T.C.
GEBZE TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LİNEER İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLER

ESİN YAVUZ YILMAZ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

GEBZE
2019

T.C.
GEBZE TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LİNEER İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLER

ESİN YAVUZ YILMAZ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMANI
PROF. DR. COŞKUN YAKAR

GEBZE
2019

T.R.

GEBZE TECHNICAL UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

LINEAR INTEGRAL INEQUALITIES

ESİN YAVUZ YILMAZ

A THESIS SUBMITTED FOR THE DEGREE OF

MASTER OF SCIENCE

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

THESIS SUPERVISOR

PROF. DR. COŞKUN YAKAR

GEBZE

2019

GEBZE TEKNİK ÜNİVERSİTESİ	**YÜKSEK LİSANS JÜRİ ONAY FORMU**

GTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 13/03/2019 tarih ve 2019/14 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından 13/06/2019 tarihinde tez savunma sınavı yapılan Esin YAVUZ YILMAZ'ın tez çalışması Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

JÜRİ

ÜYE
(TEZ DANIŞMANI) : PROF. DR. COŞKUN YAKAR

ÜYE : PROF. DR. EMİL NOVRUZ

ÜYE : DOÇ. DR. YALÇIN YILMAZ

ONAY

Gebze Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
.... tarih ve .... sayılı kararı.

ÖZET

Lineer integral eşitsizlikler üzerine hazırlanan bu çalışmanın birinci bölümünde integral eşitsizliklerin başlangıcı, tarihi gelişimi ve çalışmaları ile katkı yapan bilim adamlarının çalışmaları incelenmiştir. Ayrıca Lineer fonksiyonların özellikleri, konveks ve konkav fonksiyonlar, izotonik lineer fonksiyonlar üzerine temel tanımlar da bu bölümde yer almıştır. İkinci bölümde ise önemli integral eşitsizliklerin lineer ve lineer olmayan tipleri tanıtılmış, ilgili teoremler ve son yılları kapsayacak şekilde genelleştirmeler verilmiştir. Çalışmanın son bölümünde integral eşitsizliklerin uygulamaları olarak zaman ölçekleri üzerinde genelleştirmeler, gecikmiş integral eşitsizlikler ve zaman ölçeklerinde gecikmiş integral eşitsizlikler ele alınmıştır.

Anahtar Kelimeler: İntegral Eşitsizlikler, Q-Steffensen Tipi İntegral Eşitsizlikler, Hermite-Hadamard Tipi Eşitsizlikler, Gronwall Tipi İntegral Eşitsizlikler, Jensen Tipi İntegral Eşitsizlikler, Hardy Tipi İntegral Eşitsizlikler.

SUMMARY

This study was prepared on linear integral inequalities. It’s first chapter includes the origin of inequalities, its historical development and the scientists who contributed to this study are given in detail. The characteristics and basic definitions on linear functions, convex and concave functions, isotonic linear functions are also included in this section. Types of significant linear integral inequalities and their nonlinear extensions are introduced, related theorems and generalizations covering recent years are included in the second part of the study. In the last part of the study, generalizations of time scale integral inequalities, delayed integral inequalities and delayed integral inequalities on time scales are included as applications of integral inequalities.

Keywords: Integral Inequalities, Q-Steffensen Type Integral Inequalities, Hermite-Hadamard Type Inequalities, Gronwall Type Integral Inequalities, Jensen Type Integral Inequalities, Hardy Type Integral Inequalities.

TEŞEKKÜR

Başta, yüksek lisans eğitimimde ve akademik hayatımda desteğini ve yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyip bilgisi ile bu çalışmanın oluşmasının yolunu açan danışmanım Prof. Dr. Coşkun YAKAR'a,

Bütün çalışmam boyunca yanımda olan, bilgi ve tecrübelerini benimle paylaşan değerli Eşim Matematik Öğretmeni Mustafa YILMAZ'a,

ve göstermiş olduğu desteklerinden dolayı sevgili Kızım Miray'a, anneme ve babama en içten teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	v
SUMMARY	vi
TEŞEKKÜR	vii
İÇİNDEKİLER	viii
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ	ix
1. GİRİŞ	1
1.1. Tarihçe ve Literatür	1
1.2. Temel Kavramlar	10
2. LİNEER İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLER	15
2.1. Gronwall Tipi İntegral Eşitsizlik	15
2.2. Q-Steffensen Tipi İntegral Eşitsizlik	26
2.3. Ostrowski ve Ostrowski–Grüss Tipi İntegral Eşitsizlikler	31
2.4. Cauchy-Khinchin İntegral Eşitsizliği	36
2.5. Young Tipi İntegral Eşitsizlik	39
2.6. Hardy Tipi İntegral Eşitsizlik	40
2.7. Jensen Tipi İntegral Eşitsizlik	42
2.8. Gauss-Winkler Tipi İntegral Eşitsizlik	46
2.9. Hilbert Tipi İntegral Eşitsizlik	47
2.10. Hermite-Hadamard Tipi İntegral Eşitsizlik	48
3. UYGULAMALAR	56
3.1. Zaman Ölçeklerinde Wirtinger ve Hardy Eşitsizlikleri	56
3.2. Gecikmiş Volterra Denklemleri İçin İntegral Eşitsizlikleri	61
3.3. Zaman Ölçeklerinde Gecikmiş İntegral Eşitsizlikler İçin Gronwall	66
3.4. Konveks Fonksiyonlar İçin Hadamard Tipi İntegral Eşitsizlikler	68
3.5. Genişletilmiş Hardy-Hilbert Eşitsizliği ve Uygulamaları	73
4. TARTIŞMA ve SONUÇ	81
KAYNAK	82
ÖZGEÇMİŞ	86
EKLER	87

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler ve Kısaltmalar	**Açıklamalar**
R	: Reel sayılar kümesi
R^n	: n-boyutlu Euclidean uzay
N	: Doğal sayılar kümesi
Z	: Tam sayılar kümesi
R^+	: Pozitif reel sayılar kümesi
$C(I)$	: Konveks fonksiyonlar sınıfı
f^n	: Fonksiyonunun n. mertebeden türevi
I	: Reel sayılar kümesinde bir kapalı aralık
I^0	: Aralığın iç noktaları
$J(I)$	: Jensen konveks fonksiyonlar sınıfı
$K_m(b)$	: m-konveks fonksiyonlar
$K_m^{\alpha}(b)$	: (α, m) - konveks fonksiyonlar
K_s^2	: İkinci anlamda s-konveks fonksiyonlar
$\mathrm{L}[a, b]$	: [a,b] aralığında integrallenebilir fonksiyonlar
C_{rd}	: *rd*-mertebeden sürekli fonksiyonlar
$L_i(u)$	: Lineer eşitsizlikler sistemi

1. GİRİŞ

1.1. Tarihçe ve Literatür

Eşitsizlik, matematiğin en temel kavramlarından biridir. Ünlü matematikçi H. Bohr: “Bütün araştırmacılar, zamanlarının yarısını kullanmak istedikleri ve ispatlayamadıkları eşitsizlikleri literatürde aramakla geçiriyor.” Diyor [12]. Aritmetik-geometrik-harmonik eşitsizlikler, Cauchy eşitsizliği, Hermite-Hadamard eşitsizliği, Hölder eşitsizliği, Minkowski eşitsizliği, Steffensen eşitsizliği, Soblev eşitsizliği, Tchebycheff eşitsizliği ve Young eşitsizliği gibi birçok eşitsizlik çağdaş matematiğin temel eşitsizlikleri olarak matematik literatüründe önemli yer tutmaktadır. Eski çağlardan beri bilinen en önemli eşitsizlik üçgen eşitsizliği ise ikinci eşitsizlik te Euclid tarafından not edilen aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliğidir. Üçüncü bir eşitsizlik, Arşimetten önceki Yunan matematikçilerinin de bildiği “Düzlemdeki izoperimetrik eşitsizlik” olarak adlandırılan eşitsizliktir. Bu eşitsizliğe tatmin edici bir ispat 2000 yıllık bir çaba sonrası 19.yüzyılda Steiner’ den geldi(1838) ve Weierstrass bu ispatı bir extremal bölgenin varlığını göstererek tamamladı. Hind ve Çin matematik geleneklerinde bu üç eşitsizliğin bilindiğine dair tatmin edici kanıtlar vardır[12]. Newton’un ünlü eşitsizlik teoremini aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz:

Newton Teoreminde olduğu gibi

$$P_n(x) = e_0 x^n + e_1 x^{n-1} + \ldots + e_k x^{n-k} + \ldots + e_n, e_0 = 1 \tag{1.1}$$

denkleminin tüm kökleri reel ise o zaman denklemin katsayıları aşağıdaki eşitsizliği sağlar:

$$e_{k-1} e_{k+1} \le A_k^{(n)} e_k^2, k = 1, 2, \ldots, n-1 \tag{1.2}$$

$$A_k^{(n)} := \frac{k}{k+1} \frac{n-k}{n+1-k} \tag{1.3}$$

$\{a_i\}_{i=1}^{(n)}$ şeklinde bir reel sayı dizisi için $P_n(\mathrm{x}) = \prod_{i=1}^{n}(x+a_i) = \sum_{k=0}^{n} e_k x^{n-k}$ konulursa $e_k = e_k(a)$ katsayısı *a*' nın *k*-inci elemanter simetrik fonksiyonunu temsil eder.

Daha sonra Newton $1 \le k < n$ olmak üzere $e_{k-1}e_{k+1} \le e_k^2$ olduğunu gösterdi. Maclaurin $k_1 > k_2^{1/2} > ... > k_n^{1/n}$ olacağını gösterdi. Hardy, Littlewood ve Polya' nın ifadeleri ile bu sonuç Newton' un sonucunun doğal bir sonucudur [19]. Bu dizinin extremleri aritmetik ortalama ve geometrik ortalamadır, Newton bunu ıskalamıştır ve bu eşitsizlik, Cauchy eşitsizliği olarak ünlenmiştir. Cauchy genellikle onun analiz ders notlarında bulunan aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliğinin ustaca kanıtı ile alıntılanmaktadır. Bu notların ikincisi genel aritmetik eşitsizliklerin ispatı ile başlamakta, bugün Cauchy-Schwarz-Bunaiakowski Eşitsizliği olarak bilinen sonlu toplam versiyonunun ispatını içermekte, aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliği ile bitmektedir[4]. Cauchy' den sonra eşitsizlik üzerine yazılan ilk kitap 1880'li yıllara rastlar. Aradaki bu yıllar için Grabiner insanların bu yıllarda matematiğin uygulamalı alanları dışındaki alanlara ilgi göstermediği yorumunu yapmaktadır[16].

Hölder ve Minkowski eşitsizlikleri diğer önemli eşitsizlikler olarak literatürde yer almaktadır. Chebyshev' in 1882 de Han'kovshov Üniversitesine sunduğu çalışmada birçok eşitsizlik ispatı bulunmaktaydı. Bunlardan ilki kendi adıyla anılan eşitsizlikti ve ispatı 1883 teki çalışmasında yer aldı:

Eğer *f, g* ve *p* integre edilebilir fonksiyonlar, f ve *g*' nin türevleri işaretlerini değiştirmiyor ve işaret iki durumda da aynı kalıyorsa, $p \ge 0$ ise o zaman:

$$\int_{a_0}^{a_1} f(\xi)g(\xi)p(\xi)d\xi \int_{a_0}^{a_1} p(\xi)d\xi \ge \int_{a_0}^{a_1} f(\xi)p(\xi)d\xi \int_{a_0}^{a_1} g(\xi)p(\xi)d\xi \tag{1.4}$$

Winckler, bu eşitsizliğin *p(x)* =1 versiyonunu verdi. Hermite daha kısa bir kanıt verdi. Sonuç olarak Chebyshev' in eşitsizlikler üzerine olan bu çalışması bu konuya ilgi çekmeyi başarmıştı. Matematik üzerine yapılan çalışmalarda eşitsizliklerin yer alması yapılan çalışmaların saygınlığını artırdığı yıllarda

Hadamard, determinantlar ve onlarla ilgili eşitsizlikler üzerine bir çalışma yayınladı[18]. Onlardan biri bugün onun adını taşımaktadır:

$$det\{ x_{ij} \} \leq (\sum_{ij} (x_{ij})^2)^{1/2} \tag{1.5}$$

Hadamard bu çalışmada bu eşitsizlikle ilgili her hangibir uygulamaya yer vermemişti. Oysa bu eşitsizlik Fredholm integral denklemlerin temel aracı olacaktı. Eşitsizlikler tarihinde bilim adamlarının adlarıyla anılan eşitsizliklerden bir diğeri Gram tarafından ispat edildi. Gram iç çarpımı R^n de olmak üzere $\det\{(x_i, x_j)\} \geq 0$ olduğunu ispatladı[17]. Diğer bir çok bilinen ve çok kullanılan eşitsizlik te Jensen eşitsizliğidir:

$$f(\sum_1^n r_i x_i) \leq \sum_1^n r_i \; f(x_i) \tag{1.6}$$

r_i ağırlıkları pozitif olduğunda ve $r_1 + r_2 + ... + r_n = 1$ ise *f*, konveks bir fonksiyondur. Jensen konveks fonksiyonları

$$f(\frac{\xi + \lambda}{2}) \leq \frac{f(\xi) + f(\lambda)}{2} \tag{1.7}$$

olarak ilk tanımlayan kişiydi ve tanımında sadece rasyonel ölçüler kullanmıştı. Bu eşitsizlik, ölçülerin rasyonel ya da pozitif olması şartına bağlı olmadan integral forma genelleştirildi. Hölder bu eşitsizliği ikinci türevi var olan negatif olmayan fonksiyonlar için ispatladı. Hadamard *f* ’ nin türevinin artan olması durumunda aşağıdaki eşitsizliğin gerçeklendiğini gösterdi.

$$\frac{1}{\lambda - \xi} \int_{\xi}^{\lambda} f(t)dt \geq f(\frac{\xi + \lambda}{2}) \tag{1.8}$$

İsimle adlandırılan eşitsizliklerden bir diğeri de Hilbert’in çift katlı seriler eşitsizliğidir. 1900’ların başında David Hilbert’in bir eşitsizlik keşfetmesi gelişmelerin odağı olarak kabul edilir[21]. Herman Weyl’ in 1908 deki doktora tezinde Hilbert tarafından keşfedilen aşağıdaki denklem sunulmuş ve tartışılmıştır:

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\left(\frac{1}{n+m}+\frac{1}{n-m}\right)a_m b_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\left[\sum_{k=1}^{N}(-1)^k(a_k \sin kt-b_k \cos kt)\right]^2 dt \qquad (1.9)$$

Bu eşitlik Hilbert eşitsizliğinin sonlu versiyonunu gerektirir.

Eğer $\sum_{m=1}^{\infty} a_m^2<\infty$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2<\infty$ ise o zaman $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m b_n}{m+n}$ çift katlı serisi yakınsaktır.

Burada $a_m \geq 0$ ve $b_n \geq 0$ dır. Daha kesin olarak bu eşitsizlik π' ye bağlıo olarak aşağıdaki gibi yazılır:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m b_n}{m+n}\leq \pi\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2\right)^{1/2} \qquad (1.10)$$

Hilbert bu eşitsizliği ilk defa integral denklemler derslerinde sağ taraftaki sayı olmaksızın ispatlamıştı. Hilbert' in (1.10) denkleminde sabit sayı 2π olarak ifade edilmiş ancak kesin sayı olarak π' nin belirlenmesi ve (1.10) denkleminin integral formda yazılması I. Schur sayesinde olmuştur[44]. Bazen aşağıdaki daha genel olan form literatürde Hilbert eşitsizliği olarak tanıtılmaktadır:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m b_n}{m+n}\leq \frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{p})}\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m^p\right)^{1/p}\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^{p'}\right)^{1/p} \qquad (1.11)$$

Burada $p > 1$ ve $p'=\frac{p}{p-1}$ dir. (1.1.11) eşitsizliğinin ispatında Marcel Riesz ve G.H. Hardy ilk adımı atanlar olmuştur. Hardy, Riesz'in makalesindeki sonucunun aslında zayıf formu gösterdiğini belirtmiştir. Hardy ve Marcel Riesz daha sonra hem ayrık hem de sürekli formun ispatını verdiler. Hardy hiç şüphesiz eşitsizlikler konusuna en büyük katkıları yapan bilim adamıdır. Hilbert eşitsizliğine basit bir ispat getirmiş, aşağıdaki teoremleri ileri sürmüş ve uygulamıştır[19].

Teorem 1.1.1: Eğer $a_n \geq 0$ *ve* $A_n = a_1 + ... + a_n$ *ise o zaman aşağıdaki üç seriden birinin yakınsaklığı diğerini gerektirir:*

$$\text{i)} \quad \sum_{1}^{\infty} \frac{a_n A_n}{n} \qquad \text{ii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{A_n}{n}\right)^2 \qquad \text{iii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_n a_m}{n+m}$$

Teorem 1.1.2: $a_n \geq 0$ *ve* $A_n = a_1 + ... + a_n$ *ise o zaman* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ *serisinin yakınsaklığı* $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{A_n}{n}\right)^2$ *serisinin yakınsaklığını gerektirir.*

Teorem 1.1.3: Eğer $p > 1$ *,* $a_n \geq 0$ *ve* $A_n = a_1 + ... + a_n$ *ise o zaman*

$$\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{A_n}{n}\right)^p < C \sum_{1}^{\infty} a_n^p \tag{1.12}$$

Burada C sabiti $\left(\frac{p}{p-1}\right)^p$ *dir ve kesin sabittir.*

Landau'un 1921' de Hardy' ye yazdığı mektubunda bu eşitsizlikte kesin sabitin $\left(\frac{p}{p-1}\right)^p$ olduğu durumda ispatını verdiğini, Landau'nun Schur'a yazdığı mektubun 1926'da basılmasıyla öğrenilmiştir[27]. Bu nedenle (1.12) eşitsizliği bazen Hardy-Landau eşitsizliği olarak adlandırılır. Hardy 1925' te aşağıdaki teoremi formüle etti.

Teorem 1.1.4: Eğer $p > 1$ *,* $h \geq 0$ *, ve* $H(x) = \int_0^x h(t)dt$ *ise o zaman*

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{H(x)}{x}\right)^p dx < C \int_0^{\infty} h^p dx \tag{1.13}$$

Burada $C = \left(\frac{p}{p-1}\right)^p$ kesin sabit olarak verilmekteydi. Hardy 1920' deki çalışmasında C sabitinin kesinliğine dikkat çekmişti. Bu çalışmada sabitin kesinliğinin ispatının ayrıntılarını vermişti. 1925'deki çalışması birçok ilginç sonuçlar içerdiğinden Hardy tipi eşitsizlikler üzerine yapılan araştırmalara önemli bir ilgi topladı. Bunlardan ikisi aşağıdaki teoremlerdir:

Teorem 1.1.5: Varsayalım ki $a_n \geq 0$, $\lambda_n > 0$, $A_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k^p$ *ve*

$k = \lambda_1 + ... + \lambda_m$ *olsun.* $m = 1,2,...$*için* $\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m a_m^p$ *yakınsak olsun. O zaman aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_n \left(\frac{A_m}{k_m}\right)^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m a_m^p \tag{1.14}$$

Hardy bu teoremi uygun adım fonksiyonlara Teorem 1.1.4' ü uygulayarak ispatladı.

Teorem 1.1.6: Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n$ *yakınsak ise o zaman*

$$e \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n \geq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda 2} ... a_n^{\lambda n})^{1/k} \tag{1.15}$$

eşitsizliği vardır ve bu eşitsizlikteki e sabiti kesin bir sabittir.

Standart durumda $\lambda_n = 1$ olunca yukarıdaki eşitsizlik aşağıdaki gibi olur:

$$e \sum_{n=1}^{\infty} a_n \geq \sum_{n=1}^{\infty} (a_1 a_2 ... a_n)^{1/n} \tag{1.16}$$

Bu eşitsizlik (1.19) eşitsizliğinin doğal bir limitidir. Bu eşitsizlik ilk kez 1922 de Carleman tarafından ispatlandı ve Carleman eşitsizliği olarak adlandırıldı. Bu eşitsizlik genelleştirildi ve birçok alanda uygulandı. Carleman'ın orjinal ispatı oldukça uzundu ve Lagrange çarpanlarını ihtiva etmekteydi. Bu eşitsizliğin Hardy eşitsizliğinden hareketle daha basit ispatı yapıldı.

Carleman'ın Hardy ile işbirliği yaparak oluşturdukları çalışma onun bu ispatı öğrendiğine işaret etmektedir. Önceki ispatlarda kullanılan limit aşamaları kullanılarak (1.20) için aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$exp \int_0^{\infty} f(x)dx \geq \int_0^{\infty} exp\left(\frac{1}{x}\int_0^{x} ln\, f(\xi)d\xi\right)dx \tag{1.17}$$

Burada *f(x)* fonksiyonu her bir sonlu (0, *x*) üzerinde ölçülebilir ve daima pozitiftir. Orjinal çalışmada bu eşitsizlik sabit sayı *e* olmaksızın ve *f(x)* yerine *exp f(x)* ile verilmekteydi. Hardy, Polya'nın limit alma konusunda onu bilgilendiren kişi olduğunu belirtti. Knopp'un bu konudaki çalışması 1928 yılında olmasına rağmen bu eşitsizlik bazen Knopp eşitsizliği olarak adlandırılır. Bu eşitsizliği Polya' nın daha önce verdiği literatürde bulunmaktadır. Bu nedenle bu eşitsizlik için Polya-Knopp eşitsizliği daha yaygın olarak kullanılmaktadır[26].

1926' da Elliot (1.17) eşitsizliğine basit ve zarif bir ispat verdi (Elliott, 1926). İki yıl sonra Grandjot p =2 için (1.18) denklemine bir ispat önermesi, Ingham' ın integral form için basit bir ispat bulması ile gelişmeler devam etti. 1927' de Copson, Hardy' nin (1.18) eşitsizliğini Elliott' un ispatını uyarlayarak çift toplamlı olarak ifade etti. Bu sonuç Copson Eşitsizliği olarak bilinmektedir:

Eğer $p > 1$, $a_n \geq 0$, $\lambda_n > 0$ *ve* $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n^p$ *o zaman*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \Big(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{\lambda_k a_k}{\sum_{m=1}^{k} \lambda_m} \Big)^p \leq p^p \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n^p \tag{1.18}$$

Burada p^p mümkün en iyi sabittir. Copson eşitsizliğinde $\lambda_n = 1$ olduğunda Hardy' nin daha önce $p = 2$ için bulduğu zayıf form elde edilir. Bu nedenle $\lambda_n =$ 1 için Copson eşitsizliği bazen Copson-Hardy eşitsizliği olarak bilinir.

Hardy, döneminin matematikçileri ile iyi ilişkiler kurarak, zaman zaman onlara ulaştığı bilgileri ileterek desteklerini ve fikirlerini almış, teorinin önemli kısmını geliştirmiş, aldığı bilgileri sentezleyerek teorinin gelişmesinde merkez bir rol oynamıştır. Hardy, diğer matematikçilerin önemli katkıları olmasına rağmen aşağıda belirtilen (1.18) ve (1.19) eşitsizlikleri kendi adıyla adlandırılmasını haketmiş bir bilim adamıdır. Eğer bu çalışmalar ve katkılar Hardy tarafından organize edilmemiş olsaydı örneğin ayrık eşitsizlik Riesz veya Landau- Riesz adıyla, veya Hardy- Landau- Riesz adıyla da anılabilirdi[26].

