



**T.C.
İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



YÜKSEK LİSANS TEZİ

**GEÇİKMELİ YAPAY SİNİR AĞLARININ GLOBAL ROBUST
KARARLILIK ANALİZİ İÇİN YENİ BİR YAKLAŞIM**

Melike SOLAK

Matematik Anabilim Dalı

Matematik Programı

DANIŞMAN

Doç. Dr. Özlem FAYDASIÇOK

Mayıs, 2023

İSTANBUL

Bu alışma 31.05.2023 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi

Doç. Dr. Özlem FAYDASIÇOK (Danışman)
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Dr. Cemal ÇİÇEK
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Prof. Dr. Rüya Şamlı
İstanbul Üniversitesi-Cerrahpařa
Mühendislik Fakültesi



- **İntihal Programı Beyanı**

20.04.2016 tarihli resmi gazetede yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; Bu Lisansüstü teze, İstanbul Üniversitesi'nin aboneliği olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü'nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.

ÖNSÖZ

Yüksek lisansım süresince bana vermiş olduğu yardım ve emeklerinden ötürü sayın danışmanım Doç. Dr. Özlem Faydasıçok’a en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Ayrıca bilgilerini ve tecrübelerini her daim paylaşarak yanımda olan sayın Prof. Dr. Sabri Arık’a çok müteşekkirim.

Hep yanımda olarak desteklerini hiç esirgemeyen sevgili aileme teşekkürü bir borç bilirim.

Son olarak yüksek lisans eğitimimde sağladığı burstan dolayı TÜBİTAK’a teşekkürlerimi sunarım.

Mayıs, 2023

Melike SOLAK

İÇİNDEKİLER

	Sayfa No
ÖNSÖZ	iv
İÇİNDEKİLER	v
ŞEKİL LİSTESİ	vi
TABLO LİSTESİ	vii
SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ	ix
ÖZET	x
SUMMARY	xi
1. GİRİŞ	1
2. GENEL KISIMLAR	5
2.1. DOĞRUSAL VE DOĞRUSAL OLMAYAN DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİ	5
2.2. KARARLILIK ÇEŞİTLERİ VE TEOREMLERİ	7
3. MALZEME VE YÖNTEM	12
3.1. MATRİS ÇEŞİTLERİ	14
3.2. AKTİVASYON FONKSİYONLARI	19
3.3. YSA İLE İLGİLİ GENEL BİLGİLER	20
3.4. AYRIK ZAMAN GECİKMELİ BELİRSİZ PARAMETRELERE SAHİP COHEN-GROSSBERG YSA MODELİ İÇİN VARLIK VE TEKLİK ANALİZİ ..	34
3.5. AYRIK ZAMAN GECİKMELİ YSA MODELİNİN KARARLILIK ANALİZİ ...	43
4. BULGULAR	54
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	57
KAYNAKLAR	58
ÖZGEÇMİŞ	63

ŞEKİL LİSTESİ

	Page No
Şekil 1.1: Hopfield YSA Matematiksel Modellemesi	2
Şekil 1.2: Cohen-Grossberg YSA Matematiksel Modellemesi	2
Şekil 2.1: Kararsızlık,Kararlılık,Asimtotik Kararlılık	8
Şekil 3.1: Sinir Ağı Kesiti	21
Şekil 3.2: YSA Kesiti	21
Şekil 3.3: Bir Yapay Sinir Hücresi Elemanları.....	22
Şekil 3.4: YSA Örneği.....	23
Şekil 3.5: Herhangi bir nörona (i. nöron) ait bir elektronik devre modeli.....	25

TABLO LİSTESİ

Page No

Tablo 3.1: Proses elemanları	22
---	----



SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ

Simgeler	Açıklama
W, F	: $n \times n$ boyutlu kare matrisler
W^T	: W matrisinin transpozu
W^{-1}	: W matrisinin tersi
$\ W\ _1$	: W matrisinin birinci normu
$\ W\ _2$	: W matrisinin ikinci normu (Öklid Normu)
$\ W\ _\infty$	: W matrisinin sonsuz normu
$x, \bar{x}, s, y$	: Vektörler
s^T	: s vektörünün transpozu
s_i	: s vektörünün i . bileşeni
$\ s\ _2$	: s vektörünün ikinci normu
$\ s\ _p$	: s vektörünün p . normu
$\lambda_i(W)$	: W matrisinin i . özdeğeri
$\lambda_{\min}(W)$	: W matrisinin en küçük özdeğeri
$\lambda_{\max}(W)$	: W matrisinin en büyük özdeğeri
$\text{diag}(p_i > 0)$	: elemanları p_i olan pozitif diyagonal matris
$\det W$	: W matrisinin determinanı
$\dot{V}(x)$	: $V(x)$ fonksiyonunun türevi
$W > 0$	: pozitif tanımlı matris
$W \geq 0$	: yarı pozitif tanımlı simetrik matris
$W < 0$	: negatif tanımlı matris
$W \leq 0$	: yarı negatif tanımlı simetrik matris
$P > 0$	: pozitif tanımlı matris simetrik matris
$P \geq 0$	: yarı pozitif tanımlı simetrik matris
$P < 0$	: negatif tanımlı matris simetrik matris
$P \leq 0$	: yarı negatif tanımlı simetrik matris
R	: Reel sayılar uzayı
R^n	: n boyutlu reel değerli vektör uzayı

Kısaltmalar**Açıklama*****YSA***

: Yapay Sinir Ağları

LMI

: Linear Matrix Inequality (Lineer Matris Eşitsizliği)



ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GEÇİKMELİ YAPAY SİNİR AĞLARININ GLOBAL ROBUST KARARLILIK ANALİZİ İÇİN YENİ BİR YAKLAŞIM

Melike SOLAK

İstanbul Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Özlem FAYDASIÇOK

Tez kapsamında, ayrık zaman gecikme terimlerini, Lipschitz aktivasyon fonksiyonlarını içeren ve parametre belirsizliklerine sahip olan arabağlantı matrislerinin bir alt sınır ve bir üst sınır içinde kaldığı bir YSA sınıfının matematiksel modellemesi incelenecektir. Bu tez öncelikle bu sinir ağı modellerinin robust kararlılığını oluşturmak için istenen sonuçların elde edilmesinde önemli bir etkiye sahip olacak, arabağlantı matrisler sınıfının ikinci normunun yeni ve alternatif bir üst sınır değerini sunacaktır. Daha sonra iyi bilinen homeomorfizm eşleşme bağıntısı teorisi ve temel Lyapunov kararlılık teorisi kullanılarak, ayrık zaman gecikmeli dinamik bir YSA için bazı yeni robust kararlılık koşullarını belirlemek amacıyla genel manada bir çerçeve belirtilecektir. Aynı zamanda daha önce yayınlanmış robust kararlılık sonuçlarının kapsamlı bir incelemesi tezde yapılacak olup mevcut robust kararlılık sonuçlarının verilen sonuçlardan kolayca çıkarılabileceğini bu tez çalışması gösterecektir.

Mayıs 2023, xi+63 sayfa.

Anahtar kelimeler: Dinamik Yapay Sinir Ağları, Arabağlantı Matrisleri, Ayrık Zaman Gecikmeleri, Robust Kararlılık, Lyapunov Fonksiyonları

SUMMARY

M.Sc. THESIS

A NEW APPROACH TO THE GLOBAL ROBUST STABILITY ANALYSIS OF DELAYED NEURAL NETWORKS

Melike SOLAK

İstanbul University

Institute of Graduate Studies in Sciences

Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Özlem FAYDASIÇOK

Robust stability possessions of dynamical neural networks including discrete time delays have been comprehensively researched in this thesis. Moreover, in the past literature, lots of sufficient situations for robust stability of several classes of continuous-time dynamical neural networks have been examined. Within the thesis, the Lipschitz activation function, which is one of the types of numerous activation conditions required in the mathematical representation of artificial neural networks, is applied and a new upper bound definition is made for interval matrices with uncertainties parameter in this model. Furthermore, in this thesis, a global asymptotic robust stability analysis was satisfied using the standard homeomorphism map and the basic Lyapunov stability theory for the newly upper bound, and a general result was revealed by comparing the previous findings in the literature.

May 2023, xi+63 pages.

Keywords: Dynamical Neural Networks, Interval Matrices, Discrete Delays, Robust Stability, Lyapunov Functionals

1. GİRİŞ

YSA, insan dimağının nörolojik yapısının işlevinden ilham alınarak geliştirilen, yapay olarak öğrenebilen hatırlama, karar verme, kıyaslama, genelleme gibi pek çok özelliği matematiksel modellerle gerçekleştirilen bir bilgi işleme teknolojisidir. Görülmemiş örnekler hakkında bilgi üretme, algılama, şekil (örüntü) bağlantıları kurma ve onları sınıflandırma, eski örüntülerden yola çıkarak yeni örüntüler elde etme ve öğrenme gibi bir çok işlemi paralel zamanlı olarak yapabilme özelliklerine sahip olan YSA, günümüzde birçok sektörde görüntü işleme, optimizasyon, çağrışımlı bellek tasarımı gibi problemlerin çözümünün yapılmasında kullanılmaktadır.

YSA insana özgü öğrenme yetisini bilgisayarlara ya da makinelere aktarılmasını sağlamak için kullanılan yapay zeka teknolojilerinin temel yapı taşlarından biridir. Bu yüzden son dönemde yapay zeka uygulamalarının ivmelenmesiyle birlikte YSA'nın geliştirilmesi için yapılan çalışmalar da artmıştır. Bu yapılan çalışmaların daha doğru ve sistematik ilerleyebilmesi için YSA'nın oluşum temeline inmek gereklidir ve oldukça önem arz etmektedir.

YSA'nın kullanım alanlarında ortaya çıkan çeşitli somut problemler matematiksel modellemeler yardımıyla çözülmektedir. Bu modellemelerin oluşumu için ise diferansiyel denklem sistemleri kullanılmaktadır. Bu sebeple diferansiyel denklemler YSA çalışmalarında zorunlu olarak kullanılan bir araç haline gelmiştir.

Literatürde doğrusal sistemler gerçek dünya probleminin çözümünde kullanımının yanı sıra basit olmalarından dolayı oldukça ilgi görmüştür. Fakat var olan tüm sistemler doğrusal olmak zorunda değildir ve bu sebeple doğrusal olmayan diferansiyel denklem sistemlerinin de kullanılmasını gerektirecek bazı durumlar meydana gelebilir. Ayrıca sistemlerin matematiksel modellemesi adı diferansiyel denklemler kullanılarak yapıldığında yalnızca o andaki var olan zamanda hesaplama yapılır ve dolayısıyla önceki zamanlar göz ardı edilmiş olunur. Bu durum sonucunda sistemden elde edilen çıktılar çok doğru bilgiler vermez. Dolayısıyla daha gerçek sonuçlar elde etmek için durumu zamana göre değişen modellerin genel bir sınıfı olan dinamik sistemleri kullanmak gerekir. Dinamik sistemleri

daha genel bir ifadeyle tanımlayacak olursak; dinamik sistemler, zaman içinde değişen doğrusal olan ya da olmayan sistemlerdir. Dinamik sistemler durum vektörleri ve diferansiyel denklemlerin bir kümesiyle oluşturulur.

Doğrusal olmayan diferansiyel denklemlerle oluşturulmuş dinamik bir YSA modeli için birtakım davranış analizleri yaparak çeşitli sonuçlar elde etmek, doğrusal olmayan diferansiyel denklemleri çözmekten daha mümkündür. Bir başka ifadeyle bu tarz denklemlerin niteliksel davranışları incelenerek sistem hakkında yorumlar yapılması araştırmacılara daha kolaylık sağlar. Optimizasyon, görüntü ve işaret işleme gibi problemlerin çözümünde kullanılan YSA modellerinde; koas, çatallanma, kararlılık, kararsızlık, osilasyon gibi birçok niteliksel davranış içerisinde kararlı dinamik davranış tarzı oldukça hayatidir. Bu nedenle bu tip YSA'nın denge noktasının kararlı durum formunda olması arzu edilir ve hatta son yıllarda kararlı duruma sahip çeşitli YSA modellerinin oluşturulması ve analiz edilmesi popüler olarak çalışılan alanlardan biri haline gelmiştir.

Literatürde, ilk dinamik sistemli YSA modellemesi, Hopfield tarafından 1980'li yıllarda yapılmış olan Hopfield yapay sinir ağı modelidir:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -Cx(t) + Ag(x(t)) + u$$

Şekil 1.1: Hopfield YSA Matematiksel Modellemesi

Burada $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ durum vektörünü, $C = \text{diag}(c_i > 0)$ i. nöron için sabit katsayılar, $A = (a_{ij})_{n \times n}$ ara bağlantı matrisini, $g(x) = (g_1(x_1), g_2(x_2), \dots, g_n(x_n))^T$ aktivasyon fonksiyonlarını $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$ giriş vektörünü, n ise nöron sayısını temsil etmektedir.

Daha sonra ise Hopfield modelden daha kullanışlı bir model olan Cohen-Grossberg YSA model 1983 yılında ortaya atılmıştır:

$$\frac{dx(t)}{dt} = D(x(t))[-C(x(t)) + Ag(x(t)) + u]$$

Şekil 1.2: Cohen-Grossberg YSA Matematiksel Modellemesi

Burada $D(x(t))$ genişletme fonksiyonudur. Bu fonksiyon sistemin denge noktasına yakınsama hızını denetler. Ayrıca buradaki $C(x(t))$ davranış fonksiyonudur.

Hopfield modeli, Cohen – Grossberg modelinin ($D(x(t)) = 1$ ve $C(x(t)) = Cx(t)$ için) özelleşmiş birer formudur. Bu sebeple Cohen-Grossberg için yapılan çalışmaların hepsi Hopfield model için de geçerli olacaktır.

Yapılan çalışmalar sonucunda YSA modellerinde göz önünde bulundurulması gereken farklı etmenlerin varlığı da ortaya çıkmıştır. Bunlar arasında özellikle çok önemli iki faktör göz önünde bulundurulmalıdır. Bunlardan ilki sistem parametrelerindeki sapmalar, ikincisi sistemdeki zaman gecikmeleridir.

Bu nedenle bu iki durumun önüne geçebilmek için alınması gereken önlemlerden birincisi; sistemdeki zaman gecikmelerinden doğan sapmalardan kurtulabilmek amacıyla zaman gecikmeli YSA modeli kullanılmasıdır. Çünkü gecikmenin göz önünde bulundurulmadığı bir YSA sistemi kararlı iken kararsız hale geçebilir. Benzer şekilde meydana gelebilecek bazı dış etkenlerden dolayı, sistem parametrelerinde oluşabilecek sapmalar sebebiyle de sistem kararsız hale gelebilir. Bu yüzden alınacak önlemlerden ikincisi ise; YSA'nın sistem parametrelerindeki sapmaların önüne geçebilmek adına sistem parametresinin belirsizliklerinin dinamik davranış üzerindeki etkisi göz önünde bulundurularak bir robust kararlılık analizi gerçekleştirmektir.

Bu tezin amacı zaman gecikmeli ve parametre belirsizlikleri ile tanımlanmış Cohen-Grossberg YSA modeli için yeni bir üst sınır ve yeni bir Lyapunov fonksiyonu tanımlayarak sistemin denge noktası için global robust kararlılık analizi gerçekleştirmek ve yeni esnek kararlılık koşulları elde etmektir.

Bu hedef doğrultusunda, tezin genel kısımlarında doğrusal olan ve olmayan diferansiyel denklem sistemleri için birtakım kararlılık kavramlarından bahsedilmiş ve bir diferansiyel sistemin kararlılığının tespitinde kullanılacak bazı önemli teorilere yer verilmiştir.

Tezin malzeme ve yöntem kısmında doğrusal olmayan bir diferansiyel denklem sisteminin matris-vektör formunda ifade edilişi üzerine elde edilen matrislerin ve vektörlerin çeşitleri hakkında ön bilgiler verilmiş olup YSA'nın matematiksel modellemeleri incelenmiştir. Ayrıca bu modeller içerisindeki parametre belirsizliklerine sahip YSA modelleri için hem arabağlantı matrislerine yeni bir üst sınır bulunmuş, sayısal örnekle pekiştirilmiş hem de

belirli varsayımlar altında robust ve global asimtotik kararlılığı analizi yapılmıştır.

Bulgular kısmında ise elde edilen kararlılık koşullarının Cohen-Grossberg YSA modeli ve Hopfield YSA modeli için uygulanabilirliği ispatlanmış olup literatürdeki benzer varsayımlar altında elde edilen koşulları da genellediği açıkça ifade edilerek yeni ve yeterli kararlılık koşulu elde edildiğine dikkat çekilmiştir.

Son kısımda ise tezin kapsamından bahsedilerek bu tezden elde edilen özgün sonuçlar ışığında literatüre yeni katkılar yapılabileceği vurgulanmıştır.



2. GENEL KISIMLAR

Dinamik sistemler YSA çalışmalarının matematiksel modellemesinde kullanılan doğrusal olan ya da olmayan durumu zamana göre değişen diferansiyel denklem kümeleridir. Bu sistemlerde istenilen hedef diferansiyel denklem sistemlerinin denge noktası civarındaki davranışını inceleyerek birtakım sonuçlar elde etmektir. Bu yüzden önce denge noktası kavramını incelemek gerekir:

Denge Noktası: $\dot{x} = g(x)$ olarak gösterilen bir diferansiyel denklemde $g(\check{x}) = 0$ şartını gerçekleyen $\check{x}$ sabitine sistemin denge noktası denir.

Genellikle uzun bir zaman aralığında sisteme ait çözüm yörüngelerinin denge noktasına yakınsaması, denge noktasından saçılması, kaos ya da denge noktasının civarında osilasyon yapması ve benzeri davranışlar ortaya çıkabilir. Ancak önce doğrusal olan ya da olmayan sistemlerin matematiksel olarak ifade edilmesini, eğer bulunabiliyorsa çözümlerinin nasıl olduğunu, bulunamıyorsa sistemin davranış analizinin yapılması için kullanılan yöntemleri açıklamak gereklidir.

2.1. DOĞRUSAL VE DOĞRUSAL OLMAYAN DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİ

W $n \times n$ boyutlu sabit bir matris ve $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T \in \mathbb{R}^n$ de tanımlanan vektör olmak üzere; $\dot{x}(t) = Wx(t)$ doğrusal diferansiyel denklem sistemi eğer W matrisinin özdeğerlerine karşılık gelen n tane özvektörün lineer bağımsız kümesine sahipse o zaman bu sistemin çözümü $x(t) = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + c_n v_n e^{\lambda_n t}$ dir. Burada $c_1, c_2, \dots, c_n$ keyfi sabitlerdir. Ayrıca bir $x(t)$ değişkeninin denge durumu, $\dot{x}(t) = 0$ olmasıdır.

Doğrusal olmayan sistemlerde dinamik denklem aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\dot{x}_i = g_i(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), \quad i = 1, \dots, n$$

Yukarıdaki diferansiyel denklem takımındaki $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$ sisteme ait

durum değişkenidir ve g fonksiyonu doğrusal olmayan bir fonksiyonu temsil etmektedir. Bu ifadenin vektör-matris formu ise $\dot{x}(t) = g(x(t))$ olarak yazılabilir. Ek olarak $g(\check{x}(t)) = 0$ eşitliğini sağlayan $\check{x} = (\check{x}_1(t), \check{x}_2(t), \dots, \check{x}_n(t))^T$ vektörü sistemin denge noktasıdır.

Denge noktası doğrusal sistemlerde tek iken doğrusal olmayan sistemlerde bir ya da daha çok olabilir. Denge noktasının sayısı kullanılacak problemin çeşidine göre belirlenir. Çift yönlü çağrışimli bellek tasarımı yapmak istenildiğinde çoklu denge noktasının varlığı avantajlı iken herhangi bir optimizasyon probleminin çözülmesinde sadece bir tane denge noktasının varlığı daha avantajlıdır.

Doğrusal olan veya olmayan herhangi bir sisteme ait çözüm yörüngeleri denge noktasına yakınsadığında ya da denge noktasına gitmeye eğilimli olduğunda sistem kararlı; bu yörüngeler denge noktasından uzaklaştığında ya da osilasyon yaptığında ise sistem kararsız bir yapıdadır.

$$\dot{x}(t) = Wx(t), x \in R^n, t \geq 0$$

şeklinde verilen doğrusal sistemi ele alınırsa $\det(W) \neq 0$ olduğunda bu sistemin tek denge noktasının varlığı aşıkardır. Bu denge noktasının kararlılığı Lyapunov kararlılık teoremleri ile belirlenebildiği gibi doğrudan W matrisine bakarak da belirlenebilir. Örneğin; $\lambda_i(W)$, W matrisinin özdeğerlerini temsil etmek üzere $Re(\lambda_i(W)) > 0$, $(i = 1, \dots, n)$ ise $\dot{x}(t) \rightarrow \infty$ olur ve bu şekilde olan sistemler kararsız olarak nitelendirilir. $Re(\lambda_i(W)) < 0$, $(i = 1, \dots, n)$ ise $\dot{x}(t) \rightarrow 0$ olur ve bu şekilde olan sistemler kararlı olarak nitelendirilir.

Doğrusal olmayan denklem sistemlerinde ise kararlılık analizini gerçekleştirmek zor olduğu için ve ayrıca denge noktasının varlığı sistemin kararlılığında gerekli fakat yeterli koşul olmadığı için bu konudaki gereksinimi karşılamak üzere literatürde doğrusal olmayan dinamik sistemlerinin kararlılık derecelerini ve özelliklerini sınıflandıran birtakım analiz yöntemleri geliştirilmiştir. Ayrıca bu yöntemler doğrusal sistemler için de kullanılabilmektedir.

Doğrusal olmayan sistemler için kararlılık derecelerine ve özelliklerine göre bazı kararlılık kavramları matematiksel olarak aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

2.2. KARARLILIK ÇEŞİTLERİ VE TEOREMLERİ

Kararlılık : Doğrusal olmayan bir sistemin denge noktası $\check{x}$ ve $t \geq 0$ olmak şartıyla $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\|x(0) - \check{x}\| < \delta \implies \|x(t) - \check{x}\| < \varepsilon$$

koşulunu sağlayan $\exists \delta$ bulunabilirse sistem kararlıdır.

Yukarıdaki matematiksel ifadeler $\check{x}$ 'in δ komşuluğunda $(S(\delta))$ başlayan her çözümün $\check{x}$ 'in ε komşuluğunda $(S(\varepsilon))$ kaldığını söyler. Sonuç olarak kararlı bir sistemde; $x(t)$ çözüm yörüngeleri denge noktasının civarındadır. Ancak birden fazla nokta bu koşulu gerçekleyebileceğinden dolayı sistem birden çok denge noktasına sahip olabilir.

Kararsızlık : Kararlı olmayan sisteme kararsızdır denir. Yani kararsız sistemde sistemin çözüm yörüngeleri, $S(\varepsilon)$ bölgesinden çıkarak ya bir limit çevrimi içine girer ya da sonsuza gider.

