



T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



**BAZI ÖZEL BAND MATRİSLER, SAYI
DİZİLERİ VE ÖZELLİKLERİ**

Emrullah KIRKLAR

DOKTORA TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Ağustos-2019
KONYA
Her Hakkı Saklıdır

TEZ KABUL VE ONAYI

Emrullah KIRKLAR tarafından hazırlanan “Bazı Özel Band Matrisler, Sayı Dizileri ve Özellikleri” adlı tez çalışması ~~02.08/2019~~ tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan

Prof. Dr. Ayşe NALLI

Danışman

Prof. Dr. Ayşe Dilek MADEN

Üye

Prof. Dr. Süleyman SOLAK

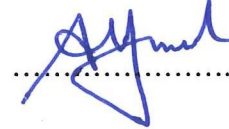
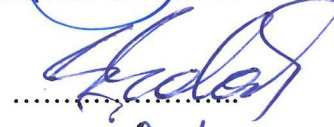

Üye

Prof. Dr. Aynur KESKİN KAYMAKCI

Üye

Doç. Dr. Aynur YALÇINER

İmza



Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Mustafa YILMAZ
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.



Emrullah KIRKLAR

Tarih: 02/08/2019

ÖZET

DOKTORA TEZİ

BAZI ÖZEL BAND MATRİSLER, SAYI DİZİLERİ VE ÖZELLİKLERİ

Emrullah KIRKLAR

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ayşe Dilek MADEN
İkinci Danışman: Doç. Dr. Fatih YIMAZ
2019, 71 Sayfa

Jüri

Prof. Dr. Ayşe Dilek MADEN
Prof. Dr. Ayşe NALLI
Prof. Dr. Süleyman SOLAK
Prof. Dr. Aynur KESKİN KAYMAKCI
Doç. Dr. Aynur YALÇINER

Matris kavramı, bilim dünyasında yoğun olarak kullanılmaktadır. Bu kavram aynı zamanda graf teori, sayılar teorisi, diferensiyel denklemler gibi matematiğin de hemen hemen her alanında çok büyük öneme sahiptir.

Bu tez altı ana bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde sayılar ve sayı dizileri, matris kavramı ve graf teori ile ilgili temel tanım ve özellikler verilmiştir. Ardından tezde kullanılan kaynaklar ile ilgili bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde k -tridiagonal k -Toeplitz matrisler tanımlanmış, ardından bu matrislerin determinant, permanent ve özdeğerleri için formüller elde edilmiştir.

Üçüncü bölümde alt k -Hessenberg Toeplitz matrisler tanımlanmış, ardından bu matrislerin determinantı ve tersleri elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde genelleştirilmiş balancing ve Lucas-balancing sayı dizileri tanımlanmış, daha sonra bu sayı dizileri ile ilgili özdeşlikler elde edilmiştir. Bunun yanı sıra özel k -tridiagonal matrisler tanımlanıp, bu matrislerin determinant ve permanent değerleri bu sayı dizilerinin kuvvetleri cinsinden elde edilmiştir.

Beşinci bölümde yeni bir graf ailesi tanımlanmış, ardından hafnian fonksiyonu yardımıyla bu graf ailesinin mükemmel eşleme sayısı elde edilmiştir. Daha sonra bu graf ailesinin bazı özel alt aileleri için mükemmel eşleme sayılarının iyi bilinen sayı dizilerinin elemanlarına eşit olduğu gösterilmiş ve bu özel alt graf ailelerinin enerjileri için eşitlik, Laplacian enerjileri için üst sınır elde edilmiştir.

Son bölümde ise tezde elde edilen sonuçlar ve öneriler tartışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: determinant; enerji; hafnian; Hessenberg matris; k -tridiagonal matris; Laplacian enerji; mükemmel eşleme; permanent.

ABSTRACT

Ph.D THESIS

SOME SPECIAL BAND MATRICES, NUMBER SEQUENCES AND THEIR PROPERTIES

Emrullah KIRKLAR

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF
SELÇUK UNIVERSITY
THE DEGREE OF DOCTOR OF PHILOSOPHY
IN MATHEMATICS

Advisor: Prof. Dr. Ayşe Dilek MADEN
Co-Advisor: Assoc. Prof. Dr. Fatih YILMAZ

2019, 71 Pages

Jury

Prof. Dr. Ayşe Dilek MADEN
Prof. Dr. Ayşe NALLI
Prof. Dr. Süleyman SOLAK
Prof. Dr. Aynur KESKİN KAYMAKCI
Doç. Dr. Aynur YALÇINER

Matrix concept is intensively used a many area in science. This concept has also a great importance in almost every field of mathematics such as graph theory, number theory, differential equations.

The thesis contains six main sections.

In the first section, basic and fundamental definitions and properties relating numbers, number sequences, matrix algebra and graph theory and then, informations about the references in the thesis are given.

In the second section, k-tridiagonal k-Toeplitz matrices are defined and then, some formulas for determinant, permanent and eigenvalues of this matrix family are obtained.

In the third section, lower k-Hessenberg Toeplitz matrices are defined and an algorithm for determinants and inverses of this matrices are obtained.

In the fourth section, generalized balancing and Lucas-balancing number sequences are defined and then, some identities for these number sequences are obtained. Also, it is shown that determinants and permanents of some k-tridiagonal matrices is the powers of these numbers.

In the fifth section, a new graph family are introduced and then, the eigenvalues of the adjacency and the Laplacian matrix of this graph family are obtained. Moreover, it is shown that the perfect matching number of this graph family equals to special second order recurrence by hafnian method. For some special kinds of this family, it is obtained that the perfect matching number of corresponding graphs equals to some famous number sequences. Also, identities for energies and upper bounds for Laplacian energies of these special graphs are obtained.

The final section discusses the results obtained in the thesis with suggestions.

Keywords: determinant; energy; hafnian; Hessenberg matrix; k-tridiagonal matrix; Laplacian energy; perfect matching; permanent.

ÖNSÖZ

“Bazı Özel Band Matrisler, Sayı Dizileri ve Özellikleri” isimli bu çalışma, Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi Prof. Dr. Ayşe Dilek MADEN ve Ankara Hacı Bayram Veli Üniversitesi Polatlı Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi Doç. Dr. Fatih YILMAZ danışmanlığında hazırlanmış olup, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü’ne Doktora Tezi olarak sunulmuştur.

Bu tezin başlangıcından bitimine kadar her aşamasında sabrını, desteğini ve yardımlarını esirgemeyen, her zaman yol gösteren kıymetli danışman hocalarım Prof. Dr. Ayşe Dilek MADEN ile Doç. Dr. Fatih YILMAZ’a, tez izleme komitesinde bulunan ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocalarım Prof. Dr. Süleyman SOLAK ile Prof. Dr. Aynur KESKİN KAYMAKÇI’ya ve eğitimime 2211-A Yurt İçi Doktora Burs Programı kapsamında destek veren TÜBİTAK’a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Son olarak her zaman yanımda olan, beni hep destekleyen, annem Cihan KIRKLAR’a, babam Ünal KIRKLAR’a, kardeşlerim Ayfer ULUDAĞ ve Nurullah KIRKLAR’a ve aynı zamanda her zaman fedakarlık gösteren, zor zamanlarımda daima yanımda olan kıymetli eşim Sevgi Ebru KIRKLAR’a, çocuklarım Emir Burak KIRKLAR ve Ebrar KIRKLAR’a teşekkürlerimi sunarım.

Emrullah KIRKLAR
KONYA-2019

İÇİNDEKİLER

ÖZET	iv
ABSTRACT	v
ÖNSÖZ	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ	x
1. GİRİŞ.....	1
1.1. Sayı Dizileri ile İlgili Bazı Tanım ve Özellikler	1
1.2. Matris Kavramı ile İlgili Bazı Tanım ve Özellikler	3
1.3. Graf Teori ile İlgili Bazı Tanım ve Özellikler	6
1.4. Kaynak Araştırması.....	8
2. k – TRİDİAGONAL k – TOEPLITZ MATRİSLER.....	14
2.1. Nümerik Örnek.....	18
3. ALT k – HESSENBERG TOEPLITZ MATRİSLERİN DETERMİNANTLARI VE TERSLERİ.....	21
3.1. Nümerik Örnek.....	25
4. GENELLEŞTİRİLMİŞ BALANCİNG VE LUCAS-BALANCİNG SAYI DİZİLERİ VE k-TRİDİAGONAL MATRİSLER.....	27
4.1 Genelleştirilmiş Balancing ve Lucas-Balancing Sayıları ve Özellikleri	27
4.2 Balancing Q-Matrisler	41
4.3 Balancing ve Lucas-balancing sayıları ile Chebyshev Polinomları	43
5. BİR TÜR GRAF AİLESİ VE BU GRAF AİLESİNİN BAZI ÖZELLİKLERİ ..	44
5.1 Bir tip Graf ailesi ve Mükemmel Eşleme (Perfect Matching) Sayısı	44
5.2 Özel Durumlar	50
6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	57

6.1 Sonuçlar	57
6.2 neriler	57
KAYNAKLAR	58
ÖZGEÇMİŐ	60



SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

\mathbb{N}	: Doğal sayılar kümesi
\mathbb{Z}	: Tam sayılar kümesi
\mathbb{Z}^+	: Pozitif tam sayılar kümesi
\mathbb{R}	: Reel sayılar kümesi
F_n	: n . Fibonacci sayısı
P_n	: n . Pell sayısı
J_n	: n . Jacobsthal sayısı
B_n	: n . balancing sayısı
C_n	: n . Lucas-balancing sayısı
I	: Birim matris
A^T	: A matrisinin transpozu
A^{-1}	: A matrisinin tersi
$\det(A)$: A matrisinin determinanı
$per(A)$: A matrisinin permanenti
$haf(A)$: A matrisinin hafnıanı
\circ	: Hadamard çarpımı
\oplus	: Direkt toplam
$T_n(x)$: Birinci tür Chebyshev polinomu
$U_n(x)$: İkinci tür Chebyshev polinomu
G	: Herhangi bir graf
$V(G)$: G grafının nokta (köşe) kümesi
$E(G)$: G grafının kenar kümesi
v_i	: G grafının i . köşesi
$\deg(v_i)$: v_i köşesinin derecesi
$A(G)$: G grafının komşuluk matrisi
$D(G)$: G grafının derece matrisi
$L(G)$: G grafının Laplacian matrisi
E_G	: G grafının enerjisi
$LE(G)$: G grafının Laplacian enerisi

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 5.1 Özel Bir Graf Ailesi.....	44
Şekil 5.2 Merdiven (Ladder) Graf.....	50
Şekil 5.3 Silindir Tipi Graf.....	53
Şekil 5.4 Şekil 5.1'deki Grafın Özel Alt Graf Ailesi.....	55



1. GİRİŞ

Sayı kavramının tarihçesi, insanlık tarihine dayanır. Sözlü olarak saymanın tarihi ise bilinmemektedir. O dönemde yaşayan insanlar, yaptıkları günlük aktivitelerde sayıları temsil etmek üzere; hayvan kemikleri, çakıl veya taş kullanmaktaydılar. Bunun yanı sıra, duvar veya ağaçlara çentik atarak sayıları temsil etmekteydiler. Zamanla bu sayılar, sözlü olarak da ifade edilmeye başlanmış değişik sayı sistemleri tanımlanmış ve günümüze kadar önemli derecede gelişmeler kaydedilmiştir. Dil ve bilimin ışığında bu sayma sistemleri, günümüzdeki halini almış ve bu sayma sistemlerinden faydalanılarak sayı dizileri tanımlanmıştır. Bilim dünyasında en çok ses getiren sayı dizilerinden birisi olan Fibonacci dizisi, 13. yüzyılda yaşamış olan İtalyan matematikçi Leonardo Fibonacci tarafından tavşanların üremesi ile ilgili bir problem üzerine tanımlanmıştır. Bunun yanı sıra bilimin ışığında farklı problemler üzerine Lucas, Pell, Jacobsthal, balancing ve Lucas-balancing sayı dizileri gibi diziler de tanımlanmıştır. Tanımlanan bu sayı dizilerine uzun yıllar yoğun ilgi gösterilmiş ve onlarla ilgili yeni özellikler elde edilmiştir.

Diğer taraftan, Matris Cebiri ilk olarak 1857 yılında bilim dünyasına ünlü matematikçi Cayley tarafından tanıtılmıştır. Daha sonra ise bu kavram üzerine yoğun çalışmalar yapılmıştır. Matris kavramı, bilim dünyasında hemen hemen her alanda yoğun olarak kullanılmıştır. Bu kavram aynı zamanda matematikte de çok büyük öneme sahiptir. Graf teori, sayılar teorisi, diferensiyel denklemler gibi birçok alanda yoğun olarak kullanılmaktadır. Örneğin; matris kavramı ve bu kavramın özellikleri kullanılarak, yukarıda adı geçen sayı dizileri ile ilgili yoğun olarak çalışmalar yapılmış ve bu sayı dizilerinin yeni özellikleri elde edilmiştir. Graf teori, genel olarak; görsel objelerden oluşur. Graf yapısı büyüdükçe özelliklerini incelemek ise zorlaşır. Matris kavramı kullanılarak bu graf yapılarının mükemmel eşleme, enerji, Laplacian enerji gibi bir çok özellikleri ile ilgili son zamanlarda yoğun şekilde çalışmalar yapılmıştır.

1.1. Sayı Dizileri ile İlgili Bazı Tanım ve Özellikler

Bu bölümde, öncelikle dizi kavramı tanıtılıp, ardından bazı özel sayı dizileri ele alınmıştır.

Tanım 1.1.1 $X \neq \emptyset$ olsun. $f: \mathbb{N} \rightarrow X$ fonksiyonu, her $n \in \mathbb{N}$ sayısı için, $f(n) = x_n$ şeklinde tanımlanan f fonksiyonuna, X kümesi üzerinde bir *dizi* denir.

Tanım 1.1.2 (Koshy, 2001) Başlangıç koşulları, $F_0 = 0$ ve $F_1 = 1$ olmak üzere; $n \in \mathbb{N}$ için,

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

şeklinde tanımlanan $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisine; *Fibonacci dizisi* denir.

Tanım 1.1.3 (Horadam, 1994) Başlangıç koşulları, $P_0 = 0$ ve $P_1 = 1$ olmak üzere; $n \in \mathbb{N}$ için,

$$P_{n+2} = 2P_{n+1} + P_n$$

şeklinde tanımlanan $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisine; *Pell dizisi* denir.

Tanım 1.1.4 (Cerin, 2007) Başlangıç koşulları, $J_0 = 0$ ve $J_1 = 1$ olmak üzere; $n \in \mathbb{N}$ için,

$$J_{n+2} = J_{n+1} + 2J_n$$

şeklinde tanımlanan $\{J_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisine; *Jacobsthal dizisi* denir.

Tanım 1.1.5 (Ray, 2015) Başlangıç koşulları, $B_0 = 0$, $B_1 = 1$, $C_0 = 1$ ve $C_1 = 3$ olmak üzere; $n \in \mathbb{N}$ için,

$$B_{n+2} = 6B_{n+1} - B_n$$

ve

$$C_{n+2} = 6C_{n+1} - C_n$$

şeklinde tanımlanan $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ve $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizilerine, sırasıyla; *balancing* ve *Lucas-balancing dizisi* denir.

$\alpha = 3 + \sqrt{8}$ ve $\beta = 3 - \sqrt{8}$, $x^2 - 6x + 1 = 0$ denkleminin kökleri olmak üzere; yazarlar bu balancing ve Lucas-balancing sayı dizilerinin Binet formüllerini

$$B_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta},$$

$$C_n = \frac{\alpha^n + \beta^n}{2}$$

olarak elde etmişlerdir.

Tanım 1.1.6 (Koshy, 2001) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin terimleri yardımıyla tanımlanan

$$g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

serisine, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin *üreteç fonksiyonu* denir.

1.2. Matris Kavramı ile İlgili Bazı Tanım ve Özellikler

Bu bölümde, matris kavramı tanıtılıp, bu tezde kullanılacak bazı temel tanım ve özellikler tanıtılmıştır.

Tanım 1.2.1 F bir cisim ve $a_{i,j} \in F$ ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$) olmak üzere

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

şeklindeki tabloya *matris* denir.

$m = n$ alınırsa bu tür matrislere kare matris denir. Bu tez boyunca, aksi belirtilmediği sürece tanımlanan matrisler kare matrislerdir.

Tanım 1.2.2 A n -kare bir matris olsun. Eğer A matrisinin esas köşegen elemanları dışındaki bütün elemanları sıfır ise A matrisine *köşegen matris* denir.

Tanım 1.2.3 Esas köşegen elemanları "1" diğer tüm elemanları sıfır olan bir kare matrise *birim matris* denir ve I ile gösterilir.

Tanım 1.2.4 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ matrisinin satırlarını sütun veya sütunlarını satır yapmakla elde edilen $n \times m$ tipindeki matrise, A matrisinin *transpozu* denir ve A^T ile gösterilir.

Tanım 1.2.5 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ reel matrisi için, eğer $A^T = A$ oluyorsa; A matrisine *simetrik matris* denir.

Tanım 1.2.6 A herhangi n -kare matris ve I , n -kare birim matris olmak üzere;

$$AB = BA = I$$

olacak şekilde bir B , n -kare matrisi varsa; bu B matrisine, A matrisinin *tersi* denir ve $B = A^{-1}$ ile gösterilir.

Tanım 1.2.7 Birim matrisin satır veya sütunlarının yerleri değiştirilerek elde edilen matrislere *permütasyon matris* denir ve genellikle P ile gösterilir.

P , bir permütasyon matris olmak üzere; bu matrisin determinant değeri 1 veya -1 olup, tersi vardır ve transpozesine eşittir. Yani; P bir permütasyon matris ise $P^{-1} = P^T$ dir.

Tanım 1.2.8 (Taşcı, 2011) Sıfır olmayan elemanları sadece esas köşegen etrafındaki bantlarda olan kare matrislere *band matris* denir.

Tanım 1.2.9 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ matrisinin *determinant değeri*

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Tanım 1.2.10 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ matrisinin *permanent değeri*

$$\text{per}A = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Tanım 1.2.11 (Taşcı, 2011) $A = (a_{ij})$ n -kare matris ve I_n ise n -kare mertebeli birim matris olsun. O halde $K_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ polinomuna; A matrisinin *karakteristik polinomu*, $K_A(\lambda) = 0$ denklemine; A matrisinin *karakteristik denklemi* ve bu denklemin köklerine de; A matrisinin *özdeğerleri* denir.

Tanım 1.2.12 (Taşcı, 2011) A ve B , n -kare matrisler olmak üzere;

$$B = P^{-1}AP$$

şartını sağlayan $\det P \neq 0$ olacak şekilde bir P matrisi varsa; A ve B matrislerine, *benzer matrislerdir* denir. A ve B , benzer matrisler ise; bu matrislerin determinant değerleri, karakteristik polinomları ve özdeğerleri aynıdır.

