

T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BAZI SONLU GRUPLARDA FİBONACCİ- JACOBSTHAL DİZİLERİNİN
PERİYOTLARI

ÖZCAN KILIÇ
YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
PROF. DR. ÖMÜR DEVECİ

TEMMUZ-2023
KARS



T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI



**BAZI SONLU GRUPLARDA FİBONACCİ- JACOBSTHAL DİZİLERİNİN
PERİYOTLARI**

**ÖZCAN KILIÇ
YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**DANIŞMAN
PROF. DR. ÖMÜR DEVECİ**

**TEMMUZ-2023
KARS**

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi öğrencisi Özcan KILIÇ'ın Prof Dr. Ömür DEVECİ danışmanlığında Yüksek Lisans tezi olarak hazırladığı “Bazı Sonlu Gruplarda Fibonacci- Jacobsthal Dizilerinin Periyotları” adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sınavı sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Öğretim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek oy ile kabul edilmiştir.

.. / .. / 2023

	Adı ve Soyadı	İmza
Başkan	:	
Üye	:	
Üye	:	
Üye	:	

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .. / .. / 2023 gün ve ..
.... / sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Fikret AKDENİZ
Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- ☐ Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- ☐ Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- ☐ Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- ☐ Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- ☐ Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

Bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

.../.../ 2023

ÖZCAN KILIÇ

ÖZET

(Yüksek Lisans Tezi)

BAZI SONLU GRUPLARDA FİBONACCİ- JACOBSTHAL DİZİLERİNİN PERİYOTLARI

ÖZCAN KILIÇ

Kafkas Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ömür DEVECİ

Fibonacci–Jacobsthal, Padovan–Fibonacci, Pell–Fibonacci, Pell–Jacobsthal, Padovan–Pell ve Padovan–Jacobsthal dizileri [42]’deki çalışmada tanımlanmıştır. Tanımlanan bu dizilerin üreteç matrisleri, binet formülleri, üstel temsilleri, toplamsal temsilleri, permanental temsilleri, determinantal temsilleri ve sonlu toplamaları gibi bazı özellikler verilmiştir.

[43] ve [44] çalışmalarında ise Fibonacci-Jacobsthal dizisi gruplara taşınmıştır. [43] ‘de bu dizinin devirli gruplardaki karşılığı ele alınmış iken [45]’te ise bu dizi iki ve daha fazla gerene(üretece) sahip gruplara genişletilmiş ve Fibonacci-Jacobsthal orbiti kavramı tanımlanmıştır.

Bu tez çalışmasında, grup elemanları yardımıyla tanımlanan Fibonacci-Jacobsthal dizisi üzerine kurgulanan yapının farklı grup aileleri üzerine genişletilmesi suretiyle daha iyi anlaşılması amaçlanmıştır. Bu kapsamda geren sayısı göz önünde bulundurularak iyi bilinen bazı grupların Fibonacci-Jacobsthal orbitleri üzerinde durulmuştur. Bu bağlamda, 2-gerenli gruplardan D_n dihedral, Q_{2^n} genelleştirilmiş quaternion ve SD_{2^m}

semidihedral gruplarının ve 3-gerenli gruplardan ise $\langle n, 2, 2 \rangle$, $\langle 2, n, 2 \rangle$ ve $\langle 2, 2, n \rangle$ binary polyhedral gruplarının Fibonacci-Jacobsthal orbitlerinin periyot uzunlukları belirlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Fibonacci–Jacobsthal, Padovan–Fibonacci, Pell–Fibonacci, Pell–Jacobsthal, Padovan–Pell ve Padovan–Jacobsthal dizileri, Grup, Periyot, Dizi, Matris, Temsil, Hadamard çarpımı.

2023, 72 sayfa



ABSTRAT

(M. Sc. Thesis)

BAZI SONLU GRUPLARDA FİBONACCİ- JACOBSTHAL DİZİLERİNİN PERİYOTLARI

ÖZCAN KILIÇ

Kafkas University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Ömür Deveci

Fibonacci–Jacobsthal, Padovan–Fibonacci, Pell–Fibonacci, Pell–Jacobsthal, Padovan–Pell and Padovan–Jacobsthal sequences are defined in [42]. Some properties such as generator matrices, binet formulas, exponential representations, additive representations, permanental representations, determinantal representations and finite sums of these defined sequences are given.

In [43] and [44], the Fibonacci-Jacobsthal sequence was moved to groups. While in [43] the equivalent of this sequence in cyclic groups was discussed, in [45] this sequence was extended to groups with two or more generators and the concept of Fibonacci-Jacobsthal orbit was defined.

In this thesis, it is aimed to better understand the structure built on the Fibonacci-Jacobsthal sequences defined with the help of group elements by expanding it on different group of families. In this context, the Fibonacci-Jacobsthal orbits of some well-known groups are emphasized, taking into account the number of strains. In this way, the lengths of the periods of the Fibonacci-Jacobsthal orbits of the D_n dihedral, Q_{2^n} generalized quaternion and SD_{2^m} semidihedral groups from the 2-contained groups, and the Fibonacci-Jacobsthal orbits of the binary polyhedral groups from the 3-registered groups $\langle n, 2, 2 \rangle$, $\langle 2, n, 2 \rangle$ ve $\langle 2, 2, n \rangle$ were determined.

Key Words: Fibonacci–Jacobsthal, Padovan–Fibonacci, Pell–Fibonacci, Pell–Jacobsthal, Padovan–Pell and Padovan–Jacobsthal sequences, Group, Period, Sequence, Matrix, Representation, Hadamard Product.

2023, 72 pages



ÖNSÖZ

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma, Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yapılmıştır.

Tez konumu belirlememe yardımcı olan, çalışmalarım boyunca engin tecrübesiyle bana yol gösteren, vaktini ve bigisini benden esirgemeyen, kendimi geliştirmeye yönelik her türlü imkanı bana sunan değerli hocam Prof. Dr. Ömür DEVECİ'ye şükranlarımı sunarım.

Tezimin hazırlanması sürecinde benden hiçbir yardımlarını esirgemeyen Dr. Öğr. Üyesi Yeşim Aküzüm'e ve Dr. Öğr. Üyesi Özgür Erdağ'a teşekkürü bir borç bilirim.

Hayatımın her alanında olduğu gibi, bu tez çalışmamı hazırlarken her aşamasında bana yardımcı olan, karşılaştığım her türlü zorluğu kolaylaştıran, değerli eşime ve beni en iyi şekilde yetiştiren, bugüne kadar hiçbir desteğini esirgemeyen aileme teşekkür ederim.

ÖZCAN KILIÇ

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	I
ABSTRAT	III
ÖNSÖZ.....	V
İÇİNDEKİLER.....	VI
SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ	VII
1.GİRİŞ	1
1.1. Kuramsal Temeller	3
1.1.1. Cebirsel Yapılar.....	3
1.1.2. Matris Cebiri	13
1.1.3. Lineer İndirgemeli Diziler	20
1.1.4. Fibonacci Dizisi.....	22
1.1.5. Pell Dizisi.....	23
1.1.6. Jacobsthal Dizisi.....	23
1.1.7. Padovan Dizisi.....	24
2. MATERYAL VE YÖNTEM	25
2.1. Fibonacci, Pell, Jacobsthal ve Padovan Sayıları Arasındaki İlişkiler	25
2.1.1. Üreteç Matrisleri.....	27
2.1.2. Binet Formülleri	30
2.1.3. Üstel Temsiller	33
2.1.4. Toplamsal Temsiller	34
2.1.5. Permanental Temsiller	37
2.1.6. Diziler İle Bazı Matrislerin Determinantları Arasındaki İlişkiler	45
2.1.7. Sonlu Toplamlar	47
2.2. m Modülüne Göre Fibonacci-Jacobsthal Dizisi.....	48
2.3. Sonlu Gruplarda Fibonacci-Jacobsthal Dizisi.....	51
2.3.1 Polyhedral Grupların Fibonacci-Jacobsthal Uzunlukları.....	53
3. ARAŞTIRMA BULGULARI	56
4. SONUÇLAR VE TARTIŞMA.....	66
5. KAYNAKLAR	67

SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ

e	: Grubun birim elemanı
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tamsayılar kümesi
G	: Grup
$ G $	: G grubunun mertebesi
$H \leq G$	: H , G nin alt grubu
$G = \langle A \rangle$	: A kümesi tarafından üretilen grup
S_n	: Simetrik grup
$F(r, 2)$	: Fibonacci Grubu
D_{2m}	: $2m$ mertebeli Dihedral Grup
Q_{2^n}	: 2^n mertebeli Quaternion Grup
SD_{2^m}	: 2^m mertebeli Semidihedral Grup
(l, m, n)	: Polyhedral Grub
$\langle l, m, n \rangle$	: Binary polyhedral Grub
$(R, +, \cdot)$	: Halka
$A = (a_{ij})_{mn}$	: $m \times n$ tipinde matris
$A = (a_{ij})_{nn}$	: $n \times n$ tipinde kare matris
E	: Elementer matris
A^T	: A matrisinin transpozu
$\det A$	: A matrisinin determinanı
$\text{per} A$	: A matrisinin permanenti
$M \circ K$	: M ve K matrislerinin Hadamard çarpımı

$K(k_1, k_2, \dots, k_v)$	: Compain matris
V_n	: $n \times n$ tipinde Vandermonde matris
$\{F_n\}$	: Fibonacci dizisi
$\{P_n\}$	: Pell dizisi
$\{J_n\}$	: Jacobsthal dizisi
$\{(P_n)\}$	: Padovan dizisi
$\{Pa - F(n)\}$	: Padovan-Fibonacci dizisi
$\{P - F(n)\}$	: Pell-Fibonacci dizisi
$\{P - J(n)\}$	: Pell-Jacobsthal dizisi
$\{Pa - P(n)\}$	: Padovan-Pell dizisi
$\{Pa - J(n)\}$	: Padovan-Jacobsthal dizisi

1.GİRİŞ

Disiplinler arası ilişkilerde indirgemeli dizilere sıkça rastlanmaktadır [1,2,3,4,5,6,7,8].

Cebirsel anlamda indirgemeli diziler ile ilgili olarak üreteç matrisi, üreteç fonksiyonu, binet formülü, permanentel, determinantel ve toplamsal temsilleri gibi çeşitli özellikleri birçok bilim insanı tarafından çalışılmış ve bu çalışmalar halen devam etmektedir. Bu çalışmalardan güncel olanlara örnek olarak [9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21] çalışmaları verilebilir. Bu çalışmaların birçoğunda elde edilen bulgular indirgemeli dizilerin karakteristik polinomları üzerinden tanımlanan üreteç matrisleri ve bu matrislerin çeşitli genişlemeleri kullanılarak üretilen matrisler yardımıyla elde edilmiştir.

İndirgemeli diziler, cebirsel yapılara ilk olarak Wall'ın [22] deki çalışması ile taşınmıştır. Wall bu çalışmasında devirli gruplarda klasik Fibonacci dizilerini incelemiştir. Wilcox [23] deki çalışmasıyla teoriyi abelyen (değişmeli) gruplara genişletmiştir. Gruplarda Fibonacci dizileri üzerine oluşturulan bu yapı, daha sonra yapılan çalışmalarla genişletilerek çeşitli indirgemeli dizilerin farklı grup ailelerinde de incelenmiştir [24,25,26,27,28,29,30,31,32,33,34,35,36,37,38,39,40,41].

Çalışmanın ikinci bölümü olan materyal ve yöntemde bulgular kısmına temel teşkil edecek bilgiler verilmiştir. Bu anlamda bu bölümde;

Deveci [42] deki çalışmasında, Fibonacci-Jacobsthal, Padovan-Fibonacci, Pell-Fibonacci, Pell-Jacobsthal, Padovan-Pell ve Padovan-Jacobsthal dizilerini tanımlamış ve tanımlanan bu dizilerin çeşitli özelliklerini vermiştir.

Deveci ve Aküzüm [43] deki çalışmasında m modülüne göre Fibonacci- Jacobsthal dizisini incelemiştir

Deveci ve Aküzüm [44] deki çalışmasında Fibonacci- Jacobsthal dizisini sonlu gruplardan olan fibonacci grubunda incelemiştir.

Ayrıca Deveci ve Yılmaz ise [45] deki çalışmasında Fibonacci- Jacobsthal dizisinde polyhedral grubunu incelemiştir.

Son olarak Fibonacci- Jacobsthal dizisi; Dihedral, Semidihedral, Quaternion ve Binary 3 gerenli gruplarında incelenmiştir ve bahsi geçen bu gruplarda farklı değerler için periyot uzunlukları hesaplanmıştır ayrıca bu değerler için genel formlar belirlenmiştir. Bu anlamda tezimize temel teşkil eden bu tezin bulguları 3. bölümde ayrıntılı olarak verilmiştir.



1.1. Kuramsal Temeller

1.1.1. Cebirsel Yapılar

Tanım 1.1.1.1. G boştan farklı bir küme olsun. $G \times G$ den G ye tanımlı

$$*: G \times G \rightarrow G, (x, y) \rightarrow x * y$$

dönüşümüne G kümesi üzerinde bir ikili işlem ve $(G, *)$ ifadesine ise bir cebirsel yapı denir.

Örnek 1.1.1.1. $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi olmak üzere reel elemanlı 2×2 matrislerinden oluşan $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ kümesinde bilinen matris toplamı bir ikili işlem oluşturur [46].

Tanım 1.1.1.2. G boştan farklı bir küme olsun. Bu küme üzerinde tanımlanan "*" ikili işlemi aşağıdaki koşulları sağlıyor ise $(G, *)$ cebirsel yapısına grup denir.

$$G_1) \forall a, b \in G \text{ için } a * (b * c) = (a * b) * c \text{ (Birleşme Özelliği)}$$

$G_2) \forall a \in G \text{ için } a * e = e * a = a$ olacak şekilde bir $e \in G$ vardır. (Birim elemanın varlığı)

$$G_3) e, G \text{ nin birim eleman olmak üzere } \forall a \in G \text{ için}$$

$$a * a' = a' * a = e$$

olacak şekilde bir $a' \in G$ vardır. (Ters elemanın varlığı)

Örnek 1.1.1.2. "Rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{Q}$ ve reel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ toplama işlemine göre bir gruptur."

Tanım 1.1.1.3. Tanım 2.1.2 de verilen grup şartlarından sadece G_1 sağlanırsa bu cebirsel yapıya yarı grup denir.

Örnek 1.1.1.3. $\mathbb{Z}^+$ pozitif tamsayılar kümesi olmak üzere $(\mathbb{Z}^+, +)$ cebirsel yapısı bir yarı gruptur.

Tanım 1.1.1.4. Tanım 2.1.2 de verilen grup şartlarından G_1 ve G_2 sağlanırsa yani $(G, *)$ yarı grubunun birim elemanı varsa bu cebirsel yapıya monoid denir.

Tanım 1.1.1.5. “ $(G, *)$ cebirsel yapısı bir grup olsun. $\forall a, b \in G$ için

$$a * b = b * a$$

şartı sağlanıyorsa bu gruba değişmeli (abelyen) grup denir.”

Teorem 1.1.1.1. “ $(G, *)$ bir grup olsun. Buna göre

- i. G nin birim elemanı tektir.
- ii. Her elemanın tersi tektir.
- iii. $a \in G$ için $a * a = e$ eşitliği varsa $a = e$ dir.
- iv. G grubunda soldan ve sağdan kısaltma kuralları geçerlidir. Yani $\forall a, b, c \in G$ için
$$a * b = a * c \text{ ise } b = c \text{ (soldan kısaltma kuralı)}$$
$$b * a = c * a \text{ ise } b = c \text{ (sağdan kısaltma kuralı)}$$
- v. $a, b \in G$ için $a * x = b$ ve $y * a = b$ denklemlerinin G deki işlemi tektir.
- vi. $a \in G$ için $(a^{-1})^{-1} = a$ dır [47].”

Teorem 1.1.1.2. $(G, *)$ cebirsel yapısı bir grup olsun. $\forall a, b \in G$ için

$$(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$$

dir.

Tanım 1.1.1.6. $(G, *)$ bir grup ve n de bir pozitif tamsayı olmak üzere G nin bir g elemanının n . kuvveti

$$g^n = g * g * \dots * g$$

şeklinde gösterilir.

Teorem 1.1.1.3. $(G, *)$ bir grup ve e de grubun birim elemanı olsun. $\forall a \in G$ ve $\forall x, y \in \mathbb{Z}$ için aşağıdaki kurallar geçerlidir:

- i. $a^x * a^y = a^{x+y} = a^y * a^x,$
- ii. $(a^x)^y = a^{xy} = (a^y)^x,$
- iii. $a^{-x} = (a^x)^{-1} = (a^{-1})^x,$
- iv. $e^x = e,$
- v. $a^0 = e.$

Tanım 1.1.1.7. $(G, *)$ cebirsel yapısı bir grup olsun. Eğer G kümesi sonlu ise bu gruba sonlu grup değilse sonsuz grup denir. G kümesinin eleman sayısına ise grubun mertebesi denir ve $|G|$ veya $o(G)$ sembollerinden birisi ile gösterilir.”

Tanım 1.1.1.8. “ G bir grup ve e de G nin birim elemanı olsun. G nin herhangi bir g elemanı için $g^n = e$ eşitliğini sağlayan bir n pozitif tam sayısı varsa g elemanına sonlu mertebedendir denir.” Bu şartı yerine getiren en küçük pozitif n tam sayısına ise g nin mertebesi denir ve $|g|$ veya $o(g)$ sembollerinden birisi ile ifade edilir.

Tanım 1.1.1.9. “ G bir grup ve $\emptyset \neq H \subseteq G$ olsun. Eğer H , G de tanımlanan ikili işleme göre bir grup ise H ye G nin bir alt grubudur denir ve $H \leq G$ ile gösterilir.”

Örnek 1.1.1.4. Çift tam sayılar kümesi olan $2\mathbb{Z}$ toplama işlemine göre $(\mathbb{Z}, +)$ grubunun bir alt grubu iken tek tam sayılar kümesi olan $2\mathbb{Z}+1$ toplama işlemine göre kapalılık şartını sağlamadığından $(\mathbb{Z}, +)$ grubunun bir alt grubu değildir.

Tanım 1.1.1.10. $(G, *)$ bir grup ve e de grubun birim elemanı olmak üzere $((e), *)$ ve $(G, *)$ cebirsel yapıları G grubunun birer alt grubudur ve bu alt gruplara aşikar alt gruplar denir.

Tanım 1.1.1.11. “ $(G,*)$ bir grup olmak üzere G nin aşıkâr alt grupları dışındaki diğêr alt gruplarına öz alt gruplar denir. Eğêr H , G nin bir öz alt grubu ise $H < G$ ile gösterilir.”

Tanım 1.1.1.12. G bir grup ve aynı zamanda $N \leq G$ olsun. Her $a \in G$ için $aN = Na$ eşitliğı geçerli oluyorsa N alt grubuna normal alt grup denir. Bu grup $N \triangleleft G$ ile ifade edilir.

Örnek 1.1.1.5. Değışmeli bir grubun herhangi bir alt grubu normal alt gruptur.

Tanım 1.1.1.13. G bir grup ve $N \triangleleft G$ olsun. $G/N = \{aN : a \in G\}$ kümesine bölüm kümesi denir.

Tanım 1.1.1.14. $N \triangleleft G$ olmak üzere G/N kümesinde $(Na)(Nb) = N(ab)$ olacak biçiminde bir çarpma işlemi tanımlansın. G/N kümesi bu çarpıma göre bir grup olup bu şartı sağlayan gruba G nin N ye göre bölüm grubu denir.

Tanım 1.1.1.15. “ G bir grup ve $\emptyset \neq A \subseteq G$ olsun. G grubunun A yı içeren bütün alt gruplarının ara kesitini $\langle A \rangle$ ile gösterelim.” $\langle A \rangle$ kümesi G nin bir alt grubu olur. $\langle A \rangle$ kümesi, G grubunun A yı içeren en küçük alt grubudur. Bu grup A tarafından üretilen (gerilen) alt grup olarak isimlendirilir.

