KATUGAMPOLA KESİRLİ İNTEGRAL OPERATÖRÜ İÇEREN FARKLI TÜRDEN İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLER

Rabia BORA

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Ana Bilim Dalı

Doç. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

AĞRI-2019

T.C.
AĞRI İBRAHİM ÇEÇEN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KATUGAMPOLA KESİRLİ İNTEGRAL OPERATÖRÜ İÇEREN FARKLI TÜRDEN İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLER

RABİA BORA

YÜKSEK LİSANS TEZ ÖNERİSİ

TEZ DANIŞMANI
DOÇ. DR. AHMET OCAK AKDEMİR

AĞRI
2019

T.C.
AĞRI İBRAHİM ÇEÇEN ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü

TEZ ONAY FORMU

KATUGAMPOLA KESİRLİ İNTEGRAL OPERATÖRÜ İÇEREN FARKLI TÜRDEN İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLER

Doç. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR danışmanlığında, Rabia BORA tarafından hazırlanan bu çalışma, 05/08/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı'nda yüksek lisans tezi olarak **oybirliği** ile kabul edilmiştir.

Başkan : Doç. Dr. Furkan YILDIRIM	İmza :
Üye : Doç. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR	İmza :
Üye : Dr. Öğr. Üyesi Abdullah ÇAĞMAN	İmza :

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu …/…/201.. tarih ve . . . . / . . . . nolu kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. İbrahim HAN
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildiriş, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

T.C.

AĞRI İBRAHİM ÇEÇEN ÜNİVERSİTESİ

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü

TEZ BEYAN FORMU

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE

Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğine göre hazırlamış olduğum "**Katugampola Kesirli İntegral Operatörü İçeren Farklı Türden İntegral Eşitsizlikler** " adlı yüksek lisans tezinin içerdiği yenilik ve sonuçları başka bir yerden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu ve bu tezi Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nden başka bir bilim kuruluna akademik gaye ve ünvan almak amacıyla vermediğimi beyan ederim. Lisansüstü Eğitim-Öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim.

05/08/2019

Rabia BORA

ÖZET

KATUGAMPOLA KESİRLİ İNTEGRAL OPERATÖRÜ İÇEREN FARKLI TÜRDEN İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLER

RABİA BORA

Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Ana Bilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Doç. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

Bu tez dört bölümden oluşmuştur. Giriş bölümü olan birinci bölümde; matematik biliminin önemli ve başlıca konularından olan eşitsizlik kavramının tarihsel gelişiminden, konveks fonksiyonlarının tarihsel gelişiminden ve kesirli türev-kesirli integral tarihsel gelişiminden; yapılan araştırmalar sonucu elde edilen bilgilere dayanılarak bahsedilmiştir.

İkinci bölümde; tezimizde başvurduğumuz bazı fonksiyon tanımlarına, konveks fonksiyon sınıflarına yer verilmiştir. Üçüncü bölümde ise tezimizde yararlandığımız Hermite-Hadamard tipi eşitsizlikler, $m-$konveks fonksiyon, Caputo $k-$kesirli türevler, $k-$kesirli uyumlu integraller, Katugampola kesirli integrali ve $s-$konveks fonksiyon sınıfının olduğu bazı teoremlere yer verilmiştir. Son bölüm olan bulgular bölümünde incelenen çalışmalar ve teoremlerden yola çıkılarak Katugampola kesirli integral operatörü içeren farklı türden eşitsizlikler elde edilmiştir.

2019, 40 sayfa

Anahtar kelimeler: Konveks fonksiyon, $m-$konveks fonksiyon, Hermite-Hadamard tipi eşitsizlikler, Rieman-Liouville kesirli integralleri, Katugampola kesirli integralleri

ABSTRACT

DIFFERENT TYPES OF INTEGRAL INEQUALITIES INCLUDING KATUGAMPOLA FRACTIONAL INTEGRAL OPERATORS

RABİA BORA

Ağrı İbrahim Çeçen University

Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Master Thesis

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

This thesis consists of four chapters. In the first section which is the introduction section; from the historical development of the concept of inequality, the historical development of convex functions, and the historical development of fractional derivative-fractional integral; It is mentioned on the basis of the information obtained as a result of research.

In the second part; in our thesis, some function definitions and convex function classes that we refer to are given. In the third chapter, Hermite-Hadamard type inequalities, m −convex function, Caputo k −fractional derivatives, k −fractional conformable integrals, Katugampola fractional integral and s −convex function class are given in our thesis. Based on the studies and theorems in the last chapter, the finding section, different kinds of inequlities were obtained including katugampola fractional operator.

2019, 40 pages

Key Words: Convex function, m −convex function, Hermite-Hadamard type inequalities, Riemann-Liouville fractional integrals, Katugampola fractional integrals

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans maceramın başladığı ilk andan son ana kadar bana yardımlarını esirgemeyen danışmanım;

Sayın Doç. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR'e,

Varlık sebebim olan, yaşama enerjimi borçlu olduğum her zaman yanımda olan, destekçim olan, beni ben yapan biricik ailem her şeyim;

BORA Ailesine,

Hayatıma girdiği andan itibaren her zaman yanımda olan, bana benden daha çok güvenen, beni benden daha çok destekleyen; hayat arkadaşım can yoldaşım…

Ramazan YILDIRIM'a

Atfediyorum.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$<$	Küçüktür
$>$	Büyüktür
$\leq$	Küçük veya eşittir
$\geq$	Büyük veya eşittir
$\in$	Elemanıdır
$\notin$	Elemanı değildir
$\subset$	Alt küme
$\subseteq$	Alt küme veya eşit
$=$	Eşittir
∞	Sonsuz
$\vee$	Veya
$\wedge$	Ve
ρ	Ro
α	Alfa
$L[a,b]$	[a,b] aralığında integrallenebilir fonksiyon kümesi
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar
I	$\mathbb{R}$'de bir aralık
f'	f Fonksiyonunun birinci mertebeden türevi
${}_2F_1(a,b;c,z)$	Hipergeometrik fonksiyon
$\beta(a,b)$	Beta fonksiyonu
$\Gamma(\alpha)$	Gamma fonksiyonu
$J_{b^-}^{\alpha}f(x)$	Sağ Riemann-Liouville Kesirli integral
$J_{a^+}^{\alpha}f(x)$	Sol Riemann-Liouville Kesirli integral
${}^{\rho}I_{b^-}^{\alpha}f(x)$	Sağ katugampola kesirli integral
${}^{\rho}I_{a^+}^{\alpha}f(x)$	Sol katugampola kesirli integral
$X_c^p(a,b)$	[a,b] aralığında komleks değerli Lebesque anlamında ölçülebilir fonksiyonların kümesi
$H_{b^-}^{\alpha}$	Sağ Hadamard Kesirli İntegrali
$H_{a^+}^{\alpha}$	Sol Hadamard Kesirli İntegrali

K_s^1	Birinci Anlamda s-konveks Fonksiyon
K_s^2	İkinci Anlamda s-konveks Fonksiyon
$\mathrm{K_m(b)}$	m-konveks Fonksiyonlar Sınıfı
AC^n	n. mertebeden türevlenebilir fonksiyonlar sınıfı

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Birçok hesaplamaların temeli yaklaşımlara dayanır. Bir yaklaşımın kaynağı da eşitsizlik kavramına dayanır. Eşitsizlik kavramı, etkin bir araştırma alanına sahiptir. Bu yüzden birçok araştırmacının ilgi odağı haline gelen bir araştırma alanı olmuştur. Özellikle eşitsizlikler teorisinin temeli 18. Yüzyılından itibaren günümüze varan aktif bir süreç olmuştur. 19.yy'da matematik alanında daha da etkin hale gelip önemli bir konu olmuştur. Bu alanda ilk çalışmayı 1952 yılında Hardy et al. Tarafından kaleme alınan Inequalities (eşitsizlik) adlı kitap çalışmasıdır. Bunun dışında D.S. Mitronovic, J.E. Pecaric, A.M. Fink, Niculescu ve S.S. Dragomir adlı bilim insanları bu alanda eserler kazandırmış ve bunun yanı sıra birçok farklı bilim insanı bu alana katkı sağlamıştır. Ayrıca günümüzde de yeni eserler ortaya konulmaktadır (Beckenbach 1948).

19. ve 20. yy'da ortaya çıkan eşitsizliklerin bir bölümü konveks fonksiyon konusuyla ilişkilendirilmiş bununla birlikte konvekslik ile ilişkili temel eşitsizlikler ortaya konulmuştur. Bunların en önemlisi 1881 yılında Hermite tarafından ortaya konulan Hermite-Hadamard eşitsizliğidir. Eşitsizlik literatüründe önemli bir yer edinen Hadamard eşitsizliği ilk olarak Mathesis dergisine Hermite'nin gönderdiği bir mektupla ortaya çıkmasına rağmen uzun yıllar bu durum anlaşılamamıştır. Daha sonraki yıllarda geçen süreçte bu durum literatüre Hadamard eşitsizliği ya da sıkça söylenen Hermite-Hedamard eşitsizliği olarak geçmiştir (Azpeitia 1994).

Eşitsizlik teorisinin gelişim sürecinde etkin rol alan konveks fonksiyon kavramı gelişimi M.Ö. 250 yılında Archimedes'in pi hesaplanmasına dayanmaktadır. Konveks fonksiyonları kavramı olarak ortaya konulması 19. yüzyılın sonu olarak belirtilmektedir. Konvekslik kavramı ilk kez Hermite tarafından Mathesis adlı dergide ortaya konuldu. Konveks çalışmalarla ilgili ilk sistematik çalışmayı ise 1905-1906 yılları arasında yapılan ve J.L.W.V. Jansenin ortaya koyduğu çalışmalar belirtilmektedir. Bu bilgilerden de anlaşılacağı gibi konveks fonksiyonların teorisi oldukça eskidir. Konveks fonksiyon teorisi başlangıcından günümüze değin matematiğin bütün alanlarında etkin rol oynamıştır. Son zamanlarda da konveks fonksiyonların farklı sınıfları üzerine çalışmalar yapılmaya başlanmıştır. Böylelikle konveks fonksiyon sınıfları ile ilgili yeni tanım ve özellikleri literatürde yerini almıştır. Bunlardan bazıları olan; s-konveks fonksiyon, quasi-konveks fonksiyon, h-konveks fonksiyon, m-konveks fonksiyon v.s. gibi fonksiyon sınıflarına tezimizde de yer verilmiştir. Bu fonksiyon sınıflarından s-konveks (Dragomir 1999), h-konveks (Varosanec 2007), ve quasi-konveks (Dragomir 1998) fonksiyonlar için detaylı bilgiler bulunabilir.