Tanım 1.2.13 (Taşcı, 2011) $A = (a_{i,j})_{m \times n}$ ve $B = (b_{i,j})_{m \times n}$ şeklinde matrisler olmak üzere, bu matrislerin Hadamard çarpımı, $A \circ B$ ile gösterilir ve

$$A \circ B = (a_{ij}b_{ij})_{m \times n}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.2.14 (Behmaram ve Friedland, 2013) $T = (t_{i,j})$ n -kare matrisi ($n = 2k$, $k \geq 1$) esas köşegen elemanları sıfır ve simetrik bir matris olsun. O halde T matrisinin *hafnian değeri* $1 \leq s \leq k$ ve $1 \leq i_s \leq j_s \leq k$ olmak üzere;

$$\text{haf}(T) = \sum_{\substack{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq k \\ 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq k}} t_{i_1 j_1} t_{i_2 j_2} \dots t_{i_k j_k}$$

şeklinde tanımlanmıştır. T_r matrisi, T matrisinin r . ve $2k$. satır ve sütunu silinerek elde edilen matris olmak üzere; T matrisinin hafnian değeri için, son sütuna göre Laplace açılımı;

$$\text{haf}(T) = \sum_{r=1}^{2k-1} t_{r,2k} \text{haf}(T_r)$$

şeklindedir.

Tanım 1.2.15 (Horn ve Johnson, 1985) $A = (a_{i,j})_{n \times n}$ matris olmak üzere

$$A = (a_{i,j}) = \begin{cases} a_{i,j}, & i \leq j+1 \text{ için} \\ 0, & i > j+1 \text{ için} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan matrislere *Hessenberg matris* denir.

Tanım 1.2.16 (da Fonseca ve ark., 2015) $H = (h_{i,j})$ n -kare olmak üzere

$$H = (h_{i,j}) = \begin{cases} h_{i,j}, & i = j, i = j+1 \text{ ve } j = i+k \text{ için} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan matrislere alt k -*Hessenberg matris* denir. Eğer $k=1$ alınırsa, oluşan matrise *tridiagonal matris* denir.

Tanım 1.2.17 (Sogabe ve El-Mikkawy, 2011) T_n n -kare matrisi

$$T_n = (t_{i,j})_{i,j=1}^n = \begin{cases} t_{i,i+k} = a_i, & i = 1, 2, \dots, n-k \text{ için} \\ t_{ii} = d_i, & i = j = 1, 2, \dots, n \text{ için} \\ t_{i+k,i} = b_{i+k}, & i = 1, 2, \dots, n-k \text{ için} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan matrislere k -*tridiagonal matris* denir. $k=1$ için bu matrise tridiagonal matris olur.

Tanım 1.2.18 (Ye ve Lim, 2015) T_{n-1} $(n-1)$ -kare bir matris olsun. O halde

$T_{n-1} = (t_{i-j})_{i,j=1}^{n-1}$ şeklinde tanımlanan matrislere *Toeplitz matris* denir. Dolayısıyla,

Toeplitz matrisler esas köşegene paralel olan köşegenler boyunca elemanları aynı olan matrislerdir.

Tanım 1.2.19 (Kilic ve Tasci, 2007) A n -kare matrisi, $\text{per}(A) = \det(H \circ A)$ olacak

şekilde 1 ve -1 'den oluşan

$$H = \begin{cases} -1, & i = j+1 \text{ için} \\ 1, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklindeki H n -kare matrisi ile Hadamard çarpılırsa, H matrisine A matrisinin *dönüştürücü (coverter) matrisi*, A matrisine ise *dönüştürülebilir (convertible) matris* denir.

Lemma 1.2.1 (Brualdi ve Gibson, 1977)'de yazarlar, matrislerin permanentlerini hesaplamak için *sıkıştırma (contraction)* olarak adlandırılan yeni bir metot elde etmişlerdir. $A = (a_{i,j})$ n -kare matrisinin satır vektörleri r_1, r_2, \dots, r_n olsun. Eğer k . sütun elemanlarından sadece ikisi sıfırdan farklı ise A matrisine *sıkıştırılabilir* denir. A matrisi, k . sütunda $i \neq j$ için $a_{ik} \neq 0$ ve $a_{jk} \neq 0$ olmak üzere sıkıştırılabilir olsun. O halde $A_{i,j,k}$ $(n-1) \times (n-1)$ matrisi, A matrisinde i . satır yerine $a_{jk}r_i + a_{ik}r_j$ yazılarak ve j . satır ile k . sütun silinerek elde edilen matristir. Bu matrise A matrisinin sıkıştırılması denir. B matrisi A matrisinin sıkıştırılmış matrisi olsun. O halde,

$$\text{per}(A) = \text{per}(B)$$

olduğunu göstermişlerdir.

1.3. Graf Teori ile İlgili Bazı Tanım ve Özellikler

Bu bölümde, graf yapısı tanıtılıp, bu tezde kullanılacak bazı temel tanım ve özellikler tanıtılmıştır.

Tanım 1.3.1 (Harary, 1969) $V(G)$ noktalar (köşeler) kümesi ve $E(G)$ kenarlar kümesi olmak üzere, $G = (V, E)$ şeklinde tanımlanan yapılara *graf* denir.

Tanım 1.3.2 (Harary, 1969) $V(G)$ noktalar kümesi ve $u, v \in V(G)$ olsun. Eğer $uv \in E(G)$ oluyorsa u ve v noktalarına *komşudur* denir ve $u \sim v$ ile gösterilir.

Tanım 1.3.3 (Harary, 1969) Bir G grafında aynı nokta çiftini birleştiren iki ya da daha fazla kenara *çoklu kenar (multi edge)*, bir noktayı kendisiyle birleştiren kenara *ilmek (loop)*, çoklu kenara sahip ancak ilmeği olmayan grafa *çoklu graf (multi graph)*, çoklu kenar ve ilmek içeren graflara ise *pseudo graf (sahte graf)* denir.

Tanım 1.3.4 (Harary, 1969) Bir G grafında aynı nokta çiftini birleştiren iki ya da daha fazla kenar ve ilmek içermeyen grafa *basit graf* denir.

Tanım 1.3.5 (Harary, 1969) G grafi, nokta kümesi $V(G)$ olan bir graf olsun. v_i ve v_j noktaları arasında bir yol varsa ya da komşu noktalar ise bu noktalara *bağlantılıdır*

(*connected*) denir. Eğer G grafindaki nokta kümesi olan $V(G)$ kümesinin bütün nokta çiftleri arasında bir yol var ise G grafına *bağlantılı graf* (*connected graph*) denir.

Tanım 1.3.6 (Bondy ve Murty, 1976) G grafindaki herhangi bir v_i noktasına komşu olan noktaların sayısına v_i noktasının *derecesi* denir ve $\deg(v_i)$ ile gösterilir.

Tanım 1.3.7 (Ruohonen, 2013) G grafi, $|V(G)|=n$ olan bir graf olsun. “ a_{ij} = v_i ile v_j arasındaki kenar sayısıdır.” şeklinde tanımlanan $A(G) = (a_{ij})$ matrisine G grafinin *komşuluk matrisi* denir.

Tanım 1.3.8 (Gutman ve Zhou, 2006) $A(G) = (a_{ij})$ matrisi, G grafinin komşuluk matrisi ve $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ değerleri $A(G)$ matrisinin özdeğerleri olsun. O halde G grafinin *enerjisi*

$$E_G = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Tanım 1.3.9 (Grone ve Merris, 1994) Bir G grafinda v_i noktasının derecesi $\deg(v_i)$ olmak üzere, $D(G) = \text{köy}(\deg(v_1), \deg(v_2), \dots, \deg(v_n))$ şeklinde tanımlanan matris *derece matrisi* denir.

Tanım 1.3.10 (Merris, 1994) G bir graf olsun. $A(G)$ ve $D(G)$ matrisleri sırasıyla G grafinin komşuluk ve derece matrisleri olsun. O halde $L(G) = D(G) - A(G)$ matrisine G grafinin *Laplacian matrisi* denir.

Tanım 1.3.11 (Gutman ve Zhou, 2006) G grafi, $|V(G)|=n$ ve $|E(G)|=m$ olan bir graf ve $L(G)$ matrisi bu grafin Laplacian matrisi olsun. $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ değerleri $L(G)$ matrisinin özdeğerleri olmak üzere, G grafinin *Laplacian enerjisi*

$$LE(G) = \sum_{i=1}^n \left| \mu_i - \frac{2m}{n} \right|$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Tanım 1.3.12 (Harary, 1969) G , herhangi bir graf olmak üzere, nokta ve kenar kümesi G nin alt kümesi olan grafa, G nin *alt grafi* (*subgraph*) denir. G nin tüm noktalarını içeren alt grafına *geren alt graf* (*spanning subgraph*) denir.

Tanım 1.3.13 (Kral' ve ark., 2009) G nin tüm noktalarını içeren fakat her bir noktasının derecesi 1 olarak geren alt graflara *mükemmel eşleme* (*perfect matching*) denir.

1.4. Kaynak Araştırması

Bu bölümde, tezde kullanılacak olan bazı kaynaklar kısaca tanıtılacaktır.

(Behera ve Panda, 1999)'de

$$1 + 2 + \cdots + (n-1) = (n+1) + (n+2) + \cdots + (n+r) \quad (r \in \mathbb{Z}^+)$$

şeklindeki Diophantine denkleminin bir çözümü olarak,

$$B_{n+1} = 6B_n - B_{n-1}, \quad B_1 = 1, B_2 = 6$$

şeklindeki balancing sayı dizisini elde etmiş ve tanımlamışlardır. Daha sonra, “Bir n pozitif tamsayısının balancing sayı olması için gerek ve yeter şart n^2 nin bir üçgen sayı ya da $8n^2 + 1$ in bir tam kare olmasıdır” olduğu gösterilmiştir.

Lucas-balancing sayıları $n \geq 2$ için

$$C_{n+1} = 6C_n - C_{n-1}, \quad C_1 = 3, C_2 = 17$$

şeklinde tanıtılmıştır. Bunun yanı sıra

$$Q_B = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde matris tanımlanmış, matris cebiri kullanılarak, balancing ve Lucas-balancing sayı dizileri ile ilgili özellikler elde edilmiştir (Ray, 2012).

(Panda, 2006)'da balancing ve Lucas-balancing sayı dizilerinin Binet formülleri kullanılarak, bahsi geçen sayı dizileri ile ilgili özdeşlikler elde edilmiştir.

(Catarino ve ark., 2015)'de balancing ve Lucas-balancing sayı dizilerine benzer olan cobalancing ve Lucas-cobalancing sayı dizileri tanımlanmış ve bu sayı dizilerinin Binet formülleri kullanılarak özdeşlikler elde edilmiştir.

Fibonacci sayı dizisinin geneli olan genelleştirilmiş Fibonacci dizisi, $a, b \in \mathbb{R}$ ve başlangıç şartları $q_0 = 0$ ve $q_1 = 1$ olmak üzere

$$q_n = \begin{cases} aq_{n-1} + q_{n-2}, & n \text{ çift ise} \\ bq_{n-1} + c_{n-2}, & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

şeklinde iki periyotlu sayı dizisi tanımlanmış ve bu dizinin üreteç fonksiyonu elde edilmiştir (Edson ve Yayenie, 2009). Aynı zamanda bu dizinin Binet formülü,

$x^2 - abx - ab = 0$ denkleminin kökleri $\alpha = \frac{ab + \sqrt{(ab)^2 + 4ab}}{2}$, $\beta = \frac{ab - \sqrt{(ab)^2 + 4ab}}{2}$

ve $\xi(n) = n - 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ olmak üzere;

$$q_n = \frac{a^{1-\xi(n)}}{(ab)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \right)$$

şeklinde elde edilmiş, bu Binet formülü kullanılarak, hem bu sayı dizisi için hem de Fibonacci sayı dizisi için yeni özdeşlikler elde edilmiştir.

Fibonacci, Pell, Jacobsthal ve balancing gibi bir çok sayı dizisinin geneli olan $\{Q_n\}$ dizisi, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ olmak üzere, başlangıç şartları $Q_0 = 0$ ve $Q_1 = 1$ için,

$$Q_n = \begin{cases} aQ_{n-1} + cQ_{n-2}, & n \text{ çift ise} \\ bQ_{n-1} + dQ_{n-2}, & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

şeklinde iki periyotlu sayı dizisi tanımlanmış ve bu dizinin Binet formülü, $\xi(n) = n - 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ ve $x^2 - (ab + c - d)x - abd = 0$ denkleminin kökleri, α ve β olmak üzere;

$$Q_n = \frac{a^{1-\xi(n)}}{(ab)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} \left(\frac{\alpha^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (\alpha + d - c)^{n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor} - \beta^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (\beta + d - c)^{n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{\alpha - \beta} \right)$$

şeklinde elde edilmiştir. Bunun yanı sıra, bu Binet formülü kullanılarak, hem bu sayı dizisi için hem de bahsi geçen özel sayı dizileri için yeni özdeşlikler elde edilmiştir (Yayenie, 2011).

Lucas sayı dizisinin geneli olan $\{U_n\}$ dizisi, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ olmak üzere, başlangıç şartları $U_0 = \frac{d+1}{d}$ ve $U_1 = a$ için,

$$U_n = \begin{cases} bU_{n-1} + dU_{n-2}, & n \text{ çift ise} \\ aU_{n-1} + cU_{n-2}, & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

şeklinde iki periyotlu sayı dizisi tanımlanmış ve bu dizinin Binet formülü, $\xi(n) = n - 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ ve $x^2 - (ab + c - d)x - abd = 0$ denkleminin kökleri α ve β olmak üzere

Daha sonra

$$T_n^{(k)} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & & & & b_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & a_{n-k} & & & & b_{n-k} \\ c_{k+1} & & & & \ddots & & & 0 \\ 0 & c_{k+2} & & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & & a_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & c_n & \cap & \cdots & \cap & a_n \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlanan k -tridiagonal matrisler için, T_i matrisleri $|i|$ -kare mertebeli tridiagonal matrisler olmak üzere;

$$P^T T_n^{(k)} P = T_0 \oplus T_1 \oplus \cdots \oplus T_{k-1}$$

olduğu gösterilmiş ve bu k -tridiagonal matrisin determinantını kolayca hesaplamak için yeni ve kullanışlı bir metod elde edilmiştir.

(Asci ve ark., 2012)'de LU ayrışımı kullanılarak k -tridiagonal matrislerin determinant ve tersleri için formüller elde edilmiştir.

(El-Mikkawy, 2003)'de

$$\begin{bmatrix} d_1 & a_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ b_2 & d_2 & a_2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & b_3 & d_3 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & 0 & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_n & d_n \end{bmatrix}_{n \times n}$$

şeklinde tanımlanan tridiagonal matrisin determinantı için bir rekürans bağıntısı elde edilmiştir.

(Kilic ve Tasci, 2007)'de elemanları özel olarak belirlenen tridiagonal matrislerin permanentleri ile Fibonacci ve Lucas sayıları arasında ilişkiler elde edilmiştir.

(Kilic ve Tasci, 2010)'da özel matrisler tanımlanarak bu matrislerin permanentlerinin negatif indisli özel sayı dizilerine eşit olduğu gösterilmiştir.

(Yalciner, 2011)'de k -tridiagonal matrisler için LU ayrışımı yapılmış ve bu matrislerin determinantları için elverişli formüller elde edilmiştir.

(da Fonseca, 2014)'de $U_n(x)$, ikinci tip Chebyshev polinom olmak üzere,
 $U_0(x) = 1$, $U_1(x) = 2x$ ve $n \geq 1$ için

$$U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x)$$

rekürans bağıntısına sahip olduğundan bahsedilmiştir. Daha sonra ise; $U_n(x)$, ikinci tip Chebyshev polinom olmak üzere;

$$Q_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & & & \\ a & x & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a & x \end{vmatrix} = (\sqrt{a})^n U_n\left(\frac{x}{2\sqrt{a}}\right)$$

olarak elde edilmiştir.

(Kulkarni ve ark., 1999)'da

$$T_n = \begin{pmatrix} a & b & & & \\ c & a & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a \end{pmatrix}_{n \times n}$$

şeklindeki tridiagonal Toeplitz matrislerin özdeğerleri, Chebyshev polinomları kullanılarak, $k = 1, 2, \dots, n$ için

$$\lambda_k = a - 2\sqrt{bc} \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$$

olarak elde edilmiştir.

(Yueh, 2005)'de

$$A_n = \begin{pmatrix} -\beta + b & c & 0 & & 0 \\ a & b & c & & \\ 0 & a & \ddots & \ddots & 0 \\ & & \ddots & b & c \\ 0 & 0 & a & -\alpha + b & \end{pmatrix}_{n \times n}$$

şeklinde tridiagonal matris tanımlanmış, α, β ve \sqrt{ac} nin durumlarına göre A_n matrisinin özdeğer ve özvektörleri elde edilmiştir.

(Behmaram ve Friedland, 2013)'de Pfaffian graflarının ağırlıklı mükemmel eşleme (perfect matching) sayısı için üst sınır elde edilmiştir. Daha sonra elde edilen bu sonuçlar Fulleren graflarına uygulanmıştır.

(Bruhn ve ark., 2016)'da $GP(3k, k)$ tipindeki genelleştirilmiş bir Petersen grafinin 1-faktörünün sayısı, Jacobsthal sayıları cinsinden ifade edilmiştir.

(Zhang ve Zhang, 2001)'de bir fulleren grafin mükemmel eşleme (perfect matching) sayısı için alt sınır elde edilmiştir.

(Gutman ve Zhou, 2006)'da bir grafin enerjisi ile Laplacian enerjisi arasında büyük ölçüde benzerlikler ve yine büyük ölçüde farklılıklar olduğu gösterilmiştir.



2. k -TRİDİAGONAL k -TOEPLITZ MATRİSLER

Bu bölümde, k -tridiagonal matrislerin özel hali olan, elemanların belli aralıklarda tekrar eden k -tridiagonal k -Toeplitz matrislerin determinant ve permanent değerleri için uygun diziler elde edilmiştir. Bunun yanı sıra, bu tür matrislerin özdeğerleri elde edilmiştir.

Ayrıca bu bölümdeki çalışmalar “Alabama Journal of Mathematics” isimli dergide (Kirkklar ve Yilmaz, 2015) yayınlanmıştır.

(Sogabe ve El-Mikkawy, 2011)’de

$$\bar{r} = \{i : i \equiv r \pmod{k}, i = 1, 2, \dots, n\}, r \in \{0, 1, 2, \dots, k-1\}$$

ve $i \in \bar{r}$ için $|\bar{r}|$ ise \bar{r} nin eleman sayısı olmak üzere; P_r , her bir sütunu i . birim vektör olan e_i vektörlerinden oluşan $n \times |\bar{r}|$ matrisler olsun. O halde

$$P = [P_0, P_1, \dots, P_{k-1}]$$

şeklinde permütasyon matris elde edilmiştir. Daha sonra

$$T_n^{(k)} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & & & & b_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & a_{n-k} & & & & b_{n-k} \\ c_{k+1} & & & & \ddots & & & 0 \\ 0 & c_{k+2} & & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & & a_{n-1} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & c_n & 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlanan k -tridiagonal matrisler için, T_i matrisleri $|\bar{i}|$ -kare mertebeli tridiagonal matrisler olmak üzere;

$$P^T T_n^{(k)} P = T_0 \oplus T_1 \oplus \dots \oplus T_{k-1}$$

olduğu gösterilmiş ve bu k -tridiagonal matrisin determinantını kolayca hesaplamak için yeni ve kullanışlı bir metod elde edilmiştir.