Tanım 1.1.1.16. “ G bir grup olmak üzere $S = \{a^n : n \in \mathbb{Z}\}$ alt grubuna G nin a elemanı tarafından üretilen devirli alt grubu denir ve $\langle a \rangle$ ile gösterilir. Yani,

$$\langle a \rangle = \{a^n : n \in \mathbb{Z}\} = S$$

dir. Buradan yola çıkarak devirli gruplar aşağıdaki gibi de tanımlanabilir:

G bir grup olmak üzere G de $G = \{a^n : n \in \mathbb{Z}\}$ olacak şekilde bir a elemanı varsa o zaman G grubuna devirli grup denir. Böylece bir a elemanına G nin üretici (gereni) denir ve $G = \langle a \rangle$ şeklinde gösterilir [47].”

Teorem 1.1.1.4. Devirli grupların hepsi değişmelidir.

Teorem 1.1.1.5. Devirli bir grubun bütün alt grupları devirlidir.

Tanım 1.1.1.17. $(G, *)$ ve $(H, \otimes)$ iki grup olmak üzere $f : G \rightarrow H$ şeklinde tanımlanan dönüşüm $\forall x, y \in G$ için $f(x * y) = f(x) \otimes f(y)$ şartını sağlıyorsa f ye G den H ye bir homomorfizm denir.” Eğer f homomorfizmi 1-1 ve örten ise f ye izomorfizm, G ve H gruplarına ise izomorf gruplar denir ve $G \cong H$ ile gösterilir.

Teorem 1.1.1.6. Aynı mertebeli herhangi iki devirli grup izomorfdur.

Sonuç 1.1.1.1. G devirli bir grup olsun. Eğer G sonsuz ise $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesine, $|G| = n$ olduğunda ise $\mathbb{Z}_n$ kümesine izomorftur.

Teorem 1.1.1.7. G bir grup ve a da G nin mertebesi n olan bir elemanı yani $\circ(a) = n$ olsun. Buna göre;

- i. Eğer a nin mertebesi sonsuz ise bu durumda a nin bütün farklı kuvvetleri grubun farklı elemanlarıdır.
- ii. Eğer a nin mertebesi sonlu ise bu durumda $a^n = e$ koşulunu sağlayan en küçük pozitif tamsayı n ise a nin ürettiği devirli grubun yani $\langle a \rangle$ nin mertebesi de n dir. Diğer bir deyimle

$$\langle a \rangle = \{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$$

dir.

- iii. a nın mertebesi sonlu ve n olmak üzere $a^k = a^l$ olması için gerek ve yeter şart $k \equiv l \pmod{n}$ olmasıdır.
- iv. a nın mertebesi sonlu ve n olmak üzere $a^k = e$ olması için gerek ve yeter şart $n|k$ olmasıdır [47].”

Sonuç 1.1.1.2. “ $G = \langle a \rangle$ sonlu bir devir grubu ve $\circ(G) = k < \infty$ olsun. $H \neq \{e\}$ ve $a^n \in H$ olacak şekilde $n > 0$ pozitif tamsayılarının en küçüğü m olmak üzere $H = \langle a^m \rangle$ olduğunu kabul edelim.” O takdirde

$$m|k \text{ ve } \circ(H) = \frac{k}{m}$$

dir [47].

$G = \langle a \rangle$ sonsuz mertebeli bir devir grup olsun. a^m nin bütün kuvvetleri farklı olacağından a^m tarafından üretilen $H = \langle a^m \rangle$ devirli alt grubu da sonsuz olur.

Teorem 1.1.1.8. G grubu, a elemanı tarafından üretilen n mertebeli devirli bir grup olsun. G grubunun a^m tarafından üretilmesi için yani $G = \langle a^m \rangle$ şeklinde ifade edilmesi için gerek ve yeter şart n ile m nin aralarında asal olmasıdır.

Yukarıdaki teorem göz önüne alınarak bir m tamsayısının $(\mathbb{Z}_n, +)$ devirli grubunun bir üretici olması için gerek ve yeter şart $(m, n) = 1$ olması gerektiği sonucuna ulaşılır.

Tanım 1.1.1.18. G , j -gerenli (j -üreteçli) bir grup olsun.

$$X = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_j) \in G \times G \times \dots \times G \mid \langle \{x_1, x_2, \dots, x_j\} \rangle = G \right\}$$

kümesine G nin geren kümesi, $(x_1, x_2, \dots, x_j)$ ifadesine ise G nin bir geren j -lisi denir.

Tanım 1.1.1.19. P boş olmayan bir küme olmak üzere eğer $f : P \rightarrow P$ dönüşümü 1-1 ve örten ise o zaman f dönüşümüne P kümesinin bir permütasyonu denir.

P kümesi üzerindeki bütün permütasyonları kümesini S_P le gösterirsek S_P kümesi dönüşümlerin bileşke işlemine göre bir grup teşkil eder.

P kümesini n elemanlı $(1, 2, \dots, n)$ kümesi olarak kabul edelim. Bu durumda S_P yi S_n ile göstereceğiz ve bu grubu simetrik grup olarak adlandıracağız. Burada S_n simetrik grubunun mertebesi $n!$ dir.

Tanım 1.1.1.20. $P = (1, 2, \dots, n)$ kümesinin $k \leq n$ olmak üzere 1 ile n arasında elemanlarını $r_1, r_2, \dots, r_k$ ile gösterelim. Buna göre eğer $f \in S_n$ permütasyonu aşağıdaki şartları sağlarsa o taktirde f ye k uzunluğunda bir devir ya da kısaca bir k -devir denir ve $f = (r_1, r_2, \dots, r_k)$ şeklinde gösterilir.

- i. $f(r_i) = r_{i+1}, 1 \leq i \leq k$
- ii. $f(r_k) = r_1$
- iii. $n \notin (r_1, r_2, \dots, r_k)$ ise o zaman $f(n) = n$ dir [47].

$f = (r_1, r_2, \dots, r_k)$, k uzunluğunda bir devir olmak üzere $k=1$ ise f ye birli devir, $k=2$ ise f ye ikili devir ya da transpozisyon denir.

Tanım 1.1.1.21. Bir S_n simetrik grubundaki bir f permütasyonu transpozisyonların çarpımı olarak yazıldığında bu transpozizyonların sayısı çift ise f ye çift permütasyon tek ise f ye tek permütasyon denir.

S_n nin bütün çift permütasyonlarının kümesini A_n ile göstereceğiz. A_n , S_n nin bir

normal alt grubu olup bu grubun mertebesi $\frac{n!}{2}$ dir.

Tanım 1.1.1.22. G bir grup ve S de G nin bir alt kümesi olsun. Eğer G nin her elemanı S nin elemanlarının ve bu elemanların terslerinin sonlu bir çarpımı olarak yazılabiliyorsa S kümesi, G grubunun gerenlerinin bir kümesi olarak adlandırılır [48].”

Tanım 1.1.1.23. Bir gruptaki gerenlerin sağladıkları denklemlere bu gruptaki bağıntılar denir [48].”

Tanım 1.1.1.24. G bir grup ve S ise G nin bir alt kümesi olsun. Eğer G grubunun herhangi bir elemanı S kümesinin sonlu sayıdaki elemanlarının ve aynı zamanda bu elemanların terslerinin bir çarpımı olarak tek türlü yazılabiliyorsa G grubuna bu S kümesi üzerinde serbesttir denir.

Tanım 1.1.1.25. G bir grup ve S de G nin bir alt kümesi olsun. G nin S alt kümesini kapsayan en küçük normal alt grubuna S alt kümesinin normal kapanışı denir.”

Tanım 1.1.1.26. X bir küme; $F(X)$, X üzerinde serbest grup ve $R \subseteq F(X)$ olmak üzere $\bar{R}$, $F(X)$ deki R kümesinin normal kapanışı olsun. Yani, $\langle g^{-1}rg : g \in F(X), r \in R \rangle$ kümesi ile $F(X)$ in alt grubu verilmiş olsun. Bu durumda $G \cong F(X)/\bar{R}$ ise G grubu $\langle X : R \rangle$ şeklindeki takdim ile tanımlanmıştır denilir [49].”

Tanım 1.1.1.27. r tek tamsayı olmak üzere $r^2 - 1$ mertebeli $F(r, 2)$ Fibonacci grubu

$$\langle a, b : (ab)^{(r-1)/2} = ba^{-1}, (ba)^{(r-1)/2} = ab^{-1} \rangle$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.1.1.28. $n \geq 3$ için $2n$ mertebeli D_n dihedral grubu

$$D_n = \langle x, y : x^n = y^2 = (xy)^2 = e \rangle$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.1.1.29. $n \geq 3$ için 2^n mertebeli Q_{2^n} genelleştirilmiş Quaternion grubu

$$Q_{2^n} = \langle x, y : x^{2^{n-1}} = e, y^2 = x^{2^{n-2}}, y^{-1}xy = x^{-1} \rangle$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.1.1.30. $m \geq 4$ için 2^m mertebeli SD_{2^m} semidihedral grubu

$$SD_{2^m} = \langle x, y : x^{2^{m-1}} = y^2 = e, yxy = x^{-1+2^{m-2}} \rangle$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.1.1.31. $l, m, n > 0$ için (l, m, n) polyhedral grubu

$$\langle x, y, z : x^l = y^m = z^n = xyz = e \rangle$$

ya da

$$\langle x, y : x^l = y^m = (xy)^n = e \rangle$$

şeklinde tanımlanır. (l, m, n) şeklinde ifade edilen bu polyhedral grubun sonlu olması için gerek ve yeter şart

$$k = lmn \left(\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} - 1 \right) = mn + nl + lm - lmn$$

olmak üzere $k > 0$ olmasıdır. Bu grubun mertebesi $2lmn/k$ dır.

Tanım 1.1.1.32. $l, m, n > 1$ için $\langle l, m, n \rangle$ binary polyhedral grubu

$$\langle x, y, z : x^l = y^m = z^n = xyz \rangle$$

şeklinde tanımlanır.

$l=2$ iken $\langle l, m, n \rangle$ binary polyhedral grubu 2-gerenli olarak takdim edilebilir. $\langle 2, m, n \rangle$ binary polyhedral grup

$$\langle y, z : y^m = z^n = (yz)^2 \rangle$$

şeklinde 2- gerenli olarak takdim edilir. $\langle l, m, n \rangle$ binary polyhedral grubun sonlu olması için gerek ve yeter şart

$$k = lmn \left(\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} - 1 \right) = mn + nl + lm - 1$$

olmak üzere $k > 0$ olmasıdır. Bu grubun mertebesi $4lmn/k$ dır [50].

Tanım 1.1.1.33. H kümesi boştan farklı bir küme olsun. Bu kümede toplama "+" ve çarpma "." ikili işlemleri ile beraber oluşturulan yeni cebirsel yapı $(H, +, \cdot)$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.1.34. $(H, +, \cdot)$ cebirsel yapısı verilsin. Eğer $\forall x, y, z \in H$ için

$$x(y+z) = (xy) + (xz)$$

eşitliği sağlanıyorsa $(H, +, \cdot)$ cebirsel yapısında soldan dağılma özelliği vardır denilir. Eğer $\forall x, y, z \in H$ için

$$(x+y)z = (xz) + (yz)$$

eşitliği sağlanıyorsa $(H, +, \cdot)$ cebirsel yapısında sağdan dağılma özelliği vardır denilir.

Tanım 1.1.1.35. $(H, +, \cdot)$ cebirsel yapısı verilsin. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa $(H, +, \cdot)$ cebirsel yapısına "+" ve "." ikili işlemlerine göre halka denir.

- i. $(H, +)$ değişmeli bir gruptur.
- ii. $(H, \cdot)$ nin birleşme özelliği vardır.
- iii. $(H, +, \cdot)$ da soldan ve sağdan dağılma özelliği vardır."

Örnek 1.1.1.6. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ cebirsel ifadesi yukarıda verilen şartları sağladığından bu cebirsel yapı bir halkadır. Bu halkaya tamsayılar halkası denir.

Tanım 1.1.1.36. $(H, +, \cdot)$ halkası verilsin. H halkasının "+" işlemine göre etkisiz elemanına halkanın sıfırı denir ve 0_H ile gösterilir. H halkasının "." işlemine göre etkisiz elemanı varsa bu elemana halkanın birim elemanı denir ve 1_H ile gösterilir. Halkanın birim elemanı varsa birimli halka denir

Tanım 1.1.1.37. H bir halka ve $0_H \neq a \in H$ olmak üzere $ab=0$ eşitliğini sağlayan bir $b \neq 0_H$ elemanı varsa a ya sol sıfır bölen b ye de sağ sıfır bölen denir. Hem sol bölen hem de sağ bölen elemana sıfır bölen denir.

Tanım 1.1.1.38. Birim elemanı olan değişmeli ve sıfır bölensiz bir halkaya tamlık bölgesi denir.

Örnek 1.1.1.7. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ tamsayılar halkası bir tamlık bölgesi iken $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ halkası bir tamlık bölgesi değildir.

Tanım 1.1.1.39. $(H, +, \cdot)$ birim elemanı olan değişmeli bir halkanın sıfırdan farklı her elemanın ikinci işleme (çarpma işlemine) göre bir tersi varsa bu halkaya cisim denir. Genel olarak bir cisim F ile gösterilir.

Örnek 1.1.1.8. $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ reel sayılar halkası bir cisim iken $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ tamsayılar halkası bir cisim değildir.

1.1.2. Matris Cebiri

Tanım 1.1.2.1. " $A = [a_{ij}]$, $n \times n$ tipindeki kare matris olmak üzere $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$ elemanlarına bu matrisin esas köşegen elemanları denir. Bir kare matriste esas köşegen elemanları dışındaki tüm elemanlar eğer sıfır ise bu matrise köşegen matris denir."

Örnek 1.1.2.1.

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 22 & 0 \\ 0 & 0 & 68 \end{bmatrix}$$

matrisi 3×3 tipinde bir köşegen matristir.

Tanım 1.1.2.2. $A = [a_{ij}]$ $n \times n$ tipindeki kare matris için A nın asal köşegen elemanlarının üstünde kalan tüm elemanlar sıfır ise alt üçgensel matris, asal köşegen elemanlarının altında kalan tüm elemanlar sıfır ise üst üçgensel matris denir.

Örnek 1.1.2.2.

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 5 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

matrisi alt üçgensel matrise örnektir.

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -6 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & -5 & -3 \end{bmatrix}$$

matrisi üst üçgensel matrise örnektir.

Tanım 1.1.2.3. $A, n \times n$ tipinde bir kare matris ve $I, n \times n$ tipinde birim matris olsun.

$$AB = BA = I$$

eşitliğini sağlayan $n \times n$ tipinde bir B matrisi varsa, bu B matrisine A matrisinin tersi denir ve $B = A^{-1}$ ile gösterilir. Ters olan matrislere de ters çevrilebilir (düzgün ya da tekil olmayan) matrisler denir.”

Tanım 1.1.2.4. $A = [a_{ij}]$, $n \times n$ tipinde bir kare matris olmak üzere, A matrisinin determinanı

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Burada σ, S_n simetrik grubunda bir permütasyon olmak üzere $\text{sgn}(\sigma)$

$$\text{sgn}(\sigma) := \begin{cases} +1; & \sigma \text{ çift ise} \\ -1; & \sigma \text{ tek ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan işaret fonksiyonudur.

Teorem 1.1.2.1. A ve B aynı tipli karesel matrisler olmak üzere

$$\det(AB) = (\det A)(\det B)$$

eşitliği geçerlidir. Bu teoremin bir sonucu olarak $\forall n \in \mathbb{Z}$ için

$$\det(A^n) = (\det A)^n$$

olur.

Teorem 1.1.2.2. “Bir A kare matrisinin ters çevrilebilir matris olması için gerek ve yeter şart $\det A \neq 0$ olmasıdır.”

Teorem 1.1.2.3. Kare matrisin tersi varsa tektir.

Tanım 1.1.2.5. Bir F cismi üzerinde tanımlanan $m \times m$ tipli A matrisinin permanenti

$$\text{per } A = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)}$$

şeklinde tanımlanır. Burada σ , S_n simetrik grubunda tanımlı bir permütasyonu göstermektedir.

Tanım 1.1.2.6. $M = [m_{ij}]$, satır vektörleri $x_1, x_2, \dots, x_u$ olacak şekildeki $u \times v$ boyutlu matris olsun. Eğer M matrisinin k -inci sütununda tam olarak iki elemanı sıfırdan farklı, diğer elemanlarının hepsi sıfır ise, M matrisine k -inci sütuna göre contraction (büzüşme) uygulanabilir denir. M matrisinde, $m_{ik} \neq 0$, $m_{jk} \neq 0$ ve $i \neq j$ olmak üzere k -inci sütuna göre contraction uygulandığını farzedelim. O zaman, A matrisinde i -inci satır $m_{jk}r_i + m_{ik}r_j$ vektörü ile yer değiştirerek ve j -inci satır ile k -inci sütun silinerek $(u-1) \times (v-1)$ boyutlu $M_{ij:k}$ matrisi elde edilir. Bu yöntemle M matrisinin i -inci ve j -inci satırlarıyla k -inci sütununa göre contraction olarak adlandırılır. Eğer M matrisi $m_{ki} \neq 0$, $m_{kj} \neq 0$ ve $i \neq j$ olmak üzere k -inci satıra göre contraction yapılabilirse $M_{k:ij} = [M_{ij:k}^T]^T$ ile belirtilen matrise M matrisinin i -inci ve j -inci sütunlarıyla k -inci satırına göre contraction'ı denir [52].

Lemma 1.1.2.1: “ $n > 1$ için M matrisi elemanları negatif olmayan tamsayılardan oluşan matris ve N matrisi de, M matrisinden contraction ile elde edilen matris olmak üzere $\text{per} M = \text{per} N$ dir [52].”

Tanım 1.1.2.7. $A = [a_{ij}]$, $n \times n$ tipinde bir kare matris olsun. Bu matrisin a_{ij} elemanının bulunduğu satır ve sütunun silinmesi ile elde edilen $(n-1) \times (n-1)$ tipindeki yeni matris M_{ij} matrisi olsun. M_{ij} matrisinin determinantına a_{ij} elemanının minörü denir. Ayrıca

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$$

değerine ise a_{ij} elemanının eşçarpanı (kofaktörü) denir [51].

Teorem 1.1.2.4. “ $n \geq 2$ olmak üzere A , $n \times n$ tipinde bir kare matris olsun. $i=1,2,\dots,n$ ve $j=1,2,\dots,n$ için

$$\det(A) = |A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}$$

dir. Determinantın bu şekilde hesaplanmasına Laplace açılımı denir [51].”

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad n \times n \text{ tipinde bir kare matris ve} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad n \times 1$$

Tanım 1.1.2.8.

$n \times n$ tipinde bir kare matris ve $n \times 1$ tipinde bir matris olmak üzere $AX = \lambda X$ denklemini sağlayan λ değerine A matrisinin özdeğeri ya da karakteristik değeri denir.

$AX = \lambda X$ denkleminde $(AX = \lambda X) = 0 \Rightarrow (A - \lambda I)X = 0$ denklemi elde edilir. Dolayısıyla bu durum bir lineer homojen denklem sistemini oluşturur. Bu sistemde sıfırdan farklı bir çözümün olabilmesi için katsayılar matrisinin determinantı sıfır olmalıdır. Yani

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

eşitliği elde edilmelidir. $|A - \lambda I|$ değeri λ ye göre n . dereceden bir polinomdur ve bu polinoma A matrisinin karakteristik polinomu denir. $|A - \lambda I| = 0$ denkleminde A matrisinin karakteristik denklemi denir. Karakteristik polinom

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n$$

şeklinde bir polinomdur [51].

