

28 HAZİRAN 2022

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ «МИСиС»

ИНСТИТУТ НОВЫХ МАТЕРИАЛОВ И НАНОТЕХНОЛОГИЙ

КАФЕДРА ФИЗИЧЕСКОЙ ХИМИИ

НАПРАВЛЕНИЕ 010700

**ВЫПУСКНАЯ
КВАЛИФИКАЦИОННАЯ
РАБОТА
МАГИСТРА**

MÜSTENİDATTIR
TEK BAŞINA
KULLANILAMAZ
№ 187 10

на тему: ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОМЕРНЫХ АПЕРИОДИЧЕСКИХ СТРУКТУР

Студент Рмаз И.Б. Гахраманов
Руководитель работы Рем Ю.Х. Векилов

Консультанты по разделам:

стандартизация и метрология Эш О.М. Звонкова

Нормоконтроль проведен 09.06.2011 Эш О.М. Звонкова

Рецензент Бублик В.Т. Бублик

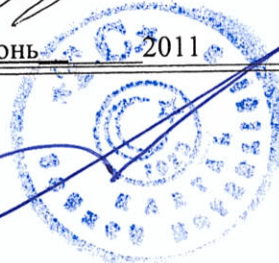
Работа рассмотрена кафедрой и допущена к защите в ГАК

Заведующий кафедрой Астахов М.В. Астахов

Директор института Калошкин С.Д. Калошкин

Москва июнь 2011

bu tercümenin RUSÇA
aslına / fotokopisine uygun olarak
tarafından yapıldığını onaylanm.
Rusça Yem. Tercüman
Gökten



Аннотация

В настоящей работе исследуются спектральные свойства одномерных апериодических решеток и их математическая классификация. Для исследования одномерных апериодических структур использованы метод трансфер-матриц и техника след-отображения. Найдены инварианты одномерных апериодических решеток, которые не зависят от длины решеток и содержат в себе информацию о спектре решетки. Также сделаны шаги на пути классификации одномерных апериодических структур на основе инвариантов. Как явные примеры рассмотрены решетки Фибоначчи, Тью-Морса, Серебряное Сечение, Медное Сечение и др. Для большинства решеток показаны новые методы расчета известных формул для следа общей трансфер-матрицы. Некоторые решетки, например, решетка Серебряное Сечение изучена более подробно и получены новые результаты для нее.

Содержание

Введение	3
1 Аналитический обзор литературы	4
1.1 Введение	4
1.2 Одномерные апериодические решетки	6
1.2.1 Решетка Фибоначчи	6
1.2.2 Решетка Тью-Морса	7
1.2.3 Решетка Серебряное Сечение	7
1.2.4 Решетка Бронзовое Сечение	8
1.2.5 Решетка Медное Сечение	8
1.2.6 Решетка Никелевое Сечение	9
1.2.7 Решетка Кантора	9
1.2.8 Решетка Двупериодическая	9
2 Методика	10
2.1 Приближение сильной связи	10
2.2 Метод трансфер-матриц. Техника след-отображения	11
2.3 Формулы для вычисления физических величин	14
3 Апериодические последовательности	17
3.1 Решетка Фибоначчи	17
3.2 Решетка Серебряное Сечение	21
3.3 Решетка Тью-Морса	23
3.4 Решетка Медное Сечение	25
3.4.1 Двупериодическая решетка	26
3.5 На пути классификации	27
Результаты	28
Выводы	29
Благодарности	30

Введение

В данной работе мы исследуем одномерные аперiodические структуры. Большой интерес к этим структурам возник после открытия квазикристаллов, которые являются подклассом аперiodических структур.

После экспериментального открытия квазикристаллов [1], они стали одной из перспективных и интересных направлений физики конденсированного состояния [2]–[3]. Хотя, экспериментальную физику в основном интересует трехмерные квазикристаллы, с точки зрения теоретической физики и математики одномерные квазикристаллы достойны большего внимания [4], [5]. Во-первых, потому что, если трехмерные квазикристаллы исчерпываются только икосэдрическими симметриями, а все двумерные квазикристаллы известны, то одномерные квазикристаллы (а аперiodические решетки тем более) намного богаче. На данный момент мы даже не знаем всех одномерных квазикристаллов и классификация этих структур одна из самых сложных задач математики. Во-вторых, одномерные квазикристаллы отличаются необычными физическими свойствами, в частности, канторовой природой спектров, самоподобием, критическими волновыми функциями и т.д.

С другой стороны изучение одномерных моделей помогает понять физику более высоких размерностей, где точные вычисления сложны и зачастую невозможны. Кроме того многие трехмерные задачи можно привести к одномерной, где мы уже знаем точное решение (примерно таким образом доказывается эффект Кондо).

1 Аналитический обзор литературы

1.1 Введение

Большой интерес к аperiodическим структурам возник после открытия квазикристаллов, которые являются хорошими примерами аperiodических структур.

Первый квазикристалл был обнаружен Шехтманом и др. в 1982 г. (хотя официальной датой считается дата публикации [1]) при быстром охлаждении расплава $Al_{0.86}Mn_{0.14}$. Это открытие стимулировало большой интерес к квазикристаллом среди физиков и математиков. Экспериментаторы стали находить все больше новых соединений с квазипериодической структурой, также выяснилось, что некоторые найденные ранее структуры являются квазикристаллами. Квазикристаллы занимают промежуточное положение между кристаллами и аморфными веществами. В отличие от аморфных тел, рентгенограмма квазикристалла содержит характерные для кристалла четкие брэгговские пики, но обладает осью симметрии 5-го порядка, в отличие от кристаллов (эта симметрия несовместимо с трансляционной инвариантностью кристалла, в которой могут присутствовать только элементы 2-го, 3-го, 4-го и 6-го порядков).

Обнаружение новых принципов упаковки атомов в твердых телах привело к пересмотру уже устоявшихся теорий. Первую теоретическую модель квазикристалла предложили Левин и Стейнгардт. Они предложили строить модель квазикристалла, исходя не из одной элементарной ячейки, а из двух элементарных ячеек с иррациональным отношением их количеств. Это обобщение на трехмерный случай двумерных аperiodических пятиугольных мозаик Пенроуза, которые так же имеют поворотную симметрию 5-го порядка [6]. Такое построение, приводит к структуре, у которой периодичность в расположении атомов отсутствует, но имеется ряд свойств, характерных для кристалла, а именно существует дальний ориентационный порядок, атомы расположены на кристаллических плоскостях, существуют брэгговские пики (в виде δ -функции), соответствующие отражению от этих плоскостей.

В то же время Калугин, Китаев и Левитов построили другую модель квазикристалла. Они предложили рассмотреть кубический кристалл в 6-мерном пространстве. Потом из этого кристалла вырезается так называемая труба – слой атомов

с размером порядка межатомного, заключенный между трехмерными гиперплоскостями, которая затем проектируется на физическое пространство. Такое построение позволяет получить континуальную теорию квазикристалла, описать дислокации и выяснить характер низкочастотных коллективных мод: помимо обычных фононов, возникающих за счет трех степеней свободы движения атомов вдоль трубы, в квазикристалле есть три фазона, связанных с поперечным движением трубы в 6-мерном пространстве. Эти фазонные моды, несмотря на малую энергию, содержат перемещения отдельных атомов на большие расстояния и в отличие от фононов имеют диффузионный характер (более подробно см. в [3]).

Отметим также, что квазипериодические структуры изучались в математике и физике и до экспериментального открытия квазикристаллов. Например в математике было известно о существовании аперiodических функций, фурье-преобразование которых содержит резкие пики [3].