(Brualdi ve Gibson, 1977)’de P n -kare permütasyon matrisi olmak üzere;

$$\text{per}(P^T A P) = \text{per}(P^{-1} A P) = \text{per}(A)$$

eşitliği elde edilmiştir.

(Brualdi ve Ryser, 1991)'de

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_3 & A_2 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

şeklindeki blok matrisler için

$$\text{per}(A) = \text{per}(A_1)\text{per}(A_2) \quad (2.2)$$

eşitliği elde edilmiştir.

Bu bağlamda, k -tridiagonal k -Toeplitz matrisler

$$T_{n(k)}^{(k)} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 & b_1 & 0 & & & & & 0 \\ 0 & a_2 & & & & b_2 & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & & \ddots & & & & \\ 0 & & & a_k & & & & b_k & & & \\ c_1 & & & & a_1 & & & & b_1 & & 0 \\ 0 & c_2 & & & & a_2 & & & & & \ddots \\ & & \ddots & & & & \ddots & & & & \\ & & & c_k & & & & a_k & & & \\ & & & & c_1 & & & & a_1 & & \\ 0 & & & & 0 & \ddots & 0 & \ddots & 0 & \ddots & \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlanmıştır. (Sogabe ve El-Mikkawy, 2011)'daki köşegenleştirme metodu yukarıdaki $T_{n(k)}^{(k)}$ matrisine uygulanırsa,

$$P^T T_{n(k)}^{(k)} P = \begin{pmatrix} a_k & b_k & 0 & & & & & & & & 0 \\ c_k & a_k & \ddots & & & & & & & & \\ 0 & \ddots & \ddots & b_k & & & & & & & \\ & & c_k & a_k & 0 & & & & & & \\ & & & 0 & a_1 & b_1 & & & & & \\ & & & & c_1 & a_1 & \ddots & & & & \\ & & & & & \ddots & \ddots & b_1 & & & \\ & & & & & & c_1 & a_1 & 0 & & \\ & & & & & & & 0 & \ddots & & \\ & & & & & & & & & a_{k-1} & b_{k-1} \\ & & & & & & & & & c_{k-1} & a_{k-1} & \ddots & 0 \\ & & & & & & & & & & \ddots & \ddots & b_{k-1} \\ 0 & & & & & & & & & & 0 & c_{k-1} & a_{k-1} \end{pmatrix}$$

şeklinde olur. T_i matrisleri $|i|$ -kare tridiagonal Toeplitz matrisler olmak üzere

$$P^T T_{n(k)}^{(k)} P = T_0 \oplus T_1 \oplus \cdots \oplus T_{k-1}$$

olur.

(Zhang, 1999)'de, başlangıç şartları $v_0 = 1$ ve $v_1 = a$ ve v_n ; $v_n = av_{n-1} - bc v_{n-2}$ şeklinde dizi olmak üzere;

$$T_n = \begin{pmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ c & a & b & & \vdots \\ 0 & c & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \cdots & 0 & c & a \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

matrisinin determinanı için, $\det(T_n) = v_n$ eşitliği elde edilmiştir. Bu bağlamda, aşağıdaki teoremler yazılır.

Teorem 2.1 Başlangıç şartları $v_0 = 1$ ve $v_1 = a_i$ olmak üzere; $v_n = a_i v_{n-1} - b_i c_i v_{n-2}$ dizisi için,

$$\det(T_{n(k)}^{(k)}) = \prod_{i=0}^{k-1} v_{|i|}$$

dir.

İspat: $\det(P^T T_{n(k)}^{(k)} P) = \det(T_{n(k)}^{(k)}) = \det(T_0) \det(T_1) \cdots \det(T_{k-1})$ olur. $\det(T_i) = v_{|i|}$ olduğundan

$$\det(T_{n(k)}^{(k)}) = \prod_{i=0}^{k-1} \det(T_i) = \prod_{i=0}^{k-1} v_{|i|}$$

olup, ispat tamamlanır.

(Kulkarni ve ark., 1999)'da (2.3)'de tanımlı tridiagonal Toeplitz matrisin özdeğerleri

$$\lambda_k = a - 2\sqrt{bc} \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right), \quad k = 1, 2, \dots, n$$

olarak elde edilmiştir.

Teorem 2.2 $T_{n(k)}^{(k)}$ matrisinin özdeğerleri, $i = 0, 1, \dots, k-1$ ve $j = 1, 2, \dots, |i|$ için

$$\lambda_{i_j} = a_i - 2\sqrt{b_i c_i} \cos\left(\frac{j\pi}{|i|+1}\right)$$

dir.

İspat:

$$\det(\lambda I_n - P^T T_{n(k)}^{(k)} P) = \det(\lambda I_n - T_{n(k)}^{(k)}) = \prod_{i=0}^{k-1} \det(\lambda I_{|i|} - T_i)$$

olup, her bir $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ için T_i matrisinin özdeğerleri aynı zamanda $T_{n(k)}^{(k)}$ matrisinin de özdeğerleridir. O halde, $i = 0, 1, \dots, k-1$ ve $j = 1, 2, \dots, |i|$ için $T_{n(k)}^{(k)}$ matrisinin özdeğerleri

$$\lambda_j = a_i - 2\sqrt{b_i c_i} \cos\left(\frac{j\pi}{|i|+1}\right)$$

olarak elde edilir.

(El-Mikkawy, 2003)'de, başlangıç şartları $f_0 = 1$ ve $f_1 = a_1$ olmak üzere $f_i = a_i f_{i-1} - b_{i-1} c_i f_{i-2}$ dizisi tanımlanmıştır,

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & a_2 & b_2 & & \vdots \\ 0 & c_3 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & c_n & a_n \end{pmatrix}$$

matrisinin determinant değeri bu dizinin elemanları cinsinden elde edilmiştir. Yani, $\det(A) = f_n$ eşitliği gösterilmiştir.

(Kilic ve Tasci, 2007)'de tanımlanan dönüştürücü (converter) matris yardımıyla, başlangıç şartları $u_0 = 1$ ve $u_{-1} = 0$ olmak üzere; $u_n = a u_{n-1} + b c u_{n-2}$ dizisi tanımlanıp, kolaylıkla (2.3)'deki T_n matrisinin permanent değeri için

$$\text{per}(T_n) = u_n$$

eşitliği elde edilir.

Elde edilen bu sonuç (Brualdi ve Gibson, 1977)'de tanımlanan sıkıştırma (contraction) metoduyla da doğrulanır. Gerçekten, $1 \leq r \leq n-3$ için $T_n^{[r]}$ matrisinin son sütunundan başlayarak, elde edilen her matrisin son sütununa bu metodu r defa uygulanırsa,

$$T_n^{[r]} = \begin{pmatrix} a & b & 0 & & 0 \\ c & a & b & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & c & a & b \\ 0 & & & c u_r & u_{r+1} \end{pmatrix}_{(n-r) \times (n-r)}$$

elde edilir. $r = (n-2)$. adımda

$$T_n^{[n-2]} = \begin{pmatrix} a & b \\ cu_{n-2} & u_{n-1} \end{pmatrix}$$

olur. $per(T_n) = per(T_n^{[n-2]})$ olduğundan, $per(T_n) = au_{n-1} + bcu_{n-2} = u_n$ olur ki istenen sonuç doğrulanmış olur.

Teorem 2.3 Başlangıç şartları $u_0 = 1$ ve $u_{-1} = 0$ olmak üzere; $u_n = a_i u_{n-1} + b_i c_i u_{n-2}$ dizisi için,

$$per(T_{n(k)}^{(k)}) = \prod_{i=0}^{k-1} u_{|i|}$$

dir.

İspat: (2.1) ve (2.2)'den

$$\begin{aligned} per(P^T T_{n(k)}^{(k)} P) &= per(T_{n(k)}^{(k)}) \\ &= per(T_0 \oplus T_1 \oplus \dots \oplus T_{k-1}) = \prod_{i=0}^{k-1} per(T_i) \end{aligned}$$

ve $per(T_i) = u_{|i|}$ olduğundan

$$per(T_{n(k)}^{(k)}) = \prod_{i=0}^{k-1} u_{|i|}$$

olur ki istenendir.

2.1. Nümerik Örnek

$T_{8(3)}^{(3)}$, 8×8 mertebeli

$$T_{8(3)}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

matrisini göz önüne alalım. Bu matris için permütasyon matrisi $P = [e_3, e_6, e_1, e_4, e_7, e_2, e_5, e_8]$ şeklindedir ve

$$P^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dir. O halde

$$P^T T_{8(3)}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

olur ve

$$P^T T_{8(3)}^{(3)} P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & & & & & & 0 \\ 2 & -1 & & & & & & \\ & & 1 & -1 & 0 & & & \\ & & -2 & 1 & -1 & & & \\ & & 0 & -2 & 1 & & & \\ & & & & & 2 & 3 & 0 \\ & & & & & 4 & 2 & 3 \\ 0 & & & & & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= T_0 \oplus T_1 \oplus T_2$$

elde edilir. $T_{8(3)}^{(3)}$ matrisinin determinant ve permanent değerleri, sırasıyla,

$$\det(T_{8(3)}^{(3)}) = \det(T_0) \det(T_1) \det(T_2) = -120$$

ve

$$\text{per}(T_{8(3)}^{(3)}) = \text{per}(T_0) \text{per}(T_1) \text{per}(T_2) = 840$$

bulunur. T_1 matrisinin özdeğerleri;

$$\lambda_1 = -1 - 2\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1 - \sqrt{2}$$

$$\lambda_2 = -1 - 2\sqrt{2} \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -1 + \sqrt{2},$$

T_2 matrisinin özdeğerleri;

$$\lambda_3 = 1 - 2\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1,$$

$$\lambda_4 = 1 - 2\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,$$

ve

$$\lambda_5 = 1 - 2\sqrt{2} \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 3,$$

T_3 matrisinin özdeğerleri ise

$$\lambda_6 = 2 - 4\sqrt{3} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 - 2\sqrt{6},$$

$$\lambda_7 = 2 - 4\sqrt{3} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2,$$

ve

$$\lambda_8 = 2 - 4\sqrt{3} \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 2 + 2\sqrt{6}$$

olarak hesaplanır. Her bir T_i matrisinin özdeğerleri, aynı zamanda $T_{8(3)}^{(3)}$ matrisinin özdeğerleri olduğundan; yukarıda elde edilen λ_k ($k=1,2,\dots,8$) değerleri, $T_{8(3)}^{(3)}$ matrisinin özdeğerleridir.

3. ALT k –HESSENBERG TOEPLITZ MATRİSLERİN DETERMİNANLARI VE TERSLERİ

Bu bölümde, (da Fonseca ve ark., 2015)'de tanımlanan alt k –Hessenberg matris ailesinin alt ailesi olan alt k –Hessenberg Toeplitz matrisler ailesi tanımlanmış ve bu matris ailesinin determinantı ile tersi için uygun algoritma elde edilmiştir.

Ayrıca bu bölümdeki çalışmalar “*Utilitas Mathematica*” isimli dergide (Kirklar ve Yılmaz, 2017) yayınlanmıştır.

$a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere; $H_n^{(k)} = H_n^{(k)}(a, b, c)$ alt k –Hessenberg Toeplitz matrisi,

$$H_n^{(k)} = H_n^{(k)}(a, b, c) = \begin{cases} a, & i = j \text{ ise} \\ b, & j = i + 1 \text{ ise} \\ c, & i = j + k \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlansın. Aynı zamanda,

$$d_i^{(0)} = \begin{cases} a, & i = 1, 2, \dots, k \\ a + \frac{(-1)^k b^k c}{\prod_{h=1}^k d_{i-h}^{(0)}}, & i = k + 1, k + 2, \dots, n, \end{cases} \quad (3.2)$$

$$e_i = \frac{b}{d_i^{(0)}}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (3.3)$$

ve $t = 1, 2, \dots, k-1$ için,

$$d_i^{(t)} = \begin{cases} 0, & i = t + 1, t + 2, \dots, k \\ a + \frac{(-1)^{k-t} b^{k-t} c}{\prod_{h=1}^{k-t} d_{i-h-t}^{(0)}}, & i = k + 1, k + 2, \dots, n \end{cases} \quad (3.4)$$

dizilerini göz önüne alalım. Yukarıdaki dizilerin elemanları kullanılarak, L alt üçgen matrisi

$$L = [L_{i,j}]_1^n = \begin{cases} d_i^{(0)} & ; i = j \\ d_i^{(t)} & ; i = j + t \quad (t = 1, 2, \dots, k-1) \\ c & ; i = j + k \\ 0 & ; \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (3.5)$$

ve U üst üçgen matrisi

$$U = [u_{i,j}]_1^n = \begin{pmatrix} 1 & e_1 & & & & \\ & 1 & e_2 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & e_{n-1} & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

olarak tanımlansın. O halde aşağıdaki teorem ve lemmalar elde edilir.

Teorem 3.1 $n > 1$ için, L ve U matrisleri sırasıyla (3.5) ve (3.6)'daki gibi olsun. O halde

$$H_n^{(k)} = LU$$

dur.

İspat: $H_n^{(k)} = [h_{i,j}]_1^n$ için, $h_{i,j} = \sum_{k=1}^n l_{i,k} u_{k,j}$ olduğu gösterilmelidir. $i = j$ için, $h_{i,j} = d_i^{(1)} e_{i-1} + d_i^{(0)} = a$ olur. $j = i + 1$ için, $h_{i,j} = d_i^{(0)} e_i = b$ ve $i = j + t$ ($1 \leq t < k - 1$) için, $h_{i,j} = d_i^{(t+1)} e_{i-t-1} + d_i^{(t)} = 0$ bulunur. $i = j + k - 1$ için, $h_{i,j} = c e_{i-k} + d_i^{(k-1)} = 0$ olup, $i = j + k$ için, $h_{i,j} = c$ olduğu açıktır. $i = j + h$ ($h > k$) için, $l_{i,k} = 0$ veya $u_{k,j} = 0$ olduğundan; $h_{i,j} = 0$ elde edilir. $i < j$ için, $h_{i,j} = 0$ olduğu açıktır. Dolayısıyla $H_n^{(k)} = LU$ sağlar.

Teorem 3.2 $H_n^{(k)}$ ve $d_i^{(0)}$, sırasıyla; (3.1) ve (3.2)'deki gibi tanımlansın. O halde

$$\det(H_n^{(k)}) = \prod_{i=1}^n d_i^{(0)}$$

dir.

İspat: Teorem 3.2'den açıktır ki

$$\det(H_n^{(k)}) = \det(L) \det(U)$$

dir.

$$\det(U) = 1$$

ve

$$\det(L) = \prod_{i=1}^n d_i^{(0)}$$

olduğundan,

$$\det(H_n^{(k)}) = \prod_{i=1}^n d_i^{(0)}$$

olur ki, bu da istenendir.

Lemma 3.1 L matrisi (3.5)'deki gibi tanımlansın. O halde L^{-1} matrisi

$$L^{-1} = [l'_{i,j}]_1^n = \begin{cases} \frac{1}{d_i^{(0)}} & , \quad i = j \\ -\frac{d_i^{(1)}}{d_{i-1}^{(0)}d_i^{(0)}} & , \quad i = j+1 \\ -\frac{\sum_{m=1}^t l'_{i-m,j} d_i^{(m)}}{d_i^{(0)}} & , \quad i = j+t \quad (1 < t < k) \\ -\frac{cl'_{i-k,j} + \sum_{m=1}^{k-1} l'_{i-m,j} d_i^{(m)}}{d_i^{(0)}} & , \quad i = j+h \quad (h > k) \\ 0 & , \quad i < j \end{cases} \quad (3.7)$$

dir.

İspat: $p_{i,j} = \sum_{k=1}^n l_{i,k} l'_{k,j}$ olsun. $i < j$ için, $l_{i,j} = 0$ olduğundan, $p_{i,j} = 0$ olur. $i = j$ durumunda,

$$p_{i,i} = l_{i,i} l'_{i,i} = d_i^{(0)} \frac{1}{d_i^{(0)}} = 1$$

dir. $i > j$ için, $l'_{k,j} = 0$ ($j > k$) ve $l_{i,k} = 0$ ($i < k$) olduğundan,

$$p_{i,j} = \sum_{k=1}^n l_{i,k} l'_{k,j} = \sum_{x=j}^i l_{i,x} l'_{x,j}$$

olur. (3.5) ve (3.7)'den,

$$p_{i,j} = \sum_{x=j}^i l_{i,x} l'_{x,j} = l_{i,j} l'_{j,j} + l_{i,j+1} l'_{j+1,j} + \cdots + l_{i,i} l'_{i,i} = 0$$

olur. Dolayısıyla, $LL^{-1} = I_n$ olduğu görülmüş olur. Benzer şekilde $L^{-1}L = I_n$ olduğu görülebilir. Bu ise istenendir.

Lemma 3.2 U matrisi (3.6)'daki gibi tanımlansın. O halde U^{-1} matrisi

$$U^{-1} = [u'_{i,j}]_1^n = \begin{cases} 1 & , \quad i = j \\ (-1)^{i+j} \prod_{k=i}^{j-1} e_k & , \quad i < j \\ 0 & , \quad i > j \end{cases}$$

dir.

İspat: Bahsi geçen U^{-1} matrisi açıkça yazılırsa,

$$U^{-1} = [u'_{i,j}]_1^n = \begin{pmatrix} 1 & -e_1 & e_1 e_2 & \cdots & (-1)^{j+1} \prod_{k=1}^{j-1} e_k \\ & 1 & -e_2 & \cdots & (-1)^{j+2} \prod_{k=2}^{j-1} e_k \\ & & 1 & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & (-1)^{j+1} \prod_{k=n-1}^{j-1} e_k \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

şeklindedir. $m_{i,j} = \sum_{k=1}^n u_{i,k} u'_{k,j}$ olsun. $i > j$ için, $u_{i,j} = 0$ olduğundan, $m_{i,j} = 0$ olur.

$i = j$ durumunda, $u_{i,j} = 1$ dir. $i < j$ için

$$m_{i,j} = (-1)^{i+j} \prod_{k=i}^{j-1} e_k + e_i (-1)^{j+i+1} \prod_{k=i+1}^{j-1} e_k = 0$$

olur. Böylece, $UU^{-1} = I_n$ olduğu görülür. Benzer şekilde $U^{-1}U = I_n$ olduğu görülebilir.

Matrislerin bilinen özelliklerinden

$$(H_n^{(k)})^{-1} = U^{-1}L^{-1}$$

olduğunu kolayca söyleyebiliriz. O halde, bu özellik kullanılarak aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 2.3: $H_n^{(k)}$ alt k -Hessenberg Toeplitz matrisi (3.1)'deki gibi olsun. O halde

$$(H_n^{(k)})^{-1} = [h'_{i,j}]_1^n = \begin{cases} l'_{i,j} + \sum_{k=1}^{n-i} l'_{i+k,j} (-1)^k \prod_{m=0}^{k-1} e_{m+i}, & n > i \geq j \\ \sum_{k=j}^n l'_{k,j} (-1)^{k+i} \prod_{m=0}^{k-i-1} e_{m+i}, & i < j \\ l'_{n,j}, & i = n \end{cases}$$

dir.

