KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İKİ PERİYODİK FİBONACCİ KUATERNİYONLAR

Sevgi ULUYOL

AĞUSTOS 2019

Matematik Anabilim Dalında Sevgi ULUYOL tarafından hazırlanan İKİ PERİYODİK FİBONACCİ KUATERNİYONLAR adlı Yüksek Lisans Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Ali OLGUN

Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve tezin **Yüksek Lisans Tezi** olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiğini onaylarım.

Dr. Öğr. Üyesi Semih YILMAZ

Danışman

Jüri Üyeleri

Başkan	:Doç. Dr. Elif TAN	....
Üye	Doç. Dr. Osman KEÇİLİOĞLU	....
Üye (Danışman)	: Dr. Öğr. Üyesi Semih YILMAZ	....

22/08/2019

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onaylamıştır.

Prof. Dr. Recep ÇALIN

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

İKİ PERİYODİK FİBONACCİ KUATERNİYONLARI

ULUYOL, Sevgi

Kırıkkale Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans tezi

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Semih YILMAZ

Ağustos 2019, 44 sayfa

Bu çalışmada gerekli temel tanımlar verildikten sonra, iki periyodik Fibonacci ve Lucas kuaterniyon dizileri tanıtılmıştır. Daha sonra iki periyodik Fibonacci ve Lucas kuaterniyon dizilerinin üreteç fonksiyonları ve genel terimini içeren formülleri elde edilmiştir. Ayrıca bu formüller yardımıyla İki periyodik Fibonacci ve Lucas kuaterniyon dizilerinin bazı özellikleri incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Fibonacci Kuaterniyon Dizileri, Lucas Kuaterniyon Dizileri.

ABSTRACT

BI-PERIODIC FIBONACCI QUATERNIONS

ULUYOL, Sevgi

Kırıkkale University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics, Master's thesis

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Semih YILMAZ

August 2019, 44 pages

In this study, after giving the necessary basic definitions, bi-periodic Fibonacci and Lucas quaternion sequences were introduced. Then the generating function of bi-periodic Fibonacci and Lucas quaternion sequences and the formulas that include the general term were obtained. Also by using these formulas some properties of bi-periodic Fibonacci and Lucas quaternion sequences were investigated.

Key Words: Fibonacci Quaternion Sequences, Lucas Quaternion Sequences.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın yürütülmesi sırasında her türlü desteğini esirgemeyen danışman hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Semih YILMAZ’ a ve çalışmam esnasında, bilimsel konularda daima yardımını gördüğüm hocam Sayın Doç. Dr. Elif TAN’ a (Ankara Üniversitesi) teşekkür ederim.

Ayrıca bu çalışmamda desteklerini esirgemeyip yanımda olan arkadaşlarıma ve bu hayatta daima yanımda olan beni bu günlere getiren anneme, babama ve abime teşekkür ederim.

Sevgi ULUYOL

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Sürekli artan, büyüyen, gelişen çoğu olayı matematiksel yönden incelemek için en uygun araç, yüzyıllardır Fibonacci sayı dizisi olmuştur. Bir rekürans formülüyle elde edilen bu tamsayı dizisinin terimleri, ardışık terimlerinin oranlarının yakınsadığı altın oran sayısı ve dizinin reel, kompleks vb. genellemeleri günümüzde birçok bilim dalında bilhassa fen bilimlerinde kullanılmaktadır.

İrlandalı matematikçi William Rowan Hamilton 1843 yılında kompleks sayıları üç boyutlu uzaya taşımak için çalışma başlatmıştır; bu çalışmada ilk olarak bir reel iki sanal bileşene sahip $a + b\vec{\imath} + c\vec{\jmath}$ şeklinde bir cebirsel yapı kurmaya çalışmış ancak bunun mümkün olamayacağını görerek bir sanal bileşen daha ekleyerek

$$a + b\vec{\imath} + c\vec{\jmath} + d\vec{k}$$

şeklinde bir cebirsel yapı kurmayı başarmıştır. Kuaterniyon ismi verilen bu elemanlarla kurulan cebirsel yapıya Kuaterniyonlar Cebri veya kısaca Kuaterniyonlar denmiştir. Bu şekilde tanımlanan kuaterniyonlar, reel kısım ile $b\vec{\imath} + c\vec{\jmath} + d\vec{k}$ şeklindeki sanal kısmın oluşturduğu bir yapı da olsa, sanal kısım tek başına bazı uygulamalarda kolayca kullanılıp yeterli geldiği görülerek, vektör cebri oluşturulmuştur. İlk olarak, ünlü fizikçi Maxwell'in çalışmalarında kullandığı kuaterniyonların basitleştirilmiş bir şekli, elektromanyetizma gibi birçok fiziksel çalışmada araç olarak kullanılmıştır.

Heleman Ferguson'un 1978'deki çalışması gibi birçok çalışma Fibonacci dizisinin diğer fen bilimleri gibi parçacık fiziğinde de önemini göstermektedir. Ayrıca her ne kadar daha sık olarak vektör cebri kullanılsa da çoğu fiziksel problemlerin kuaterniyon cebriyle bağlantısı yadsınamaz. Dolayısıyla Fibonacci kuaterniyonların ve genellemelerinin bu konuda bazı problemlere ışık tutması öngörülebilir.

2.TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Rekürans Dizileri:

Her $n \geq k$ ve sabit a_j $(0 \leq j \leq k-1)$ katsayıları için

$$u_n = a_{k-1}u_{n-1} + a_{k-2}u_{n-2} + \cdots + a_1u_{n-k+1} + a_0u_{n-k} \tag{2.1}$$

eşitliğini sağlayan (u_n) dizisine k. *dereceden homojen lineer rekürans dizi* denir. (2.1) eşitliğine ise k. *dereceden homojen lineer rekürans bağıntı* denir. (u_n) dizisinin ilk k-tane terimine yani $u_0, u_1, \ldots, u_{k-1}$ sayılarına (u_n) dizisinin *başlangıç şartları* denir.

(u_n) yukarıdaki şekilde bir dizi ise

$$p(x) := x^k - a_{k-1}x^{k-1} - a_{k-2}x^{k-2} - \cdots - a_1x - a_0$$

polinomuna (u_n) dizisinin *karakteristik polinomu* denir. $p(x) = 0$ denklemine ise (u_n) dizisinin *karakteristik denklemi* denir. $p(x)$ polinomunun sıfırları $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ olmak üzere,

- Her $i, j \in \{1,2,\ldots,k\}$ için $\lambda_i \neq \lambda_j$ ise,

$$u_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n + \cdots + c_k\lambda_k^n$$

- λ_i $(m+1)$-katlı kök ise,

$$u_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n + \cdots + (c_i\lambda_i^n + c_{i+1}n\lambda_i^n + \cdots + c_{i+m}n^m\lambda_i^n) + \cdots + c_k\lambda_k^n$$

olacak şekilde $c_1, c_2, \ldots, c_k$ sabitleri vardır. Bu eşitlikler $u_0, u_1, \ldots, u_{k-1}$ başlangıç şartları için yazılarak, oluşan denklem sisteminden $c_1, c_2, \ldots, c_k$ bilinmeyenleri bulunur. Böylece elde edilen karakteristik polinomun sıfırları ve u_n arasındaki eşitliğe *rekürans bağıntısının çözümü* denir.

(u_n) dizisinin terimleri vasıtasıyla tanımlanan

$$G(x) := u_0 + u_1x + u_2x^2 + u_3x^3 + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} u_ix^i$$

serisine (u_n) dizisinin *üreteç fonksiyonu* denir. (Everest G. ve diğerleri, 2003)

2.2. Fibonacci Dizisi:

12. yüzyılda yaşayan İtalyan matematikçi Leonardo Fibonacci, babasının işi nedeniyle ilköğrenimini günümüzde Cezayir'in bir kıyı kenti olan Bougie' de alır. Daha sonra İtalya'ya döndüğünde o dönem Avrupa'sında kullanılan Romen rakamlarıyla matematik yapmak zor olduğu için öğrendiği Arap rakamlarını anlatmak amacıyla "Liber Abaci" adlı kitabı yazmıştır.