Tanım 1.1.2.9. “ A bir kare matris ve λ A matrisinin bir öz değeri olmak üzere

$$AX = \lambda X$$

denklemini sağlayan X vektörüne λ özdeğerine karşılık gelen öz vektör ya da karakteristik vektör denir.”

Tanım 1.1.2.10. A ve B $n \times n$ tipinde kare matrisler olsun.

$$B = P^{-1}AP$$

olacak şekilde tekil olmayan bir P matrisi varsa A ve B matrislerine benzer matrisler denir.

Tanım 1.1.2.11. A , $n \times n$ tipinde bir kare matris ve D bir köşegen matris olsun. A matrisi D matrisine benzer ise, bu durumda A matrisine köşegenleştirilebilir denir. Yani

$$P^{-1}AP = D$$

olacak şekilde tersi olan (tekil olmayan) bir P matrisi mevcutsa, A matrisine köşegenleştirilebilir matris denir [52].

Teorem 1.1.2.5. Bir $n \times n$ boyutlu A kare matrisinin köşegenleştirilebilir olması için, yani $D = P^{-1}AP$ olacak şekilde bir D köşegen matrisine benzer olması için gerek ve yeter şart A matrisinin n -tane lineer bağımsız özvektörünün olması gerekir. Ayrıca bu durumda D matrisinin köşegen elemanları A matrisinin özdeğerleridir [52].

Tanım 1.1.2.12. $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$ polinomuna ait Companion matrisi:

$$C = [c_{ij}]_{n \times n} = \begin{bmatrix} -a_{n+1} & \cdots & -a_2 & -a_1 & -a_0 \\ 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Companion matris hakkında daha detaylı bilgilere [53,54] deki çalışmalarda ulaşılabilir.

Teorem 1.1.2.6. $v \times v$ boyutlu $K(k_1, k_2, \dots, k_v)$ Companion matrisi

$$K(k_1, k_2, \dots, k_v) = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_v \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde olsun. Bu durumda $K^u(k_1, k_2, \dots, k_v)$ matrisinin i . satır ve j . sütunundaki elemanı

$$k_{i,j}^{(u)}(k_1, k_2, \dots, k_v) = \sum_{(t_1, t_2, \dots, t_v)} \frac{t_j + t_{j+1} + \dots + t_v}{t_1 + t_2 + \dots + t_v} \times \binom{t_1 + \dots + t_v}{t_1, \dots, t_v} k_1^{t_1} \dots k_v^{t_v} \quad (2.2.1)$$

olup buradaki toplam, negatif olmayan tam sayılar üzerinden $t_1 + 2t_2 + \dots + vt_v = u - i + j$

koşulunu sağlar ve $\binom{t_1 + \dots + t_v}{t_1, \dots, t_v} = \frac{(t_1 + \dots + t_v)!}{t_1! \dots t_v!}$ ifadesi çok katlı bir katsayıdır. Eğer $u = i - j$ ise (2.2.1) denklemindeki katsayılar 1 olarak tanımlanır [55].

Tanım 1.1.2.13. V_n , $n \times n$ tipli Vandermonde matrisi $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ için

$$V_n = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

şeklindedir [56].

Tanım 1.1.2.14. $X = [x_{ij}]$ ve $Y = [y_{ij}]$ matrisleri $m \times n$ boyutlu matrisler olmak üzere $X * Y = [x_{ij} y_{ij}]_{m \times n}$ çarpımına X ile Y matrislerinin Hadamard çarpımı denir.

Tanım 1.1.2.15. Bir M matrisinde $\text{per } M = \det(M * K)$ sağlayacak şekilde eğer $n \times n$ tipinde $(1, -1)$ olacak şekilde bir K matrisi varsa, bu durumda M matrisi değiştirilebilir(convertible) bir matris olarak adlandırılır. Burada $M * K$ notasyonu ile Hadamard çarpımı gösterilmektedir.

1.1.3. Lineer İndirgemeli Diziler

Tanım 1.1.3.1. R değişmeli ve birimli bir halka aynı zamanda $c_i \in R (0 \leq i \leq k-1)$ sabit katsayılar ve $n \in N$ olsun. $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$ başlangıç değerleri olmak üzere $n \geq 0$ için

$$a_{n+k} = c_0 a_n + c_1 a_{n+1} + \dots + c_{k-1} a_{n+k-1} \quad (2.3.1)$$

şeklindeki k – basamak homojen lineer indirgemeli bağıntı yardımıyla tanımlanan $\{a_n\}$ dizisine R halkasının elemanlarının lineer indirgemeli dizisi denir [57].

$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ kümeleri üzerinde tanımlanan lineer indirgemeli dizilere sırasıyla tamsayı, rasyonel, reel ve kompleks lineer indirgemeli diziler denir [58].

c_k , R nin terslenebilir bir elemanı ise (2.3.1) de tanımlanan dizi $a_0, a_{-1}, a_{-2}, \dots$ şeklinde devam eder [57].

Tanım 1.1.3.2. $f(x) = x^k + c_1 x^{k-1} + \dots + c_{k-1} x + c_k$ şeklindeki k . dereceden polinoma (2.3.1) denkleminde ifade edilen lineer indirgemeli bağıntının karakteristik polinomu denir.

Eğer R halkasının sıfır böleni yoksa bu durumda herhangi bir $\{a_n\}$ lineer indirgemeli dizisi minimal uzunluktaki bir indirgeme bağıntısına sahiptir. Minimal uzunluktaki bağıntının karakteristik polinomu ise $\{a_n\}$ dizisinin minimal polinomudur. Aynı zamanda bu minimal polinomun derecesine $\{a_n\}$ lineer indirgemeli dizisinin mertebesi denir.

Tanım 1.1.3.3. R değişmeli ve birimli bir halka $c_i \in R (0 \leq i \leq k-1)$ sabit katsayılar ve $n \in N$ olsun. $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$ başlangıç değerleri olmak üzere $n \geq 0$ için

$$a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + \dots + c_k a_n + c_{k+1}$$

bağıntısı ile tanımlanan diziye homojen olmayan lineer indirgemeli dizi denir. Bu dizi aynı zamanda

$$a_{n+k+1} = (c_1 + 1) a_{n+k} + \sum_{i=1}^{k-1} (c_{i+1} - c_i) a_{n+k-i} - c_k a_n \quad (2.3.2)$$

şeklindeki $(k+1)$. mertebeden homojen indirgeme bağıntısı ile de tanımlanabilir.

Bu bağıntının karakteristik polinomu ise

$$F(x) = (x^k + c_1 x^{k-1} + \dots + c_{k-1} x - c_k)(x-1)$$

şeklindedir [59].

$a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$ başlangıç değerleri ve $c_0, c_1, \dots, c_{k-1}$ ler sabitler olmak üzere

$$a_{n+k} = c_0 a_n + c_1 a_{n+1} + \dots + c_{k-1} a_{n+k-1}$$

şeklindeki k – basamak lineer indirgeme bağıntısıyla tanımlanan dizinin elemanları:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_{k-2} & c_{k-1} \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$A^n \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \\ \vdots \\ a_{n+k} \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilen denklem yardımıyla elde edilmiştir [60].

Tanım 1.1.3.4. Bir dizi belli bir noktadan sonra bir alt dizinin tekrarı şeklinde oluşuyorsa tekrar eden bu diziye periyodiktir denir. Örneğin; $a, b, c, d, e, c, d, e, \dots$ dizisi periyodiktir bir dizidir ve periyodu 3 tür.

Tanım 1.1.3.5. “ Bir dizideki ilk k eleman tekrar eden bir alt dizi şeklinde ise bu diziye k periyotlu basit periyodik dizi denir. Örneğin $a, b, c, d, e, a, b, c, d, e, \dots$ dizisi basit periyodik olup periyodu 5 dir.”

1.1.4. Fibonacci Dizisi

Tanım 1.1.4.1. $\{F_n\}$ Fibonacci dizisi, başlangıç değerleri $F_0=0$ ve $F_1=1$ olmak üzere $n \geq 0$ için

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

şeklindeki indirgeme bağıntısı ile tanımlanır. Fibonacci dizisinin terimleri

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$$

olarak elde edilir.

Honsberger, [61]'de Fibonacci sayılarının

$$Q = \begin{bmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$$

eşitliğini sağlayan bir Q matrisi tarafından üretebileceğini göstermiştir. Burada Q matrisi Fibonacci Q -matrisi olarak adlandırılmaktadır.

Tanım 1.1.4.2. Başlangıç değerleri $F_0^k = \dots = F_{k-2}^k = 0$ ve F_{k-1}^k olmak üzere $n \geq 0$ için $F_{n+k}^k = F_{n+k-1}^k + F_{n+k-2}^k + \dots + F_n^k$ şeklindeki indirgeme bağıntısı yardımıyla tanımlanan diziye k -basamak Fibonacci dizisi denir.

[60] ve [62] çalışmalarında kullanılan metotlar yardımıyla Fibonacci ve k -basamak Fibonacci dizisinin terimleri için sırasıyla aşağıdaki matris bağıntıları verilebilir:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_{k-2} & c_{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_n^{(k)} \\ F_{n+1}^{(k)} \\ F_{n+2}^{(k)} \\ \vdots \\ F_{n+k-2}^{(k)} \\ F_{n+k-1}^{(k)} \end{bmatrix}$$

1.1.5. Pell Dizisi

Tanım 1.1.5.1. “ $\{P_n\}$ Pell dizisi, başlangıç değerleri $P_0=0$ ve $P_1=1$ olmak üzere $n \geq 0$ için

$$P_{n+2} = 2P_{n+1} + P_n$$

şeklindeki indirgeme bağıntısı ile tanımlanır. Pell dizisinin terimleri

$$0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, \dots$$

olarak elde edilir.”

Pell sayılarının çeşitli özellikleri Horadam tarafından [63]’deki çalışmada verilmiştir.

Bicknel ise [64]’de Pell sayılarının

olmak üzere

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M^n = \begin{bmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{bmatrix}$$

şeklinde üretilbileceğini göstermiştir.

1.1.6. Jacobsthal Dizisi

Tanım 1.1.6.1. $\{J_n\}$ Jacobsthal dizisi, başlangıç değerleri $J_0=0$, $J_1=1$ olmak üzere $n \geq 0$ için

$$J_{n+2} = J_{n+1} + 2J_n$$

şeklindeki indirgeme bağıntısı ile tanımlanır. Jacobsthal dizisinin terimleri

$$0, 1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, \dots$$

olarak elde edilir.

[65]’deki çalışmada, Köken ve Bozkurt Jacobsthal sayılarının

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, F^n = \begin{bmatrix} J_{n+1} & 2J_n \\ J_n & 2J_{n-1} \end{bmatrix}$$

şeklindeki matris bağıntısı yardımıyla elde edilebileceğini göstermişlerdir.

1.1.7. Padovan Dizisi

Tanım 1.1.7.1. $\{P(n)\}$ Padovan dizisi, başlangıç değerleri $P(0)=P(1)=P(2)=1$ olmak üzere $n \geq 3$ için

$$P(n) = P(n-2) + P(n-3)$$

şeklindeki indirgeme bağıntısı ile tanımlanır. Padovan dizisinin terimleri

$$1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, \dots$$

olarak elde edilir.

Lien [66]'deki çalışmasında Padovan sayılarının

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanan matris üzerinden

$$Q^n = \begin{bmatrix} P(n-5) & P(n-3) & P(n-4) \\ P(n-4) & P(n-2) & P(n-3) \\ P(n-3) & P(n-1) & P(n-2) \end{bmatrix}$$

olarak ifade edilen bağıntı yardımıyla üretilebileceğini göstermiştir.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

2.1. Fibonacci, Pell, Jacobsthal ve Padovan Sayıları Arasındaki İlişkiler

Tanım 2.1.1. $\{F-J(n)\}$ Fibonacci-Jacobsthal, $\{Pa-F(n)\}$ Padovan-Fibonacci, $\{P-F(n)\}$ Pell-Fibonacci, $\{P-J(n)\}$ Pell-Jacobsthal, $\{Pa-P(n)\}$ Padovan-Pell ve $\{Pa-J(n)\}$ Padovan-Jacobsthal dizileri sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$F-J(0)=F-J(1)=F-J(2)=0, F-J(3)=1 \text{ ve } n \geq 0 \text{ için}$$

$$F-J(n+4)=2F-J(n+3)+2F-J(n+2)-3F-J(n+1)-2F-J(n),$$

(2.1.1)

$$Pa-F(0)=Pa-F(1)=Pa-F(2)=Pa-F(3)=0, Pa-F(4)=1 \text{ ve } n \geq 0 \text{ için}$$

$$Pa-F(n+5)=Pa-F(n+4)+2Pa-F(n+3)-2Pa-F(n+1)-Pa-F(n)$$

(2.1.2)

$$P-F(0)=P-F(1)=P-F(2)=0, P-F(3)=1 \text{ ve } n \geq 0 \text{ için}$$

$$P-F(n+4)=3P-F(n+3)-3P-F(n+1)-P-F(n),$$

(2.1.3)

$$P-J(0)=P-J(1)=P-J(2)=0, P-J(3)=1 \text{ ve } n \geq 0 \text{ için}$$

$$P-J(n+4)=3P-J(n+3)+P-J(n+2)-5P-J(n+1)-2P-J(n),$$

(2.1.4)

$$Pa-P(0)=Pa-P(1)=Pa-P(2)=Pa-P(3)=0, Pa-P(4)=1 \text{ ve } n \geq 0 \text{ için}$$

$$Pa-P(n+5)=2Pa-P(n+4)+2Pa-P(n+3)-Pa-P(n+2)-3Pa-P(n+1)-Pa-P(n)$$

(2.1.5)

$$Pa - J(0) = Pa - J(1) = Pa - J(2) = Pa - J(3) = 0, \quad Pa - J(4) = 1 \quad \text{ve} \quad n \geq 0 \text{ için}$$

$$Pa - J(n+5) = Pa - J(n+4) + 3Pa - J(n+3) - 3Pa - J(n+1) - 2Pa - J(n), \text{ dir.}$$

(2.1.6)

İlk olarak yukarıda tanımlanan diziler ile Fibonacci, Jacobsthal, Padovan ve Pell dizileri arasındaki bağıntıları ele alalım;

Teorem 2.1.1. “ $F - J(n)$, $Pa - F(n)$, $P - F(n)$, $P - J(n)$, $Pa - P(n)$ ve $Pa - J(n)$ sırasıyla; n -inci Fibonacci-Jacobsthal, Padovan-Fibonacci, Pell-Fibonacci, Pell-Jacobsthal, Padovan-Pell ve Padovan-Jacobsthal sayıları olmak üzere;

i. $n \geq 0$ için

$$F - J(n) = J_n - F_n,$$

ii. $n \geq 0$ için

$$Pa - F(n+2) = F_{n+1} - Pa_n,$$

iii. $n \geq 0$ için

$$P - F(n+1) = P_n - F_n,$$

iv. $n \geq 1$ için

$$P - J(n) = \sum_{i=0}^{n-1} (P_i - J_i),$$

v. $n \geq 0$ için

$$4Pa - P(n+5) + Pa - P(n+4) = P_{n+4} - P_{n+3} - Pa_n$$

ve

vi. $n \geq 0$ için

$$2Pa - J(n+2) + Pa - J(n+1) = J_{n+1} - Pa_n$$

eşitlikleri geçerlidir[43].”

İspat: *i.* durumunu düşünelim. n üzerinden tümevarım yöntemi yardımıyla ispatlanacaktır. $F - J(0) = J_0 - F_0 = 0$ olduğu açıktır. Farzedelim ki denklem $n > 0$ için geçerlidir. O zaman denklemin $n+1$ içinde sağlandığı gösterilmelidir. Buna göre Fibonacci–Jacobsthal dizisinin karakteristik denklemi

$$p(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 3x + 2$$

Olduğundan dolayı $p(x) = f_1(x) f_5(x)$ şeklindedir. Burada $f_1(x)$ ve $f_5(x)$ sırasıyla; Fibonacci ve Jacobsthal dizilerinin karakteristik polinomlarıdır. Dolayısıyla $n \geq 0$ için

$$F_{n+4} = 2F_{n+3} + 2F_{n+2} - 3F_{n+1} - 2F_n$$

ve

$$J_{n+4} = 2J_{n+3} + 2J_{n+2} - 3J_{n+1} - 2J_n$$

bağıntıları elde edilir. Böylelikle basit bir hesaplama ile ispat tamamlanır [42].

Diğer denklemlerin ispatları yukarıdaki ispata benzer şekilde yapılabilir.

2.1.1. Üreteç Matrisleri

(2.1.1)-(2.1.6) indirgeme bağıntıları yardımıyla, $\{F - J(n)\}$ Fibonacci–Jacobsthal, $\{Pa - F(n)\}$ Padovan–Fibonacci, $\{P - F(n)\}$ Pell–Fibonacci, $\{P - J(n)\}$ Pell–Jacobsthal, $\{Pa - P(n)\}$ Padovan–Pell ve $\{Pa - J(n)\}$ Padovan–Jacobsthal dizileri için Companion Matris formundaki üreteç matrisleri:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$M_4 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -5 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$M_5 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$M_6 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak belirlenmiş olup, burada M_1 , M_2 , M_3 , M_4 , M_5 ve M_6 matrisleri sırasıyla; Fibonacci–Jacobsthal, Padovan–Fibonacci, Pell–Fibonacci, Pell–Jacobsthal, Padovan–Pell ve Padovan–Jacobsthal olarak adlandırılmaktadır. $F - J(n)$, $Pa - F(n)$, $P - F(n)$, $P - J(n)$, $Pa - P(n)$ ve $Pa - J(n)$ dizilerinin gösterimleri sırasıyla; x_n^1 , x_n^2 , x_n^3 , x_n^4 , x_n^5 ve x_n^6 olarak ifade edilsin. Şimdi uygun n değerleri için üreteç matrislerin çarpımsal mertebelerini ele alacağız. n üzerinden tümevarım yöntemi uygulanarak, Fibonacci–Jacobsthal, Padovan–Fibonacci, Pell–Fibonacci, Pell–Jacobsthal, Padovan–Pell ve Padovan–Jacobsthal matrislerinin n -inci kuvvetleri sırasıyla;

$n \geq 3$ için,

$$(M_1)^n = \begin{bmatrix} x_{n+3}^1 & F_{n+1} + (-1)^{n+1} & F_{n+3} - x_{n+4}^1 & F_n - x_{n+3}^1 + (-1)^n \\ x_{n+2}^1 & F_n + (-1)^n & F_{n+2} - x_{n+3}^1 & F_{n-1} - x_{n+2}^1 + (-1)^{n+2} \\ x_{n+1}^1 & F_{n-1} + (-1)^{n-1} & F_{n+1} - x_{n+2}^1 & F_{n-2} - x_{n+1}^1 + (-1)^n \\ x_n^1 & F_{n-2} + (-1)^{n-2} & F_n - x_{n+1}^1 & F_{n-3} - x_n^1 + (-1)^{n+1} \end{bmatrix},$$

$n \geq 5$ için,

$$(M_2)^n = \begin{bmatrix} x_{n+4}^2 & Pa_{n-1} + x_{n+3}^2 & Pa_n - x_{n+4}^2 & Pa_{n+1} - x_{n+5}^2 & -x_{n+3}^2 \\ x_{n+3}^2 & Pa_{n-2} + x_{n+2}^2 & Pa_{n-1} - x_{n+3}^2 & Pa_n - x_{n+4}^2 & -x_{n+2}^2 \\ x_{n+2}^2 & Pa_{n-3} + x_{n+1}^2 & Pa_{n-2} - x_{n+2}^2 & Pa_{n-1} - x_{n+3}^2 & -x_{n+1}^2 \\ x_{n+1}^2 & Pa_{n-4} + x_n^2 & Pa_{n-3} - x_{n+1}^2 & Pa_{n-2} - x_{n+2}^2 & -x_n^2 \\ x_n^2 & Pa_{n-5} + x_{n-1}^2 & Pa_{n-4} - x_n^2 & Pa_{n-3} - x_{n+1}^2 & -x_{n-1}^2 \end{bmatrix}.$$