Tezimizde yer verdiğimiz bir başka konu da kesirli türev ve kesirli integral konularını içeren kesirli analiz konusudur. Kesirli analizin temeli diferansiyellenme teorisi ile ortaya çıkmıştır. Kesirli analizin temeli 1965 yıllında L'Hospital ve Leibniz Arasındaki mektuplaşma ile atılmıştır. L'Hospital, 30 Eylül 1965 yılında yazdığı mektupta Leibniz'e; n. Dereceden türev için kullandığı $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$ notasyonunda $n = \frac{1}{2}$ için sonucun ne olacağını sormuştur. Leibniz de " Bir gün faydalı sonuçlar çıkacak olan açık bir paradokstur." Diye cevaplamıştır. Bu cevap üzerine kesirli analiz kavramı ortaya kesirli analizin ortaya çıkışından bu yana geçen 300 boyunca çalışmalar devam etmiştir ve çalışmaların en az yarısının doğruluğu da kanıtlanıp pek çok uygulama verilmiştir. Kesirli analizin temeli atıldıktan sonra kesirli türev ve kesirli integral ilgilenen bilim adamları olmuştur. Fourier, Abel, Euler, Laplace Lacroix, J. Hadamard, Riemann, Liouville, H.Weyl Grünwald, Letnikov gibi bilim adamları bu alanla ilgilenen kişilerdir. Kesirli analizin hızlı bir gelişme göstermesi ise 1974 yılında düzenlenen konferans ile olmuştur. Bu konu üzerine yapılan konferanslar ise sonraki zamanlarda devam etmiştir. Netice olarak bazı bilim adamları kesirli analiz üzerine kitaplar yazmış, bazı bilim adamları ise bölüm olarak kesirli analizden bahsetmiştir. Bunların yanı sıra kesirli analiz üzerine yayın yapan bilimsel dergiler de bulunmaktadır.

Konveks fonksiyonlar sayesinde hızlı bir gelişme kaydeden ve geniş bir araştırma kitlesine sahip olan eşitsizlik teorisine; kesirli türev ve kesirli integral de büyük bir katkı sağlamıştır. Bu konuda Sarıkaya ve arkadaşları tarafından 2011-2013 yıllarında yayınlanan "Hermite-Hadamard's inequalities for fractional and related fractional inequalities" konulu çalışma pek çok araştırmacının kesirli integrallerden yararlanarak yeni eşitsizlikler elde etmesine katkı sağlamıştır, denilebilir. Yine kesirli integrallerin Riemann-Liouville, Weyl, Katugampola, Hadamard gibi bilinen birçok formu da vardır. Bu çalışmalardan yararlanılıp yeni eşitsizlikler elde edilebilir. Bu tezin amacı ise Katugampola kesirli integral operatöründen yararlanıp yeni eşitsizlikler elde etmektir.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1 Temel Kavramlar

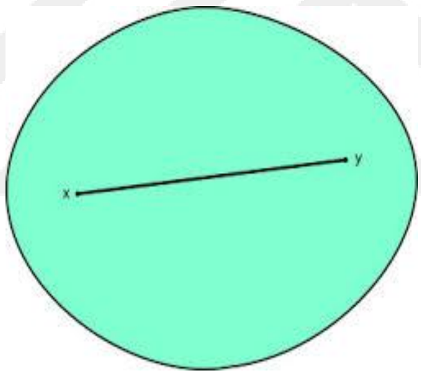
Bu bölümde tezde kullanılacak bazı tanımlara ve bazı temel kavramlara yer verilmiştir.

Tanım 2.1.1 (Konveks küme): X bir vektör uzayı, A⊆X ve $x, y \in A$ kümesinin keyfi elemanları olmak üzere

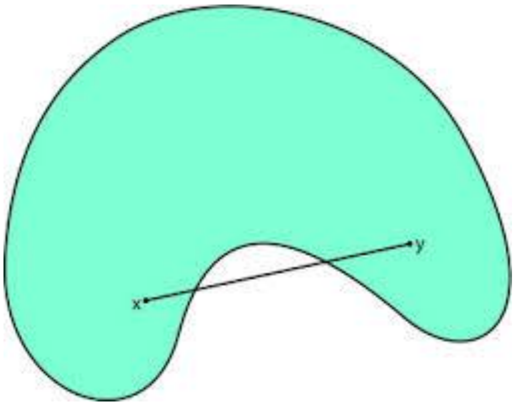
$$M = \{z \in X : z = \alpha x + (1-\alpha)y, \quad 0 \leq \alpha \leq 1\} \subseteq A$$

şeklinde gösterildiğinde A kümesine konveks küme denir.

M ye x ve y sınır noktalarına sahip kapalı bir bölge adı verilir; Herhangi bir $z \in M$ ise M'nin iç noktası olarak adlandırılır (Kreyszing 1989).



Şekil 2.1: Konveks Küme

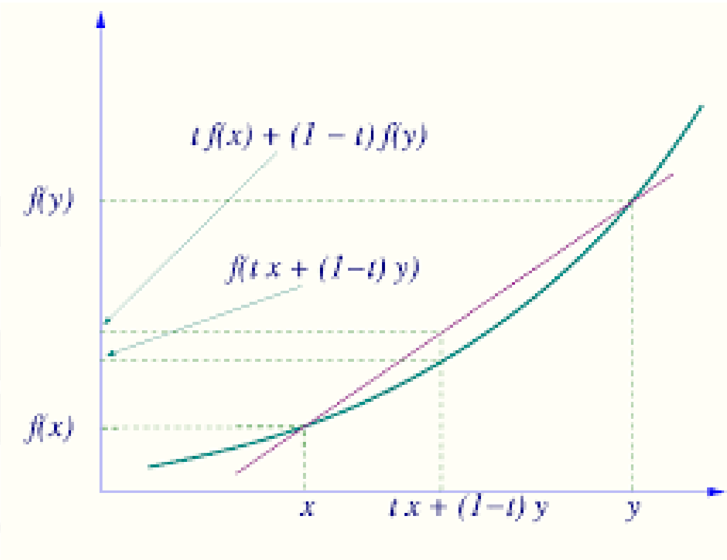


Şekil 2.2: Konveks Olmayan Küme

Tanım 2.1.2 (Konveks fonksiyon): I,ℝ’de bir aralık , $f: I \rightarrow \mathbb{R}$’ye bir fonksiyon olmak üzere, her $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir (Sirivastava 2009).



Şekil 2.3: Konveks Fonksiyon

Tanım 2.1.3 (J-konveks fonksiyon): I, ℝ'de bir aralık olmak üzere $\forall x, y \in I$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

oluyorsa f fonksiyonuna J-konveks fonksiyon denir (Mitrinovic 1970).

Tanım 2.1.4 (Birinci anlamda s −konveks fonksiyon): $s \in (0,1]$ ve $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. $\alpha^s + \beta^s = 1$ olmak üzere her $x, y \in [0, \infty)$, ve $\alpha, \beta \geq 0$ için

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha^s f(x) + \beta^s f(y)$$

oluyorsa f fonksiyonuna birinci anlamda s −konveks fonksiyon denir.

Birinci anlamda s −konveks fonksiyon sınıfı K_s^1 şeklinde gösterilebilir (Orlicz 1961).

İkinci anlamda s −konveks fonksiyon: $s \in (0,1]$ ve $f: [0,\infty) \to [0,\infty)$ olsun. Eğer her $x, y \in [0,\infty)$ ve her $\lambda \in (0,1]$ için

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda^s f(x) + (1-\lambda)^s f(y)$$

oluyorsa *f* fonksiyonuna ikinci anlamda s −konveks fonksiyon denir veya *f*'nin K_s^2 sınıfına ait olduğu söylenir (Breckner 1978).

$s = 1$ için s −konveksliği, $[0,1)$ -de tanımlanan fonksiyonların bilinen konveksliğe dönüştüğü kolayca görülebilir (Set 2016).

Tanım 2.1.5 (Quasi konveks fonksiyon): $S \subset R$ boştan farklı konveks bir küme ve $f: S \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in S$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq max\{f(x), f(y)\}$$

oluyorsa *f*'ye Quasi konveks fonksiyon denir (Dragomir 1998).

Tanım 2.1.6 (h −konveks fonksiyon): $h \not\equiv 0$ ve $h: J \to \mathbb{R}$ negatif değerler dışındaki değerleri alabilen bir fonksiyon olsun. $\forall x, y \in I$ ve $0 < \alpha < 1$ için

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq h(\alpha)f(x) + h(1-\alpha)f(y)$$

oluyorsa negatif değerler almayan $f: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna h −konveks fonksiyon veya $SX(h, I)$ sınıfına aittir, denir. Buradaki I, J $\mathbb{R}'$de iki aralıktır (Varošanec 2007).

Eğer;

h −konveks fonksiyonu, s −konveks fonksiyonuna dönüştürülmek istenirse $s \in (0,1)$ için $h(\alpha) = \alpha^s$ seçilebilir (Varošanec 2007).

Tanım 2.1.7 (m −konveks fonksiyon): $f: [0, b] \to \mathbb{R}$ ve $b > 0$ olsun. Her $t, m \in [0,1]$ ve $x, y \in [0, b]$ için

$$f(tx + m(1-t)y) \leq tf(x) + m(1-\alpha)f(y)$$

oluyorsa *f* fonksiyonuna m-konveks fonksiyon denir. Bu konveks fonksiyonlar sınıfı $K_m(b)$ ile gösterilir. m-konveks fonksiyon sınıfında $m = 1$ alındığında fonksiyon bilinen konveks fonksiyon sınıfına dönüşür (Toader 1988).

Tanım 2.1.8 (Birinci anlamda (s, m) −konveks fonksiyon): Bazı sabit $s \in (0,1]$ ve $m \in [0,1]$ için $f: I \subset [0,\infty) \to R$'nin $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$için

$$f(tx + m(1-t)y) \le t^s f(x) + m(1-t^s) f(y)$$

oluyorsa birinci anlamda (s, m) −konveks olur.

$[a, b]$'de birinci anlamda (s, m) −konveks kümelerini $\mathrm{K}^1_{\mathrm{s,m}}([a, b])$ ile gösterebiliriz (Park 2011).

Tanım 2.1.9 (İkinci anlamda (s, m) −konveks fonksiyon): Bazı sabit $s \in (0,1]$ ve $m \in [0,1]$ için $f: I \subset [0, \infty) \to R$'nin $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$için

$$f(tx + m(1-t)y) \le t^s f(x) + m(1-t)^s f(y)$$

oluyorsa ikinci anlamda (s, m) −konveks olur.

$[a, b]$'de ikinci anlamda (s, m) −konveks kümeleri $\mathrm{K}^2_{\mathrm{s,m}}([a, b])$ ile gösterebilir (Park 2011).

2.2 Kesirli Türev-Kesirli İntegral Operatörler

Tanım 2.2.1 (Gamma fonksiyonu):

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1}\, e^x dx$$

şeklinde gösterilir (Kannapan 2009).

Tanım 2.2.2 (Beta fonksiyonu):

$$\beta(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1} dt, \qquad (a, b > 0)$$

şeklinde gösterilir (Rainville 1960).

Beta ve Gamma fonksiyonu arasında aşağıda gösterilen eşitlikten bahsedilebilir:

$$\beta(u, v) = \int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1}\, dt = \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}$$

2.2.3 Tanım (Hipergeometrik Fonksiyon):

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{1}{\beta(b, c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}\,(1-zt)^{-a} dt, \quad c > b > 0,$$

$$z < 1$$

şeklindeki fonksiyona Hipergeometrik fonksiyon denir (Kilbas et al. 2006).

2.2.4 Tanım (Caputo Kesirli Türev): $\alpha > 0 \wedge \alpha \notin \{1,2,3,\ldots\}, n = [\alpha] + 1, f \in AC^n[a,b], n^{th}$ türevlerine ait fonksiyonların alanı sürekli olsun. Sol ve sağ Caputo kesirli α dizisinin türevleri sırasıyla;

$$\left({}^{C}D_{a^+}^{\alpha} f\right)(x) \frac{1}{\Gamma(\mathrm{n}-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt \qquad (x > a)$$

ve

$$\left({}^{C}D_{b^-}^{\alpha} f\right)(x) \frac{(-1)^n}{\Gamma(\mathrm{n}-\alpha)} \int_x^b \frac{f^{(n)}(t)}{(t-x)^{\alpha-n+1}} dt \qquad (x < b)$$

şeklinde tanımlanır (Kilbas et al. 2006).