Asimtotik Kararlılık : $\check{x}$ denge noktası ve $t \geq 0$ olmak üzere, eğer $\check{x}$ kararlıysa ve aşağıdaki koşulu sağlayan herhangi bir $0 < \delta_0 < \delta$ varsa o zaman sistem asimtotik kararlıdır:

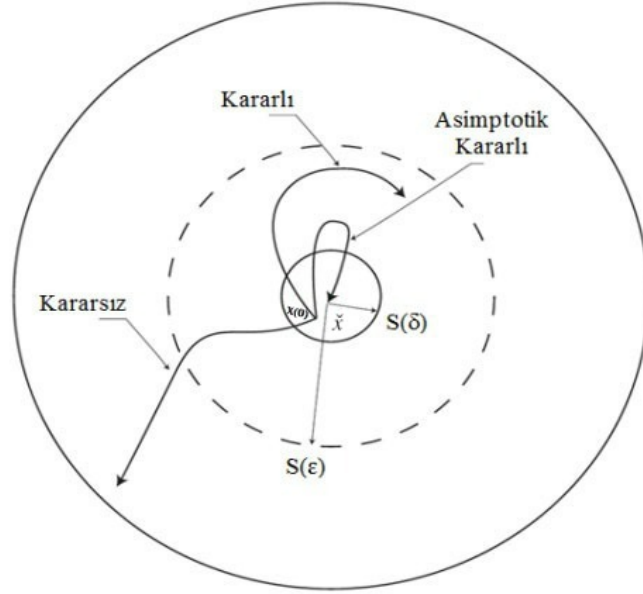
$$\|x(0) - \check{x}\| < \delta_0 \implies \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \check{x}$$

Böylece $\check{x}$ 'in δ komşuluğunda $(S(\delta))$ başlayan yörüngeler $S(\varepsilon)$ bölgesinin dışına çıkmadan $t \rightarrow \infty$ iken sonunda hepsi $\check{x}$ 'a yaklaşır. Yani; asimtotik kararlı olan bir sistem tek denge noktasına sahiptir.

Bu sebeple asimtotik kararlılık, kararlılıktan daha kuvvetli bir özelliktir. Çünkü bir sistemin asimtotik kararlı olabilmesi için öncelikle kararlı olması gerekir. O halde asimtotik kararlı olan her noktanın kararlı olduğu ifade edilebilir.

Global Asimtotik Kararlılık : $\check{x}$ denge noktası kararlı ve $t \geq 0$ olma koşuluyla, herhangi $x(0)$ için $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \check{x}$ oluyorsa $\check{x}$ denge noktası global asimtotik kararlıdır.

Doğrusal sistemlerde kararlılık ile global asimtotik kararlılık eşdeğerdir.



Şekil 2.1: Kararsızlık, Kararlılık, Asimtotik Kararlılık

Üstel Kararlılık : Eğer $\dot{x} = g(x)$ sisteminin denge noktası $\check{x} = 0$ olmak üzere çözümü $\exists m \geq 0, \lambda > 0$ ve $\forall t \geq 0, \|x(0)\| < c$ için aşağıdaki koşul sağlanırsa $\check{x} = 0$ denge noktası üstel kararlıdır :

$$\|x(t)\| \leq m \|x(0)\| e^{-\lambda t}$$

Bir başka ifadeyle herhangi bir başlangıç durumu için $\check{x}$ denge noktasının bir $S(\delta)$ komşuluğu varsa ve bu komşulukta $\forall x(0) \in S(\delta)$ koşulu altında $t \rightarrow \infty$ iken $|x(t) - \check{x}| < e^{-\lambda t}$ eşitsizliğini gerçekleyen bir $\lambda > 0$ skaleri varsa üstel kararlıdır.

Üstel kararlılık asimtotik kararlılıktan daha güçlüdür. Yani bir sistem üstel kararlı ise asimtotik kararlıdır.

Global Üstel Kararlılık : Eğer herhangi başlangıç koşulu için, $\forall t \geq 0$ olmak şartıyla

$$\|x(t)\| \leq m \|x(0)\| e^{-\lambda t}$$

olacak biçimde $m > 0$ ve $\lambda > 0$ sabitleri mevcutsa $\check{x} = 0$ denge noktası global üstel kararlıdır.

Bir başka ifadeyle eğer üstel kararlılık koşulu tüm $x(0)$ başlangıç koşulları için sağlanırsa

$\ddot{x} = 0$ denge noktası global üstel kararlı olarak adlandırılır.

Optimizasyon, paralel işlem gibi problemler için tek denge noktası istenildiğinden, bu durumu garantilemek amacıyla uygulanacak YSA modeli global asimtotik kararlı olacak şekilde belirlenir. YSA'nın global yakınsaklığını gerçekleyen belirsiz sistem parametreleri arasındaki ilişkiyi kuran şartları elde etmek, global kararlılık analizinin temel hedeflerinden biridir. Fakat bu şartların gerçekleştirilebilmesi bizi fazlasıyla zor ve karmaşık analizlere maruz bırakmaktadır. Bunun sebebi de YSA'nın matematiksel model ifadesinin doğrusal olmayan diferansiyel denklem sistemleri ile olmasıdır.

Ayrıca bu belirlenen doğrusal olmayan dinamik sistemli YSA modelinin kararlılığının tespitinde; esas olarak Lyapunov teoremleri kullanılmaktadır. Nedeni ise karmaşık diferansiyel denklemleri çözmeden sistemin kararlılık analizinin bu teorem yardımıyla kolaylıkla yapılabilmesidir. 1982 senesinde Rus matematikçi Alexandr Mikhailovich Lyapunov bu teoremini literatüre kazandırması ile yeni bir çığır açmıştır. Günümüzde zamana göre değişen veya değişmeyen sistemlere direkt olarak uygulanabilmesi sebebiyle oldukça kullanışlıdır.

Lyapunov Kararlılık Teoremi :

- Eğer sürekli, diferansiyellenebilir, yerel pozitif tanımlı bir $V : R_+ \times R^n \rightarrow R$ fonksiyonu ve sabit $r > 0$ varsa o halde $x(t) \in R^n$ ve $g : R_+ \times R^n \rightarrow R^n$ olacak biçimde $\dot{x}(t) = g[t, x(t)] \quad t \geq 0$ sisteminin denge noktası kararlıdır öyle ki $\dot{V}(t, x) \leq 0, \quad \forall t \geq t_0, \quad \forall x \in B_r.$
- Eğer sürekli, diferansiyellenebilir, azalan, yerel pozitif tanımlı bir $V : R_+ \times R^n \rightarrow R$ fonksiyonu ve sabit $r > 0$ varsa o halde $x(t) \in R^n$ ve $g : R_+ \times R^n \rightarrow R^n$ olma koşuluyla $\dot{x}(t) = g[t, x(t)] \quad t \geq 0$ olacak biçimde sistem düzgün kararlıdır öyle ki $\dot{V}(t, x) \leq 0, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x \in B_r.$
- Sürekli, diferansiyellenebilir, azalan, yerel pozitif tanımlı bir $V : R_+ \times R^n \rightarrow R$ fonksiyonu varsa öyle ki $-\dot{V}$ yerel pozitif tanımlı fonksiyon; o halde $x(t) \in R^n$ ve $g : R_+ \times R^n \rightarrow R^n$ olma şartıyla $\dot{x}(t) = g[t, x(t)] \quad t \geq 0$ olacak biçimde sistem düzgün asimtotik kararlıdır.
- Eğer sürekli, diferansiyellenebilir bir $V : R_+ \times R^n \rightarrow R$ fonksiyonu var ve (i) V pozitif

tanımlı, azalan ve radyal sınırsız ve (ii) $-\dot{V}$ pozitif tanımlı fonksiyon olma özelliklerine sahipse o halde $x(t) \in R^n$ ve $g : R_+ \times R^n \rightarrow R^n$ olacak biçimde $\dot{x}(t) = g[t, x(t)] \quad t \geq 0$ sisteminin denge noktası global düzgün asimtotik kararlıdır.

- Eğer sürekli, diferansiyellenebilir bir $V : R_+ \times R^n \rightarrow R$ fonksiyonu ve $a, b, c > 0, p \geq 1$ varsa o halde $x(0)$ global üstel kararlıdır öyle ki

$$a||x||^p \leq V(t, x) \leq b||x||^p, \quad \dot{V}(t, x) \leq -c||x||^p, \quad \forall t \geq 0, \forall x \in R^n$$

Yukarıdaki teorem Lyapunov'un Direkt Metodu şeklinde isimlendirilir. Üstteki metot sayesinde doğrusal olmayan sisteme ait diferansiyel denklemleri çözmeden sistemin denge noktasının kararlılık özellikleri belirlenebildiğinden oldukça genel ve kullanışlıdır. Ayrıca bu metot doğrusal sistemler için de kullanılabilir. Ancak bu yöntemin uygulanabilmesi için ise uygun bir Lyapunov fonksiyonu seçmek hayatidir. Lyapunov fonksiyonu elde etmeye yarayan genel bir yöntem bulunmamakla birlikte literatürde birtakım çalışmalar [1] mevcuttur.

Lyapunov Teoremi'nin kapsamlı versiyonu olan LaSalle Değişmezlik İlkesi de mevcuttur:

LaSalle-Krasovskii Teoremi:

- $\dot{x}(t) = g[t, x(t)] \quad t \geq 0$ sistemi periyodik olsun. Sistemle aynı periyoda sahip sürekli, türevlenebilir, yerel pozitif tanımlı bir $V : R_+ \times R^n \rightarrow R$ fonksiyonu ve $\dot{V}(t, x) \leq 0, \forall t \geq 0, \forall x \in N$ koşulunu sağlayan 0 'ın bir N açık komşuluğu var olsun. $c > 0$ olmak üzere $L_v(c)$ bir seviye kümesini temsil etsin. Öyle bir c sabiti için $L_v(c)$ nin N de sınırlanması ve kapsanması gerçeklensin ve S aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$S = \{x \in L_v(c) : \exists t \geq 0 \ni \dot{V}(t, x) = 0\}$$

Bu koşullar altında, eğer $S, x(t) = 0 \quad \forall t_0 \geq 0$ hariç sistemin başka hiçbir yörüngesini içermiyorsa, o zaman 0 denge noktası düzgün asimtotik kararlıdır.

- $\dot{x}(t) = g[t, x(t)] \quad t \geq 0$ sistemi periyodik olsun. Bu sistemle aynı periyoda sahip sürekli, türevlenebilir bir $V : R_+ \times R^n \rightarrow R$ fonksiyonu var olsun. Öyle ki (i) $V > 0$ ve radyal sınırsız (ii) $\dot{V}(t, x) \leq 0, \forall t \geq 0, \forall x \in R^n$. Bu koşullar altında aşağıdaki gibi

bir R kümesi tanımlansın:

$$R = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists t \geq 0 \ni \dot{V}(t, x) = 0\}$$

eğer $S, x(t) = 0 \forall t_0 \geq 0$ hariç sistemin başka hiçbir yörüngesini içermiyorsa, o zaman 0 denge noktası global düzgün asimtotik kararlıdır.



3. MALZEME VE YÖNTEM

Dinamik YSA'nın kararlılık analizi yapılırken matrislerin ve vektörlerin normları gibi birtakım özellikleri kullanılır. Bu sebeple matris ve vektör özellikleri YSA kararlılık analizinin temel yapıtaşdır. Ancak bu özelliklerin daha kolay anlaşılabilmesi için önce Öklid Uzayı kavramı izah edilecektir.

Öklid Uzayı: $s = [s_1, s_2, \dots, s_n]^T$ n boyutlu vektörlerin kümesini, $s_1, s_2, \dots, s_n$ gerçekte sayıları ifade edecek olursa; reel değerli tüm n-boyutlu vektörlerin kümesi R^n ile temsil edilir ve Öklid Uzayı olarak adlandırılır.

R^n uzayının sahip olduğu özelliklerden bazıları aşağıdaki gibidir:

- (i) R^n de $y = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T$ ve $s = [s_1, s_2, \dots, s_n]^T$ herhangi iki eş boyutlu vektör olmak üzere, $s + y = [s_1 + y_1, s_2 + y_2, \dots, s_n + y_n]^T$ yeni bir vektör oluşturur.
- (ii) Herhangi bir $s \in R^n$ vektörünün α skaler ile çarpımı $\alpha s = [\alpha s_1, \alpha s_2, \dots, \alpha s_n]^T$ şeklinde olup αs yeni bir vektör temsil etmektedir.
- (iii) Herhangi $s, y \in R^n$ vektörleri için iç çarpım $s^T y = \sum_{i=1}^n s_i y_i$ şeklinde hesaplanan bir tamsayıdır.

Vektör Normları: $\forall s, y \in R^n$ ve η sabit bir sayı olsun. $\|s\|$ s vektörünün normunu temsil eden ve aşağıdaki özellikleri gerçekleyen reel değerli fonksiyon olarak tanımlanırsa o zaman bu fonksiyon bir norm belirtir:

- $\|s\| > 0, \forall s \neq 0$ ve $s = 0$ ise $\|s\| = 0$,
- $\|s + y\| \leq \|s\| + \|y\|$,
- $\|\eta s\| = |\eta| \|s\|$

Literatürde en sık kullanılan p. normu aşağıdaki gibidir:

$$\|s\|_p = (|s_1|^p + |s_2|^p + \dots + |s_n|^p)^{\frac{1}{p}} \quad 1 \leq p < \infty$$

Bu tez çalışmasının sonuçlarının elde edilmesinde fayda sağlayan ve yukarıdaki genel formdan elde edilen 3 norm aşağıdaki gibidir:

$$\|s\|_1 = (|s_1| + |s_2| + \dots + |s_n|) = \sum_{i=1}^n |s_i|$$

$$\|s\|_2 = (|s_1|^2 + |s_2|^2 + \dots + |s_n|^2)^{\frac{1}{2}} = (\sum_{i=1}^n s_i^2)^{\frac{1}{2}} = (s^T s)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|s\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |s_i|$$

Eğer $\|\cdot\|_\alpha$ ve $\|\cdot\|_\beta$ ayrı p-normları ise, $\forall s \in R^n$ için aşağıdaki biçimde $\mu_1 > 0$ ve $\mu_2 > 0$ sabit sayıları mevcuttur:

$$\mu_1 \|s\|_\alpha \leq \|s\|_\beta \leq \mu_2 \|s\|_\alpha$$

Bu sebeple tüm p-normları bu anlamda eşittir. Aşağıda vektör normlarının bazı özellikleri herhangi $s \in R^n$ vektörü için özetlenmiştir:

$$\|s\|_2 \leq \|s\|_1 \leq \sqrt{m} \|s\|_2$$

$$\|s\|_\infty \leq \|s\|_2 \leq \sqrt{m} \|s\|_\infty$$

$$\|s\|_\infty \leq \|s\|_1 \leq \sqrt{m} \|s\|_\infty$$

Ayrıca Hölder Eşitsizliği vektörlerin p-normu kullanılarak ifade edilebilen farklı bir eşitsizliktir ve aşağıdaki gibidir:

$\forall s, y \in R^n$ için $|s^T y| \leq \|s\|_p \|y\|_q$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ şartını sağlayan $1 \leq p, q < \infty$ olan p, q sayıları mevcuttur.

Reel elemanlı $n \times n$ boyutlu W matrisi, $R^n \rightarrow R^n$ e $\dot{x}(t) = Wx(t)$ doğrusal dönüşümünü tanımlayacak olursa W nın p-normunun genel hali aşağıdaki gibidir:

$$\|W\|_p = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Wx\|_p}{\|x\|_p} = \max_{\|x\|_p=1} \|Wx\|_p$$

Burada $p = 1, 2, \dots, \infty$ için elde edilen W matrisinin birinci normu $\|W\|_1$, ikinci normu $\|W\|_2$ ve sonsuz normu $\|W\|_\infty$ şu şekildedir:

$$\|W\|_1 = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |w_{ji}|$$

$$\|W\|_2 = [\lambda_{\max}(W^T W)]^{\frac{1}{2}}$$

$$\|W\|_{\infty} = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |w_{ij}|$$

Matris normlarının bilinmesi gereken bazı özellikleri aşağıda kısaca özetlenmiştir:

Herhangi $W_{m \times n}$ matrisi ve $P_{n \times q}$ matrisi için;

$$\|W\|_2 \leq \sqrt{\|W\|_1 \|W\|_{\infty}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|W\|_{\infty} \leq \|W\|_2 \leq \sqrt{m} \|W\|_{\infty}$$

$$\frac{1}{\sqrt{m}} \|W\|_1 \leq \|W\|_2 \leq \sqrt{n} \|W\|_1$$

$$\|WP\|_p \leq \|W\|_p \|P\|_p$$

Bazen p indisi gösterim esnasında düşürülür ve yazılmaz. Bu durumda bu normun p normu olduğu bilinmelidir.

3.1. MATRİS ÇEŞİTLERİ

Matrisler doğrusal olan ve olmayan dinamik sistemlerin dengelerinin kararlılık özelliklerini karakterize etme bakımından fazlasıyla önemlidir. Kararlı matrislerin incelenmesi için birincil motivasyon, diferansiyel denklem sistemlerinin denge noktalarının kararlılık özelliklerini anlama arzusundan kaynaklanmaktadır. Matematiğin uygulandığı bilimin çeşitli alanlarında denge noktaları ile ilgili sorular çeşitli biçimlerde ortaya çıkar. Bu alanların her birinde, durumu değişen, özellikle uzun dönem davranışları hakkında bilgi alınmak istenen sistemlerin dinamiklerini incelemek gerekir. Bu nedenle matris kararlılığı, uygulamalar ve matris teorisinin evrimi arasındaki etkileşimde önemli bir konu haline gelen başlangıç aracıdır.

Kararlı Matris : W $n \times n$ boyutlu bir matris olmak üzere W matrisinin her özdeğerinin reel kısmı negatif ($Re(\lambda_i(W)) < 0$) ise W ya kararlı matris denir.

Pozitif Kararlı Matris : $n \times n$ boyutlu bir W matrisinin her özdeğeri pozitif reel kısma sahip

$(\operatorname{Re}(\lambda_i(W)) > 0)$ ise W pozitif kararlı matris olarak ifade edilir.

Bu özellikleri taşıyan matrisler " H - kararlı matris" olarak da adlandırılır. Ayrıca $W \in H$ şeklinde temsil edilir.

Teorem 3.1.1 : W pozitif kararlı bir matristir ancak ve ancak $-W$ kararlıdır.

Teorem 3.1.2 : Eğer W pozitif kararlı bir matrisse $\det W > 0$ dır.

Pozitif Yarı Kararlı Matris : W matrisinin özdeğerlerinin negatif reel kısmı sıfırsa yani W nın her özdeğeri negatif olmayan reel kısma sahipse W ya pozitif yarı kararlı matris denir.

Bu matrislere " H_0 kararlı matris" de denir ve $W \in H_0$ şeklinde temsil edilir.

Teorem 3.1.3: W $n \times n$ tipinde bir matris olmak üzere eğer W pozitif kararlı bir matrisse o halde W tekil değildir.

Pozitif Tanımlı Matris : W $n \times n$ boyutlu bir matris olsun. Eğer $W^T = W$ ise yani W simetrik bir matrisse ve her özdeğeri pozitif reel kısma sahip ($\operatorname{Re}(\lambda_i(W)) > 0$) ise W matrisine pozitif tanımlı bir matris denir. Bu tip matrisler $W > 0$ şeklinde gösterilir.

Lemma 3.1.1 : Herhangi bir W matrisi pozitif tanımlıdır ancak ve ancak $\forall x \neq 0$ vektörü için $x^T W x$ kuadratik formu pozitifdir.

Pozitif Yarı Tanımlı Matris : W $n \times n$ boyutlu bir matris olsun. Eğer $W^T = W$ ise yani W simetrik bir matrisse ve her özdeğeri negatif olmayan reel kısma sahip ($\operatorname{Re}(\lambda_i(W)) \geq 0$) ise W matrisine pozitif tanımlı bir matris denir.

Pozitif tanımlı matrislerde geçerli olan bütün kurallar yarı pozitif tanımlı matrislerde de geçerlidir.

Teorem 3.1.4: Eğer W pozitif tanımlı ise pozitif kararlıdır. Bir başka ifadeyle pozitif tanımlı matris pozitif kararlı matrisin özel bir durumudur.

Z_n Tanımı : $W = (w_{ij})$ herhangi bir matris olmak üzere;

$$Z_n = \{W = (w_{ij}) : w_{ij} \leq 0, i \neq j \text{ ve } w_{ii} > 0, i = j \quad \forall i, j\}$$

şeklinde tanımlanan matrise Z_n sınıfının bir elemanıdır denir.

M Matris : Eğer $W \in Z_n$ ve W pozitif yarı kararlı ise W matrisi M matris olarak ifade edilir, $W \in K_0$ şeklinde gösterilir.

Tekil Olmayan M Matris : Eğer $W \in Z_n$ ve W pozitif kararlı ise W , tekil olmayan M matris şeklinde adlandırılır, $W \in K$ şeklinde ifade edilir.

M matris sınıfının oldukça önemli özelliklerinden biri M matrislerin asıl alt matrislerinin yine bir M matris olmasıdır. Aynı özellik pozitif tanımlı matris sınıfı için de doğrudur. Yani pozitif tanımlı matrisler ile tekil olmayan M matrisler arasında bu anlamda büyük oranda benzerlik bulunmaktadır.

Karşılaştırma (Kıyas) Matrisi : $n \times n$ boyutlu bir W matrisi için kıyas matrisi $C = \{c_{ij}\}$ ile gösterilir ve elemanları $c_{ii} = w_{ii}, c_{ij} = -|w_{ij}|$ olarak tanımlanır.

Z_n kümesinde bir matrisin karşılaştırma matrisi kendisine eşittir.

Tekil Olmayan H-Matris : Diyagonal elemanları $w_{ii} > 0$ olan herhangi W matrisi için bir kıyas matrisi C olsun. Bu C matrisi tekil olmayan M matris olursa o halde W , tekil olmayan H matris şeklinde isimlendirilir ve $W \in C$ biçiminde sembolize edilir.

H-Matris : Diyagonal elemanları $w_{ii} > 0$ olan herhangi W matrisi için bir kıyas matrisi C olsun. Bu C matrisi M matris olursa o halde W matrisine H matris denir ve $W \in C_0$ şeklinde gösterilir.

D-kararlı Matris : W $n \times n$ boyutlu bir matris olmak üzere her $P = \text{diag}\{p_i \geq 0\}$ için $WP \in H$ olduğunda D-kararlı denir ve $W \in D$ ile gösterilir.

Köşegensel Kararlı Matris : W $n \times n$ boyutlu bir matris olsun. Pozitif köşegen bir P matrisi varsa ve $W^T P + PW$ pozitif tanımlı ise köşegensel kararlı denir ve $W \in D$ ile gösterilir.

D_0 -kararlı Matris : W $n \times n$ boyutlu bir matris olmak üzere her $P = \text{diag}\{p_i > 0\}$ için $WP \in H_0$ olduğunda D_0 -kararlı denir ve $W \in D_0$ ile gösterilir.

Köşegensel Yarı-Kararlı Matris : W , $n \times n$ boyutlu bir matris olsun. Pozitif köşegen bir P matrisi varsa ve $W^T P + PW$ pozitif yarı tanımlı ise köşegensel yarı-kararlı denir ve $W \in D_0$ ile gösterilir.

Köşegensel kararlı matrisler aynı zamanda pozitif kararlı bir matris sınıfıdır.

Toplamsal Kararlı Matris : Herhangi nxn boyutlu W matrisi ele alınsın. Her $P = \text{diag}\{p_i \geq 0\}$ için $W + P \in H$ ise W toplamsal kararlı bir matristir ve $W \in A$ ile gösterilir.