1906-1928 döneminde oluşan bu gelişmelerin ışığında Hardy eşitsizliklerinin standard formları elde edildi ve ilk defa Hardy, Littlewood ve Polya'nın kitabında, ünlü Eşitsizlikler kitabında (1934) ortaya konulmuştur:

Ayrık eşitsizlik iddia eder ki eğer $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ bir negatif olmayan reel sayı dizisi ise, o zaman

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^{\tau} \leq \left(\frac{\tau}{\tau-1}\right)^{\tau}\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{\tau} \;, \quad \tau > 1 \,, \tag{1.19}$$

sürekli eşitsizlik bize anlatır ki f fonksiyonu $(0,\infty)$ üzerinde τ - kez integre edilebilir, negatif olmayan bir fonksiyondur, o zaman f, $(0, x)$ aralığı üzerinde her bir x pozitif sayısı için integre edilebilirdir ve

$$\left(\frac{\tau}{\tau-1}\right)^{\tau}\int_0^{\infty} f(\xi)^{\tau} d\xi \geq \int_0^{\infty}\left(\frac{1}{\xi}\int_0^{\xi} f(t)dt\right)^{\tau} d\xi \tag{1.20}$$

(1.18) ve (1.19)' un bazı önemli sonuçları aşağıdaki gibidir:

Sonuç 1.1.1: (1.19)' u adım fonksiyonlara sınırlayarak (1.20)'nin (1.19)'u gerektirdiği kolayca ispatlanabilir[27].

Sonuç 1.1.2: İki denklemde de bulunan $\left(\frac{\tau}{\tau-1}\right)^{\tau}$ *sabiti kesindir, yani mümkün en iyi sabittir:*

İlgili tüm seriler ve fonksiyonların sırasıyla (1.19) ve (1.20) eşitsizliklerini sağlayabilmesi için daha küçük bir sayı ile değiştirilemez.

Sonuç 1.1.3: (1.19) ve (1.20) eşitsizlikleri aşağıdaki zayıf formlarını gerektirir: Sırasıyla,

Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p < \infty$ *ve* $a_n \geq 0$ *ise o zaman* $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^p < \infty$

Eğer $\int_0^{\infty} f(\xi)^p d\xi < \infty$ *ve* $f(\xi) \geq 0$ *ise o zaman* $\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{\xi}\int_0^{\xi} f(t)dt\right)^p d\xi < \infty$

olur.

Sonuç 1.1.4: (1.19) ve (1.20) eşitsizlikleri ile sonuç(1.1.2) beraberce ayrık Hardy operatörü h ve sürekli Hardy operatörü H' nin aşağıdaki eşitliklerle tanımlandığını gösterir:

$$h(\{a_n\}) = \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k \right\} \quad , \quad Hf(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt \qquad (1.21)$$

Bu operatörler (p >1) olmak üzere sırasıyla;

l_p uzaylarını l_p içine ve L_p uzaylarını L_p içine yansıtırlar ve her biri $p' = \dfrac{p}{p-1}$ formuna sahiptir. Burada l_p uzayları tüm a = $\{a_n\}$ reel sayı dizilerinin ve L_p uzayları $(0,\infty)$ üzerinde ölçülebilir olan tüm f fonksiyonlarının Lebesgue uzaylarıdır. Öyle ki;

$$\|a\|_{l_p} := \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p\Big)^{1/p} < \infty \ , \quad \|f\|_{L_p} := \Big(\int_0^{\infty} |f(x)|^p dx\Big)^{1/p} < \infty \qquad (1.22)$$

I_p ve L_p uzayları ilk kez 1910' da F. Riesz tarafından araştırıldı ve tanıtıldı.

Hardy, Littlewood ve Polya' nın kitabından sonra (1934) matematiksel eşitsizlik teorisi resmiyet kazandı. Hardy eşitsizliğin genelleştirilmesi ve uygulamaları üzerine çok yoğun çalışmalar yapılmıştır. Opic ve Kufner' in Hardy tipi eşitsizlikler üzerine oluşturdukları kitap birçok önemli çalışmadan biri olarak kabul edilmektedir[34].

M. Tunç 2011'de "On some new inequalities for convex functions, Turk J Math, 35,1-7" makalesinde Pachpatte'nin sonuçlarına benzer eşitsizlikler vermiştir. S.S. Dragomir 2011'de "Hermite–Hadamard's type inequalities for operator convex functions, Applied Mathematics and Computation, 218, 766-772" makalesinde konveks fonksiyonlar için var olan bir eşitsizliğin operatör konveks fonksiyonlar için de sağlandığı göstermiştir. G. Zabandan 2009'da "A new refinement of the Hermite-Hadamard inequality for convex functions, JIPAM, vol. 10, iss. 2, art.45" makalesinde Dragomir'in konveks fonksiyonlar için kullandığı eşitsizliğin bir genellemesini yapmıştır. G.V. Milovanovic, M.E. Özdemir, R. Agarval, A.M. Fink, Roberts ve Varberg, N.S. Barnett, , U.S. Kırmacı, H. Yıldırım, M.Z. Sarıkaya, N. Ujević, S. Varošanec, P.S. Bullen ve

P. Cerone konveks fonksiyonlar üzerine çeşitli eşitsizlikler üzerine araştırmalar yapan diğer matematikçilerdendir[24].

1.2. Temel Kavramlar

Tanım 1.2.1 Konveks Kümeler : $C \subset \mathrm{R}^n$ *kümesinde bulunan herhangi iki noktayı birleştiren doğru parçası üzerindeki noktalar, aynı kümede kalıyorsa C'ye konveks küme ya da afin denir. Yani,* $0 \le \alpha \le 1$ *olmak üzere* $\forall x_1, x_2 \in C$ *için*

$$\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2 \in C \tag{1.23}$$

ise $C \subset \mathrm{R}^n$*, kümesi konveks bir kümedir.*

Teorem 1.2.1: (Rockafellar,1970) $C_1, C_2 \subset R^n$ *konveks iki küme olsun. Bu durumda*

i) $C_1 + C_2 = \{ y_1 + y_2 \mid y_1 \in C_1, y_2 \in C_2 \} \subset R^n$ *konveks kümedir.*

ii) $\lambda \in R$ *için* λC_1 *konvekstir.*

iii) $C_1 - C_2$ *konvekstir.*

iv) *Boş küme, konveks küme olarak düşünülür.*

v) *Herhangi sayıda (sonlu, sayılabilir ya da sayılamaz) konveks kümelerin kesişimi yine konveks bir kümedir.*

Tanım 1.2.2 Konveks Fonksiyonlar: $\forall \xi, \rho \in I \subset R$ *ve* $0 \le \lambda \le 1$ *için*

$$f(\lambda\xi + (1-\lambda)\rho) \le \lambda f(\xi) + (1-\lambda) f(\rho) \tag{1.24}$$

ise $f : I \to R$ *fonksiyonu konveks fonksiyon adını alır.*

$\lambda = \frac{1}{2}$ *durumunda konveks fonksiyon aşağıdaki gibi olur:*

$$f\left(\frac{\xi+\rho}{2}\right) \le \frac{f(\xi) + f(\rho)}{2} \tag{1.25}$$

Örnek 1.2.1: (R Üzerindeki Konveks Fonksiyon Örnekleri).

- *Afin: Herhangi a,b* $\in \mathrm{R}$ *için f(x) = ax+b fonksiyonu* R *üzerinde konveks bir fonksiyondur.*
- *Eksponant: Herhangi* $a \in \mathrm{R}$ *için f(x)=* $e^{\alpha x}$ *fonksiyonu* R *üzerinde konveks bir fonksiyondur.*
- *Kuvvet:* $t \geq 1$ *veya* $t \geq 0$ *için f(x)=* x^{t} *fonksiyonu pozitif reel sayılar kümesi* $R^{+} = (0, \infty)$ *üzerinde konveks bir fonksiyondur.*
- *Mutlak değer kuvveti: p≥1 için* $|x|^{p}$ *fonksiyonu* R *üzerinde konveks bir fonksiyondur*
- *Negatif entropi: f(x) = xlogx fonksiyonu* R^{+} *üzerinde konveks bir fonksiyondur.*

Tanım 1.2.3: [42] $\forall \xi, \rho \in I \subset R$ *ve* $0 \leq \lambda \leq 1$ *için*

$$f(\lambda\xi + (1-\lambda)\rho < \lambda f(\xi) + (1-\lambda) f(\rho) \tag{1.26}$$

ise $f: I \to R$ *fonksiyonu kesin konveks adını alır.*

Tanım 1.2.4: -f fonksiyonu konveks ise $f: \mathrm{I} \to R$ *fonksiyonuna konkav fonksiyon denir.*

Tanım 1.2.5: –f fonksiyonu kesin konveks ise $f: \mathrm{I} \to R$ *fonksiyonuna kesin konkav fonksiyon denir.*

*Örnek 1.2.2: (*R *Üzerindeki Konkav Fonksiyon Örnekleri).*

- *Afin: Herhangi a,b* $\in R$ *için* R *üzerinde f(x) = ax+b konkav bir fonksiyondur.*
- *Kuvvet:* $0 \leq t \leq 1$ *için pozitif reel sayılar kümesi* R^{+} *üzerinde f(x) =* x^{t} *konkav bir fonksiyondur.*
- *Logaritma:* R^{+} *üzerinde logx konkav bir fonksiyondur.*

Tanım 1.2.6: İzotonik Lineer Fonksiyoneller [42]

E boş olmayan bir küme, L, aşağıdaki özelliklere sahip reel değerli bir $f: E \to R$ *lineer fonksiyonlar sınıfı olsun:*

(L_1) *Eğer* f, g *ve* $c_1, c_2 \in R$ *ise o zaman* $(c_1 f + c_2 g) \in L$

(L_2) Eğer $\forall\ t \in E$ için $f(t) = 1$ ise o zaman $f \in L$

İzotonik Lineer Fonksiyoneller $A: L \to \mathbb{R}$ *olmak üzere aşağıdaki özelliklere sahip fonksiyonellerdir:*

(A_1) Eğer $f, g \in L$ ve $c_1, c_2 \in R$, o zaman $A(c_1 f + c_2 g) = c_1 A(f) + c_2 A(g)$

(A_2) Eğer tüm $t \in E$ için $f \in L$ *ve* $f(t) \geq 0$ ise o zaman $A(f) \geq 0$

İzotonik Lineer fonksiyonların en sık kullanılan örnekleri $A(g) = \int_E g d\mu$ veya $A(g) = \sum_{k \in E} p_k g_k$ şeklinde verilir.

Birinci eşitlikte μ, E üzerinde pozitif bir ölçüdür. İkinci eşitlikte $p_k > 0$, $k \in E$ olmak üzere E, doğal sayılar kümesinin bir alt kümesidir.

Tanım 1.2.7 İntegral Denklem:

Aşağıda g(s) bilinmeyen fonksiyon olmak üzere bazı integral denklemler verilmiştir:

$$g(s) = \int_a^b \Gamma(s,\xi) g(\xi) d\xi$$

$$f(s) = g(s) + \int_a^b \Gamma(s,\xi) g(\xi) d\xi \tag{1.27}$$

$$g(s) = \int_a^b \Gamma(s,\xi) g(\xi)^2 d\xi$$

Bilinmeyen fonksiyonlar üzerinde lineer operatörlerin uygulandığı integral denklemler lineer integral denklem olarak adlandırılır.

Yukarıda örnek olarak verilen integral denklemlerden ilk ikisi lineer, üçüncüsü ise lineer değildir. L bir lineer operatör olmak üzere yukarıda verilen lineer denklemler aşağıdaki gibi yazılır:

$$L[g(s)] = f(s) \tag{1.28}$$

Lineer operatörler a_1 ve a_2 iki sabit olmak üzere aşağıdaki eşitliği sağlar:

$$L[a_1 g_1(s) + a_2 g_2(s)] = a_1 L[g_1(s)] + a_2 L[g_2(s)] \tag{1.29}$$

Lineer integral denklemlerin en genel formu aşağıdaki gibidir:

$$h(s)g(s)= f(s)+\lambda\int_{a}\Gamma(s,\xi)g(\xi)d\xi \tag{1.30}$$

Bu yazılışta integralin üst sınırı değişken ya da sabit olabilir. *f, h* ve Γ fonksiyonları bilinen fonksiyonlar; g bilinmeyen fonksiyon; λ sıfır olmayan reel veya kompleks bir parametre; $\Gamma(s,\xi)$ çekirdektir.

Differansiyel denklemler kullanılarak çözülebilen birçok problem integral denklemler kullanılarak daha etkin bir şekilde çözümlenebilmektedir. Bununla beraber integral ve differansiyel eşitsizlikler, differansiyel teorilerin gelişmesinde integral denklemler kadar önemli rol oynamıştır.

Tanım 1.2.8. İntegral Eşitsizlikler:

$i=1,2,\ldots,m$ *olmak üzere*

$$L_i(u)=a_{i1}\,u_1+a_{i2}\,u_2+\ldots+a_{in}\,u_n\geq 0 \tag{1.31}$$

şeklindeki lineer eşitsizlikler sisteminin çözümü Dines tarafından lineer integral eşitsizliklere genişletildi. Bu eşitsizlik sisteminin çözümünde önce homojen olmayan lineer denklem sistemi ele alınır:

$$L_i(u)=b_i \quad (i=1,2,\ldots,m) \tag{1.32}$$

Ve bu sistemin adjoint sistemi:

$$M_i(v)=a_{1k}v_1+a_{2k}v_2+\ldots+a_{mk}v_m=0 \tag{1.33}$$

O zaman aşağıdaki bağıntı vardır:

$$\sum_i v_iL_i(u)-\sum_i u_kM_k(v)=0 \tag{1.34}$$

$\lambda=1,2,\ldots,s$ *olmak üzere* $v_1^{(\lambda)},v_2^{(\lambda)},\ldots,v_m^{(\lambda)}$ *(1.33) denkleminin lineer bağımsız çözümleri olsun. (1.32) denkleminin bir çözümünün olması için gerek ve yeter şart* $b_1,b_2,\ldots,b_m$ *sayılarının aşağıdaki koşulu sağlamasıdır:*

$$\sum_i b_iv_i^{(\lambda)}=0 \quad \lambda=1,2,\ldots,s \tag{1.35}$$

Eşitsizlik sistemi (1.30)' in çözümünün varlığı için gerek ve yeter koşul (1.35) denkleminin $b_1, b_2, ..., b_m \geq 0$ *negatif olmayan çözümleri olmasıdır. Benzer şekilde lineer integral eşitsizliklerin çözümü verilebilir:*

$$L(\varphi) = \varphi(x) - \lambda \int_a^b \Gamma(x, y)\varphi(y)dy \geq 0 \tag{1.36}$$

$L(\varphi) = 0$ *denklemini adjoint integral denklemi aşağıdaki denklem olsun:*

$$M(\phi) = \phi(x) - \lambda \int_a^b \Gamma(y, x)\phi(y)dy = 0 \tag{1.37}$$

Eğer (1.37) denkleminin lineer bağımsız çözümleri $\phi_1(\mathrm{x}), \phi_2(\mathrm{x}), ..., \phi_m(x)$ *ise o zaman aşağıdaki özdeşlik sağlanır:*

$$\int_a^b [\phi L(\varphi) - \varphi M(\phi)]dx = 0 \tag{1.38}$$

Eğer λ' nın herhangibir karekteristik değeri yoksa, o zaman (1.37) denkleminin $\phi(x) = 0$ *dışında çözümü yoktur.*

$$L(\varphi) = f(x) \tag{1.39}$$

denklemi f(x) ne olursa olsun bir çözüme sahip ise, (1.2.14) ' in çözümü vardır. Eğer λ bir karekteristik değer ise, o zaman (1.39) denkleminin çözümü olması için f(x)' in i = 1,2,..,m için

$$\int_a^b f(x)\phi_i(x)dx = 0 \tag{1.40}$$

denklemini sağlaması gerekir. Sonuç olarak (1.36) eşitsizliğinin çözümünün varlığı için (1.40) eşitsizliğinin $f(x) \geq 0$ *şeklinde çözümünün olması gerek ve yeter koşuldur.*

2. LİNEER İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLER

2.1. Gronwall Tipi Lineer İntegral Eşitsizlikler

Literatürde en sık uygulanan, en güçlü integral eşitsizlikler Gronwall-Bellman eşitsizliği ve onun genelleştirilmeleridir. Gronwall 1919'da aşağıdaki integral eşitsizliği oluşturdu.

Teorem 2.1.1: Gronwall eşitsizliği [14]

u(t), $[\alpha,\alpha+h]\to R$ *üzerinde tanımlı negatif olmayan sürekli bir fonksiyon olsun. a ve b negatif olmayan sabitler olmak üzere her* $t\in[\alpha,\alpha+h]$ *için u(x) fonksiyonu aşağıdaki integral eşitsizliğini sağlarsa;*

$$u(t)\le\int_{\alpha}^{t}(bu(s)+\mathrm{a})\,\mathrm{ds} \tag{2.1}$$

o zaman $\mathrm{t}\in[\alpha,\alpha+h]$ *için*

$$u(t)\le ah\,\mathrm{e}^{bh} \tag{2.2}$$

olur.

Örnek 2.1.1: $u'(t)=bu(t)+a$ *birinci derece lineer adi diferansiyel denklemini düşünelim. u(t) negatif olmayan sürekli fonksiyon ve* $a=3,$ *ve* $0\le b\le 7$ *olsun. O zaman;*

$$u'(t)\le 7u(t)+3 \tag{2.3}$$

Bu eşitsizliği t ye göre α ile t *arasında integre edersek aşağıdaki eşitsizlik* bulunur:

$$u(t)-u(\alpha)\le\int_{\alpha}^{t}(7u(s)+3)ds \tag{2.4}$$

$u(\alpha)=0$ şartını kullanırsak aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$u(t)\le\int_{\alpha}^{t}(7u(s)+3)ds \tag{2.5}$$

Teorem 2.1.1(Gronwall eşitsizliği) uygularsak;

$$u(t)\le 3(t-\alpha)e^{(7(t-\alpha))} \tag{2.6}$$

Teorem 2.1.1' i uygulayarak verilen bir differansiyel denkleme kolayca bir üst sınır tayin ettik. Bu eşitsizlik üzerine yapılan çalışmalardan biri de Bellman'ın çalışmasıydı ve bu çalışma Gronwall eşitsizliğinin genelleştirilmesidir:

Teorem 2.1.2 Gronwall-Belmann Eşitsizliği :

$\xi\ge\alpha$ için $u(\xi)$ ve $g(\xi)$ reel değerli negatif olmayan sürekli fonksiyonlar olsun. Eğer $c\ge 0$ ve $\xi\ge\alpha$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanıyorsa;

$$\int_{\alpha}^{\xi}g(s)u(s)ds+c\ge u(\xi) \tag{2.7}$$

o zaman her $\xi\ge\alpha$ için

$$u(\xi)\le ce^{\int_{\alpha}^{\xi}g(s)ds} \tag{2.8}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat 2.1.2: $k(\xi)-c=\int_{\alpha}^{\xi}g(s)u(s)ds$ *ve* $k(\alpha)=c$ *şeklinde bir fonksiyon tanımlansın. Bu fonksiyon için* $u(\xi)\le k(\xi)$ *eşitsizliği geçerlidir.* $w(\xi)$ *eşitliği* ξ *' ye göre türetilirse aşağıdaki eşitlik bulunur.*

$$k'(\xi)=g(\xi)u(\xi) \tag{2.9}$$

$u(\xi) \le k(\xi)$ *olduğunu kullanırsak aşağıdaki eşitsizlik yazılır:*

$$g(\xi)k(\xi) \ge k'(\xi) \qquad (2.10)$$

Bu eşitsizlikte her iki yan $k(\xi)$ *ile bölünürek aşağıdaki eşitsizliğe ulaşılır:*

$$\frac{k'(\xi)}{k(\xi)} \le g(\xi) \qquad (2.11)$$

Yukarıdaki eşitsizlikte her iki yan ξ *' ye göre α' dan* ξ *' ye kadar integre edilirse aşağıdaki eşitsizlik bulunur:*

$$ln(k(\xi)) - ln(k(\alpha)) \le \int_{\alpha}^{\xi} g(s)ds \qquad (2.12)$$

$$\int_{\alpha}^{\xi} g(s)ds \ge ln(\frac{k(\xi)}{k(\alpha)}) \qquad (2.13)$$

$w(\alpha) = c$ *olduğundan aşağıdaki eşitsizlik yazılır:*

$$ln(\frac{k(\xi)}{c}) \le \int_{\alpha}^{\xi} g(s)ds \qquad (2.14)$$

Yukarıdaki eşitsizliğin her iki yanı e tabanında yazılırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$k(\xi) \le ce^{\int_{\alpha}^{\xi} g(s)ds} \qquad (2.15)$$

Bu eşitsizlik $u(\xi) \le k(\xi)$ *eşitsizliğinde yerine konulursa ispatı istenen eşitsizlik bulunur:*

$$u(\xi) \le ce^{\int_{\alpha}^{\xi} g(s)ds} \qquad (2.16)$$

Bellman' ın sonucu Gronwall eşitsizliğini içeriyordu. Bu nedenle bu tür eşitsizlikler Gronwall-Bellman eşitsizliği ya da Gronwall tipi eşitsizlikler olarak adlandırıldı. Gronwall-Belmann eşitsizliği differansiyel denklemler, integral denklemler ve birçok eşitsizlik tipleri için gerekli altyapı sağladı. Son yıllarda birçok araştırmacı bu eşitsizlik yardımıyla çeşitli tiplerde iki veya daha fazla değişkenli Gronwall tipi integral eşitsizlikler oluşturdu.

Örnek 2.1.2:

$y'(t) = g(t)y(t)$ *birinci derece lineer diferansiyel denklemi ele alalım. u(t) negatif olmayan sürekli fonksiyonu I = [0, t] aralığında tanımlı ve y(0) = c,* $g(t) \leq \sqrt{t}$ *olsun. O zaman lineer diferansiyel denklem için aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir:*

$$y'(t) \leq \sqrt{t}\ y(t) \tag{2.17}$$

Bu eşitsizlik t' ye göre 0' dan t' ye kadar integre edilir, y(0) = c koşulunu uygulanır ise aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$y(t) \leq c + \int_0^t \sqrt{t}\ y(\xi)\, d\xi \tag{2.18}$$

Gronwall-Belmann Eşitsizliğini uygularsak

$$y(t) \leq c^{\left(\int_0^t \sqrt{\xi}\, d\xi\right)}$$

$$y(t) \leq c\ \ exp\left(\frac{2}{3}\sqrt{t^3}\Big|_0^t\right) \tag{2.19}$$

$$y(t) \leq c\ \ exp\left(\frac{2}{3}\sqrt{t^3}\right)$$

Bu eşitsizlik (2.1) eşitsizliğinin üst sınırı için bir tahmindir. Gronwall-Belmann eşitsizliğinin bir genelleştirilmesi aşağıdaki teorem ile verilir.