$n \geq 1$ için,

$$(M_3)^n = \begin{bmatrix} x_{n+3}^3 & F_{n+2} + x_{n+2}^3 - x_{n+3}^3 & F_{n+3} + x_{n+3}^3 - x_{n+4}^3 & -x_{n+2}^3 \\ x_{n+2}^3 & F_{n+1} + x_{n+1}^3 - x_{n+2}^3 & F_{n+2} + x_{n+2}^3 - x_{n+3}^3 & -x_{n+1}^3 \\ x_{n+1}^3 & F_n + x_n^3 - x_{n+1}^3 & F_{n+1} + x_{n+1}^3 - x_{n+2}^3 & -x_n^3 \\ x_n^3 & F_{n-1} + x_{n-1}^3 - x_n^3 & F_n + x_n^3 - x_{n+1}^3 & -x_{n-1}^3 \end{bmatrix},$$

$n \geq 1$ için,

$$(M_4)^n = \begin{bmatrix} x_{n+3}^4 & J_{n+2} + x_{n+2}^4 - x_{n+3}^4 & J_{n+3} - x_{n+4}^4 & -2x_{n+2}^4 \\ x_{n+2}^4 & J_{n+1} + x_{n+1}^4 - x_{n+2}^4 & J_{n+2} - x_{n+3}^4 & -2x_{n+1}^4 \\ x_{n+1}^4 & J_n + x_n^4 - x_{n+1}^4 & J_{n+1} - x_{n+2}^4 & -2x_n^4 \\ x_n^4 & J_{n-1} + x_{n-1}^4 - x_n^4 & J_n - x_{n+1}^4 & -2x_{n-1}^4 \end{bmatrix},$$

$n \geq 6$ için,

$$(M_5)^n = \begin{bmatrix} x_{n+4}^5 & Pa_{n-1} + x_{n+3}^5 & Pa_n - x_{n+4}^5 & Pa_{n-2} - x_{n+4}^5 - x_{n+3}^5 & -x_{n+3}^5 \\ x_{n+3}^5 & Pa_{n-2} + x_{n+2}^5 & Pa_{n-1} - x_{n+3}^5 & Pa_{n-3} - x_{n+3}^5 - x_{n+2}^5 & -x_{n+2}^5 \\ x_{n+2}^5 & Pa_{n-3} + x_{n+1}^5 & Pa_{n-2} - x_{n+2}^5 & Pa_{n-4} - x_{n+2}^5 - x_{n+1}^5 & -x_{n+1}^5 \\ x_{n+1}^5 & Pa_{n-4} + x_n^5 & Pa_{n-3} - x_{n+1}^5 & Pa_{n-5} - x_{n+1}^5 - x_n^5 & -x_n^5 \\ x_n^5 & Pa_{n-5} + x_{n-1}^5 & Pa_{n-4} - x_n^5 & Pa_{n-6} - x_n^5 - x_{n-1}^5 & -x_{n-1}^5 \end{bmatrix}$$

ve $n \geq 4$ için,

$$(M_6)^n = \begin{bmatrix} x_{n+4}^6 & x_{n+5}^6 - x_{n+4}^6 & Pa_n - x_{n+4}^6 & Pa_{n+1} - x_{n+5}^6 & -2x_{n+3}^6 \\ x_{n+3}^6 & x_{n+4}^6 - x_{n+3}^6 & Pa_{n-1} - x_{n+3}^6 & Pa_n - x_{n+4}^6 & -2x_{n+2}^6 \\ x_{n+2}^6 & x_{n+3}^6 - x_{n+2}^6 & Pa_{n-2} - x_{n+2}^6 & Pa_{n-1} - x_{n+3}^6 & -2x_{n+1}^6 \\ x_{n+1}^6 & x_{n+2}^6 - x_{n+1}^6 & Pa_{n-3} - x_{n+1}^6 & Pa_{n-2} - x_{n+2}^6 & -2x_n^6 \\ x_n^6 & x_{n+1}^6 - x_n^6 & Pa_{n-4} - x_n^6 & Pa_{n-3} - x_{n+1}^6 & -2x_{n-1}^6 \end{bmatrix}.$$

şeklinde elde edilmiştir.

2.1.2. Binet Formülleri

Bu bölümde, Fibonacci–Jacobsthal, Padovan–Fibonacci, Pell–Fibonacci, Pell–Jacobsthal, Padovan–Pell ve Padovan–Jacobsthal sayıları için Binet formülleri elde edilecektir.

M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 ve M_6 matrislerinin özdeğerlerinin birbirinden farklı olduğu bilinmektedir. $\{\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}, \lambda_3^{(1)}, \lambda_4^{(1)}\}, \{\lambda_1^{(2)}, \lambda_2^{(2)}, \lambda_3^{(2)}, \lambda_4^{(2)}, \lambda_5^{(2)}\}, \{\lambda_1^{(3)}, \lambda_2^{(3)}, \lambda_3^{(3)}, \lambda_4^{(3)}\}, \{\lambda_1^{(4)}, \lambda_2^{(4)}, \lambda_3^{(4)}, \lambda_4^{(4)}\}, \{\lambda_1^{(5)}, \lambda_2^{(5)}, \lambda_3^{(5)}, \lambda_4^{(5)}, \lambda_5^{(5)}\}$ ve $\{\lambda_1^{(6)}, \lambda_2^{(6)}, \lambda_3^{(6)}, \lambda_4^{(6)}, \lambda_5^{(6)}\}$ sırasıyla M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 ve M_6 matrislerinin özdeğerlerinin kümesi olmak üzere $k \times k$ tipli $V_k^{(u)}$ Vandermonde matrisi (burada $u=1,3,4$ için $k=4$ ve $u=2,5,6$ için $k=5$) aşağıdaki gibi ifade edilsin:

$$V_k^{(u)} = \begin{bmatrix} (\lambda_1^{(u)})^{k-1} & (\lambda_2^{(u)})^{k-1} & \dots & (\lambda_k^{(u)})^{k-1} \\ (\lambda_1^{(u)})^{k-2} & (\lambda_2^{(u)})^{k-2} & \dots & (\lambda_k^{(u)})^{k-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{(u)} & \lambda_2^{(u)} & & \lambda_k^{(u)} \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

$W_k^{(u,i)}$ matrisi

$$W_k^{(u,i)} = \begin{bmatrix} \left(\lambda_1^{(u)}\right)^{n+k-i} \\ \left(\lambda_k^{(u)}\right)^{n+k-i} \\ \vdots \\ \left(\lambda_k^{(u)}\right)^{n+k-i} \end{bmatrix}$$

olmak üzere $V_k^{(u,i,j)}$ matrisini, $V_k^{(u)}$ matrisinin j -inci sütununun $W_k^{(u,i)}$ sütun matrisleriyle yerdeğiştirilmesiyle elde edilen $k \times k$ tipli bir matris olarak tanımlayalım.

Teorem 2.1.2.1. $(M_u)^n = [m_{i,j}^{u,n}]$ olmak üzere

$$m_{i,j}^{u,n} = \frac{\det V_k^{(u,i,j)}}{\det V_k^{(u)}}$$

olarak elde edilir. Burada $u=1$ ve $n \geq 3$ için $k=4$; $u=2$ ve $n \geq 5$ için $k=4$; $u=3,4$ ve $n \geq 1$ için $k=4$; $u=5$ ve $n \geq 6$ için $k=5$ ve $u=6$ ve $n \geq 4$ için $k=5$ dir [43].

İspat: M_2 matrisini göz önüne alalım. M_2 matrisinin özdeğerleri birbirinden farklı olduğundan dolayı M_2 matrisi köşegenleştirilebilirdir $D_2 = \text{diag}(\lambda_1^{(2)}, \lambda_2^{(2)}, \lambda_3^{(2)}, \lambda_4^{(2)}, \lambda_5^{(2)})$ olmak üzere M_2 matrisi köşegenleştirilebilir olduğundan dolayı $M_2 V_5^{(2)} = V_5^{(2)} D_2$ eşitliği yazılabilir.

Ayrıca M_2 matrisi tersinir matris olduğundan dolayı $(V_5^{(2)})^{-1} M_2 V_5^{(2)} = D_2$ eşitliği elde edilir ki; bu durum da M_2 matrisinin D_2 matrisine benzer bir matris olduğunu göstermektedir. Benzer matrislerin kuvvetleri de benzer olduğundan $n \geq 5$ için $(M_2)^n V_5^{(2)} = V_5^{(2)} (D_2)^n$ ifadesine ulaşılır ki, bu durumda

$$\begin{cases} m_{i,1}^{(2,n)} (\lambda_1^{(2)})^4 + m_{i,2}^{(2,n)} (\lambda_1^{(2)})^3 + m_{i,3}^{(2,n)} (\lambda_1^{(2)})^2 + m_{i,4}^{(2,n)} (\lambda_1^{(2)}) + m_{i,5}^{(2,n)} = (\lambda_1^{(2)})^{n+5-i} \\ m_{i,1}^{(2,n)} (\lambda_2^{(2)})^4 + m_{i,2}^{(2,n)} (\lambda_2^{(2)})^3 + m_{i,3}^{(2,n)} (\lambda_2^{(2)})^2 + m_{i,4}^{(2,n)} (\lambda_2^{(2)}) + m_{i,5}^{(2,n)} = (\lambda_2^{(2)})^{n+5-i} \\ m_{i,1}^{(2,n)} (\lambda_3^{(2)})^4 + m_{i,2}^{(2,n)} (\lambda_3^{(2)})^3 + m_{i,3}^{(2,n)} (\lambda_3^{(2)})^2 + m_{i,4}^{(2,n)} \lambda_3^{(2)} + m_{i,5}^{(2,n)} = (\lambda_3^{(2)})^{n+5-i} \\ m_{i,1}^{(2,n)} (\lambda_4^{(2)})^4 + m_{i,2}^{(2,n)} (\lambda_4^{(2)})^3 + m_{i,3}^{(2,n)} (\lambda_4^{(2)})^2 + m_{i,4}^{(2,n)} \lambda_4^{(2)} + m_{i,5}^{(2,n)} = (\lambda_4^{(2)})^{n+5-i} \\ m_{i,1}^{(2,n)} (\lambda_5^{(2)})^4 + m_{i,2}^{(2,n)} (\lambda_5^{(2)})^3 + m_{i,3}^{(2,n)} (\lambda_5^{(2)})^2 + m_{i,4}^{(2,n)} \lambda_5^{(2)} + m_{i,5}^{(2,n)} = (\lambda_5^{(2)})^{n+5-i} \end{cases}$$

şeklinde ifade edilen bir lineer denklem sistemi elde edilebilmektedir. Bu şekilde yazılabilen lineer denklem sisteminin çözümünden her $i, j = 1, 2, 3, 4, 5$ için

$$m_{i,j}^{2,n} = \frac{\det V_5^{(2,i,j)}}{\det V_5^{(2)}}$$

sonucu elde edilir [42].

Diğer matrisler için ispatlar yukarıdaki ispata benzer şekilde yapılabilir.

Sonuç 2.1.2.1. “ $F - J(n)$, $Pa - F(n)$, $P - F(n)$, $P - J(n)$, $Pa - P(n)$ ve $Pa - J(n)$

” sırasıyla n -inci Fibonacci–Jacobsthal, Padovan–Fibonacci, Pell–Fibonacci, Pell–Jacobsthal, Padovan–Pell ve Padovan–Jacobsthal sayıları olmak üzere;

$$n \geq 3 \text{ için } F - J(n) = \frac{\det V_4^{(1,4,1)}}{\det V_4^{(1)}},$$

$$n \geq 5 \text{ için } Pa - F(n) = \frac{\det V_5^{(2,5,1)}}{\det V_5^{(2)}} = -\frac{\det V_5^{(2,4,5)}}{\det V_5^{(2)}},$$

$$n \geq 1 \text{ için } P - F(n) = \frac{\det V_4^{(3,4,1)}}{\det V_4^{(3)}} = -\frac{\det V_4^{(3,3,4)}}{\det V_4^{(3)}},$$

$$n \geq 1 \text{ için } P - J(n) = \frac{\det V_4^{(4,4,1)}}{\det V_4^{(4)}} = -\frac{\det V_4^{(4,3,4)}}{2 \cdot \det V_4^{(4)}},$$

$$n \geq 6 \text{ için } Pa - P(n) = \frac{\det V_5^{(5,5,1)}}{\det V_5^{(5)}} = -\frac{\det V_5^{(5,4,5)}}{\det V_5^{(5)}}$$

ve

$$n \geq 4 \text{ için } Pa - J(n) = \frac{\det V_5^{(6,5,1)}}{\det V_5^{(6)}} = -\frac{\det V_5^{(6,4,5)}}{2 \cdot \det V_5^{(6)}}$$

eşitlikleri elde edilir [42].

2.1.3. Üstel Temsiller

$\{F - J(n)\}$, $\{Pa - F(n)\}$, $\{P - F(n)\}$, $\{P - J(n)\}$, $\{Pa - P(n)\}$ ve $\{Pa - J(n)\}$ dizilerinin üreteç fonksiyonları sırasıyla

$$g_1(x) = \frac{x^3}{1 - 2x - 2x^2 + 3x^3 + 2x^4}, \quad (0 \leq 2x + 2x^2 - 3x^3 - 2x^4 < 1),$$

$$g_2(x) = \frac{x^4}{1 - x - 2x^2 + 2x^4 + x^5}, \quad (0 \leq x + 2x^2 - 2x^4 - x^5 < 1),$$

$$g_3(x) = \frac{x^3}{1 - 3x + 3x^3 + x^4}, \quad (0 \leq 3x - 3x^3 - x^4 < 1),$$

$$g_4(x) = \frac{x^3}{1 - 3x - x^2 + 5x^3 + 2x^4}, \quad (0 \leq 3x + x^2 - 5x^3 - 2x^4 < 1),$$

$$g_5(x) = \frac{x^4}{1 - 2x - 2x^2 + x^3 + 3x^4 + x^5}, \quad (0 \leq 2x + 2x^2 - x^3 - 3x^4 - x^5 < 1)$$

ve

$$g_6(x) = \frac{x^4}{1 - x - 3x^2 + 3x^4 + 2x^5}, \quad (0 \leq x + 3x^2 - 3x^4 - 2x^5 < 1)$$

olarak elde edilir.

$g_1(x)$, $g_2(x)$, $g_3(x)$, $g_4(x)$, $g_5(x)$ ve $g_6(x)$ fonksiyonları göz önüne alınarak aşağıdaki Teorem ile Fibonacci–Jacobsthal, Padovan–Fibonacci, Pell–Fibonacci, Pell–Jacobsthal, Padovan–Pell ve Padovan–Jacobsthal sayıları için üstel temsiller verilmiştir:

Teorem 2.1.3.1. $\{F - J(n)\}$, $\{Pa - F(n)\}$, $\{P - F(n)\}$, $\{P - J(n)\}$, $\{Pa - P(n)\}$ ve $\{Pa - J(n)\}$ dizilerinin üstel temsilleri sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$g_1(x) = x^3 \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i} (2 + 2x - 3x^2 - 2x^3)^i\right),$$

$$g_2(x) = x^4 \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i} (1 + 2x - 2x^3 - x^4)^i\right),$$

$$g_3(x) = x^3 \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i} (3 - 3x^2 - x^3)^i\right),$$

$$g_4(x) = x^3 \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i} (3 + x - 5x^2 - 2x^3)^i\right),$$

$$g_5(x) = x^4 \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i} (1 + 3x - 3x^3 - 2x^4)^i\right)$$

ve

$$g_6(x) = x^4 \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i} (1 + 3x - 3x^3 - 2x^4)^i\right) [42].$$

İspat: $\{P - F(n)\}$ dizisini göz önüne alalım. Buna göre

$$\ln \frac{g_3(x)}{x^3} = -\ln(1 - 3x + 3x^3 + x^4)$$

ve

$$\ln(1 - 3x + 3x^3 + x^4) = -[x(3 - 3x^2 - x^3) + \frac{1}{2}x^2(3 - 3x^2 - x^3)^2 + \dots + \frac{1}{i}x^i(3 - 3x^2 - x^3)^i]$$

olduğundan basit bir hesaplama ile sonuç elde edilir [42].

Diğer diziler için de benzer bir yöntem kullanılarak ispat yapılabilir.

2.1.4. Toplamsal Temsiller

Şimdi Fibonacci–Jacobsthal, Padovan–Fibonacci, Pell–Fibonacci, Pell–Jacobsthal, Padovan–Pell ve Padovan–Jacobsthal sayılarının için toplamsal temsillerini ele alalım:

Sonuç 2.1.4.1. $F - J(n)$, $Pa - F(n)$, $P - F(n)$, $P - J(n)$, $Pa - P(n)$ ve $Pa - J(n)$ sırasıyla n -inci Fibonacci–Jacobsthal, Padovan–Fibonacci, Pell–Fibonacci, Pell–Jacobsthal, Padovan–Pell ve Padovan–Jacobsthal sayıları olmak üzere;

i. $n \geq 3$ için,

$$F - J(n) = \sum_{(t_1, t_2, t_3, t_4)} \binom{t_1 + t_2 + t_3 + t_4}{t_1, t_2, t_3, t_4} 2^{t_1+t_2} (-3)^{t_3} (-2)^{t_4}$$

şeklinde olup burada bu toplamlar, negatif olmayan tam sayılar üzerinde sırasıyla

$$t_1 + 2t_2 + 3t_3 + 4t_4 = n - 3$$

şartını sağlar.

ii. $n \geq 5$ için,

$$Pa - F(n) = \sum_{(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5)} \binom{t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5}{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5} 2^{t_1} (-2)^{t_4} (-1)^{t_5}$$

ve

$$Pa - F(n) = - \left(\sum_{(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5)} \frac{t_5}{t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5} \binom{t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5}{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5} 2^{t_1} (-2)^{t_4} (-1)^{t_5} \right)$$

şeklinde olup burada bu toplamlar, negatif olmayan tam sayılar üzerinde sırasıyla

$$t_1 + 2t_2 + 3t_3 + 4t_4 + 5t_5 = n - 4$$

ve

$$t_1 + 2t_2 + 3t_3 + 4t_4 + 5t_5 = n + 1$$

şartlarını sağlar.

iii. $n \geq 1$ için,

$$P - F(n) = \sum_{(t_1, t_2, t_3, t_4)} \binom{t_1 + t_2 + t_3 + t_4}{t_1, t_2, t_3, t_4} 3^{t_1} (-3)^{t_3} (-1)^{t_4}$$

ve

$$P - F(n) = - \left(\sum_{(t_1, t_2, t_3, t_4)} \frac{t_4}{t_1 + t_2 + t_3 + t_4} \binom{t_1 + t_2 + t_3 + t_4}{t_1, t_2, t_3, t_4} 3^{t_1} (-3)^{t_3} (-1)^{t_4} \right)$$

şeklinde olup burada bu toplamlar, negatif olmayan tam sayılar üzerinde sırasıyla

$$t_1 + 2t_2 + 3t_3 + 4t_4 = n - 3$$

ve

$$t_1 + 2t_2 + 3t_3 + 4t_4 = n + 1$$

şartlarını sağlar.

iv. $n \geq 1$ için,

$$P - J(n) = \sum_{(t_1, t_2, t_3, t_4)} \binom{t_1 + t_2 + t_3 + t_4}{t_1, t_2, t_3, t_4} 3^{t_1} (-5)^{t_3} (-2)^{t_4}$$

ve

$$P - J(n) = -\frac{1}{2} \left(\sum_{(t_1, t_2, t_3, t_4)} \frac{t_4}{t_1 + t_2 + t_3 + t_4} \binom{t_1 + t_2 + t_3 + t_4}{t_1, t_2, t_3, t_4} 3^{t_1} (-5)^{t_3} (-2)^{t_4} \right)$$

şeklinde olup burada bu toplamlar, negatif olmayan tam sayılar üzerinde sırasıyla

$$t_1 + 2t_2 + 3t_3 + 4t_4 = n - 3$$

ve

$$t_1 + 2t_2 + 3t_3 + 4t_4 = n + 1$$

şartlarını sağlar.

v. $n \geq 6$ için,

$$Pa - P(n) = \sum_{(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5)} \binom{t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5}{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5} 2^{t_1 + t_2} (-1)^{t_3 + t_5} (-3)^{t_4}$$

ve

$$Pa - P(n) = - \left(\sum_{(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5)} \frac{t_5}{t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5} \binom{t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5}{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5} 2^{t_1 + t_2} (-1)^{t_3 + t_5} (-3)^{t_4} \right)$$

şeklinde olup burada bu toplamlar, negatif olmayan tam sayılar üzerinde sırasıyla

$$t_1 + 2t_2 + 3t_3 + 4t_4 + 5t_5 = n - 4$$

ve

$$t_1 + 2t_2 + 3t_3 + 4t_4 + 5t_5 = n + 1$$

şartlarını sağlar.

vi. $n \geq 4$ için,

$$Pa - J(n) = \sum_{(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5)} \binom{t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5}{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5} 3^{t_2} (-3)^{t_4} (-2)^{t_5}$$

Ve

$$Pa - J(n) = -\frac{1}{2} \left(\sum_{(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5)} \frac{t_5}{t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5} \binom{t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5}{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5} 3^{t_2} (-3)^{t_4} (-2)^{t_5} \right)$$

şeklinde olup burada bu toplamlar, negatif olmayan tam sayılar üzerinde sırasıyla

$$t_1 + 2t_2 + 3t_3 + 4t_4 + 5t_5 = n - 4$$

ve

$$t_1 + 2t_2 + 3t_3 + 4t_4 + 5t_5 = n + 1$$

şartlarını sağlar [42].