Liber Abaci'de bulunan problemlerden bir tanesi, kapalı bir ortamdaki bir tavşan ailesinin artışının, her yetişkin tavşan çiftinin her ay bir çift yavru yapıp, yavruların da 1 ay sonra yetişkin hâle geleceği gibi ideal varsayımlar altında hesaplanmasını gösterir. Bu problemin çözümünde, her ayki yetişkin tavşan çiftlerinin sayılarına *Fibonacci Sayıları,* bu sayıların oluşturduğu diziye de *Fibonacci Dizisi* denmiştir. Eğer n. aydaki tavşan çiftlerinin sayısını F_n ile gösterirsek, Fibonacci dizisi F_0=0 , F_1=1 başlangıç şartları ve

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \qquad n \geq 0$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır. Buna göre Fibonacci sayılarının ilk birkaç terimi

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, … şeklindedir.

Negatif indisli Fibonacci sayıları ise $n > 0$ için

$$F_{-n} := (-1)^{n+1} F_n$$

şeklinde sonraki araştırmalarda tanımlanmıştır.

Fibonacci dizisinin karakteristik denklemi,

$$x^2 - x - 1 = 0$$

şeklindedir. Buradan karakteristik denklemin çözümleri,

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad , \quad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

şeklinde bulunur. Burada

$$\alpha + \beta = 1 \ , \alpha\beta = -1 \ \ ve \ \ \alpha - \beta = \sqrt{5}$$

eşitlikleri kolayca görülür.

Fibonacci dizisinin rekürans bağıntısının çözümü

$$F_n = c_1\alpha^n + c_2\beta^n \tag{2.2}$$

olmak üzere, c_1, c_2 katsayılarını bulmak için başlangıç şartları kullanılarak

$$F_0 = c_1 + c_2 = 0$$

$$F_1 = c_1\alpha + c_2\beta = 1$$

elde edilir. Bu iki denklemi çözersek $c_2 = -c_1$ yazarak

$$c_1\alpha + c_2\beta = 1 \Rightarrow c_1\alpha - c_1\beta = 1 \Rightarrow c_1 = \frac{1}{\alpha - \beta} \Rightarrow c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

dir. $c_2 = -c_1$ olduğu için $c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ dir. Dolayısıyla c_1, c_2 (2.2) de yerine yazılırsa

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik ilk olarak 18. yüzyılda Jacques Philippe Marie Binet tarafından gösterildiği için *Binet Formülü* olarak adlandırılır (Koshy 2001).

Fibonacci dizisinin kombinatoryal ifadesi

$$F_n = \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \binom{n-i-1}{i} \tag{2.3}$$

şeklindedir (Koshy 2001).

Fibonacci dizisinin ardışık terimlerinin oranları, indis büyüdükçe yakınsak bir dizi oluşturur. Yakınsadığı sayıyı bulmak için ardışık terimleri oranının limiti alınırsa

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{F_{n+1}}{F_n}\right) &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}.\frac{\alpha-\beta}{\alpha^n-\beta^n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha^n-\beta^n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\alpha^{n+1}\left(1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+1}\right)}{\alpha^n\left(1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n}\right)}\right)
\end{aligned}$$

$n \longrightarrow 0 \ \ ve \ \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) < 1 \Rightarrow \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n \longrightarrow 0$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{F_{n+1}}{F_n}\right) = \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

elde edilir. Bu sayıya *altın oran* adı verilir.

Fibonacci dizisinin üreteç fonksiyonu, $|x| < {}^{1}/_{\beta}$ olmak üzere

$$G(x) := \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + 8x^6 + \cdots$$

şeklinde tanımlanırsa. Bu seride $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ yazarsak

$$\begin{aligned}
\mathrm{G(x)} &= \sum_{n=0}^{\infty} (F_{n-1} + F_{n-2})\, x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} F_{n-1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} F_{n-2} x^n \\
&= \sum_{n=-1}^{\infty} F_n x^{n+1} + \sum_{n=-2}^{\infty} F_n x^{n+2} \\
&= x \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n + F_{-1} + F_{-2} + F_{-1} x \\
\Longrightarrow G(x) &= xG(x) + x^2 G(x) + x
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir, buradan

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

bulunur.

19. yüzyılda François Édouard Anatole Lucas, Fibonacci dizisinin rekürans bağıntısını farklı başlangıç şartları ile kullanarak

$$L_0 := 2, \qquad L_1 := 1, \qquad n \geq 2 \text{ için } L_n := L_{n-1} + L_{n-2}$$

şeklinde tanımladığı yeni diziyi incelemiştir, bu (L_n) dizisine *Lucas dizisi* adı verilir (Koshy 2001).

Fibonacci dizisi için yapılan çalışmaların bir kısmı Lucas dizisine de uygulanmıştır ve iki dizi için de birçok genelleştirmeler yapılmıştır. Bunun en kapsamlısı 1965 yılında Alwyn Francis Horadam tarafından, $a, b, p, q \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$w_0 := a\,, \qquad w_1 := b\,, \qquad n \geq 2 \text{ için}$$

$$w_n := p w_{n-1} - q w_{n-2}$$

şeklinde homojen ikinci dereceden lineer bir rekürans dizisi tanımlanarak çalışılmıştır. Bu dizinin karakteristik denklemi

$$x^2 - px + q = 0$$

şeklindedir ve bu denklemin çözümleri

$$\alpha = \frac{p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \quad , \qquad \beta = \frac{p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

olmak üzere

$$w_n = \left(\frac{b - a\beta}{\alpha - \beta}\right)\alpha^n - \left(\frac{b - a\alpha}{\alpha - \beta}\right)\beta^n$$

şeklindedir. Burada

$$(w_n) = (w_n)(a, b; p, q)$$

olmak üzere

$a = 0,\ b = 1,\ p = 1,\ q = -1$ ise $(w_n)(0,1; 1, -1) = (F_n)$ (Fibonacci dizisi)

$a = 2,\ b = 1,\ p = 1,\ q = -1$ ise $(w_n)(2,1; 1, -1) = (L_n)$ (Lucas dizisi)

eşitlikleri kolayca görülür (Koshy 2001).

2.3. Periyodik Rekürans Dizileri:

2.3.1. Tanım: $q_0 = 0$, $q_1 = 1$ başlangıç koşulu ve *a* ile *b* keyfi sabitler olmak üzere

$$q_n = \begin{cases} aq_{n-1} + q_{n-2}, & n\ çift \\ bq_{n-1} + q_{n-2}, & n\ tek \end{cases} \quad , \quad n \geq 2 \tag{2.4}$$

rekürans bağıntısı ile elde edilen (q_n) dizisine *iki periyodik Fibonacci dizisi (bi-periyodik Fibonacci dizisi)* denir. (Yayenie, 2009)

Burada, eğer $a = b = 1$ seçilirse (q_n) dizisi, Fibonacci dizisidir, eğer $a = b = 2$ seçilirse (q_n) dizisi Pell dizisidir ve $a = b = k$ seçilirse (q_n) dizisi k-Fibonacci dizisidir. (Edson ve Yayenie, 2009)

2.3.2. Teorem: İki periyodik Fibonacci rekürans dizisinin üreteç fonksiyonu

$$G(x) = \frac{t(1 + at + t^2)}{1 - (ab + 2)t^2 + t^4}$$

şeklindedir. (Edson ve Yayenie, 2009)

2.3.3. Teorem: İki periyodik Fibonacci rekürans dizisinin Binet formülü

$$q_n = \frac{a^{\xi(n+1)}}{(ab)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \right)$$

şeklindedir. (Edson ve Yayenie, 2009)

Buradaki α ve β , $x^2 - abx - ab = 0$ polinomunun kökleridir:

$$\alpha = \frac{ab + \sqrt{a^2b^2 + 4ab}}{2} \quad , \quad \beta = \frac{ab - \sqrt{a^2b^2 + 4ab}}{2}$$

dir. ξ(n) ise

$$\xi(n) = n - 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \begin{cases} 0, & n\ çift \\ 1, & n\ tek \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

2.3.4. Tanım: a ve b sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere başlangıç koşulları

$p_0 = 2,\ p_1 = a$ olmak üzere $p_n = \begin{cases} bp_{n-1} + p_{n-2}, n\ \ çift \\ ap_{n-1} + p_{n-2}, n\ tek \end{cases}$, $(n \geq 2)$

şeklinde tanımlı diziye *iki periyodik Lucas dizisi* adı verilir. (Bilgici, 2014)

Eğer a=b=1 ise (p_n) Lucas dizisidir.