2.2.5 Tanım (Riemann-Liouville Kesirli İntegrali): $f \in L[a;b]$ olsun. Riemann-Liouville integtalleri $J_{a^+}^{\alpha} f$ sol taraflı Riemann-Liouville kesirli integral ve $J_{b^-}^{\alpha} f$ sağ taraflı Riemann-Liouville kesirli integrali sırasıyla $\alpha \geq 0$ ve $\alpha > 0$ olmak üzere;

$$\left(J_{a^+}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \qquad (x > a)$$

ve

$$\left(J_{b^-}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t) dt \qquad (x < b)$$

şeklinde tanımlanır (Kilbas et al. 2011)

Burada $\Gamma(\alpha) \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha-1}\, dx$ Gama fonksiyonudur.

Tanım 2.2.6 (Katugampola Kesirli integrali): $[a,b] \subset \mathbb{R}$ sonlu aralık için $f \in [a,b]$ olsun. $Re(\alpha) > 0$, $f \epsilon X_p^c(a,b)$ için sol ve sağ Katugampola integrali;

$${}^{\rho}I_{a^+}^{\alpha} f(x) = \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{t^{\rho-1}}{(x^\rho - t^\rho)^{1-\alpha}} f(t) dt$$

ve

$${}^{\rho}I_{b^-}^{\alpha} f(x) = \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{t^{\rho-1}}{(t^\rho - x^\rho)^{1-\alpha}} f(t) dt$$

şeklinde tanımlanır. Burada $a < x < b$ ve ρ >0 ‘dır (Katugampola 2014).

Teorem 2.2.1: . $\rho, \alpha > 0$ ve $x > a$ için;

1. $lim_{\rho\to 1}\, {}^{\rho}I^{\alpha}_{a^+}f(x) = J^{\alpha}_{a^+}f(x)$
2. $lim_{\rho\to 0^+}\, {}^{\rho}I^{\alpha}_{a^+}f(x) = H^{\alpha}_{a^+}f(x)$

Benzer sonuçlar sağ Katugampola operatörleri içinde geçerlidir (Katugampola 2014).

$\rho = 1$ seçilirse Katugampola kesirli integrali Riemann-Liouville kesirli integraline dönüşür.

3.MATERYAL VE YÖNTEM

3.1 Literatürde Yer Alan Bazı Eşitsizlikler

Teorem 3.1.1 Hermite-Hadamard Eşitsizliği: $f: I \to \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun. I,$\mathbb{R}$'de bir aralık, $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(a)}{2}$$

eşitsizliği Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak bilinen bir eşitsizliktir (Pečarić et al. 1992).

Tanım 3.1.1 (Harmonik konveks fonksiyon): $I \subset \mathbb{R}/\{0\}$ reel bir aralık olsun. Her $x, y \in I \; ve \; t \in [0,1]$ için

$$f\left(\frac{xy}{tx+(1-t)y}\right) \leq tf(y) + (1-t)f(x)$$

oluyorsa $f: I \to \mathbb{R}$'ye harmonik konveks fonksiyon denir (I. Iscan,2014).

Teorem 3.1.2 $I \subset \mathbb{R}/\{0\} \to \mathbb{R}$ Harmonik konveks bir fonksiyon ve $a, b \in I \; ile \; a < b$ olsun. $f \in L[a, b]$ ise aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \leq \frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f(x)}{x^2}dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Bu eşitsizlik Hermite-Hadamard tipli eşitsizliğin bir sonucudur (Iscan 2014).

Teorem 3.1.3 İntegraller İçin Hölder Eşitsiziği: p, q iki pozitif reel sayı olmak üzere $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1, p > 1$ olsun. $[a, b]$ aralığında tanımlı olan ve integrallenebilen iki fonksiyon; f ve g fonksiyonları olsun. Yine $[a, b]$ aralığında $|f|^p$ ve $|g|^q$ fonksiyonları diferansiyellenebilir iki fonksiyon olmak üzere;

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliğine Hölder Eşitsizliği denir (Mitrinovic et al. 1993).

3.2 s-Konveks Fonksiyonlar İçin Hermite-Hadamard Tipli Bazı Teorem ve Lemmalar

Bu bölümde Katugampola kesirli integralleri için s-konveks fonksiyonları kullanarak Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikleri içeren eşitsizliklere yer verilmiştir.

Teorem 3.2.1: $f:[a^\rho,b^\rho]\to\mathbb{R}$'ye $0\le a<b$, ve $f\in X_c^p(c)$ bir fonksiyon olsun. Eğer f aynı zamanda $[a,b]$ aralığında bir $s-$konveks fonksiyon ise aşağıdaki eşitsizlikler geçerli olur:

$$\frac{2^s}{\rho}f\left(\frac{a^\rho+b^\rho}{2}\right)\le\frac{2^\alpha\rho^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b^\rho-a^\rho)^{\alpha}}\left[{}^\rho I^\alpha_{\left(\frac{a^\rho+b^\rho}{2}\right)^+}f(b^\rho)+{}^\rho I^\alpha_{\left(\frac{a^\rho+b^\rho}{2}\right)^-}f(a^\rho)\right]$$

$$\le 2^{-s}[f(a^\rho)+f(b^\rho)]\left[\frac{1}{\rho(\alpha+s)}+\frac{2^{(\alpha+s)}B_{\frac{1}{2}}(\alpha,s+1)}{\rho}\right];$$

$$\left[\left(Re\left(2^{\frac{1}{\rho}}\ge 1\right)\vee Re\left(2^{\frac{1}{\rho}}\le 0\right)\vee 2^{\frac{1}{\rho}}\notin\mathbb{R}\right)\wedge Re(\rho)>0\wedge Re(\alpha\rho)>0\right].$$

burada $B_{\frac{1}{2}}(\alpha,s+1)=\int_0^{\frac{1}{2}}u^{\alpha-1}(1-u)^s du$ şeklindedir.

Kesirli integraller $f(x^\rho)$ fonksiyonu için dikkate alınır ve sırasıyla a ve b'de değerlendirilir (Akdemir and Yaldız 2018).

Lemma 3.2.1 $f:[a^\rho,b^\rho]\to\mathbb{R}$ (a^ρ,b^ρ) üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon olsun. $0\le a<b$ için aşağıdaki eşitlik geçerli olur (Akdemir and Yaldız 2018).

$$\frac{2^{\alpha-1}\rho^\alpha\Gamma(\alpha+1)}{(b^\rho-a^\rho)^{\alpha}}\left[{}^\rho I^\alpha_{\left(\frac{a^\rho+b^\rho}{2}\right)^+}f(b^\rho)+{}^\rho I^\alpha_{\left(\frac{a^\rho+b^\rho}{2}\right)^-}f(a^\rho)\right]-f\left(\frac{a^\rho+b^\rho}{2}\right)$$

$$=\frac{(b^\rho-a^\rho)\rho}{4}\left[\int_0^1 t^{\alpha\rho}f'\left(\frac{t^\rho}{2}a^\rho+\frac{2-t^\rho}{2}b^\rho\right)dt\right.$$

$$\left.-\int_0^1 t^{\alpha\rho}f'\left(\frac{2-t^\rho}{2}a^\rho+\frac{t^\rho}{2}b^\rho\right)dt\right].$$

3.3 m −Konveks Fonksiyonlar ve k −Kesirli Uyumlu Integraller İçin Hermite-Hadamard Tipli Bazı Teorem ve Lemmalar

Bu bölümde k −kesirli uyumlu integral operatörü için ve m −konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli teorem ve lemmalara yer verilmiştir.

Teorem 3.3.1: $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ integrallenebilir pozitif bir fonksiyon olsun. $[0,\infty)$ aralığında $0\leq a\leq mb$ ve $\alpha,s>0$ için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir (Rashid et al. 2019).

$$f\left(\frac{a+mb}{2}\right)\leq\frac{k\Gamma_k(s+k)\alpha^{\frac{s}{k}}}{2(mb-a)^{\frac{\alpha s}{k}}}\left[{}_k^s\mathfrak{I}_{a^+}^{\alpha}f(mb)+{}_k^s\mathfrak{I}_{mb^-}^{\alpha}f(a)\right]$$

$$\leq\frac{1}{2}\left[\left[mf(b)+m^2f\left(\frac{a}{m}\right)\right]+\frac{s}{k}\beta\left(\frac{s}{k},\frac{1}{\alpha}+1\right)\left[f(a)-m^2f\left(\frac{a}{m}\right)\right]\right]$$

Lemma 3.3.1 $f:[a,mb]\to\mathbb{R}, a<mb$ olmak üzere diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $f'\in[a,mb]$ ise $\alpha,s>0$ için k −kesirli uyumlu integral operatörü için aşağıdaki eşitlik geçerlidir (Rashid et al. 2019).

$$f\left(\frac{a+mb}{2}\right)-\frac{k\Gamma_k(s+k)\alpha^{\frac{s}{k}}}{(mb-a)^{\frac{\alpha s}{k}}}\left[{}_k^s\mathfrak{I}_{a^+}^{\alpha}f(mb)+{}_k^s\mathfrak{I}_{mb^-}^{\alpha}f(a)\right]$$

$$=\frac{(mb-a)\alpha^{\frac{s}{k}}}{2}\int_0^1\left[\left(\frac{1-t^\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{s}{k}}-\left(\frac{1-(1-t)^\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{s}{k}}\right]f'(ta$$

$$+m(1-t)b)dt.$$

Teorem 3.3.2: $f:[a,mb]\to\mathbb{R}, a<mb$ olmak üzere diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $|f'|$, $[a,mb]$'de m −konveks fonksiyon ve $\alpha,s>0$ için k −kesirli uyumlu integral operatörü için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir (Rashid et al. 2019).

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{k\Gamma_k(s+k)\alpha^{\frac{s}{k}}}{(mb-a)^{\frac{\alpha s}{k}}}\left[{}_k^s\mathfrak{I}_{a^+}^{\alpha}f(mb)+{}_k^s\mathfrak{I}_{mb^-}^{\alpha}f(a)\right]\right|$$

$$\leq\frac{(mb-a)}{2\alpha}\left[2\beta_{\frac{1}{2^\alpha}}\left(\frac{1}{\alpha},\frac{s}{k}+1\right)-\beta\left(\frac{1}{\alpha},\frac{s}{k}+1\right)\right](|f'(a)|$$

$$+m|f'(b)|).$$

3.4 Caputo k −Kesirli Türevler İçin Hermite-Hadamard Tipli Bazı Teorem ve Lemmalar

Bu bölümde Caputo k −kesirli türevi tanımlanıp Caputo k −kesirli türevler içeren Hermite-Hadamard tipli teorem ve lemmalara yer verilmiştir.

Tanım 3.4.1 $\alpha > 0, k \geq 1, \alpha \notin \{1,2,3,\dots\}, n = [\alpha] + 1, f \in AC^n[a,b]$ olsun. Sağ ve sol Caputo k −kesirli türevi α dizisinin türevleri sırasıyla;

$$\left({}^{C}D_{a^+}^{\alpha,k} f\right)(x) = \frac{1}{k\Gamma_k\left(n - \frac{\alpha}{k}\right)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)}{(x-t)^{\frac{\alpha}{k}-n+1}} dt \quad (x > a)$$

ve

$$\left({}^{C}D_{b^-}^{\alpha,k} f\right)(x) = \frac{(-1)^n}{k\Gamma_k\left(n - \frac{\alpha}{k}\right)} \int_x^b \frac{f^{(n)}(t)}{(t-x)^{\frac{\alpha}{k}-n+1}} dt \quad (x < b)$$

şeklinde tanımlanır.

