T. C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İKİNCİ MERTEBEDEN GECİKMELİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERDE SALINIM

İdris BİLİR

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞANLIURFA
2019

Doç. Dr. Tanfer TANRIVERDİ danışmanlığında, İdris BİLİR'in hazırladığı **"İkinci Mertebeden Gecikmeli Diferansiyel Denklemlerde Salınım"** konulu bu çalışma 08/08/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Harran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

		İmza
Danışman	: Doç. Dr. Tanfer TANRIVERDİ	……………………………….
Üye	: Dr. Öğr. Üyesi Mahmut MODANLI	……………………………….
Üye	: Dr. Öğr. Üyesi Abdulkadir KARAKAŞ	……………………………….

Bu Tezin Matematik Anabilim Dalında Yapıldığını ve Enstitümüz Kurallarına Göre Düzenlendiğini Onaylarım.

Doç. Dr. İsmail HİLALİ
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

İKİNCİ MERTEBEDEN GECİKMELİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERDE SALINIM

İdris BİLİR

Harran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Tanfer TANRIVERDİ
Yıl: 2019, Sayfa: 88

Bu tezde, daha önce bilinen ikinci mertebeden gecikmeli diferansiyel denklemlerde salınım ile ilgili bazı sonuçlar irdelenmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Gecikmeli diferansiyel denklem, salınım teorisi

ABSTRACT

MSc Thesis

OSCILLATION OF SECOND ORDER DELAY DIFFERENTIAL EQUATIONS

İdris BİLİR

Harran University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Doç. Dr. Tanfer TANRIVERDİ
Year: 2019, Page: 88

In this thesis, well known results related to the oscillation and nonoscillation theory of second order delay differential equations are studied in detail.

KEY WORDS: Delay differential equatio, oscillation theory

TEŞEKKÜR

Hazırladığım bu tezin her aşamasında değerli bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım, bana her zaman her konuda yol gösteren ve yardımcı olan, çok değerli hocam Doç. Dr. Tanfer TANRIVERDİ'ye; bu günlere gelmemde maddi, manevi hiçbir fedakarlıktan çekinmeyen başta eşime, aileme ve tezi yazmamda yardımcı olan dostlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca, tezimin jürisinde bulunan ve katkı sunan hocalarıma şükranlarımı sunarım

1. GİRİŞ

Bu tezde, ikinci mertebeden gecikmeli diferansiyel denklemlerle ilgili bilinen sonuçlar hakkında detaylı bir tarama yapılacaktır. Ayrıca, pratikte belli karşılığı olan ikinci mertebeden gecikmeli diferansiyel denklemler irdelenecektir. Diferansiyel denklemler teorisi doğada gerçek hayat problemlerini formüle eden en temel enstrümanlardan biridir. Aynı zamanda, mekanik, fizik ve diğer sosyal bilimlerde de yaygın bir kullanıma sahiptir. Uygulamaların çoğunda ele alınan bir sistemin nedensellik ilkesi tarafından yönetildiği kabul edilir veya düşünülür. Yani, sistemin geçmişe bağlı konumuyla değil de sadece şu anki konumu tarafından idare edildiği düşünülür. Aynı zamanda, sistem konumun değişim oranı ve konumu içeren bir denklem tarafından idare ediliyorsa sistemin modellemesi genellikle ya bayağı diferansiyel denklemler ya da kısmi diferansiyel denklemler ile ifade edilir. Buna rağmen, detaylı bir irdeleme yapıldığında nedensellik ilkesinin sadece mevcut konum için doğru bir yaklaşım olduğu ve genelde uygulamaların çoğunda doğru olmadığı düşünülür. Bunun yerine daha realist olan ve sistemin geçmişteki konumunu içeren modellemeler yapılır. Sistemin geçmişteki konumunu görmemezlikten gelmek sistemin modellemesini anlamsız kılabilir. Bu modellemeleri analitik ve kalitatif olarak irdeleyen ve diferansiyel denklemlerin alt dalları olan gecikmeli diferansiyel denklemler, nötr gecikmeli diferansiyel denklemler ve fark diferansiyel denklemleridir.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Diferansiyel denklemler teorisi doğada gerçek hayat problemlerini formüle eden en temel enstrümanlardan biridir. Aynı zamanda, mekanik, fizik ve diğer sosyal bilimlerde de yaygın bir kullanıma sahiptir. Uygulamaların çoğunda ele alınan bir sistemin nedensellik ilkesi tarafından yönetildiği kabul edilir veya düşünülür. Yani, sistemin geçmişe bağlı konumuyla değil de sadece şu anki konumu tarafından idare edildiği düşünülür. Aynı zamanda, sistem konumun değişim oranı ve konumu içeren bir denklem tarafından idare ediliyorsa sistemin modellemesi genellikle ya bayağı diferansiyel denklemler (BDD) ya da kısmi diferansiyel denklemler (KDD) ile ifade edilir. Buna rağmen, detaylı bir irdeleme yapıldığında nedensellik ilkesinin sadece mevcut konum için doğru bir yaklaşım olduğu ve genelde uygulamaların çoğunda doğru olmadığı düşünülür. Bunun yerine daha realist olan ve sistemin geçmişteki konumunu içeren modellemeler yapılır. Sistemin geçmişteki konumunu görmemezlikten gelmek sistemin modellemesini anlamsız kılabilir. Bu modellemeleri analitik ve kalitatif olarak irdeleyen ve diferansiyel denklemlerin alt dalları olan gecikmeli diferansiyel denklemler (GDD), nötr gecikmeli diferansiyel denklemler (GDD) ve fark diferansiyel denklemleridir (FDD). GDD, FDD ve NGDD ilk olarak 18. yüzyılda Volterra, Bernoulli, Laplace ve Condorcet tarafından ele alındı. Geçmişten günümüze sistematik olarak araştırmacıların konuya olan ilgisi giderek artmakta ve hali hazırda bu konu hızlı bir gelişim göstermektedir. Konuya ilgi gittikçe artmaktadır. Bu konuda, yayımlanmış birçok bilimsel kitap ve makale bulunmaktadır. Bu tip denklemlerin yaygın kullanım alanları kontrol teorisi, matematiksel biyoloji, matematiksel ekonomi, sistemler teorisi ve klasik analizdir. İlk olarak, Volterra Predator-Prey modellerinde ve viskoelastisite problemlerinde gecikme parametresini kullanan ilk araştırmacılardandır. İletişim zamanını ignore etmeyen (göz ardı etmeksizin) basit geri dönüşümlü kontrol sistemlerinde modern zamanların ilk araştırmacısı Minorsky

$$x'(t) = F(t, x(t), x(t-r)) \tag{2.1}$$

denklemini çalışmıştır. Bunun yanında, Minorsky geminin stabilite ve karışım problemlerinde geri dönüşüm mekanizmasında gecikme parametresinin önemine açıkça vurgu yapmıştır. Kontrol teorisine olan ilgiyle beraber gecikme parametresinin FDD lere olan katkısını ifade etmek gerekir. Mishkis gecikmeli lineer diferansiyel denklemler ilgili genel teoriyi takdim eden ilklerdendir. Ayrıca, Bellman ve Danskin çeşitli denklemlerin uygulamalarında, örneğin biyoloji ve ekonomi de geçmiş hafızanın (sistemin geçmişteki konumu) önemine vurgu yaptılar. Aynı zamanda, çok iyi organize edilmiş sabit katsayılı diferansiyel denklemler teorisi ve stabilite teorisinin başlangıçlarını takdim ettiler. Stabilite teorisine katkıları olan diğer araştırmacılar Cooke ve Liapunov'dır. Kayıpsız transmisyon (iletim) hatlarında (Kayıpsız iletim sistemlerinde) α, β ve μ sabit olmak üzere

$$v'(t) = \alpha v'(t-r) - \beta v(t) - \alpha\beta\mu v(t-r) + F(v(t), v(t-r)). \tag{2.2}$$

İkinci mertebeden gecikmeli diferansiyel denklemlerde salınımı ile ilgili gerekli literatüre vurgu yapılacaktır. Bu denklemler;

$$x''(t) = F(t, x(t), x(t-r)) \tag{2.3}$$

ve

$$x''(t) = F(t, x(t), x'(t), x(t-r), x'(t-r)) \tag{2.4}$$

Bunun yanında, başka bir türle rekabet halinde olan veya başka bir türle kompetitif halde olan bir bakteri populasyonunun büyümesini irdeleyen

$$x''(t) + a(t)\,|\,x(t)\,|^{\lambda}\ \mathrm{sgn}\, x(t) = e(t),\ \ t \geq t_0 > 1 \tag{2.5}$$

ve $t \geq 0$ olmak üzere

$$(p(t)x'(t))' + q(t)x(t) + \sum_{i=1}^{n} q_i(t)\,|\,x(t)\,|^{\alpha_i}\ \mathrm{sgn}\, x(t) = e(t),$$

gibi benzer problemlerdeki salınım ele alınacaktır.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Karakteristik Denklem ve Pozitif Çözümler

$$\lambda + \sum_{i=1}^{n} p_i \, e^{-\lambda \tau_i} = 0 \tag{3.1}$$

denklemi

$$x'(t) + \sum_{i=1}^{n} p_i \, x(t - t_i) = 0\,, \quad t_0 \le t < T \tag{3.2}$$

otonom gecikmeli diferansiyel denkleminin karakteristik denklemi olduğu bilinmektedir.

3.1.1. Karakteristik denklemin genelleştirilmiş hali

$$x'(t) + \sum_{i=1}^{n} p_i(t)\, x\big(t - \tau_i(t)\big) = 0\,, \quad t_0 \le t < T \tag{3.3}$$

otonom olmayan lineer gecikmeli diferansiyel denklemini ele alalım. Burada,

$$t_0 < T \le \infty \text{ ve } i = 1, 2, 3, \ldots, n\,,\; p_i \in C\big[\,[t_0, T), R\big] \text{ ve } \tau_i \in C\big[\,[t_0, T), R^+\big] \tag{3.4}$$

$$t_{-1} = \min_{1 \le i \le n} \Big\{ \inf_{t_0 \le t < T} \{ t - \tau_j(t) \} \Big\} \tag{3.5}$$

olsun. (3.4) denkleminin başlangıç değer şartı

$$x(t) = \phi(t)\,, \quad t_{-1} \le t \le t_0 \text{ ile } \phi \in C\big[\,[t_{-1}, t_0\,], R\big] \tag{3.6}$$

ile verilir. (3.3) ve (3.6) başlangıç değer probleminin tek çözümü $t_0 \le t < T$ aralığı boyunca mevcut ve $x(\phi)(t)$ ile gösterilir.

Her $t \in [t_0, T)$ ve $i = 1,2,\ldots,n$ için

$$h_i(t) = \min\{t_0, t - \tau_i(t)\} \text{ ve } H_i(t) = \max\{t_0, t - \tau_i(t)\} \tag{3.7}$$

olsun. (3.3) denkleminin genelleştirilmiş karakteristik denklemine karşılık gelen integral denklemi

$$\alpha(t)+\sum_{i=1}^{n} p_i(\mathrm{t})\frac{\phi(h_i(t))}{\phi(t_0)}\exp\left(-\int_{H_i(t)}^{t}\alpha(s)\,ds\right)=0\,,t_0\le t<T \tag{3.8}$$

ile verilir. Burada (3.3) denkleminin varlığı araştırılacaktır. (3.3) denkleminin katsayıları ve gecikmeleri sabit ise (3.3) denklemi lineer otonom gecikmeli denklem olan

$$x'(t)+\sum_{i=1}^{n} p_i\, x(t-\tau_i)=0 \tag{3.9}$$

denklemine indirgeniyor. Bu denkleme karşılık gelen karakteristik denklem

$$\lambda+\sum_{i=1}^{n} p_i\, e^{-\lambda\,\tau_i}=0 \tag{3.10}$$

ile verilir. (3.9) denkleminde t yeterince büyük olduğunda (3.8) denklemi

$$\alpha(t)+\sum_{i=1}^{n} p_i\,\exp\left(-\int_{t-\tau_i}^{t}\alpha(s)\,ds\right)=0 \tag{3.11}$$

denklemine indirgenir. Eğer $\alpha(t)=\lambda$ biçimindeki çözümleri araştırılacak ise (3.11) denklemi tam olarak (3.10) denklemini verir.

Teorem 3.1.1.1. (Györi ve Ladas, 1991)

(3.4) doğru ve $\phi(t_0)>0$ olmak üzere $\phi\in C\left[\,[t_{-1},t_0],R\,\right]$ olsun. Bu halde, aşağıdaki ifadeler denktir.

(a) $t_0\le t<T$ aralığı üzerinde (3.3) ve (3.6) başlangıç değer probleminin çözümü pozitiftir.

(b) $t_0\le t<T$ aralığı üzerinde (3.8) genelleştirilmiş karakteristik denklem sürekli bir çözüme sahiptir.

(c) $$\beta(t)\le\gamma(t),\ t_0\le t<T, \tag{3.12}$$

sağlanacak şekilde $\beta,\gamma\in C\left[\,[t_0,T),R\,\right]$ yine

$$\beta(t)\le\delta(t)\le\gamma(t),\ t_0\le t<T, \tag{3.13}$$

sağlanacak şekilde β ve γ arasında bir $\delta\in C\left[\,[t_0,T),R\,\right]$ olsun. Bu halde,

$$\beta(t)\le(S\,\delta)(t)\le\gamma(t),\ t_0\le t<T, \tag{3.14}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada,

$$\left(S\,\delta\right)(t) \equiv -\sum_{i=1}^{n} p_i(t)\frac{\phi\left(h_i(t)\right)}{\phi(t_0)}\exp\left(-\int_{H_i(t)}^{t}\delta(s)\,ds\right).$$

İspat: (Györi ve Ladas, 1991)

(a) $\Rightarrow$(b): $x(t) = x(\phi)(t)$, (3.3) ve (3.6) başlangıç değer probleminin bir çözümü olsun. Hipotezden $t_0 \le t < T$ için $x(t) > 0$. Şimdi de

$$\alpha'(t) = \frac{x'(t)}{x(t)},\ t_0 \le t < T \tag{3.15}$$

tarafından tanımlanan $\alpha(t)$ nin $t_0 \le t < T$ aralığı üzerinde (3.8) nın bir çözümü olduğunu ispatlayalım. Gerçekten, (3.15) ifadesinden

$$x(t) = \phi(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t}\alpha(s)\,ds\right),\ t_0 \le t < T \tag{3.16}$$

ve böylece

$$\frac{x\left(H_i(t)\right)}{x(t)} = \exp\left(-\int_{H_i(t)}^{t}\alpha(s)\,ds\right),\ t_0 \le t < T \text{ ve } i = 1, 2, ..., n \tag{3.17}$$

elde edilir. (3.3) denkleminin her iki tarafı $x(t)$ ile bölünür ve (3.15) ve (3.17) kullanılırsa

$$\alpha(t) + \sum_{i=1}^{n} p_i(t)\frac{x\left(t-\tau_i(t)\right)}{x\left(H_i(t)\right)}\exp\left(-\int_{H_i(t)}^{t}\alpha(s)\,ds\right) = 0,\ t_0 \le t < T$$

elde edilir. $\alpha(t)$ nin (3.8) ifadesinin bir çözümü olduğunu göstermek için

$$i = 1, 2, ..., n \text{ ve } t_0 \le t < T \text{ için } \frac{x\left(t-\tau_i(t)\right)}{x\left(H_i(t)\right)} = \frac{\phi\left(h_i(t)\right)}{\phi(t_0)}$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Bunu yapabilmek için eğer $t - \tau_i(t) \ge t_0$ ise $h_i(t) = t_0$ ve $H_i(t) = t - \tau_i(t)$ olduğu görülebilir. Böylece

$$\frac{x\left(t-\tau_i(t)\right)}{x\left(H_i(t)\right)} = \frac{x\left(H_i(t)\right)}{x\left(H_i(t)\right)} = 1 = \frac{\phi(t_0)}{\phi(t_0)} = \frac{\phi\left(h_i(t)\right)}{\phi(t_0)}$$

elde edilir. Diğer taraftan, eğer $t - \tau_i(t) < t_0$ ise $h_i(t) = t - \tau_i(t)$ ve $H_i(t) = t_0$ ve yine

$$\frac{x(t-\tau_i(t))}{x(H_i(t))}=\frac{\phi(h_i(t))}{x(t_0)}=\frac{\phi(h_i(t))}{\phi(t_0)}$$

elde edilir. Bu ise (a) nın (b) yi gerektirdiğinin ispatıdır.

(b)$\Rightarrow$(c): Eğer $\alpha(t)$, (3.8) nın bir çözümü ise $t_0 \le t < T$ için $\beta(t)\equiv\gamma(t)\equiv\alpha(t)$ dır ve ispat açıktır. Çünkü, (3.8) dan $\alpha(t)=(S\,\alpha)(t)$.

(c) $\Rightarrow$(a) : İlk olarak (c) hipotezi altında (3.8) denkleminin $t_0 \le t < T$ üzerinde sürekli bir $\alpha(t)$ çözümü olduğunu ve ikinci olarak

$$x(t)=\begin{cases}\phi(t), & t_{-1}\le t<t_0\\ \phi(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t}\alpha(s)\,ds\right), & t_0\le t<T\end{cases} \tag{3.18}$$

nın (3.3) ve (3.6) başlangıç değer probleminin pozitif bir çözümü olduğunu göstermek gerekir.(3.8) denkleminin sürekli bir çözümü ardışık yaklaşıklar yöntemiyle inşa edilecektir. Burada, $\alpha_0 \in C\left[[t_0,T),R\right]$ olmak üzere

$$\beta(t)\le\alpha_0\le\gamma(t),\ t_0\le t<T \tag{3.19}$$

$$\alpha_{k+1}(t)=(S\,\alpha_k)(t),\ t_0\le t<T \text{ ve } k=0,1,... \tag{3.20}$$

sağlansın. (3.14) hipotezi ve tümevarım kullanılırsa tüm $k=1,2,...$ için

$$\beta(t)\le\alpha_k(t)\le\gamma(t),\ t_0\le t<T \tag{3.21}$$

elde edilir ve açıkça $\alpha_k \in C\left[[t_0,T),R\right]$.Şimdi de $\{\alpha_k(t)\}$ fonksiyon dizisinin $[t_0,T)$ aralığının kompakt bir alt aralığı olan $[t_0,T_1]$ üzerinde düzgün yakınsak olduğunu görelim.

$$L=\max_{t_0\le t\le T_1}\left\{\max\{|\beta(t)|,|\gamma(t)|\}\right\};$$

$$M=\max_{t_0\le t\le T_1}\sum_{i=1}^{n}\left|p_i(t)\frac{\phi(h_i(t))}{\phi(t_0)}\right|,$$

$N=M\,e^{L(T_1-t_0)}$ olsun. Bu halde, (3.21) dan $\max_{t_0\le t\le T_1}|\alpha_k(t)|\le L$ olur. Tüm $i=0,1,2,...,n$, $k=0,1,2,...$ ve $t_0\le t\le T_1$ için ara değer teoremi kullanılırsa

$$\exp\left(-\int_{H_i(t)}^{t}\alpha_k(s)\,ds\right)-\exp\left(-\int_{H_i(t)}^{t}\alpha_{k-1}(s)\,ds\right)=e^{-\mu_{k,i}(t)}\int_{H_i(t)}^{t}\left[\alpha_{k-1}(s)-\alpha_k(s)\right]ds$$

elde edilir. Burada, $\mu_{k,i}(t)$, $\int_{H_i(t)}^{t} \alpha_k(s)\mathrm{ds}$ ve $\int_{H_i(t)}^{t} \alpha_{k-1}(s)\,ds$ arasındadır. Böylece $H_i(t) \geq t_0$ olduğundan $|\mu_{k,1}(t)| \leq L(T_1 - t_0)$ ve

$$\left| \exp\left(-\int_{H_i(t)}^{t} \alpha_k(s)\,ds \right) - \exp\left(-\int_{H_i(t)}^{t} \alpha_{k-1}(s)\,ds \right) \right| \leq e^{L(T_1 - t_0)} \int_{t_0}^{t} |\alpha_k(s) - \alpha_{k-1}(s)|\,ds$$

elde edilir. Sonuç olarak, tüm $k = 0, 1, 2, ...$ ve $t_0 \leq t \leq T_1$ için

$$|\alpha_{k+1}(t) - \alpha_k(t)| \leq N \int_{t_0}^{t} |\alpha_k(s) - \alpha_{k-1}(s)|\,ds. \tag{3.22}$$

Tümevarımdan $k = 0, 1, 2, ...$ ve $t_0 \leq t \leq T_1$ için $|\alpha_{k+1}(t) - \alpha_k(t)| \leq 2L \dfrac{[N(t - t_0)]^k}{k!}$

dır. (Finizio ve Ladas, 1982). Weierstrass M−testinden $\sum_{k=0}^{\infty} [\alpha_{k+1}(t) - \alpha_k(t)]$ serisi $t_0 \leq t \leq T_1$ aralığı üzerinde düzgün yakınsaktır. Bu sebeple, $t_0 \leq t \leq T_1$, $\alpha_k(t) = \alpha_0(t) + \sum_{j=0}^{k-1} [\alpha_{j+1}(t) - \alpha_j(t)]$

dizisi düzgün yakınsak ve böylece

$$\alpha(t) \equiv \lim_{k \to \infty} \alpha_k(t) \tag{3.23}$$

limit fonksiyonu süreklidir. Düzgün yakınsaklıktan dolayı, $t_0 \leq t \leq T_1$ için

$$\begin{aligned} \alpha(t) = \lim_{k \to \infty} \alpha_{k+1}(t) &= \lim_{k \to \infty} \left[-\sum_{i=1}^{n} p_i(t) \frac{\phi(h_i(t))}{\phi(t_0)} \exp\left(-\int_{H_i(t)}^{t} \alpha_k(s)\,ds \right) \right] \\ &= -\sum_{i=1}^{n} p_i(t) \frac{\phi(h_i(t))}{\phi(t_0)} \exp\left(-\int_{H_i(t)}^{t} \alpha(s)\,ds \right) \end{aligned}$$

$[t_0, T_1]$ aralığında $\alpha(t)$, (3.8) nın bir çözümüdür. T_1, $[t_0, T)$ aralığında sabit bir nokta olduğunda (3.23) tarafından tanımlanan $\alpha(t)$, $t_0 \leq t < T$ üzerinde (3.8) nın bir çözümüdür. Sonuç olarak, (3.18) tarafından tanımlanan $x(t)$ nin (3.3) ve (3.6) başlangıç değer probleminin bir çözümü olduğunu göstermek yeterlidir. Açıkça, $x(t)$, $t_0 \leq t \leq T$ üzerinde pozitiftir. (a) $\Rightarrow$ (b) ifadesine benzer bir argüman kullanılırsa $t_0 \leq t \leq T$,

$$
\begin{aligned}
x'(t) &= \alpha(t)\,x(t) \\
&= -\,x(t)\sum_{i=1}^{n} p_i(t)\frac{\phi(h_i(t))}{\phi(t_0)}\exp\left(-\int_{H_i(t)}^{t}\alpha(s)\,ds\right) \\
&= -\,x(t)\sum_{\mathrm{i}=1}^{n} p_i(t)\,\frac{x(t-\tau_i(t))}{x(H_i(t))}\,\frac{x(H_i(t))}{x(t)} \\
&= -\sum_{i=1}^{n} p_i(t)\,x(t-\tau_i(t))
\end{aligned}
$$

olup teorem ispatlanmış oldu.

Sonuç 3.1.1.1. (Györi ve Ladas, 1991)

$\phi(t_0) > 0$ olmak üzere (3.4) sağlansın. Bu halde, $t_0 \le t < T$ üzerinde (3.3) ve (3.6) başlangıç değer probleminin bir $x(\phi)(t)$ çözümü pozitif olması için gerek ve yeter şart $t_0 \le t < T$ için

$$
x(\phi)(t) = \phi(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t}\alpha(s)\,ds\right) \tag{3.24}
$$

olmasıdır. Burada, $\alpha(t)$, (3.8) nın sürekli bir çözümüdür. Üstelik, (3.12) sağlanacak şekilde bir $\beta,\ \gamma \in C\left[\,[t_0, T), R\right]$ ve herhangi bir $\delta \in C\left[\,[t_0, T), R\right]$ varsa (3.13), (3.14) gerektirir. Bu halde, (3.8) nın $\alpha(t)$ ve $x(\phi)(t)$ çözümleri sırasıyla aşağıdaki eşitsizlikleri sağlar. $t_0 \le t < T$ için

$$
\beta(t) \le \alpha(t) \le \gamma(t) \tag{3.25}
$$

ve

$$
\phi(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t}\beta(s)\,ds\right) \le x(\phi)(t) \le \phi(t_0)\ \exp\left(\int_{t_0}^{t}\gamma(s)\,ds\right). \tag{3.26}
$$

Not 3.1.1.1. (Györi ve Ladas, 1991)

$\phi(t_0) > 0$ olmak üzere her $\phi \in C\left[\,[t_0, T), R\right]$ için (3.8) denklemi $t_0 \le t < T$ aralığı üzerinde en fazla bir çözüme sahiptir. Bu doğrudur çünkü (3.8) nın farklı iki çözümü (3.3) ve (3.6) başlangıç değer probleminin pozitif iki çözümünün varlığına tekabül eder bu ise mümkün değildir. Eğer (3.3) ve (3.6) başlangıç değer problemi $t_0 \le t < T$ aralığı üzerinde $x(\phi)(t)$ pozitif çözümüne sahipse (3.8) aynı aralık üzerinde tam olarak sürekli bir çözüme sahiptir.

Not 3.1.1.2. (Györi ve Ladas, 1991)

$i=1,2,...,n$ için $T=\infty$ ve $\lim_{t\to\infty}(t-\tau_i(t))=\infty$ olsun. Bu halde, yeterince büyük t ler ve $i=1,2,...,n$ için $h_i(t)=t_0$ ve $H_i(t)=t-\tau_i(t)$ ise (3.8) denklemi

$$\alpha(t)+\sum_{i=1}^{n} p_i(t)\exp\left(-\int_{t-\tau_i(t)}^{t}\alpha(s)\,ds\right)=0$$

denklemine indirgenir.

Sonuç 3.1.1.2. (Györi ve Ladas, 1991)

$i=1,2,...,n$, $p_i\in C\left[[t_0,\infty),R\right]$, $\tau_i\in C\left[[t_0,\infty),R^+\right]$, $t\geq t_0$ ve

$\lim_{t\to\infty}(t-\tau_i(t))=\infty$ için $x'(t)+\sum_{i=1}^{n} p_i(t)\,x(t-\tau_i(t))=0$

gecikmeli diferansiyel denklemi nihayetinde pozitif bir çözüme sahip olsun. Bu halde, $\tilde{t}_0\geq t_0$ ve $\alpha\in C\left[[\tilde{t}_{-1},\infty),R\right]$ vardır ve burada

$\tilde{t}_{-1}=\min_{1\leq i\leq n}\left\{\inf_{t\geq\tilde{t}_0}\{t-\tau_i(t)\}\right\}$ olmak üzere $t\geq\tilde{t}_0$ için

$$\alpha(t)+\sum_{i=1}^{n} p_i(t)\exp\left(-\int_{t-\tau_i(t)}^{t}\alpha(s)\,ds\right)=0 \tag{3.27}$$

denklemi sağlanır.

3.2. Pozitif Çözümlerde Diferansiyel Eşitsizlikler ve Karşılaştırma

$$t_0\leq t<T \quad \text{için} \quad y'(t)+\sum_{i=1}^{n} q_i(t)\,y(t-\tau_i(t))=0, \tag{3.28}$$

gecikmeli diferansiyel denkleminin ve

$$x'(t)+\sum_{i=1}^{n} p_i(t)\,x(t-\tau_i(t))\leq 0 \tag{3.29}$$

ve

$$z'(t)+\sum_{i=1}^{n} r_i(t)\,z(t-\tau_i(t))\geq 0 \tag{3.30}$$

eşitsizliklerinin pozitif çözümleri için ilgili sonuçlar karşılaştırılacaktır. Burada,

$$i = 1, 2, ..., n \text{ için } p_i, q_i, r_i, \tau_i \in C\left[[t_0, T), R^+\right], \tag{3.31}$$

yukarıdaki denklem ve eşitsizlikler için başlangıçtaki aralık

$$t_{-1} = \min_{1 \le i \le n}\left\{ \inf_{t_0 \le t < T}\{t - \tau_i(t)\}\right\} \tag{3.32}$$

olmak üzere $t_{-1} \le t \le t_0$.