İspat: Matrislerde çarpma işleminden,

$$(H_n^{(k)})^{-1} = h'_{i,j} = \sum_{k=j}^n u'_{i,k} l'_{k,j}$$

yazılabilir. $n > i \geq j$ için,

$$h'_{i,j} = u'_{i,j} l'_{j,j} + u'_{i,j+1} l'_{j+1,j} + \cdots + u'_{i,i} l'_{i,j} \\ + u'_{i,i+1} l'_{i+1,j} + \cdots + u'_{i,n} l'_{n,j}$$

dir. U^{-1} matrisi, üst üçgen matris ve $u'_{i,i} = 1$ olduğundan;

$$h'_{i,j} = l'_{i,j} + u'_{i,i+1} l'_{i+1,j} + \cdots + u'_{i,n} l'_{n,j} \\ = l'_{i,j} + \sum_{k=1}^{n-i} l'_{i+k,j} (-1)^k \prod_{m=0}^{k-1} e_{m+i}$$

olur. $i < j$ için,

$$h'_{i,j} = u'_{i,j} l'_{j,j} + u'_{i,j+1} l'_{j+1,j} + \cdots + u'_{i,n} l'_{n,j} \\ = \sum_{k=j}^n l'_{k,j} (-1)^{k+i} \prod_{m=0}^{k-i-1} e_{m+i}$$

olur. $i = n$ için, $h'_{i,j} = u'_{n,n} l'_{n,j} = l'_{n,j}$ olduğu kolayca görülebilir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

3.1. Nümerik Örnek

$H_5^{(3)}(-2, -1, 3)$ matrisi,

$$H_5^{(3)} = H_5^{(3)}(-2, -1, 3) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlansın. (3.2), (3.3), (3.4), (3.5) ve (3.6)'dan L ve U matrisleri sırasıyla;

$$L = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{19}{8} & 0 \\ 0 & 3 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{44}{19} \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{8}{19} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olur. $H_5^{(3)} = LU$ olup, $\det(H_5^{(3)}) = \det(L) = -44$ dir. Lemma 3.1 ve Lemma 3.2'den

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & & & & \\ 0 & -\frac{1}{2} & & & \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & & \\ -\frac{12}{19} & \frac{6}{19} & -\frac{3}{19} & -\frac{8}{19} & \\ -\frac{9}{44} & -\frac{6}{11} & \frac{3}{11} & -\frac{3}{22} & -\frac{19}{44} \end{pmatrix}, \quad U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{19} \\ & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{2}{19} \\ & & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{4}{19} \\ & & & 1 & -\frac{8}{19} \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

olur. Teorem 3.3'den

$$(H_5^{(3)})^{-1} = -\frac{1}{44} \begin{pmatrix} -19 & -8 & 4 & -2 & 1 \\ 6 & 16 & -8 & 4 & -2 \\ -12 & 12 & 16 & -8 & 4 \\ 24 & -24 & 12 & 16 & -8 \\ 9 & 24 & -12 & 6 & 19 \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir.

4. GENELLEŞTİRİLMİŞ BALANCİNG VE LUCAS-BALANCİNG SAYI DİZİLERİ VE k -TRİDİAGONAL MATRİSLER

Bu bölümde, balancing ve Lucas-balancing sayı dizilerinin geneli olan iki periyotlu sayı dizileri tanımlanmış, aynı zamanda bu sayı dizilerinin üreteç fonksiyonları ile Binet formülleri elde edilmiştir. Daha sonra elde edilen Binet formülleri kullanılarak bu sayı dizileri ile ilgili özdeşlikler elde edilmiştir. Son olarak; bu sayı dizilerinin katsayılarından faydalanılarak, bazı özel k -tridiagonal matrisler tanımlanmış ve bu matrislerin determinant ile permanent değerlerinin söz konusu sayı dizilerinin kuvvetleri olduğu gösterilmiştir.

Ayrıca; bu bölümün bir kısmı, “*ARS Combinatoria*” adlı dergide (Yılmaz ve Kırklar, 2015) yayınlanmıştır.

4.1 Genelleştirilmiş Balancing ve Lucas-Balancing Sayıları ve Özellikleri

Tanım 4.1.1 (Yayenie, 2011) $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ve başlangıç şartları $Q_0 = 0$ ve $Q_1 = 1$ olmak üzere;

$$Q_n = \begin{cases} aQ_{n-1} + cQ_{n-2}, & n \text{ çift ise} \\ bQ_{n-1} + dQ_{n-2}, & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan iki periyotlu sayı dizisine *genelleştirilmiş Fibonacci dizisi* denir.

(Yayenie, 2011)’de $x^2 - (ab + c - d)x - abd = 0$ denkleminin kökleri

$$\alpha = \frac{ab + c - d + \sqrt{(ab + c - d)^2 + 4abd}}{2}, \quad \beta = \frac{ab + c - d - \sqrt{(ab + c - d)^2 + 4abd}}{2} \text{ ve}$$

$$\xi(n) = n - 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \begin{cases} 0, & n \text{ çift ise} \\ 1, & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

olmak üzere, Q_n dizisinin Binet formülü

$$Q_n = \frac{a^{1-\xi(n)}}{(ab)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} \left(\frac{\alpha^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (\alpha + d - c)^{n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor} - \beta^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (\beta + d - c)^{n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{\alpha - \beta} \right)$$

olarak elde edilmiştir.

Tanım 4.1.2 Tanım 4.1.1’de $c = d = -1$ alınırsa, başlangıç şartları $b_0 = 0$ ve $b_1 = 1$ olmak üzere

$$b_n = \begin{cases} ab_{n-1} - b_{n-2}, & n \text{ çift ise} \\ bb_{n-1} - b_{n-2} & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan iki periyotlu sayı dizisine *genelleştirilmiş balancing sayı dizisi* denir.

Açıkça görülüyor ki, $a=b=6$ alınrsa, bu dizi (Ray, 2015)'de tanımlanan balancing sayı dizisi olur. $x^2 - (ab)x + ab = 0$ denkleminin kökleri

$$\alpha = \frac{ab + \sqrt{(ab)^2 - 4ab}}{2}, \quad \beta = \frac{ab - \sqrt{(ab)^2 - 4ab}}{2}$$

olmak üzere, (Yayenie, 2011)'den b_n

dizisinin üreteç fonksiyonu ve Binet formülü sırasıyla;

$$B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \frac{x(x^2 + ax + 1)}{1 - (ab - 2)x^2 + x^4}$$

ve

$$b_n = \frac{a^{1-\xi(n)}}{(ab)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \right)$$

olarak elde edilir. Aynı zamanda $x^2 - (ab)x + ab = 0$ denkleminin kökleri olan α ve β için,

$$\left. \begin{array}{lll} (i) (\alpha - 1)(\beta - 1) = 1 & (ii) \alpha\beta = \alpha + \beta = ab & (iii) \alpha(\beta - 1) = \beta \\ (iv) \beta(\alpha - 1) = \alpha & (v) \alpha - 1 = \frac{\alpha^2}{ab} & (vi) \beta - 1 = \frac{\beta^2}{ab} \\ (vii) \alpha^2 + \beta^2 = ab(ab - 2) & (viii) \alpha^3 + \beta^3 = (ab)^2(ab - 3) & \\ (ix) \alpha^4 + \beta^4 = (ab)^2((ab)^2 - 4ab + 2) & & \end{array} \right\} \quad (4.1)$$

olur.

Tanım 4.1.3 Başlangıç şartları $c_0 = 0$ ve $c_1 = \frac{a}{2}$ olmak üzere;

$$c_n = \begin{cases} bc_{n-1} - c_{n-2}, & n \text{ çift ise} \\ ac_{n-1} - c_{n-2} & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan iki periyotlu sayı dizisine *genelleştirilmiş Lucas-balancing sayı dizisi* denir.

Açıkça görülür ki, $a=b=6$ alınrsa, bu dizi (Ray, 2015)'de tanımlanan Lucas-balancing sayı dizisi olur. Aynı zamanda,

$$c_{2n} = (ab - 2)c_{2n-2} - c_{2n-4}$$

ve

$$c_{2n+1} = (ab-2)c_{2n-1} - c_{2n-3}$$

şeklinde. O halde aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.1.1 $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin üreteç fonksiyonu

$$C(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{2 + ax - (ab-2)x^2 + ax^3}{1 - (ab-2)x^2 + x^4} \right)$$

dir.

İspat: $C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ olup, $C_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} x^{2n}$ ve $C_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} x^{2n+1}$ olsun. O halde

$$C_0(x) = 1 + \frac{a}{2}x + \sum_{n=2}^{\infty} c_{2n} x^{2n},$$

$$(ab-2)x^2 C_0(x) = (ab-2)x^2 + \sum_{n=2}^{\infty} (ab-2)c_{2n-2} x^{2n}$$

ve

$$x^4 C_0(x) = \sum_{n=2}^{\infty} c_{2n-4} x^{2n}$$

olur. Dolayısıyla $(1 - (ab-2)x^2 + x^4)C_0(x) = 1 - \frac{1}{2}(ab-2)x^2$ olup,

$$C_0(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{2 - (ab-2)x^2}{1 - (ab-2)x^2 + x^4} \right)$$

elde edilir. Benzer yöntemle;

$$C_1(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{ax + ax^3}{1 - (ab-2)x^2 + x^4} \right)$$

bulunur. $C(x) = C_0(x) + C_1(x)$ olup, bu da istenendir.

Teorem 4.1.2 $x^2 - abx + ab = 0$ denkleminin kökleri $\alpha = \frac{ab + \sqrt{(ab)^2 - 4ab}}{2}$,

$\beta = \frac{ab + \sqrt{(ab)^2 - 4ab}}{2}$ ve $\xi(n) = n - 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ olmak üzere;

$$c_n = \frac{a^{\xi(n)}}{2(ab)^{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor}} (\alpha^n + \beta^n)$$

dir.

İspat: (Bilgici, 2014)'den ve α ile β 'nin özelliklerinden

$$C_0(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(ab)^n} (\alpha^{2n} + \beta^{2n}) x^{2n}$$

ve

$$C_1(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a}{(ab)^{n+1}} (\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1}) x^{2n+1}$$

olup,

$$C(x) = C_0(x) + C_1(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{\xi(n)}}{(ab)^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}} (\alpha^n + \beta^n) x^n$$

olur, ki bu da istenendir.

Teorem 4.1.3 $n \in \mathbb{Z}^+$ ve b_n ile c_n sırasıyla; genelleştirilmiş balancing ve genelleştirilmiş Lucas-balancing sayı dizilerinin n . elemanları olmak üzere

- a) $2c_n = b_{n+1} - b_{n-1}$,
- b) $(ab-4)b_n = 2(c_{n+1} - c_{n-1})$

geçerlidir.

İspat: a) Genelleştirilmiş balancing sayı dizisinin Binet formülünden

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_{n-1} &= \frac{a^{1-\xi(n+1)}}{(ab)^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}} \left(\frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} \right) - \frac{a^{1-\xi(n-1)}}{(ab)^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}} \left(\frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} \right) \\ &= \frac{a^{\xi(n)}}{(ab)^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (\alpha - \beta)} \left[\alpha^n \left(\frac{\alpha}{ab} - \frac{1}{\alpha} \right) - \beta^n \left(\frac{\beta}{ab} - \frac{1}{\beta} \right) \right] \end{aligned}$$

olur. $\frac{\alpha}{ab} - \frac{1}{\alpha} = \frac{\alpha - \beta}{ab}$ ve $\frac{\beta}{ab} - \frac{1}{\beta} = \frac{\beta - \alpha}{ab}$ eşitlikleri kullanılarak;

$$b_{n+1} - b_{n-1} = \frac{a^{\xi(n)}}{(ab)^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}} (\alpha^n + \beta^n) = 2c_n$$

bulunur. İspatın diğer kısmı da benzer şekilde elde edilir.

Teorem 4.1.4 $m \in \mathbb{Z}^+$ için,

- a) $b_{2m} = a(ab-2)^{m-1} - \sum_{k=0}^{m-2} (ab-2)^{m-k-2} b_{2k}$,
- b) $b_{3m} = (ab)^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} (ab-3)^{m-1} \left(a^{1-\xi(m)} (ab-1) - \sum_{k=0}^{m-2} \frac{a^{\xi(k)-\xi(m)} (ab-3)^{m-k-1}}{(ab)^{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor}} b_{3k} \right)$,

$$c) \quad b_{4m} = a(ab-2)\left((ab)^2 - 4ab + 2\right)^{m-1} - \sum_{k=0}^{m-2} \left((ab)^2 - 4ab + 2\right)^{m-k-2} b_{4k}$$

dir.

İspat: c) (4.1)'den $\alpha^4 + \beta^4 = (ab)^2 \left((ab)^2 - 4ab + 2 \right)$ olduğu görülmektedir. O halde

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{m-2} \left((ab)^2 - 4ab + 2 \right)^{m-k-2} b_{4k} &= \frac{a}{\alpha - \beta} \sum_{k=0}^{m-2} \left(\frac{\alpha^4}{(ab)^2 - 4ab + 2} \right)^k - \left(\frac{\beta^4}{(ab)^2 - 4ab + 2} \right)^k \\ &= \frac{a}{\alpha - \beta} \left[\frac{\left(\frac{\alpha^4}{(ab)^2 - 4ab + 2} \right)^{m-1} - 1}{\frac{\alpha^4}{(ab)^2 - 4ab + 2} - 1} - \frac{\left(\frac{\beta^4}{(ab)^2 - 4ab + 2} \right)^{m-1} - 1}{\frac{\beta^4}{(ab)^2 - 4ab + 2} - 1} \right] \\ &= \frac{a}{(ab)^{2m} \left((ab)^2 - 4ab + 2 \right)^{m-2}} \left[(ab)^{2m} (ab-2) \left((ab)^2 - 4ab + 2 \right)^{m-1} - \frac{\alpha^{4m} - \beta^{4m}}{\alpha - \beta} \right] \\ &= (ab-2) \left((ab)^2 - 4ab + 2 \right) - \frac{a}{(ab)^{2m} \left((ab)^2 - 4ab + 2 \right)^{m-2}} \left(\frac{\alpha^{4m} - \beta^{4m}}{\alpha - \beta} \right) \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned} (ab-2) \left((ab)^2 - 4ab + 2 \right) + \sum_{k=0}^{m-2} \left((ab)^2 - 4ab + 2 \right)^{-k} b_{4k} &= - \frac{a}{(ab)^{2m} \left((ab)^2 - 4ab + 2 \right)^{m-2}} \left(\frac{\alpha^{4m} - \beta^{4m}}{\alpha - \beta} \right) \\ &= - \frac{a}{(ab)^{2m} \left((ab)^2 - 4ab + 2 \right)^{m-2}} \left(\alpha^{\xi(4m)-1} (ab)^{2m} b_{4m} \right) \\ &= - \left((ab)^2 - 4ab + 2 \right)^{2-m} b_{4m} \end{aligned}$$

olur ki bu da eşitliğin doğruluğunu gösterir. İspatın diğer kısımları da benzer şekilde gösterilebilir.

Teorem 4.1.5 $n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$\sum_{k=0}^n a^{\xi(mk)} (ab)^{\lfloor \frac{mk}{2} \rfloor} b_{mk} = \frac{a^{\xi(mn+m)} (ab)^{\lfloor \frac{mn+m}{2} \rfloor} b_{mn+m} - a^{\xi(mn)} (ab)^{\lfloor \frac{m(n+2)}{2} \rfloor} b_{mn} - a^{\xi(m)} (ab)^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} b_m}{\alpha^m + \beta^m - (ab)^m - 1}$$

dir.

İspat: b_{mk} nın Binet formülü ve $\alpha\beta = ab$ eşitliğinden

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n a^{\xi(mk)} (ab)^{\lfloor \frac{mk}{2} \rfloor} b_{mk} &= a \sum_{k=0}^n a^{\xi(mk)-1} (ab)^{\lfloor \frac{mk}{2} \rfloor} b_{mk} \\ &= a \sum_{k=0}^n \frac{\alpha^{mk} - \beta^{mk}}{\alpha - \beta} = \frac{a}{\alpha - \beta} \left(\frac{\alpha^{mn+m} - 1}{\alpha^m - 1} - \frac{\beta^{mn+m} - 1}{\beta^m - 1} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{a}{(\alpha^m - 1)(\beta^m - 1)} \left(\frac{(\alpha^{mn+m} - 1)(\beta^m - 1) - (\beta^{mn+m} - 1)(\alpha^m - 1)}{\alpha - \beta} \right) \\
&= \frac{a}{(\alpha\beta)^m - (\alpha^m + \beta^m) + 1} \left((\alpha\beta)^m \frac{\alpha^{mn} - \beta^{mn}}{\alpha - \beta} - \frac{\alpha^{mn+m} - \beta^{mn+m}}{\alpha - \beta} + \frac{\alpha^m - \beta^m}{\alpha - \beta} \right)
\end{aligned}$$

olup,

$$\sum_{k=0}^n a^{\xi(mk)} (ab)_{\lfloor \frac{mk}{2} \rfloor} b_{mk} = \frac{a^{\xi(mn+m)} (ab)_{\lfloor \frac{mn+m}{2} \rfloor} b_{mn+m} - a^{\xi(mn)} (ab)_{\lfloor \frac{m(n+2)}{2} \rfloor} b_{mn} - a^{\xi(m)} (ab)_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} b_m}{\alpha^m + \beta^m - (ab)^m - 1}$$

olduğu görülür.

Sonuç 4.1.1 $n \in \mathbb{Z}^+$ için,

$$\sum_{k=0}^n a^{\xi(k)} (ab)_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} b_k = a^{\xi(n)} (ab)_{\lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor} b_n - a^{\xi(n+1)} (ab)_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} b_{n+1} + a$$

sağlanır.

Teorem 4.1.6 $m \in \mathbb{Z}^+$ için,

$$b_m = a^{\xi(m)-1} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{m-k-1}{k} (ab)_{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor - k}$$

geçerlidir.

İspat: $m=1$ için verilen özdeşliğin doğru olduğu açıktır. $1 \leq n \leq m$ için verilen özdeşlik doğru olsun. O halde; $n=m+1$ için verilen özdeşliğin doğruluğu gösterilmelidir.

Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
b_{m+1} &= a^{\xi(m)} b^{1-\xi(m)} b_m - b_{m-1} \\
&= a^{\xi(m)} b^{1-\xi(m)} a^{\xi(m-1)} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{m-k-1}{k} (ab)_{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor - k} \\
&\quad - a^{\xi(m-2)} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m-2}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{m-k-2}{k} (ab)_{\lfloor \frac{m-2}{2} \rfloor - k} \\
&= a b^{\xi(m+1)} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{m-k-1}{k} (ab)_{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor - k} \\
&\quad - a^{\xi(m-2)} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m-2}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{m-k-2}{k} (ab)_{\lfloor \frac{m-2}{2} \rfloor - k}
\end{aligned}$$

olup,

$$\begin{aligned}
b_{m+1} &= a^{\xi(m)} (ab)^{\xi(m+1)} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{m-k-1}{k} (ab)^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor - k} \\
&\quad - a^{\xi(m-2)} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m-2}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{m-k-2}{k} (ab)^{\lfloor \frac{m-2}{2} \rfloor - k} \\
&= a^{\xi(m)} \left[\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{m-k-1}{k} (ab)^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor - k} - \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m-2}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{m-k-2}{k} (ab)^{\lfloor \frac{m-2}{2} \rfloor - k} \right]
\end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak;

$$\begin{aligned}
b_{m+1} &= a^{\xi(m)} \left[(ab)^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} + (-1)^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} (1 - \xi(m)) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} (-1)^k \left(\binom{m-k-1}{k} + \binom{m-k-1}{k-1} \right) (ab)^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor - k} \right] \\
&= a^{\xi(m)} \left[(ab)^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} + (-1)^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} (1 - \xi(m)) + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{m-k}{k} (ab)^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor - k} \right] \\
&= a^{\xi(m)} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{m-k}{k} (ab)^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor - k}
\end{aligned}$$

olur, ki bu da verilen özdeşliğin her $m \in \mathbb{Z}^+$ için doğru olduğunu gösterir.

Teorem 4.1.7 $n, r \in \mathbb{Z}^+$ için

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} a^{-\xi(k+r)} (ab)^{\lfloor \frac{k+r+1}{2} \rfloor} c_{k+r} = a^{-\xi(r)} (ab)^{\lfloor \frac{r+1}{2} \rfloor} c_{2n+r}$$

sağlanır.

İspat:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} a^{-\xi(k+r)} (ab)^{\lfloor \frac{k+r+1}{2} \rfloor} c_{k+r} &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} (\alpha^{k+r} + \beta^{k+r}) \\
&= \frac{1}{2} \left[\alpha^r (\alpha - 1)^n + \beta^r (\beta - 1)^n \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\alpha^r \left(\frac{\alpha^2}{ab} \right)^n + \beta^r \left(\frac{\beta^2}{ab} \right)^n \right] \\
&= \frac{1}{2(ab)^n} (\alpha^{2n+r} + \beta^{2n+r}) = a^{-\xi(r)} (ab)^{\lfloor \frac{r+1}{2} \rfloor} c_{2n+r}
\end{aligned}$$

olur ki, istenen elde edilmiş olur.

Teorem 4.1.8 $m \in \mathbb{Z}^+$ için

- a) $\sum_{j=1}^{2m} (-1)^j b_j b_{j+1} = \frac{1}{b} (b_{2m+1}^2 - 1),$
b) $\sum_{j=1}^{2m} (-1)^j b_j b_{j+3} = \frac{1}{b} (b_{2m+1} b_{2m+3} - (ab-1)),$
c) $\sum_{j=1}^{2m} (-1)^j b_j b_{j+5} = \frac{1}{b} (b_{2m+3}^2 - (ab-1)^2)$

dir.

İspat: c) Açıktır ki; $(\alpha^6 + \beta^6) = (\alpha^3 + \beta^3)^2 - 2(\alpha\beta)^3$ olup, (4.1)'den

$(\alpha^6 + \beta^6) = (ab)^3 ((ab)^3 - 6(ab)^2 + 9ab - 2)$ ve

$$\begin{aligned} b_j b_{j+5} &= \frac{a}{(\alpha - \beta)^2 (ab)^{j+2}} \left[\alpha^{2j+5} + \beta^{2j+5} - (\alpha\beta)^j (\alpha^5 + \beta^5) \right] \\ &= \frac{a}{(\alpha - \beta)^2} \left[\alpha \left(\frac{\alpha^2}{ab} \right)^{j+2} + \beta \left(\frac{\beta^2}{ab} \right)^{j+2} \right] - \frac{a(\alpha^5 + \beta^5)}{(\alpha - \beta)^2 (ab)^2} \end{aligned}$$

olur. Böylece,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{2m} (-1)^j b_j b_{j+5} &= \frac{a}{(\alpha - \beta)^2} \left[\frac{\alpha^5}{(ab)^2} \sum_{j=1}^{2m} \left(-\frac{\alpha^2}{ab} \right)^j + \frac{\beta^5}{(ab)^2} \sum_{j=1}^{2m} \left(-\frac{\beta^2}{ab} \right)^j \right] - \frac{a(\alpha^5 + \beta^5)}{(\alpha - \beta)^2 (ab)^2} \sum_{j=1}^{2m} (-1)^j \\ &= \frac{a}{(\alpha - \beta)^2} \left[\frac{\alpha^5}{(ab)^2} \frac{(-1)^{2m+1} \left(\frac{\alpha^2}{ab} \right)^{2m+1} + \frac{\alpha^2}{ab}}{-\frac{\alpha^2}{ab} - 1} + \frac{\beta^5}{(ab)^2} \frac{(-1)^{2m+1} \left(\frac{\beta^2}{ab} \right)^{2m+1} + \frac{\beta^2}{ab}}{-\frac{\beta^2}{ab} - 1} \right] \\ &= \frac{a}{(\alpha - \beta)^2} \left[\left(\frac{\alpha^2}{ab} \right)^{2m+3} + \left(\frac{\beta^2}{ab} \right)^{2m+3} - \frac{\alpha^6 + \beta^6}{(ab)^3} \right] \\ &= \frac{a}{(\alpha - \beta)^2 (ab)^{2m+3}} \left[\alpha^{4m+6} + \beta^{4m+6} \right] - \frac{(ab)^3 - 6(ab)^2 + 9ab - 2}{b(ab-4)} \end{aligned}$$

elde edilmiş olur. Eşitliğin sağ tarafından

$$\begin{aligned} \frac{1}{b} (b_{2m+3}^2 - (ab-1)^2) &= \frac{1}{b(\alpha - \beta)^2 (ab)^{2m+2}} \left[\alpha^{4m+6} + \beta^{4m+6} - 2(\alpha\beta)^{2m+3} \right] - \frac{(ab-1)^2}{b} \\ &= \frac{a}{(\alpha - \beta)^2 (ab)^{2m+3}} \left[\alpha^{4m+6} + \beta^{4m+6} \right] - \frac{2}{b(ab-4)} - \frac{(ab-1)^2}{b} \\ &= \frac{a}{(\alpha - \beta)^2 (ab)^{2m+3}} \left[\alpha^{4m+6} + \beta^{4m+6} \right] - \frac{(ab)^3 - 6(ab)^2 + 9ab - 2}{b(ab-4)} \end{aligned}$$

olup, eşitliğin doğruluğu görülür. İspatın diğer kısımları da benzer şekilde görülebilir.

Teorem 4.1.9 $m \in \mathbb{Z}^+$ için,

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \sum_{k=1}^m (-1)^{m-k} \left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(k+1)} b_k^2 = \frac{1}{a} b_m b_{m+1}, \\ \text{b)} \quad & \sum_{k=1}^m (-1)^{m-k} \left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(k)} c_k^2 = \frac{1}{2a} c_{2m+1} + \frac{1+2(-1)^m}{4} \end{aligned}$$

sağlanır.

İspat: a) Açıktır ki;

$$b_k^2 = \begin{cases} \frac{a^2}{(\alpha - \beta)^2} \left[\left(\frac{\alpha^2}{ab}\right)^k + \left(\frac{\beta^2}{ab}\right)^k - 2 \right], & k \text{ çift ise} \\ \frac{ab}{(\alpha - \beta)^2} \left[\left(\frac{\alpha^2}{ab}\right)^k + \left(\frac{\beta^2}{ab}\right)^k - 2 \right], & k \text{ tek ise} \end{cases}$$

dir. O halde

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(k+1)} b_k^2 = \frac{ab}{(\alpha - \beta)^2} \left[\left(\frac{\alpha^2}{ab}\right)^k + \left(\frac{\beta^2}{ab}\right)^k - 2 \right]$$

olup,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m (-1)^{m-k} \left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(k+1)} b_k^2 &= \frac{ab}{(\alpha - \beta)^2} \sum_{k=1}^m (-1)^{m-k} \left[\left(\frac{\alpha^2}{ab}\right)^k + \left(\frac{\beta^2}{ab}\right)^k - 2 \right] \\ &= \frac{(-1)^m ab}{(\alpha - \beta)^2} \sum_{k=1}^m \left[\left(-\frac{\alpha^2}{ab}\right)^k + \left(-\frac{\beta^2}{ab}\right)^k \right] + \frac{2(-1)^m ab}{(\alpha - \beta)^2} \sum_{k=1}^m (-1)^k \\ &= \frac{ab}{(\alpha - \beta)^2 (ab)^{m+1}} \left[\alpha^{2m+1} + \beta^{2m+1} + (-1)^{m-1} (ab)^{m+1} \right. \\ &\quad \left. + (-1 + (-1)^m) (ab)^{m+1} \right] \\ &= \frac{ab}{(\alpha - \beta)^2 (ab)^{m+1}} \left[\alpha^{2m+1} + \beta^{2m+1} - (ab)^{m+1} \right] \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Eşitliğin sağ tarafı için Binet formülü kullanılarak

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} b_m b_{m+1} &= \frac{a^{1-\xi(m)-\xi(m+1)}}{(\alpha - \beta)^2 (ab)^m} \left[\alpha^{2m+1} + \beta^{2m+1} - (ab)^{m+1} \right] \\ &= \frac{ab}{(\alpha - \beta)^2 (ab)^{m+1}} \left[\alpha^{2m+1} + \beta^{2m+1} - (ab)^{m+1} \right] \end{aligned}$$

olur ki; eşitlik elde edilmiş olur.

b) Yine görülebilir ki;

$$c_k^2 = \begin{cases} \frac{1}{4} \left[\left(\frac{\alpha^2}{ab} \right)^k + \left(\frac{\beta^2}{ab} \right)^k + 2 \right], & k \text{ çift ise} \\ \frac{a}{4b} \left[\left(\frac{\alpha^2}{ab} \right)^k + \left(\frac{\beta^2}{ab} \right)^k + 2 \right], & k \text{ tek ise} \end{cases}$$

dir. O halde

$$\left(\frac{b}{a} \right)^{\xi(k)} c_k^2 = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{\alpha^2}{ab} \right)^k + \left(\frac{\beta^2}{ab} \right)^k + 2 \right]$$

olup,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m (-1)^{m-k} \left(\frac{b}{a} \right)^{\xi(k)} c_k^2 &= \frac{(-1)^m}{4} \sum_{k=1}^m \left[\left(-\frac{\alpha^2}{ab} \right)^k + \left(-\frac{\beta^2}{ab} \right)^k \right] + \frac{(-1)^m}{2} \sum_{k=1}^m (-1)^k \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{\alpha^{2m+1}}{(ab)^{m+1}} + \frac{\alpha^{2m+1}}{(ab)^{m+1}} + (-1)^{m-1} \right] + \frac{1+(-1)^m}{4} \\ &= \frac{1}{4(ab)^{m+1}} (\alpha^{2m+1} + \alpha^{2m+1}) + \frac{1+2(-1)^{m-1}}{4} \\ &= \frac{1}{2a} c_{2m+1} + \frac{1+2(-1)^m}{4} \end{aligned}$$

olur ki; bu da istenendir.

Teorem 4.1.10 $m, n \in \mathbb{Z}$ için,

$$c_{m+n} = \frac{1}{4} \left[\left((ab)^2 - 4ab \right) \left(\frac{1}{a^2} \right)^{\xi(m+1)\xi(n+1)} \left(\frac{1}{ab} \right)^{1-\xi(m+1)\xi(n+1)} b_m b_n + 4 \left(\frac{b}{a} \right)^{\xi(m)\xi(n)} c_m c_n \right]$$

geçerlidir.

İspat: Bu sayı dizilerinin Binet formüllerinden,

$$c_{m+n} = \frac{\alpha^{\xi(m+n)}}{2(ab)^{\lfloor \frac{m+n+1}{2} \rfloor}} (\alpha^{m+n} + \beta^{m+n}),$$

$$b_m b_n = \frac{\alpha^{2-\xi(m)-\xi(n)}}{(ab)^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} (\alpha^{m+n} - \alpha^m \beta^n - \alpha^n \beta^m + \beta^{m+n})$$

ve

$$c_m c_n = \frac{\alpha^{\xi(m)+\xi(n)}}{(ab)^{\lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}} (\alpha^{m+n} + \alpha^m \beta^n + \alpha^n \beta^m + \beta^{m+n})$$

olduğu görülür. Şimdi de m ve n nin tek veya çift olma durumları incelensin.

Durum 1. m ve n nin her ikisi de çift olsun. O halde

$$\frac{(\alpha - \beta)^2}{a^2} b_m b_n + 4c_m c_n = 4c_{m+n}$$

olur.

Durum 2. m ve n nin her ikisi de tek olsun. O halde

$$\frac{(\alpha - \beta)^2}{ab} b_m b_n + \frac{4b}{a} c_m c_n = 4c_{m+n}$$

olur.

Durum 3. m ve n nin herhangi biri tek diğeri ise çift olsun. O halde

$$\frac{(\alpha - \beta)^2}{ab} b_m b_n + 4c_m c_n = 4c_{m+n}$$

olur.

Dolayısıyla her durumda da verilen özdeşliğin doğruluğu görülür.

Teorem 4.1.11 $n \in \mathbb{Z}^+$ için,

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{pmatrix} b_n & b_{n-1} \\ b_{n+1} & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & b_0 \\ b_2 & b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{1-\xi(n)} b^{\xi(n)} & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1}, \\ \text{b)} \quad & \begin{pmatrix} b_{2n} & b_{2(n-1)} \\ b_{2(n+1)} & b_{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_2 & b_0 \\ b_4 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (ab-2) & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1}, \\ \text{c)} \quad & \begin{pmatrix} b_{3n} & b_{3(n-1)} \\ b_{3(n+1)} & b_{3n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_3 & b_0 \\ b_6 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (ab-3)a^{1-\xi(n)} b^{\xi(n)} & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1}, \\ \text{d)} \quad & \begin{pmatrix} b_{4n} & b_{4(n-1)} \\ b_{4(n+1)} & b_{4n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_4 & b_0 \\ b_8 & b_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (ab-2)^2 - 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} \end{aligned}$$

sağlanır.

İspat: a) Öncelikle $b_{n+2} = a^{1-\xi(n)} b^{\xi(n)} b_{n+1} - b_n$ olduğu açık olup, $n=1$ için verilen özdeşliğin doğrudur. $1 \leq k \leq n$ için verilen özdeşlik doğru olsun. O halde $n=k+1$ için verilen özdeşliğin doğruluğu gösterilmelidir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} b_1 & b_0 \\ b_2 & b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{1-\xi(k+1)} b^{\xi(k+1)} & 1 \\ & -1 \end{pmatrix}^k &= \begin{pmatrix} b_k & b_{k-1} \\ b_{k+1} & b_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{1-\xi(k+1)} b^{\xi(k+1)} & 1 \\ & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a^{1-\xi(k+1)} b^{\xi(k+1)} b_k - b_{k-1} & b_k \\ a^{1-\xi(k+1)} b^{\xi(k+1)} b_{k+1} - b_k & b_{k+1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} b_{k+1} & b_k \\ b_{k+2} & b_{k+1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

olur ki bu da verilen eşitliğin her $n \in \mathbb{Z}^+$ için doğru olduğunu gösterir. Teoremin diğer kısımları da benzer şekilde ispatlanabilir.

Teorem 4.1.12 $n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$\mathfrak{R}_n = [t_{i,j}]_{i,j=1}^n = \begin{cases} -1, & i = j+1 \text{ ve } j = i+1 \text{ için} \\ a^{\xi(i)} b^{1-\xi(i)}, & i = j = 1, 2, \dots, n \text{ için} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ve

$$\wp_n = [\rho_{i,j}]_{i,j=1}^n = \begin{cases} -1, & i = j+1 \text{ ve } j = i+1 \text{ için} \\ \frac{a}{2}, & i = j = 1 \text{ için} \\ a^{\xi(i)} b^{1-\xi(i)}, & i = j = 2, 3, \dots, n \text{ için} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan n -kare mertebeli tridiagonal matrisler olmak üzere; b_n ve c_n sırasıyla; genelleştirilmiş balancing ve Lucas-balancing sayı dizisinin n . elemanları olmak üzere;

$$\det \mathfrak{R}_n = b_{n+1}$$

ve

$$\det \wp_n = c_n$$

olur.

İspat: $n=1$ için, $\det \mathfrak{R}_1 = b_2$ ve $\det \wp_1 = c_1$ olup; eşitlikler doğrudur. Her $k \leq n$ için, verilen eşitlikler doğru olsun. O halde, $n=k+1$ için, verilen eşitliklerin doğruluğunu göstermeliyiz. Dolayısıyla; \mathfrak{R}_{k+1} \wp_{k+1} matrislerinin determinantı için son sütuna göre Laplace açılımı yapılırsa, sırasıyla;

$$\det \mathfrak{R}_{k+1} = a^{1-\xi(k+1)} b^{\xi(k+1)} \det \mathfrak{R}_k - \det \mathfrak{R}_{k-1}$$

ve

$$\det \wp_{k+1} = a^{\xi(k+1)} b^{1-\xi(k+1)} \det \wp_k - \det \wp_{k-1}$$

elde edilir. $\det \mathfrak{R}_k = b_{k+1}$, $\det \mathfrak{R}_{k-1} = b_k$, $\det \wp_k = c_k$ ve $\det \wp_{k-1} = c_{k-1}$ olup, $\det \mathfrak{R}_{k+1} = b_{k+2}$, $\det \wp_{k+1} = c_{k+1}$ eşitlikleri elde edilir ki; bu da, her $n \geq 1$ tamsayısı için verilen eşitliğin doğruluğunu gösterir.

$n = mk$ ve $t = 1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$ olmak üzere; $\wp_{n,k}$ ve $\mathfrak{R}_{n,k}$, n -kare matrisleri

sırasıyla;

$$\wp_{n,k} = \left[\wp_{i,j} \right]_{i,j=1}^n = \begin{cases} \wp_{i,i+k} = \wp_{i+k,i} = -1, & i = 1, 2, \dots, n-k \text{ için} \\ \wp_{i,i} = \frac{a}{2}, & i = j = 1, 2, \dots, k \text{ için} \\ \wp_{i,i} = b, & i = j = (2t-1)k+1, (2t-1)k+2, \dots, 2tk \text{ için} \\ \wp_{i,i} = a, & i = j = 2tk+1, 2tk+2, \dots, (2t+1)k \text{ için} \\ \wp_{i,j} = 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (4.2)$$

ve

$$\mathfrak{R}_{n,k} = \left[s_{i,j} \right]_{i,j=1}^n = \begin{cases} s_{i,i+k} = s_{i+k,i} = -1, & i = 1, 2, \dots, n-k \text{ için} \\ s_{i,i} = a, & i = j = (2t-2)k+1, (2t-2)k+2, \dots, (2t-1)k \text{ için} \\ s_{i,i} = b, & i = j = (2t-1)k+1, (2t-1)k+2, \dots, 2tk \text{ için} \\ s_{i,j} = 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (4.3)$$

şeklinde tanımlansın. O halde aşağıdaki teoremler elde edilir.

