) = a \text{ ile tanımlı } i : N \rightarrow M$$

dönüşümü bir modül monomorfizması olup bu monomorfizmaya **içerme homomorfizması** denir.

Tanım 2.3.6 $\pi : M \rightarrow M/N$ $\pi(m) = m + N$ ile tanımlı π homomorfizması bir epimorfizma olup bu epimorfizmaya **doğal (kanonik) homomorfizma** denir.

Tanım 2.3.7 M bir R -modül olmak üzere

$$1_m(m) = m \text{ ile tanımlı } 1_m : M \rightarrow M$$

bir R modül izomorfizması olup bu izomorfizmaya **birim (idantik) homomorfizma** denir (Kasch, 1982).

Tanım 2.3.8 $f : M \rightarrow N$ bir R -modül homomorfizması olmak üzere;

- i) $\{a \in M : f(a) = 0\}$ kümesine **f nin çekirdeği** denir ve $\text{Çek}(f)$ ile gösterilir.
- ii) $\{f(a) : a \in M\}$ kümesine ise **f nin görüntüsü** denir $\text{Gör}(f)$ ile gösterilir (Kasch, 1982).

Teorem 2.3.9 $\pi : M \rightarrow M/N$ doğal (kanonik) homomorfizma olmak üzere $\text{Çek}(\pi) = N$ dir (Kasch, 1982).

Teorem 2.3.10 (1.İzomorfizma Teoremi) M ve N R -modülleri için $f : M \rightarrow N$ R -modül homomorfizması olsun. O halde,

$$\psi : M/\text{Çek } f \rightarrow \text{Gör } f$$

R -modül izomorfizması vardır (Rotman, 1979).

Teorem 2.3.11 (2. İzomorfizma Teoremi) M bir R -modül ve $S, T \leq M$ olsun.

$$S/(S \cap T) \rightarrow (S + T)/T$$

R -modül izomorfizması vardır (Rotman, 1979).

Teorem 2.3.12 (3.İzomorfizma Teoremi) M bir R -modül olmak üzere $S, T \leq M$ ve $T \leq S$ olmak üzere

$$(M/T)/(S/T) \rightarrow M/S$$

R -modül izomorfizması vardır (Rotman, 1979).

2.4 Hom FUNKTORU

Tanım 2.4.1 ${}_R A$ ve ${}_R B$ sol R -modüller olmak üzere, tüm $f : {}_R A \rightarrow {}_R B$ homomorfizmalar kümesini $\text{Hom}_R(A, B)$ veya kısaca $\text{Hom}(A, B)$ ile gösterelim.

$f, g \in \text{Hom}(A, B)$ homomorfizmalarının, $f + g$ toplamını her $a \in A$ için

$$(f + g)(a) = f(a) + g(a)$$

olarak tanımlayalım. $0 : A \rightarrow B$ homomorfizmasını, her $a \in A$ için

$$0(a) = 0$$

olarak ve bir $f : A \rightarrow B$ homomorfizması verildiğinde $-f : A \rightarrow B$ homomorfizmasını

$$(-f)(a) = -f(a)$$

olarak tanımlayalım.

$$f + g, \quad 0, \quad (-f) \in \text{Hom}(A, B)$$

$$(f + g) + h = f + (g + h),$$

$$f + g = g + f$$

sağlanırsa, $\text{Hom}(A, B)$ bir **Abel grubu** oluşturur. Bu gruba **homomorfizmalar grubu** denir.

$f : B \rightarrow C$ bir homomorfizma ise,

$$\text{Hom}(A, f) : \text{Hom}(A, B) \rightarrow \text{Hom}(A, C)$$

fonksiyonunu ($\text{Hom}(A, f)$ yi kısaca f^* ile gösterelim) $f^*(g) = f \circ g$ ile tanımlayalım.

$f \circ g$, iki homomorfizmanın bileşkesi olduğundan bir homomorfizmadır, yani

$f \circ g \in \text{Hom}(A, C)$ dir ve

$$f * (g + h) = f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h = f * (g) + f * (h)$$

olduğundan $f *$ bir homomorfizmadır (Alizade ve Pancar, 1999).

Teorem 2.4.2 $\{A_k \mid k \in K\}$ bir modüller topluluğu, B bir modül olsun. Bu durumda,

$i_k: A_k \rightarrow \bigoplus_{k \in K} A_k$ gömme fonksiyonu olmak üzere,

$$\alpha(f) = (f \circ i_k)$$

kuralı ile verilen

$$\alpha : (\text{Hom} \bigoplus_{k \in K} A_k, B) \rightarrow \prod_{k \in K} \text{Hom}(A_k, B)$$

fonksiyonu bir izomorfizmadır (Alizade ve Pancar, 1999).

Teorem 2.4.3 A bir modül ve $\{B_k \mid k \in K\}$ bir modüller topluluğu olsun. $p_k : \prod_{k \in K} B_k \rightarrow B_n$,

n . izdüşüm olmak üzere $\beta(f) = (p_k \circ f)$ kuralı ile tanımlanan

$$\beta : \text{Hom}(A, \prod_{k \in K} B_k) \rightarrow \prod_{k \in K} \text{Hom}(A, B_k)$$

fonksiyonu bir izomorfizmadır (Alizade ve Pancar, 1999).

Önerme 2.4.4 Her A sol R -modülü için $\text{Hom}_R(A, R)$ modülü A ya izomorftur (Alizade, 2016).

Önerme 2.4.5 $f_n : A \rightarrow A$, $n \neq 0$ tam sayısı ile çarpım homomorfizması ise (yani $f_n(a) = na$ kuralı ile tanımlanmışsa), her B grubu için

$$(f_n) * : \text{Hom}(B, A) \rightarrow \text{Hom}(B, A) \text{ ve} \\ (f_n) * : \text{Hom}(A, B) \rightarrow \text{Hom}(A, B)$$

homomorfizmaları da n ile çarpımdır (Alizade ve Pancar, 1999).

Önerme 2.4.6 A grubunun bölünebilir olması, her n pozitif tam sayısı için A da n ile çarpma homomorfizmasının (f_n) nin bir epimorfizma olmasına denktir (Alizade ve Pancar, 1999).

Her elemanın mertebesi bir sabit p asal sayısının kuvveti olan gruba p -primer grup veya **p -grup** denir.

Aşağıda Abel gruplarının homomorfizmalar grubunun bazı özellikleri verilmiştir:

- i) Her A grubu için $\text{Hom}(Z_m, A) \cong A[m]$ dir.
- ii) p ve q birbirinden farklı asal sayılar olmak üzere, A bir p – grup ve B bir q – grup ise, $\text{Hom}(A, B) = 0$ dir.

$n \neq 0$ tam sayısı için $B[n] = 0$ ise, her A grubu için $\text{Hom}(A, B)[n] = 0$ dir (Alizade ve Pancar, 1999).

Tanım 2.4.7 Verilen A ve B R -modülleri için A nın B ye göre genişlemesi aşağıdaki şekilde bir kısa tam dizisidir.

$$0 \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow A \rightarrow 0.$$

İki genişlemenin

$$0 \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow A \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow B \rightarrow E' \rightarrow A \rightarrow 0$$

Değişmeli bir diyagram varsa, eşdeğer olduğu söylenir. (A 'nın B 'ye genişlemesi olarak)

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & E & \longrightarrow & A \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow l & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & A \longrightarrow 0 \end{array}$$

Burada orta ok bir izomorfizmdir. A 'nın B 'ye göre bir genişlemesi, trivial genişlemeye eşdeğerse **split (bölünmüş)** olarak adlandırılır.

$$0 \rightarrow B \rightarrow A \oplus B \rightarrow A \rightarrow 0.$$

A 'nın B 'ye göre genişlemelerinin denkliği ile $Ext_R^1(A, B)$ elemanları arasında bire bir karşılık vardır. Trivial genişleme $Ext_R^1(A, B)$ 'nin sıfır ögesine karşılık gelir.

$Ext_R^1(A, B)$, A modülünün B modülü aracılığıyla olan tüm genişlemelerinin denklik sınıflarının kümesidir (Rotman, 1979).

Ayrıca herhangi A ve B R -modülleri için $Ext_R^0(A, B) \cong Hom_R(A, B)$ dir.

2.5 Tam Diziler ve Parçalanabilir Tam Diziler

Tanım 2.5.1 R -modül homomorfizmalarının ve R -modüllerinin sonlu veya sonsuz dizisi

$$\dots M_{n+1} \xrightarrow{f_n} M_n \xrightarrow{f_{n+1}} M_{n-1} \rightarrow \dots$$

şeklinde dir. Eğer $Gör f_n = Çek f_{n+1}$ ise bu diziye **tam dizi** denir (Rotman, 1979).

Önerme 2.5.2 $0 \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{h} C \xrightarrow{e} 0$ dizisi tam dizi ise g bir monomorfizma, h bir epimorfizmadır. Ayrıca $Ker g \cong A$ ve $C \cong B/Gör(h)$ dir. Bu takdirde izomorf modülleri özdeş duruma getirerek $C = B/A$ alınabilir (Alizade ve Pancar, 1991).