3.2.1. Salınım teorisi

Lineer olmayan

$$x'(t) + \sum_{i=1}^{n} p_i \; f_i(x(t - \tau_i)) = 0 \tag{3.33}$$

gecikmeli diferansiyel denklemini ele alalım. Burada, $i = 1, 2, ..., n$ için

$$p_i \in (0, \infty), \;\; \tau_i \in [0, \infty) \text{ ve } \; f_i \in C[R, R] \tag{3.34}$$

ve

$$u \ne 0 \text{ için } \; u \; f_i(u) > 0. \tag{3.35}$$

f aşağıdaki şartları sağlar.

(H1) $i = 1, 2, ..., n$ için $\liminf\limits_{u \to 0} \dfrac{f_i(u)}{u} \ge 1$ (3.36)

(H2) $i = 1, 2, ..., n$ için $\lim\limits_{u \to 0} \dfrac{f_i(u)}{u} = 1$ (3.37)

(H3) bir δ pozitif sabiti vardır öyle ki $i = 1, 2, ..., n$ için

ya

$$0 \le u \le \delta \text{ için } \; f_i(u) \le u \text{ ya da } -\delta \le u \le 0 \text{ için } \; f_i(u) \ge u \tag{3.38}$$

(3.36) veya (3.37) sağladığında (3.33) denkleminin linerize olmuş şekli

$$y'(t) + \sum_{i=1}^{n} p_i \; y(t - \tau_i) = 0 \tag{3.39}$$

ile verilir.

Teorem 3.2.1.1. (Györi ve Ladas, 1991)

(3.34), (3.35), (3.36) doğru ve linerize olmuş (3.39) denkleminin her çözümü salınımlı olsun. Bu halde, (3.33) denkleminin de her çözümü aynı zamanda salınımlıdır.

Teorem 3.2.1.2. (Györi ve Ladas, 1991)

(3.34), (3.35), (3.38) doğru ve (3.33) denkleminin her çözümü salınımlı olsun. Bu halde, linerize olmuş (3.39) denkleminin her çözümü aynı zamanda salınımlıdır.

Sonuç 3.2.1.1. (Györi ve Ladas, 1991)

(3.34), (3.35), (3.37) ve (3.38) doğru olsun. Bu halde, (3.33) denkleminin her çözümünün salınımlı olması için gerek ve yeter şart, (3.39) denkleminin her çözümünün salınımlı olmasıdır.

Lemma 3.2.1.1. (Györi ve Ladas, 1991)

$n \geq 1$ ve (3.34) ve (3.35) şartları doğru olsun. Bu halde, (3.33) denkleminin salınım yapmayan her çözümü $t \to \infty$ için sıfıra gider.

İspat: (Györi ve Ladas, 1991)

$x(t)$, (3.33) denkleminin salınım yapmayan bir çözümü ve ayrıca $x(t)$ nihayetinde pozitif olsun. $x(t)$ nin nihayetinde negatif olma durumu benzer olduğundan ele alınmayacaktır. Bu halde, $x'(t) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \; f_i(x(t-\tau_i)) < 0$ ve $L \equiv \lim_{t\to\infty} x(t)$ mevcut negatif olmayan bir sayıdır.

Şimdi de $L = 0$ olduğunu görelim. Aksi halde, $L > 0$ ve $\lim_{t\to\infty} [\, x'(t) \,] = -\sum_{i=1}^{n} p_i \; f(L) < 0$. Bu ise $\lim_{t\to\infty} x(t) = -\infty$ olduğunu gerektirir. Bu bir çelişkidir. İspat biter.

Teorem 3.2.1.1. in İspatı: (Györi ve Ladas, 1991)Çelişki oluşturmak için (3.33) denkleminin salınım yapmayan bir $x(t)$ çözümü var ve $x(t)$ nihayetinde pozitif bir çözüm olsun. $x(t)$ nin nihayetinde negatif olma hali benzer olduğundan ispat edilmeyecektir.

Lemma 3.2.1.1 den $\lim_{t\to\infty} x(t)=0$. Bu halde, (3.36) ten $i=1,2,...,n$ için $\liminf_{t\to\infty} \dfrac{f(x(t-\tau_i))}{x(t-\tau_i)} \geq 1$ yazılır. $\varepsilon \in (0,1)$ olsun. Her $i=1,2,...,n$ ve

$$t \geq T_\varepsilon \text{ için } x(t-\tau_i)>0 \quad \text{ve} \quad f_i(x(t-\tau_i)) \geq (1-\varepsilon)\,x(t-\tau_i)$$

olacak şekilde bir T_ε vardır. Bu halde, (3.3) denkleminden

$$t \geq T_\varepsilon \text{ için } x'(t)+\sum_{i=1}^{n}(1-\varepsilon)\,p_i\,x(t-\tau_i) \leq 0$$

yazılır. Aşağıdaki notta belirtilen teoremden (3.39) denklemi pozitif bir çözüme sahiptir. Bu ise (3.39) denkleminin her çözümünün salınımlı olduğuna çelişki teşkil eder.

Not: Teorem (Györi ve Ladas, 1991)

$i=1,2,...,n$ için $p_i \in (0,\infty)$ ve $\tau_i \in [0,\infty)$ olsun. Bu halde aşağıdaki ifadeler denktir.

a) $t \geq 0$ için $x'(t)+\sum_{i=1}^{n} p_i x(t-\tau_i)=0$ gecikmeli diferansiyel denklemi pozitif bir çözüme sahiptir.

b) $\lambda+\sum_{i=1}^{n} p_i e^{-\lambda\tau_i}=0$ karakteristik denklemi bir reel köke sahiptir.

c) $t \geq 0$ için $y'(t)+\sum_{i=1}^{n} p_i y(t-\tau_i) \leq 0$ gecikmeli diferansiyel eşitsizliği pozitif bir çözüme sahiptir.

d) Bir $\varepsilon_0 \in (0,1)$ aralığı vardır öyleki $\forall \varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$ aralığı için $z'(t)+\sum_{i=1}^{n}(1-\varepsilon)p_i z(t-\tau_i)=0$, $t \geq 0$ gecikmeli diferansiyel denklemi pozitif bir çözüme sahiptir.

Teorem 3.2.1.2. nin İspatı: (Györi ve Ladas, 1991)

$i=1,2,...,n$ ve $0 \le u \le \delta$ için $f_i(u) \le u$ olmak üzere (3.38) doğru olsun. $-\delta \le u \le 0$ ve $i=1,2,...,n$ için $f_i(u) \ge u$ durumunun ispatı benzer olduğundan ele alınmayacaktır.

Çelişki oluşturabilmek için (3.39) denklemi nihayetinde $y(t)$ pozitif çözümüne sahip olsun. Açıkça, $\lim_{t\to\infty} y(t)=0$ ve $\tau = \max_{1\le i\le n} \tau_i$ olmak üzere $t_0-\tau \le t \le t_0$ için $0<y(t)<\delta$ olacak şekilde bir t_0 vardır. $t_0-\tau \le t \le t_0$ için başlangıç fonksiyonu, $y(t)$ ye eşit alınmak üzere (3.33) denklemi t_0 ın sağ komşuluğunda bir $x(t)$ çözümüne sahiptir.İspatın tamamlanması için,

$$y(t) \le x(t) < \delta \tag{3.40}$$

sağlanacak şekilde bir $x(t)$ nin varlığını göstermek yeterlidir. Tüm $t \ge t_0$ için $x(t)$ mevcut ve pozitiftir. Bu durum, (3.33) denkleminin her çözümünün salınımlı oluşuna terslik teşkil eder. $0 \le x(t) < \delta$ olacak şekilde $x(t)$ olduğu sürece

$$x'(t) = -\sum_{i=1}^{n} p_i\, f_i(x(t-\tau_i)) \ge -\sum_{i=1}^{n} p_i\, x(t-\tau_i)$$

vardır ve böylece

Not 2 : Teorem : (Györi ve Ladas, 1991)

$i=1,2,...,n$ için $p_i, q_{i,} r_i, \tau_i \in C[[t_0,T), R^+]$ doğru ve $t_0 \le t \le t$ için $p_i(t) \ge q_i(t) \ge r_i(t)$ olsun. Ayrıca $x(t), y(t)$ ve $z(t)$ sırasıyla $t_0 \le t \le t$ için $y'(t)+\sum_{i=1}^{n} q_i(t).y(t-\tau_i(t))=0$, $x'(t)+\sum_{i=1}^{n} p_i(t).x(t-\tau_i(t)) \le 0$ ve $z(t)+\sum_{i=1}^{n} r_i(t).z(t-\tau_i(t)) \le 0$ denklemlerinin sürekli çözümü olsun. Öyleki

$$x(t)>0\,,\, x(t_0) \le y(t_0) \le z(t_0)\,,\, \frac{x(t)}{x(t_0)} \ge \frac{y(t)}{y(t_0)} \ge \frac{z(t)}{z(t_0)} \ge 0\,,\, t_{-1} \le t \le t_0 \text{ dır.}$$

Bu halde $t_0 \le t \le t$ için $x(t\ ) \le y(t) \le z(t_0)$ olur. Not 2'de belirtilen teoremden $y(t) \le x(t)$ dir. (3.33) denkleminde $x(t)$ mevcut ve pozitif ise kesin olarak azalandır. Böylece, tüm $t \ge t_0$ için (3.40) doğru olur ve ispat biter.

3.3. Nötr Diferansiyel Denklemde Salınım

$$\frac{d}{dt}\left[\ y(t)+P(t)y(t-\tau)\ \right]+Q(t)y(t-\tau)=0 \qquad (3.41)$$

ifadesine 1.mertebeden nötr diferansiyel denklem denir. Burada

$$P,Q\in\left[(t_0,\infty)R\right] \text{ ve } \tau,\sigma\in\left[0,\infty\right) \qquad (3.42)$$

En yüksek mertebeli türevi hem gecikmeli hem de gecikmesiz bulunur. Yani (3.42) 1. Dereceden nötr diferansiyel dnekleminde bilinmeyen $y'(t)$ ve $Y'(t-\tau)$ terimleri içermektedir. $Y=\max\{\tau,\sigma\}$ ve $t_1\geq t_0$ olsun, $\tau\left[t_1,\infty\right)$ üzerinde (3.41) denkleminden kasıt (3.41) sağlanmak üzere $y\in C\left[\left[t_1-y,\infty\right),R\right]$öyleki $Y(t)+P(t).y(t-\sigma)$ sürekli diferansiyel olmasıdır. $t\ \geq t_1$ başlangıç noktası ve $\phi\in C\left[\left[t_1-y,t_1\right),R\right]$ başlangıç fonksiyonu verilsin. $\left[t_1,\infty\right)$ üzerinde $y(t)=\phi(t)$ için

$$t_1-y\leq t\leq t_1 \qquad (3.43)$$

Başlangıç şartını sağlayacak (3.41) denkleminin her çözümünün salıntılı olmasından kasıt; her $t_1\geq t_0$ başlangıç noktası ve $\phi\in C\left[\left[t_1-y,t_1\right),R\right]$ başlangıç fonksiyonu için $\left[t_1,\infty\right)$ üzerinde (3.41) – (3.3.3) tek çözümü keyfi sayıda büyük köklere (sıfırlara sahip olmasıdır). Aksi halde $t_1\geq t_0$ 3.3.1) – (3.3.3) $T\geq t$ için denklemin her çözümü ya pozitif yada negatifir. Genellikle nötr diferansiyel denklemler için doğru olmayan sonuçlar nötr olmayan diferansiyel denklemler için doğru olabilir.

Örnek : Snow(1965), İnfonte(1972)

Bir nötr diferansiyel denklemin tüm karakteristik köklerinin reel kısmı negatif olmasına rağmen bazı çözümlerinin sınırlı olmadığı ifade edilmiştir.

Teorik olarak önemli olmakla beraber nötr diferansiyel denklemlerinin çözümlerinin asimptotik ve salınımlı davranışların irdelenmesi uygulamada oldukça önemlidir. Kayıpsız enerji hatlarını içeren ağlarda(çok hızlı bilgisayarlarda) kullanılır. (Deriver1984,Hale 1977,Brayton ve Willoughby 1967 ve birçok referansa aftta bulunabilir.)

3.3.1. Gecikmeli denklemlerin asimptotik davranışları ve salınımları

$$\frac{d}{dt}\left[y(t)+py(t-\tau)+qy(t-\sigma)\right]=0 \qquad (3.44)$$

$$p\in R\,,\tau,q\in(0,\infty) \text{ ve } \sigma\in\left[0,\infty\right) \qquad (3.45)$$

(3.44) ve (3.45) gecikmeli diferansiyel çözümlerinin ele alınacaktır. Aynı zamanda, (3.44) denklem salınım yapmayan tüm çözümlerin asimptotik davranışları incelenecektir. Eğer $y(t)$, (3.44) denkleminin bir çözümü ise

$$z(t) = y(t) + py(t-\tau) \tag{3.46}$$

$$w(t) = z(t) + pz(t-\tau) \tag{3.47}$$

aynı zamanda çözümdür.

Lemma 3.3.1.1. (Györi ve Ladas, 1991)

(3.45) doğru ve (3.44) nihayetinde pozitif bir $y(t)$ çözümüne sahip olsun $z(t)$ ve $w(t)$ sırasıyla (3.46) ve (3.47) tanımlansın. Bu halde aşağpdaki ifadeler doğrudur.

a) $z(t)$, (3.44) kesin olarak azalan ve diferansiyel bi çözümü ya

$$\lim_{t\to\infty} z(t) = -\infty \tag{3.48}$$

yada

$$\lim_{t\to\infty} z(t) = 0 \tag{3.49}$$

oluşur.

b) Aşağıdaki ifadeler birbirini gerektirir.

i) (3.48) doğrudur.

ii) $p < -1$

iii) $\lim_{t\to\infty} y(t) = \infty$

iv) $w(t) > 0, w'(t), w''(t) > 0$ ve $\lim_{t\to\infty} w(t) = \infty$ (3.50)

sağlayacak şekilde (3.44) $w(t)$ çözümü iki kez diferansiyellenir.

c) i) (3.49) doğrudur.

ii) $p > -1$

iii) $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$

iv) $w(t) > 0, w'(t) < 0, w''(t) > 0$ ve $\lim_{t\to\infty} w(t) = 0$ (3.51)

sağlayacak şekilde $w(t)$ iki kez diferansiyellenir.

İspat: (Györi ve Ladas, 1991)

$$z'(t) = -qy(t-\sigma) < 0 \tag{3.52}$$

buradan $z(t)$ kesin olarak azalandır. Eğer (3.48) doğru değilse bu halde $\lim_{t\to\infty} z(t) = l$ ve olacak biçimde $l \in R$ vardır.(3.52) denklemini $\int_t^\infty$ integre edilirse

$l - z(t) = y\int_t^\infty y(s-\sigma)ds$ $\quad y \in L^1[t,\infty)$ ve böylece $z \in L^1[t,\infty)$ olmasını gerektirir. Fakat l nin sıfır olması ispatı bitirir.(b) ve (c) nin ispatı da aşağıdaki gibidir. (3.48) doğru olsun. Bu halde p negatif ve $y(t)$ sınırsız olmalıdır. Dolayısıyla $t_0 \geq 0$ vardır. Öyle ki $z(t_0) < 0$ ve $y(t_0) = \max_{t\leq t_0} y(t) > 0$ bu halde $0 > z(t_0) = y(t_0) + py(t_0 - \tau) \geq y(t_0)(1+p), p < -1$ olmasını gerektirir. Fakat $z(t) = y(t) + py(t-\tau) > py(t-\tau)$ ve (3.48) ifadeleri $\lim_{t\to\infty} y(t) = \infty$ olmasını gerektirir. (3.48) varsayımı altında $w'(t) = -qz(t-\sigma) > 0$ ve $w''(t) = -qz'(t-\sigma) > 0$ bu durum (3.50) gerektirir. Şimdi (3.49) doğru olsun. Eğer $p \geq 0$ (3.46) denklemi $\lim y(t) = 0$. Diğer taraftan

$p \in (-1,0)$ ise lemma 1.5.1 (Györi ve Ladas, 1991) den $\lim_{t\to\infty} y(t) = \dfrac{\lim_{t\to\infty} z(t)}{1+p} = 0$

Sonuç olarak eğer $p \leq -1$ ise $y(t) \geq -py(t-\tau) \geq y(t-\tau)$ ve böylece pozitif sayıyla aşağıdan m sınırlı olsun. Bu (3.52) dan $z(t) \to \infty, t \to \infty$ çelişki teşkil eder. Sonuç olarak (3.49) denkleminden $p > -1$ ve $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$ dır. Üstelik bu durum, $w(t) = -qz(t-\sigma) < 0$ $\quad, w''(t) = -qz'(t-\sigma) > 0$ ve $w(t)$ azalarak sıfıra gider. Özellikle $w(t) > 0$ yukarıdaki tartışmadan (b) ve (c) ispatları açıktır.

Teorem 3.3.1.1. (Györi ve Ladas, 1991)

(3.45) doğru ve $y(t)$ (3.44) salınım yapmayan bir çözümü olsun. Bu halde aşağıdaki ifadeler doğrudur.

$p < -1$ gerek ve yeter şart $\lim_{t\to\infty} |y(t)| = \infty$

$p > -1$ gerek ve yeter şart $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$

Teorem 3.3.1.2. (Györi ve Ladas, 1991)

$$\frac{d}{dt}\left[y(t) - y(t-\tau)\right] + qy(t-\sigma) = 0 \tag{3.53}$$

Nötr gecikmeli diferansiyel denklemini ele alalım. Burada $\tau, \sigma \in [0, \infty)$ ve $q \in (0, \infty)$ bu halde (3.53) denkleminin her çözümü salınımlıdır. Aşağıdaki teorem $p \neq -1$ olmak üzere (3.44) - (3.45) denkleminin tüm çözümlerininin salınımlı olması için yeterli şartları verir.

Teorem 3.3.1.3. (Györi ve Ladas, 1991)

(3.45) doğru olsun $p \neq 1$ ve $\frac{q}{1+p}(\sigma - \tau) < \frac{1}{e}$ olsun.(3.44) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

İspat: (Györi ve Ladas, 1991)

Çelişki oluşturmak için (3.44) denklemi nihayetinde pozitif $y(t)$ çözümüne sahip olsun. Bu halde lemma 3.3.1.1 de $w(t) > 0$ dır. $w'(t)$ nihayetinde artan ve

$$w'(t) + pw'(t-\tau) + qw(t-\sigma) = 0 \text{ böylece} \tag{3.54}$$

$$(1+p)w'(t-\tau) + qw(t-\sigma) \leq 0 \text{ ve böylece}$$

$$w'(t) + \frac{q}{1+q} w(t-(t-\sigma)) \leq 0 \text{ eğer } 1+p > 0 \text{ ise} \tag{3.55}$$

Eğer $1+p<0$ ise $w'(t) - \dfrac{q}{-(1+q)} w(t+(\sigma-\tau)) \geq 0$ (3.56)

elde edilir. Teorem 2.3.3 ve 2.3.4 (Györi ve Ladas, 1991)'den (3.54) doğru olduğunda (3.55) ve (3.56) eşitsizliği nihayetinde pozitif bir çözüme sahip olamaz $w(t) > 0$ ile çelişir. İspat tamamlanır.

3.3.2. İki gecikmeli parametresine sahip nötr denklemlerde salınımlar

$$\frac{d}{dt}[y(t) + py(t-\tau)] + qy(t-\sigma) = 0 \tag{3.57}$$

Skaler nötr denklemini ele alalım. p, q, τ ve σ reel sayılardır.(3.57) denklemine karşılık gelen karakteristik denklem

$$F(\lambda) \equiv \lambda + p\lambda e^{-\lambda\tau} + qe^{-\lambda\sigma} = 0 \tag{3.58}$$

olduğu açıktır.

Teorem 3.3.2.1. (Györi ve Ladas, 1991)

p, q, τ, σ reel sayılar olsun. Aşağıdakiler denktir.

a) (3.57) denkleminin her çözümü sınırlı olmayan her çözümü salınımlıdır.

b) (3.58) karakteristik denklemi ne pozitif köklere ne de sıfır katlı olmayan kökü vardır.

Teorem 3.3.2.2. (Györi ve Ladas, 1991)

p, q, τ, σ reel sayılar olsun. Aşağıdakiler denktir.

(3.57) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

(3.58) arakteristik denklemi $(-\infty, 0]$ hiçbir köke sahip değildir.

Sonuç 3.3.2.1. (Györi ve Ladas, 1991)

p, q, τ, σ reel sayılar olsun. Aşağıdakiler denktir.

a) (3.57) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

b) (3.58) karakteristik denkleminin reel kökleri sahip değildir.

τ, σ her ikisi de gecikmeli parametreleri değilse (3.57) denkleminin sınırsız çözümlerinin exponsiyel olarak sınırlı olarak bilinmektedir.(Hale,1977)

Lemma 3.3.2.1. (Györi ve Ladas, 1991)

p sıfır olmayan reel sayı olsun. Bu halde $y(t)$ (3.57) denkleminin bir çözümü olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{d}{dt}\left[y(t) + \frac{1}{p} y(t - (-\tau)) \right] + \frac{q}{p} y(t - (\sigma - \tau)) = 0 \text{ sağlanmasıdır.}$$

Lemma 3.3.2.2. (Györi ve Ladas, 1991)

$t \geq t_0$ ve α, β keyfi sabit olmaz üzere $y(t)$,(3.57) denkleminin bir çözümü olsun. Bu halde

$$t \geq t_0,\ \max\{\alpha, \beta\} \text{ için } \int_{t-\alpha}^{t-\beta} y(s)ds \text{ aynı zamanda bir çözümdür.}$$

Teorem 3.3.2.1. İspatı (Györi ve Ladas, 1991)

(a)$\Rightarrow$(b) olsun. Açıkça $(0,\infty)$ bir kök varsa sınırsız salınım yapmayan bir çözüm mevcuttur. Aynı zamanda $\lambda = 0$ çift katlı bir kök olamaz. Eğer çift katlı kök olsaydı $q = 0$ ve $p = -1$ olması halinde (3.57) denklemi $\frac{d}{dt}\left[y(t) - y(t-\tau)\right] = 0$ indirgenir.

Bu ise salınım yapmayan ve sınırlı olmayan $y(t)$ çözümüne sahiptir.

(b)$\Rightarrow$(a) olsun.çelişki oluşturmak için (3.57) denkleminin sınırsız nihayetinde ve pozitiftir çözüme sahiptir. $p = 0$ olsun. Açıkça q negatif olmalı aksi halde $y(t)$ sınırlı olur. $\sigma \neq 0$ olsun. Aksi halde karakteristik denklem pozitif köke sahip olurdu. Dolayısıyla aşağıdaki iki durum ele alınırsa ispat biter.

i) $q < 0$ ve $\sigma > 0$

ii) $q < 0$ ve $\sigma < 0$

i) $F(0)F(\infty) < 0$ dır. Bu durum karakteristik denklemin hiçbir reel köke sahip olmamasıyla çelişir.

ii) $p = 0$ olması halinde ispat Teorem 2.1.2 (Györi ve Ladas, 1991) ispatındaki (durum 1) ile aynıdır. Bu durumun ispatı yapılmayacaktır.

$\tau = 0$ ve $p \neq -1$ durumu açıktır. Dolayısıyla $p\tau \neq 0$ olsun. $q = 0$ halinde (3.57) denklemi

$\frac{d}{dt}\left[y(t) - py(t-\tau)\right] = 0$ indirgenir. Bu durum $y(t) + py(t-\tau) = c$ olmasını gerektirir. Açıkça $y(t)$ pozitif ve $p > 0$ ise sınırlı değildir. Aynı zamanda (3.58) denklemi $F(\lambda) = \lambda(1 + pe^{-\lambda\tau}) = 0$ indirgenir ve buradan $p > -1, \tau > 0$ olur. Aksi halde (3.58) pozitif bir köke sahip veya çift katlı kök olur. Üstelik lemma 3.3.2.1 $q = 0$ olduğunda sadece $-1 < p < 0$ ve $t > 0$ ele alınacaktır. Bu durumu sonlandırmak için $\lim_{t\to\infty} t_n = \infty, y(tn) = \max_{s \le t_n} y(s)$ ve $\lim_{n\to\infty} y(t_n) = \infty$ olacak şekilde $\{t_n\}$ dizisini ele alıp oluşturalım. $n \to \infty$ için $c = y(t_n) + py(t_n - \tau) \geq (1+p)y(t_n)$ bu mümkün değildir.

Son olarak lemma 3.3.2.1 kullanılırsa teoremin ispatını tamamlamak için aşağıdaki 8 durumu ele alalım. Amaca varmak için her durumda çelişki oluşturulacaktır.

	p	q	τ	σ
1	+	+	+	+,0
2	+	+	+	-
3	+	-	+	+,0
4	+	-	+	-
5	-	+	+	+,0
6	-	+	+	-
7	-	-	+	+,0
8	-	-	+	-

Durum 1 ve 2: $p>0, q>0, \tau>0, \sigma\geq 0$ veya $p>0, q>0, \tau>0, \sigma<0$ olsun $y(t)$ sınırlı olmayan bir çözümse lemma 3.3.2.1 durumu $p<-1$ dir bu ise çelişkidir.

Durum 3 ve 7: $p>0, q<0, t>0, \sigma\geq 0$ veya $p<0, q<0, \tau>0, \sigma\geq 0, F(0).F(\infty)<0$ dır. Bu durum karakteristik denkleminin pozitif köke sahip olduğu gerektirir bu ise bir çelişkidir. Diğer durumlar Teorem 2.2.1 (Györi ve Ladas, 1991) (Durum 1) benzerdir. Daha keskin bir ifadeyle bu durumlar her birinde $n=1,2...$ için $w_n(t)>0, w_n'(t)>0, w_n''(t)>0$ ve $\{w_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi teşkil edilir. $n=1,2...$ $A_n=\{\lambda\geq 0 : -w_{n.}'(t)+\lambda w_n(t)\leq 0\}$ tüm $0\in A_n$ aynı zamanda $0\leq a\leq b$ ve $b\in A_n$ ise $a\in A_n$ dir. İspat aşağıdaki durumların ele alınmasıyla sonlanır.

$$\left.\begin{array}{l}(P_1)\lambda_1 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A \\ \lambda_2 \notin_{n=}^{\infty} A_n\end{array}\right\}$$ olacak şekilde negatif olmayan λ_1, λ_2 sayıları vardır.

$(P_2)\lambda\in A_n$ ise bir μ pozitif sayısı vardır öyle ki $\lambda+\mu\in A_{n+1}$ $y(t)$ nihayetinde bir pozitif çözümü (3.57) denklemi ve $z(t)=y(t)+py(t-\tau)$ ve $w(t)=z(t)+pz(t-\tau)$

Lemma 3.3.2.1: (Györi ve Ladas, 1991)

İspatındaki analize benzer olarak $w(t)$ iki kez diferansiyel bir durumu ve $w(t)>0$, $w'(t)>0$ ve $w''(t)>0$ özelliklerine sahiptir. (3.58) pozitif köklere sahip olmadığından $m\in(0,\infty)$ vardır öyle ki tüm $\lambda\geq 0$ için eğer $q>0$ ise $-\lambda-\lambda pe^{-\lambda\tau}-qe^{\lambda\sigma}\leq -m$ ve

Eğer $q<0$ ise $\lambda - p\lambda e^{-\lambda\tau} - qe^{-\lambda\sigma\leq} - m$ dır.