Teorem 2.1.3: y(t), p(t), q(t), f(t) ve g(t) fonksiyonları $I=[\alpha,\beta]$ *üzerinde negatif olmayan sürekli fonksiyonlar olsun ve t ϵ I olmak üzere aşağıdaki eşitsizlik sağlansın[38]:*

$$y(t)-p(t)\le q(t)\int_{\alpha}^{t}(f(\xi)y(\xi)+g(\xi))d\xi \tag{2.20}$$

O zaman aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$q(t)\int_{\alpha}^{t}(f(\xi)p(\xi)+g(\xi))exp(\int_{\xi}^{t}f(r)q(r)dr)d\xi+p(t)\ge y(t) \qquad t\in I \tag{2.21}$$

İspat 2.1.3: $w(t)=\int_{\alpha}^{t}(f(\xi)u(\xi)+g(\xi))d\xi,\quad w(\alpha)=0$ *şeklinde bir fonksiyon tanımlansın. O zaman* $q(t)w(t)\ge y(t)-p(t)$ *olur. Yukarıdaki w(t) integral eşitliğini t' ye göre türeterek aşağıdaki eşitlik elde edilir:*

$$w'(t)-g(t)=f(t)y(t) \tag{2.22}$$

Bu eşitlikte y(t) yerine konulursa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$w'(t)\le f(t)p(t)+f(t)q(t)w(t)+g(t) \tag{2.23}$$

Veya aşağıdaki şekilde bu eşitsizlik yazılır:

$$f(t)p(t)+g(t)\ge w'(t)-f(t)q(t)w(t) \tag{2.24}$$

$\mu=exp(-\int_{\alpha}^{t}f(r)q(r)dr)$ *integral faktörüdür. Yukarıdaki eşitsizliğin her iki yanı integral faktör ile çarpılır ve t' ye göre α' dan t' ye kadar integre edilir ve aşağıdaki eşitsizlik yazılır:*

$$w(t)exp(-\int_{\alpha}^{t} f(r)q(r)dr) \le \int_{\alpha}^{t}(f(\xi)p(\xi)+g(\xi))exp(-\int_{\alpha}^{\xi} f(r)q(r)dr))d\xi \tag{2.25}$$

$$w(t) \le exp(\int_{\alpha}^{t} f(r)q(r)dr)\int_{\alpha}^{t}(f(\xi)p(\xi)+g(\xi))exp(-\int_{\alpha}^{\xi} f(r)q(r)dr))d\xi \tag{2.26}$$

Kısmi integrasyon metodu ile aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$w(t) \le \int_{\alpha}^{t}(f(\xi)p(\xi)+g(\xi))exp(\int_{s}^{t} f(r)q(r)dr))d\xi \tag{2.27}$$

Yukarıdaki eşitsizlik $q(t)w(t)+p(t) \ge y(t)$ *eşitsizliğinde yerine yazılırsa istenen eşitsizlik elde edilmiş olur.*

Sonuç 2.1.1: Teorem 2.1.3.' de q(t) = 1 konulursa Chandiror tarafından 1957' de verilen eşitsizlik bulunur[6]:

$$y(t) \le p(t) + \int_{\alpha}^{t}(f(s)p(s)+g(s))exp(\int_{s}^{t} f(r)dr)ds \qquad t \in I \tag{2.28}$$

Teorem 2.1.3.' de g(s) = 0 konulursa Gollwitzer tarafından 1969' da verilen eşitsizlik bulunur[13]:

$$y(t) \le p(t) + q(t)\int_{\alpha}^{t} f(s)p(s)exp(\int_{s}^{t} f(r)q(r)dr)ds \qquad t \in I \tag{2.29}$$

Bellman 1958'de bu eşitsizliğin bir türü olarak aşağıdaki eşitsizliği ispatladı.

Teorem 2.1.4: [3] y(t) ve f(t) sürekli ve negatif olmayan fonksiyonları $I=[\alpha,\beta]$ *aralığında tanımlı,* $p(t) \in I$ *sürekli, pozitif ve azalmayan bir fonksiyon olsun. O zaman*

$$y(t) \le p(t) + \int_{\alpha}^{t} f(\xi)y(\xi)d\xi\,,\ t \in I\,,\ \text{eşitsizliği}$$

$$y(t) \le p(t)\exp(\int_\alpha^t \mathrm{y}(\xi)d\xi), \quad t \in I \text{ , eşitsizliğini gerektirir.}$$

İspat 2.1.4: $z(t) = \dfrac{y(t)}{p(\mathrm{t})}$ *olsun.* $\mathrm{y}(t) \le p(t) + \int_\alpha^t f(\xi)\,\mathrm{y}(\xi)d\xi$ *eşitsizliğinin her iki yanını p(t) ile bölerek aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:*

$$\frac{y(t)}{p(\mathrm{t})} \le 1 + \int_\alpha^t \frac{f(\xi)y(\xi)}{p(\xi)}d\xi$$

$$z(t) \le 1 + \int_\alpha^t \frac{y(\xi)}{p(t)} f(\xi)d\xi \tag{2.30}$$

Veya $$z(t) \le 1 + \int_\alpha^t \frac{\mathrm{p}(s)}{p(t)} z(\xi) f(\xi)d\xi \tag{2.31}$$

$t \ge \xi$ *olduğundan* $\dfrac{p(\xi)}{p(t)} \le 1$ *olur. Bu nedenle aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:*

$$\int_\alpha^t z(\xi) f(\xi)d\xi + 1 \ge z(t) \tag{2.32}$$

Gronwall – Bellman eşitsizliğini kullanarak aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$z(t) \le \exp(\int_\alpha^t f(\xi)d\xi) \tag{2.33}$$

Yukarıdaki eşitsizlikte $\mathrm{z}(t) = \dfrac{y(t)}{p(\mathrm{t})}$ *konularak istenen eşitsizlik bulunur:*

$$y(t) \le p(t)\exp(\int_\alpha^t y(\xi)d\xi) \tag{2.34}$$

Gronwall – Bellman eşitsizliğinin bir genelleştirilmesi de aşağıdaki gibidir.

Teorem 2.1.5:[37] y(t), f(t) ve g(t) reel değerli, negatif olmayan sürekli fonksiyonları $I = [\alpha, \beta]$ *aralığında tanımlı olsun. c negatif olmayan bir sayı olmak üzere;*

$$y(t) \le C + \int_0^t f(\xi)(y(\xi) + \int_0^\xi g(r)y(r)dr)d\xi, \ t \in I, \tag{2.35}$$

eşitsizliği sağlandığı zaman, aşağıdaki eşitsizlikte sağlanır:

$$y(t) \le C\{1 + \int_0^t f(\xi)exp(\int_0^\xi (f(r) + g(r)dr)d\xi\}, \quad t \in I \tag{2.36}$$

İspat 2.1.5: Aşağıdaki gibi bir v(t) fonksiyonu tanımlansın:

$$v(t) = C + \int_0^t f(\xi)(y(\xi) + \int_0^s g(r)y(r)dr)d\xi, \quad v(0)=C \tag{2.37}$$

Bu fonksiyonun t' ye göre türevi alınır:

$$v'(t) = f(t)(y(t) + \int_0^t g(r)y(r)dr) \tag{2.38}$$

$y(t) \le v(t)$ *olduğundan aşağıdaki eşitsizlik yazılır:*

$$v'(t) \le \left(v(t) + \int_0^t g(r)v(r)dr\right) f(t) \tag{2.39}$$

Eğer z(0) = v(0) = C ve $v(t) \le z(t)$ *olmak üzere*

$z(t) = \left(v(t) + \int_0^t g(r)v(r)dr\right)$ *konulursa* $v'(t) \le f(t)z(t)$ *olur. z(t) nin t' ye göre türevi alınırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir:*

$$z'(t) = v'(t) + g(t)v(t)$$

$$z'(t) \le v'(t) + g(t)z(t)$$

$$z'(t) \le f(t)z(t) + g(t)z(t)$$

$$\frac{z'(t)}{z(t)} \le (f(t) + g(t)) \tag{2.40}$$

Her iki yanı 0 ‘dan t ‘ ye kadar integre edilerek aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\ln z(t) - \ln z(0) \le \int_0^t (f(r) + g(r))dr,$$

$$\ln\left(\frac{z(t)}{z(0)}\right) \le \int_0^t (f(r) + g(r))\,dr \qquad (2.41)$$

Her iki yan e tabanına alınır, v(0)=C konularak aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$z(t) \le C\exp\left(\int_0^t (f(r) + g(r)\,\mathrm{dr}\right) \qquad (2.42)$$

Yukarıdaki eşitsizlik ve $v'(t) \le f(t)z(t)$ *kullanılarak aşağıdaki eşitsizlik yazılır:*

$$v'(t) \le C\;\; f(t)\exp\left(\int_0^t (f(r) + g(r))dr\right) \qquad (2.43)$$

Yukarıdaki eşitsizliğin her iki yanı 0’ dan t ’ ye integre edilir, t = ξ *konulursa*

$$v(t) - v(0) \le C\int_0^t f(\xi)\exp\left(\int_0^{\xi} (f(r) + g(r))dr\right)d\xi \qquad (2.44)$$

v(0) = c konularak;

$$v(t) \le C + C\int_0^t f(\xi)\exp\left(\int_0^{\xi} (f(r) + g(r))dr\right)d\xi, \qquad (2.45)$$

$$v(t) \le C\;\; \{1 + \int_0^t f(\xi)\exp\left(\int_0^{\xi} (f(r) + g(r))dr\right)d\xi\} \qquad (2.46)$$

$y(t) \le v(t)$ *olduğundan istenen eşitsizlik ispatlanmış olur.*

Oguntuase, 2001’ de bu teoremi aşağıdaki gibi genelleştirdi.

Teorem 2.1.5: y(t) ve f(t) reel değerli, negatif olmayan sürekli fonksiyonları $I=[\alpha,\beta]$ *aralığında tanımlı olsun. Farz edelim ki her t,s ϵ I için* $\Gamma(t,\xi)$ *ve onun kısmi türevi* $\frac{\partial}{\partial t}\Gamma(t,\xi)$ *var ve sürekli fonksiyonlar olsunlar. Farz edelim ki* $\Gamma(t,\xi)\geq 0$ $\Gamma_t(t,\xi)\leq 0$ *ve t ϵ I , c bir negatif olmayan sabit olmak üzere aşağıdaki eşitsizlik sağlansın:*

$$y(t)\leq C+\int_\alpha^t f(\xi)y(\xi)ds+\int_\alpha^t f(\xi)\int_\alpha^\xi \Gamma(\xi,\tau)y(\tau)d\tau d\xi \tag{2.47}$$

O zaman t ϵ I için aşağıdaki eşitsizlik te sağlanır:

$$y(\mathrm{t})\leq C\{1+\int_\alpha^t f(\xi)\exp(\int_\alpha^\xi (f(\tau)+\Gamma(\tau,\tau))d\tau)\,\mathrm{d}\,\xi\} \tag{2.48}$$

İspat 2.1.6: Bir v(t) fonksiyonunu $\mathrm{y}(t)\leq v(t)$ *olacak şekilde aşağıdaki gibi tanımlayalım:*

$$v(t)=C+\int_\alpha^t f(s)\,\mathrm{y}(\xi)d\xi+\int_\alpha^t f(\xi)\int_\alpha^s \Gamma(\xi,\tau)\,\mathrm{y}(\tau)d\tau d\xi,\quad v(\alpha)=C \tag{2.49}$$

Bu eşitlik t ‘ ye göre türevi alınarak aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\begin{gathered} v'(t)=f(t)\,\mathrm{y}(t)+f(t)\int_\alpha^t \Gamma(t,\tau)\,\mathrm{y}(\tau)d\tau, \\ v'(t)=f(t)\left(\mathrm{y}(t)+\int_\alpha^t \Gamma(t,\tau)\,\mathrm{y}(\tau)d\tau\right) \end{gathered} \tag{2.50}$$

$\mathrm{y}(t)\leq v(t)$ *olduğu kullanılarak aşağıdaki eşitsizlik yazılır:*

$$v'(t)\leq f(t)\left(v(t)+\int_\alpha^t \Gamma(t,\tau)\,\mathrm{y}(\tau)d\tau\right) \tag{2.51}$$

$m(t)=v(t)+\int_\alpha^t \Gamma(t,\tau)v(\tau)d\tau$ *konulursa* $v'(t)\leq f(t)m(t)$ *bulunur.*

$v(t)\leq m(t)$ *ve* $m(a)=v(a)=C$ *olduğu açıktır. m(t) eşitliği Leibnitz kuralını kullanılarak t' ye göre türevi alınırsa aşağıdaki eşitlik bulunur:*

$$m'(t)=v'(t)+\Gamma(t,t)v(t)+\int_\alpha^t \Gamma_t(t,\tau)v(\tau)d\tau \tag{2.52}$$

$\Gamma_t(t,s) \le 0$ *olduğundan* $m'(t) = v'(t) + \Gamma(t,t)v(t)$ *olur.*

$$m'(t) \le f(t)m(t) + \Gamma(t,t)m(t)$$

$$\frac{m'(t)}{m(t)} \le f(t) + \Gamma(t,t) \tag{2.53}$$

Her iki yanı α' dan t' ye integre ederek aşağıdaki eşitsizlik yazılır:

$$\ln m(t) - \ln m(\alpha) \le \int_\alpha^t (f(\tau) + \Gamma(\tau,\tau))d\tau$$

$$\ln\left(\frac{m(t)}{m(\alpha)}\right) \le \int_\alpha^t (f(\tau) + \Gamma(\tau,\tau))d\tau \tag{2.54}$$

Her iki yan e' nin kuvvetleri olarak yazılır:

$$m(t) \le C\exp\left(\int_\alpha^t (f(\tau) + \Gamma(\tau,\tau))d\tau\right) \tag{2.55}$$

$v'(t) \le f(t)m(t)$ *kullanılarak aşağıdaki eşitsizlik yazılır:*

$$v'(t) \le C \quad f(t)\exp\left(\int_\alpha^t (f(\tau) + \Gamma(\tau,\tau))d\tau\right) \tag{2.56}$$

Her iki yanı α' dan t' ye integre ederek aşağıdaki eşitsizlik yazılır:

$$v(t) - v(\alpha) \le C\int_\alpha^t f(\xi)\exp\left(\int_\alpha^\xi (f(\tau)+\Gamma(\tau,\tau))d\tau\right)d\xi, \tag{2.57}$$

işlemler yapılarak

$$C + C\int_\alpha^t f(\xi)\exp\left(\int_\alpha^s (f(\tau)+\Gamma(\tau,\tau))d\tau\right)d\xi \ge v(t)$$

$$v(t) \le C\{1 + \int_\alpha^t f(\xi)\exp\left(\int_\alpha^s (f(\tau)+\Gamma(\tau,\tau))d\tau\right)d\xi\} \tag{2.58}$$

$y(t) \le v(t)$ olduğu kullanılırsa ispatı istenen eşitsizlik elde edilir:

$$C\ \{1+\int_{\alpha}^{t} f(\xi)exp(\int_{\alpha}^{\xi}(f(\tau)+\Gamma(\tau,\tau))d\tau)d\xi\} \ge y(t) \qquad (2.59)$$

Teorem 2.1.6' da $\Gamma(t,s) = h(t)g(s)$ konularak aşağıdaki sonuç elde edilir:

$h(t)$, $g(s)$ ve $f(t)$ reel değerli, negatif olmayan sürekli fonksiyonları $I=[\alpha,\beta]$ aralığında tanımlı olsun. Farz edelim ki $h'(t) \le 0$ ve $\Gamma(t,s)=h(t)g(\xi)$, $C \ge 0$ bir sabit olsun.

$$\mathrm{y}(t) \le c+\int_{\alpha}^{t} f(\xi)\,\mathrm{y}(\xi)d\xi+\int_{\alpha}^{t} f(\xi)\,\mathrm{y}(\xi)(\int_{\alpha}^{\xi} g(\tau)\,\mathrm{y}(\tau)\,\mathrm{d}\tau)\,\mathrm{d}\xi,\ t \in I \qquad (2.60)$$

Bu eşitsizlik aşağıdaki eşitsizliği gerektirir.

$$C\{1+\int_{\alpha}^{t} f(\xi)\exp(\int_{\alpha}^{\xi}(f(\tau)+h(\tau)g(\tau))d\tau)d\xi\} \ge \mathrm{y}(t),\ t \in I \qquad (2.61)$$

2.2. q-Steffensen Tipi İntegral Eşitsizlikler

Steffensen eşitsizliği aşağıdaki formdadır:

$$\int_{\beta-\lambda}^{\beta} h(x)dx \le \int_{\alpha}^{\beta} h(x)g(x)dx \le \int_{\alpha}^{\alpha+\lambda} h(x)dx \qquad (2.62)$$

Burada $\lambda = \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx,$ olmak üzere $h(x), g(x)$ fonksiyonları $[\alpha,\beta]$ aralığında integre edilebilir fonksiyonlar, aralığın iç bölgesindeki her x için h(x) azalan ve $0 \le g(x) \le 1$ dir. Bu eşitsizlik 1918 yılında yayınlandığında alışılmadık ve orjinal formu ile matematikçilerin dikkatini çekmişti. Bu eşitsizliğin birçok genelleştirmeleri ve modifikasyonları yapıldı. Bir f fonksiyonunun bir [α, β] aralığında q-integrali aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$I_q(f;\alpha,\beta)=\int_{\alpha}^{\beta} h(x)d_qx=\int_{0}^{\beta} h(x)d_qx-\int_{0}^{\alpha} h(x)d_qx \quad (0<q<1) \tag{2.63}$$

Burada $\int_{0}^{\beta} h(x)d_qx=\beta(1-q)\sum_{j=0}^{\infty} f(\beta q^j)q^j$ ile verilir. Eğer (2.63) eşitliği varsa f(x), (α, β) üzerinde q-integrallenebilirdir denir. Eğer bir f(x) fonksiyonu [0, β] üzerinde q-integrallenebilir ve $f(x)\geq 0$ ise o zaman aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\int_{0}^{\beta} f(x)d_qx\geq 0 \quad (0<q<1) \tag{2.64}$$

Eğer f fonksiyonu [0, β] üzerinde integrallenebilir ve $0<q<1$ ise, o zaman aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\lim_{q\to 1} I_q(f;\alpha,\beta)=I(f;\alpha,\beta)=\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt \tag{2.65}$$

Lemma 2.2.1: Eğer bir f(x) fonksiyonu [0, b] üzerinde q-integrallenebilir, negatif olmayan ve azalmayan bir fonksiyon ise o zaman aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\int_{a}^{b} f(x)d_qx\geq 0 \quad (0\leq a\leq b\ ;\ 0<q<1) \tag{2.66}$$

İspat 2.2.1: Tanımdan hareketle aşağıdaki eşitlik yazılır:

$$\int_{a}^{b} f(x)d_qx=(1-q)\sum_{n=0}^{\infty}(bf(bq^n)-af(aq^n))q^n \tag{2.67}$$

$a<b$, $0<q<1$ *ve* $f(x)\geq 0$ *olduğundan* $af(aq^n)\leq bf(aq^n)$ *dir. Ayrıca* $aq^n\leq bq^n$ *ve f(x) azalan olmayan bir fonksiyon olduğundan*

$bf(aq^n) \leq bf(bq^n)$ *olur. Bu nedenle her n doğal sayısı için,* $bf(bq^n) - af(aq^n) \geq 0$ *dir ve (2.2.5) 'in negatif olmadığı ortaya çıkar, ispat bu sonuç üzerine tamamlanmış olur.*

Lemma 2.2.2: Kabul edelim ki; u(x) fonksiyonu [a, b] üzerinde sürekli ve tüm $q \in (0,1]$ için $I_q(v;a,b) > 0$ *olmak üzere v(x) negatif olmayan ancak integrallenebilir bir fonksiyondur. Bu durumda öyle bir* $\hat{q} \in (0,1)$ *bulunur ki her* $q \in (\hat{q},1)$ *için bir* $\xi = \xi(q) \in (a,b)$ *mevcuttur ve aşağıdaki eşitliği sağlar:*

$$I_q(uv;a,b) = u(\xi) I_q(v;a,b) \tag{2.68}$$

İspat 2.2.2: Varsayılan şartlar altında ortalama değer teoremi reel integraller için yazılır: (q=1) gereği $\delta \in (a,b)$ *olmak üzere aşağıdaki eşitlik yazılır:*

$$I(uv;a,b) = u(\delta) I(v;a,b) \tag{2.69}$$

(2.68) bağıntısını kullanarak aşağıdaki eşitlik yazılır:

$$\lim_{q \to 1} \frac{I_q(uv;a,b)}{I_q(v;a,b)} = u(\delta) \tag{2.70}$$

u(δ*), [a, b] üzerinde sürekli bir fonksiyon olduğu için minimumu* m_u *ve maximumu* M_u *olsun.* $\varepsilon = \min\{ M_u - u(\delta) \, , \, u(\delta) - m_u \}$ *olsun. O zaman öyle bir* $\hat{q} = \hat{q}(\xi) \in (0,1)$ *vardır ki tüm* $q \in (\hat{q},1)$ *için aşağıdaki eşitsizlikler gerçeklenir:*

$$u(\delta) - \varepsilon < \frac{I_q(uv;a,b)}{I_q(v;a,b)} < u(\delta) + \varepsilon \Rightarrow m_u < \frac{I_q(uv;a,b)}{I_q(v;a,b)} < M_u \tag{2.71}$$

u(x) in m_u ve M_u arasındaki tüm değerleri aldığı düşünülürse, aşağıdaki eşitliği sağlayan $\xi = \xi(q) \in (a,b)$ *olacak şekilde bir değerin var olduğu sonucuna varılır:*

$$\frac{I_q(uv;a,b)}{I_q(v;a,b)} = u(\xi) \tag{2.72}$$

Teorem 2.2.1: (q-Steffensen Eşitsizliği)

Kabul edelim ki a ve b pozitif sayılar olmak kaydıyla [a,b] üzerinde tanımlı f(x) ve h(x) sürekli fonksiyonlar olsun. Üstelik f(x) fonksiyonu [a, b] üzerinde azalan ve h(x) fonksiyonu (0,1) aralığında ve (a, b) içindeki her m için $\int_a^m h(x)d_qx > 0$ *olsun. Eğer* $\mu = \int_a^b h(x)d_qx$ *ile gösterilirse o zaman öyle bir* $\hat{q} \in (0,1)$ *vardır ki aşağıdaki eşitsizlik tüm* $q \in (\hat{q},1)$ *için sağlanır:*

$$\int_{b-\mu}^{b} f(x)d_qx \le \int_a^b f(x)h(x)d_qx \le \int_a^{a+\mu} f(x)d_qx \tag{2.73}$$

İspat 2.2.1: Lemma 2.2.2 de u ≡ g ve v ≡1 alınır. Öyle bir $q_1 \in (0,1)$ *vardır ki her* $q \in (q_1,1)$ *için* $\xi_1 = \xi_1(q) \in (a,b)$ *olur ve aşağıdaki eşitlik sağlanır:*

$$\mu = \int_a^b h(x)d_qx = h(\xi_1)\int_a^b d_qx = h(\xi_1)(b-a) \tag{2.74}$$

Burada 0 < h(x) < 1 olduğundan $0 < \mu < b-a$ *dir. Benzer olarak öyle bir* $q_2 \in (q_1,1)$ *vardır ki her* $q \in (q_2,1)$ *için* $\xi_2 = \xi_2(q) \in (a,b)$ *vardır. O zaman aşağıdaki eşitlik sağlanır:*

$$\int_a^{a+\mu} h(x)d_qx = \mu g(\xi_2) \qquad (a < \xi_2 < a+\mu) \tag{2.75}$$

Bunun sonucunda aşağıdaki eşitlik de yazılır:

$$\int_a^{a+\mu}(1-h(x))d_q x=\mu(1-h(\xi_2))>0 \tag{2.76}$$

Eşitsizliğin sağ tarafı $\int_a^{a+\mu} f(x)d_q x-\int_a^b f(x)h(x)d_q x$ *aşağıdaki gibi yazılırsa sağ taraf* $\int_a^{a+\mu} f(x)d_q x-\int_a^{a+\mu} f(x)h(x)d_q x-\int_{a+\mu}^b f(x)h(x)d_q x$ *$u \equiv f$ ve $v \equiv 1\text{-}h$ olarak alınır ve yukarıdaki ilk integrale Lemma 2.2.2 uygulanırsa aşağıdaki sonuca ulaşılır:*