2.3.5. Lemma: (p_n) iki periyodik Lucas dizisi için aşağıdaki özellikler sağlanır.

$$p_{2n} = (ab + 2)p_{2n-2} - p_{2n-4}$$

$$p_{2n+1} = (ab + 2)p_{2n-1} - p_{2n-3}\ .$$

(Bilgici, 2014).

2.3.6. Teorem: (p_n) iki periyodik Lucas dizisinin üreteç fonksiyonu

$$P(x) = \frac{2 + ax - (ab+2)x^2 + ax^3}{1 - (ab+2)x^2 + x^4}$$

şeklindedir. (Bilgici, 2014)

2.3.7.Teorem: İki periyodik Lucas dizisinin Binet formülü

$$p_n = \frac{a^{\xi(n)}}{(ab)^{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor}} (\alpha^n + \beta^n)$$

şeklindedir. (Bilgici, 2014)

2.4. Reel Kuaterniyonlar:

Her $q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}$ ve e_0, e_1, e_2, e_3 taban elemanları olmak üzere q reel kuaterniyonu

$$q = q_0 e_0 + q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_3$$

ve taban elemanları

$$e_0 = 1\,, \quad e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = -1\,, \quad e_1 e_2 = e_3\,, \quad e_2 e_3 = e_1\,, \quad e_3 e_1 = e_2$$

olacak şekilde tanımlanır. q kuaterniyonuna taban elemanları e_0, e_1, e_2, e_3 olan 4-boyutlu uzaydaki vektör gözüyle bakılabilir. Bu yüzden

$$q = q_0e_0 + q_1e_1 + q_2e_2 + q_3e_3 = [q_0, q_1, q_2, q_3]$$

şeklinde de gösterilebilir. q_0, q_1, q_2, q_3 reel sayılarına q kuaterniyonunun bileşenleri denir. Ayrıca $q_0 = 0$ ise q ya taban elemanları e_1, e_2, e_3 olan 3-boyutlu uzaydaki vektör gözüyle de bakılabilir.

2.4.1. Reel Kuaterniyonun Skaler Kısmı:

Her $q = q_0e_0 + q_1e_1 + q_2e_2 + q_3e_3$ reel kuaterniyonun skaler kısmı

$$S_q = q_0$$

olarak tanımlanır. Eğer $S_q = 0$ ise q'ya *pür kuaterniyon* denir.

2.4.2. Reel Kuaterniyonun Vektörel Kısmı:

Her $q = q_0e_0 + q_1e_1 + q_2e_2 + q_3e_3$ reel kuaterniyonun vektörel kısmı

$$V_q = q_1e_1 + q_2e_2 + q_3e_3$$

şeklinde tanımlanır.

2.4.3. Reel Kuaterniyonların Toplamı ve Farkı:

$p = p_0e_0 + p_1e_1 + p_2e_2 + p_3e_3$ ve $q = q_0e_0 + q_1e_1 + q_2e_2 + q_3e_3$ olmak üzere

$$(p \pm q) = (p_0 \pm q_0)e_0 + (p_1 \pm q_1)e_1 + (p_2 \pm q_2)e_2 + (p_3 \pm q_3)e_3$$

şeklinde tanımlanır.

2.4.4. Reel Kuaterniyonlarda Çarpma:

$p = p_0e_0 + p_1e_1 + p_2e_2 + p_3e_3$ ve $q = q_0e_0 + q_1e_1 + q_2e_2 + q_3e_3$ olmak üzere

$$pq = (p_0q_0 - p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3)e_0 + (p_1q_0 - p_0q_1 + p_2q_3 - p_3q_2)e_1$$
$$+(p_2q_0 + p_0q_2 - p_1q_3 + p_3q_1)e_2 + (p_3q_0 + p_0q_3 - p_2q_1 + p_1q_2)e_3$$

şeklindedir. Bu çarpım işlemi, toplama üzerine dağılma özelliği ve birleşme özelliğine sahiptir, fakat değişme özelliğine sahip değildir.

2.4.5. Reel Kuaterniyonun Skalerle Çarpılması:

$q = q_0e_0 + q_1e_1 + q_2e_2 + q_3e_3$ reel kuaterniyon ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\lambda q = \lambda q_0e_0 + \lambda q_1e_1 + \lambda q_2e_2 + \lambda q_3e_3$$

şeklinde tanımlanır.

2.4.6. Reel Kuaterniyonun Eşleniği:

$q = q_0e_0 + q_1e_1 + q_2e_2 + q_3e_3$ için

$$\bar{q} = q_0e_0 - q_1e_1 - q_2e_2 - q_3e_3$$

kuaterniyonuna *q kuaterniyonunun eşleniği* denir.

$a, b \in \mathbb{R}$ ve $p = p_0e_0 + p_1e_1 + p_2e_2 + p_3e_3$, $q = q_0e_0 + q_1e_1 + q_2e_2 + q_3e_3$ olmak üzere

i. $\overline{(ap + bq)} = a\bar{p} + b\bar{q}$
ii. $\overline{pq} = \bar{q}\bar{p}$
iii. $\overline{(\bar{p})} = p$

özellikleri sağlanır.

2.4.7. Reel Kuaterniyonun Normu:

$q = q_0e_0 + q_1e_1 + q_2e_2 + q_3e_3$ kuaterniyonunun normu

$$\|q\| = N_q \coloneqq \sqrt{q\bar{q}} = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$$

şeklinde tanımlanır. $N_q = 1$ olan q kuaterniyonuna *birim kuaterniyon* denir. p ve q kuaterniyon olmak üzere

i. $N_q = q\bar{q} = \bar{q}q$
ii. $N_{pq} = pq(\overline{pq})(\overline{pq}) = pq(\overline{qp}) = p\bar{p}q\bar{q} = N_pN_q$

özellikleri sağlanır.

2.4.8. Reel Kuaterniyonun Tersi:

$N_q \neq 0$ olmak şartıyla $q = q_0e_0 + q_1e_1 + q_2e_2 + q_3e_3$ kuaterniyonun tersi vardır ve q^{-1} ile gösterilir ve

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{\|q\|^2}$$

şeklindedir.

2.5. Split Kuaterniyonlar:

Her $q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}$ ve e_0, e_1, e_2, e_3 taban elemanları olmak üzere q split kuaterniyonu

$$q = q_0e_0 + q_1e_1 + q_2e_2 + q_3e_3$$

ve taban elemanları

$$e_0 = 1\,, \qquad e_1^2 = -1\,, \qquad e_2^2 = e_3^2 = e_1e_2e_3 = 1$$

$$e_1e_2 = -e_2e_1 = e_3\;, \quad e_2e_3 = -e_3e_2 = -e_1\;, \quad e_3e_1 = -e_1e_3 = e_2$$

olacak şekilde tanımlanır.

2.5.1. Split Kuaterniyonun Skaler Kısmı:

Her $q = q_0e_0 + q_1e_1 + q_2e_2 + q_3e_3$ split kuaterniyonun skaler kısmı

$$S_q = q_0$$

olarak tanımlanır. Eğer $S_q = 0$ ise q'ya *pür kuaterniyon* denir.

2.5.2. Split Kuaterniyonun Vektörel Kısmı:

Her $q = q_0e_0 + q_1e_1 + q_2e_2 + q_3e_3$ split kuaterniyonun vektörel kısmı

$$V_q = q_1e_1 + q_2e_2 + q_3e_3$$

olarak tanımlanır.

2.5.3. Split Kuaterniyonların Toplamı ve Farkı:

$p = p_0e_0 + p_1e_1 + p_2e_2 + p_3e_3$ ve $q = q_0e_0 + q_1e_1 + q_2e_2 + q_3e_3$ olmak üzere

$$(p \pm q) = (p_0 \pm q_0)e_0 + (p_1 \pm q_1)e_1 + (p_2 \pm q_2)e_2 + (p_3 \pm q_3)e_3$$

şeklindedir.

2.5.4. Split Kuaterniyonlarda Çarpma:

$p = p_0e_0 + p_1e_1 + p_2e_2 + p_3e_3$ ve $q = q_0e_0 + q_1e_1 + q_2e_2 + q_3e_3$ olmak üzere

$$pq = (p_0q_0 - p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3)e_0 + (p_1q_0 + p_0q_1 - p_2q_3 + p_3q_2)e_1$$
$$+(p_2q_0 + p_0q_2 - p_1q_3 + p_3q_1)e_2 + (p_3q_0 + p_0q_3 - p_2q_1 + p_1q_2)e_3$$

şeklinde ifade edilir.