Durum 4 : $p>0, q<0.\tau>0$ ve $\sigma<0$ durum 4 diğer yönü $p>0, q<0, \tau<0$ ve $\sigma<0$ $(\sigma<\tau)$ şimdi de $w_n(t) = \begin{cases} w(t), n=0 \\ w_n + pw_{n+1}(t-\tau), n=1,2,... \end{cases}$ ve

$$A_n = \{\lambda \geq 0 : -w'_n(t) + \lambda w_n(t) \leq 0\ \}$$

Lemma 6.1.1. (Györi ve Ladas, 1991)

$n = 1,2,3...$ için

$$w'_n + pw'_{n+1}(t-\tau) + qw_n(t-\sigma) = 0$$
$$w'_n(t) = qw_{n-1}(t-\sigma)$$
$$w(t) > 0, w'_n(t) > 0, w''(t) > 0$$

Yukarıdan

$w'_n(t-\tau) + \left[\dfrac{q}{1+p}\right] w_n(t-\sigma) \geq 0$ dır. Böylece,

$$w'_n(t) + \frac{q}{1+p} w_n(t + (\tau-\sigma) \geq 0 \text{ ve} \tag{3.59}$$

$$w'_n(t) + \frac{-q}{1+p} w_n(t) \leq 0 \tag{3.60}$$

Lemma 3.3.1.1 (3.59) uygulanırsa $\lambda_2 = \dfrac{\ln\left(\dfrac{4(1+p)^2}{q^2(\tau-\sigma)^2}\right)}{(\tau-\sigma)} \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ diğer taraftan (3.60) ten $\lambda_1 = \dfrac{-q}{1+p} \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ elde edilir. $\lambda \in A_n$ ve $\phi_n(t) = e^{-\lambda\tau} w_n(t)$ ve $\mu = \dfrac{m}{1+pe^{-\lambda_2}}$ olsun.Şimdi

$$\begin{aligned} w'_{n+1}(t) + (\lambda+\mu)w_{n+1}(t) &= qw_n(t-\sigma) + (\lambda + \mu[w_n(t) + pw_n(t-\tau)] \\ &= q\phi_n(t-\sigma)e^{\lambda(t-\sigma)} + (\lambda+\mu)\left[e^{\lambda\tau}\phi_n(t) + pe^{\lambda(t-\tau)}\phi_n(t-\tau)\right] \\ &\leq \phi_n(t-\sigma)e^{\lambda t}\left[qe^{-\lambda\sigma} + \lambda + \lambda pe^{-\lambda\tau} + \mu + \mu pe^{-\lambda_2\tau}\right] \\ &\leq \phi_n(t-\sigma)e^{\lambda t}[-m+m] = 0 \end{aligned}$$

Bu durum ise ispatı tamamlar.

Durum 5: $p<0, q>0, \tau>0$ ve $\sigma \geq 0$ ilk olarak $\sigma<\tau$ olmak üzere

$$w_n(t)=\begin{cases} w(t), & n=0 \\ -\left[w_{n+1}(t)+pw_{n-1}(t-\tau)\right] & n=1,2... \end{cases}$$

ve $A_n=\{\lambda \geq 0 : -w_n'(t)+\lambda w_n(t) \leq 0\}$ olsun.

Burada $n=1,2,...$ için

$$w_n' + pw_n'(t-\tau)+qw_n(t-\sigma)=0 \tag{3.61}$$

$$\begin{aligned} &w_n'(t_n)=qw_{n-1}(t-\sigma) \\ &w(t)>0, w_n'(t)>0, w''(t)>0 \end{aligned}$$

(3.61) ten $w_n'(t-\tau)+pw_n'(t-\tau)+qw_n(t-\sigma) \leq 0$ ve lemma 3.3.1.1. den $p<-1$ olur. Bu sonuçlar birleştirilirse

$$\begin{aligned} &w_n'(t)-\frac{q}{-(1+p)}w_n(t+(\tau-\sigma)) \geq 0 \\ &-w_n'(t)+\frac{q}{-(1+p)}w_n(t) \leq 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\lambda_1=-\frac{q}{-(1+p)} \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \text{ ve } \lambda_2=\frac{\ln\left(\dfrac{4(1+p)^2}{q^2(\tau-\sigma)^2}\right)}{(t-\sigma)} \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \lambda_1, \lambda_2 \text{ elde edilir.}$$

$\lambda \in A_n$ ve $\phi_n(t)=e^{-\lambda\tau}w_n(t)$ ve $\mu=\dfrac{m}{-p}$ olsun. Şimdi

$$\begin{aligned} &-w_{n+1}(t)+(\lambda+\mu)w_{n+1}(t) \\ &=-qw_n(t-\sigma)+(\lambda+\mu)\left[-w_n(t)-pw_n(t-\tau)\right] \\ &\leq \phi_n(t-\sigma)e^{\lambda t}\left[-qe^{-\lambda\sigma}-\lambda-\lambda pe^{\lambda\tau}-\lambda-\lambda pe^{-\lambda\tau}\right] \\ &\leq \phi_n(t-\sigma)e^{\lambda\tau}=0 \end{aligned}$$

$\sigma<\tau$ olması halinde Durum 5 ispatı biter. $\sigma \geq \tau$ için

$$w_n(t)=\begin{cases} w(t) & n=0 \\ -w_{n-1}+pw_{n-1}(t-\tau)+q\displaystyle\int_{t-\sigma}^{t-\tau} w_{n-1}(s)ds & n=1,2,... \end{cases} \tag{3.62}$$

olsun. Burada,

$$w_{n+1}'(t)=qw_n(t-\sigma)>0 \tag{3.63}$$

(3.63) den $w_{n+1}(t) < [-p + q(\sigma - \tau)]w_{n+1}(t-\tau)$ elde edilir. Bu durum ise

$\lambda_1 = \dfrac{q}{-(p+q(\sigma-\tau))} \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ gerektirir. Şimdi

$$\left.\begin{aligned} &w_n'(t) + pw_n'(t-\tau) + qw_n(t-\sigma) = 0 \\ &w_n'(t) + pw_n'(t-\tau) \le 0 \end{aligned}\right\} \tag{3.64}$$

elde edilir. (3.63) ve (3.64) denklemlerinden

$$qw_{n-1}(t-\tau) + pw'_n(t-\tau) \le 0 \tag{3.65}$$

elde edilir. Son denklem $\int_t^{t+\tau}$ integre edilirse $q\tau w_{n-1}(t-\tau) + pw_n(t) - pw_n(t-\tau) \le 0$ elde edilir. Bu ifade

$$qw_{n-1}(t-\tau) < (p/\tau)w_n(t) \tag{3.66}$$

gerektirir. (3.63) ve (3.66) dan $qw_n'(t) + (-p/\tau)w_n(t) > 0$ elde edilir. Bu ise

$\lambda_2 = \dfrac{-p}{\tau} \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ gerektirir. $\lambda \ge \lambda_1$ ve $\phi_n(t) = e^{\lambda\tau} w_n(t)$ ve $\mu = \dfrac{n}{-p + (q/\lambda_1)}$ olsun. Bu halde

$$\begin{aligned}
&-w_{n+1}(t) + (\lambda+\mu)w_{n+1}(t) \\
&= -qw_n(t-\tau) + (\lambda+\mu)\left[-w_n(t) - pw_n(t-\tau) + q\int_{t-\sigma}^{t-\tau} w_n(s)ds\right] \\
&\le -q\phi_n(t-\tau)e^{\lambda(t-\tau)} + (\lambda+\mu) \\
&\left[-\phi_n(t)e^{\lambda\tau} - p\phi_n(t-\tau)e^{\lambda(t-\tau)} + q\int_{t-\sigma}^{t-\tau} e^{\lambda s}\phi_n(s)ds\right] \\
&\le \phi_n(t-\tau)e^{\lambda\tau}\left[-qe^{-\lambda\tau} - \lambda - \lambda pe^{-\lambda t} - \mu - \mu pe^{-\lambda c} + qe^{-\lambda\tau} + qe^{-\lambda\sigma} + \frac{\mu q}{\lambda}(e^{-\lambda\tau} - e^{-\lambda\sigma})\right] \\
&\le \phi_n(t-\tau)e^{\lambda\tau}\left[-\lambda - \lambda pe^{-\lambda t} - qe^{-\lambda\sigma} - \mu - \mu pe^{-\lambda t} + \frac{\mu q}{\lambda}(e^{-\lambda c} - e^{-\lambda\sigma})\right] \\
&\le \phi_n(t-\tau)e^{\lambda t}[-m+m] = 0
\end{aligned}$$

ispat tamamlanmış olur.

Durum 6: $p<0, q>0, \tau>0, \sigma<0$

$$w_n(t)=\begin{cases} w(t) & n=0 \\ -\left[w_{n-1}(t)+pw_{n-1}(t-\tau)\right]-q\int_{t-\tau}^{t-\sigma} w_{n-1}(s)ds & n=1,2,... \end{cases} \tag{3.67}$$

ve A_n durum 5 gibi olsun. Şimdi $n=1,2,...$

$$w_n'(t)+pw_n'(t-\tau)+qw_n(t-\sigma)=0 \tag{3.68}$$

$$w_{n+1}'(t)=qw_n(t-\sigma)>0 \tag{3.69}$$

Tekrar Lemma 3.3.1.1 den $p<-1$ olur. Bu durum (3.68) denkleminden

$w_n'(t)-\dfrac{q}{-(1+p)}w_n(t+(-\sigma))\geq 0$ ve $-w_n'(t)+\dfrac{q}{-(1+p)}w_n(t)\leq 0$ elde edilir. Bu durumda ispatı tamamlamak için durum 5'teki $\sigma\geq\tau$ hali tekrarlanır.

Durum 8: $p<0, q<0, \tau>0$ ve $\sigma<0$ ve (3.57) denklemini sağlayan $V\in C^2$ çözümleri $v(t)>0, v'(t), v''(t)>0$ ve $\lim_{t\to\infty} v(t)=\infty$ sağlansın.

$A(v)=\{\lambda\geq 0: -v'(t)+\lambda v(t)\leq 0\}$ olsun. Buradan

$$v'(t)+pv'(t-\tau)+qv(t-\sigma)=0 \tag{3.70}$$

yazılır. (3.70) ten

$$v'(t)-(-q)v(t+(-\sigma))\geq 0 \tag{3.71}$$

ve böylece

$$v'(t)+(-q)v(t)\leq 0 \tag{3.72}$$

yazılır.

$-q\in A(v)$ ve $\lambda^*=\dfrac{\ln\left(\dfrac{4}{(q\sigma)^2}\right)}{-q}\notin A(v)$ dır ve $\lambda_0=-q$ ve $\mu=\dfrac{m}{1-pe^{-\lambda\sigma}}$ olsun.

Tüme varım kullanılarak $\lambda_n=\lambda_{n-1}+\mu, n=1,2,...$ ve eğer

$$w_n(t)=\begin{cases} w(t) & n=0 \\ w_{n-1}(t)+pw_{n-1}(t)-\lambda_{n-1}p\int_{t-\tau}^{t-\sigma} w_{n-1}(s)ds & n=1,2,... \end{cases}$$

varsa $w_n \in V$ ve $\lambda_n \in A(w_n)$ olduğunu göstermemiz gerekir.

$A(w_n)$ değeri sınırlı olduğundan bu durum çelişki teşkil eder ve ispat biter. Bu amaca varmak için $\phi_n(t) = e^{-\lambda nt} w_n(t)$ olsun ve

$$
\begin{aligned}
&- w'_{n+1}(t) + (\lambda + \mu) w_{n+1}(t) \\
&= q w_n(t-\sigma) + \lambda_n p\left[w_n(t-\sigma) - w_n(t-\sigma)\right] + (\lambda_n + \mu)\left[w_n(t) + p w_n(t-\tau) - \lambda_n p \int_{t-\tau}^{t-\sigma} w_n(s)ds \right] \\
&\le q w_n(t-\sigma) + \lambda_n p w_n(t-\sigma) + \lambda_n w_n(t) - \lambda_n{}^2 p \int_{t-\tau}^{t-\sigma} w_n(s)ds + \mu\left[w_n(t) - \lambda np \int_{t-\tau}^{t-\sigma} w_n(s)ds \right] \\
&\le \phi_n(t-\sigma) e^{-\lambda_n t}\left[q e^{-\lambda_n \sigma} + \lambda_n + \lambda_n p e^{-\lambda_n \tau} + \mu(1 - p e^{-\lambda\sigma})\right] \\
&\le \phi_n(t-\sigma) e^{\lambda_n t}\left[-m + m\right] = 0
\end{aligned}
$$

olur. Teorem 3.3.2.1 ispatlanır.

Not 3.3.1.1. (Györi ve Ladas, 1991)

Teoremde ifade edilen $\lambda_1 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ ve $\lambda_2 \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ verilsin. Açıkça $\lambda_1 \ge \lambda_2$ durumu bir çelişkidir. Bu fikirden kolayca (3.57) denkleminin tüm sınırlı ve sınırsız denklemlerinin salınımlı olması için yeterli şartlar elde edilir.

3.3.3. Salınımlı için gerekli ve yeterli koşullar

$$
\frac{d}{dt}\left[x(t+) + \sum_{j=1}^{i} P_j x(t-\tau_j) \right] + \sum_{i=1}^{n} Q_i x(t-\sigma_i) = 0 \tag{3.73}
$$

nötr gecikmeli denklem için lineer otonom sistemini ele alalım. Burada P_i ve Q_j mxm tipinde matris $t_i \sigma_i$ negatif olmayan reel sayılardır. mxm tipinde özdeş matris (3.73) karakteristik denklemi

$$
\det\left(\lambda I + \lambda \sum_{j=1}^{i} P_j e^{\lambda \tau_i} + \sum_{i=1}^{n} Q e^{-\lambda \sigma_i} \right) = 0 \tag{3.74}
$$

verilir. Teorem (5.1.1.) (Györi ve Ladas, 1991) basit bir değişkenle aşağıdaki ifade aynı zamanda doğrudur.

Teorem 3.3.3.1. $j = 1,2,...,n$ ve $i = 1,2,...,n$ için $P_i Q_j \in R^{mxn}, \tau_j \in (0,\infty)$ ve $\sigma_i \in [0,\infty)$ olsun. Aşağıdaki ifadeler verilir.

a) (3.73) denkleminin her çözümü birleşensel olarak salınımlıdır.

b) (3.74) karakteristik denklemin reel kökü yoktur.

$$F(s) = sI + \sum_{i=1}^{n} P_i e^{s\tau_i}$$

$$\phi(s) = x(0) - \sum_{i=1}^{n} P_i e^{s\tau_i} \int_{-\tau_i}^{0} e^{-st} x(t) t$$

denklemlerinde tanımlanan $F(s)$ ve $\phi(s)$ fonksiyonlarında değiştirilirse

$$F(s) = sI + s\sum_{j=1}^{i} P_j e^{-st_j} + \sum_{i=1}^{n} Q_i e^{-s\sigma_i} \tag{3.75}$$

$$\phi(s) = x(0) + \sum_{j=1}^{i} P_j x(-\tau_j) - s\sum_{i=1}^{n} P_j e^{s\sigma_j} \int_{-\tau_j}^{0} e^{-st} x(t)dt - \sum_{i=1}^{n} Q_i e^{-s\sigma_i} \int_{-\sigma_i}^{0} e^{-st} x(t)dt \tag{3.76}$$

Teorem3.3.3.1. ve Teorem 5.1.1. (Györi ve Ladas, 1991) ispatı aynı olduğundan Teorem 3.3.3.1 ispatı ele alınmayacaktır.

Teorem 3.3.3.2. $j = 1,2,..., i = 1,2,...$ için $P_j Q_i \in R^{mxm}$ ve $\tau_j, \sigma_i \in R$ (3.77)

olsun μ_0 reel sayı olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir.

a) $$\mu[x] \equiv \limsup_{t\to\infty} \frac{\ln\|x(t)\|}{t} \le \mu_0 \tag{3.78}$$

Lyapunov şartıyla (3.73) her $x(t)$ çözümü salınımlıdır.

b) (3.74) karakteristik denkleminin $(-\infty, \mu_0)$ aralığında hiç köke sahip değildir.

İspat: (Györi ve Ladas, 1991)

a) b)'yi gerektirdiğinden basittir. Gerçekten $\lambda_0 \in [-\infty, \mu_0]$ (3.74) bir kökü ise en az bir bileşeni salınım yapmayan (3.73) çözümü $\xi \neq 0$ olacak şekilde $x(t) = e^{\lambda_0}\xi$ vardır. Açıkça

$$\mu[x] = \limsup_{t\to\infty} \frac{\ln\left\|e^{\lambda_0}\xi\right\|}{t} \le \lambda_0 \le \mu_0 \text{ yazılır.}$$

Bu bir çelişkidir. Çünkü $x(t)$ salınımlı değildir. Eğer (a) doğru ise (3.74) denklemi $(-\infty, \mu_0)$ aralığında bir köke sahip değildir.

b) a) yı gerektirdiği durumu Teorem 5.1.1. (Györi ve Ladas, 1991) nin basit bir modifikasyonudur. Burada F ve ϕ fonksiyonları sırasıyla (3.75) ve (3.76) denklemi verilir. Tüm $s \le \mu_0$ için $\det F(s) \ne 0$ olduğundan böylece $s \le \mu_0$ için

$$X_1(s) = \frac{\det[D(s)]}{\det[F(S)]} \text{ geçerlidir.}$$

Sonuç 3.3.3.1 (Györi ve Ladas, 1991)

(3.77) doğru olsun. Bu halde (3.73) denkleminin her salınımlı çözümü için salınımlı olması için gerek ve yeter şart (3.74) karakteristik denkleminin $[-\infty, 0]$ köklere sahip olmasıdır.

Not 3.3.1 (Györi ve Ladas, 1991)

Teorem 5.1.2 (Györi ve Ladas, 1991) den her (3.73) denkleminin tüm çözümleri tanım (5.0.1) veya tanım (5.0.2) (Györi ve Ladas, 1991) göre salınımlarsa aynı zamanda birbirlerine göre de salınımlıdır.

3.4 Değişken Katsayılı Nötr Denklemlerde Salınımlar

$$\frac{d}{dt}[y(t) + P(t)y(t-\tau)] + Q(t).y(t-\sigma) = 0 \ , t \ge t_0 \tag{3.79}$$

denklemini ele alalım. Burada.

$$P \in C[[t_0, \infty], R], Q \in C[[t_0, \infty], R] \text{ ve } \tau, \sigma \in \mathrm{R}^+. \tag{3.80}$$

Teorem 3.4.1 (Györi ve Ladas, 1991)

$p(t) = -1$ olmak üzere (3.3.4.2) ve

$$\int_{t_0}^{\infty} Q(s)ds = \infty \tag{3.81}$$

olsun. Bu halde ,

$$\frac{d}{dt}\left[y(t)+y(t-\tau)\right]+Q(t).y(t-\sigma)=0 \;\;,\; t\geq t_0 \tag{3.82}$$

denkleminin her çözümü salınımlıdır.

Teorem 3.4.2. (Györi ve Ladas, 1991)

(3.3.4.2) ve (3.3.4.3) doğru ve $p(t)\leq 1$ ve

$$\liminf_{t\to\infty}\int_{t+\sigma}^{t+\tau}\left[\frac{Q(s-\tau)}{P(s-\sigma)}\right]ds>\frac{1}{e} \tag{3.83}$$

ise (3.79) denkleminin her çözümü salınımldır.

Teorem 3.4.3. (Györi ve Ladas, 1991)

$$\liminf_{t\to\infty}\int_{t-\sigma}^{t}Q(s)ds>\frac{1}{e} \tag{3.84}$$

bu halde (3.79) her çözümü salınımlıdır.

Teorem 3.4.4. (Györi ve Ladas, 1991)

$P\neq\pm 1, P(t)\equiv p$ olmak üzere (3.80) doğru olsun. $Q(t)$ τ periyodik ve

$$\frac{1}{1+p}\left[\liminf_{t\to\infty}\int_{t+\sigma}^{t+\tau}Q(s)ds\right]>\frac{1}{e} \tag{3.85}$$

olsun. Bu halde

$$\frac{d}{dt}\left[y(t)+Py(t-\tau)\right]+Q(t)y(t-\sigma)=0 \tag{3.86}$$

ifadesinin her çözümü salınımlıdır.

Teoremleri ispat etmeden aşağıdaki iki lemmayı verelim.

Lemma 3.4.1. (Györi ve Ladas, 1991)

(3.80) ve (3.81) olsun. $y(t)$ (3.79) denkleminin nihayetinde pozitif bir çözümü ve $z(t)=y(t)+p(t)y(t-\tau)$ olsun. Aşağıdaki ifadeler doğrudur.

a) $z(t)$ nihayetinde azalan bir fonksiyondur.

b) Eğer $p(t)\leq 1$ise o zaman $z(t)<0$ olur.

c) Eğer $-1 \leq p(t) \leq 0$ ise o zaman $z(t) > 0$ ve $\lim_{t\to\infty} z(t) = 0$ olur.

İspat: (Györi ve Ladas, 1991)

a) $z(t) = -Q(t)y(t-\tau) \leq 0$ yazılır. $z(t)$ azalan fonksiyondur.

b) Aksi halde $z(t) > 0$ ve böylece $y(t) \geq -p(t)y(t-\tau) \geq y(t-\tau)$ yazılır. Bu ise $y(t)$ alttan m pozitif sayısı ile sınırlıdır.(3.79) den $z(t) \leq -mQ(t)$ bu ise (3.81) ifadesinden $\lim_{t\to\infty} z(t) = -\infty$ olur.

c) $z(t) > 0$ olsun. Aksi halde $z(t) < 0$, $y(t) \leq -p(t).y(t-\tau) \leq y(t-\tau)$ gerektirir ve $y(t)$ sınırlı fonksiyondur. Dolayısıyla $z(t)$ azalan olduğundan aynı zamanda sınırlı olur. $z(t)$ limiti 1 olsun

$$\lim_{t\to\infty} z(t) = I \in R \tag{3.87}$$

Gerçekleşsin. Bu halde (6.4.3) ifadesinden

$$\liminf_{t\to\infty} y(t) = 0 \tag{3.88}$$

olur. Aksi halde (3.3.4.11) yeterince büyük t ler olmak şartıyla $\int_{t_1}^{\infty}$ integre edilirse $\lim_{t\to\infty} z(t) = \infty$ çelişkisi elde edilir.(3.87) ve (3.88) denklemi Lemma 1.5.2. (Györi ve Ladas, 1991) uygulanırsa $L = 0$ olduğu gösterilir. Bu durum $z(t) > 0$ olduğunu gerektirir, bu durum ise $z(t) < 0$ olmasıyla çelişir. Dolayısıyla $z(t) > 0$ olduğu tesis edilmiş oldu. Fakat (3.87) ve (3.88) Lemma 1.5.2. (Györi ve Ladas, 1991)'den aynı zamanda doğrudur.

Lemma 3.4.2. (Györi ve Ladas, 1991)

$p(t) \equiv p \neq 1$ olmak üzere (3.3.4.2) geçerli ve (3.3.4.3) sağlansın. $y(t)$ (3.86) denkleminin nihayetinde pozitif çözümü

$$z(t) = y(t) + py(t-\tau) \tag{3.89}$$

olsun. Aşağıdakiler geçerlidir.

a) $z(t)$ azalan fonksiyon ve ya

$$\lim_{t\to\infty} z(t) = -\infty \tag{3.90}$$

ya da

$\lim_{t\to\infty} z(t) = 0$ dır. (3.91)

b) Aşağıdaki ifadeler denktir.

i) (3.90) olsun

ii) $p < -1$

iii) $\lim_{t\to\infty} y(t) = \infty$ (3.92)

c) Aşağıdaki ifadeler denktir.

i) (6.4.15) olsun.

ii) $p > -1$

iii) $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$ (3.93)

İspat: (Györi ve Ladas, 1991)

(3.3.4.1) denkleminden

$$z(t) = -Q(t)y(t-\tau) \tag{3.94}$$

elde edilir ve nihayetinde $z(t) \le 0$ olur. Ya da 3.3.4.5 geçerli ya da

$$\lim_{t\to\infty} z(t) = I \,. \tag{3.95}$$

3.5. İki Mertebeden Denklemlerde Salınım

$$y''(t) + \alpha\, y'(t) + \beta\, f\big(y(t-r)\big) = 0 \tag{3.96}$$

ele alalım. Burada, $\alpha \in (-\infty,\infty)$, $\beta \in (0,\infty)$, $r \in [0,\infty)$, $f \in C[R,R]$, $u \neq 0$ için $uf(u) > 0$ ve

$$\left.\begin{array}{ll} \lim_{u\to 0} \dfrac{f(u)}{u} = 1 & \text{için} \quad \alpha > 0 \\ \lim_{|u|\to\infty} \dfrac{f(u)}{u} = 1 & \text{için} \quad \alpha \le 0 \end{array}\right\} \tag{3.97}$$

denkleminin her çözümünün salınım yapması için gerek ve yeter şart

$$z''(t) + \alpha\, z'(t) + \beta\, z(t-r) = 0 \tag{3.98}$$

salınımlı olmasıdır. Yani (3.80) salınımlı olması için gerek ve yeter şart

$$\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta\, e^{-\lambda r} = 0$$

karakteristik denkleminin hiçbir reel köke sahip olmamasıdır. Denklemin çözümü yoksa salınımlıdır.

3.5.1. Sun flower denklemi için salınım

$$y''(t)+\alpha\, y'(t)+\beta\, f(y(t-r))=0, \qquad t\geq 0 \tag{3.99}$$

denklemini ele alalım. Burada

$$\alpha,\beta,r\in(0,\infty), \qquad f\in C[R,R], \tag{3.100}$$

$$\lim_{u\to 0}\frac{f(u)}{u}=1 \tag{3.101}$$

Bazı $A\in(0,\infty)$, $u\neq 0$ için $uf(u)>0$ ve $u\in[-A,A]$ (3.102)

$\alpha\leq 0$ durumu bir sonraki kısımda ele alınacaktır.

Teorem 3.5.1.1. (Györi ve Ladas, 1991)

(3.100)−(3.102) sağlansın.

$$\lambda^2+\alpha\lambda+\beta\, e^{-\lambda r}=0 \tag{3.103}$$

karakteristik denklemi linerize olmuş

$$z''(t)+\alpha\, z'(t)+\beta\, z(t-r)=0$$

(3.104) denklemi reel köklere sahip olmayan karakteristik denklemi olsun. Bu halde grafiği $R^+\times[-A,A]$ şeridinde olan (3.99) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

Teorem3.5.1.2. (Györi ve Ladas, 1991)

(3.100) ve (3.102) sağlansın.

$u\in[0,A]$ için $f(u)\leq u$ ve f azalmayan bir dizi olsun. (3.105)

Ayrıca (3.104) denkleminin (3.103) karakteristik denklemi negatif köke sahip olsun. Bu halde $R^+\times(0,A]$ şeridinde (3.99) denklemi salınımlı olmayan bir çözüme sahiptir. Teorem 3.5.1.1 ve 3.5.1.2 birleştirilerek (3.99) denkleminin salınımı için gerekli ve yeterli şart aşağıdaki sonuç ile verilir.

Sonuç 3.5.1.1. (Györi ve Ladas, 1991)

(3.100), (3.101), (3.102) ve (3.105) sağlansın. Bu halde $R^+ \times [-A, A]$ şeridinde (3.96) denkleminin her çözümünün salınımlı olması için gerek ve yeter şart linerize olmuş (3.107) denklemi için (3.106) karakteristik denkleminin reel köklere sahip olmamasıdır.

(3.99) denkleminde $f(u) = \sin u$ alınırsa

$$y''(t) + \frac{a}{r} y'(t) + \frac{\mathrm{b}}{r} \sin y(t-r) = 0, \qquad t \geq 0 \tag{3.106}$$

Sun Flower denklemi elde edilir. 1978 yılında Somolinos uygun a, b ve r değerleri için $\varepsilon > 0$ yeterince küçük $A = \pi - \varepsilon$ olmak üzere (3.106) denkleminin çözümleri $R^+ \times [-A, A]$ şeridinde olduğunu göstermiştir. Dolayısıyla $A \in (0, \pi)$ olmak üzere Teorem 3.5.1.1 gereğince çözümlerinin salınımlı olması için

$$\lambda^2 + \frac{a}{r}\lambda + \frac{\mathrm{b}}{r} e^{-\lambda r} = 0 \tag{3.107}$$

karakteristik denkleminin hiçbir reel köke sahip olmamasıdır.