Burada $q_3 \in (q_2,1)$ *için tüm* $q \in (q_3,1)$ *için* $\xi \in (a,a+\mu)$ *vardır ve aşağıdaki eşitlik sağlanır:*

$$\int_a^{a+\mu} f(x)(1-h(x))d_q x= f(\xi)\int_a^{a+\mu}(1-h(x))d_q x \tag{2.77}$$

f(x) azalan ve $\xi < a+\mu$ *olduğundan* $f(\xi)> f(a+\mu)$ *olduğu açıktır.* $q \in (q_3,1)$ *olsun. O zaman aşağıdaki eşitsizlik yazılır:*

$$\int_a^{a+\mu} f(x)(1-h(x))d_q x> f(a+\mu)\int_a^{a+\mu}(1-h(x))d_q x \tag{2.78}$$

$\int_a^{a+\mu}(1-h(x))d_q x=\mu-\int_a^{a+\mu} h(x)d_q x=\int_a^b h(x)d_q x-\int_a^{a+\mu} h(x)d_q x$ *olduğundan aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:*

$$\int_a^{a+\mu} f(x)(1-h(x))d_q x> f(a+\mu)\int_{a+\mu}^b h(x)d_q x \tag{2.79}$$

Önceki eşitsizlik ve f(x) fonksiyonu azalan ise sağ taraf aşağıdaki gibi olur:

Sağ taraf $f(a+\mu)\int_{a+\mu}^{b} h(x)d_q x - \int_{a+\mu}^{b} f(x)\mu(x)d_q x$ *dan daha büyük olup* $= \int_{a+\mu}^{b} (f(a+\mu) - f(x))h(x)d_q x$ *integrali alınacak ifade [a, b] aralığında negatif olmadığı için öyle bir* $\hat{q}_1 \in (q_3,1) \subset (0,1)$ *vardır ki tüm* $q \in (\hat{q}_1,1)$ *için sağ taraf* ≥ 0 *olur. Sol taraftaki eşitsizliği ispatlamak için aşağıdaki eşitlik göz önüne alınır:*

$$H(x) = 1 - h(x) \ ve \ \Lambda = \int_a^b H(x)d_q t = b - a - \mu \qquad (2.80)$$

Yukarıda ispatlanan eşitsizlik uygulanırsa;

$$\int_a^b f(x)H(x)d_q x \leq \int_a^{a+\Lambda} f(x)d_q x \qquad (2.81)$$

eşitsizliğini sağlayan bir $\hat{q}_2 \in (0,1)$ *varlığı sonucuna varılır. Yani tüm* $q \in (\hat{q}_2,1)$ *için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:*

$$\int_{b-\mu}^{b} f(x)d_q x - \int_a^b f(x)h(x)d_q x \leq 0 \qquad (2.82)$$

Eğer $\hat{q} = max\{\hat{q}_1, \hat{q}_2\}$ *olduğu gösterilirse o zaman eşitsizliğin her iki yanı tüm* $q \in (\hat{q}, 1)$ *için sağlanır.* $q \to 1^-$ *olduğunda bu eşitsizlik ünlü Steffensen eşitsizliğine indirgenir.*

2.3. Ostrowski ve Ostrowski–Grüss Tipi İntegral Eşitsizlikler

İki fonksiyonun çarpımının integrali ile integrallerin çarpımı arasında bir bağlantı kuran integral eşitsizlik, literatürde Grüs eşitsizliği olarak bilinir.

Grüss eşitsizliğinin klasik formu ilk kez G. Grüss tarafından aşağıdaki şekilde verilmiştir.

Teorem 2.3.1: (Grüss eşitsizliği) Ψ, φ, γ ve Γ sabit sayılar, $[a,b]$ *' deki her x için* $\gamma \le h(x) \le \Gamma$ ve $\Psi \le f(x) \le \varphi$ *olmak üzere* $f, h : [a,b] \to R$ *fonksiyonu integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Bu şartlar altında aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:*

$$\frac{1}{4}(\varphi - \psi)(\Gamma - \gamma) \ge \left| \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)h(x)dx - \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)dx.\int_a^b h(x)dx \right| \qquad (2.83)$$

Buradaki $\frac{1}{4}$ *katsayısı mümkün olan en iyi sayıdır ve daha küçük bir sayı ile değişmez.*

Ostrowski 1938' te aşağıdaki eşitsizliği ispatladı.

Teorem 2.3.2: (Ostrowski eşitsizliği) $f : [a,b] \to R$ *fonksiyonu [a, b] aralığında sürekli, bu aralığın iç noktalarında diferensiyellenebilen bir fonksiyon ve türevi* $f' : (a,b) \to R$, *(a, b) içinde sınırlı olsun. Eğer* $\forall s \in [a,b]$ için $|f'(s)| \le N$ *ise o zaman [a, b] aralığındaki tüm s' ler için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:*

$$\left| f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(s)ds \right| \le N(b-a)\left[\frac{1}{4} + \frac{(x - \frac{a+b}{2})^2}{(b-a)^2} \right] \qquad (2.84)$$

Buradaki $\frac{1}{4}$ *katsayısı mümkün olan en iyi sayıdır ve daha küçük bir sayı ile değişemez(kesin sayı).*

Ostrowski eşitsizliği ile ilgili ilk genelleştirme Milovanovic ve Pecaric tarafından yapılmıştır. S.S. Dragomir ve S. Wang 1997 de birinci türevin üst ve alt sınırına bağlı olarak aşağıdaki Ostrowski-Grüss tipi eşitsizliği verdiler(Dragomir ve Wang, 1997).

Teorem 2.3.3: $h:[a,b]\to R$ *fonksiyonu [a, b] aralığında sürekli, bu aralığın iç noktalarında diferensiyellenebilen bir fonksiyon ve türevi* $\forall x\in[a,b]$ *için* $\gamma\le h'(x)\le\Gamma$ *şartını sağlasın. Bu durumda [a,b] aralığındaki tüm x' ler için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:*

$$\frac{1}{4}(\mathrm{b}-\mathrm{a})(\Gamma-\gamma)\ge\left|h(x)-\frac{h(b)-h(a)}{b-a}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b h(s)ds\right| \quad (2.85)$$

Cheng, aşağıdaki integral eşitsizliği ispatlayarak Ostrowski-Grüss eşitsizliğinin genelleştirilmesini verdi.

Teorem 2.3.4: [a, b] aralığında sürekli $f:[a,b]\to R$ *fonksiyonu bu aralığın iç noktalarında diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun ve türevi* $\forall x\in[a,b]$ *için* $\gamma\le f'(x)\le\Gamma$ *şartını sağlasın. Bu durumda [a,b] aralığındaki tüm x' ler için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır[5]:*

$$\left|\frac{1}{2}f(x)-\frac{(x-b)f(b)-(x-a)f(a)}{2(b-a)}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|\le\frac{(x-a)^2+(b-x)^2}{8(b-a)}(\Gamma-\gamma) \quad (2.86)$$

İspat2.3.4: $\Gamma(x,s)=\begin{cases} s-\frac{a+x}{2}, & s\in[a,x] \\ s-\frac{a+x}{2}, & s\in(x,\mathrm{b}] \end{cases}$ *integral çekirdeğini tanımlayalım:*

Kısmi integrasyon uygulanarak aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\int_a^b\Gamma(x,s)f'(\mathrm{s})ds=\frac{1}{2}[f(x)(b-a)+(x-a)f(a)-(\mathrm{x}-\mathrm{b})\,\mathrm{f(b)}]-\int_a^b f(\mathrm{s})ds \quad (2.87)$$

$C=\dfrac{\delta+\gamma}{2}$ *olsun. Yukarıdaki eşitlik ve* $\int_a^b \Gamma(\mathrm{x},s)ds=0$ *olduğundan aşağıdaki eşitlik yazılır:*

$$\int_a^b \Gamma(x,s)[f'(s)-C]ds=\frac{1}{2}[-f(x)(a-b)-(a-x)f(a)+(b-x)f(b)]$$

$$-\int_a^b f(s)ds \qquad (2.88)$$

Diğer yandan aşağıdaki eşitsizlikler yazılır:

$$\left|\int_a^b \Gamma(x,s)[f'(s)-C]ds\right|\le \max_{t\in[a,b]}\left|f'(s)-\mathrm{C}\right|\int_a^b\left|\Gamma(x,s)\right|ds \qquad (2.89)$$

Ayrıca aşağıdaki iki eşitsizlik vardır:

$$\max_{t\in[a,b]}\left|f'(t)-C\right|\le\frac{\delta-\gamma}{2} \qquad (2.90)$$

$$\int_a^b\left|\Gamma(\mathrm{x},s)\right|dt=\frac{(x-a)^2+(b-x)^2}{4} \qquad (2.91)$$

(2.89) ve (2.3.91) kullanılarak aşağıdaki eşitsizlik yazılır:

$$\int_a^b\left|\Gamma(\mathrm{x},s)\left[f'(s)-\frac{\delta+\gamma}{2}\right]dt\right|\le\frac{(x-a)^2+(b-x)^2}{8}(\delta-\gamma) \qquad (2.92)$$

(2.89) ve (2.92) beraber göz önüne alınırsa teoremin gösterdiği eşitsizlik ispatlanmış olur.

Ostrowski –Grüss tipi ilk eşitsizlik daha sonra Matic, Pecaric, Ujevic, Alomari, Liu ve Sarıkaya tarafından genelleştirilip ilerletilmiştir. Dragomir ve Wang birinci türevin üst ve alt sınırları türünden aşağıdaki Ostrowski tipi eşitsizliği ispatladılar.

Teorem 2.3.5: $f:[a,b]\to R$ *fonksiyonu [a, b] kapalı aralığında sürekli , bu aralığın iç noktalarında diferensiyellenebilen bir fonksiyon ve türevi*

$\forall y \in [a,b]$ için $\gamma \le f'(y) \le \Gamma$ şartını sağlasın. Bu durumda [a, b] aralığındaki tüm y' ler için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır[9]:

$$\frac{1}{4}(b-a)(\Gamma-\gamma) \ge \left| f(y) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt - \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)(y-\frac{a+b}{2}) \right| \qquad (2.93)$$

Yukarıdaki teoreme benzer şekilde ikinci türevin üst ve alt sınırları türünden aşağıdaki eşitsizliği ispatladılar.

Teorem 2.3.6: Varsayalım ki; [a, b] kapalı aralığında sürekli bir $f:[a,b] \to R$ fonksiyonu, bu aralığın iç noktalarında ikinci mertebeden diferensiyellenebilir bir fonksiyon ve $\forall x \in [a,b]$ için *ikinci türevi* $\gamma \le f''(x) \le \Gamma$ *sağlasın. Bu durumda [a, b] aralığındaki tüm x' ler için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır[9]:*

$$\left| f(x) - \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f'(x) + \left[\frac{(b-a)^2}{24} + \frac{1}{2}(x-\frac{a+b}{2})^2\right]\frac{f'(b)-f'(a)}{b-a} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(s)ds \right|$$

$$\le \frac{1}{8}(\Gamma-\gamma)[\frac{1}{2}(b-a)\left|x-\frac{a+b}{2}\right|]^2 \qquad (2.94)$$

Teorem 2.3.7: Kabul edelim ki; [a,b] $\to R$ üzerinde tanımlı bir g fonksiyonu $|g(t)-g(s)| \le N.|t-s|$ koşulunu gerçeklensin. Diğer bir deyişle Lipschitz koşulunu sağlasın. $\forall x \in [a, \frac{a+b}{2}]$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır[15].

$$\left| \frac{g(x)+g(a+b-x)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt \right| \le N(b-a)\left[\frac{1}{8} + 2(\frac{x-\frac{3a+b}{4}}{b-a})^2\right] \qquad (2.95)$$

$\frac{1}{8}$ *sayısı bu koşullar içinde en iyi sayıdır. Daha küçük bir sayı mümkün değildir.*

Sonuç 2.3.1: Kabul edelim ki; $\alpha,\beta \in I,\ \alpha < \beta$ *olacak şekilde* $g : I \subseteq R \to R$ *fonksiyonu mutlak sürekli bir fonksiyon ve* $g' \in L[\alpha,\beta]$ *olsun. Bu durumda*

$$p(\xi,s) = \begin{cases} s-\alpha & s \in [\alpha,\xi] \\ s-\dfrac{\alpha+\beta}{2} & s \in (\xi,\alpha+\beta-\xi) \\ s-\beta & s \in (\alpha+\beta-\xi,\beta) \end{cases} \tag{2.96}$$

Yukarıdaki parçalı fonksiyon kullanılarak, $\forall \xi \in \left[\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right]$ *için aşağıdaki eşitlik elde edilir[8]:*

$$\frac{f(\xi)+f(\alpha+\beta-\xi)}{2} - \frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta} f(s)ds = \frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta} p(\xi,s)f'(s)ds \tag{2.97}$$

2.4. Cauchy-Khinchin İntegral Eşitsizliği

$x_1,...,x_m$ reel sayıları için klasik Cauchy eşitsizliği aşağıdaki şekilde yazılır:

$$\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^2 \le m\sum_{i=1}^{m} x_i^2 \tag{2.98}$$

Bu eşitsizlik yıllar boyunca birçok yoldan genelleştirilmiştir.

Teorem 2.4.1. Cauchy Eşitsizliği:

Kabul edelim ki; L, gerekli koşulları sağlayan reel değerli bir $f : E \to R$ lineer fonksiyonlar sınıfı A ve B,

L üzerinde lineer izotonik fonksiyonel ve f, g, fg, f^2, $g^2 \in L$ olsun. O zaman aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$A(f^2) \leq A(f^2)\,\mathrm{A}(g^2) \qquad (2.99)$$

Teorem 2.4.2. İki Fonksiyonel İçin Cauchy Eşitsizliği: L, gerekli koşulları sağlayan reel değerli bir $L : E \to R$ lineer fonksiyonlar sınıfı A ve B,

L üzerinde lineer izotonik fonksiyoneller ve f, g, fg, f^2, $g^2 \in L$ olsun. O zaman aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$A(f^2)B(g^2) + A(g^2)B(f^2) \geq 2A(fg)B(fg) \qquad (2.100)$$

İspat 2.4.2: $[f(x)g(z) - f(z)g(x)]^2 \geq 0$ eşitsizliğinin sol yanı açılıp düzenlenir:

$$f^2(x)g^2(z) + f^2(z)g^2(x) \geq 2f(x)g(z)f(z)g(x) \qquad (2.101)$$

eşitsizliğinde x' e göre fonksiyonel A da kullanarak ve A' nın izotonikliğini ve lineerliğini kullanarak aşağıdaki eşitsizlik yazılır:

$$g^2(z)A(f^2) + f^2(z)A(g^2) \geq 2g(z)f(z)A(fg) \qquad (2.102)$$

Yukarıdaki eşitsizlikte z' ye göre A fonksiyoneli kullanılırsa ispatlanması istenen eşitsizlik elde edilir.

Khinchin sayılar teorisi üzerine yaptığı çalışmalarda klasik Cauchy eşitsizliğinin bir genelleştirilmesi olan Khinchin eşitsizliğini ispatladı.

Teorem 2.4.3 Khinchin Eşitsizliği: *0' lar ve 1' lerden oluşan, satır toplamları* $r_i\ (1 \le i \le m)$ *ve sütun toplamları* $c_j\ (1 \le j \le n)$ *olan ve tüm girdilerin toplamı σ olan mxn türündeki bir matris ise, o zaman* $\ell = max\{ m,n \}$ *olmak üzere aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:*

$$\ell\sum_{i=1}^{m} r_i^2 + \ell\sum_{i=1}^{m} c_j^{\ 2} \le \sigma^2 + \ell^2\sigma \tag{2.103}$$

Cauchy ve Khinchin eşitsizliklerinin ortak bir genellemesi 1998 de Van Dam tarafından verilmiştir.

Teorem 2.4.4: mxn tipinde bir reel matris $X = (x_{i\,j})$ *olsun. O zaman*

$$m\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\right)^2 + n\sum_{i=1}^{m}(\sum_{i=1}^{m} x_{ij}) \le \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\right)^2 + mn\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^2 \tag{2.104}$$

olması için gerek ve yeter koşul $x_{ij} = y_i + z_j$ *eşitsizliğinin bazı y ve z reel vektörleri için ve bazı i ve j için sağlanmasıdır.*

Van Dam 'ın ispatladığı yukarıdaki teorem Cauchy eşitsizliğinin bir genelleştirmesidir. Şöyle ki;

Eğer X matrisini aşağıdaki gibi bir mx2 matrisi olarak alırsak,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & -x_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_m & -x_m \end{pmatrix} \tag{2.105}$$

O zaman (2.103) eşitsizliği Cauchy eşitsizliğine indirgenir. Diğer yandan eğer X matrisi 0' lar ve 1'ler den oluşan, satırlar toplamı $r_i\ (1 \le i \le m)$ *ve sütunlar toplamı* $c_j\ (1 \le j \le n)$ *olan ve tüm girdilerin toplamı σ olan bir mxn matrisi ise o zaman van Dam'ın teoremi aşağıdaki eşitsizliğe indirgenir:*

$$m\sum_{i=1}^{m} r_i^2 + n\sum_{i=1}^{m} c_j^{\,2} \leq \sigma^2 + mn\sigma \qquad (2.106)$$

Bu eşitsizlik (2.103) ile verilen Khinchin eşitsizliğinin bir ilerletilmiş genel halidir[29].

2.5. Young Tipi İntegral Eşitsizlik

Young 1912' de aşağıdaki integral eşitsizliği verdi.

Tanım 2.5.1: Young integral eşitsizliği

$g : [0,\infty) \to [0,\infty)$ *her hangi bir reel değerli fonksiyonu f(0)=0 koşulunu* $[0,\infty)$ *üzerinde kesin artan koşulunu sağlayan sağlayan bir fonksiyondur. Bu* g *fonksiyonu*

$$\alpha\beta \leq \int_0^{\alpha} g(t)dt + \int_0^{\beta} g^{-1}(y)dy \qquad (2.107)$$

eşitsizliğini tüm $\alpha,\beta \in [0,\infty)$ *için ancak ve yanlız* $\beta = f(\alpha)$ *olmak üzere sağlar.*

Bu eşitsizlik Hardy, Littlewood ve Polya' nın eserlerinde yer aldı ancak analitik ispatı 1970' de Diaz ve Metcalf tarafından verildi[7].

Young integral eşitsizliğinde $f(s) = s^{k-1}$ *ve* $q = \dfrac{k}{k-1}$

alınarak Young eşitsizliği olarak bilinen aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\alpha\beta \leq \frac{\alpha^p}{k} + \frac{\beta^p}{q}, \quad \frac{1}{k} + \frac{1}{q} = 1 \Leftrightarrow \alpha^k = \beta^q \qquad (2.108)$$

Merkle, Young integral eşitsizliğinin üst sınırını aşağıdaki gibi verdi:

$$\alpha\beta \leq \int_0^{\alpha} g(t)dt + \int_0^{\beta} g^{-1}(y)dy \leq max\{\alpha g(\alpha), \beta g^{-1}(\beta)\} \qquad (2.109)$$

Bu eşitsizlik Minguzzi tarafından geliştirilip aşağıdaki şekilde formüle edildi[31]:

$$0 \le \int_{\alpha_1}^{a} f(t)dt + \int_{\beta_1}^{b} f^{-1}(y)dy - ab + \alpha_1\beta_1 \le -(f^{-1}(b) - a)(f(a) - b) \tag{2.110}$$

Bu eşitsizlikte Young integral eşitsizliğinin hipotezi korunurken f(0) = 0 yerine $f(\alpha_1) = \beta_1$ koşulu yerleştirildi.

2.6. Hardy Tipi İntegral Eşitsizlik

Ayrık Hardy eşitsizliği aşağıdaki gibidir:

m > 1 ve $\{a_k\}_1^\infty$ negatif olmayan bir reel sayı dizisi ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^m \le \left(\frac{m}{m-1}\right)^m \sum_{n=1}^{\infty} a_n^m \tag{2.111}$$

İntegral eşitsizliği olarak verilen sürekli eşitsizlik ise şu şekilde ifade edilir. Eğer m > 1 ve f bir negatif olmayan, $(0,\infty)$ üzerinde m kez türetilebilen fonksiyon ise o zaman f , $(0,x)$ üzerinde her x için integrallenebilir ve aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right)^m dx \le \left(\frac{m}{m-1}\right)^m \int_0^\infty f(x)^m dx \tag{2.113}$$

Burada m >1, x >0 , f fonksiyonu ölçülebilir bir fonksiyon ve $\left(\frac{m}{m-1}\right)^m$ sabiti en mümkün sabittir.

G.H. Hardy tarafından 1920' de verilen bu integral eşitsizlik daha sonra 1925' te Hardy tarafından ispatlandı. Hardy kendi adıyla anılan ünlü eşitsizliği aşağıdaki şekilde formüle edip ispatlamıştı.

Teorem 2.6.1: Varsayalım ki; m> 1 ve h negatif olmayan, $(0,\infty)$ *üzerinde m kez türetilebilen bir fonksiyon olsun.*

O zaman her x>0 için $H(x)=\int_0^x h(t)dt<\infty$ *ve aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:*

$$\int_0^\infty \left(\frac{H(x)}{x}\right)^m dx \le \left(\frac{m}{m-1}\right)^m \int_0^\infty h^m(x)dx \tag{2.114}$$

İspat 2.6.1: Kısmi integrasyon ve d/dx $H(x)^m = mH(x)^{m-1}f(x)$ *özdeşliği kullanılarak* $0<\alpha<A<\infty$ *aralığındaki keyfi* α *ve A için aşağıdaki eşitlik yazılır:*

$$\int_\alpha^A \left(\frac{H(x)}{x}\right)^m dx = -\frac{1}{m-1}\int_\alpha^A H^m(x)\frac{d}{dx}(x^{1-m})dx$$

$$=\frac{\alpha^{1-m}}{m-1}H(\alpha)^m-\frac{A^{1-m}}{m-1}H(A)^m+\frac{1}{m-1}\int_\alpha^A x^{1-m}\frac{d}{dx}(H^m(x))dx \tag{2.115}$$

$$\le \frac{\alpha^{1-m}}{m-1}H(\alpha)^m+\frac{m}{m-1}\int_\alpha^A\left(\frac{H(x)}{x}\right)^{m-1} f(x)dx$$

İntegral formda Hölder eşitsizliği kullanılırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\int_\alpha^A \left(\frac{H(x)}{x}\right)^{m-1} h(x)dx \le \left(\int_\alpha^A h^m(x)dx\right)^{1/m}\left(\int_\alpha^A\left(\frac{H(x)}{x}\right)^m dx\right)^{(m-1)/m} \tag{2.117}$$

$\alpha\le\beta\le A$ *olacak şekilde bir* β *seçilerek ve önceki iki eşitsizliği H(x) yerine* $H(x)-H(\alpha)$ *' ya uygulayarak aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:*

$$\int_\alpha^A \left(\frac{H(x)-H(\alpha)}{x}\right)^m dx \le \frac{m}{m-1}\int_\alpha^A\left(\frac{H(x)-H(\alpha)}{x}\right)^{m-1} h(x)dx$$

$$\leq \frac{m}{m-1}\left(\int_{\alpha}^{A} h(x)^m dx\right)^{1/m}\left(\int_{\alpha}^{A}\left(\frac{H(x)-H(\alpha)}{x}\right)^m dx\right)^{(m-1)/m} \tag{2.118}$$

Bunun sonucunda aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\left(\int_{\alpha}^{A}\left(\frac{H(x)-H(\alpha)}{x}\right)^m dx\right)^{1/m} \leq \frac{m}{m-1}\left(\int_{\alpha}^{A} h(x)^m dx\right)^{1/m} \tag{2.119}$$

Veya aşağıdaki şekilde de yazılır:

$$\left(\int_{\beta}^{A}\left(\frac{H(x)-H(\alpha)}{x}\right)^m dx\right)^{1/m} \leq \frac{m}{m-1}\left(\int_{0}^{\infty} h(x)^m dx\right)^{1/m} \tag{2.120}$$

Bu eşitsizlikte önce $\alpha \to 0^+$ için limit alınırsa $H(x)-H(\alpha) \to H(x)$ yakınsar. Sonra $A \to \infty$ ve $\beta \to 0^+$ için limit alınırsa ispat tamamlanmış olur.