В данной работе мы будем рассматривать более общий класс структур без периодического порядка.

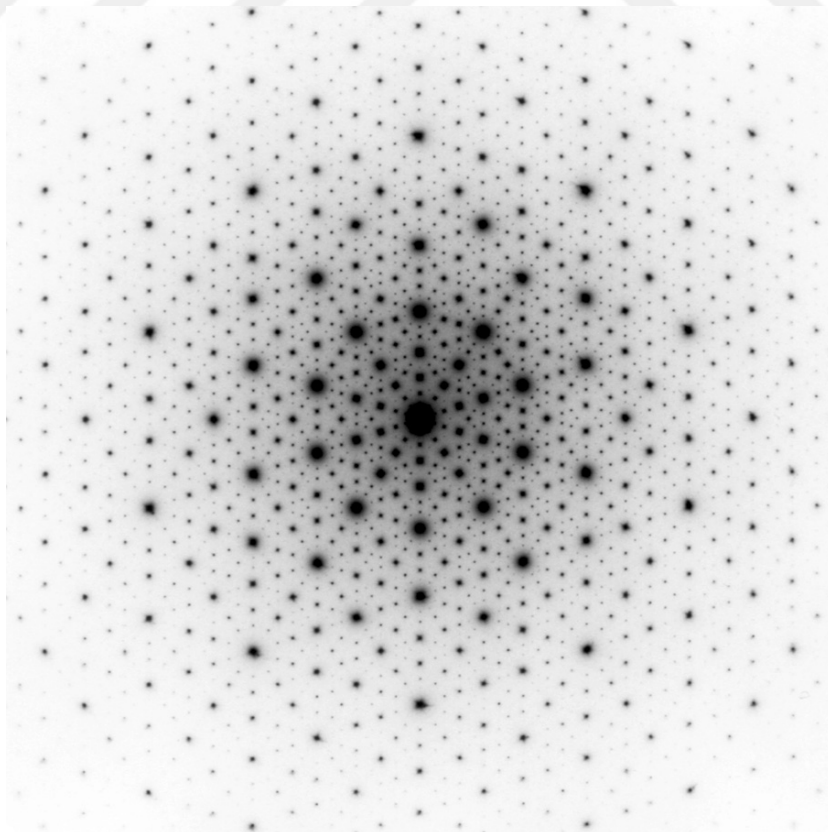


Рис. 1: Дифракционная картина квазикристалла $AlMnPd$, (позаимствована из [7])

1.2 Одномерные апериодические решетки

1.2.1 Решетка Фибоначчи

Конструкцию решетки Фибоначчи можно реализовать с помощью двух блоков A и B таким образом, что n -я ступень S_n получается по правилу $S_n = S_{n-1}S_{n-2}$ для $n \geq 2$, начиная с $S_0 = B$ и $S_1 = A$, [2], [8], [9], [10]:

$$S_2 = AB,$$

$$S_3 = ABA$$

$$S_4 = ABAAB$$

$$S_5 = ABAABABA$$

...

Данная решетка инвариантна относительно преобразований $A \rightarrow AB$ и $B \rightarrow A$. Можно рассмотреть отношение пары ближайших чисел Фибоначчи при $n \rightarrow \infty$

$$\lim \frac{S_{n+1}}{S_n} = \lim \frac{S_n + S_{n-1}}{S_n} \quad (1)$$

Вводя новую переменную $x = \lim \frac{S_{n+1}}{S_n}$, получаем

$$x^2 - x - 1 = 0, \quad (2)$$

положительное решение которого равно так называемому золотому сечению $\tau = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Отметим, что данное значение является числом Пизо–Виджаярагхавана для решетки Фибоначчи [11]. Выписывая последовательность отношений до $n = 1$, легко получить равенство

$$S_n \approx \tau^n, n \rightarrow \infty, \quad (3)$$

которая определяет фрактальную размерность решетки Фибоначчи [3], [12].

1.2.2 Решетка Тью-Морса

Решетка Тью-Морса одна из самых хорошо изученных квазипериодических структур. Конструкцию решетки Тью-Морса можно реализовать с помощью преобразований: $A \rightarrow AB$ и $B \rightarrow BA$ начиная с $S_0 = A$. Соответственно:

$$S_1 = AB,$$

$$S_2 = ABBA$$

$$S_3 = ABBAABAAB$$

$$S_4 = ABBAABAABBAABAABBA$$

...

Решетка Тью-Морса много исследовалась, например, в на основе техники следотображения был исследован спектр данной решетки.

1.2.3 Решетка Серебряное Сечение

В теории чисел числа Пелла задаются с помощью рекуррентной формулы

$$P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}, \quad (4)$$

где $P_1 = 1$ и $P_2 = 1$.

Вводя новую переменную $x = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{P_{n-1}}$, получим полином вида

$$x^2 - 2x - 1 = 0, \quad (5)$$

положительное решение которого равна так называемому серебряному сечению $x = 1 + \sqrt{2}$

По аналогии с этой конструкцией можно построить решетку Серебряное Сечение с помощью двух блоков A и B таким образом, что n -я ступень S_n получается по правилу $S_n = S_{n-1}^2 S_{n-2}$ для $n \geq 2$, начиная с $S_0 = B$ и $S_1 = A$:

$$S_2 = AAB,$$

$$S_3 = AABAABA$$

$$S_4 = AABAABAABAABAABA$$

...

Во многих работах данная решетка называется Серебряное Сечение, например в [2], [9], [13], [14], но и встречаются другие названия, например, решетка октоначки [15], [16], [17], или срастающая пропорция [18], [19], [20]. Но надо отметить, что так как данная решетка строится по аналогии чисел Пелла, то было бы логично назвать ее решеткой Пелла.

1.2.4 Решетка Бронзовое Сечение

Конструкцию решетки Бронзовое сечение можно реализовать с помощью преобразований: $A \rightarrow AAAB$ и $B \rightarrow A$ начиная с $S_0 = B$, $S_1 = A$:

$$S_2 = AAAB,$$

$$S_3 = AAABAABAABA$$

$$S_4 = AAABAABAABAABAABAABAABAABAABAABAABAABAABAABAABA$$

.....

Число Пизо–Виджаярагхавана для данной решетки равна $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$

1.2.5 Решетка Медное Сечение

Конструкцию решетки Медное Сечение можно реализовать с помощью двух блоков A и B таким образом, что n -я ступень S_n получается по правилу $S_n = S_{n-1}S_{n-2}^2$ для $n \geq 2$, начиная с $S_0 = B$ и $S_1 = A$:

$$S_2 = AB,$$

$$S_3 = ABB$$

$$S_4 = ABBA$$

$$S_5 = ABBAABB$$

...

Данная решетка инвариантна относительно преобразований $A \rightarrow ABB$ и $B \rightarrow A$.

1.2.6 Решетка Никелевое Сечение

Конструкцию решетки Никелевое Сечение можно реализовать с помощью преобразований: $A \rightarrow ABBB$ и $B \rightarrow A$ начиная с $S_0 = B$, $S_1 = A$:

$$S_2 = ABBB,$$

$$S_3 = ABBBAAA$$

$$S_4 = ABBBAAAABBBABBBABBB$$

.....

1.2.7 Решетка Кантора

Конструкцию решетки Кантора можно реализовать с помощью преобразований: $A \rightarrow ABA$ и $B \rightarrow BBB$ начиная с $S_0 = A$:

$$S_1 = ABA,$$

$$S_2 = ABABBBABA,$$

$$S_3 = ABABBBABABBBBBBBBBBABA$$

.....

Данная конструкция построена по аналогии с построением множества Кантора.