Teorem 3.5.1.1. in İspatı: (Györi ve Ladas, 1991)

$y(t) \in (0, A]$olacak şekilde (3.99) denkleminin pozitif çözümü olsun. Bu halde (3.102) denklemi $y''(t) + \alpha\, y'(t) < 0$ negatif olur. Buradan hareketle $u(t) = y'(t) + \alpha\, y(t)$ ve $v(t) = y'(t) e^{\alpha t}$ azalan fonksiyondur.

$L_1 = \lim_{t \to \infty} u(t)$ve $L_2 = \lim_{t \to \infty} v(t)$ Açıkça. L_1 reel sayıdır. Aksi halde $\lim_{t \to \infty} y'(t) = -\infty$. Bu ise $\lim_{t \to \infty} y(t) = -\infty$ olur.

İddia1: (Györi ve Ladas, 1991)

$L_2 < 0$dır. Aksi halde $L_2 \geq 0$ve sonunda $y'(t) \geq 0$dır .Böylece $l_0 = \lim_{t \to \infty} y(t)$ mevcut ve pozitiftir. Aynı zamanda $l_1 = \lim_{t \to \infty} y'(t) = L_1 - \alpha l_0$olacak şekilde bir limiti vardır. Açıkça $l_1 \geq 0$ dır. Aksi halde $l_0 = -\infty$ olur. Fakat (3.96) denkleminden

$$\lim_{t \to \infty} y''(t) = -\alpha\, l_1 - \beta\, f(l_0) < 0 \tag{3.108}$$

denklemi yazılabilir. Buradan l_1 ve l_0 ın $-\infty$olduğu görülür.

Not: $\lim_{t\to\infty} u = L_1 = \lim_{t\to\infty} y'(t) + \alpha \lim_{t\to\infty} y(t) \Rightarrow l_1 = L_1 - \alpha l_0$ bulunur. Bu durum L_2 nin negatif olduğunu gösterir. Bu hal $y'(t) < 0$ olduğunu gerektirir. Böylece $\lim_{t\to\infty} y(t) = l_0 \geq 0$ dır. Bu halde $\lim_{t\to\infty} y'(t) = l_1$ limiti vardır ve sıfır olmalıdır. Aksi halde $l_1 < 0$ ve böylece $l_0 = -\infty$ olur. (3.108) denkleminden $\lim_{t\to\infty} y''(t) = -\beta f(l_0)$ ve l_0 sıfır olmalıdır. Aksi halde $\lim_{t\to\infty} y''(t) < 0$ ve $l_0 = -\infty$. Bu ise bir çelişkidir.

$$y(t) > 0, \quad y'(t) < 0, \quad \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty} y'(t) = 0 \tag{3.109}$$

denklemi tesis edilmiş olur.

İddia 2: (Györi ve Ladas, 1991)

$$\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta(1-\varepsilon)e^{-\lambda r} \geq \frac{1}{2} m \text{ için } \lambda < 0 \tag{3.110}$$

denklemini sağlayan pozitif m ve $\varepsilon < \frac{1}{2}$ sayıları vardır.

İspat 2: (Györi ve Ladas, 1991)

Gerçekten (3.103) hipotezinden negatif köklere sahip olmadığı bilinmektedir. $F(\lambda) = \lambda^2 + \alpha\lambda + \beta e^{-\lambda r}$ olsun. Bu halde $F(-\infty) = \infty$ ve $F(0) = \beta > 0$ .Buradan $\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta e^{-\lambda r} \geq m$ yazılabilir. Burada $m = \min_{\lambda<0} F(\lambda)$ .Böylece $\lim_{\lambda\to-\infty} (\lambda^2 + \alpha\lambda + \frac{1}{2}\beta e^{-\lambda r}) = \infty$, buradan

$$\lambda^2 + \alpha\lambda + \frac{1}{2}\beta e^{-\lambda r} \geq m/2 \text{ için } \lambda \leq \lambda_0 \tag{3.111}$$

olacak şekilde bir $\lambda_0 < 0$ vardır. $\varepsilon = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{me^{\lambda_0 r}}{2\beta}\right\}$ olsun.

$\lambda < \lambda_0$ için (3.4.1.13) kullanılarak $\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta(1-\varepsilon)e^{-\lambda r} \geq \lambda^2 + \alpha\lambda + \frac{1}{2}\beta e^{-\lambda r} \geq m/2$ elde edilir. Diğer taraftan $\lambda_0 < \lambda < 0$ için

$$\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta(1-\varepsilon)e^{-\lambda r} \geq \lambda^2 + \alpha\lambda + \beta e^{-\lambda r} - \frac{1}{2} m e^{(\lambda_0 - \lambda)r} \geq m - m/2 = m/2$$

elde edilir. Burada (3.110) ispat edilmiş olur. Şimdi (3.99) $\int_t^\infty$ integre edilir ve (3.109) kullanılırsa

$$y'(t)+\alpha y(t)=\beta\int_t^{\infty} f(y(s-r))ds \qquad (3.112)$$

elde edilir. t_1'i çok büyük seçelim öyle ki $s\geq t_1$ için (3.4.1.13) ve (3.4.1.11) denklemlerinden

$\dfrac{f(y(s-r))}{y(s-r)}\geq 1-\varepsilon$ elde edilir. Bu halde $t\geq t_1$ için (3.112) denkleminden

$$y'(t)+\alpha y(t)\geq \beta(1-\varepsilon)\int_t^{\infty} y(s-r)ds \qquad (3.113)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ise iddiayı gerçekler.

İddia 3: (Györi ve Ladas, 1991)

$y(t)$ (3.113) denkleminin nihayetinde pozitif bir çözümü olsun $\alpha\in R$ ve $\beta(1-\varepsilon)>0$ olsun. Bu halde

$$z'(t)+\alpha z(t)=\beta(1-\varepsilon)\int_t^{\infty} z(s-r)ds \qquad (3.114)$$

denklemi $0<z(t)\leq y(t)$ olacak şekilde bir $z(t)$ çözümü vardır.

İspat 3: (Györi ve Ladas, 1991)

$u(t)=y(t)e^{\alpha t}$ ifadesi (3.113) denkleminde kullanılırsa $u(t)>0$ ve $u'(t)\geq \beta(1-\varepsilon)\int_t^{\infty} e^{-\alpha(s-r)}u(s-r)ds$ elde edilir. $\int_T^t$ integre edilirse $t\geq T$ için

$$u(t)\geq u(T)+\int_T^t\left[\beta(1-\varepsilon)e^{\alpha s}\int_s^{\infty} e^{-\alpha(\xi-r)}u(\xi-r)d\xi\right]ds \qquad (3.115)$$

elde edilir. İspat için Knaster-Tarskifixed nokta teoremi kullanılacaktır.

Not: (Knaster-Tarskifixed nokta teoremi)

X kısmi sıralı Banach uzayı olsun. M aşağıdaki şartları sağlayacak şekilde X'in bir alt kümesi olsun.

i. inf $M\in M$ ve M nin boştan farklı alt kümesinin sup u yine M ye ait olsun.

ii. $T:M\to M$ artan bir dönüşüm olsun. Yani; $x\leq y$ ise $T_x\leq T_y$.Bu halde T, M içinde bir fixed noktaya sahiptir.

X, $[T,\infty)$ aralığı üzerinde tanımlanmak üzere ve

$$x(t)=u(t) \qquad T\le t\le T+r \tag{3.116}$$

$$x(t)\le u(t) \qquad t>T+r \tag{3.117}$$

şartlarını sağlayacak şekilde X bütün reel değerli azalmayan fonksiyonların bir kümesi olsun. Eğer $x_1,x_2\in X$ ise ve $x_1\le x_2$ olması için gerek ve yeter şart $t\ge T$ için $x_1(t)\le x_2(t)$ olmasıdır. Açıkça bu sıralamayla X kısmi sıralı bir kümedir. Şimdi de X üzerinde aşağıdaki S operatörünü tanımlayalım.

$$(Sx)(t)=\begin{cases} u(t), & T\le t\le T+r \\ u(T+r)+\int\limits_{T+r}^{t}\left[\beta(1-\varepsilon)e^{\alpha s}\int\limits_{s}^{\infty}e^{-\alpha(\xi-r)}x(\xi-r)d\xi\right]ds, & t>T+r \end{cases}$$

(3.117) ve (3.115) den $t\ge T+r$ için $(Sx)(t)\le(Su)(t)\le u(t)$ yazılır. Diğer taraftan S nin tanımından $T\le t\le T+r$ için $(Sx)(t)=u(t)$dir. $t\ge T$ için Sx azalmayan bir fonksiyondur. Sonuç olarak $S:X\to X$ bir dönüşümdür. Son olarak $\inf X\in X$ ve X in boştan farklı her alt kümesinin $\sup u$ yine X aittir. Dolayısıyla Knaster-Tarskifixed nokta teoremi bütün koşulları sağlamıştır. $x\in X$ olacak şekilde S bir fixed noktaya sahiptir .Diğer bir değişle $t\ge T$ için $(Sx)(t)=x(t)$

Buhalde

$$x(t)=\begin{cases} u(t), & T\le t\le T+r \\ u(T+r)+\int\limits_{T+r}^{t}\left[\beta(1-\varepsilon)e^{\alpha s}\int\limits_{s}^{\infty}e^{-\alpha(\xi-r)}x(\xi-r)d\xi\right]ds, & t>T+r. \end{cases}$$

elde edilir. $t\ge T$, $x(t)>0$dır ve $t\ge T+r$ için türev alınırsa

$$x'(t)=\beta(1-\varepsilon)e^{\alpha t}\int\limits_{t}^{\infty}e^{-\alpha(\xi-r)}x(\xi-r)d\xi, \qquad t\ge T+r \text{ elde edilir.}$$

$t\ge T+r$ için $x(t)=z(t)e^{\alpha t}$, burada $z(t)>0$ ve z (3.114) denklemini sağlar. Aynı zamanda $z(t)e^{\alpha t}=x(t)\le y(t)e^{\alpha t}$ dir. Böylece iddia 3 ispatlanmış olur. (3.114) denkleminin he iki yanının türevi alınırsa, buradan $z(t)$nin $z''(t)+\alpha z'(t)+\beta(1-\varepsilon)z(t-r)=0$ ın sınırlı pozitif bir çözümü olduğu görülür. Bu durum (3.110) ye çelişki teşkil eder. Böylece (3.99) ispat edilmiş olur.

Şimdi de (3.100) nin ispatını yapalım.

İspat: (Györi ve Ladas, 1991)

μ (3.103) denkleminin negatif bir kökü olsun. Bu halde $e^{\mu t} \leq A$ olacak şekilde $T \geq t_0$ vardır. $t \geq T$ için (3.104) denklemi $\mu(t) = e^{\mu t} \in (0, A]$ salınımlı olmayan bir çözüme sahiptir.(3.105) denkleminden $t \geq T$ olduğunda

$$y''(t) + \alpha y'(t) + \beta f\left(y(t-r)\right) \leq 0 \tag{3.118}$$

denklemi $y(t) = e^{\mu t}$ çözümüne sahip ve (3.109) geçerli olur.

$\int_t^\infty$ integre edilir ve (3.109) kullanılırsa

$$y'(t) + \alpha y(t) \geq \beta \int_t^\infty f\left(y(s-r)\right) ds \leq 0 \tag{3.119}$$

elde edilir. (3.99) teoreminin ispatı yapılırken ispat edilen iddianın benzeri olarak $z'(t) + \alpha z(t) = \beta \int_t^\infty f\left(z(s-r)\right) ds$ elde edilir.

Bu denklem $t \geq T$ olduğunda $0 < z(t) < e^{\mu t}$ olacak şekilde bir $z(t)$ çözümüne sahiptir. Açıkca, $R^+ \times (0, A]$ şeridinde olacak şekilde (3.99) denkleminin bir $z(t)$ pozitif çözümü vardır.

3.5.2. İkinci mertebeden diferansiyel denklemlerde linerize olmuş salınımlar

$$y''(t) + \alpha y'(t) + \beta f\left(y(t-r)\right) = 0, \qquad t \geq 0 \tag{3.120}$$

gecikmeli diferansiyel denklemini ele alalım. Bu denklem

$$\alpha \in (-\infty, 0], \quad \beta \in (0, \infty), \quad r \in [0, \infty), \quad f \in C[R, R], \tag{3.121}$$

$$\lim_{|u| \to \infty} \frac{f(u)}{u} = 1 \tag{3.122}$$

$$uf(u) > 0, \; u \neq 0 \tag{3.123}$$

denklem şartlarını sağlar. Şimdi de (3.120) denkleminin tüm çözümünün salınıma sahip olması için yeterli şartları sağlayacak ilk sonucu verelim.

Teorem 3.5.2.1. (Györi ve Ladas, 1991)

(3.121) – (3.123) şartları sağlansın ve

$$\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta e^{-\lambda r} = 0 \tag{3.124}$$

karakteristik denklemi

$$z''(t) + \alpha z'(t) + \beta z(t-r) = 0 \tag{3.125}$$

linerize olmuş denkleminin karakteristik denklemi hiç pozitif köke sahip olmasın. Bu halde (3.120) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

Teorem 3.5.2.2. (Györi ve Ladas, 1991)

(3.4.2.2), (3.4.2.4) sağlansın ve

$u > M$ için azalmayan ve $f(u) \le u$ olsun. (3.126)

Ayrıca, (3.125) denklemine karşılık gelen (3.124) karakteristik denklemi bir pozitif köke sahip olsun. Bu halde (3.120) denklemi sınırsız ve salınım yapmayan çözüme sahiptir.(3.120) ve (3.121) denklemi birleştirilerek (3.120) denkleminin salınımı için gerek ve yeter şart sağlanırsa aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 3.5.2.1. (Györi ve Ladas, 1991)

(3.121)-(3.123) ve (3.126) şartları sağlansın. Bu halde (3.120) denkleminin her çözümünün salınımlı olabilmesi için gerek ve yeter şart linerize olmuş (3.125) denklemine karşılık gelen (3.124) karakteristik denkleminin hiçbir reel köke sahip olmamasıdır.

Sonuç 3.5.2.2. (Györi ve Ladas, 1991)

(3.123) olsun. Buradaki parametreler

$$\alpha \in (-\infty, \infty), \quad \beta \in (0, \infty), \quad r \in [0, \infty), \quad f \in C[R, R] \text{ ve} \tag{3.127}$$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{u \to 0} \frac{f(u)}{u} = 1 \qquad \alpha > 0 \\ &\lim_{|u| \to \infty} \frac{f(u)}{u} = 1 \qquad \alpha \le 0 \end{aligned}\right\} \tag{3.128}$$

sağlar. Bu halde (3.120) denkleminin her çözümünün salınımlı olabilmesi için gerek ve yeter şart linerize olmuş (3.125) denklemine karşılık gelen (3.124) karakteristik denkleminin hiçbir reel köke sahip olmamasıdır. Özel olarak $r = 0$ ise (3.120) denkleminin tüm çözümlerinin salınımı için gerek ve yeter şart aşağıdaki sonuçla ifade edilir.

Sonuç3.5.2.3. (Györi ve Ladas, 1991)

$r = 0$ olmak üzere (3.123),(3.127) ve (3.128) olsun. Bu halde

$$y''(t) + \alpha y'(t) + \beta f(y(t)) = 0 \tag{3.129}$$

denkleminin her çözümünün salınım yapabilmesi için gerek ve yeter şart $\beta > \frac{1}{4}\alpha^2$ olmasıdır. Teorem (3.100) ve (3.121) nin ispatı için aşağıdaki iki lemmaya ihtiyaç vardır.

Lemma3.5.2.1. (Györi ve Ladas, 1991)

(3.121) ve (3.123) olsun. Eninde sonunda $y(t)$ (3.120) pozitif çözümü olsun. Bu halde

$$y'(t) > 0 \text{ ve} \tag{3.130}$$

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \infty \tag{3.131}$$

vardır.

İspat: (Györi ve Ladas, 1991)

(3.121) ve (3.123) denklemlerinden $y''(t) + \alpha y'(t) < 0$ dır. Bu durum

$$u(t) = y''(t) + \alpha y'(t) \tag{3.132}$$

$$v(t) = y'(t)e^{\alpha t} \tag{3.133}$$

denklemlerinin kesin olarak azalan olduğunu gösterir. Özellikle (3.133) denkleminden $y'(t)$ eninde sonunda işaret değiştirmez.(3.130) ifadesi doğru olsun. Aksi halde $y'(t) < 0$ ve $y''(t) < -\alpha y'(t) \le 0$ bu ise $y(t) < 0$ olmasını gerektirir. Bu ise çelişkidir. Şimdi de (3.131) geçerli olsun. Aksi halde $\lim_{t\to\infty} y(t)$ mevcut ve bu bir pozitif sayı olsun. Fakat (3.120) denkleminden $\lim_{t\to\infty} u'(t) = -\beta f(L) < 0$ dır. Böylece

$$\lim_{t\to\infty} u(t) = -\infty \tag{3.134}$$

Diğer taraftan (3.132) ten $u(t) > \alpha y(t) \ge \alpha \frac{1}{2} \in R$ dir. Bu ise terslik ifade eder.

Lemma 3.5.2.2. (Györi ve Ladas, 1991)

(3.123) olsun. Bununla beraber (3.124) denklemi pozitif köklere sahip olmasın. Bu halde $\lambda \geq 0$ için

$$\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta(1-\varepsilon)e^{-\lambda r} \geq \mu \tag{3.135}$$

olacak şekilde μ ve pozitif ε sayıları vardır.

İspat: (Györi ve Ladas, 1991)

$F(\lambda) = \lambda^2 + \alpha\lambda + \beta e^{-\lambda r}$ olsun. $F(\infty) = \infty$, $F(0) = \beta > 0$ ve $F(\lambda)$ hiçbir pozitif köke sahip değildir. Buradan $\lambda \geq 0$, $m = \min_{\lambda \geq 0} F(\lambda) > 0$ böylece $F(\lambda) \geq m$ dir.

$\lambda \geq \lambda_0$ için

$$\lambda^2 + \alpha\lambda + \frac{1}{2}\beta e^{-\lambda r} \geq m/2 \tag{3.136}$$

denklemi sağlayacak şekilde $\lambda_0 \geq 0$ vardır. $\varepsilon = \min\left\{\frac{1}{2}, m/2\beta\right\}$ olsun. $\lambda \geq \lambda_0$ için (3.136) denklemi kullanılırsa

$$\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta(1-\varepsilon)e^{-\lambda r} \geq \lambda^2 + \alpha\lambda + \frac{1}{2}\beta e^{-\lambda r} \geq m/2 \tag{3.137}$$

elde edilir. $0 \leq \lambda < \lambda_0$ için

$$\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta(1-\varepsilon)e^{-\lambda r} \geq \lambda^2 + \alpha\lambda + \beta e^{-\lambda r} - \frac{1}{2}me^{-\lambda r} \geq m - \frac{1}{2}m = m/2 \tag{3.138}$$

elde edilir. (3.137) ve (3.138) denklemlerinden $\mu = \frac{1}{2}m$ alınmasıyla (3.135) gerçekleşir. Bu ise lemmanın ispatıdır.

Teorem 3.5.2.1 in İspatı: (Györi ve Ladas, 1991)

Çelişki oluşturmak için (3.120) denklemi eninde sonunda pozitif bir çözüme sahip olsun. Bu halde lemma 3.5.2.1 den (3.130) ve (3.131) denklemleri sağlanır. Lemma 3.5.2.1. den $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$ olmak üzere (3.135) gerçekleşecek şekilde μ ve ε sayıları vardır. $T \geq t_0$ büyük seçilsin. Bu halde $t \geq T$ için

$$y(t-r)>0 \quad \text{ve} \quad \frac{f(y(t-r))}{y(t-r)}>1-\varepsilon \tag{3.139}$$

denklemi (3.122) ve (3.131) den sağlanır. Bu halde $t \geq T$ için (3.120) denkleminden

$$y''(t)+\alpha y'(t)+\beta(1-\varepsilon)y(t-r) \leq 0 \tag{3.140}$$

yani

$$\left(e^{\alpha t}y'(t)\right)'+\beta(1-\varepsilon)e^{\alpha t}y(t-r) \leq 0 \tag{3.141}$$

sağlanır. (3.141) denklemi $\int\limits_{t \geq T}^{\infty}$ integre edilirse ve

$$\lim_{t\to\infty} e^{\alpha t}y'(t) \leq c \in [0,\infty)$$

göz önüne alınırsa gerçekten, $e^{\alpha t}y'(t)>0$ ve $\left(e^{\alpha t}y'(t)\right)'<0$) $t \geq T$ için

$$e^{\alpha t}y'(t) \geq \beta(1-\varepsilon)\int_t^{\infty} e^{\alpha s}y(s-r)ds,$$ ve

$$y'(t) \geq \beta(1-\varepsilon)e^{-\alpha t}\int_t^{\infty} e^{\alpha s}y(s-r)ds,$$

elde edilir. Bu son ifade $\int\limits_{T+r}^{t>T+r}$ integre edilirse

$$y(t) \geq y(T+r)+\int_{T+r}^{t}\left[\beta(1-\varepsilon)e^{-\alpha s}\int_s^{\infty} e^{\alpha\xi}y(\xi-r)d\xi\right]ds, \quad t \geq T+r \tag{3.142}$$

elde edilir. Şimdi de Knaster-Tarskifixed nokta teoremini uygulayalım. X, $[T,\infty)$ aralığı üzerinde negatif olmayan ve azalmayan fonksiyonların kümesi olsun. $T \leq t \leq T+r$ için

$$x(t)=y(t) \tag{3.143}$$

$$x(t) \leq y(t) \tag{3.144}$$

yazılsın. Şimdi x_1 ve $x_2 \in X$ olsun. $t \geq T$ için $x_1 \leq x_2$ olması için gerek ve yeter şart $x_1(t) \leq x_2(t)$. Açıkça X kısmi sıralı bir kümedir. Şimdi de X üzerindeki S dönüşümü

$$(Sx)(t)=\begin{cases} y(t), & \mathrm{T} \leq \mathrm{t} \leq \mathrm{T+r} \\ y(T+r)+\displaystyle\int_{T+r}^{t}\left[\beta(1-\varepsilon)e^{-\alpha s}\int_s^{\infty} e^{\alpha\xi}x(\xi-r)d\xi\right]ds, & t>T+r \end{cases}$$

olsun. (3.142) ve (3.144) denkleminden $t > T + r$ için $(Sx)(t) \le (Sy)(t) \le y(t)$

diğer taraftan S nin tanımından $T \le t \le T + r$ için $(Sx)(t) = y(t)$.

Aynı zamanda $t \ge T$ için Sx negatif olmayan ve azalmayan bir fonksiyondur.

Böylece $S : X \to X$ .Açıkça Knaster-Tarskifixed nokta teoreminin bütün koşulları gerçekleşmiştir. Sonuç olarak S dönüşümü $x \in X$ gibi bir fixed noktaya sahiptir. Buradan $t \ge T$ için $(Sx)(t) = x(t)$ veya

$$x(t) = \begin{cases} y(t), & \mathrm{T \le t \le T + r} \\ y(T+r) + \int_{T+r}^{t} \left[\beta(1-\varepsilon) e^{-\alpha s} \int_{s}^{\infty} e^{\alpha \xi} x(\xi - r) d\xi \right] ds, & t > T + r \end{cases}$$

olur.

Açıkça $t \ge T$ için $x(t) > 0$ ve $x'(t) > 0$ dır. $t \ge T + r$ için türev alınırsa $\left(e^{\alpha t} x'(t)\right)' + \beta(1-\varepsilon) e^{\alpha t} x(t-r) = 0$ elde edilir. Böylece $x''(t) + \alpha x'(t) + \beta(1-\varepsilon) x(t-r) = 0$ $t > T + r$ elde edilir. Buradan

$\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta(1-\varepsilon) e^{-\lambda r} = 0$ karakteristik denklemi pozitif köke sahip olur. Bu ise (3.135) ya terslik teşkil eder.

Teorem 3.5.2.2. nin İspatı: (Györi ve Ladas, 1991)

μ (3.124) denkleminin pozitif bir kökü olsun. Bu halde (3.108) denklemi salınım yapmayan sınırsız bir $y(t) = e^{\mu t}$ çözümüne sahiptir. Bu halde (3.126) denkleminden yeterince büyük t ler için $y''(t) + \alpha y'(t) + \beta f\left(y(t-r)\right) \le 0$ $y(t)$ çözüme sahiptir. Teorem (3.120) in ispatına benzer olarak (3.125) denklemi salınımlı $z(t)$ gibi çözüme sahiptir.Lemma (3.99) den bu çözüm sınırsızdır ve ispat tamamlanmıştır.

3.5.3. Yüksek mertebeli diferansiyel eşitsizlikler

$$y^{(n)}(t) + (-1)^{n+1} p^n y(t - n\tau) \le 0 \tag{3.145}$$

$$y^{(n)}(t) + (-1)^{n+1} p^n y(t - n\tau) \ge 0 \tag{3.146}$$

$$y^{(n)}(t) + (-1)^{n+1} p^n y(t - n\tau) = 0 \tag{3.147}$$

$$y^{(n)}(t) - p^n y(t + n\tau) \le 0 \tag{3.148}$$

$$y^{(n)}(t) - p^n y(t + n\tau) \geq 0 \tag{3.149}$$

$$y^{(n)}(t) - p^n y(t + n\tau) = 0 \tag{3.150}$$

gecikmeli ve ileri diferansiyel denklemleri ve eşitsizlikleri ele alalım. Burada

$$n \geq 1 \quad \text{ve} \quad p, \tau \in (0, \infty) \tag{3.151}$$

yazılır.

Teorem 3.5.3.1. (Györi ve Ladas, 1991)

(3.151) sağlansın. Bu halde

$$p\tau > 1/e \tag{3.152}$$

olması için gerek ve yeter şart

a) n tek olduğunda (3.145) nihayetinde pozitif bir çözüme sahip değil, (3.146) nihayetinde negatif çözümlere sahip değil ve (3.147) ün her çözümü salınımlıdır.

b) n çift olduğunda (3.145) nihayetinde negatif sınırlı bir çözüme sahip değil, (3.146) nihayetinde pozitif çözümlere sahip değil ve (3.147) ün her sınırlı çözümü salınımlıdır.

Teorem 3.5.3.2. (Györi ve Ladas, 1991)

(3.151) sağlansın. Bu halde (3.152) in olması için gerek ve yeter şart

a) n tek olduğunda (3.148) nihayetinde negatif bir çözüme sahip değil, (3.149) nihayetinde pozitif çözümlere sahip değil ve (3.150) ün her çözümü salınımlıdır.

b) n çift olduğunda (3.148) nihayetinde sınırlı olmayan negatif bir çözüme sahip değil, (3.149) nihayetinde sınırlı olmayan pozitif çözümlere sahip değil ve (3.150) ün her çözümü salınımlıdır.

Teorem 3.5.3.1 in İspatı: (Györi ve Ladas, 1991)

$p\tau > 1/e$ olsun. λ reel olmak üzere $y(t) = e^{\lambda t}$ alınırsa (3.147) denklemine karşılık gelen karakteristik denklem $\lambda^n + (-1)^{n+1} p^n e^{-\lambda n\tau} = 0$ ile verilir. Şimdi de (3.145) eşitsizliğinin yeterlilik kısmını ispat edelim. $y(t) = -x(t)$ alınarak (3.146) eşitsizliği benzer yolla ispat edilir. Sonrasında (3.147) denkleminin ispatı da bir önceki sonuca benzerdir. n tek olsun ve (3.4.3.1) nihayetinde pozitif $y(t)$ çözüme sahip olsun. (3.145) denkleminden $y^n(t)$ nihayetin de negatiftir. n tek ise $0 \leq l < n$ olmak üzere nihayetinde

$$\left.\begin{array}{lll} y^{(k)}(t) > 0 & \text{için} & k = 1,2,...,l \\ (-1)^k y^{(k)}(t) > 0 & \text{için} & k = l+1,...,n \end{array}\right\} \qquad (3.153)$$

denklemi sağlanacak şekilde bir l çift sayısı vardır.