Toplamsal Yarı-Kararlı Matris : Herhangi nxn boyutlu W matrisi ele alınsın. Her $P = \text{diag}\{p_i > 0\}$ için $W + P \in H$ ise W toplamsal yarı-kararlı bir matristir ve $W \in A_0$ ile gösterilir.

Bu matris sınıfı ilerleyen bölümlerdeki doğrusal olmayan dinamik sınır ağı sisteminin kararlılık analizi çalışmasında kullanılacaktır.

Pozitif matris : W nxn boyutlu bir matris olmak üzere W matrisinin tüm temel minörleri pozitif ise bu matrise P -matris denir ve $W \in P$ ile gösterilir.

Yarı-Pozitif Matris : W nxn boyutlu bir matris olmak üzere W matrisinin tüm temel minörleri negatif değilse bu matrise P_0 -matris denir ve $W \in P_0$ ile gösterilir.

Kesin Köşegen Satır Baskın Matris : nxn boyutlu bir W matrisine ait elemanlar;

$$w_{ii} > \sum_{j=1, i \neq j}^n |w_{ij}|, \quad \forall i$$

oluyorsa W kesin köşegen satır baskın matristir. Bir başka ifadeyle W matrisinin kesin köşegen satır baskın matris olabilmesi için; bu matrisin her köşegen elemanı, bulunduğu satırdaki diğer elemanların mutlak değerce toplamından büyük olmalıdır.

Kesin Köşegen Sütun Baskın Matris : nxn boyutlu bir W matrisine ait elemanlar;

$$w_{ii} > \sum_{j=1, i \neq j}^n |w_{ji}|, \quad \forall i$$

oluyorsa o zaman W matrisi kesin köşegen satır baskın matristir. Bir başka ifadeyle W matrisinin kesin köşegen satır baskın matris olabilmesi için; bu matrisin her köşegen elemanı, bulunduğu sütundaki diğer elemanların mutlak değerce toplamından büyük olmalıdır.

Köşegen Satır Baskın Matris : Bir nxn W matrisi, ancak ve ancak

$$w_{ii} \geq \sum_{j=1, i \neq j}^n |w_{ij}|, \quad \forall i$$

ise köşegen satır baskın denir.

Köşegen Sütun Baskın Matris : Bir $n \times n$ W matrisi, ancak ve ancak

$$w_{ii} \geq \sum_{j=1, i \neq j}^n |w_{ji}|, \quad \forall i$$

ise köşegen sütun baskın denir

Köşegen-Dışı İzoton Matris : Elemanları $w_{ii} > 0, w_{ij} \leq 0$ şeklinde olan bir $W = \{w_{ij}\}_{n \times n}$ matrisi için W kesin köşegen satır baskın ise köşegen dışı izoton matristir.

Toplamsal Köşegensel Kararlı (M_0) Matris : $\forall \alpha > 0$ skaleri için $\alpha I + W \in D$ ise $W \in M_0$ olmaktadır.

Bu matris sınıfında W , C_0 ve D_0 matris sınıflarının özelliğini sağlamakla birlikte bu iki sınıfın da elemanı değildir. Bu sebeple yeni bir sınıf tanımlanma yoluna gidilerek bir M_0 sınıfı bulunmuştur ve bu sınıf dinamik sinirsel sistemlerin denge noktasının global asimtotik kararlılık koşullarını elde etmek için kullanılabilir.

Aşağıda bu tez kapsamındaki matris sınıflarına ait bilinmesi gereken birtakım temel önemli özellikler verilecektir:

- Simetrik bir W matrisi için, WP reel özdeğerlere sahiptir, bu P matrisinin pozitif köşegen matris olduğunu ispatlar.
- $W \in C$ ise $W \in D$ dir. Ama $W \in C_0$ ise $W \in D_0$ olmak zorunda değildir.
- C matrisi W matrisinin kıyas matrisi olmak üzere $C \in K_0$ ise $W \in C_0$ dır.
- W tekil olmayan M-matris veya tekil olmayan H-matris ise, bir P pozitif köşegen matrisi vardır öyle ki

$$PW + W^T P > 0$$

- $W \in M_0$ ise her $P = \text{diag}\{p_i > 0\}$ için $A + P \in D$
- $W \in M_0$ ise her $P = \text{diag} p_i > 0$ için $AP \in M_0$

- W tekil olmayan M-matris veya tekil olmayan H-matris ise, bir P pozitif köşegen matrisi vardır öyle ki $W^T P$ kesin köşegen baskındır.
- $W \in D$ ise $W \in H$ dır.
- $W \in M_0$ ise $W \in D_0$ dır.
- C_0 sınıfındaki bir W matrisinin D_0 sınıfına ait olması gerekmez.
- D_0 sınıfındaki bir W matrisinin C_0 sınıfına ait olması gerekmez.
- K_0 sınıfındaki bir W matrisinin D_0 sınıfına ait olması gerekmez.
- M_0 sınıfındaki bir W matrisinin C_0, K_0, D_0 sınıflarından herhangi birine ait olması gerekmez.
- K_0, C_0 ya da D_0 sınıflarından birine ait olan bir W matrisi M_0 sınıfına da aittir. Öte yandan W simetrik bir matris gerek ve yeter şart pozitif yarı tanımlı ise $W \in M_0$ dır.

3.2. AKTİVASYON FONKSİYONLARI

YSA'larının kararlılığını etkileyen faktörlerden biri, sistemde kullanılan aktivasyon fonksiyonlarıdır. Aktivasyon fonksiyonları hücreye gelen net girdiye karşılık bir çıktı belirler. Bu çıktının hesaplanabilmesi amacıyla birtakım lineer olmayan fonksiyonlar kullanılmaktadır. Kullanılan çeşitli aktivasyon fonksiyonları sayesinde; YSA'nın sistem parametreleri üzerinde global robust asimtotik kararlılık şartlarının oluşturulması, YSA modelinin denge noktasının varlığı ve tekliği analizi yapılarak meydana gelen durumlardan her biri için başka şartlar oluşturulmuştur. Bu tez çalışması kapsamında oldukça önemli bir yere sahip olan literatürdeki aktivasyon fonksiyonları, onların matematiksel gösterimleri ve temel özellikleri aşağıda verilmiştir:

Sınırlı Aktivasyon Fonksiyonları : ρ_i pozitif bir sabit olmak üzere eğer $g_i(s)$, $|g_i(s)| \leq \rho_i$, ($i=1,2,...,n$) şartını gerçekleştiriyorsa sınırlıdır. Böyle olan aktivasyon fonksiyonlarının kümesi $g \in B$ ile gösterilir.

Sürekli Artan Türevi Sınırlı Aktivasyon Fonksiyonları :

$$0 < \frac{g_i(s) - g_i(y)}{s - y} \leq \eta_i, \quad \forall i \quad \forall y, s \in R \quad \text{ve} \quad y \neq s$$

$\eta_i > 0$ herhangi sabitler olmak üzere yukarıdaki koşulu gerçekleyen fonksiyonlara sürekli artan türevi sınırlı aktivasyon fonksiyonları denir. Bu tip aktivasyon fonksiyonlarının kümesi de $g \in S$ ile temsil edilir.

Azalmayan Türevi Sınırlı Aktivasyon Fonksiyonları :

$$0 \leq \frac{g_i(s) - g_i(y)}{s - y} \leq \gamma_i, \quad \forall i \quad \forall y, s \in R \quad \text{ve} \quad y \neq s$$

$\gamma_i > 0$ herhangi sabitler olmak üzere üstteki koşulu gerçekleyen aktivasyon fonksiyonlarının kümesi $g \in K$ olarak ifade edilir ve azalmayan türevi sınırlı aktivasyon fonksiyonları denir.

K sınıfı S sınıfından daha geniş bir kümedir. K sınıfındaki aktivasyon fonksiyonları azalmayan fonksiyonlar olduğundan dolayı türevi sıfır ya da pozitif olabilir.

Lipschitz Sürekli Aktivasyon Fonksiyonları :

$$\frac{|g_i(s) - g_i(y)|}{|s - y|} \leq \iota_i, \quad \forall i \quad \forall y, s \in R \quad \text{ve} \quad y \neq s$$

Yukarıdaki ifadede $\iota_i > 0$ değerleri sabittir. Üstteki koşulu gerçekleyen aktivasyon fonksiyonları $\mathcal{L}$ sınıfına aittir ve $g \in \mathcal{L}$ ile gösterilir.

Lipschitz sürekli fonksiyonları monoton artan ve artan fonksiyonları içerdiğinden dolayı $\mathcal{L}$ sınıfı da K sınıfından daha geniş bir kümedir. Bu sebeple Lipschitz aktivasyon fonksiyonu YSA'nın kararlılık analizi yapılırken literatürde sıklıkla kullanılmıştır. Ayrıca bu tez kapsamında yapılan çalışmalarda da $\mathcal{L}$ sınıfı aktivasyon fonksiyonu kullanılacaktır.

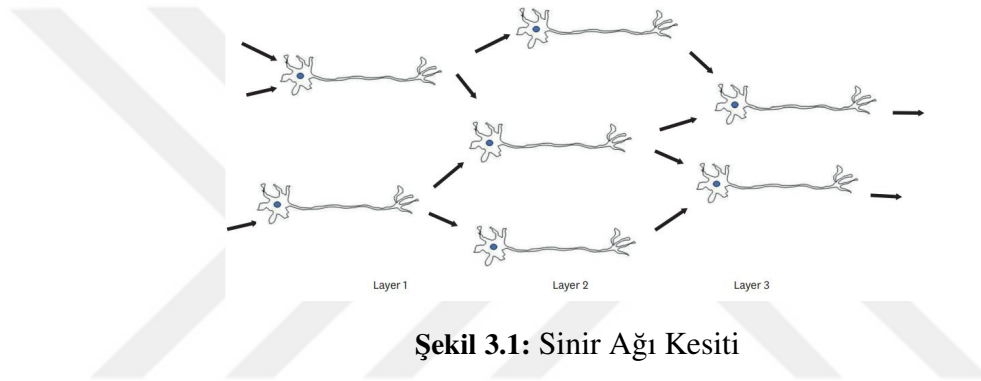
YSA'nın kararlılık analizlerinde genellikle kullanılan fonksiyonlar özdeşlik fonksiyonu ($g(y) = y$), sigmoid fonksiyonu ($g(y) = \frac{1}{1+e^{-y}}$), tanh fonksiyonu ($g(y) = \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}$), signum fonksiyonu vb. fonksiyonlardır.

3.3. YSA İLE İLGİLİ GENEL BİLGİLER

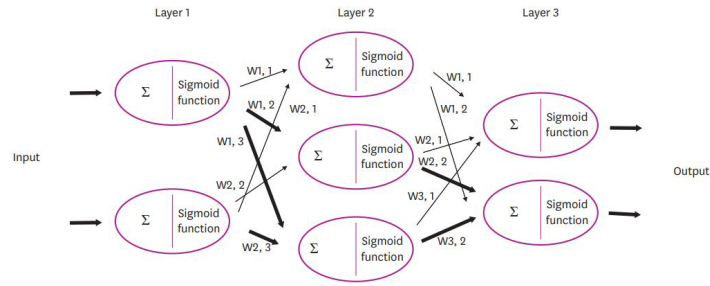
Yapay zekanın bir alt dalı olan YSA, öğrenme yöntemiyle daha önceki bilgilerden farklı olarak bilgiler üretebilme, beyin fonksiyonlarının ürünü olan sonuçları kullanarak yeni olaylar öğrenebilme, keşif edebilme gibi yetenekleri kendiliğinden yapabilmek maksadıyla oluşturulan bilgisayar sistemleridir. Teknik olarak ise YSA, kendisine önceden tanıtılan bir

girdi veri setine karşılık oluşturulabilecek bir çıktı veri seti oluşturan sistemdir [2] .

Biyolojik sinir ağları, YSA'nın oluşumu için en temel referanstır. Sistemin en genel ifadeyle çalışma şekli biyolojik olarak şu şekildedir: Beyindeki nöronlar, aksiyon potansiyelleri olarak bilinen elektrik sinyallerini gönderir. Akson gövdesi bu sinyaller için kanal görevi görür ve sinyaller sinaps boyunca bir nörondan diğer nörona aktarılır. Yani nöronlar sinyalleri alır ve diğer sinyalleri üretir. Yani bilgisayar terminolojisi ile girdi verilerini alırlar, bazı işlemleri gerçekleştirirler ve bir çıktı oluştururlar. Ancak çıktı sabit bir oranda verilmez; girdi belirli bir eşiği aştığında çıktı olarak sonuçlanır. Bunu gerçekleştiren fonksiyon bölüm 3.2 de verilen aktivasyon fonksiyonlarından biridir.



Şekil 3.1: Sinir Ağı Kesiti



Şekil 3.2: YSA Kesiti

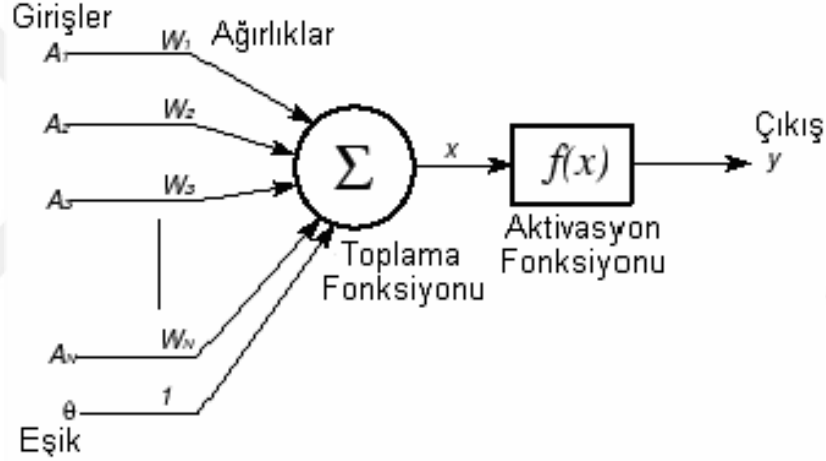
YSA, oldukça fazla hücreden meydana gelir ve eş zamanlı çalışması sonucu zorlu işler yapabilir.

Yapay sinir hücreleri, insan beyninin sinir hücrelerinin simüle edilmesiyle oluşturulmuştur ve proses elemanları olarak adlandırılmıştır. Her bir prosesin girdi, ağırlık fonksiyonu, toplama fonksiyonu, aktivasyon fonksiyonu, çıktı olacak biçimde 5 ana unsuru vardır [2]:

Girdi	Proses çevreden gelen uyarılar ya da diğer nöronlardan aktarılan bilgilerdir.
Ağırlık Fonksiyonu	Gelen tüm girdileri, net bir girdi haline getirmeye yarayan birtakım sabit veya değişken değerlerdir.
Toplama Fonksiyonu	Ağırlıklandırılmış girdileri birleştirerek net girdiyi elde etmeye yarayan fonksiyondur. Bunun için değişik fonksiyonlar kullanılmaktadır.
Aktivasyon Fonksiyonu	Hücreye giren net girdileri işleyerek hücrenin gelen veri için oluşturacağı yeni çıktıları gösterir. Bu fonksiyon çeşitleri Bölüm 3.2 ' de detaylıca verilmiştir.
Çıktı	Bu katmandaki hücre elemanları ara katmandan ulaşan verileri işler ve girdi seti için bir çıktı oluşur.

Tablo 3.1: Proses elemanları

[2]

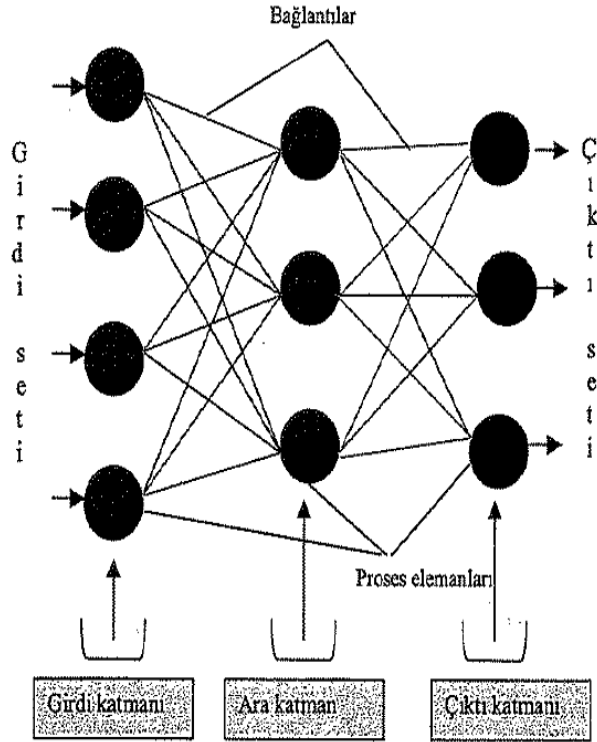


Şekil 3.3: Bir Yapay Sinir Hücresi Elemanları

Yapay sinir hücreleri genellikle 3 katman halinde ve paralel olarak birleşerek YSA'nı oluştururlar. Girdi katmanındaki proses elemanları dış dünyadan gelen verileri ara katmana taşır. Ara katmanda gelen veriler işlenir ve çıktı katmanına gönderilir. Sonra bu katmanında bulunan yapay sinir hücresi elemanları ara katmandan gönderilen bilgileri alarak gelen girdi setine karşılık üretilmesi istenen çıktıyı üretir. En son olarak üretilen bu çıktılar dış dünyaya gönderilir[2].

Bir ağın sahip olduğu proses elemanlarının yapısı, aktivasyon fonksiyonu, toplama fonksiyonu, ağın kullandığı öğrenme stratejisi, ağın topolojisi gibi faktörler farklı ağ modellerinin oluşmasına neden olmuştur. Örneğin, öğrenme stratejilerinden en önemli iki

tanesi danışmanlı ve danışmansız öğrenmedir. Danışmanlı öğrenmede sistemin istenen bilgiyi temin edebileceği ilk kaynak mevcutken danışmansız öğrenmede sistem deneyerek elde ettiği verilerden yola çıkarak yeni bilgiler öğrenir, yani herhangi bir ilk kaynak yoktur. Bu öğrenme tercihi bile aslında bir YSA modelini oldukça farklılaştırmaktadır. Benzer şekilde; YSA yapısına göre ileri sürümlü veya geri beslemeli olarak tercih edilebilir. İleri sürümlü YSA modelinde girdi gelir ara katmanda işlenir ve çıktı olarak dışarıya aktarılır, ancak geri beslemeli YSA modelinde ise durum biraz daha farklıdır. Bu modelde, İleri sürümlü YSA modelindeki gibi aynı işlemler gerçekleşir fakat çıkan çıktı daha sonrasında girdi olarak tekrar döngüye katılır. Dolayısıyla geri beslemeli YSA modeli çok daha kullanışlı ve gerçek sinir ağı modeline oldukça uygundur. Bu tezde kullanılan YSA modeli topolojisi de budur. Sonuç olarak ihtiyaca göre farklı gerçek dünya problemlerinin çözümüne uygun olan farklı YSA oluşturulmuştur. Günümüzde istenilen çıktıya göre uygun YSA modelleri tercihi yapılabilmektedir.



Şekil 3.4: YSA Örneği

Literatürde oldukça popüler olan ve üzerine fazlasıyla analizler gerçekleştirilen yapay sinir ağı modellerinden bazıları; hücrel sinir ağları (1988), Hopfield YSA (1982), Cohen-Grossberg YSA (1969) dır.

Bu tez kapsamında kullanılacak olan Cohen-Grossberg YSA modeli ilk kez 1983 senesinde literatüre girmiştir ve günümüzde kontrol sistemleri, örüntü tanıma, paralel işlem gibi birçok mühendislik problemlerinin çözümünün elde edilmesinde fazlasıyla kullanılmıştır.

Cohen Grossberg YSA modelinin içinde yakınsama hızını kontrol eden bir kuvvetlendirici fonksiyon ve durum uzayında sistemi kararlı yapan noktaların bulunması gereken yerleri belirleyen davranış fonksiyonu içermesinden dolayı diğer birçok modelden oldukça üstündür. Ayrıca Cohen-Grossberg YSA modeli, Hopfield gibi birçok YSA modelini de içine almaktadır.

Bu nedenle Cohen-Grossberg YSA model için yapılan analizler Hopfield model için de otomatik olarak sağlanmış olur.

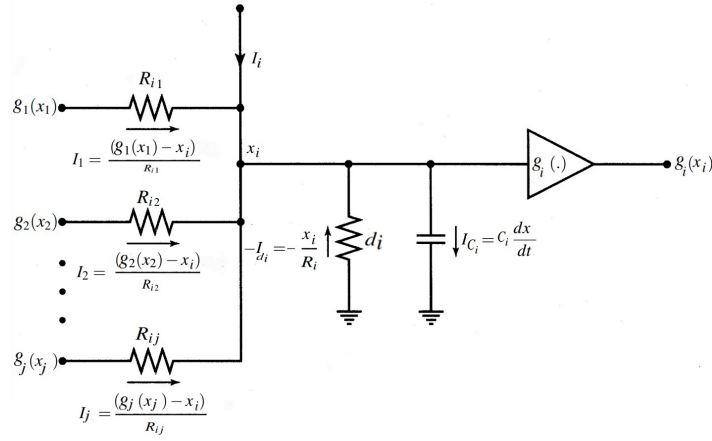
Cohen-Grossberg YSA modeli aşağıda belirtilen diferansiyel denklem sistemiyle tanımlanmıştır:

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = d_i(x_i(t))[-c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} g_j(x_j(t)) + u_i] \quad \forall i$$

Cohen-Grossberg YSA modelinde özellikle global robust kararlılık analizinin yapılması oldukça önemlidir. Çünkü bu koşullara sahip sistemin tüm çözümleri sabit tek denge noktasına yakınsamaktadır. Bu sebeple literatürde Cohen-Grossberg YSA modelinin denge noktasının kararlılık analiziyle ilgili oldukça çok çalışma mevcuttur.

Bununla birlikte, YSA'nın kararlılık durumunu etkileyen zaman gecikmelerinin de sistem modelinin içinde olması gerekliliği ortaya atılmıştır. Bu gereklilik geri beslemeli bir YSA modelinin elektronik devreler ile açıklanması sonucunda açığa çıkmıştır.

