



T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



GRAFLARDAKİ BAZI PARAMETRELER VE
ARALARINDAKİ BAĞINTILAR

Burcu KAYA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Ağustos-2019
KONYA
Her Hakkı Saklıdır

TEZ KABUL VE ONAYI

Burcu KAYA tarafından hazırlanan "GRAFLARDAKİ BAZI PARAMETRELER VE ARALARINDAKİ BAZI BAĞINTILAR" adlı tez çalışması 28/08/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan

Doç. Dr. Şerife BÜYÜKKÖSE

Danışman

Prof. Dr. Ayşe Dilek MADEN

Üye

Dr. Öğr. Üyesi Bünyamin ŞAHİN

İmza



Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Mustafa YILMAZ
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

İmza

Burcu KAYA

Tarih:

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GRAFLARDAKİ BAZI PARAMETRELER VE ARALARINDAKİ BAĞINTILAR

Burcu KAYA

**Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı**

Danışman: Prof. Dr. Ayşe Dilek MADEN

2019,57 Sayfa

Jüri

**Prof. Dr. Ayşe Dilek MADEN
Doç. Dr. Şerife BÜYÜKKÖSE
Dr. Öğr. Üy. Bünyamin ŞAHİN**

Graf teori, uygulamalı matematiğin oldukça kullanışlı bir çalışma alanıdır. Son yıllarda, graf teorisinin günlük yaşam problemlerine pratik çözümler ürettiği için matematikte hızlı bir şekilde ilgi odağı haline gelmiştir.

Graf teoride sık kullanılan topolojik indeksler, organik bileşiklerin yapısal özelliklerini açıklamak ve tahminde bulunmak için kullanılan sayılardır. Günümüzde bir çok topolojik indeks tanımlanmıştır.

Tez beş ana bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde graf teori ile ilgili temel tanım ve parametreler, ardından tezde kullanılan kaynaklar ile ilgili bilgiler yer almaktadır.

İkinci bölümde bazı temel matris ve lineer cebir bilgileri verilmektedir.

Üçüncü bölümde Laplacian-Tipi enerji tanımlanmış ve bunun için bazı alt ve üst sınırlar elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde birinci Zagreb indeks için bazı alt sınırlar elde edilmiştir.

Son bölümde ise tezde elde edilen sonuçlar ve öneriler tartışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Baskınlık sayısı, Birinci Zagreb indeks, Graf Enerjisi, Laplacian spektrumu, Laplacian-Tipi enerji, Narumi-Katayama indeks

ABSTRACT

MS THESIS

**SOME PARAMETERS IN GRAPHS AND RELATIONS BETWEEN THESE
PARAMETERS**

Burcu KAYA

**THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF
SELÇUK UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF PHILOSOPHY
IN MATHEMATICS**

Advisor: Prof. Dr. Ayşe Dilek MADEN

2019,57 Pages

Jury

**Prof. Dr. Ayşe Dilek MADEN
Doç. Dr. Şerife BÜYÜKKÖSE
Dr. Öğr. Üy. Bünyamin ŞAHİN**

Graph theory is a very useful area of applied mathematics. In recent years, since graph theory has produced practical solutions to the problems of daily life, it has quickly become the center of attention in mathematics.

Topological indexes commonly used in graph theory are numerical values used to explain and predict the structural properties of organic compounds. Today, many topological indices are defined.

The thesis contains five main sections.

In the first section, basic and fundamental definitions and parameters and then, information about the references in the thesis are given.

In the second section, some basic matrix definitions and information of linear algebra are given.

In the third section, The Laplacian-Like energy is defined. Some lower and upper bounds are obtained for Laplacian-Like energy.

In the fourth section, some lower bounds are obtained for the first Zagreb index.

The final section discusses the results obtained in the thesis with suggestions.

Keywords: Domination number, First Zagreb index, Laplacian spectrum, The graph energy, Laplacian-like energy, Narumi-Katayama index.