1.2.8 Решетка Двупериодическая

Конструкцию решетки Никелевое Сечение можно реализовать с помощью преобразований: $A \rightarrow AB$ и $B \rightarrow AA$ начиная с $S_0 = A$, $S_1 = AB$:

$$S_2 = ABAA,$$

$$S_3 = ABAAABAB$$

$$S_4 = ABAAABABABAAABAA$$

.....

2 Методика

2.1 Приближение сильной связи

Рассмотрим квантовую задачу, где электрон движется по одномерной эквидистантной решетке. Гамильтониан такой системы имеет вид

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{d^2}{dx^2} + U(x), \quad (6)$$

где $U(x)$ —потенциал решетки, m_e —масса электрона, \hbar —постоянная Планка.

Применим приближение сильной связи для решения уравнения Шредингера. Это означает, что в каждый момент времени электрон взаимодействует лишь с одним узлом, а взаимодействием с остальными узлами можно пренебречь. В этом случае волновую функцию электрона можно представить как линейную комбинацию собственных функций отдельных узлов:

$$\Psi(x) = \sum C_n \Psi_0(x - nd), \quad (7)$$

где суммирование проводится по всем узлам решетки, d —расстояние между узлами, $\psi_0(x - nd)$ —собственная функция n -го узла, C_n —коэффициенты.

Подставляя это выражение в уравнение Шредингера и предполагая, что перекрытием волновых функций соседних узлов решетки можно пренебречь, т.е.

$$\int \Psi_0^*(x - nd) \Psi_0(x - md) dx = \delta_{nm} \quad (8)$$

получим

$$\sum_{k \neq n} t_{nk} C_k + U(n) C_n = E C_n, \quad (9)$$

где

$$U(n) = \int \Psi_0^*(x - nd) H \Psi_0(x - nd) dx, \quad (10)$$

$$t_{nk} = \int \Psi_0^*(x - nd) H \Psi_0(x - kd) dx, \quad (11)$$

где t_{nk} —интегралы перескока, E —собственное значение Гамильтониана.

Далее мы везде заменим C_i на ψ_i из соображений, что нахождение C_i эквивалентно нахождению волновых функций. Дискретное уравнение Шредингера (9)

множественно изучалась с самого момента ее возникновения, например, в теории солитонов, в вычислительной математике и во многих областях физики.

Отметим, что в случае периодического потенциала волновая функция является функцией Блоха [21]:

$$\Psi(x) = e^{ikx} u_k(x), \quad (12)$$

т.е. каждую собственную функцию можно представить как произведение плоской волны и некоторой периодической функции. А спектр будет иметь зонную структуру, т.е. распадается на бесконечное число отрезков, разделенных запрещенными зонами. Число запрещенных зон бесконечно, и в одномерном случае они асимптотически расположены около точек E_n , где $\pm\sqrt{E_n} = \frac{n}{2T}$, T – период потенциала [22]. Если же периодичность в расположении узлов нарушена, мы приходим к известной модели Андерсона [23], которая гласит, что в одномерной системе все электронные волновые функции локализованы, причем даже при наличии пренебрежимо малого беспорядка (про андерсоновскую локализацию см. обзорные статьи [24]). В одномерном квазикристалле волновые функции ведут себя критически и энергетический спектр содержит энергетические щели [25], [3], [26]. Отметим, что согласно классификации волновые функции являются делокализованными, если $\int_{|r|<R} |\psi(r)|^2 dr \sim R^d$, где d – размерность пространства, локализованными, если существует нормировка $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(r)|^2 dr$, волновые функции не являющиеся ни локализованными, ни делокализованными, считаются критическими [3], [26], [27], [28]. Заметим, что волновая функция степенной зависимости $\psi(r) \sim |r|^{-\alpha}$, согласно этому определению, является локализованной в случае $\alpha > d/2$.

2.2 Метод трансфер-матриц. Техника след-отображения

Рассмотрим дискретное уравнение Шредингера:

$$\sum_j t_{ij} \psi_j = E \psi_i, \quad (13)$$

где интегралы переноса положены не равной нулю константе $t_{ij} = 1$ только для ближайших соседей – узлов, а $t_{ii} = V_i$.

Тогда получим уравнение Шредингера следующего вида

$$\psi_{n+1} + \psi_{n-1} + (V_n - E)\psi_n = 0 \quad (14)$$

Запишем эти уравнения с помощью трансфер-матриц:

$$\begin{pmatrix} \psi_{n+1} \\ \psi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E - V_n & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_n \\ \psi_{n-1} \end{pmatrix}, \quad (15)$$

где

$$M(n) = \begin{pmatrix} E - V_n & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (16)$$

— трансфер-матрица.

С помощью последовательного применения трансфер-матриц можно получить волновую функцию на любом узле

$$\begin{pmatrix} \psi_{n+1} \\ \psi_n \end{pmatrix} = M(n)M(n-1)\dots M(2)M(1) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_0 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Данная техника записи дискретного уравнения Шредингера обычно приписывается Комото, Каданову и Тангу [10]. Но ради справедливости надо отметить, что такая формулировка встречается в более ранних работах, например, в статье Шмидта [29].

Предположим, что все трансфер-матрицы одинаковы и равны:

$$M = M(n) = \begin{pmatrix} E - E_0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Если $|E - E_0| < 2$, то положим

$$\cos \alpha = E - E_0/2, \quad (19)$$

если $|E - E_0| > 2$, положим

$$\cosh \alpha = E - E_0/2. \quad (20)$$

В первом случае матрицу M можно записать как (данная конструкция, придуманная Латтинджером [30] позаимствована из [31])

$$M = \cos \alpha \cdot I + i \sin \alpha \cdot \sigma, \quad (21)$$

где I — единичная матрица, а

$$\sigma = \frac{1}{i \sin \alpha} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -1 \\ 1 & -\cos \alpha \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Так как $\sigma^2 = I$, то

$$M = e^{i\alpha\sigma}. \quad (23)$$

В случае $|E - E_0| > 2$, заменяя α на $i\alpha$, получим

$$M = e^{-\alpha\sigma}. \quad (24)$$

Если $|E - E_0| < 2$, то компоненты волновой функции будут периодически модулированы, т.е. состояния с такими энергиями оказываются делокализованы, если $|E - E_0| > 2$, то компоненты возрастают или убывают по экспоненциальному закону, т.е. состояния оказываются экспоненциально локализованы [31]. Энергии, для которых выполнено неравенство $|E - E_0| < 2$, соответствуют разрешенным состояниям, а энергии, для которых $|E - E_0| > 2$, отвечают запрещенным зонам. Эти неравенства имеют математические предпосылки [32]. Если A - матрица сохраняющая площадь линейного отображения плоскости на себя, т.е. ($\det A = 1$), тогда отображение A устойчиво, если $|\text{Tr}[A]| < 2$, и неустойчиво, если $|\text{Tr}[A]| > 2$.