Burada $\Gamma_k(\alpha)$ $k - Gamma$ fonksiyonu olarak tanımlanır: $\Gamma_k(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{\frac{-t^k}{k}} dt,$

Ayrıca, $\Gamma_k(\alpha) = \alpha\Gamma_k(\alpha)$.

$\alpha = n \in \{1,2,3,\dots\}$ ve n'nin $f^{(n)}(x)$ türevi varsa, Caputo k −kesirli türevi $\left({}^{C}D_{a^+}^{n,1} f\right)(x)$ $f^{(n)}(x)$ ile çakışırken $\left({}^{C}D_{b^-}^{n,1} f\right)(x)$ sabit çarpan $(-1)^n$ olmak üzere $f^{(n)}(x)$ ile çakışır.

Özellikle $n, k = 1$ ve $\alpha = 0$ ve $k = 1$ için Caputo k −kesirli türevleri, Caputo kesirli türevlerinin tanımını verir.

$$\left({}^{C}D_{a^+}^{0,1} f\right)(x) = \left({}^{C}D_{b^-}^{n,1} f\right)(x) = f(x)$$

Teorem 3.4.1: $f: [a,b] \to \mathbb{R}, a < b, f \in AC^n[a,b]$ bir fonksiyon olsun. $f^{(n)}, [a,b]$ aralığında konveks ise k −kesirli türevi için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir (Farid and Javed 2018).

$$f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{k\Gamma_k\left(n - \frac{\alpha}{k} + k\right)}{2(b-a)^{n-\frac{\alpha}{k}}} \left[\left({}^{C}D_{a^+}^{\alpha,k} f\right)(b) + (-1)\left({}^{C}D_{b^-}^{\alpha,k} f\right)(a)\right]$$

$$\leq \frac{f^{(n)}(a)+f^{(n)}(b)}{2}.$$

Lemma 3.4.1 $f:[a,b]\to\mathbb{R}, a<b, f\in AC^{n+1}[a,b]$ bir fonksiyon olsun. $f^{(n+1)}$, $[a,b]$ aralığında konveks ise k −kesirli türevi için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir (Farid and Javed 2018).

$$\frac{f^{(n)}(a)+f^{(n)}(b)}{2}-\frac{k\Gamma_k\left(n-\frac{\alpha}{k}+k\right)}{2(b-a)^{n-\frac{\alpha}{k}}}\left[\left({}^{C}D_{a^+}^{\alpha,k}f\right)(b)+(-1)\left({}^{C}D_{b^-}^{\alpha,k}f\right)(a)\right]$$
$$=\frac{b-a}{2}\int_0^1\left((1-t)^{n-\frac{\alpha}{k}}-t^{n-\frac{\alpha}{k}}\right)f^{(n+1)}(ta+(1-t)b)dt.$$

Teorem 3.4.2 $f:[a,b]\to\mathbb{R}, a<b, f\in AC^{n+1}[a,b]$ bir fonksiyon olsun. $\left|f^{(n+1)}\right|$, $[a,b]$ aralığında konveks ise k −kesirli türevi için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir (Farid and Javed 2018).

$$\left|\frac{f^{(n)}(a)+f^{(n)}(b)}{2}-\frac{k\Gamma_k\left(n-\frac{\alpha}{k}+k\right)}{2(b-a)^{n-\frac{\alpha}{k}}}\left[\left({}^{C}D_{a^+}^{\alpha,k}f\right)(b)+(-1)\left({}^{C}D_{b^-}^{\alpha,k}f\right)(a)\right]\right|$$
$$\leq\frac{b-a}{2(n-\frac{\alpha}{k}+1)}\left(1-\frac{1}{2^{n-\frac{\alpha}{k}}}\right)\left[\left|f^{(n+1)}(a)\right|+\left|f^{(n+1)}(b)\right|\right].$$

4.ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1 Elde Edilen Bazı Eşitsizlikler

Teorem 4.1.1 $f:[a^\rho, b^\rho] \to \mathbb{R}$'ye $0 \leq a < b$ ile (a^ρ, b^ρ)'de türevlenebir bir fonksiyon olsun. Eğer $|f'|$ $[a^\rho, b^\rho]$ üzerinde $h-$konveks ise aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\left|\frac{2^{\alpha-1}\rho^\alpha\Gamma(\alpha+1)}{(b^\rho-a^\rho)^\alpha}\left[{}^\rho I^\alpha_{\left(\frac{a^\rho+b^\rho}{2}\right)^+} f(b^\rho) + {}^\rho I^\alpha_{\left(\frac{a^\rho+b^\rho}{2}\right)^-} f(a^\rho)\right] - f\left(\frac{a^\rho+b^\rho}{2}\right)\right|$$

$$\leq \frac{(b^\rho-a^\rho)\rho}{4}\left[|f'(a^\rho)|+|f'(b^\rho)|\right]\left[\int_0^1 t^{\alpha\rho}\left[h\left(\frac{t^\rho}{2}\right)+h\left(\frac{2-t^\rho}{2}\right)\right]dt\right]$$

İspat. Lemma 3.2.1 deki eşitliğin modülü alınarak ve $|f'|$'nin $h-$konveksliğini kullanarak,

$$\left|\frac{2^{\alpha-1}\rho^\alpha\Gamma(\alpha+1)}{(b^\rho-a^\rho)^\alpha}\left[{}^\rho I^\alpha_{\left(\frac{a^\rho+b^\rho}{2}\right)^+} f(b^\rho) + {}^\rho I^\alpha_{\left(\frac{a^\rho+b^\rho}{2}\right)^-} f(a^\rho)\right] - f\left(\frac{a^\rho+b^\rho}{2}\right)\right|$$

$$\leq \frac{(b^\rho-a^\rho)\rho}{4}\left[\int_0^1 t^{\alpha\rho}\left|f'\left(\frac{t^\rho}{2}a^\rho+\frac{2-t^\rho}{2}b^\rho\right)\right|dt\right.$$

$$\left.+\int_0^1 t^{\alpha\rho}\left|f'\left(\frac{2-t^\rho}{2}a^\rho+\frac{t^\rho}{2}b^\rho\right)\right|dt\right]$$

$$\leq \frac{(b^\rho-a^\rho)\rho}{4}\left[\int_0^1 t^{\alpha\rho}\left[h\left(\frac{t^\rho}{2}\right)|f'(a^\rho)|+h\left(\frac{2-t^\rho}{2}\right)|f'(b^\rho)|\right]dt\right.$$

$$\left.+\int_0^1 t^{\alpha\rho}\left[h\left(\frac{2-t^\rho}{2}\right)|f'(a^\rho)|+h\left(\frac{t^\rho}{2}\right)|f'(b^\rho)|\right]dt\right]$$

$$\leq \frac{(b^\rho-a^\rho)\rho}{4}\left[\int_0^1 t^{\alpha\rho}\left[|f'(a^\rho)|\left[h\left(\frac{t^\rho}{2}\right)+h\left(\frac{2-t^\rho}{2}\right)\right]\right]\right.$$

$$\left.+|f'(b^\rho)|\left[h\left(\frac{t^\rho}{2}\right)+h\left(\frac{2-t^\rho}{2}\right)\right]\right]dt\right]$$

$$\leq \frac{(b^\rho - a^\rho)\rho}{4}[|f'(a^\rho)| + |f'(b^\rho)|]\left[\int_0^1 t^{\alpha\rho}\left[h\left(\frac{t^\rho}{2}\right) + h\left(\frac{2-t^\rho}{2}\right)\right]dt\right]$$

yazılır ve ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.1.1 Teorem 4.1.1 deki eşitsizlikte $h(t) = t$ alınırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\left|\frac{2^{\alpha-1}\rho^\alpha\Gamma(\alpha+1)}{(b^\rho - a^\rho)^\alpha}\left[{}^\rho I^\alpha_{\left(\frac{a^\rho+b^\rho}{2}\right)^+}f(b^\rho) + {}^\rho I^\alpha_{\left(\frac{a^\rho+b^\rho}{2}\right)^-}f(a^\rho)\right] - f\left(\frac{a^\rho+b^\rho}{2}\right)\right|$$

$$\leq \frac{(b^\rho - a^\rho)\rho}{4}[|f'(a^\rho)| + |f'(b^\rho)|]\left[\int_0^1 t^{\rho\alpha}\left[\frac{t^\rho}{2} + \frac{2-t^\rho}{2}\right]dt\right]$$

$$\leq \frac{(b^\rho - a^\rho)\rho}{4}[|f'(a^\rho)| + |f'(b^\rho)|]\frac{1}{\rho\alpha+1}$$

sonucu elde edilir.

Sonuç 4.1.2 Teorem 4.1.1 deki eşitsizlikte $h(t) = \frac{1}{t}$ alınırsa

$$\left|\frac{2^{\alpha-1}\rho^\alpha\Gamma(\alpha+1)}{(b^\rho - a^\rho)^\alpha}\left[{}^\rho I^\alpha_{\left(\frac{a^\rho+b^\rho}{2}\right)^+}f(b^\rho) + {}^\rho I^\alpha_{\left(\frac{a^\rho+b^\rho}{2}\right)^-}f(a^\rho)\right] - f\left(\frac{a^\rho+b^\rho}{2}\right)\right|$$

$$\leq \frac{(b^\rho - a^\rho)\rho}{4}[|f'(a^\rho)| + |f'(b^\rho)|]\left[\int_0^1 t^{\alpha\rho}\left[\frac{2}{t^\rho} + \frac{2}{2-t^\rho}\right]dt\right]$$

$$\leq \frac{(b^\rho - a^\rho)\rho}{4}[|f'(a^\rho)| + |f'(b^\rho)|]\left[2\int_0^1 t^{\alpha\rho}.t^{-\rho}d + 2\int_0^1 t^{\alpha\rho}.(2-t^\rho)t\right]$$

$$\leq \frac{2(b^\rho - a^\rho)\rho}{4}[|f'(a^\rho)| + |f'(b^\rho)|]\left[\frac{1}{1-\rho+\rho\alpha}\right.$$

$$\left.+\frac{{}_2F_1[1,\frac{1+\rho\alpha}{\rho},\frac{1+\rho+\rho\alpha}{\rho},\frac{1}{2}]}{2+2\rho\alpha}\right]$$

$$[Re(\rho\alpha) > -1 \wedge Re(\rho+\rho\alpha) > -1 \wedge Re(\rho-\rho\alpha) < 1]$$

elde edilir.