Bu durumu daha net bir şekilde ifade edebilmek için önce bir yapay sinir ağı modelinin elektronik devreyle nasıl oluşturulduğu konusunu incelemek gerekir:



Şekil 3.5: Herhangi bir nörona (i. nöron) ait bir elektronik devre modeli

Kirchoff'a göre herhangi elektrik devresinde bir düğüme giren akımların toplamı çıkan akımların toplamına eşit olduğundan aşağıdaki denklem yazılabilir:

$$\sum_{j=1}^n I_j - I_i - I_{di} - I_{Ci} = 0$$

Burada her bir terim aşağıdaki ifadelere eşittir:

$$\sum_{j=1}^n I_j = \sum_{j=1}^n \frac{g_j(x_j(t)) - x_i(t)}{R_j}, I_{di} = \frac{x_i(t)}{R_i} \text{ ve } I_{Ci} = C_i \frac{dx_i(t)}{dt}$$

Bu ifadeleri denklemde yerine koyarsak;

$$\sum_{j=1}^n \frac{g_j(x_j(t)) - x_i(t)}{R_j} - I_i - \frac{x_i(t)}{R_i} - C_i \frac{dx_i(t)}{dt} = 0$$

Buradan

$$\sum_{j=1}^n \frac{g_j(x_j(t))}{C_i R_j} - \sum_{j=1}^n \frac{x_i(t)}{C_i R_j} - \frac{I_i}{C_i} - \frac{x_i(t)}{R_i C_i} = \frac{dx_i(t)}{dt}$$

Yukarıdaki ifadede direnç ve kapasite pozitif olduğundan $\forall i, j = 1, \dots, n$ için

$$\sum_{j=1}^n \frac{g_j(x_j(t))}{C_i R_j} - x_i(t) \sum_{j=1}^n \frac{1}{C_i R_j} - \frac{I_i}{C_i} = \frac{dx_i(t)}{dt}$$

Bu denklemde sabit katsayılar bir araya toplanıp yeniden isimlendirildiğinde $(\frac{1}{R_i C_i} = c_i, \frac{1}{R_j C_i} = a_{ij}, -\frac{I_i}{C_i} = u_i)$ aşağıdaki zaman gecikmesiz Hopfield YSA modeli elde

edilir(1982):

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} g_j(x_j(t)) + u_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.1)$$

Ortaya çıkan denklemde n nöron sayısı olmak üzere c_i direnç ve kapasite değerinden oluşan pozitif bir diagonal matrisi, a_{ij} nöron ağırlık katsayılarından oluşan ara bağlantı matrisini $g = (g_1(x_1), g_2(x_2), \dots, g_n(x_n))^T$ aktivasyon fonksiyonlarını, son olarak $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$ giriş vektörünü belirtmektedir. Dikkat edilecek olursa Hopfield'in bu modelinde sistem bir gecikme terimi içermemektedir. Fakat YSA'nda bilginin aktarımı esnasında, elektrik devresinde kullanılan işlemsel kuvvetlendiricinin sonlu anahtarlama hızlarından ve bağlantı zamanından kaynaklı olarak zaman gecikmesi ortaya çıkabileceği aşıkardır. Marcus ve Westernvelt (1989) bu sebepten dolayı sistemin daha doğru çalışabilmesi için Hopfield modele bir gecikme terimi eklemiştir:

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} g_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^n b_{ij} g_j(x_j(t - \tau)) + u_i \quad \forall i \quad (3.2)$$

ya da matris-vektör formuyla

$$\frac{dx(t)}{dt} = -Cx(t) + Ag(x(t)) + Bg(x(t - \tau)) + u \quad (3.3)$$

τ bu denklemde sabit bir zaman gecikmesini temsil etmektedir. Fakat eklenen zaman gecikmelerinin de aslında her bir nöron için sabit olamayacağı fark edildiğinde ayrık zaman gecikmeli Hopfield modeller oluşturulmuştur ve bu modeller şu şekilde ifade edilmiştir:

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} g_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^n b_{ij} g_j(x_k(t - \tau_j)) + u_i \quad \forall i \quad (3.4)$$

ya da matris-vektör formuyla

$$\frac{dx(t)}{dt} = -Cx(t) + Ag(x(t)) + Bg(x(t - \tau)) + u \quad (3.5)$$

Ayrıca Hopfield modelini de kapsayan Cohen-Grossberg modeline Ye, Michel ve Wang gecikme parametrelerini eklemiştir ve zaman gecikmeli Cohen-Grossberg YSA modeli

literatürde yerini almıştır:

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = d_i(x_i(t))[-c_i(x_i(t)) + \sum_{j=1}^n a_{ij}g_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^n b_{ij}g_j(x_j(t - \tau_j)) + u_i] \quad \forall i \quad (3.6)$$

(3.6) ile verilen sistemde $\tau = \max(\tau_j)$, $\forall j$ olsun. Dolayısıyla, (3.6)'da verilen YSA sisteminin $x_i(t) = \Theta_i(t) \in C([- \tau, 0], R)$ formunda başlangıç koşuluna sahip olduğu ve $C([- \tau, 0], R)$ nin de $[- \tau, 0]$ 'den R 'ye giden reel değerli fonksiyonlar kümesini temsil ettiği söylenebilir. (3.6) sisteminin matris-vektör formu da aşağıdaki gibidir:

$$\frac{dx(t)}{dt} = D(x(t))[-C(x(t)) + Ag(x(t)) + Bg(x(t - \tau)) + u] \quad (3.7)$$

(3.6)'daki YSA sistemi n tane $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ ayrık zaman gecikmesi içeren bir model olup aşağıda tek τ zaman gecikmesi içeren ve (3.6)'nın özel bir durumu olan Cohen-Grossberg YSA modeli de verilmiştir:

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = d_i(x_i(t))[-c_i(x_i(t)) + \sum_{j=1}^n a_{ij}g_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^n b_{ij}g_j(x_j(t - \tau)) + u_i] \quad \forall i \quad (3.8)$$

ya da

$$\frac{dx(t)}{dt} = D(x(t))[-C(x(t)) + Ag(x(t)) + Bg(x(t - \tau)) + u] \quad (3.9)$$

Aşağıda yukarıdaki verilen YSA sistemlerinin matematiksel modellemelerinin incelenmesi hakkında bazı önemli notlar verilecektir:

Not 1: (3.6) ile ifade edilen sinir ağının matematiksel modellemesi, (3.8) ile ifade edilen sinir ağı modelinden ve (3.4) ile ifade edilen sinir ağı modeli de (3.2) ile ifade edilen sinir ağından daha genel formdadır. Böylece sinir sistemi (3.6) için türetilcek kararlılık kriteri doğrudan (3.8) sistemine ve (3.4) için türetilcek kararlılık kriteri de doğrudan (3.2) sistemine uygulanabilir. Bu nedenle, yalnızca gecikmeli sinir ağı modelleri (3.6) ve (3.4) için robust koşullar araştırılacaktır.

Not 2: Sinir sistemi (3.4), (3.6)'da ifade edilen sinir ağının özel bir durumudur. Bu nedenle, ilk önce (3.6)'da tanımlanan sinir sistemi için robust kararlılık koşulları elde edilecektir. Ardından, sinir sistemi (3.6) için elde edilen robust kararlılık koşulları (3.4) sinir ağı modeli için genişletilecektir.

Not 3: (3.6) YSA modeli ayrık zaman gecikme parametresi içerir ve sinir ağı (3.8) tek bir zaman gecikmesi parametresi içerir. Burada (3.6) ve (3.8) sinir ağı modellerinin matris-vektör formlarının sırasıyla (3.7) ve (3.9)'da belirtildiğine dikkat edilmelidir. (3.7) ve (3.9) YSA sistemi, A ve B matrislerinin tam formlarını içerir. Bununla birlikte, (3.6) sisteminin kararlılık analizi yapıldığında, bunun matematiksel modelinde n tane ayrık zaman gecikmesinin yer alması nedeniyle sinir ağlarında, kararlılık koşullarının ifadelerinde B 'nin tam biçimini temsil etmek her zaman mümkün olmayabilir. Öte yandan, (3.8) numaralı sistemler yalnızca tek bir zaman geciktirme terimi içerdiğinden, kararlılık koşullarının ifadelerinde B 'nin tam biçimini temsil etmek her zaman mümkündür.

Not 4: Dinamik sinir sistemlerinin LMI tabanlı kararlılık incelemesi, literatürde araştırmacılar tarafından sıklıkla kullanılan yöntemlerden biridir. Özellikle, sistem (3.8) durumunda, B matrisinin tam biçimine sahip olan yeterli kararlılık koşullarının türetilmesinde lineer matris eşitsizliği yönteminden yararlanılabilir. Ancak, sistem (3.6) durumunda, LMI yöntemi genellikle kararlılık koşullarının ifadelerinde B 'nin tam biçimini içermez. Bu durumda, LMI yöntemi sistem (3.6) için kararlılık koşullarının araştırılması için uygun bir yaklaşım olmayabilir. Bu nedenle, (3.6) sinir sisteminin kararlılık analizi bazı alternatif matematiksel teknikler ve yöntemler gerektirir.

[3]'de tanıtılan dinamik Hopfield YSA, [4]'de tanıtılan Cohen-Grossberg YSA ve bunların değiştirilmiş modelleri, optimizasyon problemlerinin farklı çeşitlerini çözmek için yaygın olarak kullanılmıştır [5]-[11]. Genel olarak optimizasyon problemlerinin çözümü amacıyla kullanılan YSA modelleri için kararlı denge noktasının varlığı, tekliği hem teorik açıdan hem de uygulama açısından oldukça önemlidir. Çünkü ilgili sinir ağı bazı sahte alt optimallerden kaynaklanan birden çok denge noktasına sahip olabilir [12],[13].

Sinir sistemlerinin elektronik uygulamalarında bazı sabit elemanları içeren arabağlantı matrislerinin sabit elemanları, harici parametreler tarafından bozulabilir ya da karıştırılabilir. Bu bağlamda dinamik sinir sistemlerinin bu dış bozulmalara karşı robust kararlılığı incelenmelidir [14],[15]. Bu tür dış etkenlere ek olarak, farklı iletim kanallarının varlığından dolayı doğrusal olmayan dinamik sistemlerin gerçek zaman uygulamalarının çoğunda zaman gecikme terimleri kaçınılmazdır [16]-[21]. Bu tür gecikme terimleri kararlı sinir sistemlerinin kararsız sinir sistemlerine dönüşmesine neden olabilir. Bu nedenle, bu zaman gecikmesi terimlerinin dinamik sinir ağı modellerindeki kararlılık üzerindeki olası

istenmeyen etkilerinin değerlendirilmesi araştırmacılar için önemlidir. Son birkaç on yılda, karmaşık değerli sinir ağı modelleri [22], Clifford sinir ağları [23], birleştirilmiş sinir ağı [24], sıralı sinir ağları [25], anımsatıcı sinir ağları [26], nötral sinir ağları [27], octonion değerli sinir ağları [28], kuaternion değerli sinir ağları [29], reaksiyon-difüzyon sinir ağları [30], engelleyici sinir ağları [31], yönlendirme ve stokastik sinir ağı [32] sistemleri dahil olmak üzere YSA modellerinin kararlılık ve yakınsama koşulları incelenmiştir.

Bu tezde ayrık zaman gecikmelerine sahip standart sürekli zamankı ve reel değerli sinir ağı modelleri için bazı yeni ve alternatif robust kararlılık koşulları araştırılacaktır. Bunun için kullanılacak olan model (3.6)'deki Ayrık Zaman Gecikmeli Cohen-Grossberg YSA modelidir ve bu model için global asimtotik robust kararlılık analizi gerçekleştirilecektir.

Bu dinamik sistemdeki fonksiyonların özellikleri; denge noktasının varlığını, tekliğini ve kararlılığını garanti eden kriterlerin oluşturulmasında kritik etkilere sahip olduğundan $d_i(x_i(t))$ genişletme fonksiyonunun, $c_i(x_i(t))$ davranış fonksiyonunun ve $g_i(x_i(t))$ doğrusal olmayan aktivasyon fonksiyonlarının iyi bilinen bazı temel özelliklerinin genellikle aşağıdaki ana koşulları sağladığı varsayılır:

C_1 : v_i and ϕ_i pozitif sabitler olmak üzere

$$0 < v_i \leq d_i(x) \leq \phi_i, \forall x \in R, \forall i.$$

$d_i(x)$ fonksiyonu bu koşulu sağlar.

C_2 : γ_i and ψ_i pozitif sabitler olmak üzere

$$0 < \gamma_i \leq \frac{|c_i(x) - c_i(\bar{x})|}{|x - \bar{x}|} \leq \psi_i, \forall x, \bar{x} \in R, x \neq \bar{x}, \forall i.$$

$c_i(x)$ fonksiyonu bu koşulu sağlar.

C_3 : l_i pozitif sabit olmak üzere $g_i(x)$ aşağıda verilen bazı Lipschitz koşullarını sağlar:

$$|g_i(x) - g_i(\bar{x})| \leq l_i |x - \bar{x}|, \forall x, \bar{x} \in R, \forall i.$$

Bu tip aktivasyon fonksiyonları $\mathcal{L}$ sınıfından olup, $g \in \mathcal{L}$ ile gösterilir ve literatürde deterministik sabit ağ parametreleri için bu aktivasyon fonksiyonuyla oluşturulmuş (3.6) ve (3.4) hakkında bazı yararlı sonuçlar yayınlanmıştır [33]- [46].

Ayrıca dinamik sistemin elektronik olarak ifade edilişinde de görüldüğü gibi elektronik bileşenlerin toleranslarından dolayı ağ parametrelerinin sabit değerlerindeki değişimler gibi bazı dış etkiler tarafından YSA'nın matematiksel modellemesindeki sabit ara bağlantı matrislerinin elemanları karışabilir ya da bozulabilir. Bu tez çalışması kapsamında robust kararlılık analizi yapılmasının sebebi budur. Çünkü bu sayede sistem sapmalardan olabildiğince az etkilenecektir ve daha doğru sonuçlar ortaya çıkacaktır. İstenilen hedef doğrultusunda yapılacak olan analizde belirsiz parametreler içeren gecikmeli Cohen-Grossberg YSA modelindeki arabağlantı matrisleri aşağıda gösterildiği gibi bir alt sınır ve bir üst sınır aralığı içerisinde bırakılacaktır:

$$\begin{aligned} A_I &:= \{A = (a_{ij}) : \underline{A} \preceq A \preceq \bar{A}, i.e., \underline{a}_{ij} \leq a_{ij} \leq \bar{a}_{ij}, i, j = 1, \dots, n\} \\ B_I &:= \{B = (b_{ij}) : \underline{B} \preceq B \preceq \bar{B}, i.e., \underline{b}_{ij} \leq b_{ij} \leq \bar{b}_{ij}, i, j = 1, \dots, n\} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Ancak A,B,C sistem parametrelerini içeren Hopfield YSA modelinde belirsiz parametrelere aşağıdaki şekilde yaklaşım yapılır:

$$\begin{aligned} C_I &:= \{C : 0 \prec \underline{C} \preceq C \preceq \bar{C}, i.e., 0 < \underline{c}_i \leq c_i \leq \bar{c}_i, \forall i\} \\ A_I &:= \{A = (a_{ij}) : \underline{A} \preceq A \preceq \bar{A}, i.e., \underline{a}_{ij} \leq a_{ij} \leq \bar{a}_{ij}, \forall i, j\} \\ B_I &:= \{B = (b_{ij}) : \underline{B} \preceq B \preceq \bar{B}, i.e., \underline{b}_{ij} \leq b_{ij} \leq \bar{b}_{ij}, \forall i, j\} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Gecikme terimlerine sahip bu YSA için uygun robust kararlılık araştırması yapmak adına, A ve B ara bağlantı matrislerinin normlarına pozitif üst sınırlar belirlenmesi gerekmektedir. Geçmiş literatürde, belirsiz aralıklar içeren bir F matrisinin ikinci normu için çeşitli üst sınırlar türetilmiştir. Bu sonuçlar aşağıdaki gibidir:

Lemma 3.3.1 [47]: $F \in F_I := \{F = (f_{ij}) : \underline{F} \preceq F \preceq \bar{F}, i.e., \underline{f}_{ij} \leq f_{ij} \leq \bar{f}_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, n\}$ olsun. $F^* = \frac{1}{2} (\bar{F} + \underline{F})$ ve $F_* = \frac{1}{2} (\bar{F} - \underline{F})$ olarak tanımlansın. O halde aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\|F\|_2 \leq \sigma_1(F) = \|F^*\|_2 + \|F_*\|_2$$

Lemma 3.3.2 [48]: $F \in F_I := \{F = (f_{ij}) : \underline{F} \preceq F \preceq \bar{F}, i.e., \underline{f}_{ij} \leq f_{ij} \leq \bar{f}_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, n\}$ olsun. $F^* = \frac{1}{2} (\bar{F} + \underline{F})$ ve $F_* = \frac{1}{2} (\bar{F} - \underline{F})$ olarak tanımlansın. O halde aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\|F\|_2 \leq \sigma_2(F) = \sqrt{\|F^*\|_2^2 + \|F_*\|_2^2 + 2\|F_*^T F^*\|_2}$$

Lemma 3.3.3 [49]: $F \in F_I := \{F = (f_{ij}) : \underline{F} \preceq F \preceq \bar{F}, i.e., \underline{f}_{ij} \leq f_{ij} \leq \bar{f}_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, n\}$ olsun. $W^* = \frac{1}{2} (\bar{F} + \underline{F})$ ve $F_* = \frac{1}{2} (\bar{F} - \underline{F})$ olarak tanımlansın. O halde aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\|F\|_2 \leq \sigma_3(F) = \sqrt{\|F^{*T} F_*\|_2 + 2\|F^{*T} F_* + F_*^T F_*\|_2}$$

Lemma 3.3.4 [50]: $F \in F_I := \{F = (f_{ij}) : \underline{F} \preceq F \preceq \bar{F}, i.e., \underline{f}_{ij} \leq f_{ij} \leq \bar{f}_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, n\}$ olsun. $F^* = \frac{1}{2} (\bar{F} + \underline{F})$ ve $F_* = \frac{1}{2} (\bar{F} - \underline{F})$ olarak tanımlansın. O halde aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\|F\|_2 \leq \sigma_4(F) = \|\hat{F}\|_2$$

Lemma 3.3.5 [51]: $F \in F_I := \{F = (f_{ij}) : \underline{F} \preceq F \preceq \bar{F}, i.e., \underline{f}_{ij} \leq f_{ij} \leq \bar{f}_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, n\}$ olsun. $F^* = \frac{1}{2} (\bar{F} + \underline{F})$ ve $F_* = \frac{1}{2} (\bar{F} - \underline{F})$ olarak tanımlansın. O halde aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\|F\|_2 \leq \sigma_5(F) = \sqrt{2\|F^{*T} F_*\|_2 + \|F_*^T F_*\|_2}$$

Bu tez çalışmasında Hopfield model ile verilen parametre belirsizlikleri içeren F matrisinin ikinci normu için yeni bir üst sınır bulunmuştur:

Lemma 3.3.6: $F \in F_I := \{F = (f_{ij}) : \underline{F} \preceq F \preceq \bar{F}, i.e., \underline{f}_{ij} \leq f_{ij} \leq \bar{f}_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, n\}$ olsun. $F^* = \frac{1}{2} (\bar{F} + \underline{F})$, $F_* = \frac{1}{2} (\bar{F} - \underline{F})$ ve P reel bir diyagonal matris olarak tanımlansın. O halde aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\|F\|_2 \leq \sigma_6(F) = \|F^* + P\|_2 + \|F_* - P\|_2$$

İspat: $\underline{f}_{ij} \leq f_{ij} \leq \bar{f}_{ij}$ için, aşağıda verilenler gerçekleşir:

$$f_{ij} = \frac{1}{2}(\bar{f}_{ij} + \underline{f}_{ij}) + \frac{1}{2}\rho_{ij}(\bar{f}_{ij} - \underline{f}_{ij}), \quad -1 \leq \rho_{ij} \leq 1, \forall i, j.$$

Burada $\tilde{f}_{ij} = \frac{1}{2}\rho_{ij}(\bar{f}_{ij} - \underline{f}_{ij})$ olacak şekilde $\tilde{F} = (\tilde{f}_{ij})$ matrisi tanımlanır. O halde F matrisi

$$F = 0.5(\bar{F} + \underline{F}) + \tilde{F} = F^* + \tilde{F}$$

şeklinde ifade edilebilir. Tüm bu bilgiler doğrultusunda $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ vektörü ve herhangi F matrisi için,

$$x^T F x = x^T F^* x + x^T \tilde{F} x \quad (3.12)$$

denklemini sağlanır. Öyle bir diyagonal P matrisi için, (3.12) denklemini yeniden ifade edilirse

$$x^T F x = x^T P x - x^T P x + x^T F^* x + x^T \tilde{F} x = x^T (F^* + P) x + x^T \tilde{F} x - |x^T P x| \quad (3.13)$$

olur. Sonra

$$x^T F x \leq \|F^* + P\|_2 \|x\|_2^2 + |x^T \tilde{F} x| - |x^T P x| \quad (3.14)$$

elde edilir. $|\tilde{f}_{ij}| \leq \frac{1}{2}(\bar{f}_{ij} - \underline{f}_{ij}), \forall i, j$ olduğundan dolayı, $|\tilde{F}| \preceq F_*$ dır.

Böylece, aşağıdaki (3.15) denklemini bulunur.

$$x^T F x \leq \|F^* + P\|_2 \|x\|_2^2 - |x^T P x| + |x^T F_* x| = |x^T (F_* - P) x| + \|F^* + P\|_2 \|x\|_2^2 \quad (3.15)$$

(3.15) denkleminde yola çıkarak, (3.16) eşitsizliği türetilir.

$$x^T F x \leq \|F\|_2 \|x\|_2^2 \leq \|F^* + P\|_2 \|x\|_2^2 + \|F_* - P\|_2 \|x\|_2^2 \quad (3.16)$$

Eşitsizliğin her iki tarafı $\|x\|_2$ normuna bölünürse

$$\|F\|_2 \leq \|F_* - P\|_2 + \|F^* + P\|_2$$

yeni üst sınırı elde edilmiş olur. Şimdi elemanları belirsiz parametre aralıkları içerisinde olan bir F matrisi için yeni ve alternatif bir üst sınır olan $\sigma_6(F)$ için sayısal bir örnek verilerek ispat pekiştirilecektir.

Örnek : $F \in F_I := \{F = (f_{ij})_{2 \times 2} : \underline{F} \preceq F \preceq \overline{F}\}$ olmak üzere

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \overline{F} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlansın. Bu matrisler kullanılarak aşağıdaki matrisler elde edilebilir.

$$F^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, F_* = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \hat{F} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

F^*, F_* and $\hat{F}$ matrisleri için, Lemma 3.3.1'den Lemma 3.3.6'ya kadar verilen tüm üst sınırları hesaplayalım:.

$$\begin{aligned} \sigma_1(F) &= \|F^*\|_2 + \|F_*\|_2 = 4,9208 \\ \sigma_2(F) &= \sqrt{\|F^*\|_2^2 + \|F_*\|_2^2 + 2\|F_*^T F^*\|_2} = 5,0858 \\ \sigma_3(F) &= \sqrt{\|F^{*T} F^*\|_2 + 2\|F_*^T F_* + F_*^T F_*\|_2} = 5,0658 \\ \sigma_4(F) &= \|\hat{F}\|_2 = 5,2361 \\ \sigma_5(F) &= \sqrt{2\|F^{*T} F^*\|_2 + F_*^T F_*\|_2} = 4,8990 \end{aligned}$$

$\sigma_6(F)$ 'nın bulunabilmesi için aşağıdaki P diyagonal matrisini seçelim:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

O halde gerekli hesaplamalar yapılırsa $\sigma_6(F) = \|F^* + P\|_2 + \|F_* - P\|_2 = 4,8284$ olarak elde edilir. Görüldüğü gibi bu örnek için $\sigma_m(F) = \min\{\sigma_1(F), \sigma_2(F), \sigma_3(F), \sigma_4(F), \sigma_5(F), \sigma_6(F)\} = \sigma_6(F)$ sağlanır. Yani, bu örnek belirsiz parametrelere sahip F arabağlantı matrisinin normu için $\sigma_6(F)$ yeni ve alternatif bir üst sınır olduğunu kanıtlar.

Elde edilen bilgiler doğrultusunda varlık, teklik ve kararlılık analizi yapmadan önce $\mathcal{L}$ sınıfına ait aktivasyon fonksiyonlarının sınırsız olabileceğine dikkat çekmek gerekir. Literatürde, sınır ağlarında bir aktivasyon fonksiyon sınıfı olarak sınırsız fonksiyonlar kullanıldığında denge noktasının varlık ve teklik analizinin aşağıdaki temel önermede ifade edilen homeomorfizm eşleme teoremi yardımıyla yapıldığı bilinmektedir.