Для локализованных состояний имеем:

$$\text{Tr}[T] = chN\lambda. \quad (25)$$

Отсюда в пределе больших N найдем

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{N} \ln[\text{Tr}[T]]. \quad (26)$$

Выберем E так, чтобы

$$|E - E_n^0| < 2 \quad (27)$$

для всех n . Тогда матрицу можно выразить в виде

$$M_n = e^{i\alpha_n\sigma_n}, \quad (28)$$

где

$$\cos\alpha_n = \frac{E - E_n^0}{2}, \quad (29)$$

$$\sigma_n = \frac{1}{i \sin \alpha_n} \begin{pmatrix} \cos \alpha_n & -1 \\ 1 & -\cos \alpha_n \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Введем новые переменные :

$$sh \beta_n = \frac{\cos \alpha_n}{\sin \alpha_n}, \quad (31)$$

$$ch \beta_n = \frac{1}{\sin \alpha_n} \quad (32)$$

и перепишем матрицы в новых переменных

$$\sigma_n = i \begin{pmatrix} -sh \beta_n & ch \beta_n \\ -ch \beta_n & sh \beta_n \end{pmatrix}. \quad (33)$$

Матрицу σ_n можно выразить через матрицы Паули :

$$\sigma_n = e^{\frac{\beta_n}{2} \sigma_x} \sigma_y e^{-\frac{\beta_n}{2} \sigma_x} \quad (34)$$

где

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (35)$$

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \quad (36)$$

Имея в виду данный результат можно переписать выражение (28) в виде:

$$M_n = e^{\frac{\beta_n}{2} \sigma_x} e^{-i \alpha_n \sigma_y} e^{-\frac{\beta_n}{2} \sigma_x}. \quad (37)$$

2.3 Формулы для вычисления физических величин

Одномерные квазикристаллы хорошие объекты для изучения локализации электрона в одномерных системах (например, см. [10]).

Квазипериодические структуры описываются с помощью дискретного уравнения Шредингера, который в общем виде записывается следующим образом

$$\sum t_{ik} \psi_k = E \psi, \quad (38)$$

где t_{ik} —интегралы переноса между соседними узлами, t_{ii} —энергия i -того узла.

Для вычисления коэффициента трансмиссии используют два метода: метод трансфер-матриц и оптический метод (этот метод подробно описан, например, в [33]).

С помощью трансфер-матриц коэффициент трансмиссии выражается через следующую формулу:

$$T = \frac{1}{|M_{2,2}|^2}, \quad (39)$$

где $M_{2,2}$ — матричный элемент общей трансфер-матрицы.

Также можно определить коэффициент отражения $R = 1 - T = |M_{2,1}/M_{2,2}|^2$. Отметим, что с помощью данного метода в [34] были вычислены соответствующие величины для решетки Фибоначчи.

Зная коэффициент трансмиссии с помощью формулы Ландауера можно найти безразмерную величину проводимости g (и соответственно можно вычислить сопротивление $\rho = 1/g$) системы:

$$g = \left[\frac{G}{2e^2/h} \right] \left[\frac{T}{1-T} \right], \quad (40)$$

где T является коэффициентом трансмиссии.

Запишем гамильтониан для дискретного уравнения Шредингера:

$$H = \sum \epsilon_i |i\rangle \langle i| + \sum t_{ij} |i\rangle \langle j|, \quad (41)$$

где t_{ij} —интегралы переноса между соседними узлами, ϵ_i —энергия i -того узла.

Уравнение движения для функции Грина данного гамильтониана выглядит следующим образом:

$$(E - \epsilon_i)G_{ij} = \delta_{ij} + \sum t_{ik}G_{kj}, \quad (42)$$

где G_{ij} —функция Грина, δ_{ij} —символ Кронекера.

С помощью функции Грина можно посчитать многие физические величины. Например, плотность уровней энергии выражается через функцию Грина следующим образом [35]:

$$D(E) = \frac{1}{\pi} \text{Im} \frac{\partial}{\partial E} \ln G_{1,N}(E), \quad (43)$$

где N —длина решетки.

Плотность уровней энергии можно посчитать и с помощью метода трансфер-матриц [9]:

$$D(E)dE = \frac{1}{n} d \left[\cos^{-1} \left(\frac{1}{2} \text{Tr} [M_n] \right) \right], \quad (44)$$

где M_N —общая трансфер матрица.

Отметим, что экспериментаторы обычно находят именно зависимость плотности уровней энергии от энергии электрона. По этой причине нахождение плотности уровней энергии помогает сравнить теоретические результаты с экспериментальными.



3 Аперидические последовательности

3.1 Решетка Фибоначчи

Для решетки Фибоначчи общая трансфер-матрица M_n удовлетворяет соотношению (это легко показать, мы находим матрицу A и B из M_0 и M_1 , записываем M_2 через эти матрицы и далее доказываем по индукции для M_n):

$$M_{n+1} = M_{n-1}M_n \quad (45)$$

Используя теорему Кэли-Гамильтона (см. Приложение А.), выражение (45) можно переписать в следующем виде

$$M_{i+1} = (E \text{Tr}(M_{i-1}) - M_{i-1}^{-1})M_i = M_i \text{Tr}(M_{i-1}) - M_{i-1}^{-1}M_i, \quad (46)$$

где E единичная матрица 2×2 (далее мы не будем писать единичную матрицу, при выводе формул).

Если взять след от этого выражения, то получим

$$\text{Tr}(M_{i+1}) = \text{Tr}(M_{i-1})\text{Tr}(M_i) - \text{Tr}(M_{i-1}^{-1}M_i). \quad (47)$$

Так как $M_i = M_{i-2}M_{i-1}$, получаем, что

$$M_{i-2} = M_i M_{i-1}^{-1}, \quad (48)$$

и соответственно для следа M_{i-2}

$$\text{Tr}(M_{i-2}) = \text{Tr}(M_i M_{i-1}^{-1}) = \text{Tr}(M_{i-1}^{-1}M_i). \quad (49)$$

Используя последнее выражение в (47), получаем рекуррентное соотношение для следа матрицы M_n [10]:

$$\boxed{\text{Tr}(M_{i+1}) = \text{Tr}(M_i)\text{Tr}(M_{i-1}) - \text{Tr}(M_{i-2})}. \quad (50)$$

Данная рекуррентная формула очень удобна для расчетов. Например, с ее помощью можно найти запрещенные зоны для решетки Фибоначчи [10] (см. Рис. 2) или можно вычислить отклик, который определяет характер спадания волновой функции ψ_{i+n} при удалении $n \rightarrow \infty$ от исходного узла i [12]:

$$R_i^n \equiv \frac{|\psi_{i+n}|}{|\psi_i|} = \text{Tr}(M_n), \quad (51)$$

где R_i^n -отклик, ψ_i, ψ_{i+n} -волновые функции на узлах i и $i + n$, соответственно.

Отметим, что в случае $n = 1$, R_i называется переменными Риккати [36] и удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$R_i = V_n - E - \frac{1}{R_{i-1}}. \quad (52)$$

С помощью переменных Риккати можно определить экспоненту Ляпунова:

$$\Omega(E) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq N} \ln R_i \right) = \langle \ln R_i \rangle. \quad (53)$$

Нас больше всего интересуют инварианты–величины которые не зависят от длины решетки. Мы можем ввести след-отображение используя формулу (50):

$$T : R^3 \rightarrow R^3 \quad (54)$$

$$T(x, y, z) = (2xy - z, x, y), \quad (55)$$

Данное отображение имеет известный инвариант (интеграл движения) [10], [25]:

$$\boxed{I = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz - 1}, \quad (56)$$

где $x = \frac{1}{2}Tr(M_{i-1}), y = \frac{1}{2}Tr(M_i), z = \frac{1}{2}Tr(M_{i+1})$.

Отметим, что данный инвариант также является инвариантом Фрика. Впервые он был найден и изучен для решетки Фибоначчи в [10]. Далее Бааке и др. показали что он связан с автоморфизмом след-отображения.

Вернемся к обсуждению чисел Пизо–Виджаярагхавана. Эти числа имеют большое значение, так как существует гипотеза, что каждой одномерной квазипериодической структуре соответствует только одно число Пизо–Виджаярагхавана [4], [5]. Мы можем написать характеристическое уравнение используя формулу (45) и обозначение $x^n = M_n$ для каждого n , а также заменив произведение на сумму [11]. В случае, если мы будем иметь обратную матрицу M_n , то в этом случае она будет входить в характеристическое уравнение со знаком минус и со степенью n . Далее мы будем пользоваться именно этой конструкцией для нахождения чисел Пизо–Виджаярагхавана.