Tanım 2.5.3 $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ formundaki tam diziye **kısa tam dizi** denir (Alizade ve Pancar, 1991).

Örnek 2.5.4 $f : M \rightarrow K$ homomorfizması için $0 \rightarrow Çek f \rightarrow M \rightarrow f(M) \rightarrow 0$ dizisi bir kısa tam dizidir.

Önerme 2.5.5 $T \subseteq S \subseteq M$ bir alt modül zinciri ise, $0 \rightarrow S/T \xrightarrow{f} M/T \xrightarrow{g} M/S \rightarrow 0$ kısa tam dizisi vardır.

Teorem 2.5.6 $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ ($0 \leftarrow A \xleftarrow{h} B \xleftarrow{k} C \leftarrow 0$) kısa tam dizisi için;

- i) $hf = 1_A$ olacak şekilde bir $h : B \rightarrow A$ homomorfizması bulunur.
- ii) $\text{Gör}(f)$ alt modülü B nin bir direkt toplam terimidir.
- iii) $gk = 1_C$ olacak şekilde bir $k : C \rightarrow B$ homomorfizması bulunur.

koşulları denktir (Alizade ve Pancar, 1991).

Tanım 2.5.7 Teorem 2.5.6 da verilen denk koşullardan birini sağlayan kısa tam diziyeye **parçalanabilir** denir (Alizade ve Pancar, 1991).

Önerme 2.5.8 $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ R -modüllerin kısa tam dizisi parçalanabilir ise

$$B \cong A \oplus C$$

olur. (Rotman, 1979).

2.6 Serbest Modüller

Tanım 2.6.1 F bir R -modül olsun. F, R 'nin kopyalarının bir doğrudan toplamına izomorfik ise F ye bir **serbest R -modül** denir. Yani B indeks kümesi ve $\forall b \in B$ için $R_b = \langle b \rangle \cong R$ olmak üzere $F = \bigoplus_{b \in B} R_b$ tir. B kümesine F nin bir **bazı** denir. (Rotman, 1979).

Serbest bir $\mathbf{Z}$ -modülü, serbest değişmeli (Abelian) grup olarak adlandırılır. Her R halkası için R , kendi üzerinde bir sağ (ve sol) R -modül olarak, bir serbest R -modüldür.

Serbest bir modülün bazı ile, bir vektör uzayının bazı güçlü bir benzerliğe sahiptir. Eğer k bir cisim ise, o zaman her V_k vektör uzayının Lineer Cebir anlamında bir bazı vardır. Bu durumda iki temel kavramının örtüştüğünü görmek kolaydır. Ayrıca, bir vektör uzayı V_k sonlu üretilmiş bir serbest k -modüldür ancak ve ancak V_k sonlu boyutludur.

Öneri 2.6.2 Her M modülü bir serbest modülün bölüm modülüne izomorftur (Alizade ve Pancar, 1999).

Önerme 2.6.3 R sıfır olmayan bir değişmeli halka olsun.

- i) Serbest bir R -modül F 'nin herhangi iki bazı aynı kardinaliteye sahiptir.
- ii) Serbest F ve G R -modülleri birbirine izomorftir ancak ve ancak her birinin bazlarının kardinalitesi aynıdır.
- iii) Eğer m ve n doğal sayılarsa, $R^m \cong R^n$ ancak ve ancak $m = n$ dir.

2.7 Projektif Modüller

Tanım 2.7.1 Bir P modülünü alalım. Eğer her $f : A \rightarrow B$ epimorfizması ve $g : P \rightarrow B$ homomorfizması için $g = fh$ olacak şekilde $h : P \rightarrow A$ homomorfizması bulunursa P ye **projektif modül** denir (Alizade ve Pancar, 1999).

Teorem 2.7.2 P bir R -modül olmak üzere aşağıda verilenler eş değerdir.

- i) P projektiftir
- ii) Her M modülü için $M \rightarrow P \rightarrow 0$ dizisi parçalanır.
- iii) P modülü bir serbest modülün bir direkt toplamına izomorftur (Anderson ve Fuller, 1992).

Teorem 2.7.3 $\{P_k \mid k \in K\}$ bir modüller topluluğu olsun.

$$P = \bigoplus_{k \in K} P_k$$

direkt toplamının projektif olması için gerek ve yeter koşul P_k ($k \in K$) modülünün projektif olmasıdır (Alizade ve Pancar, 1999).

Önerme 2.7.4 Bir P R -modülünün projektif modül olması için gerek ve yeter koşul

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} P \rightarrow 0$$

tam dizisinin parçalanır olmasıdır (Rotman, 1979).

Teorem 2.7.5 Her F serbest modülü projektiftir (Alizade ve Pancar, 1999).

Önerme 2.7.6 P projektif (serbest) olmak üzere her A modülü için bir $f : P \rightarrow A$ epimorfizması vardır (Alizade ve Pancar, 1999).

Önerme 2.7.7 Projektif modüllerin direkt toplamı projektiftir (Anderson ve Fuller, 1992).

Önerme 2.7.8 P projektif sağ R -modülü sonlu üretilmiştir ancak ve ancak P , n bir doğal sayı olmak üzere, R^n serbest sağ R -modülünün direkt toplamıdır.

Serbest olmayan projektif R -modül örneğini aşağıdaki gibi verebiliriz.

Örnek 2.7.9 $R = \mathbb{Z}_6$ değişmeli halkası olsun. R halkasının iki ideali $I = \{0, 2, 4\}$ ve $J = \{0, 3\}$ olmak üzere, $R = I \oplus J$ dir. I ve J idealleri projektif R -modüllerdir fakat serbest R -modül değildir.

Tanım 2.7.10 M bir sağ R -modül olsun. $m, n \in N$ olmak üzere,

$$R^m \rightarrow R^n \rightarrow M \rightarrow 0$$

tam dizisi var ise, M modülüne **sonlu temsil edilen (finitely presented) modül** denir.

Önerme 2.7.11 Her sonlu üretilen projektif sağ R -modül sonlu temsil edildir (Rotman, 1979).

Sonuç 2.7.12 M sonlu temsil edilen bir R -modül ve

$$0 \rightarrow K \rightarrow F \rightarrow M \rightarrow 0$$

tam dizi olsun. F sonlu üretilmiş serbest R -modül ise, K sonlu olarak üretilmiştir.

Önerme 2.7.13 R bir sağ Noether halkası ise, her sonlu üretilen sağ R -modül sonlu temsil edildir.

Tanım 2.7.14 Sonlu olarak üretilen her sağ ideali sonlu temsil edilen R halkasına **sağ uyumlu (coherent)** denir.

Tanım 2.7.15 Her sağ ideali projektif olan R halkasına **kalıtsal (hereditary)** denir.

Tanım 2.7.16 Her sonlu üretilen sağ ideali projektif olan R halkasına **yarıkalıtsal (semihereditary)** denir.

Önerme 2.7.17 R bir sağ kalıtsal halkadır ancak ve ancak her projektif modülün her alt modülü projektiftir.

Teorem 2.7.18 Bir P modülü için aşağıdakiler denktir

- i) P projektiftir;
- ii) Her A modülü ve her $n \geq 1$ için $Ext_R^n(P, A) = 0$ dır;
- iii) Her A modülü için $Ext_R^1(P, A) = 0$ dır (Alizade ve Pancar, 1991).

2.8 İnjektif Modüller ve Düz Modüller

Tanım 2.8.1 I bir modül olsun. Her $f : A \rightarrow B$ monomorfizması ve $g : A \rightarrow I$ homomorfizması için $hf = g$ olacak şekilde $h : B \rightarrow I$ homomorfizması varsa I ya **injektif modül** denir (Alizade ve Pancar, 1999).

Önerme 2.8.2 M bir R -modül olsun. M nin injektif olması için gerek ve yeter koşul

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$$

kısa tam dizisinin parçalanır olmasıdır (Rotman, 1979).

Teorem 2.8.3 $\{I_k \mid k \in K\}$ bir modüller topluluğu olsun.

$$I = \prod_{k \in K} I_k$$

direkt çarpımının injektif olması için gerek ve yeter şart I_k ($k \in K$) modüllerinin her birinin injektif olmasıdır (Alizade ve Pancar, 1999).

Sonuç 2.8.4 Her injektif modülün sonlu direk toplamı da injektif modüldür (Rotman, 1979).

Teorem 2.8.5 (Baer Kriteri) E bir sağ R -modül olsun. E modülünün injektif olması için gerek ve yeter koşul her U sağ ideali için her $k: U \rightarrow R$ modül homomorfizmasının bir $m: R \rightarrow E$ modül homomorfizmasına genişletilebilmesidir.

Teorem 2.8.6 Bir M $\mathbf{Z}$ -modülünün injektif olması için gerek ve yeter koşul M nin bölünebilir (yani, her $x \in M$ ve her $n \in \mathbf{Z}$ için $x = na$ olacak biçimde bir $a \in M$ vardır) olmasıdır.