İddia: (Györi ve Ladas, 1991)

$l = 0$ dır. Yani $k = 1,2,...,n$ için nihayetinde

$$(-1)^k y^{(k)}(t) > 0 \quad \text{için} \quad k = 1,2,...,n \qquad (3.154)$$

sağlanır. Aksi halde $l > 0$ dır ve (3.145) denklemi $n-1$ defa $\int_{t_1}^{t}$ integre edilirse yeterince büyük t_1 ler için

$$\begin{aligned} y^{(l)}(t) &\leq \sum_{k=o}^{n-l-1} \frac{(t-t_1)^k}{k!} y^{(l+k)}(t_1) - \int_{t_1}^{t} \frac{(t-s)^{n-l-1}}{(n-l-1)!} p^n y(s-n\tau)ds \\ &\leq \sum_{k=o}^{n-l-1} \frac{(t-t_1)^k}{k!} y^{(l+k)}(t_1) - \frac{y(t_1-n\tau)}{(n-l-1)!} p^n \int_{t_1}^{t} (t-s)^{n-l-1} ds \\ &= \sum_{k=o}^{n-l-1} \frac{(t-t_1)^k}{k!} y^{(l+k)}(t_1) - \frac{y(t_1-n\tau)}{(n-l)!} p^n (t-t_1)^{n-l} \end{aligned}$$

Bu ise $t \to \infty$ için $y^{(l)}(t) \to -\infty$ dur. Bu durum (3.153) ifadesine çelişki teşkil eder. Bu ise (3.154) u ispatlar.

$$x(t) = y^{(n-1)}(t) + py^{(n-2)}(t-\tau) + ... + p^{n-1} y(t-(n-1)\tau) \qquad (3.155)$$

olsun. Nihayetinde

$$x(t) > 0 \qquad (3.156)$$

oluşur. (3.145) ve (3.155) denklemlerinden

$$x'(t) + px(t-\tau) \leq 0 \qquad (3.157)$$

elde edilir. Fakat (3.152) ve teorem 2.3.3. (Györi ve Ladas, 1991) den dolayı (3.157) denklemi nihayet pozitif bir çözüme sahip olamaz. Bu durum (3.156) ifadesine çelişki oluşturur. Bu ise n in tek olma durumunda ispatı tamamlar.

Son olarak n çift olsun. Çelişki yoluyla bu durumu ispat edelim. (3.145) ifadesi nihayetinde negatif sınırlı bir $y(t)$ çözüme sahip olsun. Bu halde $y^{(n)}(t) < 0$, $y(t)$ sınırlı olduğundan (3.154) denklemi sağlanır. $x(t)$ (3.155) deki gibi tanımlanırsa (3.156) ve (3.157) denklemleri doğru olur. Bu ise teorem 2.3.3. (Györi ve Ladas, 1991) den çelişkidir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Teorem 3.5.3.2. nin İspatı: (Györi ve Ladas, 1991)

n tek olduğunda (3.149) ifadesinin yeterlilik için gerekli şartları verelim. Geri kalan kısmı benzerdir. Çelişki oluşturarak ispat edelim. Yani (3.149) denklemi nihayetinde $y(t)$ pozitif çözüme sahip olsun. Bu halde $y^{(n)}(t)$ nihayetinde pozitif olur. $0 < m \le n$ olmak üzere

$$\left.\begin{array}{lll} y^{(j)}(t) > 0 & \text{için} & j = 0,1,2,...,m \\ (-1)^j y^{(j)}(t) > 0 & \text{için} & j = m+1, m+2,...,n \end{array}\right\} \tag{3.158}$$

denklemini sağlayacak şekilde bir m tek sayısı vardır.

İddia: (Györi ve Ladas, 1991)

$m = n$ dır. Yani

$$y^{(j)}(t) > 0 \text{ için } j = 0,1,2,...,n \tag{3.159}$$

doğrudur. Aksi halde $m < n$ ve (3.149) denklemi $m - n$ defa $\int_{t_0}^{t}$ integre edilirse ve t_0 yeterince büyük alınırsa

$$\begin{aligned} y^{(m)}(t) &\ge \sum_{i=o}^{n-m-1} \frac{(t-t_0)^i}{i!} y^{(m+i)}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \frac{(t-s)^{n-m-1}}{(n-m-1)!} p^n y(s+n\tau)ds \\ &\ge \sum_{i=o}^{n-m-1} \frac{(t-t_0)^i}{i!} y^{(m+i)}(t_0) + \frac{y(t_0+n\tau)}{(n-m-1)!} p^n \int_{t_0}^{t} (t-s)^{n-m-1} ds \\ &= \sum_{i=o}^{n-m-1} \frac{(t-t_0)^i}{i!} y^{(m+i)}(t_0) + p^n \frac{y(t_0+n\tau)}{(n-m)!} (t-t_0)^{n-m} \end{aligned}$$

Bu ise $t \to \infty$ için $y^{(m)}(t) \to \infty$ olduğunu gösterir. (3.4.3.14) denkleminden bu mümkün değildir. Yani $y^{(m)}(t)$ azalan bir fonksiyondur. Yeterince büyük t ler için (3.159) denkleminden $x(t) = y^{(n-1)}(t) + py^{(n-2)}(t+\tau) + ... + p^{n-1}y(t+(n-1)\tau)$ denklemi pozitiftir. $x'(t) - px(t+\tau) = y^{(n)}(t) - p^n y(t+n\tau) \ge 0$ gözlenir. Fakat $p\tau > 1/e$ ve teorem 2.3.4 (Györi ve Ladas, 1991) eşitsizliğin nihayetinde pozitif bir çözüme sahip olmadığını gösterir. Bu durum ise $x(t)$ nin nihayetinde pozitif olduğuna çelişki elde eder. Teorem ispatlanmış olur.

3.5.4 Yüksek mertebeli denklemlerde salınım için yeterli şartlar

$$\frac{d^n}{dt^n}\left[y(t)+P(t)\,y(t-\tau)\right]+Q(t)\,y(t-\sigma)=0 \qquad (3.160)$$

yüksek mertebeden nötr diferansiyel denklemi verilsin. Burada

$$n \geq 1,\ P \in C\left[[t_0,\infty),R\right],\ Q \in C\left[[t_0,\infty),R^+\right] \text{ ve } \tau,\sigma \in [0,\infty) \qquad (3.161)$$

sağlansın.

Lemma 3.5.4.1. (Györi ve Ladas, 1991)

(3.161) olmak üzere

$$\int_{t_0}^{\infty} Q(s)\,ds=\infty \qquad (3.162)$$

Ayrıca, nihayetinde $y(t)$ (3.160) denkleminin pozitif bir çözümü ve

$$z(t)=y(t)+P(t)\,y(t-\tau) \qquad (3.163)$$

olsun. Bu halde aşağıdaki ifadeler doğrudur.

a) $z^{(n-1)}$ azalan ve $i=0,1,\ldots,n-2$ için $z^{(i)}(t)$ kesin olarak monotoniktir.

b) P_1 ve P_2 reel olmak üzere $P(t)$ için aşağıdakilerden birisi oluşur.

i) $P_1 \leq P(t) \leq 0$

ii) $0 \leq P(t) \leq P_2 < 1$

Bu halde ya

$$i=0,1,\ldots,n-1 \quad \text{için} \quad \lim_{t\to\infty} z^{(i)}(t)=-\infty \qquad (3.164)$$

ya da

$$\left.\begin{array}{lll} i=1,2,\ldots,n-1, & \text{için} & \lim_{t\to\infty} z^{(i)}(t)=0 \\ i=1,2,\ldots,n-2, & \text{için} & z^{(i)}(t)\,z^{(i+1)}(t)<0 \\ z^{(n-1)}(t)>0,\ z^{(n)}(t)\leq 0 & \text{ve} & z^{(n)}(t) \text{ özdeş olarak sıfırdegildir} \end{array}\right\} \qquad (3.165)$$

İspat: (Györi ve Ladas, 1991)

a) (3.160) denkleminden

$$z^{(n)}(t)=-Q(t)\,y(t-\sigma)\leq 0 \qquad (3.166)$$

elde edilir. Buradan $z^{(n-1)}(t)$ azalandır. (3.166) ifadesinde $z^{(n)}(t) \neq 0$, böylece $z^{(n-1)}(t)$ nihayetinde pozitif veya nihayetinde negatiftir. Dolayısıyla $i = 0,1,...,n-2$ için $z^{(i)}(t)$ kesin olarak monotoniktir.

b) Eğer $z^{(n-1)}(t)$ azalansa buradan ya

$$\lim_{t\to\infty} z^{(n-1)}(t) = -\infty \tag{3.167}$$

ya da

$$\lim_{t\to\infty} z^{(n-1)}(t) = L \in R \tag{3.168}$$

oluşur. Eğer (3.167) olursa (3.164) in olduğu açıktır. Şimdi de (3.168) geçerli olsun. Bu halde (3.160) integre edilirse

$$L - z^{(n-1)}(t_0) + \int_{t_0}^{\infty} Q(t)\, y(t-\sigma)\, dt = 0$$

elde edilir. (3.4.4.2) ve (3.4.4.3) ten hareketle $\liminf_{t\to\infty} y(t) = 0$ yi gerektirir.

$\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$ ve $\lim_{n\to\infty} y(t_n) = 0$ olmak üzere $\{t_n\}$ dizisini ele alalım. İlk olarak $p_1 \leq p(t) \leq 0$ olsun. Bu halde $z(t)$nin monotonikliğinden ve $n \to \infty$ için $z(t_n) \leq y(t_n) \to 0$ ve $n \to \infty$ için $z(t_n + \tau) \geq p_1 y(t_n) \to 0$ den

$$\lim_{t\to\infty} z(t) = 0 \tag{3.169}$$

Şimdi de $0 \leq p(t) \leq p_2 < 1$ oluşsun. Bu halde $z(t) > 0$ dır.

İddia: (Györi ve Ladas, 1991)

$z(t)$ azalandır. Aksi halde $z(t)$ artandır. Bu halde

$$z(t_n) - z(t_n - \tau) = y(t_n) + [p(t_n) - 1]y(t_n - \tau) - p(t_n - \tau)y(t_n - 2\tau) \geq 0$$

ve böylece

$$y(t_n) + (p_2 - 1)\, y(t_n - \tau) \geq 0 \text{ elde edilir ve } \lim_{n\to\infty} y(t_n - \tau) = 0$$

bulunur. (3.163) ifadesinden $\lim_{n\to\infty} z(t_n) = 0$ dır. Bu çelişkidir. Dolayısıyla iddia edildiği gibi $z(t)$ azalandır.Dolayısıyla $\lim_{t\to\infty} z(t)$ mevcut ve sonludur. Lemma 1.5.2 (Györi ve Ladas, 1991) uygulanırsa (3.169) sağlanır. Sonuç olarak (3.169) ifadesinden $z(t)$nin ardışık türevleri işarete göre alternedir. Yani $i = 0,1,...,n-2$ için $z^{(i)}(t)\, z^{(i+1)}(t) < 0$ dir.

Lemma 3.5.4.2. (Györi ve Ladas, 1991)

(3.161) ve (3.162) olmak üzere $y(t)$ nihayetinde (3.160) in pozitif çözümü olsun. $z(t) = y(t) + P(t)\,y(t-\tau)$ olsun. Bu halde aşağıdaki ifadeler doğrudur.

a) n çift ve $P(t)$Lemma 3.5.4.1 b) deki hipotezleri sağlarsa $z(t)$ nihayetinde negatiftir.

b) Eğer n tek ve $-1 \le P(t) \le 0$ ise $z(t)$ nihayetinde pozitiftir.

c) Eğer $P(t) \le -1$ ise $z(t)$ nihayetinde negatiftir.

İspat: (Györi ve Ladas, 1991)

a) n çift olmak üzere Lemma 3.5.4.1 den (3.164) ve (3.165) nın olması halinde $z(t) < 0$ olmasını gerektirir.

b) Çelişki oluşturmak için $z(t) < 0$ olsun. Bu halde $y(t) < -P(t)\,y(t-\tau) \le y(t-\tau)$ oluşur. Yani $y(t)$ sınırlıdır. Dolayısıyla $z(t)$ sınırlıdır. Buradan Lemma 3.5.4.1 den (3.165) sağlanır. Fakat n tek olduğundan $z^{(n)}(t) \le 0$dır ve $z(t)$nin ardışık türevleri işareti alternedir. Buradan $z(t)$ninpozitif olmasını gerektirir. Bu ise varsayımımıza terslik teşkil eder. Bu durumda ispat biter.

c) Lemma 3.5.4.1 den $z(t)$nin nihayetinde pozitif ve nihayetinde negatif olduğunu biliyoruz. Şimdi çelişki oluşturabilmek için nihayetinde

$$z(t) > 0 \tag{3.170}$$

olsun. Dolayısıyla $y(t) > -P(t)\,y(t-\tau) \ge y(t-\tau)$ olur. Dolayısıyla $y(t)$ pozitif m sayısı ile sınırlıdır. Buradan (3.160) ifadesinden

$z^{(n)}(t) + mQ(t) \le 0$ elde edilir. t_1 yeterince büyük seçilirse $\int_{t_1}^{t}$ integre edilirse

$$z^{(n-1)}(t) - z^{(n-1)}(t_1) + m\int_{t_1}^{t} Q(s)\,ds \le 0 \tag{3.171}$$

$\lim_{t\to\infty} z^{(n-1)}(t) = -\infty$ ü gerektirir ve buradan $\lim_{t\to\infty} z(t) = -\infty$bulunur. Bu ise (3.170) denklemine çelişki ifade eder.

Teorem 3.4.4.1. (Györi ve Ladas, 1991)

n tek olmak üzere (3.161) ve (3.162) olsun. P_1, P_2 ve P_3 reel sayıları olmak üzere $P(t)$

$$P_1 \leq P(t) \leq -1 \tag{3.172}$$

$$-1 < P_2 \leq P(t) \leq 0 \tag{3.173}$$

$$0 \leq P(t) \leq P_3 < 1 \tag{3.174}$$

ifadelerinden herhangi biri olsun. Ayrıca nihayetinde $y(t)$ (3.160) in pozitif bir çözümü ve

$$z(t) = y(t) + P(t)\,y(t-\tau) \tag{3.175}$$

olsun. Bu halde

a) Aşağıdaki ifadeler denktir.
i) (3.164) doğrudur.

ii) $P(t)$ (3.172) yi sağlar ve özdeş olarak $P(t) \neq -1$dir.

iii) $\lim_{t\to\infty} y(t) = \infty$ dur. (3.176)

b) Aşağıdaki ifadeler denktir.

i) (3.165) doğrudur.

ii) $P(t)$ (3.173) veya (3.174) ü sağlar.

iii) $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$ dır. (3.177)

İspat: (Györi ve Ladas, 1991)

Lemma 3.5.4.1 den ya (3.164) ya da (3.165) doğrudur. (3.164) doğru olsun. Bu halde $P(t)$ negatif ve $y(t)$ sınırsız olur. Dolayısıyla

$$z(t^*) < 0 \text{ ve } y(t^*) = \max_{s \leq t^*} y(s)$$

olacak şekilde t^* vardır. Bu halde

$$0 > z(t^*) = y(t^*) + P(t^*)\,y(t^* - \tau) \geq y(t^*)\left[1 + P(t^*)\right]$$

ifadesinde $P(t^*) < -1$ olur. Böylece (10.4.12) nin doğru olduğunu ve $P(t^*) \neq -1$ dir. Buradan

$$z(t) = y(t) + P(t)\,y(t-\tau) > P(t)\,y(t-\tau) \geq P_1\, y(t-\tau)$$

yazılır.

(3.164) ifadesi (3.165) yı gerektirir. Şimdi de (3.165) doğru olsun. Eğer (3.174) doğru ise (3.175) ifadesi (3.177) yi gerektirir. Eğer (3.173) doğru ise Lemma1.5.5. (Györi ve Ladas, 1991) ten

$$-1 < P \leq P(t) \leq 0 \tag{3.178}$$

sağlanır. Son olarak (3.172) ifadesinin doğru olmadığını iddia edelim. Aksi halde Lemma 3.5.4.2 den $z(t) < 0$ olur. Fakat Lemma 3.5.4.1 ve n tek olduğundan $z(t) > 0$ olur. Bu ise bir çelişkidir. Benzer bir tartışmayla a) ve b) ispatlanır.

Teorem 3.5.4.2. (Györi ve Ladas, 1991)

n çift, (3.161) ve (3.162) olmak üzere (3.178) olacak şekilde P reel sayısı olsun. Bu halde $t \to \infty$ için (3.160) denkleminin salınım yapmayan her çözümü sıfıra gider.

İspat: (Györi ve Ladas, 1991)

(3.160) ifadesinin negatif çözümü de aynı zamanda bir çözümdür. Dolayısıyla (3.160) ifadesinin nihayetinde bir $y(t)$ pozitif çözüme sahip olduğunu gösterirsek ispat biter. $z(t) = y(t) + P(t)\,y(t-\tau)$olsun. Lamma 3.5.4.2 (a) ifadesinden $z(t) < 0$ ve $y(t) < -P(t)\,y(t-\tau) < y(t-\tau)$ yazılır. Dolayısıyla $y(t)$ sınırlı bir fonksiyondur. Çelişki oluşturmak için $\limsup\limits_{t\to\infty} y(t) = s > 0$ olsun. $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = \infty$ ve $\lim\limits_{k\to\infty} y(t_k) = s$ olacak şekilde $\{t_k\}$ dizisi oluşturalım. Yeterince büyük k lar için

$$z(t_k) = y(t_k) + P(t_k)\,y(t_k-\tau) \geq y(t_k) + P_1\; y(t_k-\tau)$$

yazılır ve buradan $\limsup\limits_{k\to\infty} y(t_k-\tau) \geq s/(-P_1) > s$ yazılır. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla $s = 0$ olmak zorundadır. Böylece ispat biter. Şimdi de (3.160) ifadesinin tüm çözümlerinin salınımı için yeterli şartları oluşturmaya hazırız.

Teorem 3.5.4.3. (Györi ve Ladas, 1991)

n tek, (3.161), (3.162) ve $P(t) \leq -1$ olmak üzere

$$\frac{Q(t)}{P(t+\tau-\sigma)} \leq -r \tag{3.179}$$

$$r^{1/n}\,\frac{\tau-\sigma}{n} > \frac{1}{e} \tag{3.180}$$

olacak şekilde bir r pozitif sayısı olsun. Bu halde (3.160) ifadesinin her çözümü salınımlıdır.

İspat: (Györi ve Ladas, 1991)

(3.160) nihayetinde pozitif bir $y(t)$ çözüme sahip ve $z(t)=y(t)+P(t)\,y(t-\tau)$ olsun. Bu halde $z^{(n)}(t)=-Q(t)\,y(t-\sigma)\le 0$ ve Lemma (3.161) c) den $z(t)<0$ dır. $z(t)>P(t)\,y(t-\tau)$ olmak üzere

$$\frac{1}{P(t+\tau-\sigma)}Q(t)\,z(t+\tau-\sigma)\le Q(t)\,y(t-\sigma)=-z^{(n)}(t) \text{ ve böylece}$$

$$z^{(n)}(t)+\frac{Q(t)}{P(t+\tau-\sigma)}z[t+(\tau-\sigma)]\le 0$$

yazılır. Fakat (3.179), (3.180) ve Teorem 3.5.3.2 den yukarıdaki eşitsizlik nihayetinde negatif bir çözüme sahip değildir. Bu ise bir çelişkidir. Bu durumda ispat biter.

Teorem 3.5.4.4. (Györi ve Ladas, 1991)

n tek, (3.161) , (3.162) ve $P(t)=-1$ olsun. Bu halde (3.160) in her çözümü salınımlıdır.

İspat: (Györi ve Ladas, 1991)

(3.160) ifadesinin nihayetinde pozitif bir $y(t)$ çözüme sahip olsun. $z(t)=y(t)-y(t-\tau)$ olsun. Bu halde Lemma 3.5.4.2 (c) den $z(t)$ negatiftir. Bu bir çelişkidir. İspat tamamlanmıştır.

Teorem 3.5.4.5. (Györi ve Ladas, 1991)

n çift, $-1\le P(t)<0$ ve $\dfrac{Q(t)}{P(t+\tau-\sigma)}\le -r$

$$r^{1/n}\frac{\tau-\sigma}{n}>\frac{1}{e} \tag{3.181}$$

olacak şekilde bir r pozitif tamsayısı olsun. Bu halde (3.160) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

İspat: (Györi ve Ladas, 1991)

(3.160) denklemi nihayetinde pozitif bir $y(t)$ çözüme sahip olsun. $z(t) = y(t) + P(t)\,y(t-\tau)$ olmak üzere Lemma 3.5.4.2 (a)dan

$$z(t) < 0 \tag{3.182}$$

elde edilir . (3.182) ifadesinden $y(t) < -P(t)\,y(t-\tau) \le y(t-\tau)$elde edilir. Bu ise $y(t)$ nin sınırlı olmasını gerektirir. Dolayısıyla $z(t)$ aynı zamanda sınırlıdır $z(t) > P(t)\,y(t-\tau)$olduğundan,

$$\frac{1}{P(t+\tau-\sigma)} Q(t)\,z(t+\tau-\sigma) \le Q(t)\,y(t-\sigma) = -z^{(n)}(t)$$

elde edilir ve buradan $z^{(n)}(t) + \dfrac{Q(t)}{P(t+\tau-\sigma)} z[t+(\tau-\sigma)] \le 0$ elde edilir.

Fakat Teorem 3.5.3.1 den bu eşitsizlik nihayetinde negatif sınırlı bir çözüme sahip olamaz. Bu durum (3.182) ifadesine çelişki teşkil eder. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 3.5.4.6. (Györi ve Ladas, 1991)

n çift ve $0 \le P(t) \le P_1 < 1$ olmak üzere bir P_1 reel sayısı olsun. Bu halde (3.160) in her çözümü salınımlıdır.

İspat: (Györi ve Ladas, 1991)

(3.160) nihayetinde pozitif bir $y(t)$ çözüme sahip olsu $z(t) = y(t) + P(t)\,y(t-\tau)$ ise $z(t) \ge y(t) > 0$ dır. Fakat Lemma 3.5.4.2 (a)dan $z(t) < 0$ dır. Bu çelişkidir. Yani bu şartlarda (3.160) in tüm çözümleri salınımlıdır.

Sonuç 3.5.4.1. (Györi ve Ladas, 1991)

$$y^{(n)}(t) + Q(t)\,y(t-\sigma) = 0 \tag{3.183}$$

$n.$ mertebeden gecikmeli diferansiyel denklemini ele alalım. n çift $Q \in C\left[\,[t_0,\infty), R\right]$ ve $\int_{t_0}^{\infty} Q(t)\,dt = \infty$ olsun. Bu halde (3.183) ifadesinin her çözümü salınımlıdır.

3.6 Mertebesi Tek Olan Nötr Gecikmeli Diferansiyel Denklemler

$n \geq 1$ ve tek olmak üzere

$$\frac{d^n}{dt^n}\left[x(t) - P_1(t)\,x(t-\tau_1)\right] + Q_1(t)\,x(t-\sigma_1) = 0 \tag{3.184}$$

ve

$$\frac{d^n}{dt^n}\left[y(t) - P_2(t)\,y(t-\tau_2)\right] + Q_2(t)\,y(t-\sigma_2) = 0 \tag{3.185}$$

nötr gecikmeli diferansiyel denklemlerini ele alalım. Burada

$$P_1, P_2, Q_1, Q_2 \in C\left[[t_0,\infty), R^+\right], \tau_1, \tau_2 \in (0,\infty) \text{ ve } \sigma_1, \sigma_2 \in [0,\infty) \tag{3.186}$$

yazılır.

Lemma 3.6.1. (Györi ve Ladas, 1991)

n pozitif bir tamsayı olmak üzere

$$P, Q \in C\left[[t_0,\infty), R^+\right],\ \tau, \sigma \in R^+ \tag{3.187}$$

$$0 \leq P(t) \leq 1 \tag{3.188}$$

$$\int_{t_0}^{\infty} Q(t)\,dt = \infty \tag{3.189}$$

olsun. Ayrıca $x(t)$,

$$\frac{d^n}{dt^n}\left[x(t) - P(t)\,x(t-\tau)\right] + Q(t)\,x(t-\sigma) = 0 \tag{3.190}$$

ifadesinin nihayetinde pozitif bir çözümü ve $z(t) = x(t) - P(t)\,x(t-\tau)$ olsun. Bu halde nihayetinde $i = 1,2,\ldots,n$ için

$$z^{(n)}(t) \leq 0, (-1)^i z^{(n-i)}(t) < 0 \tag{3.191}$$

ve $i = 0,1,\ldots,n-1$ için

$$\lim_{t\to\infty} z^{(i)}(t) = 0 \tag{3.192}$$

oluşur.

Lemma 3.6.2. (Györi ve Ladas, 1991)

$n \geq 1$pozitif bir tamsayı olmak üzere

$$P, Q \in C\left[[t_0,\infty), R^+\right], \tau \in (0,\infty), \ \sigma \in [0,\infty) \tag{3.193}$$

ya

$$t \geq T \text{ için } P(t) > 0 \tag{3.194}$$

ya da $\sigma > 0$ ve aralığın uzunluğu σ olmak üzere

$$\mathrm{Q}(\mathrm{t}) \neq 0 \tag{3.195}$$

olsun. Ayrıca $\rho = \max\{\tau,\sigma\}$ ve $t \geq T$ için

$$P(t)\,z(t-\tau) + \int_t^\infty \int_{s_{n-1}}^\infty \ldots \int_{s_1}^\infty Q(\mathrm{s})\,z(s-\sigma)\,ds\,ds_1 \ldots ds_{\mathrm{n-1}} \leq z(t) \tag{3.196}$$

integral eşitsizliği

$$T - \rho \leq t \leq T \text{ için } z(T) < z(t) \tag{3.197}$$

denklemini sağlayacak şekilde $z:[T-\rho,\infty) \to (0,\infty)$ gibi sürekli bir pozitif çözüme sahip olsun. Bu halde

$$t \geq T \quad \text{için} \quad P(t)\,x(t-\tau) + \int_t^\infty \int_{s_{n-1}}^\infty \ldots \int_{s_1}^\infty Q(\mathrm{s})\,x(s-\sigma)\,ds\,ds_1 \ldots ds_{\mathrm{n-1}} = x(t) \tag{3.198}$$

integral denklemi sürekli bir pozitif $x:[T-m,\infty) \to (0,\infty)$ çözümüne sahiptir.

İspat: (Györi ve Ladas, 1991 $W = \{t \geq T - \rho$ için $w \in C\left[[T-\rho,\infty), R^+\right] : 0 \leq w(t) \leq z(t)\}$ fonksiyonlar kümesini tanımlayalım. W üzerinde S dönüşümünü

$$(S\,w)(t) = \begin{cases} P(t)\,w(t-\tau) + \int_t^\infty \int_{s_{n-1}}^\infty \ldots \int_{s_1}^\infty Q(\mathrm{s})\,w(s-\sigma)\,ds\,ds_1 \ldots ds_{\mathrm{n-1}}, & t \geq T, \\ (S\,w)(T) + z(t) - z(T), & T - \rho \leq t < T \end{cases}$$

ile tanımlayalım. Açıkça $Sw:[T-\rho,\infty) \to R^+$ süreklidir. Aynı zamanda $w_1 \leq w_2$ olmak üzere $w_1, w_2 \in W$ olsun. Bu halde $S\,w_1 \leq S\,w_2$ dir. $S\,z \leq z$ dir ve böylece $w \in W$ ifadesi $S\,w \leq S\,z \leq z$ olmasını gerektirir. Sonuç olarak $S: W \to W$, $k = 1,2,\ldots$ için W de $z_0 = z$ ve $z_k = S\,z_{k-1}$ dizisini tanımlayalım. $k = 1,2,\ldots$ ve

$t \geq T-\rho$ için $0 \leq z_k(t) \leq z(t)$ yazılır ve $t \geq T-\rho$ için $x(t)=\lim_{k\to\infty} z_k(t)$ olsun. Lebesgue in kuvvetli yakınsaklık teoreminden $x(t)$ (3.198) denklemini sağlar.