ÖNSÖZ

Graflarda Laplacian-Tipi enerji için yeni alt ve üst sınırlar adlı bu çalışma, Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi, Prof. Dr. Ayşe Dilek MADEN danışmanlığında hazırlanmış ve Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Çalışmanın birinci bölümünde, graf teorisinin ve spektral graf teorisinin tarihçesinden bahsedilmiştir. Ayrıca graf teorideki bazı temel kavramlara yer verilmiştir. İleriki bölümlerde ise yapılan kaynak araştırması, çalışmamızda Laplacian-Tipi Enerji için alt ve üst sınırlar ile birinci Zagreb indeksi için alt sınırlar elde edilmiştir. Bulunan bazı sonuçlar için örneklendirmelere değeri verilmiştir.

Bu tezin başlangıcından bitimine kadar her basamağında, sabrını ve yardımlarını esirgemeyen, her zaman rehber olan, bana inanan ve motive olmamı sağlayan kıymetli hocam Prof. Dr. Ayşe Dilek MADEN'e teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca desteğini esirgemeyen, değerli hocam Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK'e teşekkürlerimi sunarım.

Son olarak her zaman yanımda olan, beni daima destekleyen, annem Nursen KAYA, babam Mehmet Emin KAYA, kız kardeşim Başak KÜÇÜKTOKUÇ ve erkek kardeşim Osman Burak KAYA'ya ve bana destek veren yakın akrabalarım ile arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Burcu KAYA
KONYA-2019

İÇİNDEKİLER

ÖZET	iv
ABSTRACT	v
ÖNSÖZ	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR	viii
1. GİRİŞ	1
1.1. Temel Tanımlar.....	4
1.2. Kaynak Araştırması	16
2. GRAFLARIN TEMEL MATRİS GÖSTERİMLERİ VE LİNEER CEBİR BİLGİLERİ	19
3. LAPLACIAN TİPİ ENERJİ ve BU ENERJİ ÜZERİNE BAZI ALT-ÜST SINIRLAR	23
4. BİRİNCİ ZAGREB İNDEKS İÇİN BAZI ALT SINIRLAR	35
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	43
5.1 Sonuçlar	43
5.2 Öneriler	43
KAYNAKLAR	44
ÖZGEÇMİŞ	47

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

\mathbb{R}	: Reel Sayılar
G	: Herhangi bir basit graf
$V(G)$: G grafının nokta kümesi
$E(G)$: G grafının kenar kümesi
$\Delta(G)$: G grafindaki maksimum derece
$\delta(G)$: G grafindeki minimum derece
$G_1 \cong G_2$: Birbirine izomorf iki graf
$A(G)$: G grafının komşuluk matrisi
$L(G)$: G grafının Laplacian matrisi
$D(G)$: G grafının Derece matrisi
λ_i	: $A(G)$ matrisinin i . özdeğeri
λ_1	: $A(G)$ matrisinin spektral yarıçapı
μ_i	: $L(G)$ matrisinin i . özdeğeri
μ_1	: $L(G)$ matrisinin spektral yarıçapı
$\varepsilon(G)$: G nin Enerjisi
LEL	: Laplacian Tipi Enerji
LE	: Laplacian Enerji
$M_1(G)$: G grafının birinci Zagreb indeksi
$NK(G)$: G grafının Narumi-Katayama indeksi
$D = \text{çap}(G)$: G grafının çapı
$rad(G)$: G grafının yarıçapı
$t(G)$: G grafının geren ağaç sayısı
$\deg(v_i)$: v_i noktasının derecesi
$d(u, v)$: u ile v noktaları arasındaki uzaklık
$\gamma(G)$: G grafının baskınlık (domination) sayısı
$iz(M)$: M matrisinin izi
$\det(M)$: M matrisinin determinantı

n_1	: Herhangi bir grafta pendant nokta sayısı
K_n	: n noktalı tam graf
$S_n = K_{1,n}$: n noktalı yıldız graf
P_n	: n noktalı yol graf
C_n	: n noktalı devir graf
U	: Tek devirli graf
B	: Çift devirli graf
T	: Ağaç