İspat: iv. durumu göz önüne alalım. Teorem 2.2.15 de ilk durum için $i = 4$, $j = 1$ ve ikinci durum için $i = 3$, $j = 4$ olarak seçilirse o zaman $(M_4)^n$ matrisinden sonuç doğrudan görülür [42].

$\{F - J(n)\}$, $\{Pa - F(n)\}$, $\{P - F(n)\}$, $\{Pa - P(n)\}$ ve $\{Pa - J(n)\}$ dizileri için de benzer yöntemler kullanılarak ispat yapılabilir.

2.1.5. Permanental Temsiller

Bu bölümde, Fibonacci–Jacobsthal, Padovan–Fibonacci, Pell–Fibonacci, Pell–Jacobsthal, Padovan–Pell ve Padovan–Jacobsthal dizilerinin companion matris formundaki üreteç matrisleri göz önünde bulundurularak aşağıdaki gibi süper-köşegen matrisler tanımlanacak ve bu matrislerin permanent değerleri üzerinden de dizilerin permanental temsilleri verilecektir. Ayrıca bu permanent değerleri kullanılarak Fibonacci–Jacobsthal, Padovan–Fibonacci, Pell–Fibonacci, Pell–Jacobsthal, Padovan–Pell ve Padovan–Jacobsthal sayıları arasındaki çeşitli bağıntılar elde edilecektir.”

$m \times m$ boyutlu $K^{(1)}(m) = [k_{i,j}^{(1)}]$, $K^{(2)}(m) = [k_{i,j}^{(2)}]$, $K^{(3)}(m) = [k_{i,j}^{(3)}]$, $K^{(4)}(m) = [k_{i,j}^{(4)}]$

, $K^{(5)}(m) = [k_{i,j}^{(5)}]$ ve $K^{(6)}(m) = [k_{i,j}^{(6)}]$ süper-köşegen matrisler sırasıyla

$m \geq 4$ için,

$$k_{i,j}^{(1)} = \begin{cases} 2 & \text{eğer } i = t \text{ ve } j = t \text{ ise } 1 \leq t \leq m \\ & \text{ve} \\ & i = t \text{ ve } j = t+1 \text{ ise } 1 \leq t \leq m-1, \\ 1 & \text{eğer } i = t+1 \text{ ve } j = t \text{ ise } 1 \leq t \leq m-1, \\ -2 & \text{eğer } i = t \text{ ve } j = t+3 \text{ ise } 1 \leq t \leq m-3, \\ -3 & \text{eğer } i = t \text{ ve } j = t+2 \text{ ise } 1 \leq t \leq m-2, \\ 0 & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

$m \geq 5$ için,

$$k_{i,j}^{(2)} = \begin{cases} 2 & \text{eğer } i = t \text{ ve } j = t+1 \text{ ise } 1 \leq t \leq m-1, \\ & \text{eğer } i = t \text{ ve } j = t \text{ ise } 1 \leq t \leq m \\ 1 & \text{ve} \\ & i = t+1 \text{ ve } j = t \text{ ise } 1 \leq t \leq m-1, \\ -1 & \text{eğer } i = t \text{ ve } j = t+4 \text{ ise } 1 \leq t \leq m-4, \\ -2 & \text{eğer } i = t \text{ ve } j = t+3 \text{ ise } 1 \leq t \leq m-3, \\ 0 & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

$m \geq 4$ için,

$$k_{i,j}^{(3)} = \begin{cases} 3 & \text{eğer } i = t \text{ ve } j = t \text{ ise } 1 \leq t \leq m, \\ 1 & \text{eğer } i = t+1 \text{ ve } j = t \text{ ise } 1 \leq t \leq m-1, \\ -1 & \text{eğer } i = t \text{ ve } j = t+3 \text{ ise } 1 \leq t \leq m-3, \\ -3 & \text{eğer } i = t \text{ ve } j = t+2 \text{ ise } 1 \leq t \leq m-2, \\ 0 & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

$m \geq 5$ için,

$$k_{i,j}^{(4)} = \begin{cases} 3 & \text{eğer } i = t \text{ ve } j = t \text{ ise } 1 \leq t \leq m, \\ & \text{eğer } i = t \text{ ve } j = t+1 \text{ ise } 1 \leq t \leq m-1 \\ 1 & \text{ve} \\ & i = t+1 \text{ ve } j = t \text{ ise } 1 \leq t \leq m-1, \\ -2 & \text{eğer } i = t \text{ ve } j = t+3 \text{ ise } 1 \leq t \leq m-3, \\ -5 & \text{eğer } i = t \text{ ve } j = t+2 \text{ ise } 1 \leq t \leq m-2, \\ 0 & \text{diğer durumlarda.} \end{cases},$$

$m \geq 5$ için,

$$k_{i,j}^{(5)} = \begin{cases} & \text{eğer } i = t \text{ ve } j = t \text{ ise } 1 \leq t \leq m \\ 2 & \text{ve} \\ & i = t \text{ ve } j = t+1 \text{ ise } 1 \leq t \leq m-1, \\ 1 & \text{eğer } i = t+1 \text{ ve } j = t \text{ ise } 1 \leq t \leq m-1, \\ & \text{eğer } i = t \text{ ve } j = t+2 \text{ ise } 1 \leq t \leq m-2 \\ -1 & \text{ve} \\ & i = t \text{ ve } j = t+4 \text{ ise } 1 \leq t \leq m-4, \\ -3 & \text{eğer } i = t \text{ ve } j = t+3 \text{ ise } 1 \leq t \leq m-3, \\ 0 & \text{diğer durumlarda.} \end{cases},$$

ve $m \geq 5$ için,

$$k_{i,j}^{(6)} = \begin{cases} 3 & \text{eğer } i = t \text{ ve } j = t+1 \text{ ise } 1 \leq t \leq m-1, \\ & \text{eğer } i = t \text{ ve } j = t \text{ ise } 1 \leq t \leq m \\ 1 & \text{ve} \\ & i = t+1 \text{ ve } j = t \text{ ise } 1 \leq t \leq m-1, \\ -2 & \text{eğer } i = t \text{ ve } j = t+4 \text{ ise } 1 \leq t \leq m-4, \\ -3 & \text{eğer } i = t \text{ ve } j = t+3 \text{ ise } 1 \leq t \leq m-3, \\ 0 & \text{diğer durumlarda.} \end{cases},$$

olarak tanımlanmış olsun. Bu matrislerin permanentleri ile dizilerin terimleri arasındaki ilişki aşağıdaki teorem ile verilir;

Teorem 2.1.5.1. *i. $m \geq 4$ ve $k = 1, 3, 4$ için*

$$\text{per}K^{(k)}(m) = x_{m+3}^k$$

ve

ii. $m \geq 5$ ve $k = 2, 5, 6$ için

$$\text{per}K^{(k)}(m) = x_{m+4}^k$$

eşitlikleri elde edilir [42].

İspat: i . durumundaki $k=3$ olduğu alt durum göz önüne alınsın. Buna göre $K^{(3)}(m)$ matrisini göz önüne alalım ve $m \geq 4$ için $perK^{(3)}(m) = x_{m+3}^3$ eşitliğinin sağlandığını kabul edelim. Bu durumda, bu denklemin $m+1$ için de doğru olduğu ve sağlandığı gösterilmelidir. $K^{(3)}(m)$ matrisinde birinci satıra göre Laplace açılımı uygulanarak $perK^{(3)}(m)$ genişletilir ise

$$perK^{(3)}(m+1) = 3perK^{(3)}(m) - 3perK^{(3)}(m-2) - perK^{(3)}(m-3)$$

eşitliği elde edilir. Buradan

$$perK^{(3)}(m) = x_{m+3}^3,$$

$$perK^{(3)}(m-2) = x_{m+1}^3$$

ve

$$perK^{(3)}(m-3) = x_m^3$$

olduğundan dolayı $perK^{(3)}(m+1) = x_{m+4}^3$ sonucuna ulaşılır. Böylelikle ispat tamamlanmış olur [42].

Diğer matrisler için de benzer yöntemler kullanılarak ispat yapılabilir.

$$m \times m \text{ boyutlu } L^{(1)}(m) = [l_{i,j}^{(1)}], \quad L^{(2)}(m) = [l_{i,j}^{(2)}], \quad L^{(3)}(m) = [l_{i,j}^{(3)}], \quad L^{(4)}(m) = [l_{i,j}^{(4)}],$$

$$L^{(5)}(m) = [l_{i,j}^{(5)}] \text{ ve } L^{(6)}(m) = [l_{i,j}^{(6)}] \text{ matrisleri sırasıyla}$$

$m \geq 4$ için,

$$l_{i,j}^{(1)} = \begin{cases} 2 & \begin{array}{l} \text{eğer } i = t \text{ ve } j = t \text{ ise } 1 \leq t \leq m-2 \\ \text{ve} \\ i = t \text{ ve } j = t+1 \text{ ise } 1 \leq t \leq m-2, \\ \text{eğer } i = t \text{ ve } j = t \text{ ise } m-1 \leq t \leq m \end{array} \\ 1 & \begin{array}{l} \text{ve} \\ i = t+1 \text{ ve } j = t \text{ ise } 1 \leq t \leq m-3, \end{array} \\ -2 & \text{eğer } i = t \text{ ve } j = t+3 \text{ ise } 1 \leq t \leq m-3, \\ -3 & \text{eğer } i = t \text{ ve } j = t+2 \text{ ise } 1 \leq t \leq m-3, \\ 0 & \text{diğer durumlarda.} \end{cases},$$

$m \geq 5$ için,

$$l_{i,j}^{(2)} = \begin{cases} 2 & \begin{array}{l} \text{eğer } i = t \text{ ve } j = t+1 \text{ ise } 1 \leq t \leq m-2, \\ \text{eğer } i = t \text{ ve } j = t \text{ ise } 1 \leq t \leq m \end{array} \\ 1 & \begin{array}{l} \text{ve} \\ i = t+1 \text{ ve } j = t \text{ ise } 1 \leq t \leq m-4, \end{array} \\ -1 & \text{eğer } i = t \text{ ve } j = t+4 \text{ ise } 1 \leq t \leq m-4, \\ -2 & \text{eğer } i = t \text{ ve } j = t+3 \text{ ise } 1 \leq t \leq m-3, \\ 0 & \text{diğer durumlarda.} \end{cases},$$

$m \geq 4$ için,

$$l_{i,j}^{(3)} = \begin{cases} 3 & \begin{array}{l} \text{eğer } i = t \text{ ve } j = t \text{ ise } 1 \leq t \leq m-2, \\ \text{eğer } i = t \text{ ve } j = t \text{ ise } m-1 \leq t \leq m \end{array} \\ 1 & \begin{array}{l} \text{ve} \\ i = t+1 \text{ ve } j = t \text{ ise } 1 \leq t \leq m-3, \end{array} \\ -1 & \text{eğer } i = t \text{ ve } j = t+3 \text{ ise } 1 \leq t \leq m-3, \\ -3 & \text{eğer } i = t \text{ ve } j = t+2 \text{ ise } 1 \leq t \leq m-2, \\ 0 & \text{diğer durumlarda.} \end{cases},$$

$m \geq 5$ için,

$$l_{i,j}^{(4)} = \begin{cases} 3 & \begin{array}{l} \text{eğer } i = t \text{ ve } j = t \text{ ise } 1 \leq t \leq m-2, \\ \text{eğer } i = t \text{ ve } j = t \text{ ise } m-1 \leq t \leq m, \\ i = t \text{ ve } j = t+1 \text{ ise } 1 \leq t \leq m-2 \end{array} \\ 1 & \begin{array}{l} \text{ve} \\ i = t+1 \text{ ve } j = t \text{ ise } 1 \leq t \leq m-3, \end{array} \\ -2 & \text{eğer } i = t \text{ ve } j = t+3 \text{ ise } 1 \leq t \leq m-3, \\ -5 & \text{eğer } i = t \text{ ve } j = t+2 \text{ ise } 1 \leq t \leq m-2, \\ 0 & \text{diğer durumlarda.} \end{cases},$$

$m \geq 5$ için,

$$l_{i,j}^{(5)} = \begin{cases} 2 & \begin{array}{l} \text{eğer } i = t \text{ ve } j = t \text{ ise } 1 \leq t \leq m-2 \\ \text{ve} \\ i = t \text{ ve } j = t+1 \text{ ise } 1 \leq t \leq m-2, \\ \text{eğer } i = t \text{ ve } j = t \text{ ise } m-1 \leq t \leq m \end{array} \\ 1 & \begin{array}{l} \text{ve} \\ i = t+1 \text{ ve } j = t \text{ ise } 1 \leq t \leq m-3, \\ \text{eğer } i = t \text{ ve } j = t+2 \text{ ise } 1 \leq t \leq m-3 \end{array} \\ -1 & \text{ve} \\ -3 & i = t \text{ ve } j = t+4 \text{ ise } 1 \leq t \leq m-4, \\ & \text{eğer } i = t \text{ ve } j = t+3 \text{ ise } 1 \leq t \leq m-3, \\ 0 & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

ve $m \geq 5$ için,

$$l_{i,j}^{(6)} = \begin{cases} 3 & \begin{array}{l} \text{eğer } i = t \text{ ve } j = t+1 \text{ ise } 1 \leq t \leq m-2, \\ \text{eğer } i = t \text{ ve } j = t \text{ ise } 1 \leq t \leq m \end{array} \\ 1 & \text{ve} \\ & i = t+1 \text{ ve } j = t \text{ ise } 1 \leq t \leq m-4, \\ -2 & \text{eğer } i = t \text{ ve } j = t+4 \text{ ise } 1 \leq t \leq m-4, \\ -3 & \text{eğer } i = t \text{ ve } j = t+3 \text{ ise } 1 \leq t \leq m-3, \\ 0 & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

olarak tanımlanmış olsun.

Teorem 2.1.5.2. i. $m \geq 4$ ve $k = 1, 3, 4$ için

$$perL^{(k)}(m) = x_{m+1}^k,$$

ii. $m \geq 5$ ve $k = 2, 6$ için

$$perL^{(k)}(m) = x_{m+1}^k$$

ve

ii. $m \geq 5$ için

$$perL^{(5)}(m) = x_{m+2}^5$$

eşitlikleri elde edilir [42].

İspat: ii. durumundaki $k = 6$ alt durumu göz önüne alınsın. Buna göre $L^{(6)}(m)$ matrisini göz önüne alalım ve $m \geq 5$ için $perL^{(6)}(m) = x_{m+1}^6$ eşitliğinin sağlandığını kabul edelim. Bu durumda, denklemin $m+1$ için de doğru olduğu ve sağlandığı gösterilmelidir. $L^{(6)}(m)$ matrisinin birinci satırına göre Laplace açılımını uygulayarak $perL^{(6)}(m)$ genişletilir ise

$$perL^{(6)}(m+1) = perL^{(6)}(m) + 3perL^{(6)}(m-1) - 3perL^{(6)}(m-3) - 2perL^{(6)}(m-4)$$

eşitliği elde edilir. Buradan

$$perL^{(6)}(m) = x_{m+1}^6,$$

$$perL^{(6)}(m-1) = x_m^6,$$

$$perL^{(6)}(m-3) = x_{m-2}^6$$

ve

$$perL^{(6)}(m-4) = x_{m-3}^6$$

olduğundan dolayı $perL^{(6)}(m+1) = x_{m+2}^6$ sonucuna ulaşılır. Böylelikle ispat tamamlanmış olur [42].

Diğer matrisler içinde benzer yöntemler kullanılarak ispat yapılabilir.

$m \times m$ boyutlu $N^{(1)}(m) = [n_{i,j}^{(1)}]$, $N^{(2)}(m) = [n_{i,j}^{(2)}]$, $N^{(3)}(m) = [n_{i,j}^{(3)}]$, $N^{(4)}(m) = [n_{i,j}^{(4)}]$,
 $N^{(5)}(m) = [n_{i,j}^{(5)}]$ ve $N^{(6)}(m) = [n_{i,j}^{(6)}]$ matrislerinin sırasıyla

$$\begin{array}{c}
(m-2)\text{-inci} \\
\downarrow \\
N^{(k)}(m) = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 1 & & & & \\ 0 & & L^{(k)}(m-1) & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{bmatrix}, \quad m > 4 \text{ ve } k = 1, 4 \text{ için,}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
(m-3)\text{-inci} \\
\downarrow \\
N^{(k)}(m) = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & & & & & \\ 0 & & L^{(k)}(m-1) & & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & \\ 0 & & & & & \end{bmatrix}, \quad m > 5 \text{ ve } k = 2, 6 \text{ için,}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
(m-3)\text{-inci} \\
\downarrow \\
N^{(3)}(m) = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & & & & & \\ 0 & & L^{(3)}(m-1) & & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & \\ 0 & & & & & \end{bmatrix}, \quad m > 4 \text{ için}
\end{array}$$

ve

$$\begin{array}{c}
(m-2)\text{-inci} \\
\downarrow \\
N^{(5)}(m) = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 1 & & & & \\ 0 & & L^{(5)}(m-1) & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{bmatrix}, \quad m > 5 \text{ için}
\end{array}$$

şeklinde tanımlandığını kabul edelim. Bu matrislerin permanentleri ile dizilerin terimlerinin sonlu toplamaları arasındaki ilişki aşağıdaki teorem ile verilir;

Teorem 2.1.5.3. i. $m > 4$ ve $k = 1, 3, 4$ için

$$\text{per}N^{(k)}(m) = \sum_{i=0}^m x_i^k,$$

ii. $m > 5$ ve $k = 2, 6$ için

$$\text{per}N^{(k)}(m) = \sum_{i=0}^m x_i^k$$

ve

iii. $m > 5$ için

$$\text{per}N^{(5)}(m) = \sum_{i=0}^{m+1} x_i^5$$

eşitlikleri elde edilir [42].