Tanım 2.8.7 M bir R -modül ve N sonlu temsil edilen modül olsun. Her $g : X \rightarrow M$ örten homomorfizması ve $f : N \rightarrow M$ homomorfizması için $gh = f$ olacak şekilde bir $h : N \rightarrow X$ homomorfizması varsa M ye **düz (flat) modül** denir (Durğun, 2022).

Önerme 2.8.8 Her projektif R -modül düz modüldür (Rotman, 1979).

Teorem 2.8.9 M bir sonlu gösterime sahip R -modül olsun. M nin düz modül olması için gerek ve yeter koşul M nin projektif modül olmasıdır (Rotman, 1979).

Önerme 2.8.10 M bir R -modül olmak üzere M nin her sonlu üretilmiş alt modülü düz modül ise M düz modüldür (Rotman, 1979).

Tanım 2.8.11 R bir halka olmak üzere her düz sağ R -modülün projektif olduğu R halkasına **sağ mükemmel (perfect) halka** denir (Goodearl 1976).

Tanım 2.8.12 Bir R halkasının sağ ideallerinin her azalan zinciri sonlu bir adımda duruyorsa, R 'ye **sağ Artinian halkası** denir.

Tanım 2.8.13 Bir R halkasının sağ ideallerinin her artan zinciri sonlu bir adımda duruyorsa, R 'ye **sağ Noetherian halkası** denir.

Örnek 2.8.14 $\mathbb{Z}$ tamsayı halkası ve $\mathbb{Z}[x]$ polinom halkası Noetherian halkadır.

Önerme 2.8.15 R bir sağ Noetherian halkası ise, sonlu üretilen her sağ R -modülün her alt modülü sonlu üretilendir.

Önerme 2.8.16 R bir sağ Artinian halkasıdır ancak ve ancak R sağ Noetherian ve sağ mükemmel halkadır.

2.9 Tekil ve Tekilsiz Modüller

Tanım 2.9.1 M bir sağ R -modül olmak üzere $m \in M$ için

$$\{r \in R \mid mr = 0 \text{ (} rm = 0 \text{)}\}$$

kümesine m nin **sıfırlayıcısı (annihilator)** denir ve $\text{ann}_r(m)$ ($\text{ann}_l(m)$) ile gösterilir (Lam, 1998).

Tanım 2.9.2 M nin sıfırdan farklı her alt modülü ile arakesiti sıfırdan farklı olan sıfırdan farklı bir A alt modülüne **essential (large) alt modül** denir ve $A \trianglelefteq M$ ile gösterilir.

Tanım 2.9.3 M bir sağ R -modül olmak üzere, eğer $m \in M$ için $\text{ann}_r(m) \trianglelefteq R_R$ ise m 'ye **Tekil (singular)** eleman denir. M 'nin tekil elemanlarının kümesi $Z(M)$ ile gösterilir (Lam, 1998).

Teorem 2.9.4 M bir sağ R -modül olsun. $Z(M)$ alt modüldür ($Z(M)$ alt modülüne, M nin tekil alt modülü denir) (Lam, 1998).

Teorem 2.9.5 $f : M \rightarrow N$ herhangi bir R -homomorfizması ise $f(Z(M)) \leq Z(N)$ dir (Lam, 1998).

Tanım 2.9.6 $Z(M) = M$ ise M ye **tekil (singular) R -modül** denir. $Z(M) = 0$ ise M ye **tekilsiz (nonsingular) modül** denir. Öte yandan R bir halka olmak üzere $Z(R_R)$ idealine R nin **sağ tekil ideali** denir ve Z_r ile gösterilir (Goodearl, 1976).

Önerme 2.9.7 B tekil olmayan modül ve $A \leq B$ olsun. $A \trianglelefteq B$ dir ancak ve ancak B/A tekildir (Goodearl, 1976).

Önerme 2.9.8 Tüm tekil sağ R -modüllerin sınıfı alt modüller, bölüm modülleri ve dik toplamalar altında kapalıdır (Goodearl, 1976).

Önerme 2.9.9 Her basit sağ R -modül ya tekil ya da projektiftir (Goodearl, 1976).

Sonuç 2.9.10 Tekil olmayan yarı basit modüller projektiftir (Goodearl, 1976).

Önerme 2.9.11 R bir kalıtsal halka ise, her projektif sağ R -modül tekilsizdir.

2.10 Noetherian ve Artinian Modüller

Tanım 2.10.1 M bir R -modül olmak üzere M nin alt modüllerinin oluşturduğu her

$$I_1 \leq I_2 \leq I_3 \leq \dots$$

artan dizisi sonlu ise M ye **artan zincir koşulunu sağlar** denir (Rotman, 2000).

Tanım 2.10.2 Artan zincir koşulunu sağlayan R -modüllere **Noetherian R -modül** denir (Rotman, 2000).

Tanım 2.10.3 R halkası bir R -modül (veya sol R -modül) olarak Noetherian ise R halkasına sağ (sol) **Noetherian halka** denir (Rotman, 2000).

Teorem 2.10.4 R bir halka olmak üzere aşağıdakiler eş değerdir.

- i) R , Noetherian halkadır.
- ii) İnjektif R -modüllerin direkt toplamı injektiftir (Kasch, 1982).

Teorem 2.10.5 M bir R -modül olmak üzere aşağıdakiler eş değerdir.

- i) M Noetherian R -modüldür.
- ii) M nin her alt modülü sonlu üretilmiştir.
- iii) M nin alt modüllerinin boştan farklı bir kümesi maksimal eleman içerir (Anderson ve Fuller 1992).

Tanım 2.10.6 M bir R -modül olmak üzere M nin alt modüllerinin oluşturduğu her

$$I_1 \geq I_2 \geq I_3 \geq \dots$$

azalan dizisi sonlu ise M ye **azalan zincir koşulunu sağlar** denir (Anderson ve Fuller 1992).

Tanım 2.10.7 Azalan zincir koşulunu sağlayan R -modüllere **Artinian R -modül** denir (Anderson ve Fuller 1992).

Tanım 2.10.8 R halkası R -modül (veya sol R -modül) olarak Artinian ise R ye sağ (sol) **Artinian halka** denir (Anderson ve Fuller 1992).

Teorem 2.10.9 M bir R -modül olmak üzere aşağıdaki ifadeler eş değerdir.

- i) M Artinian modüldür.
- ii) M modülünün her bölüm modülü sonlu üretilmiştir.
- iii) M modülünün alt modüllerinin boştan farklı kümesi minimal elamana sahiptir (Anderson ve Fuller 1992).

Önerme 2.10.10 R -modüllerin tam dizisi

$$0 \rightarrow K \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$$

olsun. M Artinian (Noetherian) dır ancak ve ancak K ve N Artinian (Noetherian) dır (Anderson ve Fuller 1992).

3. MODÜLLERİN ALT PROJEKTİF BÖLGESİ

Bu bölümde kullandığımız temel bilgiler (Durğun, 2015; Holston ve ark., 2013) çalışmalarından alınmıştır.

Projektif modüller, Modül ve Halka Kuramı ile beraber Homolojik Cebirde önemli bir role sahiptirler. Özellikle sonlu üretilen (temsil edilen) projektif modüller, Morita Kuramı, K-Kuramı, Tilting Kuramı gibi cebir alanlarında doğal olarak ortaya çıkmaktadırlar. (Holston ve ark., 2015) makalesinde tanıtılan alt projektif (subprojective) bölgesi notasyonu, projektif modüllerin $R - Mod$ kategorisinde alternatif bir metodla çalışılmasının öncüsü oldu. Bu makalede önerilen metodla pek çok araştırmacı, modüllerin ve modül sınıflarının projektif ölçülerini ve projektif modüllerin diametrik karşıtlarını araştırmıştır. Son zamanlarda, alt projektiflik bölgesi notasyonu Abel ve kompleksler kategorilerine genişletilerek çalışılmaya başlanmıştır (Amzil ve ark., 2021; Bennis ve ark., 2022).

Tanım 3.1 Verilen M ve N modülleri için her $g : B \rightarrow N$ epimorfizması ve her $f : M \rightarrow N$ homomorfizması için $gh = f$ olacak şekilde bir $h : M \rightarrow B$ homomorfizması varsa M ye N -alt projektif denir. Bir M modülünün alt projektif bölgesi

$$\underline{\mathfrak{Pr}}^{-1}(M) := \{N \in Mod - R : M, N - alt\ projektiftir\}$$

sınıfı olarak tanımlanır.

Lemma 3.2 $M, N \in Mod - R$ olmak üzere, aşağıdaki koşullar denktir.

- i) M, N -alt projektiftir.
- ii) P projektif , her $f : M \rightarrow N$ ve her $g : P \rightarrow N$ epimorfizmi için $gh = f$ olacak şekilde $h : M \rightarrow P$ vardır.
- iii) F serbest , her $f : M \rightarrow N$ ve her $g : F \rightarrow N$ epimorfizmi için $gh = f$ olacak şekilde $h : M \rightarrow F$ vardır.
- iv) P projektif , her $f : M \rightarrow N$ epimorfizmi için $g : P \rightarrow N$ ve $h : M \rightarrow P$ morfizmi olacak şekilde $gh = f$ vardır.