2.5.5. Split Kuaterniyonu Skalerle Çarpma:

$q = q_0e_0 + q_1e_1 + q_2e_2 + q_3e_3$ split kuaterniyonu ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\lambda q = q\lambda = \lambda q_0e_0 + \lambda q_1e_1 + \lambda q_2e_2 + \lambda q_3e_3$$

şeklinde tanımlanır.

2.5.6. Split Kuaterniyonun Eşleniği:

$q = q_0e_0 + q_1e_1 + q_2e_2 + q_3e_3$ için

$$\bar{q} = q_0e_0 - q_1e_1 - q_2e_2 - q_3e_3$$

kuaterniyonuna *q kuaterniyonunun eşleniği* denir.

2.5.7. Split Kuaterniyonun Normu:

$q = q_0 e_0 + q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_3$ split kuaterniyonunun normu

$$\|q\| = N_q = \sqrt{|q\bar{q}|} = \sqrt{|q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2|}$$

şeklinde tanımlanır. $N_q = 1$ olan q split kuaterniyona ise *birim split kuaterniyon* denir.

2.5.8. Split Kuaterniyonun Tersi:

$N_q \neq 0$ olmak şartıyla $q = q_0 e_0 + q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_3$ split kuaterniyonun tersi vardır ve q^{-1} ile gösterilir ve

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{\|q\|^2}$$

şeklindedir.

Her $q = q_0 e_0 + q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_3$ split kuaterniyonu

$$q = q_0 e_0 + q_1 e_1 + (q_2 e_0 + q_3 e_1) e_2$$

olarak yazabiliriz. Buradan $c_1 = q_0 e_0 + q_1 e_1$ ve $c_2 = q_2 e_0 + q_3 e_1$ kompleks sayılar olmak üzere her split kuaterniyonun

$$q = c_1 + c_2 j$$

olarak tek türlü temsil edildiği görülür.

3. BAZI KUATERNİYON DİZİLERİ

3.1. Tanım: $n \geq 0$ için, F_n Fibonacci dizisinin genel terimi olmak üzere

$$O_n = F_n e_0 + F_{n+1} e_1 + F_{n+2} e_2 + F_{n+3} e_3$$

kuaterniyon dizisine *Fibonacci kuaterniyon dizisi* denir. (Horadam, 1963)

İlk birkaç terimi:

$$O_n: \; e_1 + e_2 + 2e_3, \qquad e_0 + e_1 + 2e_2 + 3e_3, \qquad e_0 + 2e_1 + 3e_2 + 5e_3, \ldots$$

diğer bir gösterimle

$$O_n: \; [0,1,1,2], [1,1,2,3], [1,2,3,5], [2,3,5,8], \ldots$$

şeklindedir.

3.2. Tanım: $n \geq 0$ için L_n Lucas dizisinin genel terimi olmak üzere

$$K_n = L_n e_0 + L_{n+1} e_1 + L_{n+2} e_2 + L_{n+3} e_3$$

kuaterniyon dizisine *Lucas kuaterniyon dizisi* denir. (Horadam, 1963)

3.3. Teorem: $n \geq 0$ olmak üzere Fibonacci kuaterniyon dizisinin Binet formülü

$$O_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\underline{\alpha}\alpha^n - \underline{\beta}\beta^n\right)$$

şeklindedir. Burada $\underline{\alpha} = e_0 + \alpha e_1 + \alpha^2 e_2 + \alpha^3 e_3$ ve $\underline{\beta} = e_0 + \beta e_1 + \beta^2 e_2 + \beta^3 e_3$ dır. (Halıcı,2012)

3.4. Teorem: n ≥ 0 olmak üzere Lucas kuaterniyon dizisinin Binet formülü

$$K_n = \left(\underline{\alpha}\alpha^n + \underline{\beta}\beta^n\right)$$

şeklindedir. (Halıcı,2012)

3.5. Tanım: F_n Fibonacci dizisinin genel terimi olmak üzere

$$U_n = F_n e_0 + F_{n+1} e_1 + F_{n+2} e_2 + F_{n+3} e_3$$

split kuaterniyon dizisine *Fibonacci split kuaterniyon dizisi* denir. (Akyiğit ve diğerleri, 2013)

3.6. Tanım: L_n Lucas dizisinin genel terimi olmak üzere

$$V_n = L_n e_0 + L_{n+1} e_1 + L_{n+2} e_2 + L_{n+3} e_3$$

split kuaterniyon dizisine *Lucas split kuaterniyon dizisi* denir. (Akyiğit ve diğerleri, 2013)

3.7. Teorem: $n \geq 0$ olmak üzere Fibonacci split kuaterniyonlar dizisinin Binet formülü

$$U_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\underline{\alpha}\alpha^n - \underline{\beta}\beta^n\right)$$

şeklindedir. (Akyiğit ve diğerleri, 2013)

3.8. Teorem: $n \geq 0$ olmak üzere Lucas split kuaterniyonlar dizisinin Binet formülü

$$V_n = \underline{\alpha}\alpha^n + \underline{\beta}\beta^n$$

şeklindedir. (Akyiğit ve diğerleri, 2013)

4. İKİ PERİYODİK FİBONACCİ KUATERNİYONLAR

4.1. Tanım: q_n *n.* iki periyodik Fibonacci sayısı olmak üzere

$$Q_n = q_n + q_{n+1}e_1 + q_{n+2}e_2 + q_{n+3}e_3$$

kuaterniyon dizisine *iki periyodik Fibonacci kuaterniyon dizisi* denir. (Tan ve diğerleri, 2016)

4.2. Teorem: Q_n iki periyodik Fibonacci kuaterniyon dizisi için üreteç fonksiyonu

$$G(t) = \frac{Q_0 + (Q_1 - bQ_0)t + (a-b)R(t)}{1 - bt - t^2}$$

şeklindedir, burada

$$R(t) := tf(t)e_0 + (f(t) - t)e_1 + \left(\frac{f(t)}{t} - 1\right)e_2 + \left(\frac{f(t) - (t + (ab+1)t^3}{t^2}\right)e_3$$

$$f(t) := \sum_{n=1}^{\infty} q_{2n-1}t^{2n-1} = \frac{t - t^3}{1 - (ab+2)t^2 + t^4}$$

(Tan ve diğerleri, 2016).

İspat:

$$G(t) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n t^n = Q_0 + Q_1 t + Q_2 t^2 + \cdots + Q_n t^n + \cdots$$

ifadesini *bt* ve t^2 ile çarpıp taraf tarafa toplarsak,

$$btG(t) = bQ_0 t + bQ_1 t^2 + bQ_2 t^3 + \cdots + bQ_n t^{n+1}$$

$$t^2 G(t) = Q_0 t^2 + Q_1 t^3 + Q_2 t^4 + \cdots + Q_n t^{n+2} + \cdots$$

$$(1 - bt - t^2)\, G(t) = \ Q_0 + t(Q_1 - bQ_0) + \cdots + \ t^{2n}(Q_{2n} - bQ_{2n-1} - Q_{2n-2})$$
$$+t^{2n+1}(Q_{2n+1} - bQ_{2n} - Q_{2n-1}) + \cdots$$

buradan

$$(1 - bt - t^2)\, G(t) = \ Q_0 + t(Q_1 - bQ_0)$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} (Q_{2n} - bQ_{2n-1} - Q_{2n-2}) t^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} (Q_{2n+1} - bQ_{2n} - Q_{2n-1}) t^{2n+1}$$

$$= Q_0 + t(Q_1 - bQ_0)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} [(q_{2n} - bq_{2n-1} - q_{2n-2}) t^{2n} + (q_{2n+1} - bq_{2n} - q_{2n-1}) t^{2n-1}] e_0$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}[(q_{2n+1}-bq_{2n}-q_{2n-1})t^{2n}+(q_{2n+2}-bq_{2n+1}-q_{2n})t^{2n-1}]e_1$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}[(q_{2n+2}-bq_{2n+1}-q_{2n})t^{2n}+(q_{2n+3}-bq_{2n+2}-q_{2n+1})t^{2n-1}]e_2$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}[(q_{2n+3}-bq_{2n+2}-q_{2n+1})t^{2n}+(q_{2n+4}-bq_{2n+3}-q_{2n+2})t^{2n-1}]e_3$$