Teorem 4.1.13 $n \in \mathbb{Z}^+$ için, $\wp_{n,k}$ ve $\mathfrak{R}_{n,k}$ n -kare matrisleri sırasıyla (4.2) ve (4.3)'deki gibi tanımlansın. O halde

$$\det \wp_{n,k} = c_m^k$$

ve

$$\det \mathfrak{R}_{n,k} = b_{m+1}^k$$

geçerlidir.

İspat: (Sogabe ve El-Mikkawy, 2011)'de yazarların tanımladığı permütasyon matrisler yardımıyla hızlı köşegenleştirme metodu kullanılarak,

$$P_1^T \wp_{n,k} P_1 = \begin{pmatrix} \wp_m & & \\ & \ddots & \\ & & \wp_m \end{pmatrix}_{k \times k}$$

ve

$$P_2^T \mathfrak{R}_{n,k} P_2 = \begin{pmatrix} \mathfrak{R}_m & & \\ & \ddots & \\ & & \mathfrak{R}_m \end{pmatrix}_{k \times k}$$

şeklinde k -kare blok köşegen matrisler elde edilir. Buradaki P_1 ve P_2 matrisleri, verilen $\wp_{n,k}$ ve $\mathfrak{R}_{n,k}$ matrisleri için elde edilen uygun permütasyon matrislerdir. P permütasyon matrisi için, $P^{-1} = P^T$ olduğundan;

$$\det(P_1^T \wp_{n,k} P) = \det \wp_{n,k} = (\det \wp_m)^k = c_m^k$$

ve

$$\det(P_1^T \mathfrak{R}_{n,k} P) = \det \mathfrak{R}_{n,k} = (\det \mathfrak{R}_m)^k = b_{m+1}^k$$

olur ki; bu da, istenendir.

$n = mk$ ve $t = 1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$ olmak üzere; $\mathbb{Q}_{n,k}$, $\mathbb{N}_{n,k}$ ve $H_{n,k}$ n -kare matrisleri

sırasıyla;

$$\mathbb{Q}_{n,k} = \left[q_{i,j} \right]_{i,j=1}^n = \begin{cases} q_{i,i+k} = 1, & i = 1, 2, \dots, n-k \text{ için} \\ q_{i+k,i} = -1, & i = 1, 2, \dots, n-k \text{ için} \\ q_{i,i} = \frac{a}{2}, & i = j = 1, 2, \dots, k \text{ için} \\ q_{i,i} = b, & i = j = (2t-1)k+1, (2t-1)k+2, \dots, 2tk \text{ için} \\ q_{i,i} = a, & i = j = 2tk+1, 2tk+2, \dots, (2t+1)k \text{ için} \\ q_{i,j} = 0, & \text{diğer durumlarda,} \end{cases} \quad (4.4)$$

$$\mathbb{N}_{n,k} = \left[z_{i,j} \right]_{i,j=1}^n = \begin{cases} z_{i,i+k} = 1, & i = 1, 2, \dots, n-k \text{ için} \\ z_{i+k,i} = -1, & i = 1, 2, \dots, n-k \text{ için} \\ z_{i,i} = a, & i = j = (2t-2)k+1, (2t-2)k+2, \dots, (2t-1)k \text{ için} \\ z_{i,i} = b, & i = j = (2t-1)k+1, (2t-1)k+2, \dots, 2tk \text{ için} \\ z_{i,j} = 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (4.5)$$

ve

$$H_{n,k} = \left[h_{i,j} \right]_{i,j=1}^n = \begin{cases} h_{i,i+k} = -1, & i = 1, 2, \dots, n-k \text{ için} \\ h_{i,j} = 1, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (4.6)$$

şeklinde tanımlansın. O halde aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.1.14 $n \in \mathbb{Z}^+$ için, $\mathbb{Q}_{n,k}$ ve $\mathbb{N}_{n,k}$ n -kare matrisleri, sırasıyla; (4.4) ve (4.5)'deki gibi tanımlansın. O halde

$$\text{per}(\mathbb{Q}_{n,k}) = c_m^k$$

ve

$$\text{per}(\mathbb{N}_{n,k}) = b_{m+1}^k$$

geçerlidir.

İspat: Açıkça görülebiliyor ki (4.6)'de tanımlanan $H_{n,k}$ matrisi $\mathbb{Q}_{n,k}$ ve $\mathbb{N}_{n,k}$ matrislerinin dönüştürücü matrisi olup,

$$\text{per}(\mathbb{Q}_{n,k}) = \det(H_{n,k} \circ \mathbb{Q}_{n,k})$$

ve

$$\text{per}(\mathbb{N}_{n,k}) = \det(H_{n,k} \circ \mathbb{N}_{n,k})$$

dır. $\wp_{n,k}$ ve $\mathfrak{R}_{n,k}$ matrisleri sırasıyla (4.2) ve (4.3)'teki gibi tanımlanmış olup,

$$H_{n,k} \circ \mathbb{Q}_{n,k} = \wp_{n,k}$$

ve

$$H_{n,k} \circ \mathbb{N}_{n,k} = \mathfrak{R}_{n,k}$$

elde edilir. O halde Teorem 4.1.13'den

$$\text{per}(\mathbb{Q}_{n,k}) = \text{ici}(H_{n,k} \circ \mathbb{Q}_{n,k}) = \text{ici}(\wp_{n,k}) = c_m^k$$

ve

$$\text{per}(\mathbb{N}_{n,k}) = \det(H_{n,k} \circ \mathbb{N}_{n,k}) = \det(\mathfrak{R}_{n,k}) = b_{m+1}^k$$

olur ki istenendir.

Sonuç olarak, yukarıda tanımlanan genelleştirilmiş balancing ve genelleştirilmiş Lucas-balancing sayı dizilerinde $a=b=6$ alınırsa bu diziler sırasıyla balancing ve Lucas-balancing sayı dizilerine dönüşmekte olup, elde edilen bu özdeşliklerin tümü balancing ve Lucas-balancing sayı dizileri için de geçerlidir.

4.2 Balancing Q-Matrisler

(Ray, 2013)'de balancing Q-matrisi

$$Q_B = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlanmış ve B_n , n . balancing sayısı olmak üzere

$$Q_B^n = \begin{pmatrix} B_{n+1} & -B_n \\ B_n & -B_{n-1} \end{pmatrix}$$

olduğu gösterilmiş ve $\det Q_B^n = [B_n^2 - B_{n-1}B_{n+1}] = 1$ eşitliği elde edilmiştir.

Bu bağlamda

$$Q_B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

matrisini göz önüne alalım.

Teorem 4.2.1: Q_B matrisi (4.7)'daki gibi olsun. O halde

$$Q_B^n = \begin{pmatrix} 0 & -B_n & 0 & B_{n-1} \\ B_n & 0 & B_{n+1} & 0 \\ 0 & B_{n+1} & 0 & -B_n \\ B_{n-1} & 0 & B_n & 0 \end{pmatrix}, \text{ eğer } n \text{ tek ise}$$

$$Q_B^n = \begin{pmatrix} -B_{n-1} & 0 & -B_n & 0 \\ 0 & B_{n+1} & 0 & -B_n \\ B_n & 0 & B_{n+1} & 0 \\ 0 & B_n & 0 & -B_{n-1} \end{pmatrix}, \text{ eğer } n \text{ çift ise}$$

dir.

İspat: $n=1$ ve $n=2$ için verilen eşitliklerin doğru olduğu açıktır. $1 \leq k \leq n$ için verilen özdeşlik doğru olsun. O halde $n=k+1$ için verilen özdeşliğin doğruluğu gösterilmelidir. Balancing dizisi tanımından,

$$Q_B^{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & -B_n & 0 & B_{n-1} \\ B_n & 0 & B_{n+1} & 0 \\ 0 & B_{n+1} & 0 & -B_n \\ B_{n-1} & 0 & B_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ve

$$Q_B^{k+2} = \begin{pmatrix} -B_{n-1} & 0 & -B_n & 0 \\ 0 & B_{n+1} & 0 & -B_n \\ B_n & 0 & B_{n+1} & 0 \\ 0 & B_n & 0 & -B_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 0 & -B_{n+1} & 0 & B_n \\ B_{n+1} & 0 & B_{n+2} & 0 \\ 0 & B_{n+2} & 0 & -B_{n+1} \\ 0 & 0 & B_{n+1} & 0 \end{pmatrix}$$

olup, her $n \in \mathbb{Z}^+$ için doğru olduğu görülür.

4.3 Balancing ve Lucas-balancing sayıları ile Chebyshev Polinomları

$U_n(x)$, ikinci tip Chebyshev polinom olmak üzere; $U_0(x) = 1$, $U_1(x) = 2x$ ve $n \geq 1$ için

$$U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x)$$

rekürans bağıntısına sahiptir (Mason ve Handscomb, 2003). (da Fonseca ve Petronilho, 2001)'de, $U_n(x)$, ikinci tip Chebyshev polinom olmak üzere;

$$Q_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & & & \\ y & x & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & 1 & \\ & & & y & x \end{vmatrix} = (\sqrt{y})^n U_n\left(\frac{x}{2\sqrt{y}}\right) \quad (4.8)$$

olarak elde edilmiştir. (4.3)'de tanımlanan $\mathfrak{R}_{n,k}$ matrisinde; $k = y = 1$ ve $a = b = 6$ olarak seçilirse, (4.8)'den

$$B_{n+1} = U_n(3)$$

olduğu kolayca görülebilir.

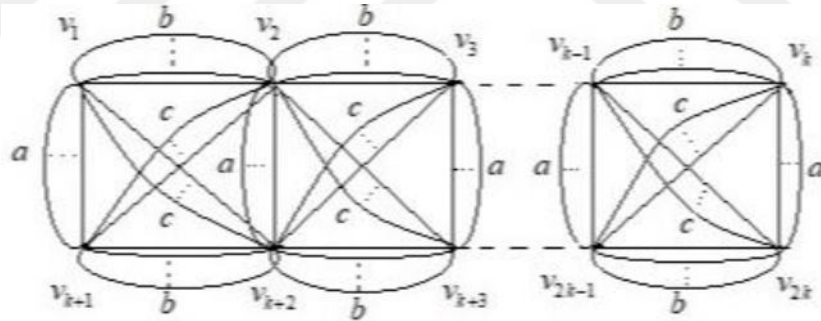
5. BİR TÜR GRAF AİLESİ VE BU GRAF AİLESİNİN BAZI ÖZELLİKLERİ

Bu bölüm iki kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda bir graf ailesi tanımlanmış olup, bu ailesinin komşuluk matrisi elde edilmiş ve bu komşuluk matrisi yardımıyla, graf ailesinin komşuluk matrisinin ve Laplacian matrisinin özdeğerleri elde edilmiştir. Aynı zamanda, bu tanımlanan graf ailesinin mükemmel eşleme (perfect matching) sayısı için bir rekürans elde edilmiştir. İkinci kısımda ise; bu graf ailesinin bazı özel alt aileleri tanımlanmış, daha sonra bu graf ailesinin enerjisi için eşitlik, Laplacian enerjileri için de üst sınır elde edilmiştir. Bunun yanı sıra, bu özel alt graf ailelerinin mükemmel eşleme (perfect matching) sayılarının Fibonacci, Pell ve Jacobsthal sayı dizilerinin elemanları olduğu gösterilmiştir.

Ayrıca; bu bölümün bir kısmı, “*AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics*” adlı dergide (Kirklar ve ark., 2019) kabul edilmiştir.

5.1 Bir tip Graf ailesi ve Mükemmel Eşleme (Perfect Matching) Sayısı

Bu kısımda, bağlantılı, yönlendirilmemiş, ilmek içermeyen



Şekil 5.1 Özel Bir graf ailesi

şeklinde, a, b, c sayıları v_i ve v_j ($1 \leq i, j \leq 2k$) köşelerinin arasındaki kenar sayıları olmak üzere; G multigraf ailesini gözönüne alacağız. Dolayısıyla; M_k ve N_k , k -kare mertebeli matrisleri sırasıyla;

$$M_k = \begin{pmatrix} 0 & b & & \\ b & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}, \quad N_k = \begin{pmatrix} a & c & & \\ c & a & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

şeklinde olmak üzere, $2k$ köşeye sahip olan G grafının komşuluk matrisi,

$$A(G) = \begin{pmatrix} M_k & N_k \\ N_k & M_k \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

şeklindedir.

Teorem 5.1.1 (Marcus, 1960) X ve Y , k -kare mertebeli reel matrisler ve S matrisi ise;

$$S = \begin{pmatrix} X & Y \\ Y & X \end{pmatrix}$$

şeklinde blok matris olsun. O halde S matrisinin özdeğerler kümesi, $X - Y$ ve $X + Y$ matrislerinin özdeğerler kümelerinin birleşimidir.

Lemma 5.1.1 I_k , k -kare birim matris olmak üzere; R_n blok matrisi,

$$R_n = \begin{pmatrix} I_k & I_k \\ I_k & -I_k \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

şeklinde tanımlansın. O halde;

$$R_n^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I_k & I_k \\ I_k & -I_k \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

sağlanır.

İspat: Matrislerde çarpma işleminden $R_n R_n^{-1} = R_n^{-1} R_n = I_n$ olduğu kolayca görülür.

Lemma 5.1.2 F_k ve S_k , k -kare matrisleri sırasıyla;

$$F_k = \begin{pmatrix} a & b+c & & \\ b+c & a & \ddots & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}, S_k = \begin{pmatrix} -a & b-c & & \\ b-c & -a & \ddots & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlansın. O halde;

$$H = \begin{pmatrix} F_k & 0 \\ 0 & S_k \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

ve $A(G)$ matrisi de, (5.2)'deki gibi olmak üzere; H ve $A(G)$ matrisleri benzer matrislerdir.

İspat: R_n ve R_n^{-1} , sırasıyla; (5.3) ve (5.4)'deki gibi, $A(G)$ ve H matrisleri de; (5.2) ve (5.5)'deki gibi tanımlanmış olsun. O halde $H = R_n^{-1} A(G) R_n$ olup, H ve $A(G)$ matrislerinin benzer matrisler olduğu görülür.

Sonuç 5.1.1 G grafi, Şekil 5.1'deki gibi ve bu grafa karşılık gelen komşuluk matrisi olan $n = 2k$ mertebeli $A(G)$ matrisi (5.2)'deki gibi olsun. O halde; $t = 1, 2, \dots, k$ için, $A(G)$ matrisinin özdeğerleri

$$\eta_t = a - 2(b+c)\cos\left(\frac{t\pi}{k+1}\right)$$

ve

$$\gamma_t = -a - 2(b-c)\cos\left(\frac{t\pi}{k+1}\right)$$

dir.

İspat: Teorem 5.1.1'den $A(G)$ matrisinin özdeğerleri kümesi, $F_k = M_k + N_k$ ve $S_k = M_k - N_k$ matrislerinin özdeğerler kümesinin birleşiminden oluştuğu açıktır. O halde; F_k ve S_k matrisleri, tridiagonal Toeplitz matrisler olup; (Kulkarni ve ark., 1999)'dan bu matrislerin özdeğerleri $t=1,2,\dots,k$ için

$$\eta_t = a - 2(b+c)\cos\left(\frac{t\pi}{k+1}\right)$$

ve

$$\gamma_t = -a - 2(b-c)\cos\left(\frac{t\pi}{k+1}\right)$$

olur.

Lemma 5.1.3 $D(G)$ ve $A(G)$ matrisleri, sırasıyla; Şekil 5.1'deki G grafının derece ve komşuluk matrisleri ve $L(G)$ matrisi ise; aynı grafın Laplacian matrisi olsun. O halde $L(G)$ matrisinin özdeğerleri; $t=1,2,\dots,k$ için, $\sin\theta \neq 0$ ve θ_t 'ler ise;

$$(c-b)^2 \sin(n+1)\theta + 2(c^2 - b^2)\sin(n\theta) + (b+c)^2 \sin(n-1)\theta = 0$$

denkleminin kökleri olmak üzere;

$$\mu_t = 2(b+c)\left(1 + \cos\frac{t\pi}{k}\right)$$

ve

$$\mu_t^* = 2(a+b+c) + 2(c-b)\cos\theta_t$$

geçerlidir.

İspat: D^* köşegen matrisi,

$$D^* = \begin{pmatrix} a+b+c & & & & \\ & a+2b+2c & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & a+2b+2c & \\ & & & & a+b+c \end{pmatrix}_{k \times k}$$

olmak üzere; Şekil 5.1'deki G grafinin $D(G)$ derece matrisi,

$$D(G) = \begin{pmatrix} D^* & 0 \\ 0 & D^* \end{pmatrix}$$

olur. O halde; $A(G)$ matrisi, bu grafin komşuluk matrisi olmak üzere; $L(G)$ Laplacian matrisi, N_k matrisi, (5.1)'deki gibi ve C_k matrisi de

$$C_k = \begin{pmatrix} a+b+c & -b & & & \\ -b & a+2b+2c & -b & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -b & a+2b+2c & -b \\ & & & -b & a+b+c \end{pmatrix}_{k \times k}$$

olmak üzere;

$$L = D - A = \begin{pmatrix} C_k & -N_k \\ -N_k & C_k \end{pmatrix}$$

olur. O halde U_1 ve U_2 matrisleri, sırasıyla;

$$U_1 = C_k - N_k = \begin{pmatrix} b+c & -b-c & & & \\ -b-c & 2b+2c & -b-c & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -b-c & 2b+2c & -b-c \\ & & & -b-c & b+c \end{pmatrix}_{k \times k}$$

ve

$$U_2 = C_k + N_k = \begin{pmatrix} 2a+b+c & c-b & & & \\ c-b & 2a+2b+2c & c-b & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & c-b & 2a+2b+2c & c-b \\ & & & c-b & 2a+b+c \end{pmatrix}_{k \times k}$$

şeklindedir. Dolayısıyla, Teorem 5.1.1'den U_1 ve U_2 matrislerinin özdeğerlerinin aynı zamanda $L(G)$ matrisinin özdeğerleri olduğu anlaşılır. Sonuç olarak; (Yueh, 2005)'den, $L(G)$ matrisinin özdeğerleri $t=1,2,\dots,k$ için $\sin\theta \neq 0$ ve θ_i 'ler ise;

$$(c-b)^2 \sin(n+1)\theta + 2(c^2 - b^2)\sin n\theta + (b+c)^2 \sin(n-1)\theta = 0$$

denkleminin kökleri olmak üzere;

$$\mu_t = 2(b+c) \left(1 + \cos \frac{t\pi}{k} \right)$$

ve

$$\mu_t^* = 2(a+b+c) + 2(c-b)\cos\theta_t$$

olur ki; bu da, istenendir.

Teorem 5.1.2 $A_{2k}(G)$ matrisi, Şekil 5.1'deki $2k$ köşeye sahip G grafının komşuluk matrisi olsun. O halde; başlangıç koşulları $z_1 = 1$ ve $z_2 = a$ olan

$$z_{k+1} = az_k + (b^2 + c^2)z_{k-1} \quad (5.6)$$

dizisi için, $\text{haf}(A_{2k}(G)) = z_{k+1}$ dir. Yani, bu $2k$ köşeye sahip G grafının mükemmel eşleme (perfect matching) sayısı, bahsi geçen dizinin $(k+1)$. elemanına eşittir.