Lemma 3.3.7: $H(x) \in C^0$ aşağıdaki iki ana özelliği içeren sürekli bir fonksiyon olsun. Bu özelliklerden ilki $x \neq \bar{x}$ iken $H(x) \neq H(\bar{x})$ olması ve ikincisi $\|x\| \rightarrow \infty$ iken $\|H(x)\| \rightarrow \infty$ olmasıdır. Böyle bir $H(x) \in C^0$ sürekli fonksiyon R^n in homeomorfizması olarak adlandırılır.

Artık ayrık zaman gecikmeli belirsiz parametrelere sahip Cohen-Grossberg YSA modeli için (3.10)'da verilen matris aralıkları ve $g \in \mathcal{L}$ kabulü altında yapılacak olan varlık-teklük ve kararlılık analizi için gerekli önbilgiler tamamlanmıştır.

3.4. AYRIK ZAMAN GECİKMELİ BELİRSİZ PARAMETRELERE SAHİP COHEN-GROSSBERG YSA MODELİ İÇİN VARLIK VE TEKLİK ANALİZİ

(3.6)'daki sistemde Lipschitz koşullarını sağlayan sınırsız nöronal aktivasyon fonksiyonları seti kullanılacağı için, bu sistemle ilişkili sabit denge noktalarının hem varlık-teklüğü hem de global kararlılığı oluşturulabilir. Bu nedenle, bu bölüm, Cohen-Grossberg model gibi doğrusal olmayan diferansiyel denklem sistemi ile ifade edilen ayrık zaman gecikmeli sinir sistemiyle ilgili kararlı denge noktalarının varlığı ve teklüğünün ayrıntılı bir analizine ayrılacaktır.

Teorem 3.4.1: (3.6)'da tanımlanan zaman gecikmeli YSA modelinde $g \in \mathcal{L}$ olduğu ve bu modeldeki sistem matrislerinin (3.10)'da tanımlandığı gibi, parametre belirsizliklerinin bir alt sınır ve bir üst sınır aralığında kaldığı varsayılın. Aşağıdaki cebirsel koşullar geçerli olmak üzere eğer $\kappa, \eta, \rho, \varepsilon, \nu, \rho, \mu, \xi_i$ ve ζ_i pozitif reel sabitleri varsa her sabit u için (3.6) dinamik YSA sistemi tek ve global asimtotik denge noktasına sahiptir:

$$\begin{aligned}
\delta_i &= 2\xi_i \frac{\gamma_i}{\ell_i} - \kappa \xi_i^2 - \frac{k_1 \eta}{\kappa} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \hat{a}_{ji} \hat{b}_{jk} - \frac{k_1}{\kappa \eta} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \hat{a}_{ij} \hat{b}_{ki} - \frac{(1+k_2 \rho) m_1}{\kappa} \sigma_m^2(A) \\
&\quad - \frac{(1+k_2 \rho) m_2}{\kappa} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \hat{a}_{ki} \hat{a}_{kj} - \frac{p_1}{\kappa} \left(1 + \frac{k_2}{\rho}\right) \sigma_m^2(B) - \frac{p_2}{\kappa} \left(1 + \frac{k_2}{\rho}\right) \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \hat{b}_{ki} \hat{b}_{kj} \\
\theta_i &= 2\zeta_i \frac{\gamma_i}{\ell_i} - q_1 \varepsilon \sum_{j=1}^n \zeta_j \hat{a}_{ij} - \frac{q_1}{\varepsilon} \sum_{j=1}^n \zeta_j \hat{a}_{ji} + q_2 \mu \zeta_i^2 - \frac{q_2}{\mu} \sigma_m^2(A) \\
&\quad - r_1 \rho \sum_{j=1}^n \zeta_i \hat{b}_{ij} - \frac{r_1}{\rho} \sum_{j=1}^n \zeta_j \hat{b}_{ji} - r_2 \nu \zeta_i^2 - \frac{r_2}{\nu} \sigma_m^2(B)
\end{aligned} \tag{3.17}$$

için

$$\varepsilon_1 \delta_i + \varepsilon_2 \theta_i > 0, \forall i$$

Burada $0 \leq \varepsilon_1 \leq 1$, $0 \leq \varepsilon_2 \leq 1$ için $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 1$, $0 \leq k_1 \leq 1$, $0 \leq k_2 \leq 1$ için $k_1 + k_2 = 1$, $0 \leq m_1 \leq 1$, $0 \leq m_2 \leq 1$ için $m_1 + m_2 = 1$, $0 \leq p_1 \leq 1$, $0 \leq p_2 \leq 1$ için $p_1 + p_2 = 1$, $0 \leq q_1 \leq 1$, $0 \leq q_2 \leq 1$ için $q_1 + q_2 = 1$, $0 \leq r_1 \leq 1$, $0 \leq r_2 \leq 1$ için $r_1 + r_2 = 1$, $\sigma_m(A) = \min\{\sigma_1(A), \sigma_2(A), \sigma_3(A), \sigma_4(A), \sigma_5(A), \sigma_6(A)\}$, $\hat{a}_{ij} = \max\{|\underline{a}_{ij}|, |\bar{a}_{ij}|\}$, $\sigma_m(B) = \min\{\sigma_1(B), \sigma_2(B), \sigma_3(B), \sigma_4(B), \sigma_5(B), \sigma_6(B)\}$ ve $\hat{b}_{ij} = \max\{|\underline{b}_{ij}|, |\bar{b}_{ij}|\}$, $\forall i, j$.

İspat: Kararlı denge noktalarının varlığı ve tekliği sorununu ele almak adına (3.6)'da tanımlanan zaman gecikmeli YSA sistemi ile ilişkili uygun bir $H(x)$ eşleme fonksiyonu düşünelim:

$$H(x) = -C(x) + Af(x) + Bf(x) + u \quad (3.18)$$

Denklem (3.18)'den $H(x) = 0$ koşulunun her çözümünün, tanım gereği, (3.6) ile tanımlanan gecikmeli sistemin sabit bir denge noktasını temsil ettiği gözlemlenebilir. Böylece Lemma 3.3.7'nin koşullarından, (3.6) sistemi için, uygun $H(x)$ eşlemesinin R^n 'in bir homeomorfizmi olduğu gösterilebilirse, her bir u değerli sabit için her zaman yalnızca tek bir denge noktası bulunabileceği sonucu çıkar. Dolayısıyla yukarıda tanımlanan $H(x)$ 'in R^n 'in homeomorfizmi olduğu ele alınırken $x \neq \bar{x}$ verildiğinde başka bir $\bar{x}$ vektörü seçilmelidir. Daha sonra (3.18)'de belirtilen $H(x)$ için

$$H(x) - H(\bar{x}) = C(\bar{x}) - C(x) + A(g(x) - g(\bar{x})) + B(g(x) - g(\bar{x})) \quad (3.19)$$

elde edilir.

(3.6) sisteminde, eğer $g \in \mathcal{L}$ ise, $x \neq \bar{x}$ için, iki farklı durum elde edilir. Bunlardan birincisi $g(x) = g(\bar{x})$ ve ikincisi $g(x) \neq g(\bar{x})$ 'dir. Bu koşullardan $x \neq \bar{x}$ için $g(x) = g(\bar{x})$ (3.19)'dan direkt olarak elde edilir:

$$H(x) - H(\bar{x}) = C(\bar{x}) - C(x)$$

C_2 koşulundan yararlanarak, $x - \bar{x} \neq 0$ için, $C(x) \neq C(\bar{x})$ ortaya çıkar. Öyleyse $H(x) \neq H(\bar{x})$ sağlanır.

Eğer $x \neq \bar{x}$ koşulu altında $g(x) \neq g(\bar{x})$ durumu geçerli olursa, (3.19) denkleminin her iki kısmı $2(x - \bar{x})^T(\varepsilon_1 \Phi + \varepsilon_2 \Psi)L$ ile çarpılır ve (3.20)'ye ulaşılır:

$$\begin{aligned} & 2(x - \bar{x})^T(\varepsilon_1 \Phi + \varepsilon_2 \Psi)L(H(x) - H(\bar{x})) \\ = & 2\varepsilon_1(x - \bar{x})^T \Phi L(H(x) - H(\bar{x})) + 2\varepsilon_2(x - \bar{x})^T \Psi L(H(x) - H(\bar{x})) \end{aligned} \quad (3.20)$$

burada $\Phi = \text{diag}(\xi_i > 0)$, $\Psi = \text{diag}(\zeta_i > 0)$ ve $L = \text{diag}(l_i > 0)$ 'dır.

(3.20) denklemindeki her bir terimin elde edilebilecek durumlara göre incelenmesi aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} & (x - \bar{x})^T \Phi L(H(x) - H(\bar{x})) \\ = & -(x - \bar{x})^T \Phi L(C(x) - C(\bar{x})) + (x - \bar{x})^T \Phi L(A + B)(g(x) - g(\bar{x})) \\ \leq & -(x - \bar{x})^T \Phi L(C(x) - C(\bar{x})) + \frac{\kappa}{2}(x - \bar{x})^T \Phi^2 L^2(x - \bar{x}) \\ & + \frac{1}{2\kappa}(g(x) - g(\bar{x}))^T (A + B)^T (A + B)(g(x) - g(\bar{x})) \\ = & -(x - \bar{x})^T \Phi L(C(x) - C(\bar{x})) + \frac{\kappa}{2}(x - \bar{x})^T \Phi^2 L^2(x - \bar{x}) \\ & + \frac{1}{2\kappa}(g(x) - g(\bar{x}))^T (A^T A + B^T B + 2A^T B)(g(x) - g(\bar{x})) \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} & (g(x) - g(\bar{x}))^T A^T B(g(x) - g(\bar{x})) \\ = & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ij} b_{ik} (g_j(x_j) - g_j(\bar{x}_j))(g_k(x_k) - g_k(\bar{x}_k)) \\ \leq & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left(|a_{ij}| |b_{ik}| \eta (g_j(x_j) - g_j(\bar{x}_j))^2 + |a_{ij}| |b_{ik}| \frac{1}{\eta} (g_k(x_k) - g_k(\bar{x}_k))^2 \right) \\ \leq & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} l_i^2 \left(\eta \hat{a}_{ji} \hat{b}_{jk} + \frac{1}{\eta} \hat{a}_{kj} \hat{b}_{ki} \right) (x_i - \bar{x}_i)^2 \end{aligned} \quad (3.22)$$

ve

$$(g(x) - g(\bar{x}))^T A^T B(g(x) - g(\bar{x})) \leq \frac{1}{2}(g(x) - g(\bar{x}))^T (\rho A^T A + \frac{1}{\rho} B^T B)(g(x) - g(\bar{x})) \quad (3.23)$$

(3.22) ve (3.23) denklemleri birleştirildiğinde aşağıdaki sonuç ortaya çıkar:

$$\begin{aligned}
& 2(g(x) - g(\bar{x}))^T A^T B(g(x) - g(\bar{x})) \\
&= 2(k_1 + k_2)(g(x) - g(\bar{x}))^T A^T B(g(x) - g(\bar{x})) \\
&\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left(k_1 \eta \hat{a}_{ji} \hat{b}_{jk} l_i^2 + \frac{k_1}{\eta} \hat{a}_{kj} \hat{b}_{ki} \right) l_i^2 (x_i - \bar{x}_i)^2 \\
&\quad + (g(x) - g(\bar{x}))^T (k_2 \rho A^T A + \frac{k_2}{\rho} B^T B) (g(x) - g(\bar{x})) \tag{3.24}
\end{aligned}$$

(3.24) 'te bulunan ifade (3.21) 'de yerine konularak denklem yeniden yazılırsa:

$$\begin{aligned}
& 2(x - \bar{x})^T \Phi L(H(x) - H(\bar{x})) \\
&\leq -2(x - \bar{x})^T \Phi L(C(x) - C(\bar{x})) + \kappa (x - \bar{x})^T \Phi^2 L^2 (x - \bar{x}) \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left(\frac{k_1 \eta}{\kappa} \hat{a}_{ji} \hat{b}_{jk} l_i^2 + \frac{k_1}{\kappa \eta} \hat{a}_{kj} \hat{b}_{ki} l_i^2 \right) (x_i - \bar{x}_i)^2 \\
&\quad + (g(x) - g(\bar{x}))^T \left(\frac{1}{\kappa} (1 + k_2 \rho) A^T A + \frac{1}{\kappa} (1 + \frac{k_2}{\rho}) B^T B \right) (g(x) - g(\bar{x})) \tag{3.25}
\end{aligned}$$

Yukarıdaki denklemdeki $(g(x) - g(\bar{x}))^T A^T A(g(x) - g(\bar{x}))$ ve teriminin analizi aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
& (g(x) - g(\bar{x}))^T A^T A(g(x) - g(\bar{x})) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ij} a_{ik} (g_j(x_j) - g_j(\bar{x}_j)) (g_k(x_k) - g_k(\bar{x}_k)) \\
&= m_1 (g(x) - g(\bar{x}))^T A^T A(g(x) - g(\bar{x})) \\
&\quad + m_2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ij} a_{ik} (g_j(x_j) - g_j(\bar{x}_j)) (g_k(x_k) - g_k(\bar{x}_k)) \\
&\leq \sum_{i=1}^n l_i^2 \left(m_1 \|A\|_2^2 + m_2 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{ki}| |a_{kj}| \right) (x_i - \bar{x}_i)^2 \\
&\leq \sum_{i=1}^n l_i^2 \left(m_1 \sigma_m^2(A) + m_2 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \hat{a}_{ki} \hat{a}_{kj} \right) (x_i - \bar{x}_i)^2 \tag{3.26}
\end{aligned}$$

Benzer şekilde diğer terimin de analizi yapılır:

$$\begin{aligned}
& (g(x) - g(\bar{x}))^T B^T B (g(x) - g(\bar{x})) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n b_{ij} b_{ik} (g_j(x_j) - g_j(\bar{x}_j)) (g_k(x_k) - g_k(\bar{x}_k)) \\
&= p_1 (g(x) - g(\bar{x}))^T B^T B (g(x) - g(\bar{x})) \\
&\quad + p_2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n b_{ij} b_{ik} (g_j(x_j) - g_j(\bar{x}_j)) (g_k(x_k) - g_k(\bar{x}_k)) \\
&\leq \sum_{i=1}^n \left(p_1 \|B\|_2^2 l_i^2 + p_2 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |b_{ki}| |b_{kj}| l_i^2 \right) (x_i - \bar{x}_i)^2 \\
&\leq \sum_{i=1}^n l_i^2 \left(p_1 \sigma_m^2(B) + p_2 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \hat{b}_{ki} \hat{b}_{kj} \right) (x_i - \bar{x}_i)^2 \tag{3.27}
\end{aligned}$$

Elde edilen (3.26) ve (3.27) denklemleri (3.25)'in içine yerleştirilirse:

$$\begin{aligned}
& 2(x - \bar{x})^T \Phi L (H(x) - H(\bar{x})) \\
&\leq -(x - \bar{x})^T 2\Phi L (C(x) - C(\bar{x})) \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \left(\kappa \xi_i^2 l_i^2 + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left(\frac{k_1 \eta}{\kappa} \hat{a}_{ji} \hat{b}_{jk} l_i^2 + \frac{k_1}{\kappa \eta} \hat{a}_{kj} \hat{b}_{ki} l_i^2 \right) \right) (x_i - \bar{x}_i)^2 \\
&\quad + \sum_{i=1}^n l_i^2 \left(\frac{1}{\kappa} (1 + k_2 \rho) m_1 \sigma_m^2(A) + \frac{1}{\kappa} (1 + k_2 \rho) m_2 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \hat{a}_{ki} \hat{a}_{kj} \right) (x_i - \bar{x}_i)^2 \\
&\quad + \sum_{i=1}^n l_i^2 \left(\frac{p_1}{\kappa} (1 + \frac{k_2}{\rho}) \sigma_m^2(B) + \frac{p_2}{\kappa} (1 + \frac{k_2}{\rho}) \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \hat{b}_{ki} \hat{b}_{kj} \right) (x_i - \bar{x}_i)^2 \tag{3.28}
\end{aligned}$$

C_2 koşulu altında, aşağıdaki denklem yazılabilir:

$$\begin{aligned}
-(x - \bar{x})^T 2\Phi L (C(x) - C(\bar{x})) &= - \sum_{i=1}^n 2(x_i - \bar{x}_i) \xi_i l_i (c_i(x_i) - c_i(\bar{x}_i)) \\
&= - \sum_{i=1}^n 2 \xi_i l_i |x_i - \bar{x}_i| |c_i(x_i) - c_i(\bar{x}_i)| \\
&\leq - \sum_{i=1}^n 2 \xi_i l_i \gamma_i (x_i - \bar{x}_i)^2 \tag{3.29}
\end{aligned}$$

(3.28). denklemde elde edilen (3.29). denklem kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& 2(x - \bar{x})^T \Phi L(H(x) - H(\bar{x})) \\
& \leq \sum_{i=1}^n \left(-2\xi_i \gamma_i l_i + \kappa \xi_i^2 l_i^2 + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left(\frac{k_1 \eta}{\kappa} \hat{a}_{ji} \hat{b}_{jk} l_i^2 + \frac{k_1}{\kappa \eta} \hat{a}_{kj} \hat{b}_{ki} l_i^2 \right) \right) (x_i - \bar{x}_i)^2 \\
& \quad + \sum_{i=1}^n \left(l_i^2 \frac{1}{\kappa} (1 + k_2 \rho) m_1 \sigma_m^2(A) + \frac{1}{\kappa} (k_2 \rho + 1) m_2 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \hat{a}_{ki} \hat{a}_{kj} l_i^2 \right) (x_i - \bar{x}_i)^2 \\
& \quad + \sum_{i=1}^n \left(p_1 \frac{1}{\kappa} \left(1 + \frac{k_2}{\rho} \right) \sigma_m^2(B) l_i^2 + \frac{1}{\kappa} \left(1 + \frac{k_2}{\rho} \right) p_2 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \hat{b}_{ki} \hat{b}_{kj} l_i^2 \right) (x_i - \bar{x}_i)^2 \\
& = - \sum_{i=1}^n l_i^2 \left(2\xi_i \frac{\gamma_i}{l_i} - \kappa \xi_i^2 - \frac{(1 + k_2 \rho) m_1}{\kappa} \sigma_m^2(A) - \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left(\frac{k_1 \eta}{\kappa} \hat{a}_{ji} \hat{b}_{jk} + \frac{k_1}{\kappa \eta} \hat{a}_{kj} \hat{b}_{ki} \right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{p_1}{\kappa} \left(1 + \frac{k_2}{\rho} \right) \sigma_m^2(B) - \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left(\frac{m_2 (1 + k_2 \rho)}{\kappa} \hat{a}_{ki} \hat{a}_{kj} + \frac{p_2}{\kappa} \left(1 + \frac{k_2}{\rho} \right) \hat{b}_{ki} \hat{b}_{kj} \right) \right) (x_i - \bar{x}_i)^2 \\
& = - \sum_{i=1}^n l_i^2 \delta_i (x_i - \bar{x}_i)^2 \tag{3.30}
\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi (3.20). denklemdeki $2(x - \bar{x})^T \Psi L(H(x) - H(\bar{x}))$ teriminin analizi gereklenirse:

$$\begin{aligned}
& 2(x - \bar{x})^T \Psi L(H(x) - H(\bar{x})) \\
& = -2(x - \bar{x})^T \Psi L(C(x) - C(\bar{x})) + 2(x - \bar{x})^T \Psi L(A + B)(g(x) - g(\bar{x})) \\
& = -2 \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_i) \zeta_i l_i (c_i(x_i) - c_i(\bar{x}_i)) \\
& \quad + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i - y_i) \zeta_i l_i (a_{ij} + b_{ij}) (g_j(x_j) - g_j(\bar{x}_j)) \tag{3.31}
\end{aligned}$$

Bazı önemli eşitsizlikler ayrıca aşağıda belirtilmiştir:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 2\zeta_i l_i (x_i - \bar{x}_i) a_{ij} (g_j(x_j) - g_j(\bar{x}_j)) \\
& \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \zeta_i \left(\varepsilon |a_{ij}| l_i^2 (x_i - \bar{x}_i)^2 + \frac{1}{\varepsilon} \zeta_i |a_{ij}| (g_j(x_j) - g_j(\bar{x}_j))^2 \right) \\
& \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\varepsilon \zeta_i |a_{ij}| l_i^2 (x_i - \bar{x}_i)^2 + \frac{1}{\varepsilon} \zeta_i |a_{ij}| l_j^2 (x_j - \bar{x}_j)^2 \right) \\
& = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\varepsilon \zeta_i |a_{ij}| l_i^2 + \frac{1}{\varepsilon} \zeta_j |a_{ji}| l_i^2 \right) (x_i - \bar{x}_i)^2 \\
& \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\varepsilon \zeta_i \hat{a}_{ij} l_i^2 + \frac{1}{\varepsilon} \zeta_j \hat{a}_{ji} l_i^2 \right) (x_i - \bar{x}_i)^2 \tag{3.32}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
& 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \zeta_i l_i (x_i - \bar{x}_i) a_{ij} (g_j(x_j) - g_j(\bar{x}_j)) \\
& \leq \sum_{i=1}^n \left(\varepsilon \zeta_i^2 l_i^2 (x_i - \bar{x}_i)^2 + \frac{1}{\varepsilon} \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} (g_j(x_j) - g_j(\bar{x}_j)) \right)^2 \right) \\
& = \varepsilon \sum_{i=1}^n \zeta_i^2 l_i^2 (x_i - \bar{x}_i)^2 + \frac{1}{\varepsilon} (g(x) - g(\bar{x}))^T A^T A (g(x) - g(\bar{x})) \\
& \leq \sum_{i=1}^n \left(\varepsilon \zeta_i^2 l_i^2 + \frac{1}{\varepsilon} \sigma_m^2(A) \ell_i^2 \right) (x_i - \bar{x}_i)^2 \tag{3.33}
\end{aligned}$$

(3.32) ve (3.33) birleştirildiğinde

$$\begin{aligned}
& 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \zeta_i l_i (x_i - \bar{x}_i) a_{ij} (g_j(x_j) - g_j(\bar{x}_j)) \\
& = 2(q_1 + q_2) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \zeta_i l_i (x_i - \bar{x}_i) a_{ij} (g_j(x_j) - g_j(\bar{x}_j)) \\
& \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(q_1 \varepsilon \zeta_i \hat{a}_{ij} l_i^2 + \frac{q_1}{\varepsilon} \zeta_j \hat{a}_{ji} l_i^2 \right) (x_i - \bar{x}_i)^2 \\
& + \sum_{i=1}^n \left(q_2 \varepsilon \zeta_i^2 l_i^2 + \frac{q_2}{\varepsilon} \sigma_m^2(A) l_i^2 \right) (x_i - \bar{x}_i)^2 \tag{3.34}
\end{aligned}$$