İddia: (Györi ve Ladas, 1991)

$T-\rho \leq t \leq T$ için $x(t)$ sürekli bir fonksiyondur.

İspat: (Györi ve Ladas, 1991)

$$z_k(t)-z_m(t)=[z_k(T)+z(t)-z(T)]-[z_m(T)+z(t)-z(T)]=z_k(t)-z_m(T)$$

ve böylece $\{z_k(t)\}$ sürekli fonksiyonlar dizisi $[T-\rho,T]$ aralığı üzerinde düzgün olarak yakınsaktır. Yani x de $[T-\rho,T]$ aralığında süreklidir. (3.198) ifadesinden $[T-\rho,\infty)$ aralığı üzerinde $x(t)$ nin sürekli olduğu açıktır. Son olarak $t \geq T-\rho$ için $x(t)>0$ olduğunu gösterirsek ispat biter. Gerçekten $T-\rho \leq t \leq T$ ise (3.197) ve $z_k(t)$ nin tanımından $z_k(t) \geq z(t)-z(T)>0$. Yazılır ve böylece $T-\rho \leq t \leq T$ için $x(t) \geq z(t)-z(T)>0$ elde edilir.

İddia: (Györi ve Ladas, 1991)

$t \geq T$ için $x(t)>0$ dır. Aksi halde, $t^* = \inf\{t \geq T : x(t)=0\} \in [T,\infty)$ ve böylece

$$T-\rho \leq t < t^* \text{ için } x(t)>0 \tag{3.199}$$

yazılır ve $x(t^*)=0$ dır. Fakat ya(3.194) ya da (3.195) geçerli ise (3.198) ve (3.199)'dan

$$0=x(t^*)=P(t^*)x(t^*-\tau)+\int_{t^*}^{\infty}\int_{s_{n-1}}^{\infty}\cdots\int_{s_1}^{\infty}Q(s)\,x(s-\sigma)\,ds\,ds_1\ldots ds_{n-1}>0$$

elde edilir. Bu bir çelişkidir. Dolayısıyla ispat tamamlanır. Bu kısımdaki ara sonuç aşağıdaki mukayese teoremi ile verilir.

Teorem 3.6.1. (Györi ve Ladas, 1991)

$n \geq 1$ ve tek olmak üzere(3.186) geçerli olsun $P_1 \in C^1\left[[t_0,\infty),R^+\right]$,

$$\tau_1 \leq \tau_2\,,\ \sigma_1 \leq \sigma_2 \tag{3.200}$$

yeterince büyük t ler için

$$P_1(t) \le P_2(t-\tau_2)\frac{Q_2(t)}{Q_2(t-\tau_2)}, \quad Q_1(t) \le Q_2(t) \tag{3.201}$$

$$P_1 \text{ sınırlı } P_1' \ge 0, 0 \le P_2(t) \le 1 \tag{3.202}$$

Ve $Q_2(t) > 0, \int_{t_0}^{\infty} Q_2(t)dt = \infty$ elde edilir. Uzunluğu σ_1 olan herhangi bir aralık üzerinde ya $P_1(t) > 0$ ya da $\sigma_1 > 0$ ve $Q_1(t) \ne 0$ dır. Sonuç olarak (3.184) denkleminin her çözümü salınımlı ise (3.185) denkleminin her çözümü salınım yapar.

İspat: (Györi ve Ladas, 1991)

Çelişki oluşturmak için (3.185) nihayetinde pozitif $y(t)$ çözüme sahip olsun.

$z(t) = y(t) - P_2(t)\,y(t-\tau_2)$ olsun. Bu halde Lemma 3.6.1, (3.191) ve (3.192) dan geçerli olur. Buradan aynı zamanda $z(t)$

$$z^{(n)}(t) - P_2(t-\tau_2)\frac{Q_2(t)}{Q_2(t-\tau_2)} z^{(n)}(t-\tau_2) + Q_2(t)\,z(t-\tau_2) = 0 \tag{3.203}$$

denklemini sağlar. $t \ge T$ ve t yeterince büyük seçilirse (3.191) ve (3.201) kullanılırsa

$$z^{(n)}(t) - P_1(t)\,z^{(n)}(t-\tau_2) + Q_1(t)\,z(t-\tau_2) \le 0 \tag{3.204}$$

elde edilir. $t \ge T - \max\{\tau_2, \sigma_2\}$ için (3.191) doğru olacak şekilde T yi yeterince büyük seçelim. (3.204) ifadesi $\int_t^{t_1}$ integre edilirse $t_1 \to \infty$, $t \ge T$ için

$$-z^{(n-1)}(t) - \int_t^{\infty} P_1(s)\,z^{(n)}(s-\tau_2)ds + \int_t^{\infty} Q_1(s)\,z(s-\sigma_2)ds \le 0$$

elde edilir. İlk terime kısmi integrasyon uygulanırsa (3.201), (3.202) ve $z^{(i)}(t)$ nin monotonluğu kullanılırsa

$t \ge T$ için $-z^{(n)}(t) + P_1(t)\,z^{(n-1)}(t-\tau_1) + \int_t^{\infty} Q_1(s)\,z(s-\sigma_1)ds \le 0$ elde edilir.

Tekrar tekrar integral alınırsa

$$P_1(t)\,z(t-\tau_1) + \int_t^{\infty}\int_{s_{n-1}}^{\infty} \cdots \int_{s_1}^{\infty} Q_1(s)\,z(s-\sigma_1)ds\, ds_1 \ldots ds_{n-1} \le z(t), \; t \ge T \tag{3.205}$$

elde edilir. (3.191), (3.192) ve $z(t)$ nin pozitif ve kesin olarak azalan olduğu göz önüne alınırsa (3.197) doğru olur. $t \ge T$ için Lemma 3.6.2 den

$$P_1(t)\,x\,(t-\tau_1)+\int_t^{\infty}\int_{s_{n-1}}^{\infty}\dots\int_{s_1}^{\infty}Q_1(s)\,ds\,ds_1\dots ds_{n-1}=x(t),$$

pozitif çözüme sahiptir. (3.184) denklemi pozitif çözüme sahiptir. Bu durum (3.184) denkleminin her çözümünün salınımlı olduğu hipotezine çelişki teşkil eder. İspat biter.

3.7. Tek Mertebeli Nötr Denklemler için Salınım Teoremi

$n \geq 1$tek olmak üzere

$$\frac{d^n}{dt^n}\left[x(t)-p(t)g(x(t-\tau))\right]+q(t)h(x(t-\sigma))=0 \qquad (3.206)$$

denklemini aşağıdaki

$$p,q\in C\left[[t_0,\infty),R^+\right],\ g,h\in C[R,R],\quad \tau\in(0,\infty),\ \ \sigma\in[0,\infty), \qquad (3.207)$$

$$\liminf_{t\to\infty} p(t)=p_0\in(0,1),\ \ \limsup_{t\to\infty} p(t)=P_0\in(0,1),\ \ \lim_{t\to\infty} q(t)=q_0\in(0,\infty) \quad (3.208)$$

$$u\neq 0 \ \text{ için } \ 0\leq\frac{g(u)}{u}\leq 1,\ \lim_{u\to\infty}\frac{g(u)}{u}=1 \qquad (3.209)$$

$u\neq 0$ için $uh(u)>0$ ve $|u|$ yeterince büyük ise

$$|h(u)|\geq h_0>0 \qquad (3.210)$$

$$\lim_{u\to\infty}\frac{h(u)}{u}=1 \qquad (3.211)$$

şartlarını sağlayacak şekilde ele alalım. (3.206)denklemine karşılık gelen lineer denklemi

$$\frac{d^n}{dt^n}\left[y(t)-p_0y(t-\tau)\right]+q_0y(t-\sigma)=0 \qquad (3.212)$$

ile verilir. (3.206) denkleminin tüm çözümlerinin salınımı için şartları oluşturalım.

Teorem 3.7.1. (Györi ve Ladas, 1991)

(3.207)−(3.211) olsun ve (3.212) nin her çözümü salınımlı ise aynı zamanda (3.206) in her çözümü salınımlıdır.

İspat: (Györi ve Ladas, 1991)

Çelişki oluşturabilmek için (3.206) denklemi salınım yapmayan bir $x(t)$ çözümüne sahip olsun. Ayrıca $x(t)$ nihayetinde pozitif olsun. Nihayetinde $x(t)$nin negatif durumu da benzer olarak ispat edilir.

$$z(t) = x(t) - p(t)\,g(x(t-\tau)) \tag{3.213}$$

olsun ve $z^{(n)}(t) = -q(t)\,h(x(t-\sigma)) \leq 0$ (3.214)

elde edilir. $z^{(n-1)}(t)$ azalan olup ya

$$\lim_{t\to\infty} z^{(n-1)}(t) = -\infty \tag{3.215}$$

ya da

$$\lim_{t\to\infty} z^{(n-1)}(t) = l \in R \tag{3.216}$$

elde edilir.

İddia: (Györi ve Ladas, 1991)

(3.216) doğrudur. Aksi halde (3.215) doğru olup

$$i = 0,1,...,n-1 \text{ için } \lim_{t\to\infty} z^{(i)}(t) = -\infty \tag{3.217}$$

elde edilir. Bu halde $x(t)$ sınırsız bir fonksiyon olur. $k = 1,2,...$ için $\lim_{k\to\infty} t_k = \infty$, $\lim_{k\to\infty} x(t_k) = \infty$ ve $x(t_k) = \max_{s\leq t_k} x(s)$

olacak şekilde $\{t_k\}$dizisi elde edilir. (3.208) ve (3.209) kullanılırsa $k \to \infty$

$$\begin{aligned} z(t_k) = x(t_k) - p(t_k)g(x(t_k - \tau)) &= x(t_k) - p(t_k)\frac{g(x(t_k-\tau))}{x(t_k-\tau)}x(t_k-\tau) \\ &\geq x(t_k)[1 - p(t_k)] \to \infty \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise (3.217) ye çelişki teşkil eder. Bu halde (3.216) doğru olur. (3.214) ve (3.216) den $i = 0,1,...,n-1$ e kadar $z^{(i)}(t)$ fonksiyonu monotoniktir. (3.214) un her iki tarafı $\int_{t_1}^{\infty}$ integre edilir ve t_1 yeterince büyük seçilirse

$$l - z^{(n-1)}(t_1) = -\int_{t_1}^{\infty} q(s)\,h(x(s-\sigma))\,ds \tag{3.218}$$

elde edilir.

İddia: (Györi ve Ladas, 1991)

$$\liminf_{t\to\infty} x(t) = 0 \tag{3.219}$$

doğrudur. Aksi halde $t \geq t_2$ için bir c pozitif sabiti ve $t_2 \geq t_1$ vardır öyle ki $x(t) \geq c$ dir. Bu halde (3.208) ve (3.210) ten t yeterince büyük seçilirse $q(t)h(x(t-\sigma))$alttan pozitif bir sabitle sınırlı olur. Bu durum (3.218) ye çelişki teşkil eder. Böylece (3.219) doğrudur.

$\lim_{k\to\infty} t_k = \infty$ ve $\lim_{k\to\infty} x(t_k) = 0$ olacak şekilde bir $\{t_k\}$ dizisini ele alalım. (10.6.8) den için $z(t_k) \leq x(t_k) \to 0$ ve $k \to \infty$ için $z(t_k+\tau) \geq -p(t_k+\tau)\dfrac{g(x(t_k))}{x(t_k)}x(t_k) \to 0$ elde edilir. $z(t)$monoton olduğundan $\lim_{t\to\infty} z(t) = 0$ yazılır. Buradan hareketle ve (3.206) kullanılırsa

$$i = 0,1,\ldots,n-1 \text{ için } \lim_{t\to\infty} z^{(i)}(t) = 0 \tag{3.220}$$

ve

$$z^{(n)}(t) \leq 0,\ z^{(n-1)}(t) > 0,\ldots,z'(t) < 0,\ z(t) > 0 \tag{3.221}$$

elde edilir.

İddia: (Györi ve Ladas, 1991)

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0 \tag{3.222}$$

doğru olsun. Bunun doğruluğunu göstermek için $P(t) = p(t)\dfrac{g(x(t-\tau))}{x(t-\tau)} \leq p(t)$ olacak şekilde yeterince büyük t ler için

$$z(t) = x(t) - P(t)x(t-\tau) \tag{3.223}$$

yazılır. $\rho \in (P_0,1)$olsun. Bu halde (3.208) ve t yeterince büyük seçilirse $0 \leq P(t) \leq p(t) \leq \rho < 1$ elde edilir. Lemma 1.5.2 (3.223) e uygulanırsa (3.222) elde edilir. (10.6.1) denklemi yeterince büyük t ler için

$\mathrm{P}(\mathrm{t}) = \mathrm{p}(\mathrm{t})\dfrac{\mathrm{g}(\mathrm{x}(\mathrm{t}-\tau))}{\mathrm{x}(\mathrm{t}-\tau)}$ ve $\mathrm{Q}(\mathrm{t}) = \mathrm{q}(\mathrm{t})\dfrac{\mathrm{h}(\mathrm{x}(\mathrm{t}-\sigma))}{\mathrm{x}(\mathrm{t}-\sigma)}$ olacak şekilde (3.206) denklemini yeniden

$$\frac{d^n}{dt^n}\left[x(t)-P(t)\,x(t-\tau)\right]+Q(t)\,x(t-\sigma)=0$$

olacak şekilde yazalım. (3.222), (3.208), (3.209) ve (3.211) dan

$\liminf\limits_{t\to\infty} \mathrm{P}(\mathrm{t})=\mathrm{p}_0$ ve $\lim\limits_{t\to\infty}\mathrm{Q}(\mathrm{t})=\mathrm{q}_0$ yazılır. Yeterince büyük t ler için $z(t)$ (3.223)
formunda yazılarak

$$z^{(n)}(t)-P(t-\sigma)\frac{Q(t)}{Q(t-\tau)}z^{(n)}(t-\tau)+Q(t)\,z\,(t-\sigma)=0 \tag{3.224}$$

denklemini sağlar ve

$\liminf\limits_{t\to\infty}\left[P(t-\sigma)\dfrac{Q(t)}{Q(t-\tau)}\right]=p_0$ olur. $0<\varepsilon<\dfrac{1}{2}\min\{p_0,q_0\}$ için (3.224) denklemi

$$z^{(n)}(t)-p_0(1-\varepsilon)z^{(n)}(t-\tau)+q_0(1-\varepsilon)\,z\,(t-\sigma)\le 0$$

eşitsizliğni verir. Bu son eşitsizlik $\int_t^{t_1}$ integre edilir ve $t_1\to\infty$ için

$$-z^{(n-1)}(t)+p_0(1-\varepsilon)z^{(n-1)}(t-\tau)+q_0(1-\varepsilon)\int_t^{\infty} z\,(s-\sigma)ds\le 0$$

bulunur. Bu durum n defa tekrar edilir ve n tek olduğu göz önüne alınırsa $t\ge T$ için

$$p_0(1-\varepsilon)z(t-\tau)+q_0(1-\varepsilon)\int_t^{\infty}\int_{s_{n-1}}^{\infty}\ldots\int_{s_1}^{\infty} z\,(s-\sigma)ds\,ds_1\ldots ds_{n-1}\le z(t)$$

elde edilir. Burada T yeterince büyük ve $\rho=\max\{\tau,\sigma\}$ olmak üzere $z:[T-\rho,\infty)\to(0,\infty)$ sürekli ve kesin olarak azalan bir fonksiyondur. Lemma 3.6.2. den

$$p_0(1-\varepsilon)v\,(t-\tau)+q_0(1-\varepsilon)\int_t^{\infty}\int_{s_{n-1}}^{\infty}\ldots\int_{s_1}^{\infty} v\,(s-\sigma)ds\,ds_1\ldots ds_{n-1}=v(t)$$

sürekli pozitif $v:[T-\rho,\infty)\to(0,\infty)$ çözümü vardır. Bu halde $v(t)$ aynı zamanda

$$\frac{d^n}{dt^n}\left[v(t)-p_0(1-\varepsilon)v(t-\tau)\right]+q_0(1-\varepsilon)\,v\,(t-\sigma)=0 \tag{3.225}$$

nötr denklemi pozitif bir çözümdür. Teorem 6.3.1 den (10.6.20) nin karakteristik denklemi $\lambda^n-p_0(1-\varepsilon)\lambda^n+q_0(1-\varepsilon)\mathrm{e}^{-\lambda\sigma}=0$ bir reel köke sahiptir. Teorem 3.6.2 nın ispatındaki tartışmaya benzer olarak ve ε yeterince küçük olduğu göz önüne alınırsa (3.212) denklemi bir pozitif çözüme sahiptir. Bu hipoteze çelişki teşkil eder ve ispat tamamlanır. $n \geq 1$ tek olmak üzere

$$\frac{d^n}{dt^n}\left[x(t) - p(t)\,x(t-\tau)\right] + q(t)\,h(x(t-\sigma)) = 0 \tag{3.226}$$

nötr gecikmeli diferansiyel denklemleri ele alalım. Burada

$$p,q \in C\left[[t_0,\infty), R^+\right],\ \tau \in (0,\infty),\ \ \sigma \in [0,\infty)\ \text{ve}\ h \in C[R,R] \tag{3.227}$$

Aşağıdaki teorem Teorem 10.6.1 in kısmi olarak tersi olarak sayılır.

Teorem 3.7.2. (Györi ve Ladas, 1991)

(3.227) olsun ve

$$0 \leq p(t) \leq p_0 < 1,\ 0 \leq \mathrm{q}(\mathrm{t}) \leq q_0 \tag{3.228}$$

ve

$$\left.\begin{array}{llll} \text{ya} & 0 \leq u \leq \delta & \text{için} & 0 \leq h(u) \leq u \\ \text{yada} & -\delta \leq u \leq 0 & \text{için} & 0 \geq h(u) \geq u \end{array}\right\} \tag{3.229}$$

olacak şekilde p_0, q_0 ve δ pozitif sabit sayıları olsun. Ayrıca $h(u)$ u'ya göre azalmayan ve (3.212) denkleminin karakteristik denklemi olan

$$\lambda^n - p_0\,\lambda^n \mathrm{e}^{-\lambda\tau} + q_0\,\mathrm{e}^{-\lambda\sigma} = 0 \tag{3.230}$$

denklemi bir reel köke sahip olsun. Bu halde (3.226) salınım yapmayan bir köke sahiptir. $0 \leq u \leq \delta$ için $0 \leq h(u) \leq u$ olsun. $-\delta \leq u \leq 0$ için $0 \geq h(u) \geq u$ durumu benzer olarak ispat edilir. λ_0 (3.230) in bir kökü olsun. $p_0 \in (0,1)$ olsun. Buradan $\lambda_0 < 0$ olur. $y(t) = e^{(\lambda_0 t)}$ olsun. Bu halde

$$y(t) > 0,\ y'(t) < 0,\ y''(t) > 0, \ldots, y^{(n-1)}(t) > 0,\ y^{(n)}(t) < 0$$
$$i = 0,1,2,\ldots,n \ \text{ için } \lim_{t\to\infty} y^{(i)}(t) = 0$$

olacak şekilde $T \geq t_0$ vardır. $y(t)$

$$\frac{d^n}{dt^n}\left[y(t) - p_0 y(t-\tau)\right] + q_0\,\mathrm{y}(t-\sigma) = 0 \tag{3.231}$$

nötr denklemini sağlar. Bu son durum $\int\limits_{t\geq T}^{\infty}$ n defa integre edilirse

$$t \geq T \ \text{ için } \ p_0 \mathrm{y}(t-\tau) + \int\limits_{t}^{\infty}\int\limits_{s_{n-1}}^{\infty} \ldots \int\limits_{s_1}^{\infty} q_0 y(s-\sigma)\,ds\,ds_1 \ldots ds_{n-1} = y(t)$$

elde edilir. (3.228) ve (3.229) ten

$$t \geq T \text{ için } p(t)\,y(t-\tau)+\int_t^{\infty}\int_{s_{n-1}}^{\infty}\ldots\int_{s_1}^{\infty} q_0(s)\,h(y(s-\sigma))ds\,ds_1\ldots ds_{n-1} \leq y(t)$$

bulunur.

Lemma 3.6.2. nin ispatında hafif bir değişiklik yaparak ve h'ın artan olduğu göz önüne alınırsa

$$t \geq T \text{ için } p(t)\,x(t-\tau)+\int_t^{\infty}\int_{s_{n-1}}^{\infty}\ldots\int_{s_1}^{\infty} q(s)\,h(x(s-\sigma))ds\,ds_1\ldots ds_{n-1} = x(t)$$

sürekli pozitif bir çözüme sahiptir. Dolayısıyla aynı zamanda (3.226) denklemi pozitif bir çözüme sahiptir. Bu ise hipoteze terslik teşkil eder ispat tamamlanır. Teorem 3.7.1 ve 3.7.2 bir arada ele alınırsa (3.226) denkleminin her çözümünün salınımı için gerek ve yeterli şart aşağıdaki sonuçta verilir.

Sonuç 3.7.1.(3.210), (3.211), (3.227) ve (3.229)

$$0 < p(t) \leq p_0 = \lim_{t\to\infty} p(t) < 1,\; 0 \leq q(t) \leq q_0 = \lim_{t\to\infty} q(t)$$

sağlanacak şekilde $h_0,\, p_0,\, q_0$ ve δ pozitif sabitleri olsun. $h(u)$ u ya göre azalmayan fonksiyon olsun. Bu halde (3.226) denkleminin her çözümünün salınımlı olabilmesi için gerek ve yeter şart (3.212) lineer denkleminin her çözümünün salınımlı olması için gerek ve yeter şart (3.230)'in negatif reel köklere sahip olmamasıdır.

3.8. Çift Mertebeli Denklemlerde Mukayese Teoremi

$$\frac{d^n}{dt^n}\left[y(t)-P_1(t)y(t-\tau_1)\right]-Q_1(t)\,y(t-\sigma_1)=0 \qquad (3.232)$$

$$\frac{d^n}{dt^n}\left[y(t)-P_2(t)y(t-\tau_2)\right]-Q_2(t)\,y(t-\sigma_2)=0 \qquad (3.233)$$

n çift olmak üzere nötr gecikmeli diferansiyel denklemleri ele alalım. Burada,

$$P_1 \in C^1\left[[t_0,\infty), R^+\right], P_2, Q_1, Q_2 \in C\left[[t_0,\infty), R^+\right] \text{ ve } \tau_1, \tau_2, \sigma_1, \sigma_2 \in R^+ \qquad (3.234)$$

Teorem 3.8.1. (Györi ve Ladas, 1991)

(3.234) doğru olsun.

$t \geq t_0$ için P_1, P_2 sınırlı $P_1'(t) \geq 0$ ve $Q_2(t) > 0$ (3.235)

$0 < \tau_1 \leq \tau_2$ ve $\sigma_1 \leq \sigma_2$ $t \geq t_0$ (t)için

$$P_1(t) \leq P_2(t-\sigma_2)\frac{Q_2(t)}{Q_2(t-\tau_2)} \quad \text{ve} \quad Q_1(t) \leq Q_2(t) \tag{3.236}$$

$$\int_{t_0}^{\infty} Q_2(t)\,dt = \infty \tag{3.237}$$

$t \geq t_0$ için ya $P_1(t) > 0$ ya da uzunluğu σ_1 olan bir aralık üzerinde $\sigma_1 > 0$ ve

$Q_1(t) \neq 0$ dır. (3.238)

Ayrıca, (3.232) denkleminin her sınırlı çözümü salınımlı olsun. Bu halde, (3.233) denkleminin her sınırlı çözümü salınımlıdır.

İspat: (Györi ve Ladas, 1991)

Çelişki oluşturabilmek için (3.233) denklemi sınırlı ve nihayetinde pozitif bir $y(t)$ çözümüne sahip olsun. $z(t) = y(t) - P_2(t)\,y(t-\tau_2)$. Bu halde

$i = 1,2,\ldots,n$ için $z^{(n)}(t) \geq 0, (-1)^{(n-i)} z^{(i)}(t) > 0$
(3.239)

$i = 0.1,\ldots,n-1$ için $\lim_{t\to\infty} z^{(i)}(t) = 0$
(3.240) gösterilebilir. $z(t)$ nin açıkça

$$z^{(n)}(t) - P_2(t-\sigma_2)\frac{Q_2(t)}{Q_2(t-\tau_2)} z^{(n)}(t-\tau_2) - Q_2(t)\,z(t-\sigma_2) = 0 \tag{3.241}$$

denklemini sağlar. (3.236) kullanılırsa ve nihayetinde $z^{(n)}(t) \geq 0$ ve $z(t) > 0$ olduğu göz önüne alınırsa (3.241) denkleminde yeterince büyük t ler için $t \geq T$ olmak üzere

$$z^{(n)}(t) - P_1(t)\,z^{(n)}(t-\tau_2) - Q_2(t)\,z(t-\sigma_2) \geq 0 \tag{3.242}$$

elde edilir. $t \geq T - \max\{\tau_2, \sigma_2\}$ için (3.239) denklemi sağlanacak şekilde T yi seçelim. $\int_t^{\infty}$ (3.242) integre edilirse

$$t \geq T \text{ için } -z^{(n-1)}(t) - \int_t^{\infty} P_1(s)\,z^{(n)}(s-\sigma_2)\,ds - \int_t^{\infty} Q_1(s)\,z(s-\sigma_2)\,ds \geq 0$$

elde edilir. Birinci terime kısmi integral ve (3.235), (3.236) ve $z^{(i)}(t)$nin monotonik karakteri kullanılırsa

$$t \geq T \text{ için } -z^{(n-1)}(t)+P_1(t)\,z^{(n-1)}(t-\tau_1)-\int_t^{\infty} Q_1(s)\,z\,(s-\sigma_1)\,ds \geq 0$$

elde edilir. n çift olmak üzere aynı muhakeme n defa tekrar edilirse

$$t \geq T \text{ için } P_1(t)\,z(t-\tau_1)+\int_t^{\infty}\int_{s_{n-1}}^{\infty}\ldots\int_{s_1}^{\infty} Q_1(s)\,z\,(s-\sigma_1)ds\,ds_1\ldots ds_{n-1} \leq z(t)$$

elde edilir. Dolayısıyla Lemma 3.6.2 nin tüm hipotezleri sağlanmıştır.

$$t \geq T \text{ için } P(t)\,x(t-\tau_1)+\int_t^{\infty}\int_{s_{n-1}}^{\infty}\ldots\int_{s_1}^{\infty} Q_1(s)\,x(s-\sigma_1)ds\,ds_1\ldots ds_{n-1} = x(t)$$

yazılır ve aynı zamanda (3.232) denklemi sınırlı pozitif bir çözüme sahiptir. Bu durum (3.232) denkleminin her sınırlı çözümünün salınımlı oluşuna terslik teşkil eder. Teoremin ispatı bitmiştir.

3.9. Çift Mertebeli NGDD için Linerize Olmuş Salınım Teoremi

$n \geq 1$çift olmak üzere

$$\frac{d^n}{dt^n}\left[x(t)-p(t)g(x(t-\tau))\right]-q(t)h(x(t-\sigma))=0 \tag{3.243}$$

ve

$$p,q \in C\left[[t_0,\infty),R^+\right],\ g,h \in C[R,R],\ \tau \in (0,\infty) \text{ ve } \sigma \in [0,\infty), \tag{3.244}$$

denklemlerini ele alalım.