Önerme 3.3 Herhangi bir M modülü için aşağıdakiler denktir.

- i) M projektiftir.
- ii) $\underline{\mathfrak{Pr}}^{-1}(M) = Mod - R$
- iii) $M \in \underline{\mathfrak{Pr}}^{-1}(M)$ dir.

Önerme 3.4 $Hom_R(M, A) = 0$ ise $A \in \underline{\mathfrak{Pr}}^{-1}(M)$ dir.

Önerme 3.5 $\{M_i\}_{i \in I}$ kümesi R -modül olsun. O halde $\underline{\mathfrak{Pr}}^{-1}(\bigoplus_{i \in I} M_i) = \bigcap_{i \in I} \underline{\mathfrak{Pr}}^{-1}(M_i)$ dir.

Önerme 3.6 Eğer $N \in \mathfrak{Br}^{-1}(M)$ ise N nin direkt toplam terimleri $\mathfrak{Br}^{-1}(M)$ in elemanıdır.

Önerme 3.7 $i \in \{1, 2, 3, \dots\}$ için $A_i \in \mathfrak{Br}^{-1}(M)$ ise $\bigoplus_{i=1}^m A_i \in \mathfrak{Br}^{-1}(M)$ dir.

Önerme 3.8 Eğer M sonlu üretilmiş ve, her $i \in I$ için, A_i -alt projektif ise, $M = \bigoplus_{i \in I} A_i$ -alt projektiftir.

Önerme 3.9 R bir halka olmak üzere aşağıda verilen koşullar denktir.

- i) R sağ kalıtsaldır.
- ii) Herhangi bir sağ R -modülünün alt projektif bölgesi alt modüller altında kapalıdır.

Önerme 3.10 Herhangi bir N modülü için aşağıdaki koşullar denktir.

- i) N bir projektif modüle gömülebilir.
- ii) Her E injektif modülü için N, E -alt projektiftir.
- iii) $N, E(N)$ -projektiftir.

Tanım 3.11 Bir R halkasının her basit modülü R_R içine gömülüyse R halkasına **sağ Kasch** denir.

Sonuç 3.12 J , tüm basit sağ R -modüllerin temsilcilerinin bir kümesi olsun. $S = \bigoplus_{M_i \in J} M_i$ sağ R -modülü, Önerme 3.10 de verilen denk koşulları sağlar ancak ve ancak R bir sağ Kasch halkasıdır. I , sonlu gösterime sahip sağ R -modüllerin bir temsilcilerinin kümesi olmak üzere $\mathcal{FP} = \bigoplus_{M_i \in I} M_i$.

Önerme 3.13 $\mathfrak{Br}^{-1}(\mathcal{FP})$ tam olarak düz modüllerden oluşur.

Tüm sağ R -modüllerin alt projektiflerinin kesişimi tam olarak tüm projektif sağ R -modüllerin sınıfıdır. Tüm projektif sağ R -modüllerin sınıfı, bir modülün alt projektif bölgesinin ne kadar küçük olabileceği konusunda bir alt sınırdır.

Tanım 3.14 M modülünün alt projektiflik bölgesi sadece projektif modüllerden oluşuyorsa M modülüne **p – yoksun (p – indigent)** denir.

Sonuç 3.15 Bir R halkası sağ mükemmeldir ancak ve ancak $\mathcal{FP}$ p – yoksun modüldür.

Tanım 3.16 R bir halka olmak üzere R halkasının kendi üzerinde injektif olması durumunda R ye **öz injektif (self injektive)** denir. Eğer R sağ veya sol noetherian ve R sağ veya sol bir öz injektif halka ise R ye **quasi-Frobenius (QF) halka** denir (Rotman, 1979).

Sonuç 3.17 R bir halka olmak üzere aşağıdakiler eşdeğerdir.

- i) R bir QF-halkadır.
- ii) Bir projektif modülü içeren p – yoksun modül vardır.

Tanım 3.18 Her sağ (veya sol) R -modülün projektif olduğu halka **yarı basit Artinian halkası** olarak adlandırılır.

Önerme 3.19 R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir.

- i) R halkası yarı basit Artiniandır.
- ii) Her devirli sağ R -modül projektiftir.
- iii) Her basit sağ R -modül projektiftir.
- iv) Her sağ R -modül projektiftir.

Önerme 3.20 R bir halka olmak üzere aşağıdakiler eşdeğerdir.

- i. R yarı basit Artin halkasıdır.
- ii. Her sağ (veya sol) R -modül $p - yoksundur$.
- iii. Her devirli sağ (veya sol) R -modül $p - yoksundur$.
- iv. R bir sağ R -modül olarak $p - yoksundur$.
- v. $\{0\}$ modülü $p - yoksundur$.

Tanım 3.21 Her (sırasıyla, basit, tekil) sağ R -modülün projektif veya $p - yoksun$ olduğu R halkası, (sırasıyla, basit, tekil) **alt projektif orta sınıfı olmayan halka** olarak adlandırılır.

Tanım 3.22 R bir halka olmak üzere R nin tüm maksimal sağ(veya sol) ideallerinin kesişimine **Jacobson radikali** denir ve $J(R)$ ile gösterilir (Lam, 1998).

Önerme 3.23 R bir halka ve $J(R)^2 = 0$ indirgenemez bir Artinian seri halkası olsun. R nin alt projektif orta sınıfı yoktur.

Tanım 3.24 M bir modül olmak üzere M nin her alt modülünün bir direkt toplam teriminde büyük alt modül olması durumunda M ye **CS modül** denir. R_R CS modül ise, R sağ CS halkası olarak adlandırılır. M nin kopyalarının her direkt toplamı CS ise M ye $\Sigma - \text{CS modül}$ denir.

Teorem 3.25 R bir yarı basit Artin olmayan halka olmak üzere aşağıdaki koşullar eşdeğerdir.

- i) R basit alt projektif orta sınıfı olmayan halkadır.
- ii) R sağ $\Sigma - \text{CS}$ halkadır ve bir (izomorfizmaya bağlı) tekil basit sağ R -modülü vardır.
- iii) $R \cong S \times T$ olacak şekilde bir halka direkt toplamı vardır. Burada S yarı-basit artinian halka ve T indirgenemez bir halka olmak üzere aşağıdaki özelliklerden yalnızca birini sağlar:

- a) Bir yerel QF halkası üzerinde matris halkadır
- b) $J^2(T) = 0$ olan kalıtsal artinian seri halkadır.

Tanım 3.26 R bir halka ve N bir modül olsun. $\text{Ext}_R^1(N, M) = 0$ iken M bir sağ injektif R -modül oluyorsa N ye injektiflik için **Whitehead test modül** ya da **$\mathbf{i}$ -test modül** denir (Trlifaj, 1996).

Tanım 3.27 Yarı basit olmayan bir R halkasının, tüm projektif olmayan sağ R -modülleri i -test ise, R halkasına sağ **tamamen doymuş halka** denir.

Teorem 3.28 R bir yarı-basit olmayan (nonsemisimple) halka olmak üzere aşağıdaki koşullar eşdeğerdir.

- i) R nin alt projektif orta sınıfı yoktur.
- ii) R nin tekil alt projektif orta sınıfı yoktur.
- iii) $R \cong S \times T$ olacak şekilde bir halka direkt toplamı vardır. Burada S yarı-basit artinian halka ve T bileşenlerine indirgenemez bir halka olmak üzere aşağıdaki özelliklerden yalnızca birini sağlar:

- a) Sağ tamamen doymuş QF halkasıdır veya
- b) $J(T)^2 = 0$ olan kalıtsal artinian seri halkasıdır

Tanım 3.29 Her sağ (veya sol) R -modülünün düz olduğu halka **von Neumann düzenli halka** olarak adlandırılır.

Sonuç 3.30 R , bir von Neumann regular (düzenli) olmayan halka olsun. R 'nin alt projektif orta sınıfı yoktur ancak ve ancak R bir sağ tamamen doymuş halkadır.

4. DEVİRLİ MODÜLLERİN ALT PROJEKTİF BÖLGELERİ

Tezimizde devirli modüllerin projektifliği, alt projektif bölge notasyonu aracılığıyla çalışılmıştır. Devirli modüllerin alt projektif bölgeleri aracılığıyla bilinen bazı halkaların yeni karakterizasyonları elde edilmiştir. Ayrıca, alt projektif bölgeler aracılığıyla devirli projektif modüllerin diametrik karşıtları tanımlanmış ve çalışılmıştır.

Bu bölüme, tezimizde önemli rollere sahip birkaç tanım ile başlayacağız.

Tanım 4.1, $\mathcal{M}$ sağ R -modüllerin bir sınıfı ve

$$E: 0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$$

sağ R -modüllerin bir kısa tam dizisi olsun. $\mathcal{M}$ 'nin her X elemanı E kısa tam dizisine projektif ise, yani

$$0 \rightarrow \text{Hom}(X, A) \rightarrow \text{Hom}(X, B) \rightarrow \text{Hom}(X, C) \rightarrow 0$$

tam ise, E kısa tam dizisine $\mathcal{M}$ -saf ($\mathcal{M}$ -pure) denir.