2.7. Jensen Tipi İntegral Eşitsizlik

Ayrık Jensen eşitsizliği aşağıdaki teorem ile verilir.

Teorem 2.7.1: $f : I \subset R \to R$ fonksiyonu I üzerinde bir konveks fonksiyon olsun. Eğer $i = 1,2,...,n$ için *tüm $x_i \in I$ ve $\alpha_i \geq 0$ ve $1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ ise o zaman aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i) \tag{2.122}$$

Eğer f konkav ise o zaman bu eşitsizlik tersine döner.

İspat 2.7.1: Tümevarım kullanarak ispat aşağıdaki gibi yapılır:

n = 1 için eşitsizlik doğrudur. n = k için doğru olsun, n = k+1 için doğruluğunu ispatlamalıyız. $i = 1,2,...,n+1$ *iken* $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k + \alpha_{k+1} = 1$ *olacağından en az bir tane* α *sayısı 1' den küçüktür.* $\alpha_{k+1} < 1$ *olsun.*

$$u = \frac{\alpha_1}{1-\alpha_{k+1}} x_1 + \frac{\alpha_2}{1-\alpha_{k+1}} x_2 + ... + \frac{\alpha_k}{1-\alpha_{k+1}} x_k \quad olsun.$$

$$\frac{\alpha_1}{1-\alpha_{k+1}} + \frac{\alpha_2}{1-\alpha_{k+1}} + ... + \frac{\alpha_k}{1-\alpha_{k+1}} = 1 \quad ve$$

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_k x_k + \alpha_{k+1} x_{k+1} = (1-\alpha_{k+1})u + \alpha_{k+1} x_{k+1} \quad olur.$$

f *konveks olduğundan aşağıdaki eşitsizlik vardır:*

$$f((1-\alpha_{k+1})u + \alpha_{k+1} x_{k+1}) \le (1-\alpha_{k+1}) f(u) + \alpha_{k+1} f(x_{k+1}) \tag{2.123}$$

Tümevarımın hipotezinden aşağıdaki eşitlik yazılır:

$$f(u) = \frac{\alpha_1}{1-\alpha_{k+1}} f(x_1) + \frac{\alpha_2}{1-\alpha_{k+1}} f(x_2) + ... + \frac{\alpha_k}{1-\alpha_{k+1}} f(x_k) \tag{2.124}$$

(2.123) ve (2.124) eşitsizliklerinden n= k+1 için eşitsizliğin yazılışı elde edilir:

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_{k+1} x_{k+1}) \le \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + ... + \alpha_{k+1} f(x_{k+1}) \tag{2.125}$$

n = k için doğru olan eşitsizliğin n = k+1 için de doğru olduğu, böylelikle herhangi bir tam pozitif sayı için doğru olacağı ispatlanmış olur.

Jensen eşitsizliğinin integral formu aşağıdaki şekilde verilir[32].

Teorem2.7.2: $\varphi : I \subset R \to R$ *fonksiyonu bir konveks fonksiyon ve* $h : [0,1] \to I$ *sürekli bir fonksiyon olsun. O zaman* $\int_0^1 \varphi(h(x))dx \ge \varphi(\int_0^1 h(x)dx)$ *eşitsizliği yazılır.*

Eğer φ *kesin konveks ise o zaman yukarıdaki eşitsizlik kesindir. Eğer* φ *konkav ise o zaman bu eşitsizlik tersine döner.*

Konveks fonksiyonlar için Jensen eşitsizliği matematiğin analiz ve istatistik dalları başta olmak üzere geniş uygulamaları olması nedeniyle en önemli eşitsizliklerdendir. Lazhar Bougoffa Jensen eşitsizliğini ve *h* fonksiyonunun konveksliğini kullanarak aşağıdaki eşitsizliği ispatladı.

Teorem 2.7.3: f bir konveks fonksiyon ve $x_1, x_2, ..., x_p$ *bu fonksiyonun tanım kümesine ait elemanlar ise o zaman aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:*

$$\sum_{j=1}^{p} f(x_j) - f\left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_p}{p}\right) \geq \frac{p-1}{p}\left[f(\frac{x_1 + x_2}{2}) + ... + f(\frac{x_{p-1} + x_p}{2}) \right] \quad (2.126)$$

1966' da Polyak kesin konveks ve kesin quasi- konveks fonksiyonların tanımını vermiştir. Bu fonksiyonlar optimizasyon teorisinde ve matematiksel ekonomide önemli bir rol oynar. Ünlü Jensen'nin dışbükey fonksiyonlar için integral eşitsizliğinin tersini vermek amacıyla, 2002' de Dragomir aşağıdaki sonucu elde etti.

Teorem 2.7.4: $\Phi o f,\ f,\ \Phi' o f,\ (\Phi' o f).f \in L_w(\Omega,\mu)$ *olmak üzere* $\Phi : [m,M] \subset R \to R$ *fonksiyonu (m, M) de diferansiyellebilir bir konveks fonksiyon ve* $f : \Omega \to [m,M]$ *olsun. Burada* $w \geq 0$ ve Ω *üzerinde hemen* her μ için $\int_{\Omega} w d\mu = 1$ *dır. O zaman aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.*

$$
\left.
\begin{aligned}
&0 \le \int_\Omega (\Phi of\,) w\, d\mu - \Phi\left(\int_\Omega f\, wd\mu \right) \\
&\le \int_\Omega (\Phi' of\,)\, f\, w\, d\mu - \int_\Omega (\Phi' o\, f\,) wd\mu \int_\Omega w\;\; fd\mu \\
&\le \frac{1}{2} [\Phi'(M) - \Phi'(m)] \int_\Omega w \left| f - \int_\Omega f\, wd\mu \right| d\mu
\end{aligned}
\right\} \qquad (2.127)
$$

Yukarıdaki eşitsizlikte eğer;

$\mu(\Omega) < \infty$ *ve* $\Phi of\,,\; f\,,\; \Phi' of\,,\; (\Phi' of\,).\, f \in L(\Omega, \mu)$ *ise o zaman aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.*

$$
\left.
\begin{aligned}
&0 \le \frac{1}{\mu(\Omega)} \int_\Omega (\Phi of\,)\, d\mu - \Phi\left(\frac{1}{\mu(\Omega)} \int_\Omega f\, wd\mu \right) \\
&\le \frac{1}{\mu(\Omega)} \int_\Omega (\Phi' of\,)\, f\;\, d\mu - \frac{1}{\mu(\Omega)} \int_\Omega (\Phi' o\, f\,) d\mu \,.\, \frac{1}{\mu(\Omega)} \int_\Omega w\;\; fd\mu \\
&\le \frac{1}{2} [\Phi'(M) - \Phi'(m)]\;\; \frac{1}{\mu(\Omega)} \int_\Omega \left| f - \frac{1}{\mu(\Omega)} \int_\Omega f\, wd\mu \right| d\mu
\end{aligned}
\right\} \qquad (2.128)
$$

Dragomir, bu eşitsizlikleri kullanarak integral eşitsizliğinin tersini veren Teorem (2.7.4)' ün koşullarında aşağıdaki eşitsizlik dizisini verdi:

$$
\left.
\begin{aligned}
&0 \le \int_\Omega (\Phi of\,)\, wd\mu - \Phi\left(\int_\Omega f\, wd\mu \right) \\
&\le \int_\Omega (\Phi' of\,)\;\, fwd\mu - \int_\Omega (\Phi' of\;\,) wd\mu \int_\Omega fwd\mu \\
&\le \frac{1}{2} [\Phi'(M) - \Phi'(m)] \int_\Omega \left| f - \int_\Omega wfd\mu \right| wd\mu \\
&\le \frac{1}{2} \big[\Phi'(M) - \Phi'(m)\big] \left[\int_\Omega f^2 wd\mu - \left(\int_\Omega fwd\mu\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\
&\le \frac{1}{4} \big[\Phi'(M) - \Phi'(m)\big] (M - m)
\end{aligned}
\right\} \qquad (2.129)
$$

Yukarıdaki eşitsizlik dizisinde ilk, ikinci ve son terim pozitif lineer fonksiyonellerin genel durumu için 2001’ de Dragomir tarafından ispatlandı. İlk eşitsizliğin bir genelleştirilmesi olarak Nikodem ve arkadaşları kesin konveks fonksiyonlar üzerine Jensen eşitsizliğini aşağıdaki gibi geliştirip önemli sonuçlar elde ettiler.

Teorem 2.7.5: (Λ, X, μ) *bir olasılık ölçü uzayı ve* $\Psi : I \to R$ *modülü c olan kesin konveks fonksiyon olsun. Varsayalım ki* $\phi : \Lambda \to I$ *Lebesgue anlamında integallenebilir bir fonksiyon ve* $\overline{\theta} = \int_{\Lambda} \phi d\mu$ *olsun.*

O zaman aşağıdaki integral eşitsizliği sağlanır:

$$0 \le \int_{\Lambda} \Psi(\phi) d\mu - \Psi(\overline{\theta}) - c\int_{\Lambda} (\phi - \overline{\theta})^2 d\mu \qquad (2.130)$$

2.8. Gauss-Winckler Tipi İntegral Eşitsizlik

Varsayalım ki $f : (0,\infty) \to [0,\infty)$ bir artmayan fonksiyon ve $\int_0^{\infty} f(x)dx = 1$ olsun. Gauss-Winckler eşitsizliği olasılık teorisinde momentler için bir karşılaştırma teoremidir.

$$M_p(f) := \int_0^{\infty} x^p f(x)dx \qquad (p > -1) \qquad (2.131)$$

1821’ de Gauss ispatını vermeden aşağıdaki eşitsizliği öne sürdü:

$$\left[3M_2(f)\right]^2 \le 5M_4(f) \qquad (2.132)$$

1866’ da Winckler 0< r < s olmak üzere aşağıdaki genelleştirmeyi sundu:

$$\left[(1+r)M_2(f)\right]^{1/r} \le \left[(1+s)M_4(f)\right]^{1/s} \qquad (2.133)$$

Winckler’in ispatı yetersiz bulundu, 1896’ da Krüger bu eşitsizliği s = 2r ve belirli bazı durumlar için ispatladı. Bu eşitsizliğin tüm pozitif r ve s için ilk ispatı Feber tarafından verildi. Daha sonra von Mises -1 < r < s ve f fonksiyonunun $(0,\infty)$ üzerinde sürekli türetilebilir olması durumunda yeni bir ispat verdi. Beesack bu metodu geliştirerek 0 < r < s ve f fonksiyonunun $(0,\infty)$ üzerinde sürekli olması durumunda bir ispat verdi.

2.9. Hilbert Tipi İntegral Eşitsizlik

Klasik Hilbert integral eşitsizliği aşağıdaki gibidir.

f ve g fonksiyonları için $f, g \in L^2[0,\infty)$ olsun. O zaman aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{f(s)g(z)}{s+z} dsdz \leq \pi \left(\int_0^\infty [f(s)]^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_0^\infty [g(z)]^2 dz \right)^{1/2} \tag{2.134}$$

Bu eşitsizlikte π mümkün olan en iyi sabittir.

Bu eşitsizlik Hardy- Riesz tarafından 1925' te aşağıdaki gibi genelleştirildi ve bazı sonuçlar elde edildi[25]:

$$\pi^2 \int_0^\infty f^2(s) ds \geq \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \frac{f(s)}{s+z} ds \right)^2 dz \tag{2.135}$$

Bu eşitsizlikte π^2 mümkün olan en iyi sabittir.

Sonuç 2.9.1: Kabul edelim ki; f ve h negatif olmayan fonksiyonları için $\frac{1}{k} + \frac{1}{m} = 1$ *olmak üzere* $0 < \int_0^\infty f^k(x)dx < \infty$ *ve* $0 < \int_0^\infty h^m(x)dx < \infty$ *olsun. O zaman aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:*

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{f(x)h(y)}{x+y} dxdy \leq \pi \csc\left(\frac{\pi}{k}\right) \left(\int_0^\infty f^k(x)dx \right)^{1/k} \int_0^\infty \left(h^m(y)dy \right)^{1/m} \tag{2.136}$$

Burada $\pi \csc(\pi / k)$ sabit çarpanı mümkün en iyi sayıdır. $k = m = 2$ için bu eşitsizlik Hilbert eşitsizliğine indirgenir. Son yıllarda yapılan çalışmalarla bu eşitsizliğe birçok genelleştirmeler verilmiştir. Lie ve arkadaşları aşağıdaki Hardy-Hilbert tipi eşitsizliği ispatladılar:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{f(s)g(t)}{s+t+max\{s,t\}} dsdt \le c\left(\int_0^\infty f^2(s)ds\right)^{1/2}\left(\int_0^\infty g^2(t)dt\right)^{1/2} \qquad (2.137)$$

Burada sabit çarpan $c=\sqrt{2}(\pi-2-tan^{-1}\sqrt{2})=1{,}7408...$ *mümkün olan en iyi sayıdır.*

Y. Li, Y. Qian, ve B. He aşağıdaki sonucu elde ettiler:

Eğer f ve g negatif olmayan fonksiyonlar, $\int_0^\infty f^2(s)ds<\infty$ *ve* $\int_0^\infty g^2(s)ds<\infty$ *ise o zaman aşağıdaki eşitsizlik en iyi sabit 4 olmak üzere gerçeklenir:*

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{|ln\, s-lnt|}{s+t+max|s-t|} f(s)g(t)dsdt \le 4\left(\int_0^\infty f^2(s)ds\right)^{1/2}\int_0^\infty \left(g^2(t)dt\right)^{1/2} \qquad (2.138)$$

2.10. Hermite-Hadamard Tipi İntegral Eşitsizlik

22 Kasım 1881' de Hermite(1822-1901) journal Mathesis' e bir mektup gönderdi. Bu mektubun bir özeti Mathesis 3 (1883, S.82)' de basıldı.

Hermite mektubunda R üzerinde tanımlı herhangi bir f konveks fonksiyonu için $\alpha,\beta\in R$ ve $\alpha<\beta$ olmak üzere

$$(\beta-\alpha)f(\frac{\alpha+\beta}{2})\le\int_\alpha^\beta f(x)dx\le(\beta-\alpha)\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2} \qquad (2.139)$$

eşitsizliğini yazmış, bu eşitsizliğin $f(s)=\dfrac{1}{1+s}$ $,\alpha=0$ *ve* $\beta=s$ için aşağıdaki şekilde olacağını belirtmişti:

$$s-\frac{s^2}{2+s}<log(1+s)<s-\frac{s^2}{2(1+s)} \qquad (2.140)$$

Hermite' nin bu kısa notundan ne ilginçtir ki matematik literatüründe bahsedilmedi ve bu eşitsizlik Hermite'nin sonucu olarak bilinmedi. Kompleks fonksiyonların tarihi ve teorisi üzerine uzman olan Beckenbach, bu eşitsizliğin 1893'te Hadamard tarafından ispatlandığını yazdı ve bunun Hermite'nin bir sonucu olduğundan bahsetmedi.

Teorem 2.10.1: I kümesi R 'de bir aralık, α *ve* β *bu aralıkta iki sabit ve* $\alpha<\beta$ *olmak üzere* $g: I\subseteq R\rightarrow R$ *şeklinde konveks g fonksiyonları aşağıdaki eşitsizliği sağlar[18]:*

$$g(\frac{\alpha+\beta}{2})\leq\frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta}g(s)ds\leq\frac{g(\alpha)+g(\beta)}{2} \qquad (2.141)$$

İspat 2.10.1: g, I üzerinde konveks olduğundan (a,b) üzerinde sürekli ve [a,b] aralığında sınırlıdır. Bu nedenle g, aralıkta integrallenebilirdir. Konvekslik gereği $\forall s\in[0,1]$ *için g(sa+(1-s)b)* $\leq$ *sg(a) + (1-s)g(b)*

eşitsizliği vardır. Bu eşitsizlik [0,1]' de s' ye göre integrali alınır.

$$\int_0^1 g(sa+(1-s)bds\leq\int_0^1(sg(a)+(1-s)g(b))d\,s$$

$$=f(a)\int_0^1 sds+f(b)\int_0^1(1-s)ds=\frac{g(a)+g(b)}{2} \qquad (2.142)$$

elde edilir. Bu Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sağ tarafıdır.

Diğer yandan g, I üzerinde konveks olduğundan $t\in[0,1]$ *için*

$$g\left(\frac{a+b}{2}\right) = g\left(\frac{sa+(1-s)b}{2} + \frac{(1-s)a+sb}{2}\right)$$

$$\leq \frac{1}{2}[g(sa+(1\text{-}s)b) + g((1\text{-}s)a+sb)] \qquad (2.143)$$

bulunur. Bu ifadenin iki tarafı [0,1] üzerinden t'ye göre integrallenirse

$$g\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\left[\int_0^1 g(sa+(1-s)b + g(1-s)a+sb)\right]ds$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^1 g(sa+(1-s)b)ds + \int_0^1 g((1-s)a+sb)ds\right] \qquad (2.144)$$

elde edilir. Bu ifadede sağ taraftaki ikinci integralde 1-s = t yazılırsa

$$g\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\left[\int_0^1 g(sa+(1-s)b)ds + \int_0^1 g(ta+(1-t)b)dt\right]$$

$$= \int_0^1 g(ta+(1-t)b)dt \qquad (2.145)$$

elde edilir. Bu da Hermite eşitsizliğinin sol tarafıdır. (2.144) ve (2.145) eşitliklerinden aşağıdaki eşitsizlik yazılır:

$$g\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_a^b g(ta+(1-t)b)dt \leq \frac{g(a)+g(b)}{2} \qquad (2.146)$$

Bu eşitsizlikte ta + (1-t)b = x değişken dönüşümü yapılırsa

$$g\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx \leq \frac{g(a)+g(b)}{2} \qquad (2.147)$$

Bu sonuç eşitsizliğin ispatını tamamlar.

Bu eşitsizlik bugün genellikle Hermite- Hadamard (H-H) olarak bilinmektedir.

Lemma 2.10.1: Kabul edelim ki; f, g:[a,b] $\rightarrow R$ *fonksiyonları için aşağıdaki durumlar denktir:*

i) *f, g fonksiyonları [a,b] aralığında konvekstir.*

ii) $\forall x, y \in [a,b]$ *için* $f_0(s) = f(sx + (1-s)y)$ *veya* $f((1-s)x + sy)$, $g_0(s) = g(sx + (1-s)y)$ *veya* $g((1\text{-}s)x + sy)$ *şeklinde tanımlanan* $f_0, g_0 : [0,1] \rightarrow R$ *fonksiyonları [0,1] üzerinde konvekstir[42].*

Fejer (1880-1959) trigonometrik polinomlar üzerine 1906' da yaptığı çalışmasında Hermite' nin eşitsizliğinin genelleştirilmesi olan eşitsizlikler elde etti fakat Hermite'nin çalışması yine tanınmadı. Fejer' in sonucu aşağıdaki teorem ile verilir[8].

Teorem 2.10.2: f *, bir (a, b) araliğında konveks bir fonksiyon, h, bu aralıkta pozitif bir fonksiyon olmak üzere* $\int_a^b f(x)h(x)dx$ *integralini düşünelim. Öyle ki* $0 \le t \le \frac{1}{2}(a+b)$ *olmak üzere:*

$$h(a+t) = h(b-t), \tag{2.148}$$

Bu koşullar altında aşağıdaki eşitsizlikler geçerli olur:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b h(x)dx \le \int_a^b f(x)h(x)dx \le \frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b h(x)dx \tag{2.149}$$

Bu eşitsizlik $x \in (a,b)$ *ve* $h(x) \equiv 1$ için Hermite eşitsizliğini verir. Bu nedenle Hermite'nin (2.139) de elde ettiği bir fonksiyonun (*a*, *b*) aralığında konveks olması için verdiği gerek ve yeter şartı veren önemli sonucun matematik literatüründe ona hak ettiği bir kredi getirmesini perdeledi. Jensen 1905, 1906 yıllarında $f(\frac{\xi+\delta}{2}) \le \frac{f(\xi)+f(\delta)}{2}$ eşitsizliğini kullanarak konveks fonksiyonları (J-konveks fonksiyonlar) tanımladı. Konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipi eşitsizlikler bir çok yazar tarafından ele alınmıştır. Bu eşitsizliklerden bazıları aşağıda verilmiştir.

Teorem 2.10.3: f ve h reel değerli, negatif olmayan ve [a,b] üzerinde konveks fonksiyonlar olsun K(a,b) = f(a)h(a)+f(b)h(b) ve T(a,b) = f(a)h(b)+f(b)h(a) olmak üzere aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır:

i) $$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)h(x)dx \le \frac{1}{3}K(a,b)+\frac{1}{6}T(a,b)$$

ii) $$2f(\frac{a+b}{2})h(\frac{a+b}{2}) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)h(x)dx + \frac{1}{6}K(a,b)+\frac{1}{3}T(a,b)$$

Hermite-Hadamard eşitsizliğinin bir diğer genelleştirilmesi Vasic ve Lakovic(1974, 1976) ve Lupaş(1976) da verilmiştir.

Teorem 2.10.4: Kabul edelim ki; k ve l pozitif sayıları ve $a_1 \le a < b \le b_1$ *verilsin.* $A=\frac{ka+lb}{k+l}$, $y>0$, ve $f:[a_1,b_1]\to R$ *şeklindeki tüm konveks fonksiyonlar için aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır:*

$$f(\frac{ka+lb}{k+l}) \le \frac{1}{2y}\int_{A-y}^{A+y} f(t)dt \le \frac{kf(a)+lf(b)}{k+l} \qquad (2.150)$$

$$y \le \frac{b-a}{k+l} min\{k,l\} \qquad (2.151)$$

Sonuç 2.10.1:

- ***i.*** *2.10.4 eşitsizliği konveks fonksiyonlar eşitsizliğinin tanımının geliştirilmişi olarak kabul edilebilir.*
- ***ii.*** *k = l = 1 ve y = (b-a)/2 için (2.145) eşitsizliği Hermite – Hadamard eşitsizliğini verir.*

Teorem (2.10.4)' ün pozitif lineer fonksiyonellere genelleştirmeleri Pecaric ve Beesack tarafından aşağıdaki teoremlerle 1986' da verilmiştir.