Aşağıda geriye kalan bazı ek eşitsizlikler belirtilmiştir:

$$\begin{aligned}
& 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \zeta_i l_i (x_i - \bar{x}_i) b_{ij} (g_j(x_j) - g_j(\bar{x}_j)) \\
& \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\rho \zeta_i |b_{ij}| l_i^2 (x_i - \bar{x}_i)^2 + \frac{1}{\rho} \zeta_i |b_{ij}| (g_j(x_j) - g_j(\bar{x}_j))^2 \right) \\
& \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\rho \zeta_i |b_{ij}| l_i^2 (x_i - \bar{x}_i)^2 + \frac{1}{\rho} \zeta_i |b_{ij}| l_j^2 (x_j - \bar{x}_j)^2 \right) \\
& \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\rho \zeta_i \hat{b}_{ij} l_i^2 + \frac{1}{\rho} \zeta_j \hat{b}_{ji} l_i^2 \right) (x_i - \bar{x}_i)^2
\end{aligned} \tag{3.35}$$

ve

$$\begin{aligned}
& 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \zeta_i l_i (x_i - \bar{x}_i) b_{ij} (g_j(x_j) - g_j(\bar{x}_j)) \\
& \leq \sum_{i=1}^n \left(v \zeta_i^2 l_i^2 (x_i - \bar{x}_i)^2 + \frac{1}{v} \left(\sum_{j=1}^n b_{ij} (g_j(x_j) - g_j(\bar{x}_j)) \right)^2 \right) \\
& = v \sum_{i=1}^n \zeta_i^2 l_i^2 (x_i - \bar{x}_i)^2 + \frac{1}{v} (g(x) - g(y))^T B^T B (g(x) - g(\bar{x})) \\
& \leq \sum_{i=1}^n \left(v \zeta_i^2 l_i^2 + \frac{1}{v} \sigma_m^2(B) l_i^2 \right) (x_i - \bar{x}_i)^2
\end{aligned} \tag{3.36}$$

(3.35) ve (3.36) denklemleri birleştirilerek yeniden yazılırsa;

$$\begin{aligned}
& 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \zeta_i l_i (x_i - \bar{x}_i) b_{ij} (g_j(x_j) - g_j(\bar{x}_j)) \\
& = 2(r_1 + r_2) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \zeta_i l_i (x_i - \bar{x}_i) b_{ij} (g_j(x_j) - g_j(\bar{x}_j)) \\
& = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(2r_1 \zeta_i l_i b_{ij} + 2r_2 \zeta_i l_i b_{ij} \right) (x_i - \bar{x}_i) (g_j(x_j) - g_j(\bar{x}_j)) \\
& \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(r_1 \rho \zeta_i \hat{b}_{ij} l_i^2 + \frac{r_1}{\rho} \zeta_j \hat{b}_{ji} l_i^2 \right) (x_i - \bar{x}_i)^2 \\
& + \sum_{i=1}^n \left(r_2 v \zeta_i^2 l_i^2 + \frac{r_2}{v} \sigma_m^2(B) l_i^2 \right) (x_i - \bar{x}_i)^2
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Sonuç olarak (3.31). denkleminin içine (3.34) ve (3.37) denklemleri yerleştirilirse bir sonraki

eşitsizliğe ulaşılır:

$$\begin{aligned}
& 2(x - \bar{x})^T \Psi \mathcal{L}(H(x) - H(\bar{x})) \\
\leq & -2 \sum_{i=1}^n \zeta_i \gamma_i l_i (x_i - \bar{x}_i)^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(q_1 \varepsilon \zeta_i \hat{a}_{ij} l_i^2 + \frac{q_1}{\varepsilon} \zeta_j \hat{a}_{ji} l_j^2 \right) (x_i - \bar{x}_i)^2 \\
& + q_2 \varepsilon \sum_{i=1}^n \zeta_i^2 l_i^2 (x_i - \bar{x}_i)^2 + \frac{q_2}{\varepsilon} \sigma_m^2(A) \sum_{i=1}^n \ell_i^2 (x_i - \bar{x}_i)^2 + r_1 \rho \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \zeta_i \hat{b}_{ij} l_i^2 (x_i - \bar{x}_i)^2 \\
& + \frac{r_1}{\rho} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \zeta_j \hat{b}_{ji} l_j^2 (x_i - \bar{x}_i)^2 + r_2 \nu \sum_{i=1}^n \zeta_i^2 l_i^2 (x_i - \bar{x}_i)^2 + \frac{r_2}{\nu} \sigma_m^2(B) \sum_{i=1}^n l_i^2 (x_i - \bar{x}_i)^2 \\
= & - \sum_{i=1}^n l_i^2 \left(2\zeta_i \gamma_i - q_1 \varepsilon \sum_{j=1}^n \zeta_i \hat{a}_{ij} + \frac{q_1}{\varepsilon} \sum_{j=1}^n \zeta_j \hat{a}_{ji} + q_2 \varepsilon \zeta_i^2 + \frac{q_2}{\varepsilon} \sigma_m^2(A) + r_1 \rho \sum_{j=1}^n \zeta_i \hat{b}_{ij} \right. \\
& \left. + \frac{r_1}{\rho} \sum_{j=1}^n \zeta_j \hat{b}_{ji} + r_2 \nu \zeta_i^2 + \frac{r_2}{\nu} \sigma_m^2(B) \right) (x_i - \bar{x}_i)^2 \\
= & - \sum_{i=1}^n l_i^2 \theta_i (x_i - \bar{x}_i)^2 \tag{3.38}
\end{aligned}$$

(3.30) ve (3.38) denklemini (3.20)'de kullanılır ve $l_m = \min(\ell_i)$, $\theta_m = \min(\theta_i)$, $\delta_m = \min(\delta_i)$,
yi temsil etmek üzere aşağıdaki (3.39) denklemine varılır:

$$\begin{aligned}
2(x - \bar{x})^T (\varepsilon_1 \Phi + \varepsilon_2 \Psi) L(H(x) - H(\bar{x})) & \leq - \sum_{i=1}^n (\varepsilon_1 \delta_i + \varepsilon_2 \theta_i) l_i^2 (x_i - \bar{x}_i)^2 \\
& \leq -(\varepsilon_1 \delta_m + \varepsilon_2 \theta_m) l_m^2 \|x - \bar{x}\|_2^2 \tag{3.39}
\end{aligned}$$

Bir sonraki eşitsizlik (3.39)'un direkt sonucu olarak ortaya çıkmaktadır:

$$|2(x - y)^T (\varepsilon_1 \Phi + \varepsilon_2 \Psi) L(H(x) - H(\bar{x}))| \geq (\varepsilon_1 \delta_m + \varepsilon_2 \theta_m) l_m^2 \|x - \bar{x}\|_2^2 \tag{3.40}$$

$0 \leq \varepsilon_1 \leq 1$ ve $0 \leq \varepsilon_2 \leq 1$ olduğundan (3.40)'ta uygulanırsa $l_M = \max(l_i)$, $\xi_M = \max(\xi_i)$ ve $\zeta_M = \max(\zeta_i)$ olmak üzere

$$(\xi_M + \zeta_M) l_M \|x - \bar{x}\|^T \|H(x) - H(\bar{x})\| \geq (\varepsilon_1 \delta_m + \varepsilon_2 \theta_m) l_m^2 \|x - \bar{x}\|_2^2 \tag{3.41}$$

sonucuna ulaşılır. (3.41) numaralı denklemden aşağıdaki ifade elde edilir:

$$(\xi_M + \zeta_M) l_M \|H(x) - H(\bar{x})\|_1 \geq (\varepsilon_1 \delta_m + \varepsilon_2 \theta_m) l_m^2 \|x - \bar{x}\|_2 \tag{3.42}$$

(3.42) numaralı denklemden yola çıkarak, $\forall x \neq \bar{x}$ için $H(x) \neq H(\bar{x})$ olduğu aşikardır.

$\bar{x} = 0$ alındığında, (3.42). denklemden elde edilir ki:

$$(\xi_M + \zeta_M)l_M \|H(x) - H(0)\|_1 \geq (\varepsilon_1 \delta_m + \varepsilon_2 \theta_m) l_m^2 \|x\|_2 \quad (3.43)$$

olur ve sonra denklem (3.43)'e ulaşılır.

$$(\xi_M + \zeta_M)l_M \|H(x)\|_1 \geq (\varepsilon_1 \delta_m + \varepsilon_2 \theta_m) l_m^2 \|x\|_2 - (\xi_M + \zeta_M)l_M \|H(0)\|_1 \quad (3.44)$$

Üstteki ifade $\|H(0)\|$ 'ın sınırlı bir norm olduğunu kanıtlar. Böylece (3.44)'den gözlemlenebilir ki $\|x\| \rightarrow \infty$ olurken $\|H(x)\| \rightarrow \infty$ olur. Dolayısıyla, $H(x) : R^n \rightarrow R^n$ fonksiyonunun R^n üzerinde uygun bir homeomorfizm olduğu kanıtlanmıştır. Yani bir başka ifadeyle; Cohen-Grossberg YSA sisteminin her bir u sabiti için tek bir denge noktasının belirlediğini Teorem 3.4.1'in koşulları sağlar.

3.5. AYRIK ZAMAN GECİKMELİ YSA MODELİNİN KARARLILIK ANALİZİ

İlerleyen bölümde, (3.6)'daki YSA modelinin denge noktasının varlığını ve tekliğini, asimtotik kararlılığını garanti eden kriterler belirlenecektir. Bu amaçla, önce (3.6) sistemi, kendisine ait tek denge noktasının sadece orijinde bulunduğu yeni ve eşdeğer bir YSA sistemine dönüştürülecektir. $\check{x}_1, \check{x}_2, \dots, \check{x}_n$ elemanlarına sahip bir $\check{x}$ vektörü, (3.6)'da verilen ağ modelinin sahip olduğu sabit bir denge noktasını temsil etsin. O halde (3.6) sisteminde $z_i(t) = x_i(t) - \check{x}_i$ kullanılması yeni bir dönüştürülmüş sistemle sonuçlanır ve şu şekilde gösterilebilir:

$$\dot{z}_i(t) = \alpha_i(z_i(t)) \left(-\beta_i(z_i(t)) + \sum_{j=1}^n a_{ij} h_j(z_j(t)) + \sum_{j=1}^n b_{ij} h_j(z_j(t - \tau_j)) \right), \forall i \quad (3.45)$$

(3.45)'te verilen bu yeni denklemde sistem fonksiyonları şu şekilde elde edilebilir: $h_i(z_i(t)) = g_i(z_i(t) + \check{x}_i) - g_i(\check{x}_i)$, $\alpha_i(z_i(t)) = d_i(z_i(t) + \check{x}_i)$ and $\beta_i(z_i(t)) = c_i(z_i(t) + \check{x}_i) - c_i(\check{x}_i)$, $\forall i$. Böylece, C_1 , C_2 ve C_3 koşulları altında bu yeni fonksiyonların aşağıdaki koşulları

sağlayacağı hemen gözlemlenebilir:

$$\begin{aligned}\tilde{C}_1 : \quad & 0 < v_i \leq \alpha_i(z_i(t)) \leq \phi_i, \forall i \\ \tilde{C}_2 : \quad & \gamma_i z_i^2(t) \leq z_i(t) \beta_i(z_i(t)) \leq \psi_i z_i^2(t), \forall i \\ \tilde{C}_3 : \quad & |h_i(z_i(t))| \leq l_i |z_i(t)|, \forall i.\end{aligned}$$

(3.45)'te verilen YSA sistemi aşağıdaki gibi yeni bir formda da belirtilebilir:

$$\dot{z}(t) = \alpha(z(t)) \left(-\beta(z(t)) + Ah(z(t)) + Bh(z(t-\tau)) \right) \quad (3.46)$$

(3.46)'da $z(t) = (z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t))^T$ dönüştürülmüş vektörü (3.46)'nın durum değişkenlerini sembolize eder. $\alpha(z(t)) = \text{diag}(\alpha_i(z_i(t)) > 0)$, $\beta(z(t)) = (\beta_1(z_1(t)), \beta_2(z_2(t)), \dots, \beta_n(z_n(t)))^T$ olarak yazılabilir. Bu YSA'nın çıktı vektörü $h(z(t)) = (h_1(z_1(t)), h_2(z_2(t)), \dots, h_n(z_n(t)))^T$ ile ve gecikmeli çıktı vektörü ise $h(z(t-\tau)) = (h_1(z_1(t-\tau_1)), h_2(z_2(t-\tau_2)), \dots, h_n(z_n(t-\tau_n)))^T$ ile gösterilebilir.

Aşağıda $V(t) = V_1(t) + V_2(t)$ ile gösterilen uygun pozitif Lyapunov fonksiyon adayı kullanılarak kararlılık analizi yapılacaktır:

$$V_1(t) = 2 \sum_{i=1}^n (\varepsilon_1 \int_0^{z_i(t)} \xi_i l_i \frac{s}{\alpha_i(s)} ds + 2\varepsilon_2 \int_0^{z_i(t)} \zeta_i l_i \frac{s}{\alpha_i(s)} ds) \quad (3.47)$$

ve

$$\begin{aligned}V_2(t) = & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left(\frac{\varepsilon_1 p_2}{\kappa} \left(1 + \frac{k_2}{\rho} \right) \hat{b}_{ki} \hat{b}_{kj} l_i^2 \int_{t-\tau_i}^t z_i^2(\varphi) d\varphi + \frac{k_1}{\kappa \eta} \hat{a}_{ij} \hat{b}_{ki} l_i^2 \int_{t-\tau_i}^t z_i^2(\varphi) d\varphi \right) \\ & + \frac{\varepsilon_1 p_1}{\kappa} \left(1 + \frac{k_2}{\rho} \right) \sigma_m^2(B) \sum_{i=1}^n l_i^2 \int_{t-\tau_i}^t z_i^2(\varphi) d\varphi + \frac{\varepsilon_2 r_1}{\rho} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \zeta_j \hat{b}_{ji} l_i^2 \int_{t-\tau_i}^t z_i^2(\varphi) d\varphi \\ & + \frac{\varepsilon_2 r_2}{\nu} \sigma_m^2(B) \sum_{i=1}^n l_i^2 \int_{t-\tau_i}^t z_i^2(\varphi) d\varphi + k l_m^2 \sum_{i=1}^n \int_{t-\tau_i}^t z_i^2(\varphi) d\varphi\end{aligned} \quad (3.48)$$

$V_1(t)$ 'in zamana göre türevi alındığında

$$\dot{V}_1(t) = 2\varepsilon_1 \sum_{i=1}^n \xi_i l_i \frac{\dot{z}_i(t)}{\alpha_i(z_i(t))} z_i(t) + 2\varepsilon_2 \sum_{i=1}^n \zeta_i l_i \frac{\dot{z}_i(t)}{\alpha_i(z_i(t))} z_i(t) \quad (3.49)$$

Aşağıda $\dot{V}_1(t)$ 'nin terimleri ayrı ayrı analiz edilecektir:

$$\begin{aligned}
2 \sum_{i=1}^n \xi_i l_i \frac{\dot{z}_i(t)}{\alpha_i(z_i(t))} z_i(t) &= -2z^T(t) \Phi L \beta(z(t)) + 2z^T(t) \Phi L (Ah(z(t)) + Bh(z(t - \tau))) \\
&\leq -2z^T(t) \Phi L \beta(z(t)) + \kappa z^T(t) \Phi^2 L^2 z(t) \\
&\quad + \frac{1}{\kappa} (Ah(z(t)) + Bh(z(t - \tau)))^T (Ah(z(t)) + Bh(z(t - \tau))) \\
&= -2z^T(t) \Phi L \beta(z(t)) + \kappa z^T(t) \Phi^2 L^2 z(t) + \frac{1}{\kappa} h^T(z(t)) A^T Ah(z(t)) \\
&\quad + \frac{1}{\kappa} h^T(z(t - \tau)) B^T Bh(z(t - \tau)) + \frac{2}{\kappa} h^T(z(t)) A^T Bh(z(t - \tau)) \quad (3.50)
\end{aligned}$$

Yukarıda verilen terimlerin her birinin analizi aşağıdaki gibi iki farklı eşitsizlik şeklinde yapılabilir:

$$\begin{aligned}
2h^T(z(t)) A^T Bh(z(t - \tau)) &= 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ij} b_{ik} h_j(z_j(t)) h_k(z_k(t - \tau_k)) \\
&\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left(\eta |a_{ij}| |b_{ik}| h_j^2(z_j(t)) + \frac{1}{\eta} |a_{ij}| |b_{ik}| h_k^2(z_k(t - \tau_k)) \right) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left(\eta |a_{ji}| |b_{jk}| h_i^2(z_i(t)) + \frac{1}{\eta} |a_{kj}| |b_{ki}| h_i^2(z_i(t - \tau_i)) \right) \\
&\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left(\eta \hat{a}_{ji} \hat{b}_{jk} l_i^2 z_i^2(t) + \frac{1}{\eta} \hat{a}_{kj} \hat{b}_{ki} l_i^2 z_i^2(t - \tau_i) \right) \quad (3.51)
\end{aligned}$$

ve

$$2h^T(z(t)) A^T Bh(z(t - \tau)) \leq \rho h^T(z(t)) A^T Ah(z(t)) + \frac{1}{\rho} h^T(z(t - \tau)) B^T Bh(z(t - \tau)) \quad (3.52)$$

Şimdi (3.52) ve (3.51) birleştirilerek bir sonuca varılabilir:

$$\begin{aligned}
2h^T(z(t)) A^T Bh(z(t - \tau)) &= h^T(z(t)) (2k_1 A^T B + 2k_2 A^T B) h(z(t - \tau)) \\
&\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left(k_1 \eta \hat{a}_{ji} \hat{b}_{jk} l_i^2 z_i^2(t) + \frac{k_1}{\eta} \hat{a}_{kj} \hat{b}_{ki} l_i^2 z_i^2(t - \tau_i) \right) \\
&\quad + h^T(z(t)) k_2 \rho A^T Ah(z(t)) + h^T(z(t - \tau)) \frac{k_2}{\rho} B^T Bh(z(t - \tau)) \quad (3.53)
\end{aligned}$$

(3.50)'de (3.53) kullanılırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned}
& -2z^T(t)\Phi L\beta(z(t)) + 2z^T(t)\Phi L(Ah(z(t)) + Bh(z(t-\tau))) \\
\leq & -2z^T(t)\Phi L\beta(z(t)) + \kappa z^T(t)\Phi^2 L^2 z(t) \\
& + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\kappa} k_1 \eta \hat{a}_{ji} \hat{b}_{jk} l_i^2 z_i^2(t) + \frac{1}{\kappa} \frac{k_1}{\eta} \hat{a}_{kj} \hat{b}_{ki} l_i^2 z_i^2(t-\tau_i) \right) \\
& + \frac{1}{\kappa} (1 + k_2 \rho) h^T(z(t)) A^T A h(z(t)) \\
& + \frac{1}{\kappa} (1 + \frac{k_2}{\rho}) h^T(z(t-\tau)) B^T B h(z(t-\tau))
\end{aligned} \tag{3.54}$$

Buradan

$$\begin{aligned}
& h^T(z(t)) A^T A h(z(t)) \\
= & m_1 h^T(z(t)) A^T A h(z(t)) + m_2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ij} a_{ik} h_j(z_j(t)) h_k(z_k(t)) \\
\leq & \sum_{i=1}^n \left(m_1 \|A\|_2^2 + m_2 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{ki}| |a_{kj}| \right) h_i^2(z_i(t)) \\
\leq & \sum_{i=1}^n \left(m_1 \|A\|_2^2 l_i^2 + m_2 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{ki}| |a_{kj}| l_i^2 \right) z_i^2(t) \\
\leq & \sum_{i=1}^n \left(m_1 \sigma_m^2(A) l_i^2 z_i^2(t) + m_2 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \hat{a}_{ki} \hat{a}_{kj} l_i^2 \right) z_i^2(t)
\end{aligned} \tag{3.55}$$

ve

$$\begin{aligned}
& h^T(z(t-\tau)) B^T B h(z(t-\tau)) \\
= & p_1 h^T(z(t-\tau)) B^T B h(z(t-\tau)) + p_2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n b_{ij} b_{ik} h_j(z_j(t-\tau_j)) h_k(z_k(t-\tau_k)) \\
\leq & \sum_{i=1}^n \left(p_1 \|B\|_2^2 + p_2 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |b_{ki}| |b_{kj}| \right) h_i^2(z_i(t-\tau_i)) \\
\leq & \sum_{i=1}^n \left(p_1 \|B\|_2^2 l_i^2 + p_2 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |b_{ki}| |b_{kj}| l_i^2 \right) z_i^2(t-\tau_i) \\
\leq & \sum_{i=1}^n \left(p_1 \sigma_m^2(B) l_i^2 + p_2 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \hat{b}_{ki} \hat{b}_{kj} l_i^2 \right) z_i^2(t-\tau_i)
\end{aligned} \tag{3.56}$$

terimleri analiz edilmiştir. (3.54). denkleminin içine (3.55) ve (3.56) yerleştirilirse aşağıdaki

sonuçlar ortaya çıkar:

$$\begin{aligned}
& 2z^T(t)\Phi L\dot{z}(t) \\
\leq & -2z^T(t)\Phi L\beta(z(t)) + \sum_{i=1}^n \xi_i^2 l_i^2 z_i^2(t) \\
& + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\kappa} k_1 \eta \hat{a}_{ji} \hat{b}_{jk} l_i^2 z_i^2(t) + \frac{1}{\kappa} \frac{k_1}{\eta} \hat{a}_{ij} \hat{b}_{ki} l_i^2 z_i^2(t - \tau_i) \right) \\
& + \frac{1}{\kappa} (1 + k_2 \rho) m_1 \sigma_m^2(A) \sum_{i=1}^n l_i^2 z_i^2(t) + \frac{1}{\kappa} (1 + k_2 \rho) m_2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \hat{a}_{ki} \hat{a}_{kj} l_i^2 z_i^2(t) \\
& + \frac{1}{\kappa} \left(1 + \frac{k_2}{\rho}\right) p_1 \sigma_m^2(B) \sum_{i=1}^n l_i^2 z_i^2(t - \tau_i) \\
& + \frac{1}{\kappa} \left(1 + \frac{k_2}{\rho}\right) p_2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \hat{b}_{ki} \hat{b}_{kj} l_i^2 z_i^2(t - \tau_i)
\end{aligned} \tag{3.57}$$

$\tilde{C}_2$ koşulu altında, aşağıdaki eşitlik ifade edilebilir:

$$-2z^T(t)\Phi L\beta(z(t)) = -2 \sum_{i=1}^n \xi_i l_i z_i(t) \beta_i(z_i(t)) \leq -2 \sum_{i=1}^n \xi_i \gamma_i l_i z_i^2(t) \tag{3.58}$$