Eğer f monomorfizması içermeyen homomorfizması ise, A modülüne B modülün $\mathcal{M}$ -saf alt modülü denir.

Tanım 4.2 $\mathcal{F}$ tüm sonlu gösterime sahip sağ R -modüllerin ailesi ve M bir sağ R -modül olsun. M modülü ile biten her kısa tam dizi $\mathcal{F}$ -saf ise, M modülüne **düz (flat) modül** denir.

Tanım 4.3 $\mathcal{C}$ tüm devirli sağ R -modüllerin ailesi ve M bir sağ R -modül olsun. M modülü ile biten her kısa tam dizi $\mathcal{C}$ -saf ise, M modülüne **tekli projektif (singly projective) modül** denir.

Tezimizde tekli projektif modüller önemli rollere sahiptirler.

Önerme 4.4 $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ kısa tam dizisi $\mathcal{C}$ -saf ve B tekli projektif modül ise, C modülü de tekli projektiftir (Azumaya, 1987).

Önerme 4.5 Herhangi bir M devirli sağ R -modül için, M tekli projektiftir ancak ve ancak M projektiftir (Azumaya, 1987).

Önerme 4.6 R bir tamlık bölgesi olsun. M modülü tekli projektiftir ancak ve ancak M burulma serbest modüldür (Azumaya, 1987).

Tekli projektif modüllerin, devirli modüllerin alt projektif bölgeleri ile olan ilişkisini aşağıdaki önermede ispatsız olarak verdik.

Önerme 4.7 Bir M modülü için aşağıdakiler eşdeğerdir.

- i) M tekli projektiftir.
- ii) Herhangi bir devirli N modülü için N, M -alt projektiftir.
- iii) Her $g: F \rightarrow M$ epimorfizması için $F \in \mathfrak{Pr}^{-1}(M)$ ve her $f: N \rightarrow M$ için $gh = f$ olacak şekilde $h: N \rightarrow F, N$ devirli modülü vardır.

iv) $M \in \cap_{N \in \mathcal{C}} \mathfrak{Pr}^{-1}(N)$ burada $\mathcal{C}$ tüm devirli sağ R -modüllerin sınıfı olmak üzere, $M \in \cap_{N \in \mathcal{C}} \mathfrak{Pr}^{-1}(N)$

Önerme 4.8 $M \in \text{Mod} - R$ olsun. M, N alt projektiftir ancak ve ancak her $f: M \rightarrow N$ homomorfizmi bir projektif modül aracılığıyla ayrıştırılır.

İspat: Gerekliklik açıktır.

Tersine $f: M \rightarrow N$ bir homomorfizm ve P projektif olmak üzere $g: P \rightarrow N$ herhangi bir epimorfizm olsun. Kabul edelim ki f homomorfizması bir F projektif sağ R -modülü aracılığıyla ayrıştırılabilir olsun. O halde $f = th$ olacak şekilde $h: M \rightarrow F$ ve $t: F \rightarrow N$ vardır. F projektif olduğundan $gs = t$ olacak şekilde $s: F \rightarrow P$ homomorfizması vardır. O zaman $f = th = (gs)h = g(sh)$ dir. Burada $sh: M \rightarrow P$ dir. Buradan, M bir N -alt projektiftir. ■

Bir modülün tekli projektif olup olmadığını tek bir modül aracılığıyla test etme durumu mevcuttur, yani tekli projektif modüller için aşağıdaki gibi bir test modülü bulunmaktadır.

Önerme 4.9 Γ , tüm devirli sağ R -modüllerin temsilcilerinin bir tam kümesi olsun.

$$\mathfrak{Pr}^{-1}(\oplus_{S_i \in \Gamma} S_i) = \{N \in \text{Mod} - R : N \text{ tekil projektif}\}$$

İspat : Tekli projektif modüllerin tanımından ve

$$\mathfrak{Pr}^{-1}(\oplus_{S_i \in \Gamma} S_i) = \cap_{S_i \in \Gamma} \mathfrak{Pr}^{-1}(S_i)$$

gerçeğinden istenilen sonuç elde edilir. ■

R nin her sağ ideali (sırasıyla, sonlu üretilen sağ ideali) projektif ise R ye **sağ kalıtsal (sırasıyla, sağ yarıkalıtsal) halka** denir. Buna denk olarak her projektif modülün (sırasıyla, sonlu üretilen) alt modülü projektif ise R ye **sağ kalıtsal (sırasıyla, sağ yarıkalıtsal) halka** denir.

R nin her esas sağ ideali projektif ise R ye **PP halka** denir. Sağ PP halkası üzerinde projektif bir modülün her devirli alt modülü projektiftir . Alt projektif bölge yardımıyla PP halkalarının yeni bir karakterizasyonunu elde ettik.

Önerme 4.10 Bir R halkası sağ PP halkadır ancak ve ancak her devirli modülün alt projektif bölgesi alt modüller üzerinde kapalıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$ M bir devirli modül, $K \in \mathfrak{Pr}^{-1}(M)$ ve $N \subseteq K$ olsun. $f: M \rightarrow N$ herhangi bir homomorfizma olsun. f nin görüntüsü N 'nin alt modülü olduğu için f yi M den K ye bir morfizm olarak düşünebiliriz. F serbest modül olmak üzere, her zaman bir $g: F \rightarrow K$ epimorfizm mevcuttur. M bir K -alt projektif olduğundan, $gh = if$ olacak şekilde $h: M \rightarrow K$ homomorfizmi ve N den K ye i doğal dönüşümü vardır. Şimdi aşağıdaki değişmeli diyagramı ele alalım:

$$\begin{array}{ccccccc}
& & Ker(\sigma g) & \xrightarrow{u} & F & \xrightarrow{\sigma g} & K/N \longrightarrow 0 \\
& \nearrow t & \downarrow h & \nearrow & \downarrow g & & \parallel \\
M & \xrightarrow{f} & N & \xrightarrow{i} & K & \xrightarrow{\sigma} & K/N \longrightarrow 0
\end{array}$$

$\sigma gh = \sigma if = 0f = 0$ olduğundan, iyi bilinen Faktör Teoremi gereğince, $ut = h$ olacak şekilde $t: M \rightarrow Ker(\sigma g)$ homomorfizmi vardır. O zaman $if = gh = gut = ipt$ olduğundan $f = \pi t$ dir. Öte yandan devirli modüllerin görüntüleride devirli olduğundan, $t(M)$ modülü F serbest modülünün devirli alt modülüdür. F serbest modülü projektif olduğundan, $t(M)$ projektiftir. O zaman $f: M \rightarrow N$ fonksiyonu ayrıştırılır. Dolayısıyla Önerme 4.8'e göre M , bir N -alt projektiftir.

($\Leftarrow$) $R_R \in \cap_{N \in C} \mathfrak{Br}^{-1}(N)$ olduğu açıktır. Kabulümüz gereği, R nin her sağ ideali tekli projektiftir. Ayrıca herhangi bir devirli tekli projektif modül, projektif olduğundan R sağ PP halkadır. ■

Önerme 4.7 yardımıyla, tüm devirli sağ R -modüllerin alt projektiflerinin kesişimi tam olarak tüm tekli projektif sağ R -modüllerin sınıfıdır.

Tüm tekli projektif sağ R -modüllerin sınıfı, bir devirli modülün alt projektif bölgesinin ne kadar küçük olabileceği konusunda bir alt sınırdır.

Tanım 4.11 M devirli sağ R -modülünün alt projektiflik bölgesi sadece tekli projektif modüllerden oluşuyorsa M modülünü **singp – yoksun** olarak adlandırdık.

Önerme 4.9. yardımıyla, her R halkası bir **singp – yoksun** modüle sahiptir.

Önerme 4.12 Herhangi bir R halkası için aşağıda verilenler eşdeğerdir.

- i) R yarı basit Artinian'dır.
- ii) Her devirli modül projektiftir.
- iii) Her devirli modül **singp – yoksun** dur.
- iv) Devirli projektif **singp – yoksun** modül vardır.

Tezimizin geri kalan kısmında R nin yarı basit Artinian olmadığını varsayacağız, veya denk olarak projektif olmayan bir **singp – yoksun** sağ R -modül var olduğunu kabul edeceğiz.

Devirli tekli projektif modüller projektiftir. İyi bilinen bu gerçekten dolayı aşağıdaki önermeyi ispatsız vermekteyiz.

Önerme 4.13 Herhangi bir R halkası için aşağıda verilenler eşdeğerdir.

- i) Her devirli sağ R -modül tekli projektiftir veya *singp – yoksun* dur.
- ii) Her devirli sağ R -modül projektiftir veya *singp – yoksun* dur.

“Tüm devirli modüller projektiftir.” ve “Tüm devirli modüller *singp – yoksundur*.” ifadeleri eşdeğerdir.

$P - yoksun$ modüller ile ilgili yapılan çalışmalara paralel olarak, tekli alt projektif orta sınıfı olmayan halkaları tanımladık ve inceledik.