Teorem2.10.5: $-\infty < m < M < \infty$ olmak üzere $I \supset [m,M]$ *aralığında sürekli konveks bir fonksiyon f olsun. Farzedelim ki* $h : E \to R$ *fonksiyonu her* $t \in E$, $h \in L$ *ve* $f(h) \in L$ *için* $m \le h(t) \le M$ *eşitsizliğini sağlasın. A(1) = 1 olmak üzere* $A : L \to R$ *bir izotonik lineer fonksiyonel ve* $p = p_g$, $q = q_g$ *negatif olmayan reel sayıları (p + q > 0) için* $A(h) = \dfrac{pm + qM}{p+q}$ *olsun. O zaman aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır [41] :*

$$f\left(\frac{pm+qM}{p+q}\right) \le A(f(h)) \le \frac{pf(m)+qf(M)}{p+q} \tag{2.152}$$

Teorem 2.10.6: Farz edelim ki; L boş olmayan bir E kümesinde aşağıdaki şartları sağlasın:

(L_1) $f, h \in L$ *ve her* $a, b \in R$ *için* $af + bh \in L$

(L_2) $1 \in L$ *yani eğer* $t \in E$ *için* $f(t) = 1$ *ise* $f \in L$ *dir;*

(L_3) $f \in L, E_1 \in A$ *ise* $fC_{E_1} \in L$;

ve $g, h \in L$ *ile* $f(g), f(h) \in L$ *iken f fonksiyonu I aralığında sürekli konveks fonksiyon olsun. L üzerindeki A, B izotonik lineer fonksiyonları için*

A(1) = B(1) = 1 olsun. Eğer A(h) = B(g), $E_1 \in A,\ E_2 = E - E_1$ *olmak üzere* $A(C_{E_1}) > 0$ *ve* $A(C_{E_2}) > 0$ *sağlanıyorsa ve eğer aşağıdaki eşitsizlikler* tüm $t \in E$ *için sağlasın:*

$$\frac{A(hC_{E_1})}{A(C_{E_1})} \leq f(g) \leq \frac{A(hC_{E_2})}{A(C_{E2})} \tag{2.153}$$

O zaman aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$f(A(h)) \leq B((f)(g)) \leq A(f(h)) \tag{2.154}$$

(2.154) eşitsizliği Jessen eşitsizliğinin daha gelişmişidir ve aynı zamanda Vasic, Lacovic ve Maksimovic' in 1980' de elde ettikleri eşitsizliğin bir genelleştirilmesidir.

Teorem 2.10.7. İzotonik Lineer Fonksiyoneller İçin H-H Eşitsizliği:

Kabul edelim ki; L, bir boş olmayan E kümesi üzerinde L_1 ve L_2 şartlarını sağlasın ve ϕ *fonksiyonu* $I \subseteq R$ *üzerinde konveks olsun. Eğer A,* $A(g) = \int_E g d\mu$ *iken A(1) = 1 olmak üzere herhangi bir izotonik fonksiyonel ise o zaman* $g \in L$, *iken* $\phi(g) \in L$ *olan tüm g' ler için,* $A(g) \in I$ *dir ve aşağıdaki eşitsizlik sağlanır[42]:*

$$\phi(A(g)) \leq A(\phi(g)) \tag{2.155}$$

Teorem 2.10.8: Kabul edelim ki; $f : C \subseteq X \to R$ *fonksiyonu C üzerinde konveks bir fonksiyon, L, (L_1) ve (L_2) koşullarını; B, (A_1) ve (A_2) koşullarını sağlasın ve C içinde verilen x, y için* $g_{x,y} oh \in L$ *olmak üzere* $h \in L$, $h : E \to R$ *olsun. Eğer B(1) =1 ise o zaman aşağıdaki eşitsizlik vardır:*

$$f(B(h)x+(1-B(h))y) \leq B[f(hx+(1-h)y]$$
$$\leq B(h)f(x)+(1-B(h))f(y) \tag{2.156}$$

İspat 2.10.8: Verilen $g_{x,y} : [0,1] \rightarrow R$, $g_{x,y}(s) := f(sx+(1-s)y)$ eşlemesini düşünelim. $g_{x,y}$, [0,1] üzerinde konvekstir. Bütün $t \in E$ için aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$g_{x,y}(h(t).1+(1-h(t).0) \leq h(t)g_{x,y}(1)+(1-h(t))g_{x,y}(0) \tag{2.157}$$

Bu eşitsizlik aşağıdaki eşitsizliği gerektirir:

$$B(g_{x,y}(h)) \leq B(h)g_{x,y}(1)+(1-B(h))g_{x,y}(0) \tag{2.158}$$

Yani,

$$B[f(hx+(1-h)y)] \leq B(h)f(x)+(1-B(h))f(y) \tag{2.159}$$

Diğer yandan Jessen eşitsizliği $g_{x,y}$ *için uygulanırsa aşağıdaki eşitsizliğe ulaşılır:*

$$g_{x,y}(B(h)) \leq B(g_{x,y}(h)) \tag{2.160}$$

Bu eşitsizlik aşağıdaki eşitsizliği verir ve ispat tamamlanır:

$$f(B(h)x+(1-B(h))y) \leq B[f(hx+(1-h)y] \tag{2.161}$$

3. UYGULAMALAR

3.1. Zaman Ölçeklerinde Wirtinger ve Hardy eşitsizlikleri

Zaman ölçekleri teorisi ilk defa Stefan Hilger tarafından 1988’ de verdiği doktora tezinde bahsedildi. O günden sonra birçok yazar zaman ölçeklerinde dinamik denklemler ve dinamik eşitsizliklerin çeşitli yönleri üzerine çalışmalar yaptılar. *R* reel sayılar kümesinin alt kümelerinden kapalı olan herhangi birine zaman ölçeği denir ve *T* ile gösterilir.

İleri sıçrama operatörü $t \in T$ için $\sigma : \boldsymbol{T} \rightarrow \boldsymbol{T}$

$$\sigma(t) = inf\{ s \in \boldsymbol{T}: \ s > t \} \tag{3.1}$$

Geri sıçrama operatörü $t \in T$ için $\rho : \boldsymbol{T} \rightarrow \boldsymbol{T}$

$$\rho(t) = sup\{ s \in \boldsymbol{T}: \ s < t \} \tag{3.2}$$

C_{rd} ile *rd* sağ yoğun sürekli fonksiyonlar, $\Re$ ile tüm regressif ve *rd* sağ yoğun sürekli fonksiyonları gösterilir. Hardy 1920’ de ispatını vermeden ünlü Hardy eşitsizliğini (2.6.1) ile vermişti. Hardy eşitsizliği $f(x) = h(x^{1-\frac{1}{p}})x^{\frac{-1}{p}}$ dönüşümüyle aşağıdaki gibi yazılabilir[20]:

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x h(t)dt\right)^p \frac{dx}{x} \leq \int_0^\infty h^p(x)\frac{dx}{x} \tag{3.3}$$

Bu eşitsizlik Jensen eşitsizliği ve Fubini teorem kullanılarak kolayca ispatlanabilir. Son zamanlarda yaptığı çalışmada Rehak, Hardy eşitsizliğinin zaman ölçeğindeki versiyonunun yazılmasında aşağıdaki sonucu elde ederek öncülük etti:

$$\left(\frac{k}{k-1}\right)^k \int_a^\infty f^k(x)\Delta x \geq \int_0^\infty \left(\frac{F^\sigma(x)}{\sigma(x)-a}\right)^k \Delta x \tag{3.4}$$

Burada $k > 1$, $F(x) = \int_0^x f(x)\Delta t$ ve f negatif olmayan bir fonksiyondur. Özkan ve Yıldırım birçok fonksiyonlar içeren zaman ölçekli Hardy eşitsizliğini verdi.

Teorem 3.1.1: $a \geq 0$ ve $f_1, f_2, ..., f_n$, $n \in Z^+$ *negatif olmayan integre edilebilir fonksiyonlar ve* $k = 1,2,3,...,n$ *olsun.* $F_k(x) = \frac{1}{\sigma(x)-a}\int_a^x f_k(t)\Delta t$ *ile tanımlayalım.*

O zaman aşağıdaki eşitsizlik gerçeklenir[36]:

$$\frac{p^p}{(p-1)^p}\int_a^\infty \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f_k(x)\right)^p \Delta x \geq \int_0^\infty \left(\prod_{k=1}^n F_k^\sigma(x)\right)^{\frac{p}{n}} \Delta x \tag{3.5}$$

Aynı çalışmada zaman ölçeğinde Hardy-Knopp tipi integral eşitsizliği aşağıdaki gibi verdiler.

Teorem 3.1.2: Eğer $u \in C_{rd}([a,b),R)$ *bir negatif olmayan fonksiyon öyleki delta integral* $\int_t^b \frac{u(x)}{(x-a)(\sigma(x)-a)}\Delta x$ *sonlu bir sayı olarak mevcut ve v aşağıdaki gibi tanımlı olsun:*

$$v(t) = (t-a)\int_t^b \frac{u(x)}{(x-a)(\sigma(x)-a)}\Delta x,\ t \in [a,b) \tag{3.6}$$

$c,d \in R$ olmak üzere eğer $\phi : (c,d) \to R$ *sürekli ve konveks ise aşağıdaki eşitsizlik* $f(x) \in (c,d)$ olmak üzere tüm $f \in C_{rd}([a,b),R)$ *için sağlanır[36]:*

$$\int_a^b u(x)\phi\left(\frac{1}{(\sigma(x)-a}\int_a^{\sigma(x)} f(t)\Delta t\right)\frac{\Delta x}{x-a} \le \int_a^b v(x)\phi\big(f(x)\big)\frac{\Delta x}{x-a} \tag{3.7}$$

Teorem 3.1.3 Wirtinger Eşitsizliği[19]:

Klasik Wirtinger eşitsizliği y(a) = 0 ve y(b) = 0 koşuluna uyan her $\mathrm{y} \in \mathrm{C}^1([a,b])$ *için aşağıdaki gibi verilir:*

$$\int_a^b \big(y'(t)\big)^2 dt \ge \int_a^b y^2(t)dt \tag{3.8}$$

Beesack bu eşitsizliği genişletti ve aşağıdaki eşitsizliği y(a) = 0 ve y(b) = 0 koşuluna uyan her $\mathrm{y} \in \mathrm{C}^2([a,b])$ *için ispatladı[2]:*

$$\int_a^b \big(y'(t)\big)^4 dt \ge \frac{3}{4}\int_a^b y^4(t)dt \tag{3.9}$$

Beesack ayrıca aşağıdaki eşitsizliği y(0) = y(π) = 0 koşuluna uyan her $\mathrm{y} \in \mathrm{C}^1([0,\pi])$ *için ispatladı[2].*

$$\int_0^\pi \big(y'(t)\big)^{2k} dt \ge \frac{2k-1}{\left(k\sin\frac{\pi}{2k}\right)^{2k}}\int_0^\pi y^{2k}(t)dt \;\;,\;\; k \ge 1 \text{ için} \tag{3.10}$$

Agarwal ve Pang 1995' te aşağıdaki eşitsizliği y(0) = y(π) = 0 koşuluna uyan her $\mathrm{y} \in \mathrm{C}^1([0,\pi])$ *için ispatladı:*

$$\int_0^\pi \big(y'(t)\big)^{2k} dt \ge \frac{2\Gamma(2k-1)}{\frac{(2k+1)}{2}\pi^{2k}\Gamma^2}\int_0^\pi y^{2k}(t)dt \;\;,\;\; k \ge 1 \text{ için} \tag{3.11}$$

Brnetic ve Pecaric 1988 de aşağıdaki eşitsizliği y(0) = y(π) = 0 koşuluna uyan her $\mathrm{y} \in \mathrm{C}^1([0,\pi])$ *için ispatladı:*

$$\int_0^{\pi} \left(y'(t) \right)^{2k} dt \geq \frac{1}{\pi^{2k} I(k)} \int_0^{\pi} y^{2k}(t)dt \ , \ k \geq 1 \text{ için} \tag{3.12}$$

Burada : $I(k) = \int\limits_0^1 \frac{dt}{(t^{1-2k} + (1-t)^{1-2k})}$

Hilton ve Lewis Wirtinger eşitsizliğini genişletti ve ispatında Schwarz eşitsizliğini kullandı ve herhangi bir pozitif $M \in C^1([a,b])$ *ve* $M'(t) \neq 0$, $y \in C^2([a,b])$, *ve y(a) = y(b) = 0 koşuluna uyan aşağıdaki eşitsizliği ispatladı:*

$$\int_a^b \frac{M^2(t)}{|M'(t)|} (y'(t))^2 dt \geq \frac{1}{4} \int_a^b |M'(t)| \, y^2(t)dt \tag{3.13}$$

Pena, 1999 da yukarıdaki eşitsizliğin ayrık analoğunu kurdu ve aşağıdaki sonucu ispatladı[43].

$[0,N] \cap Z$ üzerinde $\Delta M > 0$ veya $\Delta M < 0$ koşuluna uyan $\{M_n\}_{0 \leq n \leq N+1}$ *şeklindeki pozitif bir dizi için* $\sum_{n=0}^{N} \frac{M_n M_{n+1}}{|\Delta M_n|} (\Delta y_n)^2 \geq \frac{1}{\Psi} \sum_{n=0}^{N} |\Delta M_n| \, y_{n+1}^2$

eşitsizliği her hangibir $\{y_n\}_{0 \leq n \leq N+1}$ *dizisi için* $y_0 = y_{N+1} = 0$ *olmak üzere sağlanır. Burada* Ψ *aşağıdaki gibi tanımlanır:*

$$\Psi = \left(\sup_{0 \leq n \leq N} \frac{M_n}{M_{n+1}} \right) \left[1 + \left(\sup_{0 \leq n \leq N} \frac{|\Delta M_n|}{|\Delta M_{n+1}|} \right)^{1/2} \right]^2 \tag{3.14}$$

Hilscher, 2002 de Hinton ve Lewis ile Pena' nın eşitsizliklerinin bir bileşimi olan zaman ölçekleri üzerinde Wirtinger tipi eşitsizliği ispatladı[22].

Teorem 3.1.4: K, pozitif ve kesin konveks öyleki K^{Δ} *mevcut ve rd-mertebeden sürekli olsun. O zaman aşağıdaki eşitsizlik y(a) = y(b) = 0 sağlayan herhangi bir y için ve öyleki* y^{Δ} *mevcut ve rd-mertebeden sürekli olmak üzere sağlanır*

: $$\int_a^b \left|K^{\Delta}(t)\right| (y^{\sigma}(t))^2 \Delta t \geq \Psi \int_a^b \frac{K(t)K^{\sigma}(t)}{\left|K^{\Delta}(t)\right|} (y^{\Delta}(t))^2 \Delta t \qquad (3.15)$$

T bir zaman ölçeği olmak üzere burada Ψ aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\Psi = \left\{ \left(\sup_{t\in[a,b]\cap \mathrm{T}} \frac{K(t)}{K^{\sigma}(t)} \right)^{\frac{1}{2}} + \left[\left(\sup_{t\in[a,b]\cap \mathrm{T}} \frac{\mu(t)K^{\Delta}(t)}{K^{\sigma}(t)} \right) + \left(\sup_{t\in[a,b]\cap \mathrm{T}} \frac{K(t)}{K^{\sigma}(t)} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^2 \qquad (3.16)$$

Bu teoreme bir örnek uygulama Agarwal ve arkadaşları tarafından aşağıdaki gibi verilmiştir.

Örnek 3.1.1. a > 0 ve

$$\Psi = \left\{ \left(\sup_{t\in[a,b]\cap \mathrm{T}} \frac{\sigma(t)}{t} \right)^{\frac{1}{2}} + \left[\left(\sup_{t\in[a,b]\cap \mathrm{T}} \frac{\mu(t)}{t} \right) + \left(\sup_{t\in[a,b]\cap \mathrm{T}} \frac{\sigma(t)}{t} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^2 \qquad (3.17)$$

O zaman aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\int_a^b (y^{\Delta}(t))^2 \Delta t \geq \frac{1}{\Psi} \int_a^b \frac{(y^{\sigma}(t))^2}{t\sigma(t)} \Delta t \qquad (3.18)$$

İspat yapılırken $K(t) = \frac{1}{t}$ *nin Teorem 3.1.4 ün varsayımlarını sağladığı ve*

$$\frac{K(\sigma(t)) - K(s)}{\sigma(t) - s} = \frac{\frac{1}{\sigma(t)} - \frac{1}{s}}{\sigma(t) - s} = \frac{\frac{(s - \sigma(t))}{(s\,\sigma(t))}}{\sigma(t) - s} = -\frac{1}{s\,\sigma(t)} \qquad (3.19)$$

eşitliğinin aşağıdaki eşitliği gerektirdiği dikkate alınır:

$$K^{\Delta}(t) = -\frac{1}{t\sigma(t)} \qquad (3.20)$$

Bunun sonucu olarak

$$\frac{K(t)}{K^{\sigma}(t)} = \frac{\sigma(t)}{t}, \quad \frac{\mu(t)\left|K^{\Delta}(t)\right|}{K^{\sigma}(t)} = \frac{\mu(t)}{t}, \text{ ve } \frac{K(t)K^{\sigma}(t)}{\left|K^{\sigma}(t)\right|} = 1 \tag{3.21}$$

ve (3.5) eşitsizliği Teorem 3.1.3 den elde edilir.

3.2. Gecikmiş Volterra Denklemleri İçin İntegral Eşitsizlikler

Pachpatte sırasıyla aşağıdaki eşitsizliği

$$z(t) \le z_1 + \int_0^t [f(s)z(s) + p(s)]ds + \int_0^t f(s)\left(\int_0^s g(\sigma)u(\sigma)d\sigma\right)ds, \tag{3.22}$$

ve aşağıdaki gecikmiş integral eşitsizliği inceledi[40]:

$$z(t) \le z_2 + \int_0^t f(s)z(s)ds + \int_0^{\alpha(t)} g(s)z(s)ds \tag{3.23}$$

Burada $\alpha \in C^1(I,I)$, $\alpha(t) \le t$ iken $I = [0,T)$ üzerinde α azalmayandır ve z_1 ile z_2 sabitlerdir. Abdeldaim ve El Deeb aşağıdaki gecikmiş doğrusal integral eşitsizliği genelleştirdi ve analiz etti(Abdeldaim; Deeb, 2015).

$$z(t) \le z_0 + \int_0^{\alpha(t)} [f(s)z(s) + p(s)]ds + \int_0^{\alpha(t)} f(s)\left(\int_0^s g(\sigma)u(\sigma)d\sigma\right)ds, \tag{3.24}$$

Lipovan geçikmiş Volterra denklemleri üzerine yaptığı çalışmalarda birçok teorem ortaya koydu. Lineer eşitsizlikler için aşağıdaki teoremleri verdi.

Teorem 3.2.1: $k \in C(R^+, R^+)$, $\alpha \in C^1(R^+, R^+)$, $a \in C(R^+ \times R^+, R^+)$ *ve* $(t,s) \to \partial_t a(t,s) \in C(R^+ \times R^+, R^+)$ *olsun. Ayrıca* α *azalmayan ve* $t \ge 0$ için $\alpha(t) \le t$ *varsayılsın.*

Eğer $\theta \in C(R^+, R^+)$ *fonksiyonu aşağıdaki eşitsizliği sağlıyorsa;*

$$\theta(t) \le w(t) + \int_0^{\alpha(t)} a(t,s)\theta(s)ds, \ \ t \ge 0 \tag{3.25}$$

o zaman aşağıdaki eşitsizlik te sağlanır:

$$\theta(t) \le w(t) + e^{\int_0^{\alpha(t)} a(t,s)ds}, \int_0^t e^{-\int_0^{\alpha(t)} a(t,s)ds} \partial_r \left(\int_0^{\alpha(r)} a(r,s)w(s)ds \right) dr, \ \ t \ge 0 \tag{3.26}$$

Sonuç 3.2.1. a ve α *yukarıdaki teoremdeki koşullara uygun ve* $w(t) \equiv w > 0$ *varsayılsın. Eğer* $\theta \in C(R^+, R^+)$ *(3.25) eşitsizliğini sağlarsa o zaman aşağıdaki eşitsizlik te sağlanır:*

$$\theta(t) \le we^{\int_0^{\alpha(t)} a(t,s)ds}, \ \ t \ge 0 \tag{3.27}$$

Yukarıdaki sonuçta $\alpha(t) = t$ *alınırsa eşitsizlik Gronwall eşitiszliğine indirgenir.*

Sonuç 3.2.2: Kabul edelim ki; a ve α *yukarıdaki teorem 3.2.1 koşullarına uygun ve* $w(t) \equiv w > 0$ *olsun. Üstelik* $u \in C(R^+, R^+)$ *aşağıdaki Volterra integral denkleminin bir çözümü olsun.*

$$\theta(t) = w + \int_0^{\alpha(t)} a(t,s)\theta(s)ds, \ \ t \ge 0. \tag{3.28}$$

Eğer $\lim_{t\to\infty} \int_0^{\alpha(t)} a(t,s)ds < \infty$ *ise o zaman u,* R^+ *üzerinde sınırlıdır.*

Teorem 3.2.2: $a, b, k \in C(R^+, R^+)$, $\alpha \in C^1(R^+, R^+)$ *olsun ve* $t \ge 0$ için $\alpha(t) \le t$ *ile* α *azalmayan varsayılsın. Eğer* $u \in C(R^+, R^+)$ *fonksiyonu aşağıdaki eşitsizliği sağlıyorsa;*

$$t \geq 0 \text{ için } a(t)\int_0^{\alpha(t)} b(s)u(s)ds + k(t) \geq u(t) \tag{3.29}$$

o zaman aşağıdaki eşitsizlik te sağlanır:

$$a(t)\int_0^{\alpha(t)} e^{\int_r^{\alpha(t)} a(s)b(s)ds} b(r)k(r)dr + k(t) \geq u(t), \quad t \geq 0 \tag{3.30}$$

Teorem 3.2.3: [33]

i) *u(t) ve $\lambda(t,s)$ sürekli ve negatif olmayan fonksiyonları $I = [\alpha, \beta]$ aralığında tanımlı ve $\lambda(t,s)$ fonksiyonu her bir $s \in I$ için t' ye göre azalmayan bir fonksiyon olsun.*

Eğer c bir negatif olmayan sabit olmak üzere aşağıdaki eşitsizlik sağlanıyorsa; $u(t) \leq c + \int_\alpha^t \lambda(t,s)u(s)ds,\ t \in I$,

o zaman aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$u(t) \leq c\exp(\int_\alpha^t (\lambda(t,s)ds), \qquad t \in I \tag{3.31}$$

ii) *p(t) bir pozitif sürekli ve $t \in I = [\alpha, \beta]$ aralığında azalmayan fonksiyon olsun.*

Eğer aşağıdaki eşitsizlik sağlanırsa;

$$u(t) \leq p(t) + \int_\alpha^t \lambda(t,s)u(s)ds, \quad t \in I$$

O zaman aşağıdaki eşitsizlikte sağlanır:

$$u(t) \leq p(t)\exp(\int_\alpha^t \lambda(t,s)ds), \ t \in I \tag{3.32}$$

İspat 3.2.3:

i) $\alpha \leq T \leq \beta$ olmak üzere her hangi bir belirli T için ve $\alpha \leq t \leq T \leq \beta$ için aşağıdaki eşitsizlik yazılır:

$$u(t) \leq c + \int_\alpha^t \lambda(T,s)u(s)ds, \qquad t \in I \tag{3.33}$$

Sağ taraf için $\vartheta(t) = c + \int_{\alpha}^{k} \lambda(T,s)u(s)ds$, $\vartheta(\alpha)$*)=c şeklinde bir fonksiyon tanımlansın.*