Sonuç 4.1.3 Teorem 4.1.1 deki eşitsizlikte $h(t) = t^s$ alınırsa

$$\left|\frac{2^{\alpha-1}\rho^{\alpha}\Gamma(\alpha+1)}{(b^{\rho}-a^{\rho})^{\alpha}}\left[{}^{\rho}I^{\alpha}_{\left(\frac{a^{\rho}+b^{\rho}}{2}\right)^{+}}f(b^{\rho}) + {}^{\rho}I^{\alpha}_{\left(\frac{a^{\rho}+b^{\rho}}{2}\right)^{-}}f(a^{\rho})\right] - f\left(\frac{a^{\rho}+b^{\rho}}{2}\right)\right|$$

$$\leq \frac{(b^{\rho}-a^{\rho})\rho}{4}\left[|f'(a^{\rho})| + |f'(b^{\rho})|\right]\left[\int_0^1 t^{\alpha\rho}\left[\left(\frac{t^{\rho}}{2}\right)^{s} + \left(\frac{2-t^{\rho}}{2}\right)^{s}\right]dt\right]$$

$$\leq \frac{(b^{\rho}-a^{\rho})\rho}{4}\left[|f'(a^{\rho})| + |f'(b^{\rho})|\right]\left[\int_0^1 t^{\alpha\rho}\left[\frac{t^{\rho s}}{2^s} + \frac{(2-t^{\rho})^{s}}{2^s}\right]dt\right]$$

$$\leq \frac{(b^{\rho}-a^{\rho})\rho}{4}\left[|f'(a^{\rho})| + |f'(b^{\rho})|\right]\left[\int_0^1 \frac{t^{\alpha\rho}t^{\rho s}}{2^s}dt + \int_0^1 \frac{t^{\alpha\rho}(2-t^{\rho})^{s}}{2^s}dt\right]$$

$$\leq \frac{(b^{\rho}-a^{\rho})\rho}{2^{s+2}}\left[|f'(a^{\rho})| + |f'(b^{\rho})|\right]\left[\frac{1}{1+\rho s+\rho\alpha} + \frac{2^s\ {}_2F_1[-s, \frac{1+\rho\alpha}{\rho}, \frac{1+\rho+\rho\alpha}{\rho}, \frac{1}{2}]}{1+\rho\alpha}\right]$$

$$\left[\left(\mathrm{Re}\left(2^{\frac{1}{\rho}}\right) \geq 1 \vee \mathrm{Re}\left(2^{\frac{1}{\rho}}\right) \leq 0 \vee 2^{\frac{1}{\rho}} \notin \mathbb{R}\right) \wedge \mathrm{Re}(\rho) > 0 \wedge \mathrm{Re}(\rho\alpha) > -1 \wedge \mathrm{Re}(\rho s + \rho\alpha) > -1\right]$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.1.2: $f: [a^{\rho}, b^{\rho}] \to \mathbb{R}$'ye $0 \leq a < b$ ile (a^{ρ}, b^{ρ})'de türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $|f'|^{q}, q > 1$ $[a^{\rho}, b^{\rho}]$ üzerinde h −konveks ise aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\left|\frac{2^{\alpha-1}\rho^{\alpha}\Gamma(\alpha+1)}{(b^{\rho}-a^{\rho})^{\alpha}}\left[{}^{\rho}I^{\alpha}_{\left(\frac{a^{\rho}+b^{\rho}}{2}\right)^{+}}f(b^{\rho}) + {}^{\rho}I^{\alpha}_{\left(\frac{a^{\rho}+b^{\rho}}{2}\right)^{-}}f(a^{\rho})\right] - f\left(\frac{a^{\rho}+b^{\rho}}{2}\right)\right|$$

$$\leq \frac{(b^\rho - a^\rho)\rho}{4}\left(\frac{1}{\alpha p\rho + 1}\right)^{\frac{1}{p}} \mathrm{x}\left[\left(|f'(a^\rho)|^q \int_0^1 h\left(\frac{t^\rho}{2}\right) dt\right.\right.$$

$$\left. + |f'(b^\rho)|^q \int_0^1 h\left(\frac{2 - t^\rho}{2}\right) dt\right)^{\frac{1}{\mathrm{q}}}$$

$$\left. + \left(|f'(a^\rho)|^q \int_0^1 h\left(\frac{2 - t^\rho}{2}\right) dt + |f'(b^\rho)|^q \int_0^1 h\left(\frac{t^\rho}{2}\right) dt\right)^{\frac{1}{\mathrm{q}}}\right]$$

İspat. Lemma 3.2.1 deki eşitliğin modülünü alarak ve iyi bilinen Hölder eşitsizliğini kullanarak,

$$\left|\frac{2^{\alpha-1}\rho^\alpha \Gamma(\alpha+1)}{(b^\rho - a^\rho)^\alpha}\left[{}^\rho I^\alpha_{\left(\frac{a^\rho + b^\rho}{2}\right)^+} f(b^\rho) + {}^\rho I^\alpha_{\left(\frac{a^\rho + b^\rho}{2}\right)^-} f(a^\rho)\right] - f\left(\frac{a^\rho + b^\rho}{2}\right)\right|$$

$$\leq \frac{(b^\rho - a^\rho)\rho}{4}\left[\int_0^1 t^{\alpha\rho}\left|f'\left(\frac{t^\rho}{2}a^\rho + \frac{2 - t^\rho}{2}b^\rho\right)\right| dt\right.$$

$$\left. + \int_0^1 t^{\alpha\rho}\left|f'\left(\frac{2 - t^\rho}{2}a^\rho + \frac{t^\rho}{2}b^\rho\right)\right| dt\right]$$

$$\leq \frac{(b^\rho - a^\rho)\rho}{4}\left(\int_0^1 t^{\alpha p\rho} dt\right)^{\frac{1}{p}} \mathrm{x}\left[\left(\int_0^1 \left|f'\left(\frac{t^\rho}{2}a^\rho + \frac{2 - t^\rho}{2}b^\rho\right)\right|^{\mathrm{q}} \mathrm{dt}\right)^{\frac{1}{\mathrm{q}}}\right.$$

$$\left. + \left(\int_0^1 \left|f'\left(\frac{2 - t^\rho}{2}a^\rho + \frac{t^\rho}{2}b^\rho\right)\right|^{\mathrm{q}} \mathrm{dt}\right)^{\frac{1}{\mathrm{q}}}\right]$$

$|f'|^{\,q}, q > 1$, h −konveks olduğundan;

$$\int_0^1 \left|f'\left(\frac{t^\rho}{2}a^\rho + \frac{2-t^\rho}{2}b^\rho\right)\right|^q \mathrm{dt}$$

$$\leq \int_0^1 \left[h\left(\frac{t^\rho}{2}\right)|f'(a^\rho)|^q + h\left(\frac{2-t^\rho}{2}\right)|f'(b^\rho)|^q\right]dt$$

$$= |f'(a^\rho)|^q \int_0^1 h\left(\frac{t^\rho}{2}\right)dt + |f'(b^\rho)|^q \int_0^1 h\left(\frac{2-t^\rho}{2}\right)dt$$

Benzer şekilde;

$$\int_0^1 \left|f'\left(\frac{2-t^\rho}{2}a^\rho + \frac{t^\rho}{2}b^\rho\right)\right|^q \mathrm{dt}$$

$$\leq \int_0^1 \left[h\left(\frac{2-t^\rho}{2}\right)|f'(a^\rho)|^q + h\left(\frac{t^\rho}{2}\right)|f'(b^\rho)|^q\right]dt$$

$$= |f'(a^\rho)|^q \int_0^1 h\left(\frac{2-t^\rho}{2}\right)dt + |f'(b^\rho)|^q \int_0^1 h\left(\frac{t^\rho}{2}\right)dt$$

yazılır.

Bu iki eşitsizlik birlikte değerlendirilirse;

$$\left|\frac{2^{\alpha-1}\rho^\alpha\Gamma(\alpha+1)}{(b^\rho-a^\rho)^\alpha}\left[{}^\rho I^\alpha_{\left(\frac{a^\rho+b^\rho}{2}\right)^+} f(b^\rho) + {}^\rho I^\alpha_{\left(\frac{a^\rho+b^\rho}{2}\right)^-} f(a^\rho)\right] - f\left(\frac{a^\rho+b^\rho}{2}\right)\right|$$

$$\leq \frac{(b^\rho-a^\rho)\rho}{4}\left(\frac{1}{\alpha p\rho+1}\right)^{\frac{1}{p}} \mathrm{x} \left[\left(|f'(a^\rho)|^q \int_0^1 h\left(\frac{t^\rho}{2}\right)dt\right.\right.$$

$$\left. + |f'(b^\rho)|^q \int_0^1 h\left(\frac{2-t^\rho}{2}\right)dt\right)^{\frac{1}{\mathrm{q}}}$$

$$\left. + \left(|f'(a^\rho)|^q \int_0^1 h\left(\frac{2-t^\rho}{2}\right)dt + |f'(b^\rho)|^q \int_0^1 h\left(\frac{t^\rho}{2}\right)dt\right)^{\frac{1}{\mathrm{q}}}\right]$$

olur ve ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.4 Teorem 4.1.2 deki eşitsizlikte $h(t) = t$ alınırsa;

$$\left|\frac{2^{\alpha-1}\rho^{\alpha}\Gamma(\alpha+1)}{(b^{\rho}-a^{\rho})^{\alpha}}\left[{}^{\rho}I^{\alpha}_{\left(\frac{a^{\rho}+b^{\rho}}{2}\right)^{+}}f(b^{\rho}) + {}^{\rho}I^{\alpha}_{\left(\frac{a^{\rho}+b^{\rho}}{2}\right)^{-}}f(a^{\rho})\right] - f\left(\frac{a^{\rho}+b^{\rho}}{2}\right)\right|$$

$$\leq \frac{(b^{\rho}-a^{\rho})\rho}{4}\left(\frac{1}{\alpha p\rho+1}\right)^{\frac{1}{p}} \mathrm{x}\left[\left(|f'(a^{\rho})|^{q}\int_{0}^{1}\frac{t^{\rho}}{2}dt + |f'(b^{\rho})|^{q}\int_{0}^{1}\frac{2-t^{\rho}}{2}dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left(|f'(a^{\rho})|^{q}\int_{0}^{1}\frac{2-t^{\rho}}{2}dt + |f'(b^{\rho})|^{q}\int_{0}^{1}\frac{t^{\rho}}{2}dt\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

$$\leq \frac{(b^{\rho}-a^{\rho})\rho}{4}\left(\frac{1}{\alpha p\rho+1}\right)^{\frac{1}{p}} \mathrm{x}\left[\left(\frac{|f'(a^{\rho})|^{q}}{2(1+\rho)} + |f'(b^{\rho})|^{q}\left[1-\frac{1}{2(1+\rho)}\right]\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left(\left[|f'(a)|^{q}\left[1-\frac{1}{2(1+p)}\right] + \frac{|f'(b^{\rho})|^{q}}{2(1+\rho)}\right]\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

Sonuç 4.1.5 Teorem 4.1.2 deki eşitsizlikte $h(t) = \frac{1}{t}$ alınırsa;

$$\left|\frac{2^{\alpha-1}\rho^{\alpha}\Gamma(\alpha+1)}{(b^{\rho}-a^{\rho})^{\alpha}}\left[{}^{\rho}I^{\alpha}_{\left(\frac{a^{\rho}+b^{\rho}}{2}\right)^{+}}f(b^{\rho}) + {}^{\rho}I^{\alpha}_{\left(\frac{a^{\rho}+b^{\rho}}{2}\right)^{-}}f(a^{\rho})\right] - f\left(\frac{a^{\rho}+b^{\rho}}{2}\right)\right|$$

$$\leq \frac{(b^{\rho}-a^{\rho})\rho}{4}\left(\frac{1}{\alpha p\rho+1}\right)^{\frac{1}{p}} \mathrm{x}\left[\left(|f'(a^{\rho})|^{q}\int_{0}^{1}\frac{2}{t^{\rho}}dt + |f'(b^{\rho})|^{q}\int_{0}^{1}\frac{2}{2-t^{\rho}}dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left(|f'(a^{\rho})|^{q}\int_{0}^{1}\frac{2}{2-t^{\rho}}dt + |f'(b^{\rho})|^{q}\int_{0}^{1}\frac{2}{t^{\rho}}dt\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

$$\leq \frac{(b^{\rho}-a^{\rho})\rho}{4}\left(\frac{1}{\alpha p\rho+1}\right)^{\frac{1}{p}} \mathrm{x}\left[2|f'(a^{\rho})|^{q}\left(\frac{1}{1-\rho}\right)\right.$$

$$\left.+ 2|f'(b^{\rho})|^{q}\left({}_{2}F_{1}\left[1,\frac{1}{\rho},1+\frac{1}{\rho},\frac{1}{2}\right]\right)\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left[2|f'(a)|^q\left({}_2F_1\left[1,\frac{1}{\rho},1+\frac{1}{\rho},\frac{1}{2}\right]\right)+2|f'(b^\rho)|^q\left(\frac{1}{1-\rho}\right)\right]^{\frac{1}{q}}$$