$q_{2n+1}=bq_{2n}+q_{2n-1}$ ve $q_{2n}=bq_{2n-1}+q_{2n-2}$ bağıntıları kullanılarak

$$(1-bt-t^2)\,G(t)=\ Q_0+t(Q_1-bQ_0)+\left(\sum_{n=1}^{\infty}(a-b)q_{2n-1}t^{2n}\right)e_0$$
$$+\left(\sum_{n=1}^{\infty}(a-b)q_{2n+1}t^{2n+1}\right)e_1+\left(\sum_{n=1}^{\infty}(a-b)q_{2n+1}t^{2n}\right)e_2$$
$$+\left(\sum_{n=1}^{\infty}(a-b)q_{2n+3}t^{2n+1}\right)e_3$$

buradan

$$(1-bt-t^2)\,G(t)=\ Q_0+t(Q_1-bQ_0)+(a-b)t\left(\sum_{n=1}^{\infty}q_{2n-1}t^{2n-1}\right)e_0$$

$$+(a-b)\left(\sum_{n=2}^{\infty}q_{2n-1}t^{2n-1}\right)e_1+(a-b)\frac{1}{t}\left(\sum_{n=2}^{\infty}q_{2n-1}t^{2n-1}\right)e_2$$

$$+(a-b)\frac{1}{t^2}\left(\sum_{n=3}^{\infty}q_{2n-1}t^{2n-1}\right)e_3$$

$$= Q_0 + t(Q_1 - bQ_0) + (a-b)tf(t)e_0 + (a-b)(f(t)-t)e_1$$

$$+(a-b)\left(\frac{f(t)-t}{t}\right)e_2 + (a-b)\left(\frac{f(t)-t-(ab+1)t^3}{t^2}\right)e_3$$

$$= Q_0 + t(Q_1 - bQ_0) + (a-b)R(t)$$

dolayısıyla

$$G(t) = \frac{Q_0 + (Q_1 - bQ_0)t + (a-b)R(t)}{1 - bt - t^2}$$

şeklinde elde edilir.

4.3. Teorem: İki periyodik Fibonacci kuaterniyon dizilerinin Binet formülü

$$Q_n = \begin{cases} \dfrac{1}{(ab)^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}} \dfrac{\alpha^* \alpha^n - \beta^* \beta^n}{\alpha - \beta} & , \text{n çift} \\ \dfrac{1}{(ab)^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}} \dfrac{\alpha^{**} \alpha^n - \beta^{**} \beta^n}{\alpha - \beta} & , \text{n tek} \end{cases}$$

şeklindedir. Burada

$$\alpha^* = \sum_{l=0}^{3} \frac{a^{\xi(l+1)}}{(ab)^{\left\lfloor \frac{l}{2} \right\rfloor}} \alpha^l e_l \quad , \qquad \beta^* = \sum_{l=0}^{3} \frac{a^{\xi(l+1)}}{(ab)^{\left\lfloor \frac{l}{2} \right\rfloor}} \beta^l e_l$$

$$\alpha^{**}=\sum_{l=0}^{3}\frac{a^{\xi(l)}}{(ab)^{\left\lfloor\frac{l+1}{2}\right\rfloor}}\alpha^{l}e_{l}\ \ ,\ \ \beta^{**}=\sum_{l=0}^{3}\frac{a^{\xi(l)}}{(ab)^{\left\lfloor\frac{l+1}{2}\right\rfloor}}\beta^{l}e_{l}$$

dir. (Tan ve diğerleri, 2016)

İspat:

$$\mathrm{Q_n}=\mathrm{q}_{n}\mathrm{e_0}+\mathrm{q_{n+1}e_1}+\mathrm{q_{n+2}e_2}+\mathrm{q_{n+3}e_3}$$

iki periyodik Fibonacci sayılarının Binet formülü kullanılırsa,

$$Q_n=\frac{a^{\xi(n+1)}}{(ab)^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}}\left(\frac{\alpha^{n}-\beta^{n}}{\alpha-\beta}\right)e_0+\frac{a^{\xi(n+2)}}{(ab)^{\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor}}\left(\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}\right)e_1$$

$$+\frac{a^{\xi(n+3)}}{(ab)^{\left\lfloor\frac{n+2}{2}\right\rfloor}}\left(\frac{\alpha^{n+2}-\beta^{n+2}}{\alpha-\beta}\right)e_2+\frac{a^{\xi(n+4)}}{(ab)^{\left\lfloor\frac{n+3}{2}\right\rfloor}}\left(\frac{\alpha^{n+3}-\beta^{n+3}}{\alpha-\beta}\right)e_3$$

$$=\frac{\alpha^{n}}{\alpha-\beta}\left[\frac{a^{\xi(n+1)}}{(ab)^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}}e_0+\frac{a^{\xi(n+2)}\alpha}{(ab)^{\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor}}e_1+\frac{a^{\xi(n+3)}\alpha^{2}}{(ab)^{\left\lfloor\frac{n+2}{2}\right\rfloor}}e_2+\frac{a^{\xi(n+4)}\alpha^{3}}{(ab)^{\left\lfloor\frac{n+3}{2}\right\rfloor}}e_3\right]$$

$$-\frac{\beta^{n}}{\alpha-\beta}\left[\frac{a^{\xi(n+1)}}{(ab)^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}}e_0+\frac{a^{\xi(n+2)}\beta}{(ab)^{\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor}}e_1+\frac{a^{\xi(n+3)}\beta^{2}}{(ab)^{\left\lfloor\frac{n+2}{2}\right\rfloor}}e_2+\frac{a^{\xi(n+4)}\beta^{3}}{(ab)^{\left\lfloor\frac{n+3}{2}\right\rfloor}}e_3\right]$$

dir.

n çift sayı olmak üzere

$$Q_n = \frac{\alpha^n}{\alpha-\beta}\left[\frac{a}{(ab)^{\frac{n}{2}}}e_0 + \frac{\alpha}{(ab)^{\frac{n}{2}}}e_1 + \frac{a\alpha^2}{(ab)^{\frac{n}{2}+1}}e_2 + \frac{\alpha^3}{(ab)^{\frac{n}{2}+1}}e_3\right]$$

$$-\frac{\beta^n}{\alpha-\beta}\left[\frac{a}{(ab)^{\frac{n}{2}}}e_0 + \frac{\beta}{(ab)^{\frac{n}{2}}}e_1 + \frac{a\beta^2}{(ab)^{\frac{n}{2}+1}}e_2 + \frac{\beta^3}{(ab)^{\frac{n}{2}+1}}e_3\right]$$

$$= \frac{\alpha^n}{\alpha-\beta}\frac{1}{(ab)^{\frac{n}{2}}}\left[ae_0 + \alpha e_1 + \frac{1}{ab}\alpha^2 e_2 + \frac{1}{ab}\alpha^3 e_3\right]$$

$$-\frac{\beta^n}{\alpha-\beta}\frac{1}{(ab)^{\frac{n}{2}}}\left[ae_0 + \beta e_1 + \frac{1}{ab}\beta^2 e_2 + \frac{1}{ab}\beta^3 e_3\right]$$

$$= \frac{\alpha^n}{\alpha-\beta}\frac{1}{(ab)^{\frac{n}{2}}}\sum_{l=0}^{3}\frac{a^{\xi(l+1)}}{(ab)^{\lfloor\frac{l}{2}\rfloor}}\alpha^l e_l - \frac{\beta^n}{\alpha-\beta}\frac{1}{(ab)^{\frac{n}{2}}}\sum_{l=0}^{3}\frac{a^{\xi(l+1)}}{(ab)^{\lfloor\frac{l}{2}\rfloor}}\beta^l e_l$$

$$= \frac{1}{(ab)^{\frac{n}{2}}}\frac{\alpha^n}{\alpha-\beta}\alpha^* - \frac{1}{(ab)^{\frac{n}{2}}}\frac{\beta^n}{\alpha-\beta}\beta^*$$

$$= \frac{1}{(ab)^{\frac{n}{2}}}\left[\frac{\alpha^*\alpha^n - \beta^*\beta^n}{\alpha-\beta}\right]$$

$$= \frac{1}{(ab)^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}}\left[\frac{\alpha^*\alpha^n - \beta^*\beta^n}{\alpha-\beta}\right]$$

dir.