$\alpha \le t \le T$ *için* $u(t) \le \vartheta(t)$ *olur.* $\vartheta(t)$*) eşitliği t' ye göre türetilirse;*

$$\vartheta^{'}(t) = \lambda(T,t)u(t) \tag{3.34}$$

Bulunur. $u(t) \le \vartheta(t)$ *kullanılarak* $\vartheta^{'}(t) \le \lambda(T,t)\vartheta(t)$ *yazılır.*

$$\frac{\vartheta'(t)}{\vartheta(t)} \le \lambda(T,t) \tag{3.35}$$

Her iki yanın t' ye göre α ' dan T ' ye integrali alınır:

$$ln\,\vartheta(T) - ln\,\vartheta(\alpha) \le \int_{\alpha}^{T} \lambda(T,s)ds$$

$$ln\left(\frac{\vartheta(T)}{\vartheta(\alpha)}\right) \le \int_{\alpha}^{T} \lambda(T,s)ds \tag{3.36}$$

Her iki taraf e tabanına alınıp $\vartheta(t)$*) eşitliği kullanılarak aşağıdaki eşitsizlik yazılır:*

$$\vartheta(T) \le c\exp\left(\int_{\alpha}^{T} \lambda(T,s)ds\right) \tag{3.37}$$

T yukarıdaki eşitsizlikte keyfi bir değer olduğundan t ile yer değiştirilir ve $u(t) \le \vartheta(t)$ *kullanılırsa ispatı istenen eşitsizlik elde edilir.*

ii) p(t) pozitif sürekli ve azalmayan bir fonksiyon olduğundan $\vartheta(t) = \dfrac{u(t)}{p(t)}$ *olsun.* $u(t) \le p(t) + \int_{\alpha}^{t} \lambda(t,s)u(s)ds$ *eşitsizliğinin her iki yanını p(t) ile bölerek aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:*

$$\frac{u(t)}{p(t)} \le 1 + \int_{\alpha}^{t} \frac{\lambda(t,s)u(s)}{p(t)} ds \tag{3.38}$$

Bunun sonucunda;

$$\vartheta(t) \leq 1 + \int_{\alpha}^{t} \frac{p(s)}{p(t)} \vartheta(s)\lambda(t,s)ds \tag{3.39}$$

$t \geq s$, $\dfrac{p(s)}{p(t)} \leq 1$ *olduğundan aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:*

$$\vartheta(t) \leq 1 + \int_{\alpha}^{t} \lambda(t,s)\vartheta(\mathrm{s})ds \tag{3.40}$$

Teorem 3.2.3' ün (i) bölümünün bir uygulaması olarak aşağıdaki eşitsizlik yazılır:

$$\vartheta(t) \leq \exp(\int_{\alpha}^{t} \lambda(t,s)ds) \tag{3.41}$$

Yukarıdaki eşitsizliği ve $\vartheta(t) = \dfrac{u(t)}{p(t)}$ *bağıntısı kullanılarak istenen eşitsizlik elde edilir.*

Örnek 3.2.1: Kabul edelim ki; $u'(t) = \lambda(t,s)u(t)$ *birinci derece adi diferensiyal denklemini ele alalım:* $I = [0,t]$ *aralığında tanımlı negatif olmayan sürekli fonksiyonu u(t) ve*

$\lambda(\mathrm{t,s}) \leq \exp(\mathrm{st})$ *, s sabit ve u(0) = c olsun.*

O zaman

$$u'(t) \leq exp(st)u(t) \tag{3.42}$$

Yukarıdaki eşitsizliğin her iki yanı t' ye göre 0 ' dan t ' ye integrali alınırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$u(t) - u(0) \leq \int_{0}^{t} exp(rs)u(r)dr \tag{3.43}$$

Teorem3.2.3 ‘ ün (i) kısmını kullanarak aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$u(t) \leq c \; exp(\int_0^t exp(rs)dr)$$

$$u(t) \leq c \; exp(\frac{exp(st)}{s} - \frac{1}{s}) \tag{3.44}$$

elde edilir.

3.3. Zaman Ölçeklerinde Gecikmiş İntegral Eşitsizlikler İçin Gronwall Eşitsizliği

Gronwall eşitsizliği birçok diferansiyel ve integral denklemin çözümleri için kesin sınırlar sağlar. Bu eşitsizlik birçok çalışmanın temelini oluşturmuş, birçok genelleştirmeleri ve uygulamaları elde edilmiştir. Bu bağlamda birçok geçikmiş integral eşitsizlik elde edilmiştir. R reel sayılar kümesinde bulunan kapalı her alt küme zaman ölçeği (skalası) adını alır ve T ile gösterilir. C_{rd} ile *rd* sağ yoğun sürekli fonksiyonlar, $\Re$ ile tüm regressif ve *rd* sağ yoğun sürekli fonksiyonları gösterilir. $\Re^+ = \{\forall\, t \in T; p \in \Re : 1 + \mu(t)p(t) > 0\}$ ve $t_0 \in T$, $T_0 = [t_0, \infty) \cap T$ şeklinde gösterilir.

Lemma 3.3.1: Varsayalım ki; $p \geq 1,\ a \in R_+$ *olsun.*

O zaman her hangibir k > 0 için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır[28]:

$$a^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{1}{p} k^{\frac{1-p}{p}} a + \frac{p-1}{p} k^{\frac{1}{p}} \right) \tag{3.45}$$

Lemma 3.3.2: Zaman ölçeğinde Gronwall Eşitsizliği

Varsayalım ki $u, b \in C_{rd}$ $, m \in \Re^+$ $, m \geq 0$ *olsun. O zaman;*

$$u(\xi) \leq b(\xi) + \int_{\xi_0}^{\xi} m(\xi)u(\xi)\Delta t \quad , \quad \xi \in T_0 \tag{3.46}$$

eşitsizliği aşağıdaki eğitsizliği gerektirir:

$$u(\xi)\le b(\xi)+\int_{\xi_0}^{\xi} e_m(\xi,\sigma(s))b(s)m(s)\Delta s \quad , \quad \xi\in T_0 \tag{3.47}$$

Teorem 3.3.1: $x(\xi),a(\xi),c(\xi),f(\xi),g(\xi)\in C_{rd}(T_0,R^+)$ *olsun.*

$\xi\in T_0$ *için* $a(\xi)$ *ve* $c(\xi)$ *azalmayan olsun.*

O zaman $p\ \ge\ 1$ *sayısı bir sabit,* $\tau: T_0\to T$, $\tau(\xi)\le\xi$,

$-\infty<\alpha=\inf\{\tau(\xi),\ \xi\in T_0\}\le\xi_0$,ve $\varphi(\xi)\in C_{rd}([\alpha,\xi_0]\cap T,R_+)$

olmak üzere

$$\begin{cases} x(\xi)=\varphi(\xi), & \xi\in[\alpha,\xi_0]\cap T \\ \varphi(\tau(\xi))\le(a(\xi))^{1/p} & \xi\in T_0\ ,\ \ \tau(\xi)\le\xi_0 \end{cases} \tag{3.48}$$

başlangıç koşullarına haiz olan

$$x^p(\xi)\le a(\xi)+c(\xi)\int_{\xi_0}^{\xi}[f(s)x(\tau(s)+g(s)]\Delta s,\xi\in T_0 \tag{3.49}$$

yukarıdaki integral eşitsizlik herhangi bir $k>0$,$\xi\in T_0$ *için aşağıdaki integral eşitsizliği gerektirir:*

$$x(\xi)\le\left[a(\xi)+c(\xi)\left(h(\xi)+\int_{\xi_0}^{\xi}e_B(\xi,\sigma(s))h(s)B(s)\Delta s\right)\right]^{\frac{1}{p}} \tag{3.50}$$

Burada

$$h(\xi)=\int_{\xi_0}^{\xi}[f(s)\left(\frac{p-1}{p}k^{\frac{1}{p}}+\frac{a(s)}{pk^{\frac{p-1}{p}}}\right)+g(s)]\Delta s \tag{3.51}$$

ve

$$B(\xi)=\frac{c(\xi)f(\xi)}{pk^{\frac{p-1}{p}}}\ ,\ \xi\in T_0 \tag{3.52}$$

elde edilir.

Teorem 3.3.2: Teorem 3.3.1 ‘in tüm varsayımları altında (3.49) eşitsizliği (3.48) başlangıç koşulları altında herhangi bir $k > 0$,$t \in T_0$ için aşağıdaki eşitsizliği gerektir:

$$x(\xi) \leq \left[a(\xi) + c(\xi)h(\xi)e_B(\xi,\xi_0)\right]^{1/k} \tag{3.53}$$

Burada h(ξ) ve B(ξ) sırasıyla (3.52) ve (3.51) ile tanımlanır.

3.4. Konveks Fonksiyonlar İçin Hadamard Tipi İntegral Eşitsizlikler

Kırmacı 2007’ te aşağıdaki Hermite-Hadamard tipi eşitsizlikleri ispatladı[23].

Teorem 3.4.1: I^o üzerinde diferansiyellenebilen bir fonksiyon $f : I \subset R \to R$ olsun ve $\xi, \rho \in I^o$, $\xi < \rho$ olsun. Eğer $|f'|$, $[\xi, \rho]$ üzerinde konveks ise bu durumda aşağıdaki

$$\left|\frac{1}{\rho-\xi}\int_{\xi}^{\rho} f(x)dx - f\left(\frac{\xi+\rho}{2}\right)\right| \leq \frac{\rho-\xi}{4}\left[\frac{|f'(\xi)|+|f'(\rho)|}{2}\right] \tag{3.54}$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 3.4.2: kabul edelim ki; I^o üzerinde diferansiyellenebilen bir fonksiyon $f : I \subset R \to R$ fonksiyonu olsun öyle ki $\xi, \rho \in I^o$, $\xi < \rho$ olsun. Eğer $|f'|^{r/(r-1)}$, $[\xi, \rho]$ üzerinde konveks ise bu durumda,

$$\left|\frac{1}{\rho-\xi}\int_{\xi}^{\rho} f(x)dx - f\left(\frac{\xi+\rho}{2}\right)\right| \leq \frac{\rho-\xi}{16}\left(\frac{4}{r+1}\right)^{1/r} \{\left(\left|f'(\xi)\right|^{r/(r-1)} + 3\left|f'(\rho)\right|^{r/(r-1)}\right)^{\frac{r-1}{r}}$$

$$+\left(3\left|f'(a)\right|^{r/(r-1)}+\left|f'(\mathrm{b})\right|^{r/(r-1)}\right)^{\frac{r-1}{r}}\ \} \tag{3.55}$$

eşitsizliği sağlanır

Teorem 3.4.3: Kabul edelim ki; diferansiyellenebilen $f : I \subset [0,\infty) \to R$ *fonksiyonu ile* $\xi, \rho \in I^o$, $\xi < \rho$ *verilsin. Eğer* $\left|f'\right|^m$, $[\xi, \rho]$ *üzerinde konveks ve* $m \geq 1$ *ise,*

$$\left|\frac{1}{\rho-\xi}\int_\xi^\rho f(x)dx - f\left(\frac{\xi+\rho}{2}\right)\right| \leq \frac{\rho-\xi}{8}\left\{\left(\frac{\left|f'(\xi)\right|^m+2\left|f'(\rho)\right|^m}{3}\right)^{\frac{1}{m}} + \left(\frac{2\left|f'(\xi)\right|^m+\left|f'(\rho)\right|^m}{3}\right)^{\frac{1}{m}}\right\} \tag{3.56}$$

eşitsizliği sağlanır[45].

Teorem 3.4.4: Kabul edelim ki; $f : I \to R$ *fonksiyonu* I^o *üzerinde diferansiyellenebilir olsun. Öyle ki* $\xi, \rho \in I^o$, $\xi < \rho$ *olsun.* $\left|f''\right|$, $[\xi, \rho]$ *üzerinde konveks olursa bu durumda,*

$$\left|\frac{1}{\rho-\xi}\int_\xi^\rho f(x)dx - f\left(\frac{\xi+\rho}{2}\right)\right| \leq \frac{(\rho-\xi)^2}{24}\left(\frac{\left|f''(\xi)\right|+2\left|f''(\rho)\right|}{2}\right) \tag{3.57}$$

eşitsizliği sağlanır[46].

Teorem 3.4.5: $f : I \to R$ *fonksiyonu* I^o *üzerinde diferansiyellenebilir ve* $\xi, \rho \in I^o$, $\xi < \rho$ *olsun.* $\left|f''\right|$, $[\xi, \rho]$ *üzerinde konveks olursa bu durumda,*

$$\left|\frac{f(\xi)+f(\rho)}{2} - \frac{1}{\rho-\xi}\int_\xi^\rho f(x)dx\right| \leq \frac{(\rho-\xi)^2}{12}\left(\frac{\left|f''(\xi)\right|+\left|f''(\rho)\right|}{2}\right) \tag{3.58}$$

eşitsizliği sağlanır[48].

Tanım 3.4.1: s-konveks Fonksiyonlarda İntegral Eşitsizlikler:

s- konvekslik 1978' de Breckner tarafından konveks fonksiyonların bir genelleştirilmesi olarak verildi. Hudzik ve Maligranda 1994' te ikinci anlamda s-konveks fonksiyonları aşağıdaki gibi tanımladılar.

$g : R^{+} \to R$ *fonksiyonu* her $x, y \in [0,\infty)$ olmak üzere $\alpha, \beta \geq 0$ *iken* $\alpha + \beta = 1$ *ve bazı sabit* $m \in (0,1]$ *için aşağıdaki eşitliği sağlıyorsa;*

$$g(\alpha x + \beta y) \leq \alpha^{s} g(x) + \beta^{s} g(y) \qquad (3.59)$$

s-konveks olarak adlandırılır. İkinci anlamda s-konveks fonksiyonlar sınıfı genellikle K_s^2 *şeklinde gösterilir.*

Dragomir ve Fitzpatrick 1999' da aşağıdaki s-konveks fonksiyonlar için aşağıdaki Hadamard tipi integral eşitsizliği ispatladılar[10].

Teorem 3.4.6: Varsayalım ki; $\xi, \rho \in [0,\infty)$, $\xi < \rho$ *ve* $s \in (0,1]$ *olmak üzere* $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ *ikinci anlamda bir s-konveks fonksiyon olsun. Eğer* $f \in L_1[0,1]$ *ise o zaman,*

$$2^{s-1} f\left(\frac{\xi+\rho}{2}\right) \leq \frac{1}{\rho-\xi}\int_{\xi}^{\rho} f(x)dx \leq \frac{f(\xi)+f(\rho)}{s+1} \qquad (3.60)$$

eşitsizliği sağlanır[10].

Burada $k = \dfrac{1}{s+1}$ *mümkün en iyi sayıdır.*

Tanım 3.4.2. m-konveks Fonksiyonlarda İntegral Eşitsizlikler:

Toader 1984' te m-konvekslik kavramını aşağıdaki gibi tanımladı.

$f : [a,b] \to R$ *fonksiyonu* her $x, y \in [a,b]$ ve $\xi \in [0,1]$ olmak üzere $m \in [0,1]$ *iken aşağıdaki eşitsizlik sağlansın;*

$$f(\xi x + m(1-\xi)y) \leq \xi f(x) + m(1-\xi) f(y) \qquad (3.61)$$

m-konveks fonksiyon olarak sınıflanır ve $f(0) \le 0$ *iken [0, b] üzerinde tanımlanan m-konveks fonksiyonlar* $K_m(b)$ *şeklinde gösterilir.*

Dragomir 2002' de m-konveks fonksiyonlar için aşağıdaki integral eşitsizliği ispatladı.

Teorem 3.4.7: Kabul edelim ki; $m \in (0,1]$ ve $0 \le \xi \le \rho$ olmak üzere $[0,\infty) \to R$ *üzerinde tanımlı f bir m-konveks fonksiyon olsun.*
Eğer $f \in L_1[0,1]$ *ise o zaman,*

$$f\left(\frac{\xi+\rho}{2}\right) \le \frac{1}{\rho-\xi}\int_{\xi}^{\rho} \frac{f(x)+mf(\frac{x}{m})}{2}dx \le \frac{m+1}{4}\left[\frac{f(\xi)+f(\rho)}{2}+m\frac{f(\frac{\xi}{m})+f(\frac{\rho}{m})}{2}\right] \tag{3.62}$$

eşitsizliği sağlanır[11].

Teorem 3.4.8: Kabul edelim ki; $m \in (0,1]$, $0 \le \mathrm{a} \le \mathrm{b}$ ve $f, g, fg \in L_1[\mathrm{a}, b]$ olmak üzere $f, g : [0,\infty) \to R^+$ *bir m-konveks fonksiyon olsun.* $F(x,y)(\xi), G(x,y)(\xi) : [0,1] \to R^+$ *fonksiyonları tüm* $t \in [0,1]$ *için aşağıdaki şekilde tanımlansınlar:*

$$\begin{aligned} F(x,y)(\xi) &= \frac{1}{2}\left[f(\xi x + m(1-\xi)y) + f((1-\xi)x + m\xi y)\right] \\ G(x,y)(\xi) &= \frac{1}{2}\left[\mathrm{g}(\xi x + m(1-\xi)y) + g((1-\xi)x + m\xi y)\right] \end{aligned} \tag{3.63}$$

Bu durumda,

$$\begin{aligned} \int_a^b F\left(x,\frac{a+b}{2}\right)(\xi)G\left(x,\frac{a+b}{2}\right)(\xi)dx &\le \frac{1}{4}\int_a^b f(x)g(x)dx \\ &+\frac{m^2}{4}(b-a)\mu_1\mu_2 + \frac{m}{4}\left[\mu_1\int_a^b f(x)dx + \mu_2\int_a^b g(x)dx\right] \end{aligned} \tag{3.64}$$

eşitsizliği sağlanır[35]. Burada ;

$$\mu_1 = \frac{m+1}{4}\left[\frac{g(a)+g(b)}{2} + m\frac{g(\frac{a}{m})+g(\frac{b}{m})}{2}\right] \tag{3.65}$$

$$\mu_2 = \frac{m+1}{4}\left[\frac{\mathrm{f}(a)+f(b)}{2} + m\frac{\mathrm{f}(\frac{a}{m})+f(\frac{b}{m})}{2}\right] \tag{3.66}$$

elde edilir.

Tanım 3.4.3: (α, m)-konveks Fonksiyonlarda İntegral Eşitsizlikler

Miheşan 1993' te (α, m)-konveks fonksiyonların tanımını aşağıdaki gibi verdi.

Kabul edelim ki; b > 0 iken $f:[0,b)\to R$ *fonksiyonu* $(\alpha,m)\in[0,1]^2$ *olmak üzere tüm* $x,y\in[0,b]$ ve $\xi\in[0,1]$ *için aşağıdaki eşitsizlik sağlanıyorsa;*

$$f(\xi x+m(1-\xi)y)\le \xi^{\alpha} f(x)+m(1-\xi^{\alpha})f(y) \tag{3.67}$$

f fonksiyonu (α, m)konveks fonksiyon olarak sınıflanır ve $f(0)\le 0$ *iken [0, b] üzerinde tanımlanan (α, m)* -konveks fonksiyonlar $K_m^{\alpha}(b)$ *şeklinde gösterilir. Eğer (α, m) = (1, m) olarak seçilirse (α, m)*-konvekslik *m*-konveksliğe *indirgenir.*

Teorem 3.4.9: $(\alpha,m)\in(0,1]^2$, $0\le a\le b$ ve $f,g,fg\in L_1[\mathrm{a},b]$ olmak üzere $f,g:[0,\infty)\to R^+$ *bir (α , m)-konveks fonksiyon olsun.* $F(x,y)(\xi),G(x,y)(\xi):[0,1]\to R^+$ *fonksiyonları tüm* $\xi\in[0,1]$ *için aşağıdaki şekilde tanımlanır:*

$$\begin{aligned} F(x,y)(\xi) &= \frac{1}{2}\left[f(\xi x+m(1-\xi)y)+f(\mathrm{m}(1-\xi)x+\xi y)\right] \\ G(x,y)(\xi) &= \frac{1}{2}\left[\mathrm{g}(\xi x+m(1-\xi)y)+g(\mathrm{m}(1-\xi)x+\xi y)\right] \end{aligned} \tag{3.68}$$

Bu durumda aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır[39]:

$$\int_0^1 \left[F(a,b)(\xi) + G(a,b)(\xi) \right] d\xi(\xi) \leq \frac{1}{4}\left[\frac{1+ma}{1+a}\right]\left[f(a) + f(b) + g(a) + g(b) \right] \qquad (3.69)$$

ve burada

M(a, b) = f(a)g(a)+f(b)g(b) ve N(a, b) = f(a)g(b)+f(b)g(a) dır ve Euler Beta fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\beta(x,y) = \int_0^1 \xi^{x-1}(1-\xi)^{y-1} d\xi \quad x,y>0 \qquad (3.70)$$

3.5. Genişletilmiş Hardy-Hilbert Eşitsizliği ve Uygulamaları

$m>1$, $k=\dfrac{m}{m-1}$ ve $\dfrac{\pi}{\sin\frac{\pi}{m}}$ mümkün en iyi sayı olmak üzere ünlü

Hardy-Hilbert eşitsizliği aşağıdaki gibi verilir:

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{f(x)g(y)}{x+y}dxdy \leq \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{m}}\left\{\int_0^\infty f^m(x)dx\right\}^{\frac{1}{m}}\left\{\int_0^\infty g^k(y)dy\right\}^{\frac{1}{k}} \qquad (3.71)$$

Özel olarak yukarıdaki eşitsizlikte k = m = 2 konulursa klasik Hilbert denklemi elde edilir:

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{f(x)g(y)}{x+y}dxdy \leq \pi\left\{\int_0^\infty f^2(x)dx\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\int_0^\infty g^2(y)dy\right\}^{\frac{1}{2}} \qquad (3.72)$$

Burada π mümkün en iyi sayıdır. Kuang, 1999’ da kuvvet fonksiyonu kullanarak aşağıdaki sonucu verdi (Kuang,1999):

$$\int_a^b\int_a^b \frac{f(x)g(y)}{x^{\xi}+y^{\xi}}dxdy \le \left\{\omega(\xi,p,q)\int_a^b \mathrm{x}^{1-\xi} f^{p}(x)dx\right\}^{\frac{1}{p}} \left\{\int_a^b x^{1-\xi} g^{q}(y)dy\right\}^{\frac{1}{q}} \quad (3.73)$$

Bu eşitsizlikte ξ, x ve y' den bağımsız bir parametredir. φ fonksiyonu ve ona bağlı olarak verilen ω aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\varphi(r)=\int_0^{a/b}\frac{u^{\xi-2+1/r}}{1+u^{\xi}}du,\quad r=p,q \quad \text{ve} \quad \omega(\xi,p,q)=\frac{\pi}{\xi\sin\frac{\pi}{p\xi}}-\varphi(q) \quad (3.74)$$

Fakat yukarıdaki eşitlikte mümkün en iyi sayı tanımlanmamıştı. Mingzhe 2006' da (3.5.1) eşitsizliğinin sol tarafında yer alan paydadaki x + y ifadesini genişleterek $ax^{1+x}+by^{1+y}$ şeklinde bir üstel fonksiyon aldı ve elde ettiği yeni integralde mümkün en iyi sayının $\dfrac{\pi}{a^{1/q}b^{1/p}\sin\frac{\pi}{p}}$ olacağını gösterdi.