Tanım 4.14 Her devirli (sırasıyla, basit) sağ R -modülün projektif veya *singp – yoksun* olduğu R halkasını, (basit) **tekli alt projektif orta sınıfı olmayan halka** olarak çağıracağız.

Önerme 4.15 R basit tekli alt projektif orta sınıfı olmayan halka ise, R nin bir (izomorfizme bağlı olarak) tekil basit modülü vardır.

İspat : A ve B iki tekil basit sağ R -modüller olsun. A ve B modüllerinin izomorfik olmadığını kabul edelim. A ve B izomorfik olmayan basit modüller olduğundan, $Hom(A, B) = 0$ dır. Dolayısıyla, A B -alt projektiftir. Kabulümüz gereği, A *singp – yoksundur*, ve bu yüzden B tekli projektiftir. B devirli modül olduğundan, projektif olmak zorundadır. Hem tekil hemde projektif olan tek modül sıfır modülüdür. Dolayısıyla, B ile ilgili bir çelişki elde edilmiş olur. Bu nedenle R bir (izomorfizme bağlı olarak) tekil basit modüle sahiptir. ■

Her devirli (sırasıyla, basit) sağ R -modülün bir serbest modülün içine gömülebildiği halkalar sağ **CF (sırasıyla, sağ Kasch)** olarak adlandırılır.

Önerme 4.16 R basit tekli alt projektif orta sınıfı olmayan halka ise, R halkası sağ **CF** halkası veya sağ **PP** halkasıdır.

İspat : Önerme 4.15’e göre, R ’nin bir (izomorfizme bağlı olarak) tekil basit *singp – yoksun* modülü vardır. Bu *singp – yoksun* modüle A diyelim. A basit modül olduğu için iki durum vardır: $Hom(A, R) = 0$ veya $Hom(A, R) \neq 0$ dır. Eğer $Hom(A, R) = 0$ ise, R nin her sağ I ideali için $Hom(A, I) = 0$ olur. O halde, her sağ I ideali için, A , I -alt projektiftir. Kabulümüz gereği A *singp – yoksundur*, ve bu yüzden her sağ I ideali tekli projektiftir. Buradan R halkasının her esas sağ idealinin projektif olduğu yani R nin sağ **PP** olduğu bulunur. Eğer $Hom(A, R) \neq 0$ ise, A basit olduğundan, A modülü R serbest sağ R -modülünün içine gömülebilir. Bu durumda, her E injektif sağ R -modülü için, A E -alt projektiftir. A *singp – yoksun* olduğundan, her injektif modül tekli projektif olduğunu buluruz. O halde, her devirli sağ R -modül her injektif sağ R -modüle alt projektiftir. Önerme 3.10’dan, her devirli sağ R -modül bir serbest sağ R -modüle gömülebildiği sonucu elde edilir. Buradan, R halkasının bir sağ **CF** halkası olduğu bulunur. ■

Tezimizin kalan kısmında, Önerme 4.16'dan dolayı, (basit) tekli alt projektif orta sınıfı olmayan Kasch halkalarını veya (basit) tekli alt projektif orta sınıfı olmayan tekilsiz halkaları dikkate alacağız.

Bir R halkasının her (devirli) tekil M sağ R -modülü için, $Soc(M) \neq 0$ ise R halkası sağ **C halkası** olarak adlandırılır. Sol mükemmel halkalar, sağ yarı artinian (semiartinian) halkalar, sağ C halkaları için iyi bilinen örneklerdir. M 'nin her kapalı alt modülü, M 'nin doğrudan bir toplamı ise, M modülüne **genişleyen (extending) modül** veya **CS modülü** denir. R_R bir CS sağ R -modül ise, R halkasına sağ CS halkası denir (Dung ve ark., 1994).

Önerme 4.17 R nin basit tekli alt projektif bir orta sınıfı yoksa R hem sağ CS halkası hem de sağ C halkasıdır.

İspat : Önerme 4.15'e göre R halkasının bir (izomorfizme bağlı olarak) tekil basit *singp – yoksun* modülü vardır. Bu *singp – yoksun* modüle A diyelim. Öncelikle, R halkasının sağ C halkası olduğunu göstereceğiz. I , R halkasının bir büyük (essential) öz sağ ideali olmak üzere $Soc(R/I) = 0$ olsun. O halde R/I devirli büyük sağ R -modülün basit alt modülü yoktur, ve bu yüzden $Hom(A, R/I) = 0$ dır. O zaman A R/I -alt projektiftir. A *singp – yoksun* olduğu için, R/I tekli projektiftir. Fakat R/I devirlidir, ve bu yüzden R/I projektiftir. I , R halkasının bir sağ ideali olduğundan, R/I devirli sağ R -modülünün tekil bir modül olduğunu hatırlatalım. R/I hem tekil hemde projektif olduğundan, $R/I = \{0\}$ olur. I sağ idealinin öz ideal olması ile çelişen bir durum ortaya çıkar. Dolayısıyla R bir sağ C halkasıdır.

Şimdi R halkasının bir sağ CS halkası olduğunu göstereceğiz. Bunun için, R halkasının her kapalı sağ idealinin R 'nin bir direkt toplam terimi olduğunu göstermemiz yeterlidir. I , R halkasının kapalı bir sağ ideali olsun. Öncelikle A basit modülünün R/I -alt projektif olduğunu göstereceğiz. A basit modülü için iki durum söz konusudur: $Hom(A, R/I) = 0$ veya $Hom(A, R/I) \neq 0$. $Hom(A, R/I) = 0$ ise, önceki ispatta gösterildiği gibi, A R/I -alt projektiftir. Eğer $Hom(A, R/I) \neq 0$ ise, $f \neq 0$ olmak üzere bir $f \in Hom(A, R/I)$ vardır. Bazı $J \subseteq R$ için $f(A) = \frac{J}{I}$ olacak şekilde bir R halkasının bir J sağ ideali vardır. I , R 'de kapalı olduğundan, kapalı alt modüllerin özelliklerinden, I ideali J 'nin kapalı alt modülüdür. Dolayısıyla I, J de büyük değildir. O halde $T \cap I = 0$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir $T \subseteq J$ ideali vardır. $T \neq 0$ olduğundan $T \cap I = 0$ olacak şekilde I da olmayan $0 \neq a \in T$ vardır. $A \cong f(A) = \frac{J}{I}$ basit olduğundan, sıfırdan farklı herhangi bir eleman tarafından üretilir. Dolayısıyla $\frac{J}{I} = R(a + I)$ dir. Buradan, $J = I \oplus Ra$ elde edilir. $\pi(Ra) = f(A)$ ve $\pi_V : V \rightarrow f(A)$ nin bir izomorfizm olduğuna dikkat edilmelidir. $g = \pi_V^{-1}f$ yazalım. O halde $\pi g = f$ istenen $A \rightarrow R$ dönüşümünü verir ve A nın R/I –alt projektif olduğunu gösterir. A *singp – yoksun* olduğundan R/I devirli modülü her iki durumda da projektif olmalıdır. Bu nedenle I, R nin doğrudan toplamı şeklinde yazılabilir. Dolayısıyla R bir sağ CS halkasıdır. ■

Sonuç 4.18 Basit, tekli alt projektif orta sınıfı olmayan bir sağ Kasch halkası hem sağ Artinian hem de sol Kasch'tır.

İspat : Önerme 4.16 ve Önerme 4.17'e göre R sağ CS halkası ve sağ CF halkasıdır. Dolayısıyla hem sağ Artinian hem de sol Kasch'tır (Nicholson ve Yousif, 2003). ■

Teorem 4.19 Bir R sağ Kasch halkası için aşağıdakiler eşdeğerdir.

- i) R basit alt projektif orta sınıfı olmayan halkadır.
- ii) R basit tekli alt projektif orta sınıfı olmayan sağ öz-injektif halkadır.
- iii) S yarı basit Artinian halka ve T yerel QF halkası üzerinde ayrıştırılmaz bir matris halkası olmak üzere, $R \cong S \times T$ doğrudan halka toplamı vardır.

İspat : (i) $\Rightarrow$ (ii) R halkasının sağ öz-injektif halka olduğunu göstermemiz yeterlidir. İstenilen sonuç (Durğun, 2015)'den elde edilir.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Sonuç 4.18 ve Önerme 4.16'dan R sağ CS ve sağ Artinian halkasıdır. Dolayısıyla QF halkasıdır (Faith ve Huynh, 2002).

O zaman, (Durğun, 2015) aracılığıyla, R basit alt projektif orta sınıfı olmayan halkadır.

(i) $\Leftrightarrow$ (iii) (Durğun, 2015) aracılığıyla elde edilir. ■

(Basit) sonlu (sırasıyla, tekli) alt projektif orta sınıfı olmayan tekilsiz halkaların karakterizasyonunu vermeden önce, ispatlarında ihtiyaç duyacağımız bazı sonuçlar vereceğiz.

Önerme 4.20 R bir sağ tekilsiz halka ve A bir tekil sağ R -modül olsun. O halde, bir K modülü için, A K -alt projektiftir ancak ve ancak $\text{Hom}(A, K) = 0$ dır.