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1 Königsberg köprüleri

Şekil 1.2 Königsberg köprü problemi graf modeli

Şekil 1.3 Bir G grafi

Şekil 1.4 Çoklu graf

Şekil 1.5 Pseudo graf

Şekil 1.6 Basit graflar

Şekil 1.7 Bir G grafi

Şekil 1.8 Sonsuz ve sonlu graflar

Şekil 1.9 Bir G grafinin iki alt grafi

Şekil 1.10 Bağlantılı ve Bağlantısız graflar

Şekil 1.11 Birbirine izomorf G_1 ve G_2 grafları

Şekil 1.12 n noktalı P_n yol grafi

Şekil 1.13 C_7 grafi

Şekil 1.14 Yıldız graf örnekleri

Şekil 1.15 Tam graf örnekleri

Şekil 1.16 İki parçalı graf

Şekil 1.17 Ağaç graf örnekleri

Şekil 1.18 Boş graf

Şekil 1.19 Bazı regüler graflar

Şekil 1.20 Tek devirli graflar

Şekil 1.21 İki devirli graflar

Şekil 1.22 G grafinin geren ağacı

Şekil 3.1 Bir G grafi

Şekil 3.2 K_3 tam grafi

Şekil 4.1 Bir ağaç graf

Şekil 4.2 Bir tek devirli (unicyclic) graf

Şekil 4.3 Bir iki devirli(bicyclic) graf

Şekil 4.4 Bir ağaç graf

Şekil 4.5 Bir tek devirli graf

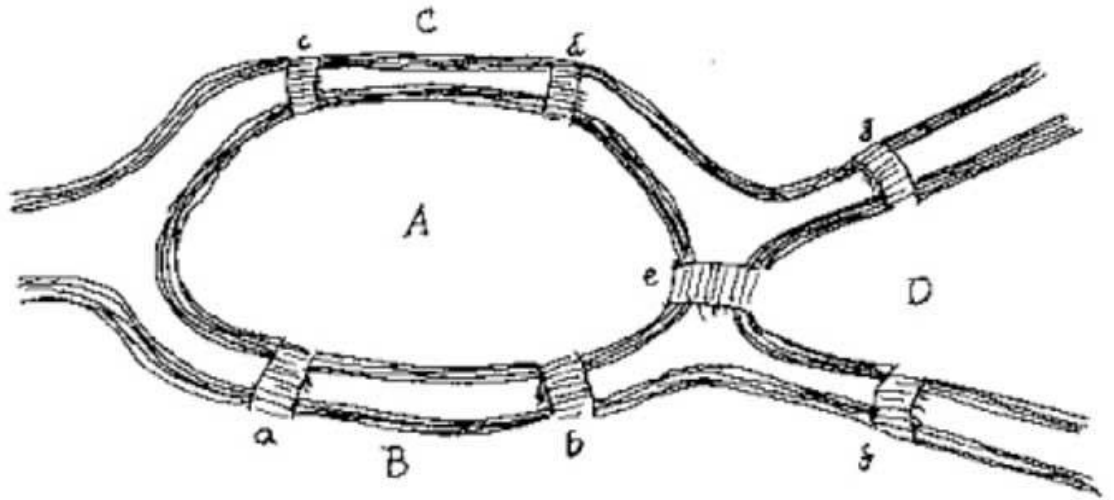
Şekil 4.6 Bir çift devirli graf

1. GİRİŞ

Birçok Graf Teori kitaplarının girişinde graf teorisinin ilk örneği olarak Königsberg köprüleri problemi verilir. Ancak bilinen ilk graf örnekleri Pisagor okuluna kadar geri gitmektedir (M. Ö. 300).

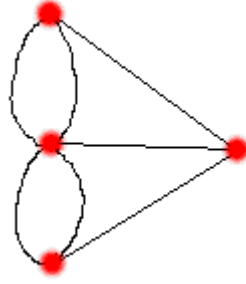
Graf Teori ile ilgili sistematik olarak çalışılan ve yayınlanan ilk bilinen örnek, İsveçli matematikçi Leonard Euler (1707-1783)'in 1736' da yayınladığı "Königsberg'in Yedi Köprüsü" adlı çalışmaya adını veren köprü problemidir. Euler bu çalışmasında çözümsüz olarak bilinen bu problemi çözüme kavuşturarak tarihe geçmiştir. Euler problemi şu şekilde tanımlar:

Prusya (bugünkü Beyaz Rusya)daki Königsberg (bugünkü Kaliningrad) kasabasından geçen Pregel nehri iki dala ayrılarak Kneiphof adasının iki tarafından geçmektedir (bkz. Şekil 1.1) . Nehir üzerinde yedi adet *a, b, c, d, e, f* ve *g* köprüleri inşa edilmiştir. Problem, bir kişinin bir noktadan yürüyüşe başlayıp tüm köprülerden birer kez geçerek başladığı noktaya geri dönüp dönemeyeceğini incelemektedir. Birçok kaynağa göre Königsberg halkı, böyle bir gezinin mümkün olup olmadığını araştırırken aynı zamanda eğleniyorlardı.