İspat: ii. durumundaki $k = 6$ olduğu alt durumu göz önüne alınsın. $N^{(6)}(m)$ matrisinin birinci satırına göre Laplace açılımını uygulayarak $\text{per}N^{(6)}(m)$ genişletilir ise

$$\text{per}N^{(6)}(m) = \text{per}N^{(6)}(m-1) + \text{per}L^{(6)}(m-1)$$

eşitliği elde edilir. Böylece elde edilen bulgular göz önünde bulundurularak m üzerinden tümevarım yöntemiyle sonuç kolaylıkla görülebilir [43].

Diğer matrisler için de benzer yöntemler kullanılarak ispat yapılabilir.

2.1.6. Diziler İle Bazı Matrislerin Determinantları Arasındaki İlişkiler

Bu bölümde, aşağıdaki gibi tanımlanan R matrisi ile $K^{(k)}(m)$, $L^{(k)}(m)$ ve $N^{(k)}(m)$ matrislerinin Hadamard çarpımları üzerinden tanımlanan belirli matrislerin determinant değerleri ile Fibonacci–Jacobsthal, Padovan–Fibonacci, Pell–Fibonacci, Pell–Jacobsthal, Padovan–Pell ve Padovan–Jacobsthal sayıları arasındaki ilişki ele alınacaktır.

$m \times m$ boyutlu Hadamard matrisi

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $k=1,2,\dots,6$ için $perK^{(k)}(m) = \det(K^{(k)}(m) \circ R)$,
 $perL^{(k)}(m) = \det(L^{(k)}(m) \circ R)$ ve $perN^{(k)}(m) = \det(N^{(k)}(m) \circ R)$ eşitlikleri elde edilir.
 Bu eşitlikler yardımıyla da aşağıdaki sonuçlara ulaşılır:

Sonuç 2.1.6.1. i. $m \geq 4$ ve $k=1,3,4$ için

$$\det(K^{(k)}(m) \circ R) = x_{m+3}^k$$

ve $m \geq 5$ ve $k=2,5,6$ için

$$\det(K^{(k)}(m) \circ R) = x_{m+4}^k.$$

ii. $m \geq 4$ ve $k=1,3,4$ için

$$\det(L^{(k)}(m) \circ R) = x_{m+1}^k,$$

$m \geq 5$ ve $k=2,6$ için

$$\det(L^{(k)}(m) \circ R) = x_{m+1}^k$$

ve $m \geq 5$ için

$$\det(L^{(5)}(m) \circ R) = x_{m+2}^5.$$

iii. $m > 4$ ve $k=1,3,4$ için

$$\det(N^{(k)}(m) \circ R) = \sum_{i=0}^m x_i^k,$$

$m > 5$ ve $k=2,6$ için

$$\det \left(N^{(k)}(m) \circ R \right) = \sum_{i=0}^m x_i^k$$

ve $m > 5$ için

$$\det \left(N^{(5)}(m) \circ R \right) = \sum_{i=0}^{m+1} x_i^5.$$

eşitlikleri elde edilir [42].

İspat: $k = 1, 2, \dots, 6$ için $\text{per}K^{(k)}(m) = \det \left(K^{(k)}(m) \circ R \right)$, $\text{per}L^{(k)}(m) = \det \left(L^{(k)}(m) \circ R \right)$

ve $\text{per}N^{(k)}(m) = \det \left(N^{(k)}(m) \circ R \right)$ olduğundan dolayı Teorem 2.1.5.1, Teorem 2.1.5.2 ve Teorem 2.1.5.3 üzerinden sonuçlar kolaylıkla görülmektedir [42].

2.1.7. Sonlu Toplamlar

Bu bölümde, Fibonacci–Jacobsthal, Padovan–Fibonacci, Pell–Fibonacci, Pell–Jacobsthal, Padovan–Pell ve Padovan–Jacobsthal sayılarının sonlu toplamları üzerinde durulacaktır.

$n \geq 1$ için

$$S_n = \sum_{i=0}^n x_i^k$$

olsun ve sırasıyla 5×5 ve 6×6 boyutlu T_1^k ve T_2^k matrisleri aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$T_1^k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & & & & \\ 0 & & M_k & & \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \end{bmatrix} \quad (k = 1, 3, 4),$$

$$T_2^k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & & & & & \\ 0 & & & & & \\ 0 & & M_k & & & \\ 0 & & & & & \\ 0 & & & & & \end{bmatrix} \quad (k = 2, 5, 6).$$

n üzerinden tümevarım yöntemi kullanılarak T_1^k ve T_2^k matrislerinin n . kuvvetleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$(T_1^k)^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_{n+2} & & & & \\ S_{n+1} & (M_k)^n & & & \\ S_n & & & & \\ S_{n-1} & & & & \end{bmatrix},$$

$$(T_2^k)^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_{n+3} & & & & & \\ S_{n+2} & & & & & \\ S_{n+1} & (M_k)^n & & & & \\ S_n & & & & & \\ S_{n-1} & & & & & \end{bmatrix}.$$

2.2. m Modülüne Göre Fibonacci-Jacobsthal Dizisi

$\{F - J(n)\}$ Fibonacci- Jacobsthal dizisi bir m modülüne göre indirgenirse,

$$\{F - J^m(n)\} = \{F - J^m(0), F - J^m(1), \dots, F - J^m(i), \dots\}$$

şeklinde indirgemeli dizi elde edilir. Burada $F - J^m(i) = F - J^m(i)(mod m)$ dır. Önemle belirtmek gerekir ki buradaki indirgeme bağıntısı (3.1.1)'deki bağıntı ile aynıdır.

Teorem 2.2.1. Her m pozitif tamsayısı için $\{F - J^m(n)\}$ dizisi periyodiktir [44].

İspat: $S = \{(s_0, s_1, s_2, s_3) \mid 0 \leq s_i \leq m-1\}$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $|S| = m^4$ dir.

$\mathbb{Z}_m$ elemanlarının m^4 tane farklı 4-tiplisi mevcut olduğundan, bu 4-tiplilerden en bir tanesi $\{F - J^m(n)\}$ dizisinde iki kez ortaya çıkar. Bundan dolayı bu 4-tipliyi takip eden alt dizi tekrarlanır. Bu tekrardan dolayı $\{F - J^m(n)\}$ dizisinin periyodik bir dizi olduğu görülmektedir.

$\{F - J^m(n)\}$ dizisinin periyodu $h_{F-J}(m)$ ile gösterilir.

Elemanları tamsayılar olan $D = [d_{ij}]$ matrisini göz önüne alalım. D matrisinin her elemanının $\text{mod } m$ ye göre indirgenmesi $D(\text{mod } m)$ şeklinde ifade edilir. Yani

$$D(\text{mod } m) = (d_{ij}(\text{mod } m))$$

dır. $\langle D \rangle_m$ kümesi

$$\langle D \rangle_m = \{D^i(\text{mod } m) \mid i \geq 0\}$$

şeklinde tanımlanmış olsun. Bu küme, $(m, \det D) = 1$ olduğunda bir devirli grup $(m, \det D) \neq 1$ olduğunda ise bir yarı gruptur. $\det M_1 = 2$ olduğundan $\langle M_1 \rangle_m$ kümesi, m tek olduğunda bir devirli grup çift olduğunda ise bir yarı grup olur.

$(M_1)^n$ matrisi göz önünde bulundurularak m 'nin tek olduğu durumda $h_{F-J}(m) = |\langle M_1 \rangle_m|$ olacağı kolaylıkla görülmektedir [43].

Teorem 3.2.2. r bir asal sayı ve $\langle M_1 \rangle_{r^m}$ kümesi de bir devirli grup olsun. Eğer i , $|\langle M_1 \rangle_r| = |\langle M_1 \rangle_{r^i}|$ olacak şekilde en büyük pozitif tamsayı ise bu durumda her $j \geq i$ tamsayısı için $|\langle M_1 \rangle_{r^j}| = r^{j-i} \cdot |\langle M_1 \rangle_r|$ eşitliği yazılır [43].

İspat: t pozitif bir tamsayı olsun. $M_1^{h_{F-J}(r^{t+1})} \equiv I \pmod{r^{t+1}}$ olduğundan $M_1^{h_{F-J}(r^{t+1})} \equiv I \pmod{r^t}$ eşitliğini yazabiliriz. Bu da bize $h_{F-J}(r^t)$ nin $h_{F-J}(r^{t+1})$ yi böldüğünü gösterir. Ayrıca $M_1^{h_{F-J}(r^t)} = I + (m_{ij}^{(t)} \cdot r^t)$ eşitliği üzerinde binom açılımı uygulayarak

$$M_1^{h_{F-J}(r^t) \cdot r} = \left(I + (m_{ij}^{(t)} \cdot r^t) \right)^r = \sum_q \binom{r}{q} (m_{ij}^{(t)} \cdot r^t)^q \equiv I \pmod{r^{t+1}}$$

ifadesini elde ederiz ki bu da bize $h_{F-J}(r^t) \cdot r$ sayısının $h_{F-J}(r^{t+1})$ tarafından bölünebildiğini göstermektedir. Dolayısıyla $h_{F-J}(r^{t+1}) = h_{F-J}(r^t)$ ya da $h_{F-J}(r^{t+1}) = h_{F-J}(r^t) \cdot r$ olmalıdır. Buradaki 2. eşitlik ancak ve ancak r tarafından bölünemeyen bir $m_{ij}^{(t)}$ elemanının varlığı durumunda geçerlidir. $h_{F-J}(r^t) \neq h_{F-J}(r^{t+1})$ olduğundan dolayı r tarafından bölünmeyen bir $m_{ij}^{(t+1)}$ elemanının varlığı söz konusudur. Bu da bize $h_{F-J}(r^{t+1}) \neq h_{F-J}(r^{t+2})$ olduğunu gösterir. i üzerinde tümevarım yöntemi kullanılarak ispat tamamlanacaktır [43].

Teorem 2.2.3. r_i 'ler farklı asal sayılar olmak üzere $\lambda \geq 1$ için $m = \prod_{i=1}^{\lambda} (r_i)^{\alpha_i}$ oluyor ise $h_{F-J}(m) = \text{lcm} \left[h_{F-J}((r_1)^{\alpha_1}), h_{F-J}((r_2)^{\alpha_2}), \dots, h_{F-J}((r_{\lambda})^{\alpha_{\lambda}}) \right]$ dir [43].

İspat: $\left\{ F - J^{(r_i)^{\alpha_i}}(n) \right\}$ dizisinin periyot uzunluğu $h_{F-J}((r_i)^{\alpha_i})$ olduğundan bu dizi sadece $u \cdot h_{F-J}((r_i)^{\alpha_i})$, $(u \in \mathbb{N})$ uzunluğundaki bloklarda tekrar eder. Ayrıca $h_{F-J}(m)$ sayısı $\left\{ F - J^m(n) \right\}$ dizisinin periyot uzunluğu olduğundan, tüm i değerleri için $\left\{ F - J^{(r_i)^{\alpha_i}}(n) \right\}$ dizisi $h_{F-J}(m)$ terimde bir tekrar eder. Böylece tüm i değerleri için

$h_{F-J}(m)$ periyodu $u.h_{F-J}\left((r_i)^{\alpha_i}\right)$ şeklinde olup bu sayı $\left\{F-J^{(r_i)^{\alpha_i}}(n)\right\}$ dizisinin periyodunu vermektedir. Dolayısıyla

$$h_{F-J}(m) = lcm\left[h_{F-J}\left((r_1)^{\alpha_1}\right), h_{F-J}\left((r_2)^{\alpha_2}\right), \dots, h_{F-J}\left((r_i)^{\alpha_i}\right)\right]$$

ifadesi elde edilmektedir [43].

2.3. Sonlu Gruplarda Fibonacci-Jacobsthal Dizisi

Tanım 2.3.1. $(x_0, x_1, \dots, x_{j-1}) \in X$ geren j -lisi için Fibonacci-Jacobsthal orbiti, başlangıç değerleri

$$\begin{cases} FJ(0) = x_1, FJ(1) = x_2, FJ(2) = x_3, FJ(3) = x_4 & j = 4, \\ FJ(0) = x_1, FJ(1) = x_2, FJ(2) = x_3, FJ(3) = e & j = 3, \\ FJ(0) = x_1, FJ(1) = x_2, FJ(2) = e, FJ(3) = e & j = 2. \end{cases}$$

olmak üzere $n \geq 0$ için

$$FJ(n+4) = (FJ(n))^{-2} (FJ(n+1))^{-3} (FJ(n+2))^2 (FJ(n+3))^2$$

şeklindeki indirgeme bağıntısı ile tanımlanır.

$(x_0, x_1, \dots, x_{j-1})$ şeklindeki bir geren j -lisi için Fibonacci-Jacobsthal orbiti $FJ_{(G; x_0, x_1, \dots, x_{j-1})}$ ile gösterilir [44].

Teorem 2.3.1. Sonlu bir G grubunun $FJ_{(G; x_0, x_1, \dots, x_{j-1})}$ Fibonacci-Jacobsthal orbiti periyodiktir [44].

İspat: G grubunun mertebesi n olsun. G nin elemanlarının n^4 tane farklı 4-lüsü mevcut olduğundan bu 4-lülerden en az bir tanesi $FJ_{(G; x_0, x_1, \dots, x_{j-1})}$ dizisinde iki kez ortaya çıkar. Dolayısıyla bu 4-lüyü takip eden alt dizi tekrarlanır. Bu tekrardan dolayı da $FJ_{(G; x_0, x_1, \dots, x_{j-1})}$ Fibonacci-Jacobsthal orbitinin periyodik olduğu söylenebilir.

$FJ_{(G;x_0,x_1,\dots,x_{j-1})}$ Fibonacci-Jacobsthal orbitinin periyodunun uzunluğu $LFJ_{(G;x_0,x_1,\dots,x_{j-1})}$ ile gösterilir [44].

Sonuç 2.3.1. Bazı $F(r,2)$ Fibonacci gruplarındaki Fibonacci-Jacobsthal orbitlerinin periyot uzunlukları aşağıdaki tabloda verilmiştir:

$r = 5$	$LFJ_{(F(r,2);a,b)} = 12$
$r = 7$	$LFJ_{(F(r,2);a,b)} = 24$
$r = 9$	$LFJ_{(F(r,2);a,b)} = 24$
$r = 11$	$LFJ_{(F(r,2);a,b)} = 60$
$r = 13$	$LFJ_{(F(r,2);a,b)} = 24$
$r = 15$	$LFJ_{(F(r,2);a,b)} = 48$

[45].

Örnek 2.3.1. $F(15,2)$ Fibonacci grubunun Fibonacci-Jacobsthal orbitinin periyot uzunluğunu ele alalım. $F(15,2)$ Fibonacci grubundaki bağıntılar kullanarak aşağıdaki dizi elde edilir:

$$\begin{aligned}
FJ(0) &= a, FJ(1) = b, FJ(2) = e, FJ(3) = e, FJ(4) = b^{-5}, FJ(5) = b^{16}, \\
FJ(6) &= b^{-6}, FJ(7) = b^7, FJ(8) = b^{-8}, FJ(9) = b^{12}, FJ(10) = b^{-1}, \\
FJ(11) &= b^4, FJ(12) = b^{14}, FJ(13) = b^{15}, FJ(14) = b^{-8}, FJ(15) = b^{-8}, \\
FJ(16) &= b^7, FJ(17) = b^{-8}, FJ(18) = b^{10}, FJ(19) = b^{-1}, FJ(20) = e, \\
FJ(21) &= b^{12}, FJ(22) = b^7, FJ(23) = b^{12}, FJ(24) = b^2, FJ(25) = b^{11}, \\
FJ(26) &= b^{-4}, FJ(27) = b^{12}, FJ(28) = b^7, FJ(29) = e, FJ(30) = b^{14}, \\
FJ(31) &= b^{11}, FJ(32) = b^8, FJ(33) = b^{-4}, FJ(34) = b^3, FJ(35) = b^8, \\
FJ(36) &= b^{-10}, FJ(37) = b^{-5}, FJ(38) = b^{-4}, FJ(39) = b^{-4}, FJ(40) = b^{-9}, \\
FJ(41) &= b^{-4}, FJ(42) = b^{-6}, FJ(43) = b^{-13}, FJ(44) = b^{-8}, FJ(45) = b^{12}, \\
FJ(46) &= b^3, FJ(47) = b^{-4}, FJ(48) = b^6, FJ(49) = b^{-1}, FJ(50) = b^{-12}, \\
FJ(51) &= b^{-8}, FJ(52) = b^7, FJ(53) = b^8, FJ(54) = b^{-6}, FJ(55) = b^{-1}, \\
FJ(56) &= b^4, FJ(57) = b^8, FJ(58) = b^{11}, FJ(59) = e, FJ(60) = b^{-10}, \\
FJ(61) &= b^{-13}, FJ(62) = b^{-12}, FJ(63) = b^8, FJ(64) = b^{-5}, FJ(65) = b^{12}, \\
FJ(66) &= b^{14}, FJ(67) = b^{-5}, FJ(68) = b^{-8}, FJ(69) = b^{-8}, FJ(70) = b^{11}, \\
FJ(71) &= b^{12}, FJ(72) = b^2, FJ(73) = b^{11}, FJ(74) = b^{-4}.
\end{aligned}$$

$FJ(23) = FJ(71) = b^{12}$, $FJ(24) = FJ(72) = b^2$, $FJ(25) = FJ(73) = b^{11}$ ve
 $FJ(26) = FJ(74) = b^{-4}$ olduğundan $FJ_{(G; x_0, x_1, \dots, x_{j-1})}$ Fibonacci-Jacobsthal orbitinin
 periyot uzunluğu 48'dir [44].

2.3.1 Polyhedral Grupların Fibonacci-Jacobsthal Uzunlukları

Bu bölümde 3-gerenli durumda $(n, 2, 2)$, $(2, 2, n)$ ve $(2, n, 2)$ Polyhedral gruplarının
 Fibonacci-Jacobsthal orbitlerinin periyot uzunlukları üzerinde durulacaktır.

Sonuç 2.3.1.1. Bazı n değerleri için $(n, 2, 2)$ ve $(2, 2, n)$ polyhedral gruplarının
 Fibonacci-Jacobsthal orbitlerinin periyot uzunlukları aşağıdaki tabloda verilmiştir:

$n = 3$	$LFJ_{((3,2,2);y,x,z)} = 6$	$LFJ_{((2,2,3);y,x,z)} = 6$
$n = 4$	$LFJ_{((4,2,2);y,x,z)} = 6$	$LFJ_{((2,2,4);y,x,z)} = 6$
$n = 5$	$LFJ_{((5,2,2);y,x,z)} = 72$	$LFJ_{((2,2,5);y,x,z)} = 72$
$n = 6$	$LFJ_{((6,2,2);y,x,z)} = 6$	$LFJ_{((2,2,6);y,x,z)} = 18$
$n = 7$	$LFJ_{((7,2,2);y,x,z)} = 18$	$LFJ_{((2,2,7);y,x,z)} = 18$
$n = 8$	$LFJ_{((8,2,2);y,x,z)} = 12$	$LFJ_{((2,2,8);y,x,z)} = 12$
$n = 9$	$LFJ_{((9,2,2);y,x,z)} = 18$	$LFJ_{((2,2,9);y,x,z)} = 18$
$n = 10$	$LFJ_{((10,2,2);y,x,z)} = 72$	$LFJ_{((2,2,10);y,x,z)} = 72$

[45].

Varsayım 2.3.1.1. P_i ' ler farklı asal sayılar olmak üzere eğer $n = \prod_{i=1}^t (p_i)^{e_i}, (t > 1)$ olarak yazılabiliyor ise

$$LFJ_{((n,2,2);y,x,z)} = lcm \left[LFJ_{((p_1)^{e_1}, 2, 2);y,x,z}, LFJ_{((p_2)^{e_2}, 2, 2);y,x,z}, \dots, LFJ_{((p_t)^{e_t}, 2, 2);y,x,z} \right]$$

ve

$$LFJ_{((2,2,n);y,x,z)} = lcm \left[LFJ_{((2,2,(p_1)^{e_1});y,x,z}, LFJ_{((2,2,(p_2)^{e_2});y,x,z}, \dots, LFJ_{((2,2,(p_t)^{e_t});y,x,z} \right]$$

dır [45].