İspat : (Holston ve ark., 2016) sonucundan direkt elde edilir.

Önerme 4.21 Bir R halkası için aşağıdakiler eşdeğerdir.

- i) Her tekli projektif modül tekilsizdir.
- ii) R sağ tekilsizdir.

İspat: (i) $\Rightarrow$ (ii) R bir sağ R -modül olarak tekli projektiftir. Dolayısıyla, kabulümüz gereğince, R sağ tekilsizdir.

(ii) $\Rightarrow$ (i) N bir tekli projektif sağ R -modül olsun. P bir projektif sağ R -modül olmak üzere, $0 \rightarrow K \rightarrow P \rightarrow N \rightarrow 0$ tam dizisini göz önünde bulunduralım. N tekli projektif olduğundan, her devirli modül bu tam diziye göre projektif özelliğe sahiptir. Dolayısıyla bu tam dizinin kapalı bir dizi olduğu (Durğun, 2022) sonucundan elde edilir. (Sandomierski, 1968) sonucu yardımıyla, N modülü tekilsizdir. ■

Önerme 4.22 Bir R halkası için aşağıdakiler eşdeğerdir.

- i) R bir sağ CS , sağ PP halkasıdır.
- ii) Bir modül tekli projektiftir ancak ve ancak tekilsizdir.

İspat $(i) \Rightarrow (ii)$ Sağ PP halkaları sağ tekilsiz olduğundan, her tekli projektif sağ R -modül, Önerme 4.21 yardımıyla, tekilsizdir. R sağ tekilsiz ve sağ CS halkası olduğundan her devirli tekilsiz modül projektiftir. N tekilsiz bir modül ve M herhangi bir devirli modül olsun ve $f: M \rightarrow N$ bir homomorfizm olsun. Tekilsiz modüller alt modüller altında kapalı ve $f(M)$ devirli olduğundan, $f(M)$ projektiftir. O halde Önerme 4.7 yardımıyla M, N -alt projektiftir.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Varsayımımız gereği, R sağ tekilsizdir. Devirli tekli projektif modüller projektif ve tekilsiz modüller alt modüller altında kapalı olduğundan, R nin her esas sağ ideali projektiftir. Yani R sağ PP halkasıdır. R nin sağ CS olduğunu göstermek için I, R nin bir kapalı sağ ideali olsun. O halde, R/I devirli modülü tekilsizdir. R/I devirli olduğundan R/I varsayımımız gereği projektiftir. O halde I, R nin doğrudan toplamıdır. Buradan, R 'nin bir sağ CS halka olduğu bulunur (Sandomierski, 1968) ■

Teorem 4.23 R bir sağ tekilsiz halka olsun. Bu durumda aşağıdakiler eşdeğerdir.

- i) R nin basit tekli alt projektif orta sınıfı yoktur.
- ii) R nin tekli alt projektif orta sınıfı yoktur.

İspat: $(ii) \Rightarrow (i)$ Açıktır.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Önerme 4.15 ve Önerme 4.16 yardımıyla R bir sağ PP halkasıdır ve bir (izomorfizme bağlı olarak) tekil basit $singp - yoksun$ modüle sahiptir. Bu tekil basit modüle A diyelim. M , projektif olmayan devirli bir modül olsun. $Z(M) \neq 0$ dır çünkü aksi takdirde A, M -alt projektif olur, ve buradan M nin projektif olduğu elde edilir ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla basit A modül aracılığıyla M modülü için iki durum söz konusudur; ya $Hom(A, M) = 0$ ya da $Hom(A, M) \neq 0$ dır. $Hom(A, M) = 0$ ise A, M -alt projektif olur. A $singp - yoksun$ olduğundan, M tekli projektiftir. Fakat M devirli modül olduğundan, M projektiftir. Bu M 'nin tekil modül olması ile çelişir. Dolayısıyla, $Hom(A, M) = 0$ durumu mümkün değildir. $Hom(A, M) \neq 0$ olsun. $0 \rightarrow Z(M) \rightarrow M \rightarrow M/Z(M) \rightarrow 0$ kısa tam dizisini düşünelim. R bir sağ tekilsiz halka olduğundan $M/Z(M)$ tekilsizdir. Dolayısıyla $A, Z(M)$ -alt projektiftir. M devirli ve A $singp - yoksun$ olduğundan $M/Z(M)$ projektiftir. O halde $Z(M), M$ modülünün bir direkt toplamıdır ve bu yüzden devirli modüldür. Dolayısıyla M ve $Z(M)$ modüllerinin alt projektif bölgeleri aynıdır. Ayrıca $Hom(A, M) \neq 0$ ve $Hom(A, M/Z(M)) = 0$ olduğundan $Hom(A, Z(M)) \neq 0$ dır.

Şimdi $Z(M)$ modülünün *singp – yoksun* olduğunu gösterelim. Bir K modülü için, $Z(M)$ K -alt projektif olsun. R bir sağ tekilsiz halka olduğundan, Önerme 4.20 aracılığıyla, $\text{Hom}(Z(M), K) = 0$ dır. A modülü aracılığıyla iki durum söz konusudur: $\text{Hom}(A, K) = 0$ veya $\text{Hom}(A, K) \neq 0$ dır. $\text{Hom}(A, K) = 0$ ise, A K -alt projektiftir. Dolayısıyla K tekli projektiftir. $\text{Hom}(A, K) \neq 0$ durumu mümkün değildir. Çünkü $\text{Hom}(A, K) \neq 0$ ise, genellemeyi bozmadan, A modülü K nin bir alt modülüdür. R bir sağ PP halka olduğundan, Önerme 4.10 yardımıyla, $Z(M)$ bir A -alt projektiftir. R sağ tekilsiz halka olduğundan, $\text{Hom}(Z(M), A) = 0$ dır. $Z(M)$ devirli ve tekil olduğundan dolayı, $Z(M)$ nin basit tekil bir epimorfik görüntüsü vardır. Yani A nın tekliliğinden dolayı $\text{Hom}(Z(M), A) = 0$ durumu mümkün değildir. Dolayısıyla, iddia edildiği gibi, $Z(M)$ ve M *singp – yoksundur*. ■

Teorem 4.24 Bir sağ tekilsiz R halkasının tekli alt projektif orta sınıfı yoktur ancak ve ancak R sağ CS , sağ C , sağ PP halkasıdır ve bir (izomorfizme bağlı olarak) tekil basit sağ R -modül vardır.

İspat : $(\Rightarrow)$ Önerme 4.15, Önerme 4.16 ve Önerme 4.9 yardımıyla direkt elde edilir.

$(\Leftarrow)$ A tek (izomorfizme bağlı olarak) tekil basit sağ R -modül olsun. İddiamızı göstermek için, Lemma 4.9'dan dolayı, A basit modülünün *singp – yoksun* olduğunu göstermek yeterlidir.

Kabul edelim ki bir K modülü için A , K -alt projektif olsun. K nin tekilsiz olduğunu iddia etmekteyiz. Aksine $Z(K) \neq 0$ olduğunu varsayalım. R sağ PP halkası olduğundan, Önerme 4.10'dan A , $Z(K)$ -alt projektiftir. R sağ tekilsiz halka ve A tekil sağ R -modül olduğundan, Önerme 4.20'den, $\text{Hom}(A, Z(K)) = 0$ dır. Fakat A nın tek (izomorfizme bağlı olarak) tekil basit modül olması, $Z(K)$ nin basit alt modülü olmadığı anlamına gelir. Bu durum R 'nin sağ C halkası olması ile çelişir. Dolayısıyla K tekilsiz sağ R -modüldür. Buradan $\mathfrak{Br}^{-1}(A)$ nın tüm tekilsiz sağ R -modüllerin sınıfı olduğu sonucu elde edilir. O halde Önerme 4.22'den, A *singp – yoksundur*. ■

DVR halkası cisim olmayan yerel Dedekind bölgesidir. Özel olarak her DVR halkası CS , C ve PP halkadır.

Sonuç 4.25 R bir DVR ise (basit) tekli alt projektif orta sınıfı yoktur.

Bu tez çalışmasını, tekilsiz halkalar sınıfının bir alt sınıfı üzerinde, basit modüller aracılığıyla, *singp – yoksun* modüllerin karakterizasyonu ile bitirmekteyiz.

Örnek 4.26 R bir sağ CS , sağ PP , sağ C halkası olsun. Basit tekil modüllerin tüm temsilcilerinin doğrudan toplamı *singp – yoksundur*.