Отметим также, что матрица

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (57)$$

имеет такое же характеристическое уравнение, что и решетка Фибоначчи, с собственными значениями Перрона-Фробениуса $x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. На n -ом шаге решетку Фибоначчи можно получить n -кратным действием матрицы (в данном случае оператора) S :

$$\begin{pmatrix} x_{n+2} \\ x_n \end{pmatrix} = S^n \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}. \quad (58)$$

Приведем здесь также вывод формулы с помощью кватернионного представления [25]. Трансфер-матрицы являются элементами группы $SL(2, \mathbb{R})$. В этой группе можно рассмотреть форму Киллинга $(B, A) = \text{Tr}[B^{-1}A]/2$. Введем базисные матрицы следующим образом:

$$\tau_0 = 1 \quad \tau_1 = i\sigma_y \quad \tau_2 = i\sigma_z \quad \tau_3 = i\sigma_x, \quad (59)$$

где матрицы Паули следующего вида:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (60)$$

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (61)$$

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (62)$$

Выражение (59) называется кватернионным представлением группы $SL(2, \mathbb{R})$. Подчеркнем, что τ_i вещественны и:

$$\text{Tr}[\tau_0]/2 = 1 \quad (63)$$

$$\text{Tr}[\tau_i]/2 = 0 \quad i = 1, 2, 3. \quad (64)$$

Мы можем разложить по базису любую матрицу из $SL(2, \mathbb{R})$ как

$$M = y\tau_0 + \sum_{i=1}^3 k_i\tau_i \quad (65)$$

Рассмотрим выражение (45) как переход $(A, B) \rightarrow (A', B')$, с

$$A' = BA \quad B' = A. \quad (66)$$

Представим A и B следующим образом:

$$A = y\sigma_0 + a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + a_3\sigma_3 \quad (67)$$

$$B = x\sigma_0 + b_1\sigma_1 + b_2\sigma_2 + b_3\sigma_3, \quad (68)$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – матрицы Паули в соответствующем представлении (??), а σ_0 – единичная матрица. Пространство A и B параметризованы 8 числами $(x, y, a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3)$, но мы имеем еще два условия: $\det A = 1, \det B = 1$ из которых следует, что:

$$y^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 = 1 \quad (69)$$

$$x^2 + b_1^2 - b_2^2 - b_3^2 = 1 \quad (70)$$

и которые сокращают пространство до шестимерного. Обозначим

$$\omega = a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3. \quad (71)$$

Тогда

$$\omega' = y\omega + x(1 - y^2), \quad (72)$$

$$x' = y, \quad (73)$$

$$y = yx - \omega. \quad (74)$$

Так как $M_{i-1} = B, M_i = A, M_{i+1} = M_{i-1}M_i, y = \frac{1}{2}\text{Tr}[M_{i+1}]$, из (74) получаем формулу (50):

$$\text{Tr}[M_{i+2}] = 2y'' = 2(y'x' - \omega') = 2(2yy' - x) = \text{Tr}[M_{i+1}]\text{Tr}[M_i] - \text{Tr}[M_{i-1}]. \quad (75)$$

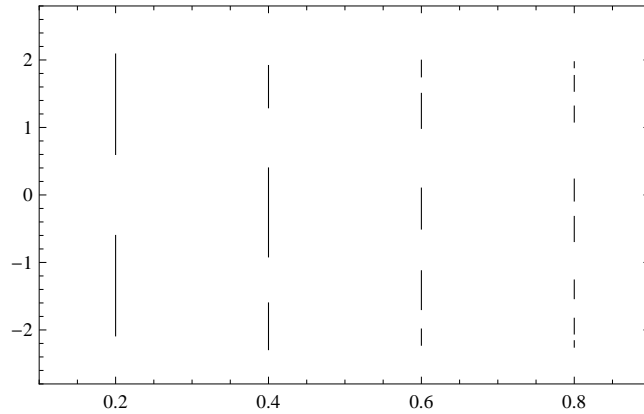


Рис. 2: Энергетический спектр для решетки Фибоначчи для $\epsilon_A = -\epsilon_B = 0.5$. Показана зонная структура для $n=2, 3, 4$ и 5 .

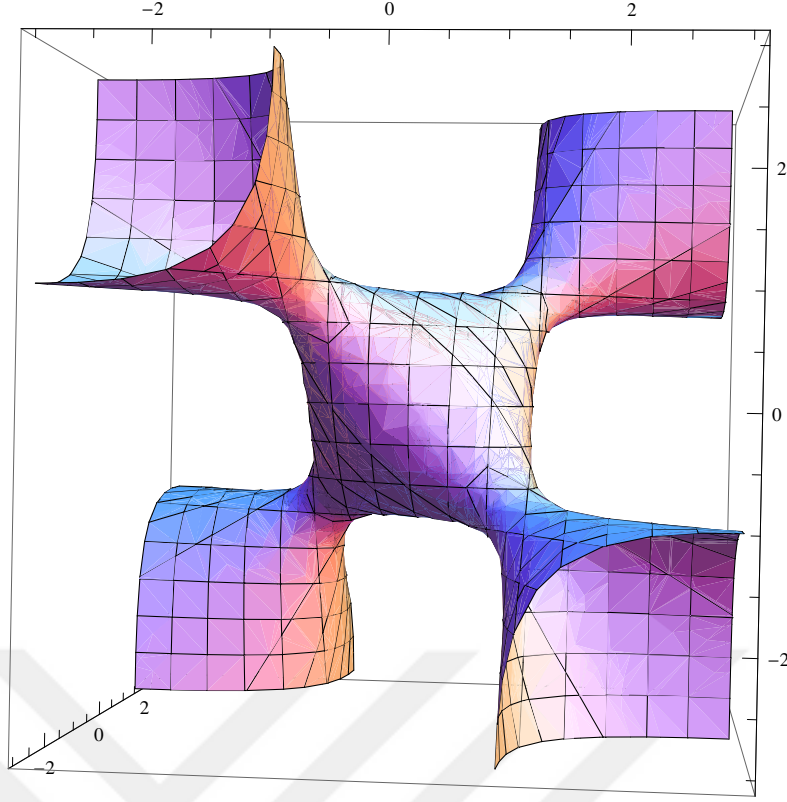


Рис. 3: Поверхность описываемая уравнением (56).

3.2 Решетка Серебряное Сечение

Рекуррентное соотношение для общей трансфер-матрицы M_n в случае решетки Серебряное Сечение записывается следующим образом:

$$M_n = M_{n-1}^2 M_{n-2}. \quad (76)$$

Данная удобная запись легко доказывается: мы находим матрицу A и B из M_0 и M_1 , записываем M_2 через эти матрицы и далее доказываем по индукции для M_n . Так как матрицы M_i имеют $\det M_i = 1$, соответственно существуют обратные матрицы.