Sonuç 4.1.6 Teorem 4.1.2 deki eşitsizlikte $h(t) = t^s$ alınırsa;

$$\left|\frac{2^{\alpha-1}\rho^\alpha\Gamma(\alpha+1)}{(b^\rho-a^\rho)^\alpha}\left[{}^\rho I^\alpha_{\left(\frac{a^\rho+b^\rho}{2}\right)^+}f(b^\rho)+{}^\rho I^\alpha_{\left(\frac{a^\rho+b^\rho}{2}\right)^-}f(a^\rho)\right]-f\left(\frac{a^\rho+b^\rho}{2}\right)\right|$$

$$\leq\frac{(b^\rho-a^\rho)\rho}{4}\left(\frac{1}{\alpha p\rho+1}\right)^{\frac{1}{p}}\text{x}\left[\left(|f'(a^\rho)|^q\int_0^1\left(\frac{t^\rho}{2}\right)^s dt\right.\right.$$

$$\left.+|f'(b^\rho)|^q\int_0^1\left(\frac{2-t^\rho}{2}\right)^s dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\left.+\left(|f'(a^\rho)|^q\int_0^1\left(\frac{2-t^\rho}{2}\right)^s dt+|f'(b^\rho)|^q\int_0^1\left(\frac{t^\rho}{2}\right)^s dt\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

$$\leq\frac{(b^\rho-a^\rho)\rho}{4}\left(\frac{1}{\alpha p\rho+1}\right)^{\frac{1}{p}}\text{x}\left[\left(\frac{|f'(a^\rho)|^q}{2^s(\rho s+1)}\right.\right.$$

$$\left.+|f'(b^\rho)|^q\left({}_2F_1\left[-s,\frac{1}{\rho},1+\frac{1}{\rho},\frac{1}{2}\right]\right)\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\left.+\left(|f'(a^\rho)|^q\left({}_2F_1\left[-s,\frac{1}{\rho},1+\frac{1}{\rho},\frac{1}{2}\right]\right)+\frac{|f'(b^\rho)|^q}{2^s(\rho s+1)}\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

Teorem 4.1.3: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$'ye bir fonksiyon olsun $f\in AC^n, a<b.$ Eğer $f^{(n)}$, $[a,b]$ aralığında s-konveks fonksiyon ise aşağıdaki eşitsizlik gösterilebilir:

$$2^s f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\frac{{}_k\Gamma_k\left(n-\frac{\alpha}{k}+k\right)}{(b-a)^{n-\frac{\alpha}{k}}}\left[\left({}^CD^{\alpha,k}_{a^+}f\right)(a)+(-1)^n\left({}^CD^{\alpha,k}_{b^-}f\right)(a)\right]$$

$$\leq\left[f^{(n)}(a)+f^{(n)}(b)\right]\text{x}\left[\frac{1}{\mathrm{s}+\mathrm{n}-\frac{\alpha}{\mathrm{k}}+2}+\beta\left(\mathrm{n}-\frac{\alpha}{\mathrm{k}},\mathrm{s}+1\right)\right]$$

İspat. $f^{(n)}$ s $-$konveks olduğundan, aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir:

$$f^{(n)}\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f^{(n)}(x)+f^{(n)}(y)}{2^s}$$

$x, y \in [a,b]$ ve $t\epsilon[0,1]$ için $x = ta + (1-t)b,\ y = (1-t)a + tb$ alınırsa

$$2^s f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq f^{(n)}(ta+(1-t)b) + f^{(n)}\big((1-t)a+tb\big).$$

Eşitsizliğin her iki tarafı $\mathrm{t}^{\mathrm{n}-\frac{\alpha}{\mathrm{k}}-1}$ ile çarpılıp [0,1] aralığında integral alınırsa;

$$2^s f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_0^1 \mathrm{t}^{\mathrm{n}-\frac{\alpha}{\mathrm{k}}-1}\mathrm{dt}$$

$$\leq \int_0^1 \frac{f^{(n)}(ta+(1-t)b)}{\mathrm{t}^{\frac{\alpha}{\mathrm{k}}-\mathrm{n}+1}}\mathrm{dt} + \int_0^1 \frac{f^{(n)}\big((1-t)+tb\big)}{\mathrm{t}^{\frac{\alpha}{\mathrm{k}}-\mathrm{n}+1}}\mathrm{dt}.$$

Değişkenleri değiştirerek,

$$2^s f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{{}_k\Gamma_k\left(n-\frac{\alpha}{k}+k\right)}{(b-a)^{n-\frac{\alpha}{k}}}\left[\left({}^{C}D_{a^+}^{\alpha,k}f\right)(a) + (-1)^n\left({}^{C}D_{b^-}^{\alpha,k}f\right)(a)\right]$$

elde edilir. Ayrıca $f^{(n)}$ nin s $-$konveksliğinden

$$f^{(n)}(ta+(1-t)b) + f^{(n)}\big((1-t)a+tb\big)$$

$$\leq \left[t^s f^{(n)}(a) + (1-t)^s f^{(n)}(b)\right] + \left[(1-t)^s f^{(n)}(a) + t^s f^{(n)}(b)\right]$$

$$\left[f^{(n)}(a)+f^{(n)}(b)\right]\mathrm{x}[t^s+(1-t)^s]$$

$$f^{(n)}(ta+(1-t)b) + f^{(n)}\big((1-t)a+tb\big)$$

$$\leq \left[f^{(n)}(a)+f^{(n)}(b)\right]\mathrm{x}[t^s+(1-t)^s]$$

yazılır. Eşitsizliğin her iki tarafı $\mathrm{t}^{\mathrm{n}-\frac{\alpha}{\mathrm{k}}-1}$ ile çarpılıp [0,1] aralığında integral alınırsa

$$\int_0^1 \frac{f^{(n)}(ta+(1-t)b)}{\mathrm{t}^{\frac{\alpha}{\mathrm{k}}-\mathrm{n}+1}}\mathrm{dt} + \int_0^1 \frac{f^{(n)}\big((1-t)+tb\big)}{\mathrm{t}^{\frac{\alpha}{\mathrm{k}}-\mathrm{n}+1}}\mathrm{dt}$$

$$\leq \left[f^{(n)}(a)+f^{(n)}(b)\right]\mathrm{x}\left[\int_0^1 \mathrm{t}^{\mathrm{s}+\mathrm{n}-\frac{\alpha}{\mathrm{k}}-1}\,dt + \int_0^1 \mathrm{t}^{\mathrm{n}-\frac{\alpha}{\mathrm{k}}-1}\,(1-t)^s dt\right]$$

$$\frac{{}_k\Gamma_k\left(n-\frac{\alpha}{k}+k\right)}{(b-a)^{n-\frac{\alpha}{k}}}\left[\left({}^{C}D_{a^+}^{\alpha,k}f\right)(a)+(-1)^n\left({}^{C}D_{b^-}^{\alpha,k}f\right)(a)\right]$$

$$\leq \left[f^{(n)}(a)+f^{(n)}(b)\right] \text{x} \left[\frac{1}{s+n-\frac{\alpha}{k}+2}+\beta\left(n-\frac{\alpha}{k},s+1\right)\right].$$

Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.4: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun $f\in AC^{n+1}, a<b.$ Eğer $\left|f^{(n+1)}\right|, [a,b]$ aralığında s-konveks fonksiyon ise aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.

$$\left|\frac{f^{(n)}(a)+f^{(n)}(b)}{2}-\frac{{}_k\Gamma_k\left(n-\frac{\alpha}{k}+k\right)}{2(b-a)^{n-\frac{\alpha}{k}}}\left[\left({}^{C}D_{a^+}^{\alpha,k}f\right)(a)+(-1)^n\left({}^{C}D_{b^-}^{\alpha,k}f\right)(a)\right]\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{2}.\frac{1}{\left(1+n+s-\frac{\alpha}{k}\right)}\left(1-\frac{1}{2^{n-\frac{\alpha}{k}+s}}\right)\left[\left|f^{(n+1)}(a)\right|+\left|f^{(n+1)}(b)\right|\right]$$

İspat. $\left|f^{(n+1)}\right|'$nin s −konveksliği kullanarak

$$\left|\frac{f^{(n)}(a)+f^{(n)}(b)}{2}-\frac{{}_k\Gamma_k\left(n-\frac{\alpha}{k}+k\right)}{2(b-a)^{n-\frac{\alpha}{k}}}\left[\left({}^{C}D_{a^+}^{\alpha,k}f\right)(a)+(-1)^n\left({}^{C}D_{b^-}^{\alpha,k}f\right)(a)\right]\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{2}\int_0^1\left|(1-t)^{n-\frac{\alpha}{k}}-t^{n-\frac{\alpha}{k}}\right|\left|f^{(n+1)}(ta+(1-t)b)\right|dt$$

$$\leq \frac{b-a}{2}\int_0^1\left(\left|(1-t)^{n-\frac{\alpha}{k}}-t^{n-\frac{\alpha}{k}}\right|\right)\left[t^s\left|f^{(n+1)}(a)\right|+(1-t)^s\left|f^{(n+1)}(b)\right|\right]dt$$

$$\leq \frac{b-a}{2}\left[\int_0^{\frac{1}{2}}\left[(1-t)^{n-\frac{\alpha}{k}}-t^{n-\frac{\alpha}{k}}\right]\left[t^s\left|f^{(n+1)}(a)\right|+(1-t)^s\left|f^{(n+1)}(b)\right|\right]dt\right.$$

$$\left.+\int_{\frac{1}{2}}^1\left[t^{n-\frac{\alpha}{k}}-(1-t)^{n-\frac{\alpha}{k}}\right]\left[t^s\left|f^{(n+1)}(a)\right|+(1-t)^s\left|f^{(n+1)}(b)\right|\right]dt\right].$$

elde edilir. Aşağıdaki hesaplamalar dikkate alınırsa;

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\left[(1-t)^{n-\frac{\alpha}{k}}-t^{n-\frac{\alpha}{k}}\right]\left[t^s\left|f^{(n+1)}(a)\right|+(1-t)^s\left|f^{(n+1)}(b)\right|\right]dt$$

$$\left|f^{(n+1)}(a)\right|\left[\int_0^{\frac{1}{2}} t^s(1-t)^{n-\frac{\alpha}{k}} - \int_0^{\frac{1}{2}} t^{n-\frac{\alpha}{k}+s}dt\right]$$

$$+\left|f^{(n+1)}(b)\right|\left[\int_0^{\frac{1}{2}}(1-t)^{n-\frac{\alpha}{k}+s} - \int_0^{\frac{1}{2}}\frac{(1-t)^s}{t^{\frac{\alpha}{k}-n}}dt\right]$$

$$=\left|f^{(n+1)}(a)\right|\left[\beta_{\frac{1}{2}}\left(1+s,1+n-\frac{\alpha}{k}\right) - \frac{k2^{\frac{-k(1+n+s)+\alpha}{k}}}{k(1+n+s)-\alpha}\right]$$

$$+\left|f^{(n+1)}(b)\right|\left[\frac{k-k2^{\frac{-k(1+n+s)+\alpha}{k}}}{k(1+n+s)-\alpha} - \beta_{\frac{1}{2}}\left(1+n-\frac{\alpha}{k},1+s\right)\right]$$

ve benzer şekilde;