Teorem 3.9.1. (Györi ve Ladas, 1991)

(3.244) doğru olsun.

$$\limsup_{t\to\infty} p(t)=P_0 \in (0,1),\ \liminf_{t\to\infty}\ p(t)=p_0 \in (0,1),\ \lim_{t\to\infty} q(t)=q_0 \in (0,\infty) \tag{3.245}$$

$$u \neq 0 \text{ için } 0 \leq \frac{g(u)}{u} \leq 1,\ \lim_{u\to\infty}\frac{g(u)}{u}=1 \tag{3.246}$$

$$u \neq 0 \text{ için } uh(u) > 0 \text{ ve } \lim_{u\to\infty} \frac{h(u)}{u} = 1 \tag{3.247}$$

ve ayrıca linerize olmuş

$$\frac{d^n}{dt^n}\left[y(t) - p_0 y(t-\tau)\right] - q_0 y(t-\sigma) = 0 \tag{3.248}$$

denkleminin her sınırlı çözümü salınımlı olsun. Bu halde (3.243) denkleminin her sınırlı çözümü aynı zamanda salınım yapar.

İspat: (Györi ve Ladas, 1991)

Çelişki oluşturabilmek için (3.243) denklemi sınırlı salınım yapmayan bir $x(t)$ çözümüne sahip olsun. Ayrıca nihayetinde $x(t)$ pozitif olsun. $x(t)$ nihayetinde negatif olma durumunun ispatı benzer olduğundan dolayı ele alınmayacaktır. $z(t) = x(t) - p(t)g(x(t-\tau))$. Bu halde,

$$z^{(n)}(t) = q(t)h(x(t-\sigma)) \tag{3.249}$$

yazılır. $x(t)$ sınırlı olduğundan $z(t)$ de aynı zamanda sınırlıdır. (3.249) ifadesinden $\lim_{t\to\infty} z^{(n-1)}(t) = l \in R$ mevcuttur. t_1 yeterince büyük olmak üzere (3.249) un her iki tarafı $\int_{t_1}^{\infty}$ integre edilirse $l - z^{(n-1)}(t_1) = \int_{t_1}^{\infty} q(s)h(x(s-\sigma))ds$ elde edilir. (3.245), (3.247) ve $x(t)$ sınırlı olduğundan $\liminf_{t\to\infty} x(t) = 0$ elde edilir. Teorem 3.7.1 in ispatındakine benzer bir argümanla

$$i = 0,1,\ldots,n-1 \text{ için } \lim_{t\to\infty} z^{(i)}(t) = 0 \tag{3.250}$$

$$z^{(n)}(t) \geq 0,\ z^{(n-1)}(t) < 0,\ z(t) > 0 \tag{3.251}$$

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0 \tag{3.252}$$

elde edilir. (3.243) denklemi $\frac{d^n}{dt^n}\left[x(t) - P(t)x(t-\tau)\right] - Q(t)x(t-\sigma) = 0$

formatında yeniden yazılır ve t yeterince büyük olmak üzere

$$P(t) = \frac{g(x(t-\tau))}{x(t-\tau)} \text{ ve } Q(t) = \frac{h(x(t-\sigma))}{x(t-\sigma)}$$

aynı zamanda $\liminf_{t\to\infty} P(t) = p_0$ ve $\lim_{t\to\infty} Q(t) = q_0$ yazılır.

t yeterince büyük olmak üzere $z(t)$nin

$$z^{(n)}(t)-P(t-\sigma)\frac{Q(t)}{Q(t-\tau)}z^{(n)}(t-\tau)-Q(t)\,z\,(t-\sigma)=0 \tag{3.253}$$

denklemini sağladığını görmek kolaydır. Aynı zamanda

$\liminf_{t\to\infty}\left[P(t-\sigma)\dfrac{Q(t)}{Q(t-\tau)}\right]=p_0 \quad 0<\varepsilon<\dfrac{1}{2}\min\{p_0,q_0\}$aralığındaki pozitif ε için (10.8.11) denkleminden $z^{(n)}(t)-(p_0-\varepsilon)z^{(n)}(t-\tau)-(q_0-\varepsilon)\,z\,(t-\sigma)\ge 0$

elde edilir. (3.250)kullanılarak son ifade $\int_t^\infty$ integre edilirse

$$-z^{(n-1)}(t)+(p_0-\varepsilon)z^{(n-1)}(t-\tau)-(q_0-\varepsilon)\int_t^\infty z\,(s-\sigma)ds\ge 0$$

bulunur. n çift olmak üzere bu durum n defa tekrar edilirse

$$t\ge T \quad \text{için} \quad (p_0-\varepsilon)z(t-\tau)+(q_0-\varepsilon)\int_t^\infty\int_{s_{n-1}}^\infty\dots\int_{s_1}^\infty z\,(s-\sigma)ds\,ds_1\dots ds_{n-1}\le z(t)$$

elde edilir. Burada T yeterince büyük ve $\rho=\max\{\tau,\sigma\}$ olmak üzere
$z:[T-\rho,\infty)\to(0,\infty)$

sürekli ve kesin olarak azalan sıfır limitine sahip bir fonksiyondur. Lemma 3.6.2 den

$$t\ge T \quad \text{için} \quad (p_0-\varepsilon)v\,(t-\tau)+(q_0-\varepsilon)\int_t^\infty\int_{s_{n-1}}^\infty\dots\int_{s_1}^\infty v\,(s-\sigma)ds\,ds_1\dots ds_{n-1}=v(t)$$

ifadesi sürekli sınırlı, pozitif $v:[T-\rho,\infty)\to(0,\infty)$ çözümüne sahiptir. Açıkça $v(t)$ aynı zamanda

$$\frac{d^n}{dt^n}[v(t)-(p_0-\varepsilon)v(t-\tau)]-(q_0-\varepsilon)\,v\,(t-\sigma)=0$$

nötr denkleminin pozitif bir çözümüdür. ε yeterince küçük olduğundan (3.248) denklemi sınırlı, salınım yapmayan bir çözüme sahiptir. Bu durum hipoteze terslik teşkil eder. Teorem ispatlanmıştır. n çift olmak üzere

$$\frac{d^n}{dt^n}[y(t)-p(t)\,y\,(t-\tau)]-q(t)\,h(y\,(t-\sigma))=0 \tag{3.254}$$

ve

$$p,q\in C\left[[t_0,\infty),R^+\right],\tau\in(0,\infty),\ \sigma\in[0,\infty)\ \text{ve}\ h\in C[R,R] \tag{3.255}$$

nötr gecikmeli diferansiyel denklemleri ele alalım.

Teorem 3.9.2. (Györi ve Ladas, 1991)

(3.255) doğru olsun. Bu halde

$$t \geq t_0 \text{ için } 0 \leq p(t) \leq p_0 \text{ ve } 0 \leq \mathrm{q}(\mathrm{t}) \leq q_0 \tag{3.256}$$

olacak şekilde p_0, q_0 ve δ sabitleri vardır. ve

$$\left.\begin{array}{l} \text{ya} \quad 0 \leq u \leq \delta \text{ için } 0 \leq h(u) \leq u \\ \text{yada } -\delta \leq u \leq 0 \text{ için } 0 \geq h(u) \geq u \end{array}\right\} \tag{3.257}$$

yazılır. Ayrıca $h(u)$ orjin civarında azalmayan ve (3.248) denkleminin karakteristiği olan

$$\lambda^n - p_0\, \lambda^n e^{-\lambda\sigma} - q_0\, \mathrm{e}^{-\lambda\sigma} = 0 \tag{3.258}$$

denklemi $(-\infty, 0]$ aralığında bir köke sahip olsun. Bu halde, (3.254) denklemi sınırlı salınım yapmayan bir çözüme sahiptir.

İspat: (Györi ve Ladas, 1991)

$0 \leq u \leq \delta$ için $0 \leq h(u) \leq u$ olsun. $-\delta \leq u \leq 0$ için $0 \geq h(u) \geq u$ durumu benzer olarak ispat edilir. λ_0 (3.258) denkleminin bir kökü olsun. $q_0 > 0$ olduğundan $\lambda_0 < 0$ dır. $y(t) = e^{(\lambda_0 t)}$ olsun yeterince büyük T ler, $t \geq T - \delta$ için $0 \leq y(t) \leq \delta$ ve $[0, y(T-\delta)]$ aralığında h azalmayandır. Açıkça

$$y(t) > 0,\ y'(t) < 0,\ y^{(n-1)}(t) < 0,\ y^{(n)}(t) > 0 \tag{3.259}$$

ve

$$i = 0,1,2,\ldots,n \text{ için } \lim_{t\to\infty} y^{(i)}(t) = 0 \tag{3.260}$$

yazılır ve $y(t)$

$$\frac{d^n}{dt^n}\left[y(t) - p_0 y(t-\tau)\right] - q_0\, \mathrm{y}(t-\sigma) = 0 \tag{3.261}$$

nötr denklemini sağlar. (3.260) kullanılarak (3.261) ifadesi $\int_{t\geq T}^{\infty}$ n defa integre edilirse $t \geq T$ için $y(t) - p_0 \mathrm{y}(t-\tau) - \int_{t}^{\infty}\int_{s_{n-1}}^{\infty} \ldots \int_{s_1}^{\infty} q_0 y(s-\sigma)\, ds\, ds_1 \ldots ds_{n-1} = 0$

elde edilir. (3.256) ve (3.257) denklemlerinden

$$t \geq T \text{ için } \; p(t)\mathrm{y}(t-\tau)+\int_{t}^{\infty}\int_{s_{n-1}}^{\infty}\dots\int_{s_1}^{\infty} q(s)\,h(y\,(s-\sigma))ds\,ds_1 \dots ds_{n-1} \leq y(t)$$

bulunur.

Lemma 3.6.2 den

$$t \geq T \text{ için } \; p(t)\mathrm{x}(t-\tau)+\int_{t}^{\infty}\int_{s_{n-1}}^{\infty}\dots\int_{s_1}^{\infty} q(s)\,h(x\,(s-\sigma))ds\,ds_1 \dots ds_{n-1} = x(t)$$

Sürekli sınırlı pozitif $x(t)$ çözüme sahiptir. Dolayısıyla $x(t)$ (3.254)'nin sınırlı bir çözümüdür ve ispat biter. Teorem 3.9.1 ve 3.9.2 birlikte kullanılırsa (3.254) denkleminin her sınırlı çözümünün salınımı için gerekli ve yeterli şartı aşağıdaki sonuç ile vermek mümkündür.

Sonuç 3.9.1. (Györi ve Ladas, 1991)

(3.255) doğru olsun.

$t \geq t_0$ için $0 < p(t) \leq p_0 = \lim\limits_{t\to\infty} p(t) < 1,\; 0 \leq \mathrm{q}(\mathrm{t}) \leq q_0 = \lim\limits_{t\to\infty} q(t)$ sağlanacak şekilde $p_0, q_0 \in (0,\infty)$ pozitif sayıları vardır. Ayrıca,

$u \neq 0$ için $\lim\limits_{u\to\infty} \dfrac{h(u)}{u} = 1,\;\; uh(u) > 0$

$h(u)$ sıfırın civarında azalmayan fonksiyon olsun. Bu halde, (3.254) denkleminin her sınırlı çözümünün salınımlı olabilmesi için gerek ve yeter şart (3.248) lineer denkleminin her sınırlı çözümünün salınımlı olmasıdır.

3.10. Bazı İkinci Mertebeden Diferansiyel Denklemlerde Salınım

$$y''(t) + p(t)y(t-\tau) = 0,\;\; t \geq \alpha_0 \geq 0,\;\; \tau \geq 0$$

Burada, $p(t)$ sürekli negatif olmayan bir fonksiyondur. Bu diferansiyel denklemi sağlayan salınımlı çözümlerinin davranışları ile ilgilenecektir .

$$y''(t) + p(t)y(t-\tau) = 0,\;\; t \geq \alpha_0 \geq 0,\;\; \tau \geq 0 \qquad (3.262)$$

denklemi ile ilgili varlık ve teklik çözümleri (Halanay,1966) ele almıştır.

Lemma 3.10.1. (KUNG, 1971)

$[a,\infty)$ aralığı üzerinde salınımlı olmayan $f \in C^2[\alpha,\infty)$ olsun ve eğer $t \geq t_0$ için ya

a) $f(t) > 0,\ f''(t) \leq 0$

ya da

b) $f(t) < 0,\ f''(t) \geq 0$

geçerliyse her negatif olmayan τ için

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(t-\tau)}{f(t)} = 1.$$

İspat: (KUNG, 1971)

$[a,\infty)$aralığı üzerinde f salınımlı olmamakla birlikte (a) şartını sağlasın. Eğer $\tau = 0$için ise durum açıktır. $\tau > 0$olsun τ sonlu olduğundan tüm $t \geq t_0$ için $f(t-\tau) > 0$ olur. $0 < \varepsilon < 1$ olmak üzere $\varepsilon > 0$verilsin. Bu halde,

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} > 1-\varepsilon$$

sağlanacak şekilde bir N pozitif sayısı vardır. $t_1 - 2^N t \geq t_0$olacak şekilde $t_1 \geq t_0$ seçelim $t > t_0$ için $f''(t) \leq 0$ olduğundan f 'nin grafiği aşağıya doğru konkavdır. Dolayısıyla,

$$\frac{f(t_1-2\tau)+f(t_1)}{2} \leq f(t_1-\tau)$$

yazılır. Dolayısıyla,

$$\frac{f(t_1-\tau)}{f(t_1)} \geq \frac{f(t_1)+f(t_1-2\tau)}{2f(t_1)} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{f(t_1-2\tau)}{f(t_1)}$$

$$\geq \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{f(t_1-4\tau)}{2f(t_1)} = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\frac{f(t_1-4\tau)}{f(t_1)}$$

$$\geq \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^N}+\frac{1}{2^N}\frac{f(t_1-2^n\tau)}{f(t_1)}$$

$$\geq \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2^N} > 1-\varepsilon.$$

Dolayısıyla, $\liminf_{t\to\infty} \dfrac{f(t-\tau)}{f(t)} \geq 1-\varepsilon$ yazılır. Şimdi $\varepsilon \to 0$ için limit alınırsa

$\liminf_{t\to\infty} \dfrac{f(t-\tau)}{f(t)} \geq 1$ elde edilir. Tüm $t \geq 0$ için $f'(t) \geq 0$ olduğundan, aksi halde, f nihayetinde negatif olacak ve dolayısıyla $\dfrac{f(t-\tau)}{f(t)} < 1$. $\limsup_{t\to\infty} \dfrac{f(t-\tau)}{f(t)} \leq 1$ ve $\lim_{t\to\infty} \dfrac{f(t-\tau)}{f(t)} = 1$ yazılır. Diğer durumumda benzer bir şekilde ifade edilir.

Lemma 3.10.2. (KUNG, 1971)

y ,(3.262) denkleminin salınım yapmayan bir çözümü ise yeterince büyük t ve bazı k_1 sayıları için $\dfrac{y(t-\tau)}{y(t)} \geq 1-\dfrac{k_1}{\sqrt{t}}$.

İspat: (KUNG, 1971)

$t_0 \geq \alpha$ ve $t \geq t_0$ olacak biçimde bir t_0 sayısı seçelim öyle ki $y(t-\tau) > 0$. Bu halde, $t \geq t_0$ için $v(t) = \dfrac{y'(t)}{y(t)}$ olsun. $y(t)$ pozitif olarak azalan bir fonksiyondur. $t \geq t_0$ için (3.262) denklemi $t_0 < a < t_1$ olmak üzere $\int_a^{t_1}$ integre edilirse

$$v(a) - v(t_1) = \int_a^{t_1} v^2(t)dt - \int_a^{t_1} \frac{p(t)y(t-\tau)}{y(t)}dt$$

Dolayısıyla, $v(a) \geq \int_a^{t_1} v^2(t)dt$ elde eldir. Buradan da,

$\int_a^{t_1} v^2(t)dt = v^2(\xi)(t_1 - a) \geq v^2(t_1)(t_1 - a)$ elde edilir. $a < \xi < t_1$ durumu da şunu gerektirir. $v(a) \geq v^2(t_1)(t_1 - a)$ ve tüm $t_1 > a$ için $v(t_1) \leq \dfrac{\sqrt{v(a)}}{\sqrt{t_1 - a}}$ yazılır. $t \to \infty$ için lemma3.10.1'den

$$\frac{y(t-\tau)}{y(t)} = \frac{y'(t)}{y(t)} \frac{y(t-\tau)}{y'(t)}$$

yazılır. $t \to \infty$ ve $\varepsilon(t)$ için

$$1+\varepsilon(t)=\frac{y'(t)}{y(t)}\frac{y(t-\tau)}{y'(t)}$$

yazılır. Buradan,

$$\sqrt{t}(1+\varepsilon(t))=\sqrt{t}\,\frac{y'(t)}{y(t)}\frac{y(t-\tau)}{y'(t)}$$

$$=\sqrt{t}v(t)\,\frac{y(t-\tau)}{y'(t)}\leq\frac{ky(t-\tau)}{y'(t)}$$

$$y'(t)\leq\frac{ky(t-\tau)}{\sqrt{t}(1+\varepsilon(t))}$$

$$y(t)-y(t-\tau)=y'(\xi_1)\tau\leq y(t-\tau)\tau$$
$$\leq\frac{k\tau}{\sqrt{t-\tau}}\frac{y(t-2\tau)}{(1+\varepsilon(t-\tau))}\leq\frac{k\tau y(t-\tau)}{\sqrt{t-\tau}(1+\varepsilon(t-\tau))}$$

ve

$$y'(t)\leq\frac{kyt(t-\tau)}{\sqrt{t}(1+\varepsilon(t))}$$

elde edilir. Artan bir fonksiyon olduğu göz önüne alınırsa

$$y(t)-y(t-\tau)=y'(\xi_1)\tau$$

$$\leq y(t-\tau)\tau$$
$$\leq\frac{kt}{\sqrt{t-\tau}}\frac{y(t-2\tau)}{(1+\varepsilon(t-\tau))}\leq\frac{k\tau y(t-\tau)}{\sqrt{t-\tau}(1+\varepsilon(t-\tau))}$$

yazılır. Buradan,

$$y(t)\leq\left(1+\frac{k\tau}{\sqrt{t-\tau}}\frac{1}{1+\varepsilon(t-\tau)}\right)y(t-\tau)$$

dolayısıyla yeterince büyük t için

$$\frac{y(t-\tau)}{y(t)}\geq\frac{1}{1+O(1/\sqrt{t})}$$

veya

$$\frac{y(t-\tau)}{y(t)}\geq 1-O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$$

elde edilir bu ise arzu edilen amaçtır.

Teorem 3.10.1. (KUNG, 1971)

Eğer

(i) Bazı $\beta > \alpha$ ve $\lim_{t\to\infty}\int_{\beta}^{t}\frac{ds}{g(s)} = \infty$ için $g \in C'(\beta,\infty)$ olacak şekilde bir g fonksiyonu vardır.

(ii) $t \to \infty$ ve $\forall$ bir pozitif k ve $\gamma_k(t) = \frac{1-k}{\sqrt{t}}$ olmak üzere

$$K(t,k) = \int_{\beta}^{t}\left(y_k(s)g(s)p(s) - \frac{1}{4}\frac{(g'(s))^2}{g(s)} \right)ds + \frac{1}{2}g'(t)$$

olsun. Bu halde $[\alpha,\infty)$ üzerinde (3.262) denkleminin trivial olmayan her çözümü salınımlıdır.

İspat: (KUNG, 1971)

$[\alpha,\infty)$ üzerinde (3.262) denkleminin trivial olmayan bir çözümü salınımlı olmasın. Bu halde $t_0(\geq \alpha)$ vardır öyle ki tüm $t \geq t_0$ için $y(t-\tau) \neq 0$ tüm $t \geq t_0$ için $y(t-\tau) > 0$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde lemma 3.10.2 gereğince bir pozitif $t_1(\geq \alpha)$ vardır. Öyle ki, tüm $t \geq t_1$ için $\frac{y(t-\tau)}{y(t)} \geq y_k(t)$

yazılır. $T = \max\{1, t_0, t_1\}$ ve $t \geq T$ için $f(t)$ ve $f(t) = -\frac{y'(t)}{y(t)}g(t)$

yazılsın $g(t) > 0$ olduğundan,

$$f'(t) = \frac{1}{g(t)}\left(f(t) + \frac{1}{2}g'(t) \right)^2 + p(t)g(t)\frac{y(t-\tau)}{y(t)} - \frac{1}{4}\frac{(g'(t))^2}{g(t)}$$

yazılır.

$$h(t) = \int_{T}^{t}\left(p(s)g(s)\frac{y(s-\tau)}{y(s)} - \frac{1}{4}\frac{(g'(s))^2}{g(s)} \right)$$

olsun. $t > T$ için $f(t) = Z(t) + h(t)$ tanımlansın dolayısıyla

$$Z'(t) = \frac{1}{g(t)}\left(f(t) + \frac{1}{2}g'(t) \right)^2 = \frac{1}{g(t)}\left(Z(t) + h(t) + \frac{1}{2}g'(t) \right)^2 \geq 0$$

yazılır. Bazı c sabiti için $h(t)+\frac{1}{2}g'(t)=C+K(t,k)$ göz önüne alınırsa (ii) den dolayı bir $t_2 \geq T$ vardır. Öyle ki tüm $t \geq t_2$ için $Z(t)+C+K(t,k)\geq Z(T)+\delta>0$ yazılır. Z azalmayan olduğundan tüm $t \geq t_2$ için $Z(t)+C+K(t,k)\geq Z(T)+\delta>0$

ve buradan da tüm $t \geq t_2$ için

$$Z'(t)=\frac{1}{g(t)}\left(Z(t)+C+K(t,k)\right)^2 \geq \frac{1}{g(t)}\left(Z(t)+\delta\right)^2>0$$

ve $\frac{Z'(t)}{(Z(t)+\delta)^2}\geq\frac{1}{g(t)}$ elde edilir. Bu denklem $\int_{t_2}^{t}$ edilirse

$$\frac{-1}{Z(t)+\delta}+\frac{1}{Z(t_2)+\delta}\geq\int_{t_2}^{t}\frac{ds}{g(s)} \text{ ve } Z(t)+\delta\geq 1\Big/\left(\frac{1}{Z(t)+\delta}-\int_{t_2}^{t}\frac{ds}{g(s)}\right)$$

elde edilir.

$\frac{1}{Z(t_2)+\delta}-\int_{t_2}^{t_3}\frac{ds}{g(s)}=0$ olmak üzere $t_3>t_2$ olduğunda Z nin sürekli olamadığı görülür. Böyle $t_3$ün varlığını (i) şartından garanti edilmektedir. Bu bir çelişkidir. Dolayısıyla y , $[\alpha;\infty)$ aralığı üzerinde salınımlıdır bu da arzu edilen ispattır.

Not: Bayağı diferansiyel denklem olması halinde $\gamma_k(t)$ yerine 1 alınabilir.

Sonuç 3.10.1. (KUNG, 1971)

$\lim_{t\to\infty}\int_{\alpha}^{t}p(s)ds=\infty$ varsa denkleminin trivial olmayan her çözümü $[\alpha,\infty)$ salınımlıdır. $g(t)=1$olsun. Bu halde, $K(k,t)=\int_{\beta}^{\alpha}y_k(s)p(s)ds$ ve $\lim_{t\to\infty}y_k(t)=1$

olduğundan teorem3.10.1'deki şart gerçekleşmiş olur ve istenilen sonuç elde edilir.

(Myskis, 1951) 'deki teorem yukarıdaki ifadenin bir sonucu olarak ifade edilir.

Sonuç 3.10.2. (KUNG, 1971)

Eğer $\liminf_{t\to\infty}p(t)>0$ ise $[\alpha,\infty)$ (3.262) denkleminin trivial olmayan her çözümü salınımlıdır.

Örnek: Her $i \in Z^+$ için $\ln_1 t = \ln t$, $\ln_i 1 = \ln_{(i-1)} t$, $i > 1$ olsun. Her $\varepsilon > o$ için f_i fonksiyonlar dizisi ve buna eşlik eden g_i fonksiyonlar dizisini ele alalım.

$$p_1(t) = \frac{1}{4t^2} + \frac{1+\varepsilon}{4t^2 \ln_1^2 t}, g_1(t) = t \ln t,\ \alpha_1 > 1$$

$$p_n(t) = \frac{1}{4t^2} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{4t^2 \ln_1^2 t \cdots \ln_j^2 t} + \frac{1+\varepsilon}{4t^2 \ln_1^2 t \cdots \ln_n^2 t},$$

ve $\ln_n \alpha_n > 0, \alpha_n > 0$ olacak biçimde $g_n = t.\ln_1 t \cdots \ln_n t$ teorem 3.10.1'den n=1,2,…, ∞ ve $\tau > 0$ için $y''(t) + p_n(t) y(t-\tau) = 0$ denkleminin trivial olmayan her çözüm $[\alpha_n, \infty)$ aralığı üzerinde g_n dizisi kullanılmak üzere salınımlıdır.

Teorem 3.10.2. (KUNG, 1971)

$\int_\alpha^\infty tp(t)dt < \infty$ olsun. Bu halde $[\alpha, \infty)$ üzerinde (3.262) denkleminin trivial olmayan her çözümü salınımlı değildir.

İspat: (KUNG, 1971)

y (3.262) denkleminin salınımlı ve trivial olmayan bir çözümü olsun.Bu halde

a) $t_n - t_{n-1} \geq 2\tau, n = 2,3,...,$

b) $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$.

olmak üzere y'nin kökleri olan $\{t_n\}_{n=1}^\infty$ dizisini seçelim. Şimdi n>3 için ve n tek olmak üzere $[t_n, t_{n+1}]$ aralığını ele alalım. Rolle teoreminden $y'(\xi_n) = 0$ olacak şekilde $\xi_n \in (t_n, t_{n+1})$ vardır. $[t_n - \tau, t_{n+1}]$ üzerinde y' sürekli olduğundan

$$|y'(\eta_n)| = \max|y'(t)|,\ t \in [t_n - \tau, t_{n+1}]$$

olacak biçimdir, $\eta_n \in [t_n - \tau, t_{n+1}]$ vardır. Teorem 3.10.3 teki teklikten ve $|y'(t)| \neq 0$ gereği göz önüne alınır y $[t_n - \tau, t_{n+1}]$ üzerinde özdeş olarak sıfır olamaz. P'nin kökleri ayrık olduğu göz önüne alınırsa $y'(\eta_n) \neq 0$ olamaz. Dolayısıyla, $\eta_n \neq \xi_n$ dir.

(3.262) denklemi eğer $\eta_n < \xi_n$ $\int_{\eta_n}^{\xi_n}$ edilirse (eğer $\eta_n > \xi_n$ $\int_{\eta_n}^{\xi_n}$ edilirse)

$$y'(\xi_n) - y'(\eta_n) = -\int_{\eta_n}^{\xi_n} p(t)y(t-\tau)dt$$

elde edilir. Dolayısıyla, yeterince büyük n'ler için

$$|y'(\eta_n)| \le \int_{\eta}^{\xi_n} |p(t)||y(t-\tau)|dt \le |y'(\eta_n)| \int_{\eta_n}^{\xi_n} t|p(t)|dt$$

yazılır . Buradan, $\int_{\eta_n}^{\xi_n} t|p(t)|dt \ge 1$ bulunur. Fakat $\{\eta_{2n+1}, \xi_{2n+1}\}_n^{\infty} = 1$aralıklarının dizisi en fazla uç noktalarda sahiptir dolayısıyla N için

$$\int_{\alpha}^{\infty} t|p(t)|dt \ge \sum_{k=N}^{\infty} \int_{\eta_{2k+1}}^{\xi_{2k+!}} t|p(t)|dt = \infty$$ yazılır . Bu ise bir çelişkidir.

Not: $p < 0$ olmalıdır. $p < 0$ olması halinde eğer $\int_{\alpha}^{\infty} tp(t)dt < \infty$ denkleminde yerine yazılırsa teorem hala geçerliliğini korur.