Найдем рекуррентное соотношение для $\text{Tr} [M_i]$:

$$\begin{aligned} M_{n+1} &= M_{n-1} M_n (\text{Tr} [M_n] - M_n^{-1}) = M_{n-1} M_n \text{Tr} [M_n] - M_{n-1} = M_{n-1} (\text{Tr} [M_n])^2 - \\ &M_{n-1} M_n^{-1} - M_{n-1} = M_{n-1} (\text{Tr} [M_n])^2 - M_{n-1} M_n^{-1} \frac{\text{Tr} [M_{n-1}]}{\text{Tr} [M_{n-1}]} - M_{n-1} = M_{n-1} (\text{Tr} [M_n])^2 - \\ &M_{n-1} (M_{n-1} + M_{n-1}^{-1}) \frac{M_n^{-1}}{\text{Tr} [M_{n-1}]} - M_{n-1} = M_{n-1} (\text{Tr} [M_n])^2 - \frac{M_{n-1}^2 M_n^{-1} + M_n^{-1}}{\text{Tr} [M_{n-1}]} - M_{n-1}. \end{aligned} \quad (77)$$

Отметим, что мы мы использовали тут теорему Кэли-Гамильтона (см. Приложение А). Взяв след от выражения (77) и использовав $\text{Tr} [M_{n-2}] = \text{Tr} [M_{n-1}^2 M_n^{-1}]$ мы по-

лучим окончательный результат для следа общей трансфер-матрицы для решетки Серебряное Пропорция:

$$\boxed{\text{Tr} [M_{n+1}] = \text{Tr} [M_{n-1}] (\text{Tr} [M_n])^2 - \frac{(\text{Tr} [M_n])^2 + \text{Tr} [M_{n-2}] \text{Tr} [M_n] - \text{Tr} [M_{n-1}]}{\text{Tr} [M_{n-1}]} .} \quad (78)$$

Отметим, что в отличии от работ [13], [14], в которых утверждалось, что вышеуказанная запись невозможна, мы смогли показать рекуррентное соотношения для следа трансфер-матриц в терминах $\text{Tr} [M_i]$. В вышеуказанных статьях используется соотношение:

$$M_{i+1} + M_{i-1} = M_{i-1} M_i (M_i + M_i^{-1}), \quad (79)$$

которое легко получается из выражения (76). Далее берем след от этого выражения и получаем

$$x_{i+1} = 4x_i t_{i+1} - x_{i-1}, \quad (80)$$

где $x_i = \frac{1}{2} \text{Tr} [M_i]$, $t_i = \frac{1}{4} \text{Tr} [M_{i-2} M_{i-1}]$.

Можно найти рекуррентное выражение и для t_i :

$$t_{i+1} = x_{i-2} x_i - t_i. \quad (81)$$

В работе [13] утверждается, что выражение (80) невозможно выразить только через x_i . Найденная нами формула (78) показывает ошибочность данного утверждения.

Отображение (78) имеет интеграл движения (инвариант):

$$\boxed{I = -xz + \left(\frac{x+z}{2y} \right)^2 + y^2,} \quad (82)$$

где $x = \frac{1}{2} \text{Tr} [M_{n+1}]$, $y = \frac{1}{2} \text{Tr} [M_n]$, $z = \frac{1}{2} \text{Tr} [M_{n-1}]$.

Если преобразовать z и I следующим образом:

$$z \rightarrow 4y^2 x - x - 4yz; \quad (83)$$

$$I \rightarrow (I + 1), \quad (84)$$

то получим инвариант найденный в [13], [14]:

$$I = x^2 + y^2 + 4z^2 - 4xyz - 1. \quad (85)$$

Данное выражение также можно получить с помощью выражений (80) и (81):

$$x_{i+1}(x_{i+1} - 4x_it_{i+1}) = x_{i-1}(x_{i-1} - 4x_it_{i+1}). \quad (86)$$

Если добавить каждой стороне x_i^2 и применить формулу (81), то получим выражение (85).

Мы получили, что с помощью преобразований инвариант решетки Серебряное Сечение переходит в инвариант решетки Фибоначчи (с отличием коэффициента в одном члене). Данный вопрос мы подробно обсудим в подразделе 3.5.

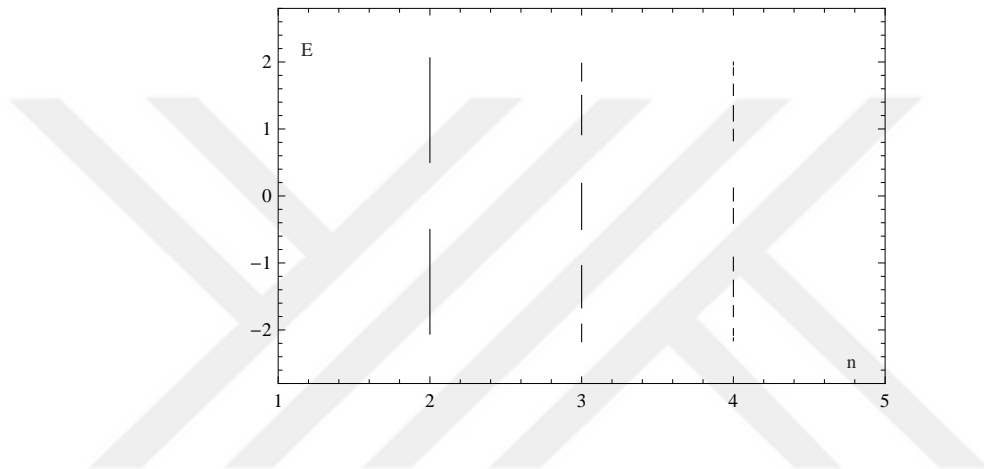


Рис. 4: Энергетический спектр для решетки Серебряное Сечение для $\epsilon_A = -\epsilon_B = 0.5$. Показана зонная структура для $n=2, 3$ и 4 .

3.3 Решетка Тью-Морса

Для данной решетки соотношение для трансфер-матриц очевидно можно записать следующим образом:

$$M_i = M_{i-1}M_{i-2}^{-1}M_{i-1}M_{i-2}, \quad (87)$$

Данная удобная запись легко доказывается: мы находим матрицу A и B из M_0 и M_1 , записываем M_2 через эти матрицы и далее доказываем по индукции для M_n . Так как матрицы M_i имеют $\det M_i = 1$, соответственно существуют обратные матрицы.

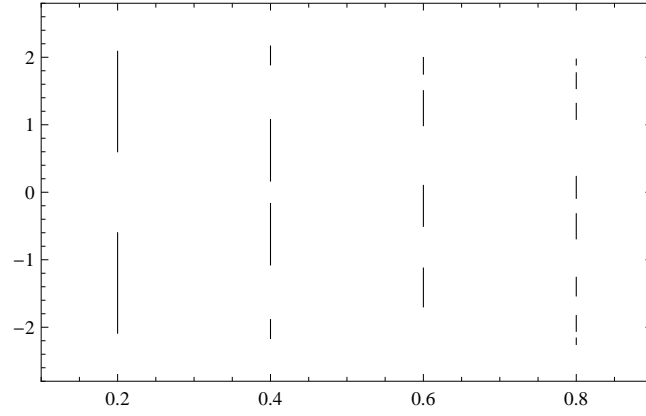


Рис. 5: Энергетический спектр для решетки Тью-Морса для $\epsilon_A = -\epsilon_B = 0.5$. Показана зонная структура для $n=2,3,4$ и 5 .