İspat: $k=1$ için

$$A_2(G) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$$

olup, $\text{haf}(A_2(G)) = z_2$ dir. Her $t \leq k$ için, verilen eşitlik doğru olsun. O halde; $k = t+1$ için verilen eşitliklerin doğruluğunu göstermeliyiz. O halde; $2t+2$ köşeye sahip G grafının komşuluk matrisi olan $2t+2$ mertebeli $A_{2t+2}(G)$ matrisi,

$$A_{2t+2}(G) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & b & 0 & a & c & 0 \\ b & 0 & \ddots & c & a & \ddots \\ & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & c \\ 0 & & b & 0 & 0 & c & a \\ \hline a & c & & 0 & 0 & b & 0 \\ c & a & \ddots & & b & 0 & \ddots \\ & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & b \\ 0 & & c & a & 0 & b & 0 \end{array} \right)$$

olur. Son sütuna göre hafnian için, Laplace açılımı yapılırsa; M_{t-1} ve N_{t-1} matrisleri (5.1)'deki gibi ve Y_{2t} , Z_{2t} $2t$ mertebeli matrisleri

$$Y_{2t} = \begin{pmatrix} \begin{array}{ccc|cc|ccc} & & & 0 & 0 & & & & \\ & & & \vdots & \vdots & & & & \\ & & & b & 0 & & & & \\ \hline & & & & & & & & \\ & & & 0 & \dots & 0 & b & 0 & \dots & 0 & c \\ & & & 0 & \dots & \hat{c} & \hat{c} & b & \hat{c} & \hat{c} & \hat{c} \\ \hline & & & & & & & & & & \\ & & & N_{t-1} & & & & & & & M_{t-1} \\ & & & \vdots & \vdots & & & & & & \\ & & & c & 0 & & & & & & \end{array} \end{pmatrix}, \quad Z_{2t} = \begin{pmatrix} \begin{array}{cccc|ccc} & & & 0 & & & & 0 \\ & & & \vdots & & & & \vdots \\ & & & 0 & & & & c \\ \hline & & & 0 & \dots & \hat{c} & \hat{c} & \dots & \hat{c} & c \\ & & & & & & & 0 & & 0 \\ & & & N_{t-1} & & & & M_{t-1} & & \\ & & & & & & & 0 & & b \\ \hline & & & 0 & \dots & c & c & 0 & \dots & b & \hat{c} \end{array} \end{pmatrix}$$

şeklinde olmak üzere;

$$\begin{aligned} haf(A_{2t+2}(G)) &= ahaf(A_{2t}(G)) + bhaf(Y_{2t}) + chaf(Z_{2t}) \\ &= az_{t+1} + bhaf(Y_{2t}) + chaf(Z_{2t}) \end{aligned}$$

olur. Çift mertebeli ve esas köşegen elemanları sıfır olan simetrik matrisin herhangi iki satırı ve bu satırlara karşılık gelen sütunları yer değiştirdiğinde hafnian değeri değişmez.

Bu özellik Y_{2t} ve Z_{2t} matrislerine sırasıyla $(t-1)$ ve t kez uygulanırsa, sırasıyla;

$$Y_{2t}^* = \begin{pmatrix} \begin{array}{cccc|ccc} & & & 0 & & & & 0 \\ & & & \vdots & & & & \vdots \\ & & & b & & & & 0 \\ \hline & & & 0 & \dots & b & 0 & 0 & \dots & c & \hat{b} \\ & & & & & & & 0 & & & 0 \\ & & & N_{2t-1} & & & & M_{2t-1} & & & \\ & & & & & & & c & & & 0 \\ \hline & & & 0 & \dots & \hat{a} & b & \hat{a} & \dots & \hat{a} & \hat{a} \end{array} \end{pmatrix}, \quad Z_{2t}^* = \begin{pmatrix} \begin{array}{ccc|ccc} & & & 0 & 0 \\ & & & \vdots & \vdots \\ & & & c & 0 \\ \hline & & & & & & & b & 0 \\ & & & N_{2t-1} & & & & M_{2t-1} & \\ & & & & & & & 0 & \dots & b & 0 \\ & & & 0 & \dots & c & 0 & \dots & b & 0 & c \\ & & & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & c & 0 \end{array} \end{pmatrix}$$

matrisleri elde edilir. O halde $haf(Y_{2t}) = haf(Y_{2t}^*)$ ve $haf(Z_{2t}) = haf(Z_{2t}^*)$ olup, hafnian için son sütuna göre Laplace açılımı yapılırsa;

$$haf(Y_{2t}^*) = bhaf(A_{2t-2}(G)) = bz_t$$

ve

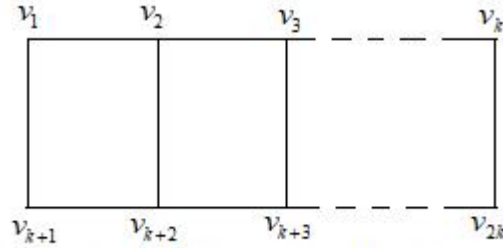
$$haf(Z_{2t}^*) = chaf(A_{2t-2}(G)) = cz_t$$

olur ki; bu da, $haf(A_{2t+2}(G)) = az_{t+1} + (b^2 + c^2)z_t = z_{t+2}$ olduğunu gösterir. Sonuç olarak; her $k \in \mathbb{Z}^+$ için, Şekil 5.1'deki G grafının mükemmel eşleme (perfect

matching) sayısının (5.6)'da tanımlanan (z_k) dizisinin $(k+1)$. terimine eşit olduğu görülür.

5.2 Özel Durumlar

Durum 5.2.1 Şekil 5.1'de $a=b=1$ ve $c=0$ alınırsa; bu graf ailesi,



Şekil 5.2 Merdiven (ladder) graf

şeklinde merdiven (ladder) grafa dönüşür. Teorem 5.1.2'den, F_{k+1} , $(k+1)$. Fibonacci sayısı olmak üzere; bu grafın mükemmel eşleme sayısı F_{k+1} dir. Aynı zamanda; Sonuç 5.1.1 ve Lemma 5.1.3'den, $a=b=1$ ve $c=0$ olmak üzere; bu alt graf ailesi için, $t=1,2,\dots,k$ olmak üzere, $A_{2k}(G)$ komşuluk matrisinin özdeğerleri,

$$\eta_t = 1 - 2 \cos\left(\frac{t\pi}{k+1}\right)$$

ve

$$\gamma_t = -1 - 2 \cos\left(\frac{t\pi}{k+1}\right)$$

ve $L(G)$ matrisinin özdeğerleri

$$\mu_t = 2 + 2 \cos\left(\frac{t\pi}{k}\right)$$

ve

$$\mu_t^* = 4 + 2 \cos\left(\frac{t\pi}{k}\right)$$

olur. Dolayısıyla; Şekil 5.2'deki G merdiven graf ailesinin enerjisi,

$$\begin{aligned}
E_G &= \sum_{t=1}^k |\eta_t| + \sum_{t=1}^k |\gamma_t| \\
&= \sum_{t=1}^k \left| 1 - 2 \cos \left(\frac{t\pi}{k+1} \right) \right| + \sum_{t=1}^k \left| -1 - 2 \cos \left(\frac{t\pi}{k+1} \right) \right|
\end{aligned}$$

olur.

$k \equiv 0, 1 \pmod{3}$ ve $1 \leq x \leq \left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor$ için, $1 - 2 \cos \left(\frac{x\pi}{k+1} \right) \leq 0$, $\left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor \leq t \leq k$ için, $1 - 2 \cos \left(\frac{t\pi}{k+1} \right) > 0$ olur. Aynı zamanda; $z = 1, 2, \dots, t - \left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor$ için, $\frac{z\pi}{k+1} \leq \frac{2\pi}{3}$ olup; $-1 - 2 \cos \left(\frac{z\pi}{k+1} \right) \leq 0$ bulunur. $k - \left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor < m \leq k$ için, $-1 - 2 \cos \left(\frac{m\pi}{k+1} \right) > 0$ olur. Sonuç

olarak;

$$\begin{aligned}
E_G &= \sum_{t=1}^{\left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor} \left[-1 + 2 \cos \left(\frac{t\pi}{k+1} \right) \right] + \sum_{t=\left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor+1}^k \left[1 - 2 \cos \left(\frac{t\pi}{k+1} \right) \right] \\
&\quad + \sum_{t=1}^{k-\left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor} \left[1 + 2 \cos \left(\frac{t\pi}{k+1} \right) \right] + \sum_{t=k-\left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor+1}^k \left[-1 - 2 \cos \left(\frac{t\pi}{k+1} \right) \right] \\
&= 2k - 4 - 4 \left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor + 4 \left[\sin \left(\frac{\left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor \pi}{k+1} \right) \cot \left(\frac{\pi}{2k+2} \right) + \cos \left(\frac{\left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor \pi}{k+1} \right) \right] \\
&\quad - 4 \left[\cos \left(\frac{\left(\left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor + 1 \right) \pi}{k+1} \right) + \cos \left(\frac{\left(\left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor + 2 \right) \pi}{k+1} \right) + \dots + \cos \left(\frac{\left(k - \left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor \right) \pi}{k+1} \right) \right] \\
&= 2k - 4 - 4 \left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor + 4 \left[\sin \left(\frac{\left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor \pi}{k+1} \right) \cot \left(\frac{\pi}{2k+2} \right) + \cos \left(\frac{\left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor \pi}{k+1} \right) \right]
\end{aligned}$$

olur.

$k \equiv 2 \pmod{3}$ ve $1 \leq x \leq \frac{k+1}{3}$ için, $1 - 2 \cos \left(\frac{x\pi}{k+1} \right) \leq 0$ ve $\frac{k+1}{3} < t \leq k$ için de, $1 - 2 \cos \left(\frac{x\pi}{k+1} \right) > 0$ elde edilir. Aynı zamanda; $z = 1, 2, \dots, \frac{2k+2}{3}$ için $\frac{z\pi}{k+1} \leq \frac{2\pi}{3}$

olup, $-1 - 2\cos\left(\frac{z\pi}{k+1}\right) \leq 0$ dir. $\frac{2k+2}{3} < m \leq k$ için, $-1 - 2\cos\left(\frac{m\pi}{k+1}\right) > 0$ olur. Sonuç olarak;

$$\begin{aligned} E_G &= \sum_{t=1}^{\frac{k+1}{3}} \left[-1 + 2\cos\left(\frac{t\pi}{k+1}\right) \right] + \sum_{t=\frac{k+4}{3}}^k \left[1 - 2\cos\left(\frac{t\pi}{k+1}\right) \right] \\ &\quad + \sum_{t=1}^{\frac{2k+2}{3}} \left[1 + 2\cos\left(\frac{t\pi}{k+1}\right) \right] + \sum_{t=\frac{2k+5}{3}}^k \left[-1 - 2\cos\left(\frac{t\pi}{k+1}\right) \right] \\ &= \frac{2k-10}{3} + 2\sqrt{3} \cot\left(\frac{\pi}{2k+2}\right) \end{aligned}$$

elde edilir.

Açıktır ki; $2k$ köşeye sahip olan Şekil 5.2'deki G merdiven grafi, $(3k-2)$ tane kenara sahiptir. O halde; bu grafin Laplacian enerjisi,

$$\begin{aligned} LE(G) &= \sum_{i=1}^k \left| \mu_i - \frac{3k-2}{k} \right| + \sum_{i=1}^k \left| \mu_i^* - \frac{3k-2}{k} \right| \\ &= \sum_{i=1}^k \left| 2 + 2\cos\left(\frac{i\pi}{k}\right) - \frac{3k-2}{k} \right| + \sum_{i=1}^k \left| 4 + 2\cos\left(\frac{i\pi}{k}\right) - \frac{3k-2}{k} \right| \end{aligned}$$

olur. $k=2$ için, $LE(G)=2$ olduğu açıktır. O halde; $k \geq 2$ için,

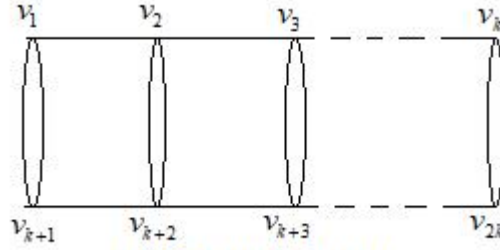
$$\begin{aligned} LE(G) &= \sum_{i=1}^k \left| 2 + 2\cos\left(\frac{i\pi}{k}\right) - \frac{3k-2}{k} \right| + \sum_{i=1}^k \left| 4 + 2\cos\left(\frac{i\pi}{k}\right) - \frac{3k-2}{k} \right| \\ &= \sum_{i=1}^k \left| -1 + \frac{2}{k} + 2\cos\left(\frac{i\pi}{k}\right) \right| + \sum_{i=1}^k \left| 1 + \frac{2}{k} + 2\cos\left(\frac{i\pi}{k}\right) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^k \left| -1 + \frac{2}{k} \right| + \sum_{i=1}^k \left(1 + \frac{2}{k} \right) + 4 \sum_{i=1}^k \left| \cos\left(\frac{i\pi}{k}\right) \right| \end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak,

$$\begin{aligned} LE(G) &\leq 2k + 4 \sum_{i=1}^k \left| \cos\left(\frac{i\pi}{k}\right) \right| = 2k + 4 + 8 \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \cos\left(\frac{i\pi}{k}\right) \\ &\leq 2k + 4 \left(\sin\left(\frac{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor \pi}{k}\right) \cot \frac{\pi}{2k} + \cos\left(\frac{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor \pi}{k}\right) \right) \end{aligned}$$

olur ki, bu grafin Laplacian enerjisi için bir üst sınır elde edilmiş olur.

Durum 5.2.2 Şekil 5.1’de $a=2$, $b=1$ ve $c=0$ alınırsa; bu graf ailesi,



Şekil 5.3 Silindir Tipi Graf

şeklinde silindir tipi grafa dönüşür. Teorem 5.1.2’den; P_{k+1} , $(k+1)$. Pell sayısı olmak üzere; bu grafın mükemmel eşleme sayısı, P_{k+1} dir. Aynı zamanda; Sonuç 5.1.1 ve Lemma 5.1.3’den, $a=2$, $b=1$ ve $c=0$ olmak üzere; bu alt graf ailesi için, $t=1,2,\dots,k$ olmak üzere; $A_{2k}(G)$ komşuluk matrisinin özdeğerleri,

$$\eta_t = 2 - 2 \cos\left(\frac{t\pi}{k+1}\right)$$

ve

$$\gamma_t = -2 - 2 \cos\left(\frac{t\pi}{k+1}\right)$$

ve $L(G)$ matrisinin özdeğerleri,

$$\mu_t = 2 + 2 \cos\left(\frac{t\pi}{k}\right)$$

ve

$$\mu_t^* = 6 + 2 \cos\left(\frac{t\pi}{k}\right)$$

olur. Dolayısıyla Şekil 5.3’deki G silindir tipi graf ailesinin enerjisi,

$$\begin{aligned} E_G &= \sum_{t=1}^k |\eta_t| + \sum_{t=1}^k |\gamma_t| \\ &= \sum_{t=1}^k \left| 2 - 2 \cos\left(\frac{t\pi}{k+1}\right) \right| + \sum_{t=1}^k \left| -2 - 2 \cos\left(\frac{t\pi}{k+1}\right) \right| \\ &= \sum_{t=1}^k \left(2 - 2 \cos\left(\frac{t\pi}{k+1}\right) \right) + \sum_{t=1}^k \left(2 + 2 \cos\left(\frac{t\pi}{k+1}\right) \right) = 4k \end{aligned}$$

bulunur.

Açıktır ki; $n=2k$ köşeye sahip olan Şekil 5.3’deki G silindir tipi grafi, $(2n-2)$ tane kenara sahiptir. O halde; bu grafın Laplacian enerjisi,

$$\begin{aligned}
LE(G) &= \sum_{i=1}^k \left| \mu_i - \frac{4n-4}{n} \right| + \sum_{i=1}^k \left| \mu_i^* - \frac{4n-4}{n} \right| \\
&= \sum_{i=1}^k \left| 2 + 2 \cos\left(\frac{i\pi}{k}\right) - \frac{4n-4}{n} \right| + \sum_{i=1}^k \left| 6 + 2 \cos\left(\frac{i\pi}{k}\right) - \frac{4n-4}{n} \right| \\
&= \sum_{i=1}^k \left| -2 + \frac{4}{n} + 2 \cos\left(\frac{i\pi}{k}\right) \right| + \sum_{i=1}^k \left| 2 + \frac{4}{n} + 2 \cos\left(\frac{i\pi}{k}\right) \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^k \left| -2 + \frac{4}{n} \right| + 2 \sum_{i=1}^k \left| \cos\left(\frac{i\pi}{k}\right) \right| + 2k + \frac{4k}{n} + 2 \sum_{i=1}^k \cos\left(\frac{i\pi}{k}\right) \\
&= 2k - \frac{4k}{n} + 2k + \frac{4k}{n} - 2 + 2 \sum_{i=1}^k \left| \cos\left(\frac{i\pi}{k}\right) \right| \\
&= 4k - 2 + 2 \sum_{i=1}^k \left| \cos\left(\frac{i\pi}{k}\right) \right|
\end{aligned}$$

olur. $k = 2z$ için,

$$\begin{aligned}
LE(G) &\leq 4k - 2 + 2 \sum_{i=1}^k \left| \cos\left(\frac{i\pi}{k}\right) \right| \\
&= 4k + 4 \sum_{i=1}^z \cos\left(\frac{i\pi}{k}\right) \\
&= 4k + 2 \left(\sin\left(\frac{z\pi}{k}\right) \cot \frac{\pi}{2k} + \cos\left(\frac{z\pi}{k}\right) - 1 \right)
\end{aligned}$$

olup,

$$LE(G) \leq 4k + 2 \left(\cot \frac{\pi}{2k} - 1 \right)$$

olur. $k = 2z + 1$ için,

$$\begin{aligned}
LE(G) &\leq 4k - 2 + 2 \sum_{i=1}^k \left| \cos\left(\frac{i\pi}{k}\right) \right| \\
&= 4k - 2 + 2 + 4 \sum_{i=1}^z \cos\left(\frac{i\pi}{k}\right) \\
&= 4k + 2 \left(\cot \frac{\pi}{2k} - 1 \right)
\end{aligned}$$

olup,

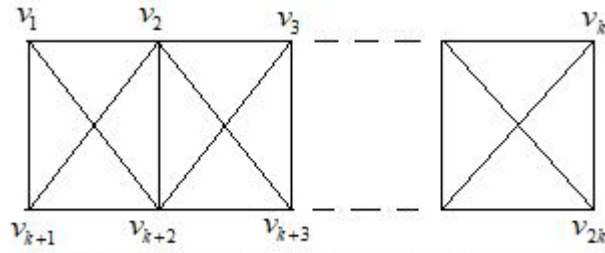
$$LE(G) \leq 4k + 2 \left(\cot \frac{\pi}{2k} - 1 \right)$$

bulunur. Sonuç olarak; her $k \geq 2$ için,

$$LE(G) \leq 4k + 2 \left(\cot \frac{\pi}{2k} - 1 \right)$$

olur ki, Şekil 5.3'deki bu grafın Laplacian enerjisi için bir üst sınır elde edilmiş olur.