Şekil 1.1 Königsberg köprüleri

Harita üzerinde belirtilen Königsberg kentini oluşturan dört kara parçasını ve yedi köprüyü graf dilinde Şekil 1.2 deki gibi gösterebiliriz:



Şekil 1.2 Königsberg köprü problemi graf modeli

Problemin çözülemez olduğunu kanıtlamada Euler her bir arazi alanı yerine bir nokta ve bu arazi alanlarını birbirine bağlayan her bir köprü yerine bir çizgi koyarak bir graf oluşturdu. Şekil 1. 2 de Königsberg köprü probleminin grafında bu durum görülmektedir. Problemi çözmekten ziyade, Euler problemi genelleştirmiş ve hangi hallerde böyle bir yolun bulunabileceğini belirlemiştir. Bir grafın bu şekilde hareket edilebilir olması için graf bağlantılı ve her nokta çift sayıda kenar ile ilişik olmalıdır. Özel olarak, bir Königsberg vatandaşı ne yaparsa yapsın her bir köprüden birer kez geçerek başladığı noktaya dönemez (Harary, 1969).

Kirchhoff 1847 yılında, her dalında ve bir elektrik ağının her devresinde akım veren eşzamanlı lineer denklem sistemlerini çözmek için ağaçlar teorisini geliştirmiştir. 1857 de Cayley diferansiyel hesabındaki değişkenlerin değişimini dikkate alarak ağaç olarak adlandırılan grafların önemli bir sınıfını keşfetmiştir. Jordan 1869 da bağımsız olarak sadece matematiksel bir disiplin olarak ağaçları keşfetti. 1859 da Sir William Hamilton tarafından icat edilen bir oyunda 20 noktası ünlü şehirlerin isimleriyle etiketlenen düzgün onikiyüzlü bir prizma kullanılır. Oyuncu her bir noktadan tam olarak bir kez geçen kenarlar boyunca kapalı bir devre bularak tüm dünyayı gezmelidir (Harary, 1969) .

Grafların geçmiş ve iyi bilinen uygulamalarından bir diğeri, muhtemelen dört renk problemidir. 1852 yılında Francis Guthrie, tüm haritaların, komşu ülkeler aynı renkle boyanmayacak şekilde dört renk ile boyanabileceğini iddia etti. Guthrie, meşhur İrlandalı matematikçi Sir William Rowan Hamilton' un öğrencisiydi ve Hamilton bu problemi Augustus de Morgan'a bir mektupla sordu. Böylece haritacıların pratikte bildiği ve uyguladığı bu özelliğin matematiksel ispatına yönelik çalışmalar başlamış oldu. Probleme ilişkin ilk basılı referans 1878 de Cayley tarafından yazılmıştı. Kempe 1879 yılında bir ispat yayınladıktan sonra bir süre problem çözüldü diye düşünülse de 1890 da Heawood, ispatta bir eksiklik tespit etti ve problemin, biraz daha zayıf hali olan

"her haritanın beş renk ile boyanabileceği" fikrini ispatlamıştır. Bu durum çok geçmeden bir çok matematikçinin bir kez daha dikkatini çekmiştir (Cangül, 2017) .

Dört renk problemi, 1876 da Appel ve Haken tarafından bir algoritma kullanılarak ispatlanana kadar çok sayıda denemeye maruz kalmıştır. 1922 de bir başka ciddi deneme, Birkhoff tarafından ortaya konulmuştur. Buna bağlı olarak Franklin, dört renk problemini en çok 25 bölge bulunduran tüm haritalar için ispatlamıştır (Cangül, 2017) .

Dört renk probleminin Appel ve Haken tarafından yapılarına benzer, fakat çok daha pratik olan bilgisayar destekli ispatı 1995 de Robertson, Sanders, Seymour ve Thomas tarafından yapılmıştır (Cangül, 2017) .