(3.57)'de (3.58) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& 2\varepsilon_1 \sum_{i=1}^n \xi_i l_i \frac{\dot{z}_i(t)}{\alpha_i(z_i(t))} z_i(t) \\
\leq & -2\varepsilon_1 \sum_{i=1}^n \xi_i \gamma_i l_i z_i^2(t) + \varepsilon_1 \kappa \sum_{i=1}^n \xi_i^2 l_i^2 z_i^2(t) + \frac{\varepsilon_1 k_1 \eta}{\kappa} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \hat{a}_{ji} \hat{b}_{jk} l_i^2 z_i^2(t) \\
& + \frac{1}{\kappa} \frac{\varepsilon_1 k_1}{\eta} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \hat{a}_{ij} \hat{b}_{ki} l_i^2 z_i^2(t - \tau_i) + \frac{\varepsilon_1}{\kappa} (1 + k_2 \rho) m_1 \sigma_m^2(A) \sum_{i=1}^n l_i^2 z_i^2(t) \\
& + \frac{\varepsilon_1}{\kappa} (1 + k_2 \rho) m_2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \hat{a}_{ki} \hat{a}_{kj} l_i^2 z_i^2(t) + \frac{\varepsilon_1 p_1}{\kappa} \left(1 + \frac{k_2}{\rho}\right) \sigma_m^2(B) \sum_{i=1}^n l_i^2 z_i^2(t - \tau_i) \\
& + \frac{\varepsilon_1 p_2}{\kappa} \left(1 + \frac{k_2}{\rho}\right) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \hat{b}_{ki} \hat{b}_{kj} l_i^2 z_i^2(t - \tau_i)
\end{aligned} \tag{3.59}$$

sonucu çıkar ve aşağıdaki neticeye varılır:

$$\begin{aligned}
2 \sum_{i=1}^n \frac{\dot{z}_i(t)}{\alpha_i(z_i(t))} \zeta_i l_i z_i(t) &= -2z^T(t) \Psi L \beta(z(t)) + 2z^T(t) \Psi L A h(z(t)) + 2z^T(t) \Psi L B h(z(t - \tau)) \\
&= -2 \sum_{i=1}^n \zeta_i l_i z_i(t) \beta_i(z_i(t)) + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \zeta_i l_i z_i(t) a_{ij} h_j(z_j(t)) \\
&\quad + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \zeta_i l_i z_i(t) b_{ij} h_j(z_j(t - \tau_j))
\end{aligned} \tag{3.60}$$

Buradan aşağıda verilen eşitsizliğin sağlandığı gözlemlenebilir:

$$\begin{aligned}
2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \zeta_i l_i z_i(t) a_{ij} h_j(z_j(t)) &\leq 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \zeta_i l_i |a_{ij}| |z_i(t)| |h_j(z_j(t))| \\
&\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\varepsilon \zeta_i |a_{ij}| l_i^2 z_i^2(t) + \frac{1}{\varepsilon} \zeta_i |a_{ij}| h_j^2(z_j(t)) \right) \\
&\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\varepsilon \zeta_i |a_{ij}| l_i^2 z_i^2(t) + \frac{1}{\varepsilon} \zeta_i |a_{ij}| l_j^2 z_j^2(t) \right) \\
&\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\varepsilon \zeta_i \hat{a}_{ij} l_i^2 z_i^2(t) + \frac{1}{\varepsilon} \zeta_j \hat{a}_{ji} l_i^2 z_i^2(t) \right)
\end{aligned} \tag{3.61}$$

ve

$$\begin{aligned}
2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \zeta_i l_i z_i(t) a_{ij} h_j(z_j(t)) &\leq \sum_{i=1}^n \left(\varepsilon \zeta_i^2 \ell_i^2 z_i^2(t) + \frac{1}{\varepsilon} \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} h_j(z_j(t)) \right)^2 \right) \\
&= \varepsilon \sum_{i=1}^n \zeta_i^2 \ell_i^2 z_i^2(t) + \frac{1}{\varepsilon} h^T(z(t)) A^T A h(z(t)) \\
&\leq \sum_{i=1}^n \left(\varepsilon \zeta_i^2 \ell_i^2 z_i^2(t) + \frac{1}{\varepsilon} \sigma_m^2(A) \ell_i^2 z_i^2(t) \right)
\end{aligned} \tag{3.62}$$

(3.62) ve (3.61) birleştirildiğinde

$$\begin{aligned}
2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \zeta_i l_i z_i(t) a_{ij} h_j(z_j(t)) &= 2(q_1 + q_2) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \zeta_i l_i z_i(t) a_{ij} h_j(z_j(t)) \\
&\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(q_1 \varepsilon \zeta_i \hat{a}_{ij} l_i^2 z_i^2(t) + \frac{q_1}{\varepsilon} \zeta_j \hat{a}_{ji} l_i^2 z_i^2(t) \right) \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \left(q_2 \varepsilon \zeta_i^2 \ell_i^2 + \frac{q_2}{\varepsilon} \sigma_m^2(A) \ell_i^2 \right) z_i^2(t)
\end{aligned} \tag{3.63}$$

Bu aşamada, aşağıdaki eşitsizlik oluşturulabilir:

$$\begin{aligned}
& 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \zeta_i l_i z_i(t) b_{ij} h_j(z_j(t - \tau_j)) \\
& \leq 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \zeta_i l_i |b_{ij}| |z_i(t)| |h_j(z_j(t - \tau_j))| \\
& \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\rho \zeta_i |b_{ij}| l_i^2 z_i^2(t) + \frac{1}{\rho} \zeta_i |b_{ij}| h_j^2(z_j(t - \tau_j)) \right) \\
& \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\rho \zeta_i |b_{ij}| l_i^2 z_i^2(t) + \frac{1}{\rho} \zeta_i |b_{ij}| l_j^2 z_j^2(t - \tau_j) \right) \\
& \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\rho \zeta_i \hat{b}_{ij} l_i^2 z_i^2(t) + \frac{1}{\rho} \zeta_j \hat{b}_{ji} l_i^2 z_i^2(t - \tau_i) \right) \tag{3.64}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
& 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \zeta_i l_i z_i(t) b_{ij} h_j(z_j(t - \tau_j)) \\
& \leq \nu \sum_{i=1}^n \zeta_i^2 l_i^2 z_i^2(t) + \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n b_{ij} h_j(z_j(t - \tau_j)) \right)^2 \\
& \leq \nu \sum_{i=1}^n \zeta_i^2 l_i^2 z_i^2(t) + \frac{1}{\nu} \sigma_m^2(B) \sum_{i=1}^n l_i^2 z_i^2(t - \tau_i) \tag{3.65}
\end{aligned}$$

Yukarıdaki (3.64) ve (3.65) birleştirildiğinde aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\begin{aligned}
& 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \zeta_i l_i z_i(t) b_{ij} h_j(z_j(t - \tau_j)) \\
& = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(2r_1 \zeta_i l_i b_{ij} + 2r_2 \zeta_i l_i b_{ij} \right) z_i(t) h_j(z_j(t - \tau_j)) \\
& \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(r_1 \rho \zeta_i \hat{b}_{ij} l_i^2 z_i^2(t) + \frac{r_1}{\rho} \zeta_j \hat{b}_{ji} l_i^2 z_i^2(t - \tau_i) \right) \\
& \quad + r_2 \nu \sum_{i=1}^n \zeta_i^2 l_i^2 z_i^2(t) + \frac{r_2}{\nu} \sigma_m^2(B) \sum_{i=1}^n l_i^2 z_i^2(t - \tau_i) \tag{3.66}
\end{aligned}$$

(3.60) denkleminde (3.66) ve (3.63) kullanılırsa ana eşitsizlik bulunur:

$$\begin{aligned}
2\varepsilon_2 \sum_{i=1}^n \frac{\dot{z}_i(t)}{\alpha_i(z_i(t))} \zeta_i l_i z_i(t) \leq & -2\varepsilon_2 \sum_{i=1}^n \zeta_i \gamma_i l_i z_i^2(t) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\varepsilon_2 q_1 \varepsilon \zeta_i \hat{a}_{ij} l_i^2 + \frac{\varepsilon_2 q_1}{\varepsilon} \zeta_j \hat{a}_{ji} l_j^2 \right) z_i^2(t) \\
& + \varepsilon_2 q_2 \varepsilon \sum_{i=1}^n \zeta_i^2 l_i^2 z_i^2(t) + \frac{\varepsilon_2 q_2}{\varepsilon} \sigma_m^2(A) \sum_{i=1}^n l_i^2 z_i^2(t) \\
& + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\varepsilon_2 r_1 \rho \zeta_i \hat{b}_{ij} l_i^2 z_i^2(t) + \frac{\varepsilon_2 r_1}{\rho} \zeta_j \hat{b}_{ji} l_j^2 z_i^2(t - \tau_i) \right) \\
& + \varepsilon_2 r_2 \nu \sum_{i=1}^n \zeta_i^2 l_i^2 z_i^2(t) + \frac{\varepsilon_2 r_2}{\nu} \sigma_m^2(B) \sum_{i=1}^n l_i^2 z_i^2(t - \tau_i) \quad (3.67)
\end{aligned}$$

Lyapunov fonksiyonundaki $V_2(t)$ adayı türevlendiğinde aşağıda verilen denkleme ulaşılır:

$$\begin{aligned}
\dot{V}_2(t) = & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left(\frac{\varepsilon_1 p_2}{\kappa} \left(1 + \frac{k_2}{\rho} \right) \hat{b}_{ki} \hat{b}_{kj} l_i^2 z_i^2(t) - \frac{\varepsilon_1 p_2}{\kappa} \left(1 + \frac{k_2}{\rho} \right) \hat{b}_{ki} \hat{b}_{kj} l_i^2 z_i^2(t - \tau_i) \right) \\
& + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left(\frac{\varepsilon_1 k_1}{\kappa \eta} \hat{a}_{ij} \hat{b}_{ki} l_i^2 z_i^2(t) - \frac{\varepsilon_1 k_1}{\kappa \eta} \hat{a}_{ij} \hat{b}_{ki} l_i^2 z_i^2(t - \tau_i) \right) \\
& + \frac{\varepsilon_1 p_1}{\kappa} \left(1 + \frac{k_2}{\rho} \right) \sigma_m^2(B) \sum_{i=1}^n l_i^2 z_i^2(t) - \frac{\varepsilon_1 p_1}{\kappa} \left(1 + \frac{k_2}{\rho} \right) \sigma_m^2(B) \sum_{i=1}^n l_i^2 z_i^2(t - \tau_i) \\
& + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\varepsilon_2 r_1}{\rho} \zeta_j \hat{b}_{ji} l_i^2 z_i^2(t) - \frac{\varepsilon_2 r_1}{\rho} \zeta_j \hat{b}_{ji} l_i^2 z_i^2(t - \tau_i) \right) \\
& + \frac{\varepsilon_2 r_2}{\nu} \sigma_m^2(B) \sum_{i=1}^n l_i^2 z_i^2(t) - \frac{\varepsilon_2 r_2}{\nu} \sigma_m^2(B) \sum_{i=1}^n l_i^2 z_i^2(t - \tau_i) \\
& + k l_m^2 \sum_{i=1}^n (z_i^2(t) - z_i^2(t - \tau_i)) \quad (3.68)
\end{aligned}$$

Böylece, $V(t)$ ana fonksiyonu için zamana göre türevi kolaylıkla gösterilebilir:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) &= \dot{V}_1(t) + \dot{V}_2(t) \leq -2\varepsilon_1 \sum_{i=1}^n \xi_i \gamma_i l_i^2 z_i^2(t) + \varepsilon_1 \kappa \sum_{i=1}^n \xi_i^2 l_i^2 z_i^2(t) \\
&+ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left(\frac{\varepsilon_1 k_1 \eta}{\kappa} \hat{a}_{ji} \hat{b}_{jk} l_i^2 z_i^2(t) + \frac{1}{\kappa} \frac{\varepsilon_1 k_1}{\eta} \hat{a}_{ij} \hat{b}_{ki} l_i^2 z_i^2(t) \right) \\
&+ \frac{\varepsilon_1}{\kappa} (1 + k_2 \rho) m_1 \sigma_m^2(A) \sum_{i=1}^n l_i^2 z_i^2(t) + \frac{\varepsilon_1 p_1}{\kappa} (1 + \frac{k_2}{\rho}) \sigma_m^2(B) \sum_{i=1}^n l_i^2 z_i^2(t) \\
&+ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left(\frac{\varepsilon_1}{\kappa} (1 + k_2 \rho) m_2 \hat{a}_{ki} \hat{a}_{kj} l_i^2 z_i^2(t) + \frac{\varepsilon_1 p_2}{\kappa} (1 + \frac{k_2}{\rho}) \hat{b}_{ki} \hat{b}_{kj} l_i^2 z_i^2(t) \right) \\
&- 2\varepsilon_2 \sum_{i=1}^n \zeta_i \gamma_i l_i z_i^2(t) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\varepsilon_2 q_1 \varepsilon \zeta_i \hat{a}_{ij} l_i^2 z_i^2(t) + \frac{\varepsilon_2 q_1}{\varepsilon} \zeta_j \hat{a}_{ji} l_i^2 z_i^2(t) \right) \\
&+ \varepsilon_2 q_2 \varepsilon \sum_{i=1}^n \zeta_i^2 l_i^2 z_i^2(t) + \frac{\varepsilon_2 q_2}{\varepsilon} \sigma_m^2(A) \sum_{i=1}^n l_i^2 z_i^2(t) \\
&+ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\varepsilon_2 r_1 \rho \zeta_i \hat{b}_{ij} l_i^2 z_i^2(t) + \frac{\varepsilon_2 r_1}{\rho} \zeta_j \hat{b}_{ji} l_i^2 z_i^2(t) \right) \\
&+ \varepsilon_2 r_2 v \sum_{i=1}^n \zeta_i^2 l_i^2 z_i^2(t) + \frac{\varepsilon_2 r_2}{v} \sigma_m^2(B) \sum_{i=1}^n l_i^2 z_i^2(t) + k l_m^2 \|z(t)\|_2^2
\end{aligned} \tag{3.69}$$

(3.69) eşitsizliğindeki veriler ortak paranteze alınıp teoremin varsayımları uygulandığında aşağıdaki sonuca direkt olarak ulaşılabilir:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) &\leq - \sum_{i=1}^n \ell_i^2 \varepsilon_1 \left(2\xi_i \frac{\gamma_i}{l_i} - \kappa \xi_i^2 - \frac{k_1 \eta}{\kappa} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \hat{a}_{ji} \hat{b}_{jk} - \frac{k_1}{\kappa \eta} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \hat{a}_{ij} \hat{b}_{ki} - \frac{(1 + k_2 \rho) m_1}{\kappa} \sigma_m^2(A) \right. \\
&\quad \left. - \frac{(1 + k_2 \rho) m_2}{\kappa} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \hat{a}_{ki} \hat{a}_{kj} - \frac{p_1}{\kappa} (1 + \frac{k_2}{\rho}) \sigma_m^2(B) - \frac{p_2}{\kappa} (1 + \frac{k_2}{\rho}) \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \hat{b}_{ki} \hat{b}_{kj} \right) z_i^2(t) \\
&\quad - \sum_{i=1}^n \ell_i^2 \varepsilon_2 \left(2\zeta_i \frac{\gamma_i}{l_i} - q_1 \varepsilon \sum_{j=1}^n \zeta_i \hat{a}_{ij} - \frac{q_1}{\varepsilon} \sum_{j=1}^n \zeta_j \hat{a}_{ji} + q_2 \varepsilon \zeta_i^2 - \frac{q_2}{\varepsilon} \sigma_m^2(A) \right. \\
&\quad \left. - r_1 \rho \sum_{j=1}^n \zeta_i \hat{b}_{ij} - \frac{r_1}{\rho} \sum_{j=1}^n \zeta_j \hat{b}_{ji} - r_2 v \zeta_i^2 - \frac{r_2}{v} \sigma_m^2(B) \right) z_i^2(t) + k l_m^2 \|z(t)\|_2^2 \\
&= - \sum_{i=1}^n \ell_i^2 \varepsilon_1 \delta_i z_i^2(t) - \sum_{i=1}^n \ell_i^2 \varepsilon_2 \theta_i z_i^2(t) + k l_m^2 \|z(t)\|_2^2 \\
&= - \sum_{i=1}^n \ell_i^2 (\varepsilon_1 \delta_i + \varepsilon_2 \theta_i) z_i^2(t) + k l_m^2 \|z(t)\|_2^2 \\
&\leq (-l_m^2 (\varepsilon_1 \delta_m + \varepsilon_2 \theta_m) + k l_m^2) \sum_{i=1}^n z_i^2(t) = -l_m^2 (\varepsilon_1 \delta_m + \varepsilon_2 \theta_m - k) \|z(t)\|_2^2
\end{aligned} \tag{3.70}$$

Böylece, (3.70) $z(t) \neq 0$ için $\dot{V}(t) < 0$ olduğunu garanti eder. $z(t) = 0$ sağlanması durumunda

(3.45) sisteminin dinamik analizi, (3.68)'den direkt olarak gözlemlenebilir ki

$$\begin{aligned}
\dot{V}_2(t) &= -\frac{\varepsilon_1 p_2}{\kappa} \left(1 + \frac{k_2}{\rho}\right) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \hat{b}_{ki} \hat{b}_{kj} l_i^2 z_i^2(t - \tau_i) - \frac{\varepsilon_1 k_1}{\kappa \eta} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \hat{a}_{ij} \hat{b}_{ki} l_i^2 z_i^2(t - \tau_i) \\
&\quad - \frac{\varepsilon_1 p_1}{\kappa} \left(1 + \frac{k_2}{\rho}\right) \sigma_m^2(B) \sum_{i=1}^n l_i^2 z_i^2(t - \tau_i) - \frac{\varepsilon_2 r_1}{\rho} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \zeta_j \hat{b}_{ji} l_i^2 z_i^2(t - \tau_i) \\
&\quad - \frac{\varepsilon_2 r_2}{\nu} \sigma_m^2(B) \sum_{i=1}^n l_i^2 z_i^2(t - \tau_i) - k l_m^2 \sum_{i=1}^n z_i^2(t - \tau_i) \\
&\leq -k l_m^2 \sum_{i=1}^n z_i^2(t - \tau_i) = -k l_m^2 \|z(t - \tau)\|_2^2
\end{aligned} \tag{3.71}$$

elde edilir. Öyleyse $z(t - \tau) \neq 0$ her gerçekleştiğinde (3.71) sadece $\dot{V}(t) < 0$ olan koşulu doğrulayacaktır. $z(t) = 0$ ve $z(t - \tau) = 0$ kabul edildiğinde (yani hem $h(z(t)) = 0$ hem de $h(z(t - \tau)) = 0$ olduğu anlaşılabilir), bu yeni durumda, $\dot{V}(t) = 0$ sonucuna kolaylıkla varılabilir. Ayrıca kullanılan $V(t)$ fonksiyonunun $\|z(t)\| \rightarrow \infty$ durumunda $V(t) \rightarrow \infty$ koşulunu gerektiren bir radyal sınırsız fonksiyon olduğu kanıtlanmış olur. Bu nedenle, temel Lyapunov kararlılık teoreminden (3.45)'te verilen bu sinir ağının orijininin ya da (3.6) ile verilen zaman gecikmeli sinir ağının sahip olduğu denge noktasının global asimtotik olarak robust kararlı olduğu sonucuna varılabilir.

Dikkat edilirse, (3.6)'da sistemi için eğer $c_i(x_i(t)) = c_i x_i(t)$ ile birlikte bir de $d_i(x_i(t)) = 1$ olduğu kabul edilirse bu durumda Cohen-Grossberg YSA sistemi Hopfield YSA sistemine dönüşür. (3.29)'da $c_i(x_i)$ ile $c_i x_i$ yer değiştirirse

$$-(x - \bar{x})^T 2\Phi LC(x - \bar{x}) = -\sum_{i=1}^n 2\xi_i l_i c_i (x_i - \bar{x}_i)^2 \tag{3.72}$$

elde edilir. (3.11)'in doğrultusunda (3.72) sağlanırsa

$$-(x - \bar{x})^T 2\Phi LC(x - \bar{x}) \leq -\sum_{i=1}^n 2\xi_i l_i c_i (x_i - \bar{x}_i)^2 \tag{3.73}$$

olur ve öte yandan (3.58)'de $Cz(t)$ ile $\beta(z(t))$ 'nın yeri değiştirilirse aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$-2z^T(t) \Phi LCz(t) = -\sum_{i=1}^n 2\xi_i l_i z_i(t) c_i z_i(t) \leq -\sum_{i=1}^n 2\xi_i c_i l_i z_i^2(t) \tag{3.74}$$

O halde Teorem 3.4.1'deki γ_i ile $c_i, \forall i$ 'nin yeri değiştirildiğinde direkt olarak (3.4) modelinin robust kararlılık koşullarını sağladığı aşağıda verilen teorem ile söylenebilir:

Teorem 3.5.1: (3.4) sisteminde, $g \in \mathcal{L}$ olduğunu ve sistem matrislerinin (3.11)'de tanımlanan belirsiz aralık matrisleri olduğunu kabul edelim. Eğer aşağıdaki cebirsel koşulları sağlayan $\kappa, \eta, \rho, \varepsilon, v, \rho, \mu, \xi_i$ ve ζ_i varsa (3.4)'teki YSA sistemi her sabit u 'ya göre tek, global asimtotik kararlı bir denge noktasına sahiptir

$$\begin{aligned} \hat{\delta}_i = & 2\xi_i \frac{c_i}{\ell_i} - \kappa \xi_i^2 - \frac{k_1 \eta}{\kappa} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \hat{a}_{ji} \hat{b}_{jk} - \frac{k_1}{\kappa \eta} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \hat{a}_{ij} \hat{b}_{ki} - \frac{(1+k_2 \rho) m_1}{\kappa} \sigma_m^2(A) \\ & - \frac{(1+k_2 \rho) m_2}{\kappa} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \hat{a}_{ki} \hat{a}_{kj} - \frac{p_1}{\kappa} (1 + \frac{k_2}{\rho}) \sigma_m^2(B) - \frac{p_2}{\kappa} (1 + \frac{k_2}{\rho}) \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \hat{b}_{ki} \hat{b}_{kj} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_i = & 2\zeta_i \frac{c_i}{l_i} - q_1 \varepsilon \sum_{j=1}^n \zeta_j \hat{a}_{ij} - \frac{q_1}{\varepsilon} \sum_{j=1}^n \zeta_j \hat{a}_{ji} - q_2 \mu \zeta_i^2 - \frac{q_2}{\mu} \sigma_m^2(A) \\ & - r_1 \rho \sum_{j=1}^n \zeta_i \hat{b}_{ij} - \frac{r_1}{\rho} \sum_{j=1}^n \zeta_j \hat{b}_{ji} - r_2 v \zeta_i^2 - \frac{r_2}{v} \sigma_m^2(B) \end{aligned}$$

için

$$\varepsilon_1 \hat{\delta}_i + \varepsilon_2 \hat{\theta}_i > 0, \forall i$$

Burada $0 \leq \varepsilon_1 \leq 1$, $0 \leq \varepsilon_2 \leq 1$ için $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 1$, $0 \leq k_1 \leq 1$, $0 \leq k_2 \leq 1$ için $k_1 + k_2 = 1$, $0 \leq m_1 \leq 1$, $0 \leq m_2 \leq 1$ için $m_1 + m_2 = 1$, $0 \leq p_1 \leq 1$, $0 \leq p_2 \leq 1$ için $p_1 + p_2 = 1$, $0 \leq q_1 \leq 1$, $0 \leq q_2 \leq 1$ için $q_1 + q_2 = 1$, $0 \leq r_1 \leq 1$, $0 \leq r_2 \leq 1$ için $r_1 + r_2 = 1$, $\sigma_m(A) = \min\{\sigma_1(A), \sigma_2(A), \sigma_3(A), \sigma_4(A), \sigma_5(A), \sigma_6(A)\}$, $\hat{a}_{ij} = \max\{|\underline{a}_{ij}|, |\bar{a}_{ij}|\}$, $\sigma_m(B) = \min\{\sigma_1(B), \sigma_2(B), \sigma_3(B), \sigma_4(B), \sigma_5(B), \sigma_6(B)\}$ ve $\hat{b}_{ij} = \max\{|\underline{b}_{ij}|, |\bar{b}_{ij}|\}$, $\forall i, j$.