Отметим, что для нахождения рекуррентной формулы для следа матриц решетки Тью-Морса мы пользуемся другим методом (похожий метод использован в [36]), чем это делается обычно (например, см. [37], [38], [39], [40]). Пользуясь теоремой Кэли-Гамильтона и выражениями

$$M_{i+1} = Tr(M_i)M_i - M_i M_{i-1}^{-1} M_i^{-1} M_{i-1}, \quad (88)$$

$$M_{i-1} M_i^{-1} M_{i-1} = M_{i-1} M_{i-2}^{-1} M_{i-1}^{-1} M_{i-2}, \quad (89)$$

в результате мы получаем рекуррентное соотношение для следа общей трансфер-матрицы решетки Тью-Морса:

$$Tr(M_{i+1}) = Tr(M_i)((Tr(M_{i-1}))^2 - 2) + 2. \quad (90)$$

Если переписать выражение (90) в следующем виде

$$Tr E = Tr(M_{i+1}) - Tr(M_i)((Tr(M_{i-1}))^2 - 2) \quad (91)$$

то в правой части получим инвариант не зависящий от i :

$$I = z - 2y(2x - 1), \quad (92)$$

где $x = \frac{1}{2}Tr(M_{i-1})$, $y = \frac{1}{2}Tr(M_i)$, $z = \frac{1}{2}Tr(M_{i+1})$.

Как видно данный инвариант отличается от инварианта решетки Фибоначчи.

3.4 Решетка Медное Сечение

Для решетки Медное Сечение общая трансфер-матрица M_n удовлетворяет соотношению (это легко показать, мы находим матрицу A и B из M_0 и M_1 , записываем M_2 через эти матрицы и далее доказываем по индукции для M_n):

$$M_{i+1} = M_i M_{i-1}^2. \quad (93)$$

Пользуясь теоремой Кэли-Гамильтона получаем рекуррентное соотношение для следа трансфер-матриц:

$$\begin{aligned} M_{i+1} &= M_i M_{i-1}^2 = M_i M_{i-1} (\text{Tr} [M_{i-1}] - M_{i-1}^{-1}) = M_i M_{i-1} \text{Tr} [M_{i-1}] - M_i = \\ &M_i (\text{Tr} [M_{i-1}] - M_{i-1}^{-1}) \text{Tr} [M_{i-1}] - M_i = M_i (\text{Tr} [M_{i-1}])^2 - M_i M_{i-1}^{-1} \text{Tr} [M_{i-1}] - M_i \end{aligned} \quad (94)$$

и после нетрудных вычислений получаем рекуррентное соотношение для следа трансфер-матриц:

$$\text{Tr} M_{i+1} = \text{Tr} M_i (\text{Tr} M_{i-1})^2 - \text{Tr} M_i - \text{Tr} M_{i-1} [(\text{Tr} M_{i-2})^2 - 2]. \quad (95)$$

В выражении (95) можно заметить интересную симметрию, которая выражается следующим образом:

$$\text{Tr} M_i = [(\text{Tr} M_{i-2})^2 - 2] \text{Tr} M_{i-1} + \text{const} \quad (96)$$

$$\text{Tr} M_{i+1} = [(\text{Tr} M_{i-1})^2 - 2] \text{Tr} M_i + \text{const}. \quad (97)$$

С помощью несложных вычислений, можно показать что,

$$\text{const} = -\text{Tr} [M_1] + 2\text{Tr} [M_0]. \quad (98)$$

Данная константа является инвариантом отображения (95):

$$I = z - (4x^2 - 2)y, \quad (99)$$

где $x = \frac{1}{2}\text{Tr}(M_{i-1})$, $y = \frac{1}{2}\text{Tr}(M_i)$, $z = \frac{1}{2}\text{Tr}(M_{i+1})$.

Данный инвариант отличается от инвариантов решетки Фибоначчи. Никаким преобразованием его невозможно привести к виду инварианта Фрика (данное утверждение не является достаточно строгим).

3.4.1 Двупериодическая решетка

Так как инварианты решетки Медная пропорция и Двупериодическая одинаковы, возник естественный вопрос об идентичности этих решеток, несмотря на то, что многие исследователи считают эти решетки разными. На самом деле если сделать преобразование

$$BB \rightarrow B \quad (100)$$

в Двупериодической решетке, она перейдет в решетку Медная пропорция. Иными словами мы можем рассматривать два соседних атома как единый “большой” атом.



3.5 На пути классификации

Как мы уже отмечали классификация одномерных апериодических решеток является одной из важных и сложных задач математики.

Есть надежды, что можно классифицировать одномерные апериодические решетки с помощью их инвариантов.

Надо отметить, что физиками уже были предпринимались попытки некоторой классификаций уже известных одномерных решеток (например см.).

В случае использования инвариантов существуют ряд проблем. Во первых метод поиска инвариантов неудобная процедура и невозможно все время искать эти инварианты “руками”. Метод Бааке и др., где они находят инварианты как автоморфизмы след-отображения также является достаточно сложной (на самом деле из работы можно сделать вывод, что авторы пользуясь уже известными выражениями инвариантов, показывают, что они являются автоморфизмом определенных преобразований).

Существует еще более серьезная проблема, дело в том, что инварианты решеток Серебряное Сечение и Бронзовое Сечение (и скорее всего всех решеток данного вида) с помощью некоторых преобразований могут быть приведены к виду инварианта Фибоначчи (инвариант Фрика). Хотя эти преобразования являются нелинейными и, вообще, достаточно сложными, все же они не в пользу инвариантов как инструмента для классификации. С другой стороны инварианты решеток Тью-Морса и Медная Пропорция практически совпадают, они отличаются только по значению, но полиномиальный вид инвариантов одинаковый.

Результаты

- Мы вывели формулы для расчетов следов трансфер-матриц для решеток Фибоначчи, Серебряное Сечение, Тью-Морса, Медная Пропорция, Кантора и т.д. Практически во всех случаях мы пользовались иным методом для получения рекуррентной формулы, чем это делается обычно. Использование теоремы Кэли-Гамильтона хороша тем, что она работает для любых матриц группы $SL(2, R)$.
- Мы получили инварианты для большинства решеток. Также мы нашли преобразования которые переводят эти инварианты в инвариант Фрика.
- Мы показали, что решетки Медная Пропорция и Двупериодическая являются идентичными. Эти решетки имеют один и тот же инвариант.
- Мы подробно исследовали решетку Фибоначчи, в частности связь между квазипериодической структурой и числами Пизо. Также мы показали несколько способов получения рекуррентных формул для расчета энергетического спектра данной решетки.
- В работах [13], [14] утверждалось, что невозможно написать рекуррентное выражение для следа общей трансфер-матрицы решетки Серебряное Сечение, в котором участвовали бы только следы трансфер-матриц. Мы нашли выражение в терминах следов трансфер-матриц (и тем показали ошибочность утверждения вышеуказанных авторов) и показали связь между нашим результатом и формулой для трансфер матрицы, найденной в работе [13]. Также мы нашли отображение которое переводит инвариант, найденный нами в инвариант Фрика.

Выводы

- Полученные нами формулы для расчетов энергетического спектра в некоторых случаях более удобны, чем до сих пор используемые выражения, и дают возможность провести аналитические и численные расчеты.
- Есть надежды, что на основе инвариантов одномерных аперiodических решеток можно построить теорию классификации одномерных аперiodических решеток.
- Подробное изучение техники след-отображения (а также трансфер-матриц) может дать результаты во многих областях физики и математики.
- Используемые методы для одномерных решеток могут быть расширены для двумерных задач, для решетки пчелиные соты и др.

Благодарности

На самом деле благодарности должны были включены в начала данной работы, к сожалению, формат диссертационной работы этого не позволяет, поэтому я включил эту часть в конец.

Я обязан поблагодарить тех, без чьих помощи данная работа не увидела бы свет. Это те, кто морально поддерживал меня и помогал с организаторскими вопросами связанных с написанием работы и те, кто помогал в научном плане.

Я хочу поблагодарить младшего сотрудника Лаборатории Нейтронной Физики им И.М.Франка Объединенного Института Ядерных Исследований Эльмара Аскерова. Многие результаты, которые отражены в данной работе мы получили вместе, и его смело можно назвать соавтором данной работы.