Örnek 2.3.1.1. $(5, 2, 2)$ polyhedral grubunun Fibonacci-Jacobsthal orbitinin periyot uzunluğunu ele alalım. Bu gruptaki bağıntılar kullanarak aşağıdaki dizi elde edilir:

$$\begin{aligned}
&FJ(0) = y, FJ(1) = x, FJ(2) = z, FJ(3) = e, FJ(4) = x^2, FJ(5) = zx, \\
&FJ(6) = x^4, FJ(7) = x^2, FJ(8) = zx^2, FJ(9) = x^2, FJ(10) = e, \\
&FJ(11) = z, FJ(12) = x^4, FJ(13) = x^4, FJ(14) = zx, FJ(15) = x, \\
&FJ(16) = x^2, FJ(17) = z, FJ(18) = x, FJ(19) = x^4, FJ(20) = zx^4, \\
&FJ(21) = e, FJ(22) = x, FJ(23) = zx^4, FJ(24) = x^2, FJ(25) = x, \\
&FJ(26) = zx^2, FJ(27) = x, FJ(28) = e, FJ(29) = zx, FJ(30) = x^2, \\
&FJ(31) = x^2, FJ(32) = zx^4, FJ(33) = x^3, FJ(34) = x, FJ(35) = zx, \\
&FJ(36) = x^3, FJ(37) = x^2, FJ(38) = zx^3, FJ(39) = e, FJ(40) = x^3, \\
&FJ(41) = zx^3, FJ(42) = x, FJ(43) = x^3, FJ(44) = zx^2, FJ(45) = x^3, \\
&FJ(46) = e, FJ(47) = zx^4, FJ(48) = x, FJ(49) = x, FJ(50) = zx^3, \\
&FJ(51) = x^4, FJ(52) = x^3, FJ(53) = zx^4, FJ(54) = x^4, FJ(55) = x, \\
&FJ(56) = z, FJ(57) = e, FJ(58) = x^4, FJ(59) = z, FJ(60) = x^3, \\
&FJ(61) = x^4, FJ(62) = zx^2, FJ(63) = x^4, FJ(64) = e, FJ(65) = zx^3, \\
&FJ(66) = x^3, FJ(67) = x^3, FJ(68) = z, FJ(69) = x^2, FJ(70) = x^4, \\
&FJ(71) = zx^3, FJ(72) = x^2, FJ(73) = x^3, FJ(74) = zx, FJ(75) = e, \\
&FJ(76) = x^2, FJ(77) = zx, FJ(78) = x^4, \dots
\end{aligned}$$

$$FJ(3) = FJ(75) = e, FJ(4) = FJ(76) = x^2, FJ(5) = FJ(77) = zx_{ve}$$

$FJ(6) = FJ(78) = x^4$ eşitliklerden anlaşılacağı gibi $FJ_{((5,2,2);y,x,z)}$ Fibonacci-Jacobsthal orbitinin periyot uzunluğu 72'dir.

Sonuç 2.3.1.2. $n \geq 3$ için $(2, n, 2)$ polyhedral grubunun Fibonacci-Jacobsthal orbitinin periyot uzunluğu 3'tür [45].

İspat 2.3.1.2: $(2, n, 2)$ polyhedral grubu

$$\langle x, y, z : x^2 = y^n = z^2 = xyz = e \rangle$$

şeklinde takdim edilmektedir. Buradaki bağıntılar kullanılarak $FJ_{((2,n,2);y,x,z)}$ dizisi

$$y, x, z, e, zy, z, e, zy, z, e, zy, \dots$$

olarak elde edilir ki, bu da bize $LFJ_{((2,n,2);y,x,z)} = 3$ olduğunu gösterir [45].

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

Tanım 2.3.1 den açıkça anlaşılacağı gibi sonlu bir grupta Fibonacci-Jacobsthal orbitinin periyot uzunluğu seçilen geren kümesine, bu küme üzerinden belirlenen başlangıç değerlerine ve dizi elamanlarının birbirleriyle ilişkisi bakımından da grubun farklı takdimlerine göre değişkenlik göstermektedir. Tez çalışmamızda, grup elemanları yardımıyla tanımlanan Fibonacci-Jacobsthal dizileri üzerine kurgulanan konseptin farklı grup aileleri üzerine genişletilmesi suretiyle daha iyi anlaşılması amaçlanmıştır. Bu bölümde, geren sayısı göz önünde bulundurularak iyi bilinen bazı grupların Fibonacci-Jacobsthal orbitleri üzerinde durulacaktır. Bu anlamda, 2-gerenli gruplardan D_n dihedral, Q_{2^n} genelleştirilmiş quaternion ve SD_{2^m} semidihedral gruplarının 3-gerenli gruplardan ise $\langle n, 2, 2 \rangle$, $\langle 2, n, 2 \rangle$ ve $\langle 2, 2, n \rangle$ binary polyhedral gruplarının Fibonacci-Jacobsthal orbitlerinin periyotlarının uzunları belirlenecektir.

3.1. $n \geq 2$ için $2n$ mertebeli,

$$\langle x, y : x^n = y^2 = (xy)^2 = e \rangle$$

şeklinde takdim edilen D_n dihedral grubu ele alalım. Farklı n değerleri ve yukarıdaki takdime göre (x, y) geren çifti için dihedral grubun Fibonacci-Jacobsthal orbitlerinin periyot uzunlukları aşağıdaki gibidir:

n	$LFJ_{(D_n, x, y)}$
2	6
3	6
4	6
5	6
6	6
$\vdots$	$\vdots$

Tablodan da anlaşılacağı gibi her $n \geq 2$ için $LFJ_{(D_n, x, y)} = 6$ dir. Bu sonuca aşağıdaki diziden ulaşılmaktadır:

$$FJ(0)=x, FJ(1)=y, FJ(2)=e, FJ(3)=e, FJ(4)=yx^2, FJ(5)=e, FJ(6)=e, FJ(7)=yx^2, FJ(8)=e, \\ FJ(9)=e, FJ(10)=yx^2, FJ(11)=e, \dots$$

Her $n \geq 2$ için dizinin terimleri arasında

$$FJ(2)=FJ(8)=e, FJ(3)=FJ(9)=e, FJ(4)=FJ(10)=yx^2 \text{ ve } FJ(5)=FJ(11)=e$$

şeklinde bir bağıntı olduğundan D_n dihedral grubun Fibonacci-Jacobsthal orbitinin periyot uzunluğu 6'dır.

3.2. $n \geq 3$ için 2^n mertebeli,

$$Q_{2^n} = \langle x, y : x^{2^{n-1}} = e, y^2 = x^{2^{n-2}}, y^{-1}xy = x^{-1} \rangle$$

şeklinde takdim edilen Q_{2^n} genelleştirilmiş quaternion grubu göz önünde bulunduralım.

Farklı n değerleri ve (x, y) geren çiftine göre Q_{2^n} grubunun Fibonacci-Jacobsthal orbitlerinin periyot uzunlukları aşağıdaki tabloda verilmiştir:

n	$LFJ_{(Q_{2^n}; x, y)}$
2	6
3	6
4	6
5	6
6	6
$\vdots$	$\vdots$

Dolayısıyla her $n \geq 3$ için $LFJ_{(Q_{2^n}; x, y)}$ dizinin periyot uzunluğu 6 olur. Bu sonuca aşağıdaki diziden ulaşılmaktadır:

$$FJ(0)=x, FJ(1)=y, FJ(2)=e, FJ(3)=e, FJ(4)=yx^2, FJ(5)=e, FJ(6)=y^2, FJ(7)=yx^2, FJ(8)=e, \\ FJ(9)=e, FJ(10)=yx^2, FJ(11)=e, \dots$$

Her $n \geq 3$ için Q_{2^n} genelleştirilmiş quaternion grubun Fibonacci-Jacobsthal orbitinin terimleri arasında

$$FJ(2)=FJ(8)=e, FJ(3)=FJ(9)=e, FJ(4)=FJ(10)=yx^2 \text{ ve } FJ(5)=FJ(11)=e$$

şeklinde bir bağıntı olduğundan $LFJ_{(Q_{2^n}:x,y)} = 6$ olarak elde edilmektedir.

3.3. $m \geq 4$ olmak üzere 2^m mertebeli semidihedral grup

$$SD_{2^m} = \langle x, y : x^{2^{m-1}} = y^2 = e, yxy = x^{-1+2^{m-2}} \rangle$$

şeklinde takdim edilmektedir. Farklı m değerleri ve (x, y) geren çiftine göre SD_{2^m} grubunun Fibonacci-Jacobsthal orbitlerinin periyot uzunlukları aşağıdaki gibidir:

m	$LFJ_{(SD_{2^m}:x,y)}$
2	6
3	6
4	6
5	6
6	6
$\vdots$	$\vdots$

Tablodan anlaşılaçağı gibi her $m \geq 4$ için SD_{2^m} semidihedral grubun Fibonacci-Jacobsthal orbitlerinin periyot uzunlukları 6 olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu sonuca genel anlamda aşağıdaki dizi üzerinden ulaşılmaktadır:

$$FJ(0)=x, FJ(1)=y, FJ(2)=e, FJ(3)=e, FJ(4)=yx^2, FJ(5)=e, FJ(6)=e, FJ(7)=yx^2, FJ(8)=e, FJ(9)=e, FJ(10)=yx^2, FJ(11)=e, \dots$$

Bu dizinin terimleri arasında

$$FJ(2)=FJ(8)=e, FJ(3)=FJ(9)=e, FJ(4)=FJ(10)=yx^2 \text{ ve } FJ(5)=FJ(11)=e$$

olacak şekilde bir bağıntı olduğundan her $m \geq 4$ için $LFJ_{(SD_{2^m}:x,y)} = 6$ sonucuna ulaşılır.

3.4. Şimdi (x, y, z) geren 3-üçlüsüne göre $n \geq 3$ için $\langle n, 2, 2 \rangle$, $\langle 2, n, 2 \rangle$ ve $\langle 2, 2, n \rangle$ binary polyhedral gruplarının Fibonacci-Jacobsthal orbitleri üzerinde duralım. $4n$ mertebeli $\langle n, 2, 2 \rangle$, $\langle 2, n, 2 \rangle$ ve $\langle 2, 2, n \rangle$ binary polyhedral grupları sırasıyla

$$\langle n, 2, 2 \rangle = \langle x, y, z : x^n = y^2 = z^2 = xyz \rangle,$$

$$\langle 2, n, 2 \rangle = \langle x, y, z : x^2 = y^n = z^2 = xyz \rangle$$

ve

$$\langle 2, 2, n \rangle = \langle x, y, z : x^2 = y^2 = z^n = xyz \rangle$$

şeklinde takdim edilmektedir.

Farklı n değerleri için $\langle n, 2, 2 \rangle$ binary polyhedral grubunun Fibonacci-Jacobsthal orbitlerinin periyot uzunlukları aşağıdaki gibidir:

n	$LFJ_{(\langle n, 2, 2 \rangle : x, y, z)}$
2	6
3	6
4	6
5	6
6	6
$\vdots$	$\vdots$

Tablodaki periyot değerlerine aşağıdaki dizi üzerinden ulaşılmaktadır:

$$FJ(0)=x, FJ(1)=y, FJ(2)=z, FJ(3)=e, FJ(4)=z, FJ(5)=z, FJ(6)=z^2, FJ(7)=z^{-1}, FJ(8)=z, FJ(9)=e, FJ(10)=z, FJ(11)=z, \dots$$

Buradan

$$FJ(2)=FJ(8)=z, FJ(3)=FJ(9)=e, FJ(4)=FJ(10)=z, FJ(5)=FJ(11)=z$$

eşitlikleri edilir ki, bu da bize her $n \geq 3$ için $LFJ_{((n,2,2):x,y,z)} = 6$ olduğunu gösterir.

$\langle 2, n, 2 \rangle$ binary polyhedral grubunun Fibonacci-Jacobsthal orbitlerinin periyot uzunlarını ele alalım. $FJ_{((2,n,2):x,y,z)}$ dizisi

$$\begin{aligned}
FJ(0) &= x, FJ(1) = y, FJ(2) = z, FJ(3) = e, FJ(4) = y^{-3}, FJ(5) = xy^{-3}, \\
FJ(6) &= y^{-6}, FJ(7) = y^{n-3}, FJ(8) = xy^{-27}, FJ(9) = y^{12}, FJ(10) = y^{45}, \\
FJ(11) &= xy^{81}, FJ(12) = y^{54}, FJ(13) = y^{n-51}, FJ(14) = xy^{177}, FJ(15) = y^{-264}, \\
FJ(16) &= y^{-483}, FJ(17) = xy^{-1419}, FJ(18) = y^{-174}, FJ(19) = y^{n+1629}, \\
FJ(20) &= xy^{525}, FJ(21) = y^{3780}, FJ(22) = y^{3021}, FJ(23) = xy^{17385}, FJ(24) = y^{-5298}, \\
FJ(25) &= y^{n-27219}, FJ(26) = xy^{-41607}, FJ(27) = y^{-38544}, FJ(28) = y^{15165}, \\
FJ(29) &= xy^{-142803}, FJ(30) = y^{145962}, FJ(31) = y^{n+323517}, FJ(32) = xy^{826485}, \\
FJ(33) &= y^{209148}, FJ(34) = y^{-844179}, FJ(35) = xy^{203457}, FJ(36) = y^{-2315802}, \\
FJ(37) &= y^{n-2517363}, FJ(38) = xy^{-11151231}, FJ(39) = y^{1192680}, FJ(40) = y^{14569053}, \\
FJ(41) &= xy^{15337509}, FJ(42) = y^{25560066}, FJ(43) = y^{n+5027613}, FJ(44) = xy^{105650973}, \\
FJ(45) &= y^{-66624972}, FJ(46) = y^{-199452915}, FJ(47) = xy^{-416449575}, FJ(48) = y^{-199030914}, \\
FJ(49) &= y^{n+333546861}, FJ(50) = xy^{-546323511}, FJ(51) = y^{1264186464}, FJ(52) = y^{1925794173}, \\
FJ(53) &= xy^{6500731485}, FJ(54) = y^{59028954}, FJ(55) = y^{n-8187697539}, FJ(56) = xy^{-13608194031}, \\
FJ(57) &= y^{-16552481940}, FJ(58) = y^{-8659929171}, FJ(59) = xy^{-80408411331}, FJ(60) = y^{32337587478}, \\
FJ(61) &= y^{n+123759926349}, FJ(62) = xy^{214466757981}, FJ(63) = y^{150507090264}, FJ(64) = y^{-134940773475}, \\
FJ(65) &= xy^{493119244257}, FJ(66) = y^{-721402817742}, FJ(67) = y^{n-1338997495587}, FJ(68) = xy^{-3897562929351}, \\
FJ(69) &= y^{-513786537948}, FJ(70) = y^{4332225046349}, FJ(71) = xy^{-5547984844629}, FJ(72) = y^{10205809706542}, \dots
\end{aligned}$$

şeklindedir. Bu dizi üzerinden elde edilen bazı $LFJ_{((2,n,2):x,y,z)}$ değerleri aşağıdaki tabloda verilmiştir:

n	$LFJ_{((2,n,2):x,y,z)}$
3	6
4	12
5	72

6	6
7	18
8	24
9	18
10	72
16	48

Örnek 3.4.1 $\langle 2,10,2 \rangle$ binary polyhedral grubunun Fibonacci-Jacobsthal orbiti

$$\begin{aligned}
FJ(0) &= x, FJ(1) = y, FJ(2) = z, FJ(3) = e, FJ(4) = y^{-3}, FJ(5) = xy^{-3}, \\
FJ(6) &= y^{-6}, FJ(7) = y^7, FJ(8) = x^{-1}y^3, FJ(9) = y^{-8}, FJ(10) = y^5, \\
FJ(11) &= z, FJ(12) = y^{-6}, FJ(13) = y^{-1}, FJ(14) = xy^{-3}, FJ(15) = y^{-4}, \\
FJ(16) &= y^{-3}, FJ(17) = z, FJ(18) = y^6, FJ(19) = y^{-1}, FJ(20) = y^5x^{-1}, \\
FJ(21) &= e, FJ(22) = y, FJ(23) = y^5x^{-1}, FJ(24) = y^2, FJ(25) = y^{-9}, \\
FJ(26) &= x^{-1}y^3, FJ(27) = y^{-4}, FJ(28) = y^5, FJ(29) = xy^{-3}, FJ(30) = y^2, \\
FJ(31) &= y^7, FJ(32) = xy^5, FJ(33) = y^8, FJ(34) = y, FJ(35) = xy^{-3}, \\
FJ(36) &= y^{-2}, FJ(37) = y^7, FJ(38) = yx^{-1}, FJ(39) = e, FJ(40) = y^{-7}, \\
FJ(41) &= yx^{-1}, FJ(42) = y^6, FJ(43) = y^3, FJ(44) = x^{-1}y^3, FJ(45) = y^8, \\
FJ(46) &= y^5, FJ(47) = y^5x^{-1}, FJ(48) = y^6, FJ(49) = y^{-9}, FJ(50) = yx^{-1}, \\
FJ(51) &= y^4, FJ(52) = y^{-7}, FJ(53) = y^5x^{-1}, FJ(54) = y^{-6}, FJ(55) = y^{-9}, \\
FJ(56) &= z, FJ(57) = e, FJ(58) = y^9, FJ(59) = z, FJ(60) = y^{-2}, \\
FJ(61) &= y^{-1}, FJ(62) = x^{-1}y^3, FJ(63) = y^4, FJ(64) = y^5, FJ(65) = yx^{-1}, \\
FJ(66) &= y^{-2}, FJ(67) = y^3, FJ(68) = z, FJ(69) = y^{-8}, FJ(70) = y^9, \\
FJ(71) &= yx^{-1}, FJ(72) = y^2, FJ(73) = y^3, FJ(74) = xy^{-3}, FJ(75) = e, \\
FJ(76) &= y^{-3}, FJ(77) = xy^{-3}, FJ(78) = y^{-6}, \dots
\end{aligned}$$

şeklinde olup burada

$$FJ(3) = FJ(75) = e, FJ(4) = FJ(76) = y^{-3}, FJ(5) = FJ(77) = xy^{-3} \text{ ve}$$

$FJ(6) = FJ(78) = y^{-6}$ eşitlikleri sağlandığından $FJ_{((2,10,2);x,y,z)}$ dizisinin periyot uzunluğu 72 olarak elde edilir.