n tek sayı olmak üzere,

$$Q_n = \frac{\alpha^n}{\alpha-\beta}\left[\frac{1}{(ab)^{\frac{n-1}{2}}}e_0 + \frac{a\alpha}{(ab)^{\frac{n+1}{2}}}e_1 + \frac{\alpha^2}{(ab)^{\frac{n+1}{2}}}e_2 + \frac{a\alpha^3}{(ab)^{\frac{n+1}{2}+1}}e_3\right]$$

$$-\frac{\beta^n}{\alpha-\beta}\left[\frac{1}{(ab)^{\frac{n-1}{2}}}e_0 + \frac{a\beta}{(ab)^{\frac{n+1}{2}}}e_1 + \frac{\beta^2}{(ab)^{\frac{n+1}{2}}}e_2 + \frac{a\beta^3}{(ab)^{\frac{n+1}{2}+1}}e_3\right]$$

$$= \frac{\alpha^n}{\alpha-\beta}\frac{1}{(ab)^{\frac{n-1}{2}}}\left[e_0 + \frac{a}{ab}\alpha e_1 + \frac{1}{ab}\alpha^2 e_2 + \frac{1}{ab^2}\alpha^3 e_3\right]$$

$$-\frac{\beta^n}{\alpha-\beta}\frac{1}{(ab)^{\frac{n-1}{2}}}\left[e_0 + \frac{a}{ab}\beta e_1 + \frac{1}{ab}\beta^2 e_2 + \frac{1}{ab^2}\beta^3 e_3\right]$$

$$= \frac{\alpha^n}{\alpha-\beta}\frac{1}{(ab)^{\frac{n-1}{2}}}\sum_{l=0}^{3}\frac{a^{\xi(l)}}{(ab)^{\lfloor\frac{l+1}{2}\rfloor}}\alpha^l e_l - \frac{\beta^n}{\alpha-\beta}\frac{1}{(ab)^{\frac{n-1}{2}}}\sum_{l=0}^{3}\frac{a^{\xi(l)}}{(ab)^{\lfloor\frac{l+1}{2}\rfloor}}\beta^l e_l$$

$$= \frac{1}{(ab)^{\frac{n-1}{2}}}\frac{\alpha^n}{\alpha-\beta}\alpha^{**} - \frac{1}{(ab)^{\frac{n-1}{2}}}\frac{\beta^n}{\alpha-\beta}\beta^{**}$$

$$= \frac{1}{(ab)^{\frac{n-1}{2}}}\left[\frac{\alpha^{**}\alpha^n - \beta^{**}\beta^n}{\alpha-\beta}\right]$$

$$= \frac{1}{(ab)^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}}\left[\frac{\alpha^{**}\alpha^n - \beta^{**}\beta^n}{\alpha-\beta}\right]$$

dir.

4.4.Teorem: n negatif olmayan tamsayı ve r çift tamsayılar için $r \leq n$ olmak üzere

$$Q_{n+r}Q_{n-r} - Q_n^2 = \begin{cases} \dfrac{\alpha^*\beta^*((ab)^r - \alpha^{2r}) + \beta^*\alpha^*((ab)^r - \beta^{2r})}{(ab)^r(\alpha-\beta)^2} & , n\, çift \\ -\dfrac{\alpha^{**}\beta^{**}((ab)^r - \alpha^{2r}) + \beta^{**}\alpha^{**}((ab)^r - \beta^{2r})}{(ab)^{r-1}(\alpha-\beta)^2} & , n\, tek \end{cases}$$

eşitliği vardır. (Tan ve diğerleri, 2016)

İspat:

$Q_{n+r}Q_{n-r} - Q_n^2$ ifadesini n ‘nin tek ve çift tamsayı olma durumuna göre ayrı ayrı inceleyelim.

Eğer n çift tamsayı ise

$$Q_{n+r}Q_{n-r} - Q_n^2 = \left[\frac{1}{(ab)^{\left\lfloor\frac{n+r}{2}\right\rfloor}}\frac{\alpha^*\alpha^{n+r} - \beta^*\beta^{n+r}}{(\alpha-\beta)}\right]\left[\frac{1}{(ab)^{\left\lfloor\frac{n-r}{2}\right\rfloor}}\frac{\alpha^*\alpha^{n-r} - \beta^*\beta^{n-r}}{(\alpha-\beta)}\right]$$

$$-\left[\frac{1}{(ab)^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}}\frac{\alpha^*\alpha^n - \beta^*\beta^n}{(\alpha-\beta)}\right]^2$$

$$= \frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\frac{1}{(ab)^n}\left[(\alpha^*\beta^*(\alpha\beta^n - (\alpha\beta)^n\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^r) + \left(\beta^*\alpha^*(\beta\alpha)^n - (\beta\alpha)^n - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^r\right)\right]$$

$$= \frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\frac{1}{(ab)^n}(ab)^n\left[\alpha^*\beta^*\left(1-\frac{\alpha^r}{\beta^r}\right)+\beta^*\alpha^*\left(1-\frac{\beta^r}{\alpha^r}\right)\right]$$

$$= \frac{\alpha^*\beta^*((\alpha\beta)^r-\alpha^{2r})+\beta^*\alpha^*((\alpha\beta)^r-\beta^{2r}}{(\alpha-\beta)^2(ab)^r}$$

dir.

Eğer *n* tek tamsayı ise

$$Q_{n+r}Q_{n-r}-Q_n^2 = \left[\frac{1}{(ab)^{\left\lfloor\frac{n+r}{2}\right\rfloor}}\frac{\alpha^{**}\alpha^{n+r}-\beta^{**}\beta^{n+r}}{(\alpha-\beta)}\right]\left[\frac{1}{(ab)^{\left\lfloor\frac{n-r}{2}\right\rfloor}}\frac{\alpha^{**}\alpha^{n-r}-\beta^{**}\beta^{n-r}}{(\alpha-\beta)}\right] - \left[\frac{1}{(ab)^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}}\frac{\alpha^{**}\alpha^{n}-\beta^{**}\beta^{n}}{(\alpha-\beta)}\right]^2$$

$$= -\frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\frac{(ab)^n}{(ab)^{n-1}}\left[\alpha^{**}\beta^{**}\left(1-\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^r\right)+\beta^{**}\alpha^{**}\left(1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^r\right)\right]$$

$$= \frac{\alpha^{**}\beta^{**}((ab)^r-\alpha^{2r})+\beta^{**}\alpha^{**}((ab)^r-\beta^{2r})}{(\alpha-\beta)^2(ab)^{r-1}}$$

dir.

Yukarıdaki teoremde $r = 1$ alarak iki periyodik Fibonacci kuaterniyonları için Cassini özdeşliği elde edilir.

5. İKİ PERİYODİK LUCAS KUATERNİYONLAR

5.1. Tanım: p_n *n.* iki periyodik Lucas sayısı olmak üzere

$$P_n = p_n + p_{n+1}e_1 + p_{n+2}e_2 + p_{n+3}e_3$$

kuaterniyon dizisine *iki periyodik Lucas kuaterniyon dizisi* denir. (Tan ve diğerleri, 2016)

5.2. Teorem: İki periyodik Lucas kuaterniyonu P_n için üreteç fonksiyonu:

$$G(t) = \frac{P_0 + (P_1 - aP_0)t + (b - a)S(t)}{1 - at - t^2}$$

şeklindedir, burada

$$S(t) := tg(t)e_0 + (g(t) - at)e_1 + \left(\frac{g(t)}{t} - a\right)e_2 + \left(\frac{g(t) - a(t + (ab + 3)t^3}{t^2}\right)e_3$$

$$g(t) := \sum_{n=1}^{\infty} p_{2n-1}t^{2n-1} = \frac{a(t - t^3)}{1 - (ab + 2)t^2 + t^4}$$

.(Tan ve diğerleri, 2016)