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \left[t^{n-\frac{\alpha}{k}} - (1-t)^{n-\frac{\alpha}{k}}\right]\left[t^s\left|f^{(n+1)}(a)\right| + (1-t)^s\left|f^{(n+1)}(b)\right|\right]dt$$

$$\left|f^{(n+1)}(a)\right|\left[\int_{\frac{1}{2}}^1 t^{n-\frac{\alpha}{k}+s}dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 t^s(1-t)^{n-\frac{\alpha}{k}}dt\right]$$

$$+\left|f^{(n+1)}(b)\right|\left[\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{(1-t)^s}{t^{\frac{\alpha}{k}-n}} - \int_{\frac{1}{2}}^1(1-t)^{n-\frac{\alpha}{k}+s}dt\right]$$

$$=\left|f^{(n+1)}(a)\right|\left[\beta_{\frac{1}{2}}\left(1+s,1+n-\frac{\alpha}{k}\right) + \frac{k-k2^{\frac{-k(1+n+s)+\alpha}{k}}}{k(1+n+s)-\alpha}\right.$$

$$\left. - \frac{\Gamma(1+s)\Gamma\left(1+n-\frac{\alpha}{k}\right)}{\Gamma\left(2+n+s-\frac{\alpha}{k}\right)}\right]$$

$$+\left|f^{(n+1)}(b)\right|\left[\frac{k2^{\frac{-k(1+n+s)+\alpha}{k}}}{k(1+n+s)-\alpha} - \beta_{\frac{1}{2}}\left(1+n-\frac{\alpha}{k},1+s\right)\right.$$

$$\left. + \frac{\Gamma(1+s)\Gamma\left(1+n-\frac{\alpha}{k}\right)}{\Gamma\left(2+n+s-\frac{\alpha}{k}\right)}\right].$$

Hesaplanan integral ile elde edilen sonuçlar sırasıyla $\left|f^{(n+1)}(a)\right|$ ve $\left|f^{(n+1)}(b)\right|$ parantezine alınırsa

$$\left|\frac{f^{(n)}(a)+f^{(n)}(b)}{2}-\frac{{}_k\Gamma_k\left(n-\frac{\alpha}{k}+k\right)}{2(b-a)^{n-\frac{\alpha}{k}}}\left[\left({}^{C}D_{a^+}^{\alpha,k}f\right)(a)+(-1)^n\left({}^{C}D_{b^-}^{\alpha,k}f\right)(a)\right]\right|$$

$$\leq\frac{b-a}{2}\left(\left|f^{(n+1)}(a)\right|\left[\beta_{\frac{1}{2}}\left(1+s,1+n-\frac{\alpha}{k}\right)-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-\frac{\alpha}{k}+1+s}}{1+n+s-\frac{\alpha}{k}}\right.\right.$$

$$+\beta_{\frac{1}{2}}\left(1+s,1+n-\frac{\alpha}{k}\right)$$

$$\left.+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-\frac{\alpha}{k}+1+s}}{1+n+s-\frac{\alpha}{k}}-\frac{\Gamma(1+s)\Gamma\left(1+n-\frac{\alpha}{k}\right)}{\Gamma\left(2+n+s-\frac{\alpha}{k}\right)}\right]$$

$$+\left|f^{(n+1)}(b)\right|\left[\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-\frac{\alpha}{k}+1+s}}{1+n+s-\frac{\alpha}{k}}-\beta_{\frac{1}{2}}\left(1+n-\frac{\alpha}{k},1+s\right)-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-\frac{\alpha}{k}+1+s}}{1+n+s-\frac{\alpha}{k}}\right.$$

$$\left.\left.-\beta_{\frac{1}{2}}\left(1+n-\frac{\alpha}{k},1+s\right)+\frac{\Gamma(1+s)\Gamma\left(1+n-\frac{\alpha}{k}\right)}{\Gamma\left(2+n+s-\frac{\alpha}{k}\right)}\right]\right).$$

Şimdi ise $\left[\left|f^{(n+1)}(a)\right|+\left|f^{(n+1)}(b)\right|\right]$ ortak parantezine alınır ve Tanım 2.2.2'deki Beta ve Gamma fonksiyonu arasındaki ilişki kullanılarak toplama işlemi yapılırsa ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.5 $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ integrallenebilir pozitif değerli bir fonksiyon olsun. Eğer $[0,\infty)$ aralığında (s,m) −konveks fonksiyon ise $0\leq a\leq mb$ ve $\alpha>0$ için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$f\left(\frac{a+mb}{2}\right)\leq\frac{s\left[\beta\left(\frac{s}{k},1+\frac{1}{\alpha}\right)+\frac{k\alpha^{-\frac{s}{k}}}{s}\right]}{2^s k\alpha^{-\frac{s}{k}}}\left[mf\left(\frac{a}{m}\right)+f(mb)\right]$$

$$\leq[f(a)+mf(b)]\left[\alpha^{-\frac{s}{k}}\beta\left(\frac{s}{k},1+\frac{s}{\alpha}\right)\right]$$

$$+\left[mf(b)+m^2 f\left(\frac{a}{m^2}\right)\right]\left[\int_0^1 (1-t)^s\, t^{\alpha-1}\left(\frac{1-t^\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{s}{k}-1} dt\right]$$

İspat. f, (s,m) −konveks fonksiyon. $x, y \in [a, mb]$ ve $t = \frac{1}{2}$ için

$$f\left(\frac{x+my}{2}\right) \le \frac{f(x)+mf(y)}{2^s}$$

$x = ta + m(1-t)b, y = tb + \frac{1}{m}(1-t)a$ değişken değiştirmesi yapılırsa;

$$2^s f\left(\frac{a+mb}{2}\right) \le f(ta+m(1-t)b) + mf\left(tb+\frac{1}{m}(1-t)a\right).$$

Eşitsizliğin her iki tarafı $t^{\alpha-1}\left(\frac{1-t^\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{s}{k}-1}$ ile çarpılıp [0,1] aralığında integrali alınırsa;

$$2^s f\left(\frac{a+mb}{2}\right)\int_0^1 t^{\alpha-1}\left(\frac{1-t^\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{s}{k}-1} dt$$

$$\le \int_0^1 t^{\alpha-1}\left(\frac{1-t^\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{s}{k}-1} f(ta+m(1-t)bdt$$

$$+m\int_0^1 t^{\alpha-1}\left(\frac{1-t^\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{s}{k}-1} f\left(tb+\frac{1}{m}(1-t)a\right)dt$$

elde edilir. Burada [0,1] aralığındaki integraller sırasıyla düzenlenirse:

$$f\left(\frac{a}{m}\right)\int_0^1 t^{\alpha}\left(\frac{1-t^\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{s}{k}-1} mdt + f(mb)\int_0^1 t^{\alpha-1}\left(\frac{1-t^\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{s}{k}-1}(1-t)dt$$

ve

$$f\left(\frac{a}{m}\right)m\int_0^1 t^{\alpha-1}\left(\frac{1-t^\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{s}{k}-1}(1-t)dt + f(mb)\int_0^1 t^{\alpha}\left(\frac{1-t^\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{s}{k}-1} dt$$

bulunur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$f\left(\frac{a}{m}\right)\left[\int_0^1 t^{\alpha}\left(\frac{1-t^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\frac{s}{k}-1} mdt + m\int_0^1 t^{\alpha-1}\left(\frac{1-t^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\frac{s}{k}-1}(1-t)dt\right]$$

$$+f(mb)\left[\int_0^1 t^{\alpha-1}\left(\frac{1-t^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\frac{s}{k}-1}(1-t)dt + \int_0^1 t^{\alpha}\left(\frac{1-t^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\frac{s}{k}-1} dt\right]$$

$$2^s f\left(\frac{a+mb}{2}\right)\frac{k\alpha^{-\frac{s}{k}}}{s} \le f(\frac{a}{m})\left[\frac{m\alpha^{-\frac{s}{k}}\Gamma\left(\frac{s}{k}\right)\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{s}{k}+\frac{1}{\alpha}\right)} + \frac{km\alpha^{-\frac{s}{k}}}{s}\right]$$

$$+ f(mb)\left[\frac{\alpha^{-\frac{s}{k}}\Gamma\left(\frac{s}{k}\right)\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{s}{k}+\frac{1}{\alpha}\right)} + \frac{k\alpha^{-\frac{s}{k}}}{s}\right]$$

$$2^s f\left(\frac{a+mb}{2}\right)\frac{k\alpha^{-\frac{s}{k}}}{s} \le \left[mf\left(\frac{a}{m}\right)+f(mb)\right]\left[\frac{\alpha^{-\frac{s}{k}}\Gamma\left(\frac{s}{k}\right)\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{s}{k}+\frac{1}{\alpha}\right)} + \frac{k\alpha^{-\frac{s}{k}}}{s}\right]$$

$$f\left(\frac{a+mb}{2}\right) \le \frac{s\left[\frac{\alpha^{-\frac{s}{k}}\Gamma\left(\frac{s}{k}\right)\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{s}{k}+\frac{1}{\alpha}\right)} + \frac{k\alpha^{-\frac{s}{k}}}{s}\right]}{2^s k\alpha^{-\frac{s}{k}}}\left[mf\left(\frac{a}{m}\right)+f(mb)\right]$$

$$f\left(\frac{a+mb}{2}\right) \le \frac{s\left[\beta\left(\frac{s}{k},1+\frac{1}{\alpha}\right) + \frac{k\alpha^{-\frac{s}{k}}}{s}\right]}{2^s k\alpha^{-\frac{s}{k}}}\left[mf\left(\frac{a}{m}\right)+f(mb)\right]$$

olur ki bu ilk eşitsizliği ortaya koyar. İkinci eşitsizliği elde etmek için (s,m)-konveks tanımı yardımıyla $t \in [0,1]$ için:

$$f(ta+m(1-t)b) \le t^s f(a) + m(1-t)^s f(b)$$

ve

$$mf\left(tb+\frac{1-t}{m}a\right) \le mt^s f(b) + m^2(1-t)^s f\left(\frac{a}{m^2}\right).$$

eşitsizlikleri yazılır. Eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa

$$f(ta+m(1-t)b) + mf\left(tb+\frac{1-t}{m}a\right) \le$$

$$t^s f(a) + m(1-t)^s f(b) + mt^s f(b) + m^2(1-t)^s f\left(\frac{a}{m^2}\right).$$

$$= t^s[f(a) + mf(b)] + (1-t)^s \left[mf(b) + m^2 f\left(\frac{a}{m^2}\right)\right].$$