4. BULGULAR

Bu bölüm temel olarak sinir sistemleri (3.6) ve (3.7) ile ilişkili daha önce yayınlanmış robust kararlılık sonuçlarını gözden geçirmeyi ve önceki literatür sonuçları ile bu makalede verilen sonuçlar arasında bazı karşılaştırmalar yapmayı amaçlamaktadır. Geçmiş literatürde benzer robust kararlılık sonuçları farklı şekillerde ifade edilmiştir. Bu bölümde önceki benzer robust kararlılık sonuçları birleştirilecek ve bir önceki literatür sonuçlarının, Teorem 3.4.1 ve 3.5.1’de türetilen robust kararlılık kriterlerinin bazı farklı özel durumları olarak değerlendirilebileceği gösterilecektir.

Teorem 4.1 [52]-[53]: (3.4)’teki gecikmeli sinir sisteminde, $g \in L$ olduğunu ve belirsiz arabağlantı matrislerinin (3.11)’de tanımlanan aralıklar içerisinde kaldığını varsayalım. Sistem (3.4) eğer $r = \min(\frac{c_i}{l_i})$ olmak üzere aşağıdaki kriteri sağlarsa her bir u sabiti için bu sistem yalnız bir global asimtotik kararlı denge noktasına sahiptir denir:

$$r - \sigma_1(A) - \sigma_1(B) > 0$$

Teorem 3.5.1’de $\varepsilon_2 = 1$, $q_1 = r_1 = 0$, $\zeta_i = 1, \forall i$, $r = \min(\frac{c_i}{l_i})$, $\mu = \sigma_m(A)$ ve $\nu = \sigma_m(B)$ durumu için

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_i &= 2\frac{c_i}{l_i} - \mu - \frac{1}{\mu}\sigma_m^2(A) - \nu - \frac{1}{\nu}\sigma_m^2(B) \geq 2r - 2\sigma_m(A) - 2\sigma_m(B) \\ &= 2(r - \sigma_m(A) - \sigma_m(B)) > 0, \forall i. \end{aligned}$$

koşulu elde edilir. Böylece Teorem 4.1’in koşulları Teorem 3.5.1’de türetilen şartların bazı özel durumlarıdır.

Teorem 4.2 [54]-[55]: (3.4)’teki gecikmeli sinir sisteminde, $g \in L$ olduğunu ve belirsiz arabağlantı matrislerinin (3.11)’de tanımlanan aralıklar içerisinde kaldığını varsayalım. $\underline{CL}^{-1} - \hat{A} - \hat{B}$ tekil olmayan M-matrisse, bir başka ifadeyle aşağıdaki kriteri sağlayan $q_i > 0$ gibi bazı uygun sayılar varsa sistem (3.4) her bir u sabiti için yalnız bir global asimtotik

kararlı denge noktasına sahiptir denir:

$$q_i \frac{c_i}{l_i} - \sum_{j=1}^n q_j (\hat{a}_{ji} + \hat{b}_{ji}) > 0, \forall i$$

Teorem 3.5.1’de, $\varepsilon_2 = 1$, $q_2 = r_2 = 0$ ve $\varepsilon = \rho = 1$ durumu için,

$$\hat{\theta}_i = 2\zeta_i \frac{c_i}{l_i} - \sum_{j=1}^n (\zeta_i \hat{a}_{ij} + \zeta_i \hat{b}_{ij} + \zeta_j \hat{a}_{ji} + \zeta_j \hat{b}_{ji}) > 0, \forall i$$

$2\bar{C}L^{-1} - \hat{A} - \hat{A}^T - \hat{B} - \hat{B}^T$ uygulanarak tekil olmayan M-matrisin özelliğinin sağlandığı elde edilebilir. Nihayetinde, Teorem 3.5.1’deki sağlanan sonuçlar Teorem 4.2’deki türetieln bu sonuçlara bazı alternatif sonuçlar olarak değerlendirilebilir.

Teorem 4.3 [56]-[58]: (3.4)’teki gecikmeli sinir sisteminde, $g \in L$ olduğunu ve belirsiz arabağlantı matrislerinin (3.11)’de tanımlanan aralıklar içerisinde kaldığını varsayalım. Eğer μ ve ν pozitif sabiti varsa sistem (3.4) her bir u sabiti için yalnız bir global asimtotik kararlı denge noktasına sahiptir öyle ki

$$2r - \mu - \frac{1}{\mu} \sigma_1^2(A) - \nu - \frac{1}{\nu} \sigma_1^2(B) > 0$$

Teorem 4.4 [56]-[58]: (3.4)’teki gecikmeli sinir sisteminde, $g \in L$ olduğunu ve belirsiz arabağlantı matrislerinin (3.11)’de tanımlanan aralıklar içerisinde kaldığını varsayalım. Eğer μ ve ν pozitif sabiti varsa sistem (3.4) her bir u sabiti için yalnız bir global asimtotik kararlı denge noktasına sahiptir öyle ki

$$2r - \mu - \frac{1}{\mu} \sigma_4^2(A) - \nu - \frac{1}{\nu} \sigma_4^2(B) > 0$$

Ayrıca, Teorem 3.5.1’de, $\varepsilon_2 = 1$, $q_1 = r_1 = 0$, $\zeta_i = 1, \forall i$, $r = \min(\frac{c_i}{l_i})$, $\mu = \sigma_m(A)$ ve $\nu = \sigma_m(B)$ durumu için aşağıdaki sonuç elde edilebilir:

$$\hat{\theta}_i = 2r - \mu - \frac{1}{\mu} \sigma_m^2(A) - \nu - \frac{1}{\nu} \sigma_m^2(B) > 0$$

Dolayısıyla; Teorem 4.3 ve 4.4, Teorem 3.5.1’in özel sonucudur.

Teorem 4.5 [59]-[60]: (3.4)'teki gecikmeli sinir sisteminde, $g \in L$ olduğunu ve belirsiz arabağlantı matrislerinin (3.11)'de tanımlanan aralıklar içerisinde kaldığını varsayalım. Eğer sistem (3.4)'ün parametreleri aşağıdaki koşulu sağlarsa, sistem (3.4) her bir u sabiti için yalnız bir global asimtotik kararlı denge noktasına sahiptir denir:

$$\frac{c_i^2}{\ell_i^2} - 2 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (\hat{a}_{ki} \hat{a}_{kj} + \hat{b}_{ki} \hat{b}_{kj}) > 0, \forall i$$

Teorem 3.5.1'de, $\varepsilon_2 = 0$, $m_2 = 1$, $p_2 = k_2 = 1$, $\xi_i = \frac{\gamma_i}{l_i}$ ve $\rho = \kappa = 1$ durumu için

$$\hat{\delta}_i = \frac{c_i^2}{\ell_i^2} - 2 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (\hat{a}_{ki} \hat{a}_{kj} + \hat{b}_{ki} \hat{b}_{kj}) > 0, \forall i$$

elde edilir. Sonuç olarak, Teorem 4.5, Teorem 3.5.1'in özel durumudur.

Teorem 4.6 [61]-[62]: (3.4)'teki gecikmeli sinir sisteminde, $g \in L$ olduğunu ve belirsiz arabağlantı matrislerinin (3.11)'de tanımlanan aralıklar içerisinde kaldığını varsayalım. $A_* + A_*^T$ 'nin spektral yarıçapını $\rho(A_* + A_*^T)$ temsil etmek üzere

$$2r - \rho(A_* + A_*^T) - 2\|A^*\|_2 - \|\hat{B}\|_1 - \|\hat{B}\|_\infty > 0$$

oluyorsa sistem (3.4) her bir u sabiti için yalnız bir global asimtotik kararlı denge noktasına sahiptir. Ek olarak, Teorem 3.5.1'de $\varepsilon_1 = 0$, $q_1 = r_2 = 0$, $\zeta_i = 1$, $\mu = \sigma_m(A)$, $\rho = \sqrt{\frac{\|\hat{B}\|_\infty}{\|\hat{B}\|_1}}$ durumu için

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_i &= 2\frac{\gamma_i}{l_i} - 2\sigma_m(A) - \sum_{j=1}^n (\rho \hat{b}_{ij} - \frac{1}{\rho} \hat{b}_{ji}) \\ &\geq 2r - 2\sigma_m(A) - \rho \|\hat{B}\|_1 - \frac{1}{\rho} \|\hat{B}\|_\infty \\ &= 2r - 2\sigma_m(A) - 2\sqrt{\|\hat{B}\|_1 \|\hat{B}\|_\infty} > 0, \forall i. \end{aligned}$$

elde edilir. $\rho(A_* + A_*^T) \leq 2\|A^*\|_2$ 'dir. Dolayısıyla, $2\|A^*\|_2 + \rho(A_* + A_*^T) \leq 2(\|A^*\|_2 + \|A^*\|_2) = 2\sigma_1(A)$ 'dir. Herhangi $\hat{B}$ matrisi alınacak olursa, $\sqrt{\|\hat{B}\|_1 \|\hat{B}\|_\infty} \leq \frac{1}{2}(\|\hat{B}\|_1 + \|\hat{B}\|_\infty)$ koşulunu sağlayan eşitsizlik gözlemlenebilir. Böylece Teorem 2'de sağlanan koşullar Teorem 4.6'da türetilmiş alternatif sonuçlar olarak düşünülebilir.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Tez çalışması, matematiksel modellerinin ayrık zaman gecikmesi terimlerini içerdiği, sürekli Lipschitz aktivasyon fonksiyonlarını kullandığı varsayılan dinamik sinir sistemlerinin global robust kararlılığını sağlayan bazı yeni yeterli gecikmeden bağımsız kriterler önermiştir. Bu tezin temel katkılarından biri, yeni robust kararlılık sonuçlarının türetilmesinde kullanılan belirsiz arabağlantı matrislerinin aralıkları için yeni ve geliştirilmiş bir üst sınır normu türetmek olmuştur. Tezde önerilen koşullar ile daha önce sunulan bazı robust kararlılık sonuçları arasında çok ayrıntılı bir karşılaştırma yapılmıştır; bu, bu tezde türetilen robust koşullarının en önceki karşılık gelen robust kararlılık sonuçlarını genellediğini göstermiştir. Ayrık gecikme terimlerini ve Lipschitz aktivasyon fonksiyonlarını içeren doğrusal olmayan sinir sistemlerinin istenen kararlılık analizini yapmak ve arabağlantı matrislerinin içine düştüğü aralıklar için yeni üst sınır normlarını keşfetmek başarılması zor görevler olduğundan, bu tezde ayrık zaman gecikmesi parametrelerini içeren belirsiz gecikmeli doğrusal olmayan sistemlerin kararlılık teorisinde ileri araştırma çalışmalarında kullanılan kararlılık analizi teknikleri ve yöntemleri bazı sonuçlara yol açabilir.

KAYNAKLAR

- [1]. NIKRAVESH, SKY., Nonlinear systems stability analysis: Lyapunovbased approach. CRC Press, 2013.
- [2]. Öztemel, E., 2003, Yapay Sinir Ağları, 32, 33.
- [3]. J. Hopfield, Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities, Proc. Nat. Acad. Sci. United States Amer., vol. 79, no. 8, pp. 2554–2558, Apr. 1982.
- [4]. M. Cohen and S. Grossberg, Absolute stability of global pattern formation and parallel memory storage by competitive neural networks, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics-B, Cybernetics, vol. 13, pp. 815–826, 1983.
- [5]. J. Hertz, A. Krogh, and R. G. Palmer, Introduction to the Theory of Neural Computation, Redwood City, CA, USA: Addison-Wesley, 1991.
- [6]. J. Hopfield, Neurons with graded response have collective computational properties like those of two-state neurons, Proc. Nat. Acad. Sci. United States Amer., vol. 81, pp. 3088–3092, 1984.
- [7]. M. Kennedy and L. Chua, Neural networks for nonlinear programming, IEEE Transactions on Circuits and Systems-I., vol. 35, pp. 554–562, 1988.
- [8]. B. Pearlmutter, Gradient calculations for dynamic recurrent neural networks: A survey IEEE Transactions on Neural Networks, vol. 6, pp. 1212–1228, 1995.
- [9]. A. R. Vazquez, R. D. Castro, A. Rueda, and E. S. Sinencio, “Nonlinear switched capacitor ‘neural’ networks for optimization problems,” IEEE Transactions on Circuits and Systems-I., vol. 37, pp. 384–398, 1990.
- [10]. Y. Takahashi, A unified constructive network model for problemsolving,” Theoretical Computer Science, vol. 156, pp. 217–261, 1996.
- [11]. D. Tank and J. Hopfield, Simple ‘neural’ optimization networks: An A/D converter, signal decision circuit, and a linear programming circuit, IEEE Transactions on Circuits and Systems-I., vol. 33, pp. 533–541, 1986.
- [12]. M. Forti, S. Manetti, and M. Marini, A condition for global convergence of a class of symmetric neural circuits,” IEEE Transactions on Circuits and Systems-I., vol. 39, pp. 480–483, 1992.
- [13]. M. Vidyasagar, Location and stability of high-gain equilibria of nonlinear neural networks, IEEE Transactions on Neural Networks, vol. 4, pp. 660–672, 1993.
- [14]. J. Cao, D. Huang, and Y. Qu, Global robust stability of delayed recurrent neural networks,” Chaos, Solitons ad Fractals, vol. 23, pp. 221–229, 2005.

- [15]. S. Arik, New criteria for global robust stability of delayed neural networks with norm-bounded uncertainties, *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, vol. 31, pp. 1504-1513, 2020.
- [16]. P. Baldi and A. Atiya, How delays affect neural dynamics and learning, *IEEE Transactions on Neural Networks*, vol. 5, pp. 612–621, Jul. 1994.
- [17]. P. Civalleri, M. Gilli, and L. Pabdollfi, On stability of cellular neural networks with delay, *Transactions on Circuits and Systems-I.*, vol. 40, pp. 157–165, 1993.
- [18]. C. Marcus and R. Westervelt, Stability of analog neural networks with delay,” *Physal. Review A*, vol. 39, pp. 347–359, 1989.
- [19]. T. Roska, C. Wu, M. Balsi, and L. Chua, Stability and dynamics of delay-type general and cellular neural networks, *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I.*, vol. 39, pp. 487–490, 1992.
- [20]. K. Cooke and Z. Grossman, Discrete delay, distributed delay and stability switches, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 86, pp. 592–627, 1982.
- [21]. L. Wang and X. Zou, Harmless delays in Cohen–Grossberg neural networks,” *Physica D, Nonlinear Phenomena*, vol. 170, pp. 162–173, 2002.
- [22]. Q. Song, H. Yan, Z. Zhao and Y. Liu, Global exponential stability of complex-valued neural networks with both time-varying delays and impulsive effects, *Neural Networks*, vol. 79, pp. 108-116, 2016.
- [23]. G. Rajchakit, R. Sriraman, P. Vignesh and C.P. Lim, Impulsive effects on Clifford-valued neural networks with time-varying delays: An asymptotic stability analysis, *Applied Mathematics and Computation*, vol. 407, article no 126309, 2021.
- [24]. D. Peng, J. Li , W. Xu and X. Li, Finite-time synchronization of coupled Cohen-Grossberg neural networks with mixed time delays, *Journal of the Franklin Institute*, vol. 357, pp. 11349-11367, 2020.
- [25]. X. Yao, X. Liu and S. Zhong, Exponential stability and synchronization of memristor-based fractional-order fuzzy cellular neural networks with multiple delays, *Neurocomputing*, vol. 419, pp. 239-250, 2021.
- [26]. W. Zhang, C. Li, T. Huang, and X. He, Synchronization of memristor-based coupling recurrent neural networks with time-varying delays and impulses, *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, vol. 26, pp.3308-3313, 2015.
- [27]. O. Faydasicok, New criteria for global stability of neutral-type Cohen–Grossberg neural networks with multiple delays, *Neural Networks*, vol. 125, pp.330–337, 2020.
- [28]. S. S. Chouhan, R. Kumar, S. Sarkar and S. Das, Multistability analysis of octonion-valued neural networks with time-varying delays, *Information Sciences*, vol. 609, pp. 1412–1434, 2022.

- [29]. Z. Tu, X. Yang, L. Wang and N. Ding, Stability and stabilization of quaternion-valued neural networks with uncertain time-delayed impulses: Direct quaternion method, *Physica A*, vol. 535, article no 122358, 2019.
- [30]. T. Wei, X. Li and V. Stojanovic, Input-to-state stability of impulsive reaction–diffusion neural networks with infinite distributed delays, *Nonlinear Dynamics*, vol. 103, pp.1733–1755, 2021.
- [31]. C. Huang and H. Yang, Weighted pseudo almost periodicity of multi-proportional delayed shunting inhibitory cellular neural networks with D operator, *Discrete and Continuous Dynamical Systems Series S*, vol. 14, pp. 1259-1272, 2021.
- [32]. Y. Cao, R. Sriraman, N. Shyamsundarraaj and R. Samidurai, Robust stability of uncertain stochastic complex-valued neural networks with additive time-varying delays, *Mathematics and Computers in Simulation*, vol. 171, pp. 207–220, 2020.
- [33]. J. Cao and J. Wang, Global asymptotic stability of a general class of recurrent neural networks with time-varying delays, *IEEE Transactions on Circuits and Systems—I: Fundamental Theory and Applications*, vol. 50, pp.34-44, 2003.
- [34]. M. Forti, P. Nistri, and D. Papini, Global exponential stability and global convergence in finite time of delayed neural networks With infinite gain, *IEEE Transactions on Neural Networks*, vol. 16, pp. 1449-1463, 2005.
- [35]. Q. Zhang, R. Ma, C. Wang, and J. Xu, On the global stability of delayed neural networks, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 48, pp. 794-797, 2003.
- [36]. S. Xu and J. Lam, A new approach to exponential stability analysis of neural networks with time-varying delays, *Neural Networks* vol. 19, pp. 76–83, 2006.
- [37]. S. Xu, Y. Chu and J. Lu, New results on global exponential stability of recurrent neural networks with time-varying delays, *Physics Letters A*, vol. 352, pp. 371–379, 2006.
- [38]. H. Qi and L. Qi, Deriving sufficient conditions for global asymptotic stability of delayed neural networks via nonsmooth analysis, *IEEE Transactions on Neural Networks*, vol. 15, pp. 99-109, 2004.
- [39]. K. Yuan and J. Cao, An analysis of global asymptotic stability of delayed Cohen–Grossberg neural networks via nonsmooth analysis, *IEEE Transactions on Circuits and Systems—I: Regular Papers*, vol. 52, pp.1854-1861, 2005.
- [40]. C. Li and X. Liao, New algebraic conditions for global exponential stability of delayed recurrent neural networks, *Neurocomputing*, vol. 64, pp.319–333, 2005.
- [41]. T. Chen and L. Rong, Delay-independent stability analysis of Cohen–Grossberg neural networks, *Physics Letters A*, vol. 317. pp.436–449, 2003.
- [42]. X. Nie and J. Cao, Stability analysis for the generalized Cohen-Grossberg neural networks with inverse Lipschitz neuron activations, *Computers and Mathematics with Applications*, vol. 57, pp. 1522-1536, 2009.

- [43]. H. Gao, X. Song, L. Ding, D. Liu and M. Hao, New conditions for global exponential stability of continuous-time neural networks with delays, *Neural Computation and Application*, vol. 22, pp.41–48, 2013.
- [44]. Y. Guo, and S. T. Liu, Global exponential stability analysis for a class of neural networks with time delays, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 22, pp.1484–1494, 2012.
- [45]. F. Yang, C. Zhang, C. Chen, X. Chen, Global exponential stability of a class of neural networks with delays, *Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series* vol. 25, pp.43–50, 2009.
- [46]. W. Liu, C. Fu and H. Hu, Global exponential stability of a class of Hopfield neural networks with delays, *Neural Computation and Application*, vol.20 pp.1205–1209, 2011.
- [47]. J. Cao, D. S. Huang and Y. Qu, Global robust stability of delayed recurrent neural networks, *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 23, pp. 221-229, 2005.
- [48]. T. Ensari and S. Arik, New results for robust stability of dynamical neural networks with discrete time delays, *Expert Systems with Applications*, vol. 37, pp. 5925-5930, 2010.
- [49]. O. Faydasicok and S. Arik, A new upper bound for the norm of interval matrices with application to robust stability analysis of delayed neural networks, *Neural Networks*, vol. 44, pp. 64-71, 2013.
- [50]. V. Singh, Global robust stability of delayed neural networks: Estimating upper limit of norm of delayed connection weight matrix, *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 32, pp. 259–263, 2007.
- [51]. E. Aktas, O. Faydasicok and S. Arik, Robust stability of dynamical neural networks with multiple time delays:A review and new results, *Under Review, Artificial Intelligence Review*, 2022.
- [52]. N. Ozcan and S. Arik, Global robust stability analysis of neural networks with multiple time delays, *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Regular Papers*, vol. 53, pp. 166-176, 2006.
- [53]. J. Shao, T. Huang and X. Wang, Further analysis on global robust exponential stability of neural networks with time-varying delays, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulations* vol.17, pp.1117–1124, 2012.
- [54]. Z. Guo, J. Wang and Zheng Yan, A systematic method for analyzing robust stability of interval neural networks with time-delays based on stability criteria, *Neural Networks* vol.54, pp.112–122, 2014.
- [55]. C. Sun and C. Feng, Global robust exponential stability of interval neural networks with delays, *neural processing letters* vol 17, pp. 107–115, 2003.
- [56]. E. Yucel and S. Arik, Novel results for global robust stability of delayed neural networks, *Chaos, Solitons and Fractals* vol 39, pp. 1604–1614, 2009.

- [57]. Y. Yuan and X. Li, New results for global robust asymptotic stability of BAM neural networks with time-varying delays, *Neurocomputing* vol.74, pp.337–342, 2010.
- [58]. J. Shao, T. Huang and S. Zhou, Novel criteria for global robust exponential stability of neural networks with time-varying delays via LMI approach, *International Journal of Computer Mathematics* vol. 87, pp.2188–2201, 2010.
- [59]. C. Li, X. Liao and Rong Zhang, A global exponential robust stability criterion for interval delayed neural networks with variable delays, *Neurocomputing* vol.69 pp.803–809, 2006.
- [60]. C. Li, X. Liao, R. Zhang and A. Prasad, Global robust exponential stability analysis for interval neural networks with time-varying delays, *Chaos Solitons and Fractals*, vol.25 pp.751–757, 2005.
- [61]. J. Shao and T. Huang, A new result on global exponential robust stability of neural networks with time-varying delays, *Journal of Control Theory and Applications*, vol.7, pp.315–320, 2009.
- [62]. J. Shao, T. Huang and S. Zhou, Global asymptotic robust stability and global exponential robust stability of neural networks with time-varying delays, *Neural Processing Letters*, vol.30, pp:229–241, 2009.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Melike SOLAK
Doğum Yeri	-
Doğum Tarihi	-
Uyruğu	☒ T.C. ☐ Diğer:
Telefon	-
E-Posta Adresi	-
Web Adresi	-

Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Fakülte	Fen Fakültesi
Bölümü	Matematik Bölümü
Mezuniyet Yılı	2021

Yüksek Lisans	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Enstitü Adı	Fen Bilimleri
Anabilim Dalı	Matematik Anabilim Dalı
Programı	Matematik Programı
Mezuniyet Tarihi	2023

Makale ve Bildiriler	
Makaleler	
Melike Solak, Ozlem Faydasicok, Sabri Arik, A General Framework for Robust Stability Analysis of Neural Networks with Discrete Time Delays, 2023 <i>Neural Networks</i> , 186, 198.	