Durum 5.2.3 Şekil 5.1’de $a = b = c = 1$ alınırsa; bu graf ailesi,



Şekil 5.4 Şekil 5.1 Grafının özel alt graf ailesi

şeklinde alt graf ailesine dönüşür. Teorem 5.1.2’den; J_{k+1} , $(k+1)$. Jacobsthal sayısı olmak üzere; bu grafın mükemmel eşleme sayısı, J_{k+1} dir. Aynı zamanda; Sonuç 5.1.1 ve Lemma 5.1.3’den, $a=2$, $b=1$ ve $c=0$ olmak üzere; bu alt graf ailesi için, $t=1,2,\dots,k$ olmak üzere; $A_{2k}(G)$ komşuluk matrisinin özdeğerleri,

$$\eta_t = 1 - 4 \cos\left(\frac{t\pi}{k+1}\right)$$

ile

$$\gamma_t = -1 - 4 \cos\left(\frac{t\pi}{k+1}\right)$$

ve $L(G)$ matrisinin özdeğerleri,

$$\mu_t = 4 + 4 \cos\left(\frac{t\pi}{k}\right)$$

ile

$$\mu_t^* = 4, \mu_{k-1}^* = \mu_k^* = 4$$

olur. Dolayısıyla Şekil 5.4’deki G graf ailesinin enerjisi,

$$\begin{aligned} E_G &= \sum_{t=1}^k |\eta_t| + \sum_{t=1}^k |\gamma_t| \\ &= \sum_{t=1}^k \left| 1 - 4 \cos\left(\frac{t\pi}{k+1}\right) \right| + \sum_{t=1}^k \left| -1 - 4 \cos\left(\frac{t\pi}{k+1}\right) \right| \end{aligned}$$

olur. $x = 1, 2, \dots, t < k$ ve $\cos\left(\frac{x\pi}{k+1}\right) \geq \frac{1}{4}$ için, $1 - 4 \cos\left(\frac{x\pi}{k+1}\right) \leq 0$ olup; $t < z \leq k$ için,

$1 - 4 \cos\left(\frac{z\pi}{k+1}\right) \geq 0$ elde edilir. Aynı zamanda; $y = 1, 2, \dots, q < k$ ve $\cos\left(\frac{y\pi}{k+1}\right) \leq -\frac{1}{4}$

için, $-1 - 4 \cos\left(\frac{y\pi}{k+1}\right) \leq 0$ olup; $q < p \leq k$ için de $-1 - 4 \cos\left(\frac{p\pi}{k+1}\right) \geq 0$ elde edilir.

Sonuç olarak;

$$\begin{aligned} E_G &= \sum_{i=1}^t \left[-1 + 4 \cos\left(\frac{i\pi}{k+1}\right) \right] + \sum_{i=t+1}^k \left[1 - 4 \cos\left(\frac{i\pi}{k+1}\right) \right] \\ &+ \sum_{i=1}^q \left[1 + 4 \cos\left(\frac{i\pi}{k+1}\right) \right] + \sum_{i=q+1}^k \left[-1 - 4 \cos\left(\frac{t\pi}{k+1}\right) \right] \\ &= 2 \left\{ q - t - 4 + 2 \left(\cot\left(\frac{\pi}{2k+2}\right) \left[\sin\left(\frac{x\pi}{k+1}\right) + \sin\left(\frac{(k-y)\pi}{k+1}\right) \right] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \cos\left(\frac{x\pi}{k+1}\right) + \cos\left(\frac{(k-y)\pi}{k+1}\right) \right) \right\} \end{aligned}$$

bulunur. Örneğin; $k=5$ için, $q=3$ ve $t=2$ olur. Böylece;

$$E_G = 2 \left[3 - 2 - 4 - 4 \left(\cot \frac{\pi}{12} \sin \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{3} \right) \right] = 10 + 4\sqrt{3}$$

olarak elde edilir.

Açıktır ki; $n=2k$ köşeye sahip olan Şekil 5.4'deki G grafi, $(5k-4)$ tane kenara sahiptir. O halde; bu grafin Laplacian enerjisi,

$$\begin{aligned} LE(G) &= \sum_{i=1}^k \left| \mu_i - \frac{5k-4}{k} \right| + \sum_{i=1}^k \left| \mu_i^* - \frac{5k-4}{k} \right| \\ &= \sum_{i=1}^k \left| 4 + 4 \cos\left(\frac{i\pi}{k}\right) - \frac{5k-4}{k} \right| + \sum_{i=1}^k \left| \mu_i^* - \frac{5k-4}{k} \right| \\ &= 2 + \frac{8}{k} + \sum_{i=1}^k \left| -1 + \frac{4}{k} + 4 \cos\left(\frac{i\pi}{k}\right) \right| + \sum_{i=1}^{k-2} \left| -1 + \frac{4}{k} \right| \\ &\leq 2 + \frac{8}{k} + \sum_{i=1}^k \left| -1 + \frac{4}{k} \right| + \sum_{i=1}^{k-2} \left| -1 + \frac{4}{k} \right| + 4 \sum_{i=1}^k \left| \cos\left(\frac{i\pi}{k}\right) \right| \end{aligned}$$

bulunur. $k \leq 3$ için, Şekil 5.4'deki bu grafin Laplacian enerjisini hesaplamak kolaydır. $k \geq 4$ için,

$$\begin{aligned} LE(G) &\leq 2 + \frac{8}{k} + \sum_{i=1}^k \left| -1 + \frac{4}{k} \right| + \sum_{i=1}^{k-2} \left| -1 + \frac{4}{k} \right| + 4 \sum_{i=1}^k \left| \cos\left(\frac{i\pi}{k}\right) \right| = 8 + 2 \sum_{i=1}^{k-2} \left(1 - \frac{4}{k} \right) + 8 \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \cos\left(\frac{i\pi}{k}\right) \\ &= 2k - 8 + \frac{16}{k} + 4 \left(\sin\left(\frac{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor \pi}{k}\right) \cot \frac{\pi}{2k} + \cos\left(\frac{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor \pi}{k}\right) \right) \end{aligned}$$

olur ki; Şekil 5.4'deki bu grafin Laplacian enerjisi için, bir üst sınır elde edilmiş olur.

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

6.1 Sonuçlar

Bu tezde genel olarak matrisler ailesinin özel alt aileleri olan bazı band matrisler tanımlanmış, bu matrislerin bazı özellikleri incelenmiştir. Bunun yanı sıra, balancing ve Lucas-balancing sayı dizilerinin geneli olan iki periyotlu diziler tanımlanmış ve bu band matrisler ile ilişkilendirilmiştir. Son olarak da; yeni bir graf ailesi tanımlanmış özel bir band matris ve literatürde henüz çok fazla kullanılmayan hafnian fonksiyonu yardımıyla, bu graf ailesinin mükemmel eşleme (perfect matching) sayısı için özel bir rekürans bağıntısı elde edilmiştir. Daha sonra da bu graf ailesinin özel alt ailelerinin enerji ve Laplacian enerjileri üzerine çalışılmıştır.

6.2 Öneriler

Tribonacci gibi sayı dizilerinin geneli olacak şekilde ikiden fazla periyoda sahip yeni sayı dizileri tanımlanıp, bu sayı dizileri ile ilgili yeni özdeşlikler elde edilebilir. Bu özdeşlikleri bulabilmek için yeni band matrisler tanımlanabilir.

Yönlendirilmiş veya yönlendirilmemiş yeni graf aileleri tanımlanarak, bu graf ailelerinin komşuluk matrisleri ve Pfaffian ve hafnian fonksiyonları yardımıyla bu graf ailelerinin mükemmel eşleme (perfect matching) sayıları hakkında yorum yapılabilir. Aynı zamanda, bu graf ailelerinin enerji ve bazı indeksleri elde edilebilir.

KAYNAKLAR

- Asci, M., Tasci, D. ve El-Mikkawy, M., 2012, On Determinants and Permanents of k -Tridiagonal Toeplitz Matrices, *Utilitas Mathematica*, 89, 97-106.
- Behmaram, A. ve Friedland, S., 2013, Upper bounds for perfect matchings in Pfaffian and planar graphs, *Electronic Journal of Combinatorics*, 20 (1).
- Bilgici, G., 2014, Two generalizations of Lucas sequence, *Applied Mathematics and Computation*, 245, 526-538.
- Bondy, J. A. ve Murty, U. S. R., 1976, Graph Theory with Applications, *North-Holland*, New York • Amsterdam • Oxford, p.
- Brualdi, R. A. ve Gibson, P. M., 1977, Convex polyhedra of doubly stochastic matrices I: applications of the permanent function, *J. Combin. Theory A*, 22, 194-230.
- Brualdi, R. A. ve Ryser, H. J., 1991, Combinatorial Matrix Theory, *Cambridge University Press*, CUP, p.
- Bruhn, H., Gellert, L. ve Günther, J., 2016, Jacobsthal Numbers in Generalized Petersen Graphs, *Journal of Graph Theory*, 84 (2), 146-157.
- Catarino, P., Campos, H. ve Vasco, P., 2015, On Some Identities for Balancing and Cobalancing Numbers, *Annales Mathematicae et Informaticae*, 45, 11-24.
- Cerin, Z., 2007, Sums of Squares and Products of Jacobsthal Numbers, *Journal of Integer Sequences*, 10 (Article 07.2.5), 1-15.
- da Fonseca, C. M. ve Petronilho, J., 2001, Explicit inverses of some tridiagonal matrices, *Linear Algebra and Its Applications*, 325 (1-3), 7-21.
- da Fonseca, C. M., 2014, Unifying some Pell and Fibonacci identities, *Applied Mathematics and Computation*, 236, 41-42.
- da Fonseca, C. M., Sogabe, T. ve Yılmaz, F., 2015, Lower k -Hessenberg matrices and k -Fibonacci, Fibonacci- p , Pell (p ; i) numbers, *Gen. Math. Notes*, 31 (1).
- Edson, M. ve Yayenie, O., 2009, A new generalization of Fibonacci sequence and extended Binet's formula, *Integer Electron. J. Comb. Number Theory*, 9 (3), 639-654.
- El-Mikkawy, M., 2003, A note on a three-term recurrence for a tridiagonal matrix, *Applied Mathematics and Computation*, 139 (2-3), 503-511.
- Grone, R. ve Merris, R., 1994, The Laplacian Spectrum of a Graph .2., *Siam Journal on Discrete Mathematics*, 7 (2), 221-229.
- Gutman, I. ve Zhou, B., 2006, Laplacian energy of a graph, *Linear Algebra and Its Applications*, 414 (1), 29-37.
- Harary, F., 1969, Graph Theory, Addison-Wesley, p.
- Horadam, A. F., 1994, Maximal Representations of Positive Integers by Pell Numbers, *Fibonacci Quarterly*, 32 (3), 240-244.
- Horn, R. A. ve Johnson, C. R., 1985, Matrix Analysis, Cambridge University Press, p.
- Kilic, E. ve Tasci, D., 2007, On the permanents of some tridiagonal matrices with applications to the Fibonacci and Lucas numbers, *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 37 (6), 1953-1969.
- Kilic, E. ve Tasci, D., 2010, Negatively Subscripted Fibonacci and Lucas Numbers and Their Complex Factorizations, *Ars Combinatoria*, 96, 275-288.
- Kirklar, E., Maden, A. D., Yılmaz, F., 2019, Some Results on One Type of Graph Family with Some Special Number Sequences, *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics*, Accepted.
- Kirklar, E. ve Yılmaz, F., 2015, A Note on k -Tridiagonal k -Toeplitz Matrices, *Alabama Journal of Mathematics*, 39.

- Kirklar, E. ve Yilmaz, F., 2017, On properties of lower k-Hessenberg Toeplitz matrices, *Utilitas Mathematica*, 102, 343-348.
- Koshy, T., 2001, Fibonacci and Lucas Numbers with Applications, Wiley-Interscience, p.
- Kral', D., Sereni, J. S. ve Stiebitz, M., 2009, A New Lower Bound on the Number of Perfect Matchings in Cubic Graphs, *Siam Journal on Discrete Mathematics*, 23 (3), 1465-1483.
- Kulkarni, D., Schmidt, D. ve Tsui, S. K., 1999, Eigenvalues of tridiagonal pseudo-Toeplitz matrices, *Linear Algebra and Its Applications*, 297 (1-3), 63-80.
- Marcus, M., 1960, Basic Theorems in Matrix Theory, Washington : U.S. Govt. Print. Off., p.
- Mason, J. C. ve Handscomb, D. C., 2003, Chebyshev Polynomials, Chapman and Hall/CRC, p.
- Merris, R., 1994, Laplacian Matrices of Graphs - a Survey, *Linear Algebra and Its Applications*, 198, 143-176.
- Panda, G. K., 2006, Some Fascinating Properties of Balancing Numbers, *Fibonacci Numbers and Their Applications*, 10, 1-7.
- Ray, P. K., 2012, Certain Matrices Associated with Balancing and Lucas Balancing Numbers, *Matematika*, 28 (1), 15-22.
- Ray, P. K., 2013, Factorizations of the Negatively Subscripted Balancing and Lucas-Balancing Numbers, *Bol. Soc. Par. Math.*, 31 (2), 161-173.
- Ray, P. K., 2015, Balancing and Lucas-balancing sums by matrix methods, *Math. Reports*, 17 (67), 225-233.
- Ruohonen, K., 2013, Graph Theory, Tampere University of Technology, p.
- Sogabe, T. ve El-Mikkawy, M., 2011, Fast block diagonalization of k-tridiagonal matrices, *Applied Mathematics and Computation*, 218 (6), 2740-2743.
- Taşçı, D., 2011, Lineer Cebir, Ankara, Öziş Matbaacılık, p.
- Yalciner, A., 2011, The LU factorizations and determinants of k-tridiagonal matrices, *Asian-European Journal of Mathematics*, 4 (1), 187-197.
- Yayenie, O., 2011, A note on generalized Fibonacci sequences, *Applied Mathematics and Computation*, 217 (12), 5603-5611.
- Ye, K. ve Lim, L. H., 2015, Every Matrix is a Product of Toeplitz Matrices, *Found Comput. Math.*, 16, 577-598.
- Yilmaz, F. ve Kirklar, E., 2015, A note on k-tridiagonal matrices with the balancing and Lucas-balancing numbers, *Ars Combinatoria*, 120, 283-291.
- Yueh, W. C., 2005, Eigenvalues of several tridiagonal matrices, *Applied Mathematics E-Notes*, 5, 66-74.
- Zhang, F., 1999, Matrix Theory-Basic Results and Thecniques, Springer, p.
- Zhang, H. P. ve Zhang, F. J., 2001, New lower bound on the number of perfect matchings in fullerene graphs, *Journal of Mathematical Chemistry*, 30 (3), 343-347.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Emrullah KIRKLAR
Uyruğu : T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi : Ahlat-1990
Telefon : 0 544 304 38 17
Faks : -
e-mail : emrullah.kirklar@gmail.com

EĞİTİM

Derece	Adı, İlçe, İl	Bitirme Yılı
Lise	: Selçuklu Lisesi, Ahlat, Bitlis	2006
Üniversite	: Selçuk Üniversitesi, Selçuklu, Konya	2011
Yüksek Lisans	: Selçuk Üniversitesi, Selçuklu, Konya	2013
Doktora	: Selçuk Üniversitesi, Selçuklu, Konya	-

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görevi
2014-2018	Gazi Üniversitesi	Araştırma Görevlisi
2018-2019	Ankara Hacı Bayram Veli Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

UZMANLIK ALANI

YABANCI DİLLER

İngilizce

YAYINLAR

Kirklar, E., Maden, A. D., Yılmaz, F., 2019, Some Results on One Type of Graph Family with Some Special Number Sequences, *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics*, Kabul Edilmiştir. (Doktora tezinden yapılmıştır.)

Kirklar, E., Yılmaz, F., 2019, A General Formula for Determinants and Inverses of r -circulant Matrices with Third Order Recurrences, *Mathematical Sciences and Applications E-Notes*, 7 (1) 1-8.

Kirklar, E., Yılmaz, F., 2017, On Properties of Lower k -Hessenberg Toeplitz Matrices, *Utilitas Mathematica*, 102 (343-348). (Doktora tezinden yapılmıştır.)

Yılmaz, F., Sogabe, T., **Kirklar, E.**, 2017, On the Pfaffians and Determinants of Some Skew-Centrosymmetric Matrices, *Journal of Integer Sequences*, 20 (1-9).

Yılmaz, F., **Kırklar, E.**, 2015, A Note on k -Tridiagonal Matrices with Balancing and Lucas-Balancing Numbers, *ARS Combinatoria*, 120 (283-291). **(Doktora tezinden yapılmıştır.)**

Kırklar, E., Yılmaz, F., 2015, A Note on k -Tridiagonal k -Toeplitz Matrices, *Alabama Journal of Mathematics*, 39. **(Doktora tezinden yapılmıştır.)**

Kırklar, E., Yılmaz, F., 2015, On the Determinants of Some Kinds of Circulant-Type Matrices with Generalized Number Sequences, *Special Matrices*, 3 (235-243).

Sözlü Sunulan ve Özeti Basılan Ulusal ve Uluslararası Tebliğler

Kırklar, E., Maden, A. D., 2018, On One Type of Graph Family with Some Special Number Sequences, International Conference on Mathematical Studies and Applications (ICMSA-2018), October 4-6, Karaman- TURKEY.

Kırklar, E., Yılmaz, F., 2017, On One Type of Ladder graphs and the Pell Numbers, International Conference on Mathematics and Mathematics Education (ICMME-2017), May 11-13, Şanlıurfa-TURKEY.

Kırklar, E., Yılmaz, F., 2016, Some Comments on Skew-Symmetric Matrices: Pfaffian, Determinant and Eigenvalue, 1st International Academic Research Congress (INESCONGRESS-2016), November 3-5, Antalya-TURKEY.

Kırklar, E., Yılmaz, F., 2016, On Adjacency Matrices for One Type of Graph and Their Properties, 1st International Academic Research Congress (INESCONGRESS-2016), November 3-5, Antalya-TURKEY.

Kırklar, E., Yılmaz, F., 2016, On k -Hessenberg Toeplitz Matrices, International Conference on Applied Mathematics and Analysis in Memory of Prof. Gusein Sh. Guseinov (ICAMA-2016), July 11-13, Ankara-TURKEY.

Kırklar, E., Yılmaz, F., 2014, The Balancing and Lucas-Balancing Numbers and k -Tridiagonal Matrices, Karatekin Mathematics Days (KMD-2014), June 11-13, Çankırı-TURKEY.

Kırklar, E., Yılmaz, F., 2014, k -Tridiagonal k -Toeplitz Matrisler ve Bazı Özellikleri, 13. Matematik Sempozyumu (MATDER-2014), Karabük-TÜRKİYE.