Eşitsizliğin her iki tarafı $t^{\alpha-1}\left(\frac{1-t^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\frac{s}{k}-1}$ çarpılıp [0,1] aralığında integral alınır ise

$$f\left(\frac{a+mb}{2}\right) \leq \frac{s\left[\beta\left(\frac{s}{k},1+\frac{1}{\alpha}\right)+\frac{k\alpha^{-\frac{s}{k}}}{s}\right]}{2^s k\alpha^{-\frac{s}{k}}}\left[mf\left(\frac{a}{m}\right)+f(mb)\right]$$

$$\leq [f(a)+mf(b)]\int_0^1 t^{\alpha-1+s}\left(\frac{1-t^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\frac{s}{k}-1} dt +$$

$$\left[mf(b)+m^2 f\left(\frac{a}{m^2}\right)\right]\int_0^1 (1-t)^s\, t^{\alpha-1}\left(\frac{1-t^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\frac{s}{k}-1} dt$$

$$= [f(a)+mf(b)]\left[\alpha^{-\frac{s}{k}}\beta\left(\frac{s}{k},1+\frac{s}{\alpha}\right)\right]$$

$$+\left[mf(b)+m^2 f\left(\frac{a}{m^2}\right)\right]\left[\int_0^1 (1-t)^s\, t^{\alpha-1}\left(\frac{1-t^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\frac{s}{k}-1} dt\right]$$

bulunur ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.6: $f: [a, mb] \to \mathbb{R}'$ye (a, mb)-de diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $|f'|$, $[a, mb]'$de (s, m) $-$konveks fonksiyon ise

$$\left|\frac{f(a)+f(mb)}{2} - \frac{{}_k\Gamma_k \alpha^{\frac{s}{k}}}{(mb-a)^{\frac{\alpha s}{k}}}\left[{}_k^s\mathfrak{I}_{a^+}^{\alpha} f(mb) + {}_k^s\mathfrak{I}_{mb^-}^{\alpha} f(a)\right]\right|$$

$$\leq m|f'(b)|\left[\int_0^{\frac{1}{2}} (1-t)^s\left(\frac{1-t^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\frac{s}{k}} dt - \int_0^{\frac{1}{2}} (1-t)^s\left(\frac{1-(1-t)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\frac{s}{k}} dt\right.$$

$$\left.+\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^s\left(\frac{1-(1-t)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\frac{s}{k}} dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^s\left(\frac{1-t^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\frac{s}{k}} dt\right]$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Aşağıdaki eşitlik ve gerekli integral hesaplamaları yapılırsa;

$$\left|\frac{f(a)+f(mb)}{2}-\frac{{}_k\Gamma_k \alpha^{\frac{s}{k}}}{(mb-a)^{\frac{\alpha s}{k}}}\left[{}_k^s\mathfrak{I}_{a^+}^{\alpha} f(mb)+{}_k^s\mathfrak{I}_{mb^-}^{\alpha} f(a)\right]\right|$$

$$=\frac{(mb-a)\alpha^{\frac{s}{k}}}{2}\left|\int_0^1\left[\left(\frac{1-t^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\frac{s}{k}}-\left(\frac{1-(1-t)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\frac{s}{k}}\right]f'(at^s+m(1-t)^s b)dt\right|$$

$$\leq\frac{(mb-a)\alpha^{\frac{s}{k}}}{2}\left|\int_0^1\left[\left(\frac{1-t^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\frac{s}{k}}-\left(\frac{1-(1-t)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\frac{s}{k}}\right](t^s|f'(a)|\right.$$

$$\left.+m(1-t)^s|f'(b)|)dt\right|$$

$$=\frac{(mb-a)\alpha^{\frac{s}{k}}}{2}\left|\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\left(\frac{1-t^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\frac{s}{k}}-\left(\frac{1-(1-t)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\frac{s}{k}}\right](t^s|f'(a)|\right.$$

$$\left.+m(1-t)^s|f'(b)|)dt\right|$$

$$+\frac{(mb-a)\alpha^{\frac{s}{k}}}{2}\left|\int_{\frac{1}{2}}^1\left[\left(\frac{1-(1-t)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\frac{s}{k}}-\left(\frac{1-t^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\frac{s}{k}}\right](t^s|f'(a)|\right.$$

$$\left.+m(1-t)^s|f'(b)|)dt\right|$$

$$=\frac{(mb-a)\alpha^{\frac{s}{k}}}{2}|f'(a)|\int_0^{\frac{1}{2}}\left[t^s\left(\frac{1-t^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\frac{s}{k}}-t^s\left(\frac{1-(1-t)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\frac{s}{k}}\right]dt$$

$$+\frac{(mb-a)\alpha^{\frac{s}{k}}}{2}|f'(b)|m\int_0^{\frac{1}{2}}\left[(1-t)^s\left(\frac{1-t^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\frac{s}{k}}-(1-t)^s\left(\frac{1-(1-t)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\frac{s}{k}}\right]dt.$$

$$+\frac{(mb-a)\alpha^{\frac{s}{k}}}{2}|f'(a)|\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left[t^{s}\left(\frac{1-(1-t)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\frac{s}{k}}-t^{s}\left(\frac{1-t^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\frac{s}{k}}\right]dt$$

$$+\frac{(mb-a)\alpha^{\frac{s}{k}}}{2}|f'(b)|m\int_{0}^{\frac{1}{2}}\left[(1-t)^{s}\left(\frac{1-(1-t)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\frac{s}{k}}-(1-t)^{s}\left(\frac{1-t^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\frac{s}{k}}\right]dt$$

yazılır.

$x=t^{\alpha}$ve $y=(1-t)^{\alpha}$ değişkenlerini değiştirerek

$$|f'(a)|\left[\int_{0}^{\frac{1}{2}}t^{s}\left(\frac{1-t^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\frac{s}{k}}dt-\int_{0}^{\frac{1}{2}}t^{s}\left(\frac{1-(1-t)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\frac{s}{k}}dt\right]$$

$$+\int_{\frac{1}{2}}^{1}t^{s}\left(\frac{1-(1-t)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\frac{s}{k}}dt-\int_{\frac{1}{2}}^{1}t^{s}\left(\frac{1-t^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\frac{s}{k}}dt$$

$$=m|f'(b)|\left[\int_{0}^{\frac{1}{2}}(1-t)^{s}\left(\frac{1-t^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\frac{s}{k}}dt-\int_{0}^{\frac{1}{2}}(1-t)^{s}\left(\frac{1-(1-t)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\frac{s}{k}}dt\right.$$

$$\left.+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)^{s}\left(\frac{1-(1-t)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\frac{s}{k}}dt-\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)^{s}\left(\frac{1-t^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\frac{s}{k}}dt\right]$$

sonucu elde edilir.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Araştırmanın temel amacı; ilk olarak materyal ve yöntem bölümünde bahsi geçen, Katugampola kesirli integralleri için s-konveks fonksiyonları kullanarak Hermite-Hadamard tipli eşitsizliklerden elde edilen ve literatürde yer alan lemma ve teoremlerden yararlanılarak h-konveks fonksiyonlar için Katugampola kesirli integral operatörü içeren yeni eşitsizlikler elde etmektir. Daha sonra yine Katugampola kesirli integral operetötü içeren s-konveks fonksiyonlar için yeni eşitsizlikler elde edilmiştir. Bulgular bölümünün son kısmında da m-konvekslik ile ilgili teorem ve lemmalardan yararlanılıp (s,m)-konveks fonksiyonlar için yeni eşitsizlikler elde edilmiştir.

Bu çalışmadan elde edilen eşitsizlikler Katugampola kesirli integral operatörü ile araştırma yapacak olan araştırmacılar tarafından yeni eşitsizlikler bulmalarına yardımcı olabilir. Yine bu çalışma sonucu elde edilen eşitsizlikler yardımıyla Katugampola kesirli integral operatörü içeren farklı eşitsizliklerin yanında teorem ve lemmalar da bulunmasına yardımcı olabilir.

KAYNAKÇA

Azpetia, A.G., 1994. Convex function on the Hadamard Inequaliy. Rev. Colombiana Mat., 28: 7-12

Beckenbach, E.F., 1948. Convex fonction. Bulletin of the American Mathematical Society, 54:439-460

Breckner W. W. Stetigkeitsaussagen für eine Klasse verallgemeinerter konvexer funktionenin topologischen linearen Raumen, Pupl. Inst. Math. 23(1978), 13-20.

Dragomir, S.S. and Pearce, C.E.M., 1998. Quasi-convex functions and Hadamard's inequality. Bull. Austral. Math. Soc., 57, 377-385.

Dragomir S.S., Fitzpatrick, S. 1999. The Hadamard's inequality for s-convex functions in the second sense. Demonstratio Mathematica, 32(4): 687–696.

Farid G. And Javed A. 2018. On Hadamard and Fejer-Hadamard Inequalities for Caputo k-Faractional Derivatives.

Hadamard J., Etude sur les proprietes des fonctions entieres et en particulier d.une fonction considree par, Riemann, J. Math. Pures. et Appl. 58 (1893), 171.215.

Iscan I., Hermite-Hadamard type inequalities for harmonically convex functions, Hacet. J. Math. Stat. (2014)

Kannapan, Pl. 2009. Functional Equations and Inequalities with Applications. Springer.

Katugampola U.N., New approach to generalized fractional derivatives, Bull. Math. Anal. Appl., 6(4), (2014),1-15.

Kilbas A.A.,Srivastava H.M. and Trujillo J.J., Theory and applications of fractional differential equations, North-Holland Math. Stud. 204, Elsevier, New York-London, 2006.

Kreyszing, E., 1989. Introductory Functional Analysis with Applications, John Wiley & Sons, New York

Mitrinović, D.S., 1970. Analytic Inequalities. Springer-Verlag, Berlin

Mitrinović, D.S, Peˇcari´c, J.E., Fink, A.M. 1993. Classical and New Inequalities in Analysis, Kluwer Academic Publishers, UK.

Orlicz, W., 1961. A note on modular spaces I. Bull. Acad. Polon Sci. Ser. Math. Astronom. Phsy., 9, 157-162.

Pečarić, J., Proschan, F. and Tong, Y.L., 1992. Convex Functions. Partial Orderings and Statistical Applications. Academic Press, Inc.

Park J., Generalization of Ostrowski-type inequalities for differentiable real (s,m)-convex mappings, *Far East J. of Math. Sci.*, 49, No. 2 (2011), 157-171.

Park J., Ostrowski-type inequalities for mappings whose derivatives are (s,m)-convex in the second sense, *Far East J. of Math. Sci.*, 49, No. 2 (2011), 181-195.

Rainville E.D., Special Functions, The Mcmillan Company, New York, 1960.

Rashid S. ve Ark. 2000. Some Inequalities of The Hermite-Hadamard Type For m-Convex Functions Via k-Fractional conformable integrals. Submitted.

Set E., Sarıkaya M.Z., Karakoç F., Hermite-Hadamard type inequalities for h-convex functions via fractional integrals, 2016.

Srivastava H.M. and Tomovski Z., Fractional calculus with an integral operator containing generalized Mittag-Leffler function in the kernal. Appl. Math. Comput. 211(2009), 198-210.

Toader, G. H., 1988. On Generalization of the Convexity, Mathematica, 30(53), 83-87.

Varošanec, S., 2007. On convexity. J. Math. Anal. Appl., 326, 303-311.

Varošanec, S. 2007. On *h*-convexity. Journal of Applied Mathematics, Statistics and Informatics, 326(1): 303-311.

Yaldız H. and Akdemir O. A. 2000. Katugampola Fractional Integrals within the Class of s-convex Functions.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Rabia BORA
Doğum Yeri ve Tarihi	Merkez/Ağrı 02.02.1992
Eğitim Durumu	
Lisans Öğrenimi	Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi Eğitim Fakültesi-İlköğretim Matematik Öğretmenliği (2011-2015**)**
Yüksek Lisans Öğrenimi	Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi (2016-…)
Bildiği Yabancı Diller	
Bilimsel Faaliyetler	
İş Deneyimi	
Stajlar	
Projeler	
Çalıştığı Kurumlar	Karlıca Evliya Çelebi Ortaokulu, Yukarı Gözlüce Öğretmen Burçin Özdemir Ortaokulu, Hamur YBO, Selahaddin Eyyubi Ortaokulu
İletişim	
E-posta Adresi	rabiabora1992@gmail.com
Mezuniyet Tarihi	
2019	