İspat:

$$G(t)=\sum_{n=1}^{\infty}P_nt^n=P_0+P_1t+P_2t^2+\cdots+P_nt^n+\cdots$$

ifadesini *at* ve t^2 ile çarpıp taraf tarafa toplarsak,

$$atG(t)=aP_0t+aP_1t^2+aP_2t^3+\cdots+aP_nt^{n+1}$$

$$t^2G(t)=P_0t^2+P_1t^3+P_2t^4+\cdots+P_nt^{n+2}+\cdots$$

$$(1-at-t^2)\,G(t)=\ P_0+t(P_1-aP_0)+\cdots$$
$$+t^{2n}(P_{2n}-aP_{2n-1}-P_{2n-2})t^{2n+1}(P_{2n+1}-aP_{2n}-P_{2n-1})+\cdots$$

$$(1-at-t^2)\,G(t)=\ P_0+t(P_1-aP_0)$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}(P_{2n}-aP_{2n-1}-P_{2n-2})t^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}(P_{2n+1}-aP_{2n}-P_{2n-1})t^{2n+1}$$

$$=P_0+t(P_1-aP_0)$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}[(p_{2n}-ap_{2n-1}-p_{2n-2})t^{2n}+(p_{2n+1}-ap_{2n}-p_{2n-1})t^{2n-1}]e_0$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}[(p_{2n+1}-ap_{2n}-p_{2n-1})t^{2n}+(p_{2n+2}-ap_{2n+1}-p_{2n})t^{2n-1}]e_1$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}[(p_{2n+2}-ap_{2n+1}-p_{2n})t^{2n}+(p_{2n+3}-ap_{2n+2}-p_{2n+1})t^{2n-1}]e_2$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}[(p_{2n+3}-ap_{2n+2}-p_{2n+1})t^{2n}+(p_{2n+4}-ap_{2n+3}-p_{2n+2})t^{2n-1}]e_3$$

burada $p_{2n+1}=ap_{2n}+p_{2n-1}$ ve $p_{2n}=bp_{2n-1}+p_{2n-2}$ bağıntıları kullanılarak

$$(1-at-t^2)\,G(t)= P_0+t(P_1-aP_0)$$

$$+\left(\sum_{n=1}^{\infty}(b-a)p_{2n-1}t^{2n}\right)e_0+\left(\sum_{n=1}^{\infty}(b-a)p_{2n+1}t^{2n+1}\right)e_1$$

$$+\left(\sum_{n=1}^{\infty}(b-a)p_{2n+1}t^{2n}\right)e_2+\left(\sum_{n=1}^{\infty}(b-a)p_{2n+3}t^{2n+1}\right)e_3$$

$$(1-at-t^2)\,G(t)= P_0+t(P_1-aP_0)$$

$$+(b-a)t\left(\sum_{n=1}^{\infty}p_{2n-1}t^{2n-1}\right)e_0+(b-a)\left(\sum_{n=2}^{\infty}p_{2n-1}t^{2n-1}\right)e_1$$

$$+(b-a)\frac{1}{t}\left(\sum_{n=2}^{\infty}p_{2n-1}t^{2n-1}\right)e_2+(b-a)\frac{1}{t^2}\left(\sum_{n=3}^{\infty}p_{2n-1}t^{2n-1}\right)e_3$$

$$= P_0+t(P_1-aP_0)+(b-a)tg(t)e_0+(b-a)(g(t)-at)e_1$$

$$+(b-a)\left(\frac{g(t)-at}{t}\right)e_2+(b-a)\left(\frac{g(t)-at-a(ab+3)t^3}{t^2}\right)e_3$$

$$= P_0+t(P_1-bP_0)+(b-a)S(t)$$

böylece

$$G(t) = \frac{P_0 + (P_1 - aP_0)t + (b-a)S(t)}{1 - at - t^2}$$

elde edilir.

5.3. Teorem: İki periyodik Lucas kuaterniyon dizilerinin Binet formülü

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{1}{(ab)^{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor}} \ \alpha^{**}\alpha^n + \beta^{**}\beta^n \text{ , n çift} \\ \dfrac{1}{(ab)^{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor}} \alpha^{*}\alpha^n + \beta^{*}\beta^n \text{ , n tek} \end{cases}$$

şeklindedir, burada

$$\alpha^* = \sum_{l=0}^{3} \frac{a^{\xi(l+1)}}{(ab)^{\left\lfloor \frac{l}{2} \right\rfloor}} \alpha^l e_l \quad , \qquad \beta^* = \sum_{l=0}^{3} \frac{a^{\xi(l+1)}}{(ab)^{\left\lfloor \frac{l}{2} \right\rfloor}} \beta^l e_l$$

$$\alpha^{**} = \sum_{l=0}^{3} \frac{a^{\xi(l)}}{(ab)^{\left\lfloor \frac{l+1}{2} \right\rfloor}} \alpha^l e_l \quad , \qquad \beta^{**} = \sum_{l=0}^{3} \frac{a^{\xi(l)}}{(ab)^{\left\lfloor \frac{l+1}{2} \right\rfloor}} \beta^l e_l$$

dir. (Tan ve diğerleri, 2016)

İspat.

$$\mathrm{P_n} = \mathrm{p_0 e_0} + \mathrm{p_1 e_1} + \mathrm{p_2 e_2} + \mathrm{p_3 e_3}$$

olmak üzere

$$P_n = \frac{a^{\xi(n+1)}}{(ab)^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}}(\alpha^n + \beta^n)e_0 + \frac{a^{\xi(n+2)}}{(ab)^{\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor}}(\alpha^{n+1} + \beta^{n+1})e_1$$

$$+\frac{a^{\xi(n+3)}}{(ab)^{\left\lfloor\frac{n+2}{2}\right\rfloor}}(\alpha^{n+2} + \beta^{n+2})e_2 + \frac{a^{\xi(n+4)}}{(ab)^{\left\lfloor\frac{n+3}{2}\right\rfloor}}(\alpha^{n+3} + \beta^{n+3})e_3$$

$$= \alpha^n \left[\frac{a^{\xi(n)}}{(ab)^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}}e_0 + \frac{a^{\xi(n+1)}\alpha}{(ab)^{\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor}}e_1 + \frac{a^{\xi(n+2)}\alpha^2}{(ab)^{\left\lfloor\frac{n+2}{2}\right\rfloor}}e_2 + \frac{a^{\xi(n+3)}\alpha^3}{(ab)^{\left\lfloor\frac{n+3}{2}\right\rfloor}}e_3\right]$$

$$+\beta^n \left[\frac{a^{\xi(n)}}{(ab)^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}}e_0 + \frac{a^{\xi(n+1)}\beta}{(ab)^{\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor}}e_1 + \frac{a^{\xi(n+2)}\beta^2}{(ab)^{\left\lfloor\frac{n+2}{2}\right\rfloor}}e_2 + \frac{a^{\xi(n+3)}\beta^3}{(ab)^{\left\lfloor\frac{n+3}{2}\right\rfloor}}e_3\right]$$

dir.

n çift sayıları için inceleyelim.

$$P_n = \alpha^n \left[\frac{1}{(ab)^{\frac{n}{2}}}e_0 + \frac{a\alpha}{(ab)^{\frac{n}{2}+1}}e_1 + \frac{\alpha^2}{(ab)^{\frac{n}{2}+1}}e_2 + \frac{a\alpha^3}{(ab)^{\frac{n}{2}+2}}e_3\right]$$

$$+\beta^n \left[\frac{1}{(ab)^{\frac{n}{2}}}e_0 + \frac{a\beta}{(ab)^{\frac{n}{2}+1}}e_1 + \frac{\beta^2}{(ab)^{\frac{n}{2}+1}}e_2 + \frac{a\beta^3}{(ab)^{\frac{n}{2}+2}}e_3\right]$$

$$= \alpha^n \frac{1}{(ab)^{\frac{n}{2}}}\left[e_0 + \frac{a\alpha}{ab} e_1 + \frac{1}{ab}\alpha^2 e_2 + \frac{a}{(ab)^2}\alpha^3 e_3\right]$$

$$+\beta^n \frac{1}{(ab)^{\frac{n}{2}}}\left[a e_0 + \frac{a\beta}{ab} e_1 + \frac{1}{ab}\beta^2 e_2 + \frac{a}{(ab)^2}\beta^3 e_3\right]$$

$$= \alpha^n \frac{1}{(ab)^{\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor}} \sum_{l=0}^{3} \frac{a^{\xi(l)}}{(ab)^{\left\lfloor\frac{l+1}{2}\right\rfloor}} \alpha^l e_l + \beta^n \frac{1}{(ab)^{\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor}} \sum_{l=0}^{3} \frac{a^{\xi(l)}}{(ab)^{\left\lfloor\frac{l+1}{2}\right\rfloor}} \beta^l e_l$$

$$= \frac{1}{(ab)^{\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor}} \alpha^n \alpha^{**} + \frac{1}{(ab)^{\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor}} \beta^n \beta^{**}$$

$$= \frac{1}{(ab)^{\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor}} \left[\alpha^{**}\alpha^n + \beta^{**}\beta^n\right]$$

dir.