Также я хочу поблагодарить аспиранта Квин Мэри Лондонского Университета Эдварда Мусаева за интересные и полезные обсуждения. Я хочу поблагодарить сотрудника Физико-технического Института им. Иоффе РАН Евгения Ивченко, который указал на интересные факты и статьи, когда я только начинал работать над данной темой.

Я отдельно хочу поблагодарить студентку группы МФ-09-1 Ефимову Татьяну и куратора нашей группы Елену Александровну Новикову за их помощь, поддержку и за все что они сделали для меня. Должен отметить, что Татьяна помогала мне и с организаторскими вопросами и с написанием работы, за что ей большое спасибо.

Я хочу поблагодарить моего бывшего научного руководителя Наталию Ефимовну Капуткину. Также я благодарю Юрия Хореновича Векилова за его ценные советы и замечания.

В конце я хочу поблагодарить моих родителей и друзей которые поддерживали меня все эти годы.

Список литературы

- 1 Gratias D. Cahn J. Shechtman D., Blech I. Metallic phase with long-range orientational order and no translational symmetry. *Phys. Rev. Lett.*, 53:1951–1953, 1984.
- 2 Enrique Macia. The role of aperiodic order in science and technology,. *Rep. Prog. Phys.* 69 397 (2006).
- 3 Черников М.А. Векилов Ю.Х. Квазикристаллы. *УФН* 180, 561–586 (2010);.
- 4 Дайсон Ф. Птицы и лягушки в математики и физике. *УФН*, 180, 859–870 (2010).
- 5 Dyson F. *Birds and Frogs. Notices of the Amer. Math. Soc.* **56** (2) 212 – 223 (2009).
- 6 Лодкин А.А. Квазикристаллические мозаики и проекционный метод. *Записки научных сем. ПОМИ*, т. 283 (2001).
- 7 Uwe Grimm Michael Baake. Kinematic diffraction from a mathematical viewpoint. *arXiv:1105.0095* (2011).
- 8 E. L. Albuquerque and M. G. Cottam. Theory of elementary excitations in quasiperiodic structures. *Phys. Reports* 376, 225-337 (2003).
- 9 Barber Enrique Macia. Aperiodic structures in condensed matter : fundamentals and applications. *Taylor & Francis; 1st edition* (2008).
- 10 L. P. Kadanoff M. Kohmoto and C. Tang. *Localization Problem in One Dimension: Mapping and Escape. Phys. Rev. Lett.* **50**, 1870 (1983).
- 11 J.E. Taylor E. Bombieri. *Which distributions of matter diffract? An initial investigation. J. Physique Coll. C3* 19–29 (1986).
- 12 А.Я. Флат А.И. Олемской. Использование концепции фрактала в физике конденсированной среды. *УФН T.163*, 12 (1993).
- 13 Ali M.K. Gumbs G. *Electronic properties of the tight-binding Fibonacci Hamiltonian. J.Phys. A: Math. Gen.* **22**, 951-970 (1989).

- 14 Ali M.K. Gumbs G. *Dynamical Maps, Cantor Spectra, and Localization for Fibonacci and Related Quasiperiodic Lattices*. *Phys.Rev.Lett.* **60**, 1081-1084 (1988).
- 15 Walter Steurer and Sofia Deloudi. *Crystallography of Quasicrystals: Concepts, Methods and Structures*. Springer-Verlag: Berlin, Heidelberg (2009).
- 16 Sire. R. Mosseri and J.-F. Sadoc. *Geometric study of a 2D tiling related to the octagonal quasiperiodic tiling*. *J. Phys. France*, 50, 3463-3476 (1989).
- 17 Repetowicz P. Yuan H.Q., Grimm U. and Schreiber M. *Energy spectra, wave functions, and quantum diffusion for quasiperiodic systems*. *Phys. Rev. B*, **62**, 15569 (2000).
- 18 X.Huang and Y.Liu. *Spectral Structure and Gap-Labeling Properties for a New Class of One-Dimensional Quasilattices*. *Chinese Phys. Lett.* 9 609-612 (1992).
- 19 D.Mo X.Q.Huang, Y.Y.Liu. *Electronic properties of one-dimensional quasilattices*. *Z. Phys. B* 93, 103-108 (1993).
- 20 C.Gong Y.Wang, X.Huang. *Light Transmission Through Symmetric Fibonacci-Class Multilayers*. *Chinese Phys. Lett.* 17 498 (2000).
- 21 Bloch F. *Über die Quantenmechanik der Elektronen in Kristallgittern*. *Z. Physik* **52**, 555-560 (1928).
- 22 Я.Г. Синай Е. И. Динабург. Об одномерном уравнении Шредингера с квазипериодическим потенциалом. *Функ. анализ и его прил.* 9, 4, 8-21 (1975).
- 23 P.W.Anderson. *Absence of diffusion in certain random lattices*. *Phys. Rev.* 109, 1492-1505 (1957).
- 24 P. W. Anderson. *Local moments and localized states*. *Rev. Mod. Phys.* **50**, 191-201 (1978).
- 25 B. Sutherland M. Kohmoto and C. Tang. *Critical wave functions and a Cantor-set spectrum of a one-dimensional quasicrystal model*. *Phys. Rev. B* **35**, 1020 (1987).
- 26 Ю.Х.Векилов Д.В.Оленов. Критическое поведение волновых функций икосаэдрических квазикристаллов. *Письма ЖЭТФ*, 64, 8, 559 (1996).

- 27 K.Ueda T.Tokihiro H.Tsunetsugu, T.Fujiwara. *Electronic properties of the Penrose lattice. I. Energy spectrum and wave functions. Phys. Rev. B* **43**, 8879–8891 (1991);.
- 28 K.Ueda H.Tsunetsugu. *Electronic properties of the Penrose lattice. II. Conductance at zero temperature. Phys. Rev. B* **43**, 8892–8902 (1991);.
- 29 H. Schmidt. *Disordered one-dimensional crystals. Phys. Rev.* **105**, 2, 425-441 (1957).
- 30 J.M. Luttinger. *Wave propagation in one-dimensional structures. Philips Res. Rep.* **6**, 303-310 (1951).
- 31 Stöckmann Hans-Jürgen. *Quantum Chaos: An Introduction. Cambridge University Press* (1999).
- 32 Vladimir I. Arnol'd. *Ordinary differential equations. Springer-Verlag: Berlin, Heidelberg* (1992).
- 33 M. Kolar D. Huang, G. Gumbs. *Localization in a one-dimensional Thue-Morse chain. Phys. Rev. B* **46**, 18 (1992).
- 34 X.C. Xie S.Das Sarma. *Phys. Rev. B*, **37**, 1097 (1988).
- 35 J.B. Pendry P.D. Kirkman. *J.Phys. C* **17**, 4327 (1984).
- 36 Luck J.M. *Cantor spectra and scaling of gap widths in deterministic aperiodic systems. Phys. Rev. B* **39**, 9, 5834-5849 (1989).
- 37 D.Jin and G.Jin. *Matrix maps for substitution sequences in the biquaternion representation. Phys. Rev. B* **71**, 014212 (2005).
- 38 S.Cheng and G.Jin. *Trace map and eigenstates of a Thue-Morse chain in a general model. Phys. Rev. B* **65**, 134206 (2002).
- 39 F.Nori M.Kolar, M.K.Ali. *Generalized Thue-Morse chains and their physical properties. Phys. Rev. B* **43**, 1034 (1991).
- 40 A.Ghosh and S.N.Karmakar. *Trace map of a general aperiodic Thue-Morse chain: Electronic properties. Phys. Rev. B* **58**, 2586 (1998).