Lemma 3.5.1:[30] $x\in(0,\infty)$ için $h(x)=\dfrac{x}{1+x+x\ln x}$ *olsun. O zaman* $0\le\varphi(x)<\dfrac{1}{2}$ *olmak üzere* $h(x)=\dfrac{1}{2}-\varphi(x)$ *koşuluna uyan bir* $\varphi(x)$ *fonksiyonu vardır.*

İspat 3.5.1: Kabul edelim ki; $x\in(0,\infty)$ *için* $\mathrm{s}(x)=\dfrac{1+x}{x}+\ln x$ *şeklinde bir fonksiyon tanımlansın. s(x)' in minimumu 2 dir. O halde* $s(x)\ge 2$ *ve* $s^{-1}(x)\le 2$ *dir. Açıktır ki h(x) fonksiyonu* $\mathrm{h}(x)=\dfrac{1}{s(x)}>0$ *olur.* $\varphi(x)$ *negatif olmayan fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanabilir:* $x\in(0,\infty)$ *için*

$$\varphi(x)=\frac{1-x+x\ln x}{2(1+x+x\ln x)} \quad (3.75)$$

Bunun sonucu olarak h(x) fonksiyonu $h(x)=\frac{1}{2}-\varphi(x)$ *olarak bulunur.*

Teorem 3.5.1: $0<\int_0^\infty \omega(p,x)f^p(x)dx<\infty$, $0<\int_0^\infty \omega(\mathrm{q},x)g^q(x)dx<\infty$, *r >1 ve* $\varphi(x)$ *fonksiyonu (3.5.5) ile tanımlanmak üzere ağırlık fonksiyonu*

$$x\in(0,\infty) \text{ için } \omega(\mathrm{r},x)=x^{(1+x)(1-r)}\left(\frac{1}{2}-\varphi(x)\right)^{r-1} \tag{3.76}$$

şeklinde tanımlansın ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ve $p\geq q>1$ *olsun. O zaman aşağıdaki eşitsizlik sağlanır[30]:*

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{f(x)g(y)}{ax^{1+x}+by^{1+y}}dxdy \leq \frac{\mu\pi}{\sin\frac{\pi}{p}}\left\{\int_0^\infty \omega(p,x)f^p(x)dx\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\int_a^b \omega(\mathrm{q},x)g^q(\mathrm{x})dx\right\}^{\frac{1}{q}} \tag{3.77}$$

Burada $\mu=\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{1}{p}}$ ve $\frac{\mu\pi}{\sin\frac{\pi}{p}}$ *mümkün en iyi sayıdır.*

Mingzhe ve Weijian ayrıca bu çalışmada yukarıdaki teoreme denk olan aşağıdaki teoremi de verdiler.

Teorem 3.5.2: $\varphi(x)$ *fonksiyonu (3.75) ile tanımlanmış ve* $\frac{1}{k}+\frac{1}{m}=1$ ve $k\geq m>1$ *olsun.*

Eğer

$$\begin{aligned}&0<\int_0^\infty x^{(1+x)(1-k)}(1-2\varphi(x))^{k-1}f^k(x)dx<\infty \text{ ve}\\&0<\int_0^\infty y^{(1+y)(1-m)}(1-2\varphi(x))^{m-1}g^m(x)dx<\infty \text{ ise}\end{aligned} \tag{3.78}$$

O zaman aşağıdaki eşitsizlik sağlanır[30]:

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{f(x)g(y)}{ax^{1+x}+by^{1+y}}dxdy \le \frac{\mu\pi}{2sin\frac{\pi}{k}}\left\{\int_0^\infty x^{(1+x)(1-k)}(1-2\varphi(x))^{k-1}f^k(x)dx\right\}^{\frac{1}{k}}$$

$$\times\left\{\int_0^\infty y^{(1+y)(1-m)}(1-2\varphi(\mathrm{y}))^{m-1}g^m(x)dx\right\}^{\frac{1}{m}} \qquad (3.79)$$

Burada $\mu=(\frac{1}{a})^{\frac{1}{q}}(\frac{1}{b})^{\frac{1}{p}}$ ve $\frac{\mu\pi}{2\sin\frac{\pi}{p}}$ *mümkün en iyi sayıdır.*

Özel olarak p =2 için (3.74)' nın bazı genelleştilmeleri elde edilir. Teorem 3.5.1.' den hareketle aşağıdaki sonuçları elde ettiler(Mingzhe; Weijian, 2006).

Sonuç 3.5.1: (3.73) ile tanımlanan $\varphi(x)$ *fonksiyonu için eğer*

$$0<\int_0^\infty x^{-(1+x)}(\frac{1}{2}-\varphi(x))f^2(x)dx<\infty \text{ ve}$$
$$0<\int_0^\infty y^{-(1+y)}(\frac{1}{2}-\varphi(y))g^2(\mathrm{y})dy<\infty \text{ ise} \qquad (3.80)$$

O zaman,

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{f(x)g(y)}{ax^{1+x}+by^{1+y}}dxdy \le \frac{\pi}{\sqrt{ab}}\left\{\int_0^\infty x^{-(1+x)}(\frac{1}{2}-\varphi(x))f^2(x)dx\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\times\left\{\int_0^\infty y^{-(1+y)}(\frac{1}{2}-\varphi(\mathrm{y}))g^2(\mathrm{y})dy\right\}^{\frac{1}{2}} \qquad (3.81)$$

eşitsizliği sağlanır.

Burada $\frac{\pi}{\sqrt{ab}}$ *mümkün en iyi sayıdır.*

Sonuç 3.5.2: (3.77) ile tanımlanan $\varphi(x)$ *fonksiyonu için eğer*

$0<\int_0^\infty x^{-(1+x)}(\frac{1}{2}-\varphi(x))f^2(x)dx<\infty$ *ise,*

o zaman aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{f(x)g(y)}{ax^{1+x}+by^{1+y}}dxdy \le \frac{\pi}{\sqrt{ab}}\left\{\int_0^\infty x^{-(1+x)}(\frac{1}{2}-\varphi(x))f^2(x)dx\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{3.82}$$

Burada $\frac{\pi}{\sqrt{ab}}$ *mümkün en iyi sayıdır.*

Teorem 3.5.3. Kabul edelim ki; $h(x)\in L^2(0,1)$ ve $h(t)\ne 0$ *olsun.* $x\in[0,\infty)$ olmak üzere $f(x)=\int_0^1 t^{u(x)}\,|h(t)|dt$ *fonksiyonu tanımlansın. Ayrıca* $u(x)=x^{1+x}$ *ve* $\varphi(x)$ *ağırlık fonksiyonu (3.5.7) ile tanımlansın. Burada* $(r=p,q)$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ve $p\ge q>1$ *dir[32].*

Eğer

$$0<\int_0^\infty x^{(1+x)(1-r)}(\frac{1}{2}-\varphi(x))^{r-1}f^r(x)dx<\infty \ \ ise$$

$$\left(\int_0^\infty f^2(x)dx\right)^2 < \frac{\pi\mu}{\sin\frac{\pi}{p}}\left(\int_0^\infty x^{(1+x)(1-p)}(\frac{1}{2}-\varphi(x))^{p-1}f^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\times\left(\int_0^\infty y^{(1+y)(1-q)}(\frac{1}{2}-\varphi(y))^{q-1}f^q(y)dy\right)^{\frac{1}{q}}\int_0^1 th^2(t)dt \tag{3.83}$$

Burada $\mu=(\frac{1}{a})^{\frac{1}{q}}(\frac{1}{b})^{\frac{1}{p}}$ ve $\frac{\mu\pi}{\sin\frac{\pi}{p}}$ *mümkün en iyi sayıdır.*

Özel olarak $p=q=2$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.5.3: $h(t)$, $f(x)$ ve $u(x)$ *Teorem 3.5.3. ün koşullarını sağlasın ve farz edelim ki* $\varphi(x)$ *fonksiyonu (3.75) ile tanımlı olmak üzere*

$$0<\int_0^\infty x^{-(1+x)}(\frac{1}{2}-\varphi(x))f^2(x)dx<\infty \tag{3.84}$$

olsun.

O zaman aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\left(\int_0^\infty f^2(x)dx\right)^2 < \frac{\pi}{\sqrt{ab}}\left(\int_0^\infty x^{-(1+x)}\left(\frac{1}{2}-\varphi(x)\right)f^2(x)dx\right)\int_0^1 th^2(t)dt \qquad (3.85)$$

Burada $\frac{\pi}{\sqrt{ab}}$ *mümkün en iyi sayıdır.*

AbuHany 2014' te aşağıdaki Lemma ve izleyen teoremleri vererek bu konuda önemli çalışmalar yaptı [1].

Lemma 3.5.2. Kabul edelim ki; γ,α,β *negatif olmayan reel sayılar olsun. O zaman aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:*

$$\int_0^\infty \frac{|\ln x-\ln y|^\gamma}{\alpha x+\beta y+|x-y|}\left(\frac{x}{y}\right)^{1/2} dy = \int_0^\infty \frac{|\ln x-\ln y|^\gamma}{\alpha x+\beta y+|x-y|}\left(\frac{y}{x}\right)^{1/2} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{2^{\gamma+1}|\ln t|^\gamma}{(\alpha+1)+t^2(\beta-1)}dt + \int_0^1 \frac{2^{\gamma+1}|\ln t|^\gamma}{(\beta+1)+t^2(\alpha-1)}dt = A \qquad (3.86)$$

Burada $A := A(\gamma,\alpha,\beta)\in[0,\infty)$ *dır.*

Teorem 3.5.4. Kabul edelim ki; $f,g \ge 0$,

$F(x)=\int_0^x f(\xi)d\xi \qquad G(y)=\int_0^y g(\xi)d\xi$ *olsun ve*

$0<\int_0^x f^2(\xi)d\xi<\infty$ ve $0<\int_0^x g^2(y)dy<\infty$ *olduğu farz edelim.*

O zaman aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{|\ln x-\ln y|^\gamma}{\alpha x+\beta y+|x-y|}\frac{F(x)}{x}\frac{G(y)}{y}dxdy \le \mu\left\{\int_0^\infty f^2(x)dx\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\int_0^\infty g^2(y)dy\right\}^{\frac{1}{2}} \qquad (3.87)$$

Burada $\mu = 4A$, Lemma 3.5.1 de verilen A' ya bağlı mümkün en iyi sayıdır.

Sonuç 3.5.4: Teorem 3.5.4 ‘te $\alpha=\beta=1$ *alınırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:*

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{|ln\,x-ln\,y|^\gamma}{x+y+|x-y|}\frac{F(x)}{x}\frac{G(y)}{y}dxdy \le K_\gamma\left\{\int_0^\infty f^2(\mathrm{x})dx\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\int_0^\infty g^2(\mathrm{y})dy\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{3.88}$$

Burada $\gamma=1,2,3,...$, $K_0=2$ ve $K_\gamma=\int_0^1 2^{\gamma+1}|ln\,h|^\gamma\,dh=2\gamma K_{\gamma-1}$

Sonuç 3.5.5: Teorem 3.5.4 ‘te $\gamma=\alpha=0,\beta=1$ *alınırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:*

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{1}{y+|x-y|}\frac{F(x)}{x}\frac{G(y)}{y}dxdy \le \mu\left\{\int_0^\infty f^2(\mathrm{x})dx\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\int_0^\infty g^2(\mathrm{y})dy\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{3.89}$$

Burada, μ *= 4A , Lemma 3.5.1 de verilen A’ ya bağlı mümkün en iyi sayıdır.*

$\gamma=\alpha=0,\beta=1$ *için A aşağıdaki gibi hesaplanır:*

$$A=\int_0^1\frac{2}{1}dt+\int_0^1\frac{2}{-t^2+2}dt=3{,}24646 \tag{3.90}$$

Sonuç 3.5.6: Teorem 3.5.4 ‘te $\gamma=0,\alpha=1,\beta=2$ *alınırsa,*

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{1}{x+2y+|x-y|}\frac{F(x)}{x}\frac{G(y)}{y}dxdy \le \mu\left\{\int_0^\infty f^2(\mathrm{x})dx\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\int_0^\infty g^2(\mathrm{y})dy\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{3.91}$$

eşitsizliği elde edilir.

Burada μ *= 4A , Lemma 3.5.1 de verilen A’ ya bağlı mümkün en iyi sayıdır.*

$$\gamma=0,\alpha=1,\beta=2 \text{ için } A=\int_0^1\frac{-4\,ln\,t}{1-t^2}dt+\int_0^1\frac{-4\,ln\,t}{-t^2+1}dt=2\pi^2 \tag{3.92}$$

Sonuç 3.5.7: Teorem 3.5.4 'te $\gamma = \alpha = 0, \beta = 2$ alınırsa,

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{2y + |x-y|} \frac{F(x)}{x} \frac{G(y)}{y} dxdy \le \mu \left\{ \int_0^\infty f^2(\mathrm{x}) dx \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_0^\infty g^2(\mathrm{y}) dy \right\}^{\frac{1}{2}} \qquad (3.93)$$

Burada $\mu = 4A$, Lemma 3.5.1 de verilen A' ya bağlı mümkün en iyi sayıdır.

$\gamma = 0, \alpha = 1, \beta = 2$ *için* $A = \int_0^1 \frac{2}{1+t^2} dt + \int_0^1 \frac{2}{-t^2+3} dt = 1{,}968$ *olur.*

4. TARTIŞMA ve SONUÇ

Teknoloji ve bilimin gelişmesi ile matematikte elde edilen kavram ve teoremlere geniş uygulama alanları açıldı. İntegral eşitsizliklere olan ilginin artmasıyla integral eşitsizliklerin genelleştirilmesi üzerine yapılan çalışmalar modern matematikte önemli bir alan haline geldi. Doğa bilimlerinden hareketle oluşturulan diferansiyel denklemlerin mühendislikte, teknolojide ve matematiğin çeşitli alanlarında geniş kullanımı vardır. Diferansiyel denklemlerin çözümü olan fonksiyonu çoğu zaman bulmak çok zor ya da imkansızdır. Bu bağlamda, integral eşitsizlikler, diferansiyel denklemlere ve integral denklemlere çözümlerin sınırlarını sağlayabilir. İntegral eşitsizlikler diferansiyel ve integral denklemlerin çözümünde önemli bir araç olarak görev yaparken çözümlerin varlığı, tekliği, sınırlılığı, stabilliği gibi konularda da bilgi sağlarlar.İntegral eşitsizlikler örneğin trafik kontrolü, otomobil motor kontrolü, güç kaynakları kontrolü gibi birçok alanda ihtiyaç duyulan anahtarlı sistemlerin stabilliğinde oldukça yaygın kullanıma sahiptir.

Bu çalışmada temel olarak lineer integral eşitsizliklerin türleri, ilgili teoremler, genelleştirmeleri verilmekle beraber lineer olmayan tiplere de yer verilmiştir. Literatürde çok geniş bir araştırma yapılarak integral eşitsizliklerin tarihi gelişimi ve son yıllarda yapılan çalışmalar ve ulaşılan sonuçlar birlikte yer almıştır. Bu nedenle bu çalışma bundan sonra yapılacak çalışmalara bir temel olma özelliği ile önem taşıyacaktır.

KAYNAKLAR

[1] AbuHany A.A.K., (2014), “On some new analogues of Hilbert's inequality”, International Journal of Mathematics and Computation, 24(3), 70-76.

[2] Beesack P. R., (1961), “Hardy’s inequality and its extensions”, Pacific J. Math 11, 39–61.

[3] Bellman R., (1943), “The stability of solutions of linear differential equations”, Duke Math. J., 643-647.

[4] Cauchy A. L., (1821), “Cours d’analyse de l’´Ecole Royale Polytechnique,” Ire partie, Analyse alg´ebrique, Paris, 1821.

[5] Cheng X. L., (2001), “Improvement of some Ostrowski-Gruss type inequalities”, Computers Math. Applic, 42 (2001), 109-114.

[6] Chandiror G. I., (1957) “ On a generalization of Gronwall’s inequality and its application”, Uchen. Zap. Azerb. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauk .6, 3- 11.

[7] Diaz J. B., Metcalf, F. T., (1970), “An analytic proof of Young’s inequality”, American Math. Monthly, 77, 603–609.

[8] Dragomir S.S., Pearce, C. E. M., (2000), “Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications”, RGMIA Monographs, Victoria University.

[9] Dragomir S. S., Wang, S., (1997), “An inequality of Ostrowski-Grüss type and its Applications to the estimation of error bounds for some special means and for some numerical quadrature rules”, Computers Math. Applications, 33(11), 15-20.

[10] Dragomir S.S., Fitzpatrick, S., (1999), “The Hadamard’s inequality for s-convex functions in the second sense”, Demonstratio Math., 32 (4), 687-696.

[11] Dragomir S.S., (2002), “On some new inequalities of Hermite-Hadamard type for m- convex functions”, Tamkang Journal of Mathematics, 33 (1).

[12] Fink A.M. (2000), “An essay on the history of inequalities”, J. Math. Anal. Appl. 249,118–134.

[13] Gollwitzer H. E., (1969), “A note on a functional inequality”, Proc. Amer. Math. Soc., 23, 642-647.

[14] Gronwall T. H., (1919), “ Note on the derivatives with respect to a parameter of the solutions of a system of differential equations”, Ann of Math, 20, 292-296.

[15] Guessab A., Schmeisser, G., (2002), “Sharp integral inequalities of the Hermite-Hadamard type”, J. Approx. Th., 115, 260-288.

[16] Grabiner J. V., (1997), “Was Newton’s calculus a dead end? The continental influence of Maclaurin’s treatise of fluxions Amer Math”, Monthly 104, 393–410.

[17] Gram J.P., (1881), “Über die Entwicklung reellen Funktionen in Reihen mittelst der Methode der kleinsten Quadrate”, J. Reine Angew. 94, 41–73.

[18] Hadamard J., (1893), “Resolution d’une question relative aux determinants Bull”, Sci.17, 240–248.

[19] Hardy G.H., Littlewood, J. E., Polya, G., (1934), “Inequalities”, Cambridge University Press, 1988. MR 89d:26016 Zbl 0634.26008.

[20] Hardy G.H., (1920), “Note on a theorem of Hilbert, Mathematische Zeitschrift”, 6(3-4), 314-317.

[21] Hilbert D., (1906), “Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen integral-gleichungen”, Göttingen Nachr, 157-227.

[22] Hilscher H., (2002), “A time scales version of Wirtinger’s inequality withapplications”, J. Comput. Appl.141:1-2, 219–226.

[23] Kırmacı U.S., Bakula M.K., Özdemir M.E. ve Pecaric J., (2007), “Hadamard-type inequalities for s-convex functions”, Applied Mathematics and Computation, 193, 26-35.

[24] Kırmacı U.S., (2008), “Improvement and further generalization of inequalities for differentiable mappings and applications”, Computers and mathematics with Applications, 55, 485-493.

[25] Krnic M., Pecaric J., (2005), “General Hilbert's and Hardy's inequalities, mathematical Inequalities and Applications”, 8(1), 29-51.

[26] Kufner A., Persson L. E., (2003), “Weighted Inequalities of Hardy Type”, World Scientific”, Singapore.

[27] Landau E., (1926), “A note on a theorem concerning series of positive terms: Extract from a letter of Prof”, E. Landau to Prof. I. Schur, J. London., 1, 38-39.

[28] Li W.N., Han W.N., Meng F.W., (2005), “Some new delay integral inequalities and their applications”, J. Comput. Appl., 180,191-200.

[29] Matús F., Tuzar A., (1992), "Short proofs of Khinchin-type inequalities for zero-one matrices", J. Combin. Theory, 59,155–159.

[30] Mingzhe G., Weijian J., (2006), "An Extended Hardy-Hilbert Inequality and its Applications", Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, 7, Issue 1, Article 30.

[31] Minguzzi E., (2008), "An equivalent form of Young's inequality with upper bound", Appl. Anal. Discrete Math. 2, 213–216.

[32] Mitrinovic D. S., Pecaric J. E., Fink A. M., (1993), "Classical and new inequalities in analysis", Mathematics and its Applications (East European Series), 61. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht.

[33] Norbury J., Stuart A. M, (1987), " Volterra integral equations and a new Gronwall inequality. Part I: the linear case ", Proc. Royal Soc. Edinburgh, 106A, 361-373.

[34] Opic B., Kufner A., (1990), "Hardy-type Inequalities," Longman, Harlow/New York.

[35] Özdemir M. E. ve Akdemir A. O., (2016), "Integral Inequalities for Some Convex Functions", Eastern Anatolian Journal of Science, Volume II, Issue I, 1-6

[36] Özkan U.M., Yildirim, H., (2008), "Hardy–Knoop type inequalities on time scales", Dynam. Syst. Appl.17(3–4), 477–486.

[37] Pachpatte B. G., (1973), "A note on Gronwall-Bellman inequalities", J. Math Anal Appl, 44, 758-762.

[38] Pachpatte B. G., (1975) " On some generalization of Bellman's lemma '', J. Math. Anal. Appl, Vol. 51, 141-150.

[39] Pachpatte B. G., (1998), "Inequalities for Differential and Integral Equations", Academic Press, San Diego.

[40] Pachpatte B. G., (2002), "Explicit bounds on certain integral inequalities," Journal of Mathematical Analysis and Applications, 267, no. 1, pp. 48–61.

[41] Pecaric j., Beesack P. R., (1986), "On Jessen's inequality for convex functions II", J.Math.Anal. Appl., 118, 125-144.

[42] Pecaric J., Dragomir S.S., (1991), "A generalization of Hadamard's integral inequality for isotonic linear functionals", Rudovi Mat. (Sarajevo), 103-107. MR 924: 26026.2BL No. 738: 26006.

[43] Pena S., (1999), “Discrete spectra criteria for singular difference operators”, Math. Bohem.124:1, 35–44.

[44] Schur I., (1920), “Note on a theorem of Hilbert”, Math. Z., 314–317.

[45] Sarıkaya M.Z., Set, E., Öğülmüş, H., (2013), “Some new inequalities of Hermite-Hadamard type for mappings whose derivatives are –convex in the second sense”, Inter. Jour. Mod. Math. Sci., 8(3), 212-218.

[46] Sarıkaya M.Z. ve Aktan, N., (2011), “On the generalization some integral inequalities and their applications”, Mathematical and Computer Modelling, 54(9-10), 2175-2182.

ÖZGEÇMİŞ

Esin YAVUZ YILMAZ 1983 yılında Köyceğiz'de doğdu. 2001 yılında başladığı Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği Bölümünü 2006 yılında başarıyla tamamlayarak aynı yıl Gebze Kavram Dersanesinde Matematik Öğretmeni olarak göreve başladı. 2009 yılında Giresun Şebinkarahisar Ticaret Meslek Lisesine öğretmen olarak atandı . Meslek hayatına 2010 yılından beri Gebze Anadolu İmam Hatip Lisesi'nde matematik öğretmeni olarak devam etmektedir.Yüksek lisans eğitimine Gebze Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında başladı. Evli ve 1 çocuk annesidir.

EKLER

Ek A: Tez Çalışması Kapsamında Yapılan Sunumlar

Gebze Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Lisansüstü Araştırmalar Sempozyumu ve Tanıtım Günleri, Poster Sunumu, 17-18 Haziran 2019