İspat : Önerme 4.22'den, her basit tekil A modülü için A N -alt projektif ise, N modülünün tekilsiz olduğunu göstermek yeterlidir. P projektif olmak üzere, $0 \rightarrow B \rightarrow P \rightarrow N \rightarrow 0$ kısa tam dizisini alalım. Varsayalım ki B , P nin bir alt modülü olsun. B nin P de kapalı olduğunu iddia etmekteyiz. Aksine B nin P de kapalı olmadığını varsayalım. O halde P de bir V alt modülü vardır öyle ki B , V 'nin büyük alt modülüdür. $V/B \subset P/B \cong N$ olduğundan, Önerme 4.10'dan, her basit tekil A modülü için, A V/B alt projektiftir. R sağ C halkası ve V/B tekil olduğundan, V/B nin tekil basit bir alt modülü vardır. Bu modüle U diyelim. Yine Önerme 4.10'dan her A basit tekil modülü için A , U –alt

projektiftir. Özel olarak U , U alt projektiftir. Buradan U basit modülünün projektif olduğu sonucu elde edilir. Bu da U 'nın tekil modül olması ile çelişir. O zaman B , P de kapalıdır ve N tekilsizdir (Sandomierski, 1968). ■

Teorem 4.27 R bir sağ CS , sağ PP , sağ C halkası ve M bir devirli modül olsun. Bu durumda aşağıdakiler eşdeğerdir.

- i) M *singp* – *yoksundur*.
- ii) $Z(M)$ *singp* – *yoksundur*.
- iii) Her S basit tekil modülü için, $Hom(Z(M), S) \neq 0$ dır.

İspat: (i) $\Rightarrow$ (ii) R sağ CS , sağ tekilsiz olduğundan, $M/Z(M)$ devirli modülü projektiftir. Dolayısıyla, $N \cong M/Z(M)$ olmak üzere, $M = Z(M) \oplus N$ dir. N projektif olduğundan, $Z(M)$ ve M modüllerinin alt projektif bölgeleri aynıdır. M *singp* – *yoksun* olduğundan, $Z(M)$ tekil modülü de *singp* – *yoksundur*.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Bazı basit tekil S modülleri için $Hom(Z(M), S) = 0$ olduğunu varsayalım. O halde $Z(M)$ S -alt projektiftir. $Z(M)$ *singp* – *yoksun* olduğundan, S tekli projektiftir. Fakat S devirlidir ve bu yüzden projektiftir. Çelişki.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Herhangi bir K modülü için, $Z(M)$ K -alt projektif olsun. Her basit tekil modül S için $Hom(S, K) = 0$ ise, Önerme 4.26 yardımıyla, K tekli projektiftir. Bazı tekil basit J modülü için $Hom(J, K) \neq 0$ olduğunu varsayalım. Genellemeyi bozmaksızın J yi K nin bir alt modülü olarak kabul edebiliriz. R sağ PP halkası olduğundan, Önerme 4.10'a göre, $Z(M)$ J -alt projektiftir. O halde, Önerme 4.20 yardımıyla, $Hom(Z(M), J) = 0$ olur. Çelişki. ■



5. SONUÇ

2016 yılında yayınlanan bir araştırma makalesinde tanıtılan alt projektif bölge notasyonu, modüllerin projektifliğine alternatif bir bakış açısı sunmuştur. Bir modülü projektif olarak kategorize etmek yerine, her bir modüle, projektiflik özelliğinin derecesini ölçen görelî bir modül sınıfı atandı. Bu yaklaşım son yıllarda giderek artan bir ilgi görmektedir. Bu yaklaşım aracılığıyla, bir çok modül sınıfının projektiflik ölçüleri çalışılmıştır.

Biz bu çalışmada, devirli modüllerin projektiflik ölçülerini alt projektif bölge notasyonu aracılığıyla inceledik. Devirli modüllerin alt projektif bölgelerini detaylı olarak inceledik. Devirli projektif modüllerin diâmetrik karşıtları, yani alt projektif bölgeye göre projektif olmaya en uzak devirli modülleri çalıştık. Alt projektif bölgeye göre projektif olmaya en uzak devirli modülleri *singp – yoksun* olarak tanımladık. Her devirli modülün projektif veya *singp – yoksun* olduğu halkaları karakterize ettik. Ayrıca, *singp – yoksun* modüllerin bazı karakterizasyonlarını elde ettik.



KAYNAKLAR

- Alizade, R. ve Pancar, A. (1999). Homoloji Cebire Giriş. Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi.
- Amzil, H., Bennis, D., Rozas, J.R., Ouberka, H. ve Oyonarte, L. (2021). Subprojectivityin abelian categories, *Applied Categorical Structures* ,29(5): 889–913.
- Anderson, F. W., ve Fuller, K. R. (1992). *Rings and categories of modules*. New York: Springer-Verlag.
- Atiyah, M. F., ve Macdonald, I. G. (1969). *Introduction to commutative algebra*. Reading: Addison-Wesley Series in Mathematics.
- Azumaya G., (1987). Finite splitness and finite projectivity, *J. Algebra*, 106: 114–134.
- Bennis, D., Rozas, J.R., Ouberka, H. ve Oyonarte, L. (2022). A new approach to projectivity in the categories of complexes, *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 1–19.
- Büyükaşık, E. ve Durğun, Y. (2016). Neat-flat modules, *Communications in Algebra*, 44(1): 416–428.
- Clark J., Lomp C., Vanaja N. ve Wisbauer R. (2008). *Lifting modules: supplements and projectivity in module theory*.
- Couchot, F. (2007). Flat modules over valuation rings, *Journal of Pure and Applied Algebra* 211(1): 235–247.
- Çallıalp, F. ve Tekin, Ü. , (2009). *Değişmeli Halkalar ve Modüller*. Birsen Yayınevi, İstanbul.
- Dung, N. V., Huynh D. V., Smith P. F. ve Wisbauer R., *Extending modules* (Long-man Scientific& Technical, Harlow, 1994).
- Durgun, Y. (2015). Rings whose modules have maximal or minimal subprojectivity domain,J. Algebra, App l.14 (6) .
- Durgun, Y. (2020). Subprojectivity domains of pure-projective modules,J. Algebra App l.19 (5).
- Durgun, Y. (2022). Projectivity relative to closed (neat) submodules,J. Algebra App l.21 (06) .
- Durgun Y., Kalır Ş., Shibeshi A., (2023) “On Projectivity of Finitely Generated Modules” *Comm. Algebra*, 51(9), 3623-3631.
- Facchini, A. (1998). *Module theory: endomorphism rings and direct sum decompositions in some classes of modules* (first edition). Springer Basel AG, 283, Birkhauser.
- Faith, C. and Huynh, D. V. (2002). When self-injective rings are QF: a report on a problem.,J. Algebra App l.1(01): 75-105.
- Goodearl, K. R. (1976). *Ring theory:nonsingular rings and modules*. Monographs on Pure and Applied Mathematics. Marcel Dekker, 33, New York.
- Holston, C., Lopez-Permouth, S. R., Mastromatteo, J. ve Simental-Rodriguez J. E. (2016). An alternative perspective on projectivity of modules,Glasgow Math. J.57 (1) 83–99.

- Hungerford, T. W. (1974). Algebra. New York: Springer-Verlag.
- Hungerford, T.W. (1973). Algebra. Springer-Verlag, New York.
- Jones, M.F. (1981). F-projectivity and flat epimorphisms., Communications in Algebra 9 (16): 1603–1616.
- Kasch, F. (1982). “Modules and Rings”, Ludwig-Maximilian University, Munich, Germany. New York, Academic Press.
- Lam, T.Y. (1991). A First Course in Noncommutative Rings, Springer Verlag,
- Lam, T.Y. (1998). Lectures on modules and rings. New York: Springer- Verlag.
- Lopez-Permouth, S. R. Mastromatteo J., Tolooei Y. ve Ungor B. (2018). Pure-injectivity from a different perspective, Glasgow Math. J.60 (1): 135–151.
- Mao, L. (2007). When does every simple module have a projective envelope?, Communications in Algebra, 35 (5) 1505–1516.
- Mao, L. (2008). A generalization of Noetherian rings, Taiwanese Journal of Mathematics, 12 (2): 501–512.
- Nicholson, W. K. ve Yousif, M. F. (2003). Quasi-Frobenius Rings, 158. (Cambridge University Press).
- Pancar, A. Ve Türkmen, B. (2014). İnjektif Modüllere Giriş, Pegem Akademi.
- Rotman, J. (1979). An introduction to homological algebra. New York: Academic Press.
- Sandomierski, F. L. (1968). Nonsingular rings, Proc. Amer. Math. Soc. 19 225–230.
- Trlifaj, J. (1996). Whitehead test modules. Transactions of the American Mathematical Society, 383(4), 1521-1554.
- Wisbauer, R. (1991). “Foundations of Modules and Ring Theory,” Gordon and Breach, New York.

ÖZGEÇMİŞ

Eğitim Bilgileri

2012-2017 Matematik Lisans

Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Trabzon-Türkiye

2020-2023 Matematik Yüksek Lisans

Çukurova Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Ana Bilim Dalı, Adana-Türkiye

Tez Konusu : Devirli Modüllerin Alt Projektif Bölgelerinin İncelenmesi

Danışman : Prof. Dr. Yılmaz DURĞUN

Yayınlar

- Durğun Y., Kalır Ş., Shibeshi A., (2023) ‘‘On Projectivity of Finitely Generated Modules’’ Comm. Algebra, 51(9), 3623-3631, DOI: 10.1080/00927872.2023.2186706