Son olarak farklı n değerleri için $\langle 2, 2, n \rangle$ binary polyhedral grubunun Fibonacci-Jacobsthal orbiti üzerinde duracağız. Bu gruptaki Fibonacci-Jacobsthal orbiti aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
&FJ(0)=x, FJ(1)=y, FJ(2)=z, FJ(3)=e, FJ(4)=x^{-1}z, FJ(5)=z^{-3}, \\
&FJ(6)=z^{n-8}, FJ(7)=x^{-1}z^{-21}, FJ(8)=z^{-7}, FJ(9)=z^{16}, FJ(10)=x^{-1}z^{-19}, \\
&FJ(11)=z^{53}, FJ(12)=z^{n+12}, FJ(13)=x^{-1}z^{263}, FJ(14)=z^{-15}, FJ(15)=z^{-352}, \\
&FJ(16)=x^{-1}z^{-327}, FJ(17)=z^{-659}, FJ(18)=z^{n-232}, FJ(19)=x^{-1}z^{-2813}, \\
&FJ(20)=z^{1513}, FJ(21)=z^{5040}, FJ(22)=x^{-1}z^{9829}, FJ(23)=z^{5541}, FJ(24)=z^{n-7064}, \\
&FJ(25)=x^{-1}z^{16863}, FJ(26)=z^{-30751}, FJ(27)=z^{-51392}, FJ(28)=x^{-1}z^{-161551}, \\
&FJ(29)=z^{-10531}, FJ(30)=z^{n+194616}, FJ(31)=x^{-1}z^{103835}, FJ(32)=z^{420825}, \\
&FJ(33)=z^{278864}, FJ(34)=x^{-1}z^{1892445}, FJ(35)=z^{-704747}, FJ(36)=z^{n-3087736}, \\
&FJ(37)=x^{-1}z^{-4774793}, FJ(38)=z^{-4061231}, FJ(39)=z^{2550240}, FJ(40)=x^{-1}z^{2272677}, \\
&FJ(41)=z^{17284173}, FJ(42)=z^{n+35040088}, FJ(43)=x^{-1}z^{112021679}, FJ(44)=z^{18227657}, \\
&FJ(45)=z^{-103233296}, FJ(46)=x^{-1}z^{12090577}, FJ(47)=z^{-261149563}, FJ(48)=z^{n-249054552}, \\
&FJ(49)=x^{-1}z^{-1214784245}, FJ(50)=z^{285339585}, FJ(51)=z^{1840141952}, FJ(52)=x^{-1}z^{2538069725}, \\
&FJ(53)=z^{2824265149}, FJ(54)=z^{n-442574728}, FJ(55)=x^{-1}z^{10981734471}, FJ(56)=z^{-9357944903}, \\
&FJ(57)=z^{-23036695920}, FJ(58)=x^{-1}z^{-54692696631}, FJ(59)=z^{-17999557131}, FJ(60)=z^{n+51826863304}, \\
&FJ(61)=x^{-1}z^{-33111476125}, FJ(62)=z^{157652398001}, FJ(63)=z^{195823320352}, FJ(64)=x^{-1}z^{777493687189}, \\
&FJ(65)=z^{-81310553299}, FJ(66)=z^{n-1065395863656}, FJ(67)=x^{-1}z^{-1124272506017}, FJ(68)=z^{-1886860067415}, \\
&FJ(69)=z^{-414911437264}, FJ(70)=x^{-1}z^{-7858607242687}, FJ(71)=z^{4830757327717}, \\
&FJ(72)=z^{n+14679969102056}, \dots
\end{aligned}$$

Aşağıdaki tabloda bazı n değerleri için elde edilen $LFJ_{(\langle 2, 2, n \rangle : x, y, z)}$ uzunlukları verilmiştir:

n	$LFJ_{(\langle 2, 2, n \rangle : x, y, z)}$
-----	---

3	18
4	12
5	72
6	18
7	18
8	24
9	18
10	72
16	48

Örnek 3.4.2 $FJ_{((2,2,5):x,y,z)}$ dizisi

$$\begin{aligned}
&FJ(0)=x, FJ(1)=y, FJ(2)=z, FJ(3)=e, FJ(4)=x^{-1}z, FJ(5)=z^{-3}, \\
&FJ(6)=z^{-3}, FJ(7)=x^{-1}z^{-1}, FJ(8)=z^{-7}, FJ(9)=z^6, FJ(10)=x^{-1}z, \\
&FJ(11)=z^3, FJ(12)=z^{-3}, FJ(13)=x^{-1}z^3, FJ(14)=z^5, FJ(15)=z^{-2}, \\
&FJ(16)=x^{-1}z^3, FJ(17)=z, FJ(18)=z^3, FJ(19)=x^{-1}z^3, FJ(20)=z^3, \\
&FJ(21)=e, FJ(22)=x^{-1}z^{-1}, FJ(23)=z, FJ(24)=z, FJ(25)=x^{-1}z^3, \\
&FJ(26)=z^{-1}, FJ(27)=z^{-2}, FJ(28)=x^{-1}z^{-1}, FJ(29)=z^{-1}, FJ(30)=z, \\
&FJ(31)=x, FJ(32)=z^5, FJ(33)=z^4, FJ(34)=x, FJ(35)=z^3, \\
&FJ(36)=z^{-1}, FJ(37)=x^{-1}z^{-3}, FJ(38)=z^{-1}, FJ(39)=e, FJ(40)=x^{-1}z^{-3}, \\
&FJ(41)=z^3, FJ(42)=z^3, FJ(43)=x^{-1}z^{-1}, FJ(44)=z^{-3}, FJ(45)=z^4, \\
&FJ(46)=x^{-1}z^{-3}, FJ(47)=z^{-3}, FJ(48)=z^3, FJ(49)=x, FJ(50)=z^5, \\
&FJ(51)=z^2, FJ(52)=x, FJ(53)=z^{-1}, FJ(54)=z^{-3}, FJ(55)=x^{-1}z, \\
&FJ(56)=z^{-3}, FJ(57)=e, FJ(58)=x^{-1}z^{-1}, FJ(59)=z^{-1}, FJ(60)=z^{-1}, \\
&FJ(61)=x, FJ(62)=z, FJ(63)=z^2, FJ(64)=x^{-1}z^{-1}, FJ(65)=z, \\
&FJ(66)=z^{-1}, FJ(67)=x^{-1}z^3, FJ(68)=z^5, FJ(69)=z^{-4}, FJ(70)=x^{-1}z^3, \\
&FJ(71)=z^{-3}, FJ(72)=z, FJ(73)=x^{-1}z, FJ(74)=z, FJ(75)=e, \\
&FJ(76)=x, FJ(77)=z^{-3}, FJ(78)=z^{-3}, FJ(79)=x^{-1}z^3, FJ(80)=z^3, \\
&FJ(81)=z^{-4}, FJ(82)=x, FJ(83)=z^3, FJ(84)=z^{-3}, FJ(85)=x^{-1}z^{-3}, \\
&FJ(86)=z^5, FJ(87)=z^{-2}, FJ(88)=x^{-1}z^{-3}, FJ(89)=z, FJ(90)=z^3, \\
&FJ(91)=x^{-1}z^3, FJ(92)=z^3, FJ(93)=e, FJ(94)=x^{-1}z^3, FJ(95)=z, \\
&FJ(96)=z, FJ(97)=x^{-1}z^{-3}, FJ(98)=z^{-1}, FJ(99)=z^{-2}, FJ(100)=x^{-1}z^3, \\
&FJ(101)=z^{-1}, FJ(102)=z, FJ(103)=x^{-1}z^{-1}, FJ(104)=z^5, FJ(105)=z^4, \\
&FJ(106)=x^{-1}z^{-1}, FJ(107)=z^3, FJ(108)=z^{-1}, FJ(109)=x^{-1}z, FJ(110)=z^{-1}, \\
&FJ(111)=e, FJ(112)=x^{-1}z^{-3}, FJ(113)=z^3.
\end{aligned}$$

şeklindedir.

Dolayısıyla

$$FJ(39) = FJ(111) = e, \quad FJ(40) = FJ(112) = x^{-1}z^{-3} \text{ ve } FJ(41) = FJ(113) = z^3$$

bu eşitliklerden anlaşılacağı gibi $\langle 2, 2, 5 \rangle$ binary polyhedral grubunun Fibonacci-Jacobsthal orbitinin periyot uzunluğu 72 dir.



4. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bu tezde grup elemanları yardımıyla yeniden tanımlanan Fibonacci–Jacobsthal dizisinin daha iyi anlaşılabilmesi adına geren sayısı göz önünde bulundurularak iyi bilinen bazı grupların Fibonacci-Jacobsthal orbitleri üzerinde durulmuştur. Bu anlamda, 2-gerenli gruplardan D_n dihedral, Q_{2^n} genelleştirilmiş quaternion ve SD_{2^m} semidihedral gruplarının ve 3-gerenli gruplardan ise $\langle n, 2, 2 \rangle$, $\langle 2, n, 2 \rangle$ ve $\langle 2, 2, n \rangle$ binary polyhedral gruplarının Fibonacci-Jacobsthal orbitlerinin periyotlarının uzunları belirlenmiştir.

5. KAYNAKLAR

- [1]. Adams, W. and Shanks, D., (1982). Strong Primality Tests that are not sufficient. *Mathematics of Computation*, 36(159), 255-300.
- [2]. Becker, P.G., (1994). k -Regular Power Series and Mahler-Type Functional Equations. *Journal of Number Theory*, 49(3), 269-286.
- [3]. El Naschie, M.S., (2005). Deriving The Essential Features of Standard Model From The General Theory of Relativity, Chaos, Solitons & Fractals, 24(4), 941-946
- [4]. Fraenkel, A.S., Klein, S.T., (1996). Robutst Universal Complete Codes for Transmission and Compression. *Discrete Applied Mathematics*, 64(1), 31-55.
- [5]. Kirchoff, B.K. and Rutishauser, R., (1990). The Phyllotxy of Costus (Costaceae). *Botanical Gazette*, 151(1), 88-105.
- [6]. Mandelbaum, D., (1972). Synchronization of Codes by means of Kautz's Fibonacci Encoding. *IEEE Transactions on Information Theory*, 18(2), 281-285
- [7]. Spinadel, V.W., (2002). The Metallic Means Family and Forbidden Symmetries. *Int. Math. J.*, 2(3), 279-288.
- [8]. Stein, W., (1993). Modelling The Evolution of Stelar Architecture in Vascular Plants. *International Journal of Plant Sciences*, 154(2), 229-263.
- [9]. Bicknell, M., (1975). A Primer on The Pell Sequences and Related Sequences. *The Fibonacci Quarterly*, 13(4), 345-350
- [10]. Deveci, O., Akdeniz, M. and Karaduman, E., (2015). The Generalized Pell pSequences in Groups. *Ars Combinatoria*, 120, 383-401.
- [11]. Deveci, O. and Akuzum, Y.,(2016). The Recurrence Sequences via The Fibonacci Groups. *AIP Conference Proceedings*, 1726, 020084-1-020084-4; doi: 10.1063/1.4945910.
- [12]. Deveci, O., Karaduman, E. and Campbell, C.M., (2017). The Fibonacci-Circulant Sequences and Their Applications. *Iranian Journal of Science and Technology Transaction A: Science*, 41(4), 1033-1038.
- [13]. Deveci, O. and Shannon, A.G., (2017). On The Adjacency-Type Sequences. *International Journal of Advances in Mathematics*, 2017(2), 10-24.

- [14]. Deveci, O. and Shannon, A.G., (2017). The Pell-Padovan-Circulant Sequences and their Applications. Notes on Number Theory and Discrete Mathematics, 23(3), 100- 114.
- [15]. Falcon, S. and Plaza, A., (2009). k -Fibonacci Sequences Modulo m . Chaos, Solitons & Fractals, 41(1), 497-504.
- [16]. Kilic, E., (2009). The generalized Pell (P_n)-Numbers and Their Binet Formulas, Combinatorial Representations, Sums. Chaos, Solitons & Fractals, 40 (4), 2047-2063.
- [17]. Pinch, R.E.G., (1991). Recurrent Sequences Modulo Prime Powers. In M. Ganley (ed.) Crptography and Coding III, IMA Conference Series (ns.) vol.45, Inst. Math. And Its Appl., Oxford university Press 1993, Proceedings, 3rd IMA, Conference Crptography and Coding, Cirencester.
- [18]. Shannon, A.G., Anderson, P.G. and Horadam, A.F., (2006). Properties of Cordonnieri Perrin and Van der Lann Numbers. International Journal of Mathematical Education in Science and Tecnology, 37(7), 825-831.
- [19]. Shannon, A.G., Horadam, A.F. and Anderson, P.G., (2006). The Auxiliary Equation associated with Plastic Number. Notes on Number Theory and Discrete Mathematics, 12(1), 1-12.
- [20]. Stakhov, A.P. and Rozin, B., (2006). Theory of Binet Formulas for Fibonacci and Lucas p -Numbers. Chaos, Solitons & Fractals, 27, 1162-1177.
- [21]. Tuglu, N., Kocer, E.G. and Stakhov, A.P., (2011). Bivariate Fibonacci like p Polynomials. Applied Mathematics and Computation, 217(24), 10239-10246.
- [22]. Wall, D.D., (1960). Fibonacci Series Modulo m . The American Mathematical Monthly, 67, 525-532.
- [23]. Wilcox, H.J., (1986). Fibonacci Sequences of Period n in Groups. The Fibonacci Quarterly, 24, 356-361.
- [24]. Akuzum Y., Deveci O. and Shannon A.G., (2017). On The Pell p -Circulant Sequences. Notes on Number Theory and Discrete Mathematics, 23(2), 91-103.
- [25]. Aydin, H. and Dikici, R., (1998). General Fibonacci Sequences in Finite Groups. The Fibonacci Quarterly, 36, 216-221.
- [26]. Aydin, H. and Smith, G.C., (1994). Finite p -Quotient of Some Cyclically Presented Groups. Journal of the London Mathematical Society, 49(1), 83-92.

- [27]. Campbell, C.M., Campbell, P.P., Doostie, H. and Robertson, E.F., (2004). The Fibonacci Length for Certain Metacyclic Groups. *Algebra Colloquium*, 11, 215-222.
- [28]. Deveci, O., (2013). The k-Nacci Sequences and The Generalized Order-k Pell Sequences in The Semi-Direct Product of Finite Cyclic Groups. *Chiang Mai Journal of Science*, 40(1), 89-98.
- [29]. Deveci, O., (2016). The Pell-Circulant Sequences and Their Applications. *Maejo International Journal of Science and Technology*, 10(3), 284-293.
- [30]. Deveci, O., Akdeniz, M. and Karaduman, E., (2015). The Generalized Pell pSequences in Groups. *Ars Combinatoria*, 120, 383-401.
- [31]. Deveci, O. and Akuzum, Y. and Campbell, C.M., (2018). The Recurrence Sequences via Polyhedral Groups. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara, Series A1: Mathematics and Statistics*, 67(2), 99-115.
- [32]. Deveci, O. and Karaduman, E., (2016). The Lehmer Sequences in Finite Groups. *Ukrainian Mathematical Journal*, 68(1), 175-182.
- [33]. Deveci, O., Karaduman, E. and Campbell, C.M., (2017). The Fibonacci-Circulant Sequences and Their Applications. *Iranian Journal of Science and Technology Transaction A: Science*, 41(4), 1033-1038.
- [34]. Dikici, R. and Smith, G.C., (1995). Recurrences in Finite Groups. *Turkish Journal of Mathematics*, 19(3), 321-329.
- [35]. Doostie, H. and Hashemi, M., (2006). Fibonacci Lengths Involving The Wall Number $k_n()$. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 20, 171-180.
- [36]. Karaduman, E. and Aydın, H., (2009). k-nacci Sequences in Some Special Groups of Finite Order. *Matematical and Computer Modelling*, 50, 53-58
Karaduman, E. and Aydın, H., (2009). k-nacci Sequences in Some Special Groups of Finite Order. *Matematical and Computer Modelling*, 50, 53-58.
- [37]. Karaduman, E. and Yavuz, U., (2003). On The Period of Fibonacci Sequences in Nilpotent Groups. *Applied Mathematics and Computation*, 142(2-3), 321-332.
- [38]. Knox, S.W., (1992). Fibonacci Sequences in Finite Groups. *The Fibonacci Quarterly*, 30(2), 116-120.
- [39]. Mandelbaum, D., (1972). Synchronization of Codes by means of Kautz's Fibonacci Encoding. *IEEE Transactions on Information Theory*, 18(2), 281-285.

- [40]. Tas, S., Deveci, O. and Karaduman, E., (2014). The Fibonacci-Padovan Sequences in Finite Groups. Maejo International Journal of Science and Technology, 8(03), 279- 287.
- [41]. Tas, S. and Karaduman, E., (2014). The Padovan Sequences in Finite Groups. Chiang Mai Journal of Science, 41(2), 456-462.
- [42]. Deveci, O., The connections between Fibonacci, Pell, Jacobsthal and Padovan numbers. Is submitted.
- [43]. Deveci, O. (2021). On the connections among Fibonacci, Pell, Jacobsthal, and Padovan numbers. Notes on Number Theory and Discrete Mathematics, 27(2), 111- 128.
- [44]. Aküzüm, Y. ve Deveci, Ö. (2019). The Fibonacci-Jacobsthal Sequence modulo m . UMTEB 6. Uluslararası Mesleki ve Teknik Bilimleri Kongresi. 11-12 Nisan, Iğdır, Türkiye.
- [45]. Deveci, Ö. ve Aküzüm, Y. (2019). The Fibonacci-Jacobsthal Sequence in Finite Groups. UMTEB 6. Uluslararası Mesleki ve Teknik Bilimleri Kongresi. 11-12 Nisan, Iğdır, Türkiye.
- [46]. Deveci, Ö. ve Yılmaz, F. (2019). The Fibonacci-Jacobsthal Lengths of the Polyhedral Groups. MAS European International Congress on Mathematics Engineering Natural & Medical Sciences-V. 2-5 May, Erzurum-Turkey.
- [47]. Karakaş, H. İ. (2010). “Cebir Dersleri”, Tüba Yayınları, Ankara, (ikinci baskı).
- [48]. Taşçı, D. (2018). “Soyut Cebir”, Gazi Kitabevi, Ankara. (üçüncü baskı)
- [49]. Dummit, D.S. and Foote, R.M., (2004). Abstract Algebra. 3rd editon (John Wiley & Sons,Inc.).
- [50]. Campbell, P.P., (2003). Fibonacci Length and Efficiency in Group Presentations. Ph. Thesis, University of St Andrews.
- [51]. Coxeter, H. S. M. and Moser, W. O. J., 1972. Generator and Relations for Discrete Groups. 3 rd edition, Springer, Berlin
- [52]. Taşçı, D. (2018). “Soyut Cebir”, Gazi Kitabevi, Ankara. (üçüncü baskı)
- [53]. Ağargün, A. G. ve Özdağ, H. (2008). Lineer Cebir ve Çözümlü Problemleri. Birsan Yayınevi, İstanbul.
- [54]. Taşçı, D. (2005). Lineer Cebir. Gazi Kitabevi, Ankara.

- [55]. Brualdi, R. A. and Gibson, P. M. (1977). Convex Polyhedra of Doubly Stochastic Matrices. I. Applications of the Permanent Function. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 22(2), 194-230.
- [56]. Lancaster, P. and Tismenetsky, M. (1985). *The Theory of Matrices: with Applications*. Elsevier.
- [57]. Lidl, R. and Niederreiter, H. (1994). *Introduction to Finite Fields and their Applications*. Cambridge UP.
- [58]. Chen, W. Y. C. and Louck, J. C. (1996). The Combinatorial Power of the Companion Matrix. *Linear Algebra and its Applications*, 232, 261-278.
- [59]. Everest, G., Poorten, A.V.D., Shparlinski, I. and Ward, T., (2003). *Recurrence Sequences*. American Mathematical Society.
- [60]. Çallıalp, F. (2001). *Örneklerle Soyut Cebir*. Birsen Yayınevi, İstanbul.
- [61]. Kalman, D., (1982). Generalized Fibonacci Numbers by Matrix Methods. *The Fibonacci Quarterly*, 20(1), 73-76.
- [62]. Honsberger, R., 1985, "The matrix Q, mathematical Gems III. Washington DC, Math. Assoc. Amer., 106-107.
- [63]. Sylvester J.R., "Fibonacci Properties by Matrix Methods", *Mathematical Gazette*, 63, 188-191, 1979.
- [64]. Horadam, A.F., "Pell Identities", *The Fibonacci Quart.*, 9 (3), 245-252, 1971.
- [65]. Bicknell, M., "A Primer on The Pell Sequences and Related Sequences", *The Fibonacci Quart.*, 13 (4), 345-350, 1975.
- [66]. Köken, F. and Bozkurt, D., 2008, "On the Jacobsthal numbers by matrix methods", *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, 3(13),605-614.
- [67]. Lien,J., 2005, "Padovan Sequence", *Pers. Comm.*, Mar. 11, 2005, <http://mathworld.wolfram.com/PadovanSequence.html>