n tek sayıları için inceleyelim.

$$P_n = \alpha^n \left[\frac{a}{(ab)^{\frac{n+1}{2}}} e_0 + \frac{\alpha}{(ab)^{\frac{n+1}{2}}} e_1 + \frac{a\alpha^2}{(ab)^{\frac{n+3}{2}}} e_2 + \frac{\alpha^3}{(ab)^{\frac{n+3}{2}}} e_3\right]$$

$$+\beta^n \left[\frac{a}{(ab)^{\frac{n+1}{2}}} e_0 + \frac{\beta}{(ab)^{\frac{n+1}{2}}} e_1 + \frac{a\beta^2}{(ab)^{\frac{n+3}{2}}} e_2 + \frac{a\beta^3}{(ab)^{\frac{n+3}{2}}} e_3\right]$$

$$= \alpha^n \frac{1}{(ab)^{\frac{n+1}{2}}} \left[ae_0 + \alpha e_1 + \frac{a}{ab}\alpha^2 e_2 + \frac{1}{ab^2}\alpha^3 e_3\right]$$

$$+\beta^n \frac{1}{(ab)^{\frac{n+1}{2}}} \left[ae_0 + \beta e_1 + \frac{a}{ab}\beta^2 e_2 + \frac{1}{ab^2}\beta^3 e_3\right]$$

$$= \alpha^n \frac{1}{(ab)^{\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor}} \sum_{l=0}^{3} \frac{a^{\xi(l+1)}}{(ab)^{\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor}} \alpha^l e_l + \beta^n \frac{1}{(ab)^{\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor}} \sum_{l=0}^{3} \frac{a^{\xi(l+1)}}{(ab)^{\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor}} \beta^l e_l$$

$$= \frac{1}{(ab)^{\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor}} \alpha^n \alpha^* + \frac{1}{(ab)^{\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor}} \beta^n \beta^*$$

$$= \frac{1}{(ab)^{\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor}} [\alpha^* \alpha^n + \beta^* \beta^n]$$

dir.

5.4. Teorem: *n* negatif olmayan tamsayı ve *r* negatif olmayan çift tamsayılar için $r \leq n$ olmak üzere

$$P_{n+r}P_{n-r} - P_n^2 = \begin{cases} \dfrac{\alpha^{**}\beta^{**}(\alpha^{2r} - (ab)^r) + \beta^{**}\alpha^{**}(\beta^{2r} - (ab)^r)}{(ab)^r} & , n\ çift \\ -\dfrac{\alpha^{*}\beta^{*}(\alpha^{2r} - (ab)^r) + \beta^{*}\alpha^{*}(\beta^{2r} - (ab)^r)}{(ab)^{r+1}} & , n\ tek \end{cases}$$

eşitliği vardır. (Tan ve diğerleri, 2016)

İspat:

$P_{n+r}P_{n-r} - P_n^2$ ifadesini *n* ‘nin tek ve çift tamsayı durumları için inceleyelim.

Eğer *n* çift tamsayı ise

$$P_{n+r}P_{n-r} - P_n^2$$

$$= \left[\frac{1}{(ab)^{\left\lfloor\frac{n+r+1}{2}\right\rfloor}}\alpha^{**}\alpha^{n+r} - \beta^{**}\beta^{n+r}\right]\left[\frac{1}{(ab)^{\left\lfloor\frac{n-r+1}{2}\right\rfloor}}\alpha^{**}\alpha^{n-r} - \beta^{**}\beta^{n-r}\right]$$

$$-\left[\frac{1}{(ab)^{\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor}}\alpha^{**}\alpha^{n} - \beta^{**}\beta^{n}\right]^2$$

$$= \frac{1}{(ab)^n}\left[\left(\alpha^{**}\beta^{**}((\alpha\beta)^n\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^r - (\alpha\beta)^n\right) + \left(\beta^{**}\alpha^{**}((\beta\alpha)^n\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^r - (\beta\alpha)^n)\right)\right]$$

$$= \frac{1}{(ab)^n}(ab)^n\left[\alpha^{**}\beta^{**}\left(\frac{\alpha^r}{\beta^r} - 1\right) + \beta^{**}\alpha^{**}\left(\frac{\beta^r}{\alpha^r} - 1\right)\right]$$

$$= \frac{\alpha^{**}\beta^{**}(\alpha^{2r} - (ab)^r) + \beta^{**}\alpha^{**}(\beta^{2r} - (ab)^r)}{(ab)^r}$$

dir.

Eğer *n* tek tamsayı ise

$$P_{n+r}P_{n-r} - P_n^2 = \left[\frac{1}{(ab)^{\left\lfloor\frac{n+r+1}{2}\right\rfloor}}\alpha^*\alpha^{n+r} - \beta^*\beta^{n+r}\right]\left[\frac{1}{(ab)^{\left\lfloor\frac{n-r+1}{2}\right\rfloor}}\alpha^*\alpha^{n-r} - \beta^*\beta^{n-r}\right]$$

$$-\left[\frac{1}{(ab)^{\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor}}\alpha^*\alpha^n - \beta^*\beta^n\right]^2$$

$$= \frac{1}{(ab)^{n+1}}\left[(\alpha^*\beta^*((\alpha\beta)^n\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^r - (\alpha\beta)^n) + \left(\beta^*\alpha^*((\beta\alpha)^n\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^r - (\beta\alpha)^n)\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{(ab)^{n+1}}(ab)^n\left[\alpha^*\beta^*\left(\frac{\alpha^r}{\beta^r} - 1\right) + \beta^*\alpha^*\left(\frac{\beta^r}{\alpha^r} - 1\right)\right]$$

$$= -\frac{\alpha^*\beta^*(\alpha^{2r} - (ab)^r) + \beta^*\alpha^*(\beta^{2r} - (ab)^r)}{(ab)^{r+1}}$$

dir.

6. SONUÇ

Bu tezde İki Periyodik Fibonacci Kuaterniyon dizisi ve İki Periyodik Lucas Kuaterniyon dizisi tanıtılıp bazı özellikleri gösterildi. Benzer özelliklerin İki Periyodik Fibonacci Split Kuaterniyonları ve İki Periyodik Lucas Split Kuaterniyonları dizilerinde de araştırılacaktır.

KAYNAKLAR

Akyiğit M. , Köksal H. H., Tosun M. 2013, Split Fibonacci Quaternions. Advances in Applied Clifford Algebras, 23:535-545.

Bilgici G. 2014, Two Generalizations of Lucas Sequence Appl. Math. Comput. 245:526–38.

Edson M, Yayenie O. 2009, A New Generalizations of Fibonacci Sequences and Extended Binet's Formula. Integers 9:639–54.

Everest G, Poorten A, Shparlinski I,Ward T., Recurrence Sequences, Mathematical Surveys and Monographs, 2003.

Ferguson H. 1978. The Fibonacci Pseudogroup, Characteristic Polynomials and Eigenvalues of Tridiagonal Matrices, Periodic Linear Recurrence Systems and Application to Quantum Mechanics. The Fibonacci Quarterly, 16.4, 435-447.

Halici S., 2012, On Fibonacci Quaternions, Adv. Appl. Clifford Algebras 22:321–7.

Hamilton W.R., 1853, Lectures on Quaternions Dublin:Hodges and Smith.

Horadam A. F. 1961, A Generalized Fibonacci Sequence. Amer. Math. Monthly 68, 455-.

Horadam A. F. 1963, Complex Fibonacci Numbers and Fibonacci Quaternions. Amer. Math. Monthly 70, 289-291.

Horadam A. F. 1993, Quaternion Recurrence Relations. Ulam Quaterly 2, 23-33.

Iyer M.R.1969, A Note on Fibonacci Quaternions Fibonacci Quarterly 3:225–229.

Koshy T. 2001, Fibonacci and Lucas Numbers with Applications. Wiley, 652s., Canada.

Panario D. , Sahin M. and Wang, Q. 2013, A Family of Fibonacci-like conditional sequences. INTEGERS Electronic Journal of Combinatorial Number Theory. 13, A78.

Tan E., Yilmaz S., Sahin M. 2016, A note on Bi-periodic Fibonacci and Lucas quaternions, “Chaos, Solitons and Fractals”, 85, 138-142.

Tan E., Yilmaz S., Sahin M. 2016, On a new generalization of Fibonacci quaternions, “Chaos, Solitons and Fractals”, 82, 1-4.