3.11. İkinci Mertebeden Bir Diferansiyel Denklemin Salınım Teoremleri

$$y''(t) + p(t)y(t-\tau(t)) = 0 \tag{3.263}$$

$$\left(r(t)y'(t)\right)' + p(t)f(y(t), y(g(t))) = 0 \tag{3.264}$$

diferansiyel denklemlerin salınımı için gerekli şartlar ele alınacaktır. Buradan $[a,\infty)$ üzerinde r, p ve fonksiyonları sürekli , $r(t) > 0$, $p(t) \ge 0$ ve $0 \le \tau(t) \le m$ dir. $[a,\infty)$ üzerinde (3.263) veya (3.264) keyfi denklemlerini sağlayan çözüm keyfi büyüklükte sahip ise 3.1.1 denkleminin çözümü salınımlıdır.

$$(ry')' + py = 0 \tag{3.265}$$

denklemi ile ilgili salınım teoremi oldukça gelişmiştir.(Coles, 1968), (Waltman, 1968) (3.263) denkleminin salınımlı davranışı (3.265) denklemininkinden oldukça farklıdır (Waltman, 1968). Bu fark

$$y''(t) - y(t-\pi) = 0$$

denkleminden açıkça görülebilir ve $y(t) = \sin t$ çözümdür. Diğer taraftan $[0,\infty)$ üzerinde $p(t) \le 0$ ise (3.265) denklemin trivial olmayan salınımlı çözümlere sahip değildir. Yani 0 'dan farklı salınımlı çözümler yoktur. Lineer olmayan 2.mertebeden genel diferansiyel denklemlerin salınımı için (Gollwıtzer, 1969) ve (Waltman, 1968) bakılabilir. (Coles, 1968) de ifade edilen tekliğin kullanımı için aşağıdaki lemma verilir.

Lemma 3.11.1. (Bradley, 1970)

Eğer her $t \geq a$ için $p(t) \geq 0$ ($p(t)$ sıfırdan farklı), $0 \leq \tau(t) \leq m$ ve nihayetinde y 3.1.1 denkleminin pozitif bir çözümü ise tüm yeterince büyük t için $y'(t) > 0$ ve $\dfrac{y(t-\tau(t))}{y(t)} \geq k$ olacak şekilde bir k pozitif sabiti vardır. Eğer $y(t)$ nihayetinde pozitif ise $y(t-\tau(t)) > 0$ bu nedenle $y''(t) \leq 0$. Bu halde aşağıya ağsıya doğru konkavdır. Böylece eğer $y'(t) \leq 0$ ise $y(t) = 0$ olacaktır. Bu ise varsayımla bir çelişki teşkil eder. Dolayısıyla, yeterince büyük t için $y'(t) > 0, t_0, y(t-m)$ nin en büyük kökünden büyük olsun. Bu halde $t \geq t_0$ için $y(t-m) \leq y(t-\tau(t))$ ve $\dfrac{y(t-\tau(t))}{y(t)} \geq \dfrac{y(t-m)}{y(t)}$ dır. Bzı $t \geq t_0$ için g fonksiyonu $(t-m, y(t-m))$ noktasında y ye teğet olsun. Yani $g(s) = y'(t-m)(s-t+m) + y(t-m)$ aşağı doğru konkav ise $\dfrac{y(t-m)}{y(t)} > \dfrac{y(t-m)}{g(t)} = \dfrac{g(t-m)}{g(t)}$.

$x = \dfrac{-y(t-m)}{y'(t-m)+t-m}$ bu halde $g(x) = 0$ üçgenlerin benzelik özelliğinde

$$\frac{y(t-m)}{y(t)} > \frac{g(t-m)}{g(t)} = \frac{(x-t+m)}{x-t} = \frac{y(t-m)}{\left[y(t-m)+my'(t-m)\right]} \qquad (3.266)$$

Fakat $y'(t-m)$ azalan olduğundan son terimi $t \to \infty$ için bir κ pozitif limitine yakınsar. Dolayısıyla yeterince tüm büyük t'ler için

$$\frac{y(t-\tau(t))}{y(t)} \geq \frac{y(t-m)}{y(t)} \geq \kappa .$$

Teorem 3.11.1. (Bradley, 1970)

Eğer tüm $t > a$ için $p(t) \geq 0, 0 \leq \tau(t) \leq m$ ve $\int_a^\infty p(t)dt = \infty$ ise (3.263) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır.

İspat: (Bradley, 1970)

Teorem yanlış olsun. Bu halde nihayetinde bir $y > 0$ çözümü vardır ve dolayısıyla yeterince büyük t'ler için $y'(t) > 0, y''(t) \leq 0, z = \dfrac{y'}{y}$ olsun. Bu halde $z'(t) + z(t)^2 + \dfrac{p(t)y(t-\tau(t))}{y(t)} = 0$ elde edilir. $\int_a^\infty p(t)dt = \infty$ olduğundan $p(t)$ sıfıra denk değildir. Lemma 3.11.1 den $z'(t)+z(t)^2+\kappa p(t)\le 0$ $t>t_0$ için ve yeterince büyük t_0 için

$$z(t)+\int_{t_0}^{t} z(s)^2 ds \le z(t_0)-\kappa\int_{t_0}^{t} p(s)ds<0 \tag{3.267}$$

yazılır. $h(t)=\int_{t_0}^{t} z(s)^2 ds$ olsun. Bu halde (3.267) denkleminden $h^2 \le h'$.Buradan yeterince büyük t'ler için $t-t_0 \le \frac{1}{h(t_0)}-\frac{1}{h(t)}<\frac{1}{h(t_0)}$ elde edilir. Bu çelişkidir dolayısıyla tüm çözümler keyfi büyüklüklere sahiptir.

(3.264) denkleminin belli şartlarda çözümlere sahip olduğu ve bu şartlar $r(t)\equiv 1, p(t)\ge 0, t\to\infty$ için $g(t)\to\infty$, y ve w ile aynı işaretlere sahip olduğunda $f(y,w)$ aynı işarete sahip ve $f(y,w)$ y ve w ye göre azalmayan bir fonksiyondur (Paul, Waltman, 1968). Burada yukarıdaki şartlara benzer olarak

i) $t\to\infty$ için $g(t)\to\infty$

ii) Eğer y ve w aynı işaretlere sahip ise $f(y,w)$ de aynı işaretlere sahip

iii) y ve w 0 dan farklı olduğundan $f(y,w)$ nun sınırı sıfırdan farklıdır $f(y,w)\ne 0$.

Not: Eğer f sürekli ve ii. varsa iii. şartı gerçekleşir veya eğer f y ve w ye göre azalmayan bir fonksiyon ise iii. şartı gerçekleşir.

r sabit olmamak şartı ile aşağıdaki lemmayı ele alalım.

Lemma 3.11.2 (Bradley, 1970)

Eğer $p(t)\ge 0$ ($p(t)$ sıfıra denk değil) $r(t)>0$, $\int_a^\infty \left(\frac{1}{r(t)}\right)dt=\infty$,

(i) –(iii) şartları geçerli ve nihayetinde (3.264) denkleminin pozitif (negatif) bir çözümü ise tüm büyük t'ler için $y'(t)\ge 0$ ($y'(t)\le 0$) olur.

İspat: (Bradley, 1970)

Yeterince büyük t'ler için eğer $y(t)>0$ ve lemma yanlış ise bir t_0 noktası var öyle ki bu t_0 noktası $y(t)$' nin son sıfırından büyük ve aynı zamanda $y(g(t))$ nin son sıfırından da büyük olur. Öyle ki $y'(t)<0$ $t\ge t_0$ için

$\left[r(t)y'(t)\right]' = -p(t)f(y(t),y(g(t))) \le 0$ ve dolayısıyla $r(t)y'(t) \le r(t_0)y'(t_0)$ oluşur $r(t)$ye bölünüp $\int_{t_0}^{t}$ edilir ve $t \to \infty$ ise $y(t)$'nin nihayetinde negatif olduğu görülür. Bu ise hipotezle çelişir. Yeterince büyük t'ler için $y(t) < 0$ olması hali de benzer olarak ele alınır.

Teorem3.11.2. (Bradley, 1970)

Eğer $p(t) \ge 0$, $r(t) > 0$, $\int_a^{\infty} p(t)dt = \infty$, $\int_a^{\infty} \frac{1}{r(t)}dt = \infty$ ve (i)-(iii) şartları sağlanırsa (a,∞)üzerinde (3.264) denkleminin herhangi bir çözümü salınımlıdır.

İspat: (Bradley, 1970)

Tüm büyük t'ler için (a,∞) üzerinde $y'(t) \ge 0$dır. Böylece y azalmayan bir fonksiyondur.(i)-(iii) şartlarından tüm yeterince büyük t'ler için $k \le f(g(t),y(g(r)))$ sağlayacak şekilde bir $k > 0$ sabiti vardır. Sonuç olarak t_0 yeterince büyük ve $t > t_0$ için $\left(r(t)y'(t)\right)' + p(t)k \le 0$ eşitsizliği integre edilirse

$$r(t)y'(t) - r(t_0)y'(t_0) + k\int_{t_0}^{t} p(s)ds \le 0 \qquad (3.268)$$

elde edilir. Fakat $t \to \infty$ için $k\int_{t_0}^{t} p(s)ds \to \infty$olduğundan $y'(t)$nin nihayetinde negatif olduğu görülür. Bu ise lemma2 ile çelişki oluşturur. Benze bir tartışma yeterince büyük t'ler için $y'(t) < 0$durumu benzer olarak ele alınır(veya büyük t'ler için $y(t) < 0$ olması hali benzer olarak ele alınır).

3.11.1. Sınırlılık ve salınımın olmaması hali

Teorem 3.11.1.1. (Bradley, 1970)

Eğer (a,∞) üzerinde (i)-(iii) doğru , $p(t) \ge 0$ ve y' (3.264) denkleminin salınım yapmayan bir çözümü olsun. Bu halde negatif olmayan k_1 ve k_2 sayıları vardır öyle ki $|y(t)| \le k_1 + k_2\int_{t_0}^{t}\left(\frac{1}{r(s)}\right)ds$ sağlanır, özel olarak $\int_a^{\infty} \frac{1}{r(s)}ds < \infty$ varsa (a,∞)üzerinde tüm çözümler salınımlıdır veya sınırlıdır.

İspat: (Bradley, 1970)

Yeterince tüm büyük t'ler için y (3.264) denkleminin salınım yapmayan nihayetinde pozitif bir çözümü olsun. Bu halde, $(ry')'(t) \leq 0$ oluşur. Gerekli işlemler sonucunda $0 \leq y(t) \leq y(t_0) + r(t_0)y'(t_0)\int_{t_0}^{t} \frac{1}{r(s)} ds$ elde edilir. Eğer $k_1 = |y(t_0)|$, $k_2 = r(t_0)|y'(t_0)|$ olarak alınırsa ispat biter. Tüm büyük t'ler için $y < 0$ ise

$$y(t) \geq y(t_0) + r(t_0)y'(t_0)\int_{t_0}^{t} \frac{1}{r(s)} ds.$$

Eşitsizliği elde edilir. Buradan da,

$$0 < |y(t)| = -y(t) \leq -y(t) - r(t_0)y'(t_0)\int_{t_0}^{t} \frac{1}{r(s)} ds \text{ elde edilir.}$$

Teorem 3.11.1.2. (Bradley, 1970)

$p(t) \geq 0$ ve p, τ, $0 \leq \tau(t) \leq m$ olmak üzere sürekli fonksiyonlar olsun. Ayrıca $\gamma \geq 1$ olsun. Bu halde

$$\int_a^{\infty} sp(s)ds = \infty \tag{3.269}$$

şartı

$$y''(t) + p(t)|y(t-\tau(t))|\,|y(t-\tau(t))|^{\gamma} \operatorname{sgn} y(t) = 0 \tag{3.270}$$

Denkleminin tüm çözümleri salınımı için yeterlidir.

İspat: (Bradley, 1970)

$\gamma > 1$ ise sonuç Gollwitzer (Gollwitzer, 1969) tarafından geliştirildi. $\gamma = 1$ ise salınım için (3.269) denkleminin gerekliliği $\gamma > 1$ durumu ile aynıdır. Yeterliliğin ispatı için az bir değişiklik gereklidir. Eğer tüm yeterince büyük t'ler için $y(t) > 0$ ve y sınırlı bir çözüm ise $t \geq c$ için $y''(t) \leq 0, y'(t) \geq 0, y(t) > 0$ gerçekleşir dolaysıyla $t \geq c$ için $y(t-m) \leq y(t-\tau(t))$ oluşur.(8) denklemi $\frac{t}{y(t-\tau(t))}$ ile çarpılıp integre edilirse

$$\int_c^t \frac{(sy''(s))}{y(s-m)} ds \leq -\int_c^t sp(s)ds \tag{3.271}$$

denklemi elde edilir. $y'(s-m) \geq y'(s)$ gerçeği ile birlikte kısmi integralden (3.271)

denklemi

$$\left[sy(s)/y(s-m)\right]_c^t - \ln y(s-m)\Big|_c^t + \int_c^t \left[sy'(s-m)/y^2(s-m)\right]ds \leq -\int_c^t sp(s)ds \qquad (3.272)$$

biçiminde yazılır. y sınırlı olduğundan (3.272) denkleminin sol tarafı alttan sınırlı iken sağ tarafı $-\infty$ gider. Bu çelişki ispatı tamamlar. Gecikme olmaksızın (3.270) tipindeki denklemler (Gollwıtzer, 1969) ve (Kıguradze, 1962) çalışıldı. (Gollwıtzer, 1969)'da $0<\gamma<1$ olması halinde lineer olmayan gecikmeli diferansiyel denklemi aynı zamanda çalışıldı. Burada elde edilen sonuçlar (Heidel, 1969) ile benzerdir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

Ülkemizde bu yönde çalışmak isteyenler için Türkçe kaynak bulunmadığından bu tezdeki gecikmeli diferansiyel denklemlerde salınım teorisi ile ilgili literatürde bilinen kaynaklar irdelenerek Türkçe' ye çevrilmiştir.

Salınım teorisi son yıllarda oldukça ilgi görmüştür. Dolayısıyla, bu tezin gecikmeli diferansiyel denklemlerde salınımla ilgili çalışmak isteyenler için iyi bir katalog oluşturacağı kanaatine varılmıştır.

Ayrıca, bu tezde ele alınmış üçüncü mertebeden gecikmeli diferansiyel denklemlerin salınımının analizi yapılmıştır.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Sonuç olarak bu tezde pratikte modellemesi yapılan gecikmeli diferansiyel denklemlerde salınımla ilgili problemler ele alınmamıştır. Sadece literatürde son zamanda çalışılmış bilimsel birkaç makale irdelenmiştir.

Ayrıca, bu tezde konu içeriğinin geniş olmasından dolayı örneklendirmeler istenen seviyede olmamıştır.

KAYNAKLAR

ADAMEC, L., and LOMTATIDZE, A., 2001. Oscillation conditions for a third-order linear equation. Differ. Uravn., 37: 723-729. Translation in Differ. Equ., 37:755-762.

AGARWAL, R. P., BACULIKOVA, B., DZURINA, J., and LI, T., 2012. Oscillation of third–order nonlinear functional differential equations with mixed arguments. Acta Math. Hungar., 134:54-67.

AGARWAL, R. P., BOHNER, M., LI, T., and ZHANG, C., 2013. Oscillation of third order nonlinear delay differential equations. Taiwanese Journal of Mathematics, 2:545-558.

AĞIRAĞAÇ, N.,2017 Diferansiyel Dönüşüm Metodunun Uygulamaları. Harran üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek lisans Tezi, Şanlıurfa 42s.

AKTAŞ, M. F., TIRYAKI, A., and ZAFER, A., 2010. Oscillation criteria for third order nonlinear functional differential equations. Applied Mathematics Letters, 23:756-762.

AYANLAR, B., and TIRYAKI, A., 2000. Oscillation theorems for nonlinear second order differential equation with damping. Acta Math. Hungar., 89:1-13.

BACULIKOVA, B., and DZURINA, J., 2010. Oscillation of third-order neutral differential equations. Math. Comput. Modelling, 52:215-226.

BACULIKOVA, B., and DZURINA, J., 2010. On the asymptotic behaviour of a class of third order nonlinear neutral differential equations. Cent. Eur. J. Math., 8:1091-1103.

BACULIKOVA, B., and DZURINA, J., 2010. Oscillation of third-order functional differential equations. E. J. Qualitative Theory of Diff. Equ., 43:1-10.

BACULIKOVA, B., 2011. Properties of third-order nonlinear functional differential equations with mixed arguments. Abstr. Appl. Anal., 2011:1-15.

BACULIKOVA, B., and DZURINA, J., 2011. Oscillation of third order nonlinear differential equations. Appl. Math. Lett., 24:466-470.

BARTUSEK, M., 1999. On oscillatory solutions of third order differential equations with quesiderivatives. Fourth Mississippi Conf. Diff. Eqns. and Comp. Simulation, Electron. J. Differ. Equ., 1-11.

BRAYTON, R.K. and WİLOUGHBY, R.A. 1967. On the numerical integration of a symmetric system of diffrence-differetial equations of neutral type. Journal of Mathematical Analysis And Applications. 18:182-9.

BRADLEY, J. S., 1970. Oscillation Theorems for a Second-Order Delay Equation. Journal of differential Equations, 8(3) :97-403.

CANDAN, T., and DAHIYA, R. S., 2003. Oscillation of third order functional differential equations with delay. Electron. J. Diff. Eqns. Conference, 10:79-88.

CECCHI, M., and MARINI, M., 1990. On the oscillatory of a third order nonlinear differential equation. Nonlinear Anal., 15:141-153.

DAHIYA, R. S., and ZAFER A., 1993. Oscillatory and asymptotic behaviour of solutions of third order delay differential equations with forcing terms. Differential Equations Dynam. Systems, 1 (2):123-136.

DERİVER, R.D. 1977. Ordinary and delay differential equations. Springer –Verlag, Berlin and New York.
DZURINA, J., and KOTOROVA, R., 2009. Properties of the third order trinomial equations with delay argument. Nonlinear Anal., 71:1995-2002.
ELABBASY, E. M., HASSAN, T. S., and ELMATARY, B. M., 2012. Oscillation criteria for third order delay nonlinear differential equations. E. J. Qualitative Theory of Diff. Equ., 5:1-11.
ERBE, L., 1976. Oscillation, nonoscillation, and asymptotic behaviour for third order nonlinear differential equations. Ann. Mat. Pura Appl., 110 (4):373-391.
ERBE, L. H., KONG, Q., and ZHANG, B. G., 1995. Oscillation Theory for Functional Differential Equations. Marcel Dekker Inc., New York.
FINIZIO, N., and LADAS, G., 1982. An introduction to differential equations. Wadsworth Publishing, Belmont, California.
GRACE, S. R., and LALLI, B. J., 1985. On oscillation and nonoscillation of general functional-differential equations. J. Math. Anal. Appl., 109:522-533.
GRACE, S. R., 1989. Oscillation theorems for second order nonlinear differential equations with damping. Math. Nachr., 141:117-127.
GRACE, S. R., AGARWAL, R. P., PAVANI, R., and THANDAPANI, E., 2008. On the oscillation of certain third order nonlinear functional differential equations. Appl. Math. Comput., 202:102-112.
GRAEF, J. R., SAVITHRI, R., and THANDAPANI, E., 2003. Oscillatory Properties of Third Order Neutral Delay Differential Equetions. Discrete Contin. Dyn. Syst. A, 342-350.
GREGUS, M., 1987. Third Order Differentials Equations. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Boston, Lancaster.
GURNEY, W. S., BLYTHE, S. P., and NISPET, R. M., 1980. Nicholson's blowflies tevisited. Nature, 287:17-21.
GOPALSAMY, K., 1992. Stability and Oscillations in Delay Differantial Equations of Population Dynamics. Kluwer, Boston.
GYÖRI, I., and LADAS, G., 1991. Oscillation Theory of Delay Differential Equations with Applications. Oxford Science Publications, Clarendon Press, Oxford.
HALE; J. K. 1977. Theory of functional differential equations. Springer –Verlag, Berlin and New York.

HEIDEL, J. W., 1968. Qualitative behaviour of solutions of a third order nonlinear differential equation. Pacific J. Math., 27:507-526.
HUTCHINSON, G. E., 1948. Circular causal syetems in ecology. Annals of the New York Academy of Sctence, 50:221-40.
KAMENEV, I. V., 1978. An integral test for conjugacy for second order linear differential equations. Mat. Zametki, Russian, 23: 249-25.
KITAMURA, Y., and KUSANO, T., 1980. Oscillation of first-order nonlinear differential equations with deviating arguments. Proc. Amer. Math. Soc., 78:64-68.
KUNG, G. C. T., 1971. Oscillation and Non oscillation of Differential Equations with a Time Lag, Siam J. Appl. Math. , 21(2):

LI, T., ZHANG, C., BACULIKOVA, B., and DZURINA, J., 2011. On the oscillation of thirs-order quasilinear delay differential equations. Tatra Mt. Math. Publ., 48:117-123.

LI, T., ZHANG, C., and XING, G., 2012. Oscillation of tihrd-order neutral delay differantial equations. Abstr. Appl. Anal., 2012:1-11.

MICKENS, R. E., 1987. Difference equations. Van Nostrand Reinhold, New York.

MICHELSON, D., 1986. Steady Solutions of The Kuramoto-Sivashinsky Equation. Physica, D., 19:89-111.

NELSON, J. L., 1968. A stabilitiy theorem for a third order nonlinear differential equation. Pacific J. Math., 24:341-344.

PARHI, N., and DAS, P., 1992. Oscillation criteria for a class of nonlinear differantial equations of third order. Ann, Polon. Math., 57:219-229.

PARHI, N., and DAS, P., 1994. Oscillation and nonoscillation of nonhomogeneous third order differential equations. Czechoslovak Math. J., 44:443-459.

PARHI, N., and PADHI, S., 1998. On Asymptotic behaviour of delay-differential equations of third order. Nonlinear Anal., 34:391-403.

PARHI, N., and DAS, P., 2000. Asymptotic behaviour of a class of third order delay-differential equations. Math. Slovaca, 50:315-333.

PARHI, N., and PADHI, S., 2002. Asymptotic behaviour of solutions of third order delay-differential equations. Indian J. Pure Appl. Math., 33 (10):1609-1620.

PHILOS, Ch. G., 1981. On the existence of nonoscillatory solutions tending to zero at ∞ for differential equations with positive delay. Arch. Math., 36:168-178.

PHILOS, Ch. G., and SFICAS, Y. G., 1982. Oscillatory and aymptotic behaviour of second and third order retarded differential equations. Czechoslovak Math. J., 32 (107):169-182.

PHILOS, Ch. G., 1989. Oscillation theorems for linear differential equation of second order. Arch. Math., 53:482-492.

PİELOU, E. C., 1969. An introduction to mathematical ecology. Gordon and Breach, New York.

ROGOVCHENGO, Yu. V., 2000. Oscillation theorems for second-order equations with damping. Nonlinear Anal., 41:1005-1028.

SAKER, S. H., 2006. Oscillation criteria of third-order nonlinear delay differential equations. Math. Slovaca, 56: 433-450.

SAKER, S. H., and DZURINA, J., 2010. On the oscillation of certain class of third-order nonlinear delay differential equations. Math. Bohemica., 135:225-237.

SCHAUDER, J., 1930. Der Fixpunktsatz in Funktionalraumen. Studia Mathematica, 2:80-171.

SKERLIK, A., 1992. Oscillation theorems for third order nonlinear differential equations. Math. Slovaca, 42:471-484.

SKERLIK, A., 1993. Criteria of property Afor third order superlinear differential equations. Math. Slovaca, 43:171-183.

SKERLIK, A., 1995. An integral conditin of oscillation for equation $y''' + p(t)y' + q(t)y = 0$ with nonnegative coefficients. Arch. Math. Lett., 31:155-161.

SKERLIK, A., 1995. Integral criteria of oscillation for third order linear differential equation. Math. Slovaca, 45:403-412.

SMITH, F. E., 1963. Population Dynamics in Daphnia magna. Ecology 44:651-63.

SMITH, H., 2010. An Introduction to Delay Differential Equations with Applications to the Life Sciences. School of Matemaical and Statistical Sciences Arizona State University, USA.

TANG, X. H., 2002. Oscillation for first order superlinear delay differential equations. J. London Math. Soc., 65:115-122.

TANRIVERDİ, T. And AĞIRAĞAÇ, N. 2018 Differential Transform Aplied to Certain Ode. Advences in Differential Euations and Control Processes, 19 (3): 213-235.

TANRIVERDİ, T. And MCLEOD,J.B., 2007. Generalization of the eigenvalues by contour integrals. appl. Math. Comput., 189(2) :1765-1773.

TANRIVERDİ, T. And MCLEOD,J.B., 2008. The analysis of contour integrals. Abstr. Appl. Anal. Article ID 765920 12 pages.

TANRIVERDİ, T. 2009. Differential Equations with contour integrals. Integrals transform and Special Functions, 20 (2):119-125.

TANRIVERDİ, T. 2009.contor integrals associatef differential equations, Mathematical and computer Medelling, 49(3-4):453-462.

TANRIVERDİ, T. And MCLEOD, J. B., 2010. The Fanno model for turbulent compresible flow. Journal of Differential Equations, 249(12):2955-2963.

TANRIVERDİ, T., 2017. OSCİLLATİNG SOLUTİONS of the Lane-Emden equation for polytrpoic Indices $m = 0$ and 1. British J. Math. & Compute. Sci., 20 (3):1-5.

TANRIVERDİ, T. 2018. Evaluating Sine and Cosine Type İntegrals. IJASM, 5(2):11-13.

TANRIVERDİ, T. 2019. Classical way of lookinf at the Lane Emden equation. Commun. Fas. Sci. Üniv. Ank. Ser. A1 Math. Stat. 68(1):271-276.

TANRIVERDİ, T. 2019. A Specific Sturm-Liouville Differential Equation. Thermal science, 23(3):S47-S56

TANRIVERDİ, T. 2019. Schrödinger equation with potential function vanishing exponentially fast. Journal of Taibah university for Science, 13(1):639-643.

TIRYAKI, A., and YAMAN, Ş., 2001. Asymptotic behaviour of a class of nonlinear functional equations of thir order. Appl. Math. Lett., 14:327-332.

TIRYAKI, A., and YAMAN, Ş., 2001. Oscillatory behaviour of a class of nonlinear differential equation of third order. Acta Math. Sci., 21B (2):182-188

TIRYAKI, A., and AKTAŞ, M. F., 2007. Oscillation criteria of a certain class of third order nonlinear delay differential equations with damping. J. Math. Anal. Appl., 325:54-68.

ZHANG, C., LI, T., SUN, B., and THANDAPANI, E., 2011. On the oscillation of higher-order half-linear delay differential equations. Appl. Math. Lett., 24:1618-1621.

WALTMAN, P., 1996. Oscillation criteria for third order nonlinear differential equations. Pasific J. Math., 19:385-389.

WAZEWSKA-CZYZEWSKA, M., and LASOTA, A., 1988. Matematical problems of the dynamics of the red blood cells system. Annals of the Polish Matematical Soctery, Series III, Applied Mathematics, 17:23-40.

WIDDER, D. V., 1971. An introduction to transform theory. Academic Press, New York.

WONG, J. S. W., 2001. On Kamenev- type oscillation theorems for second-order differential equations with damping. J. Math. Anal. Appl., 258:244-257.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : İdris BİLİR
Uyruğu : T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi : KOZLUK ve 01.09.1984
E-mail : ntgrl72@gmail.com

EĞİTİM

Derece	Adı, İlçe, İl	Bitirme Yılı
Lise	Batman Lisesi, Merkez, Batman	2002
Üniversite	Harran Üniversitesi, Matematik Bölümü, Haliliye, Şanlıurfa	2011
	Dicle Üniversitesi, Hukuk Fakültesi, Sur, Diyarbakır	2020
Yüksek Lisans	Harran Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Haliliye, Şanlıurfa	2019

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görevi
2012 - 2014	Özel Saraç Eğitim Kurumları	Matematik Öğretmeni
2014 - ---	Silvan Hasuni Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi	Matematik Öğretmeni

UZMANLIK ALANI: Matematik

YABANCI DİLLER: İngilizce