Graf Teorinin içerisinde daha birçok problem mevcuttur. Bunlar arasında pazarlamacı problemi, labirent problemleri, tesisat problemi, network problemleri, el sıkışma problemi, el kaldırmadan çizibilme problemi, postacı problemi sayılabilir (Cangül, 2017).

Teorik kimyada, topolojik indeksler olarak da adlandırılan moleküler yapı tanımlayıcıları toksikolojik, farmakolojik, biyolojik, fizikokimyasal ve kimyasal bileşiklerin diğer özelliklerinin modellenmesinde kullanılır(Gutman ve Polansky, 1986). Özellikle bu indekslerin, kenar ve nokta sayıları ile kenar ve nokta uzaklıklarına bağlı olarak çeşitli türleri vardır. Bu indekslerin en iyi bilineni *Wiener indekstir*. Diğer bazı topolojik indeksler *birinci Zagreb indeks*, *ikinci Zagreb indeks*, *Narumi-Katayama indeks*, *Randić indeks*, *vertex-PI indeks* ve *Szeged indekstir*. *Birinci Zagreb indeks* ile ilgili genel bilgilere Gutman ve Das (Gutman ve Das, 2004) ile Gutman ve ark., (Gutman ve ark., 1975) çalışmalarından bakılabilir. *Narumi-Katayama indeks*, Narumi ve Katayama tarafından tanımlanmıştır (Narumi ve Katayama, 1984). Tanımlanan bu Narumi-Katayama indeksi için farklı parametrelere bağlı çalışmalar Tomescu ve ark. (Tomescu ve ark., 2015); Gutman ve ark. (Gutman ve Ghorbani, 2012) makalelerinden detaylı olarak incelenebilir.

Spektral graf teorisi uzun bir geçmişe sahiptir. İlk başlarda matris teorisi ve lineer cebir grafların komşuluk matrislerini analiz etmek için kullanılmıştır. Bir grafın en küçük ikinci Laplacian öz değeri "cebirsel bağlantılılık" olarak adlandırılmıştır(Chung, 1997) .

Spektral graf teorisinin kimya alanında da uygulaması vardır. Literatürden, öz değerlerin moleküllerin kararlılığı ile ilişkili olduğu da görülmektedir. Ayrıca graf spektrası teorik fiziğin ve kuantum mekaniğinin çeşitli problemlerinde, örneğin

Hamilton sistemlerinin enerjilerini en aza indirmede ortaya çıkmaktadır (Chung, 1997) .

Aşağıdaki temel tanımlar ile genel kavramlar (Harary, 1969); (Cvetkovic, 1980); (Horn ve Johnson, 1985); (Gutman ve Polansky, 1986); (Gutman ve Li, 2016); (Cangül, 2017) kitaplarından alınmıştır.

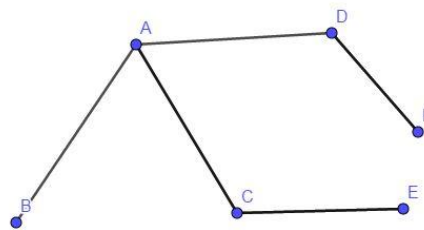
1.1. Temel Tanımlar

Bu bölümün ilk kısmında graflarla ilgili temel kavramlar verilmiştir. Bölümün ikinci kısmında ise çalışmamızda kullandığımız kaynak taraması hakkında bilgi verilmektedir.

Tanım 1.1 V , boş kümeden farklı bir küme ve E , her elemanı V nin farklı elemanlarının oluşturduğu sıralı olmayan çiftlerden oluşan küme olmak üzere V ve E kümelerinden oluşan $G=(V, E)$ şeklindeki yapıya **graf** denir. V kümesinin elemanlarına **nokta**, E kümesinin elemanlarına ise **kenar** denir (Cangül, 2017).

Tanım 1.2 Bir G grafi; $E=E(G)$ kenar kümesi ve $V=V(G)$ nokta kümelerinden oluşmaktadır ve $G=(V, E)$ şeklinde gösterilir. $u, v \in V(G)$ kümesine ait noktalar olmak üzere $uv \in E(G)$ ise; u ve v noktaları **komşudur** denir ve $u \sim v$ biçiminde gösterilir. $e=uv$ için u ve v noktalarına, e kenarının **uç noktaları** denilmektedir (Harary, 1969).

Örneğin; Bir G grafi için, $E(G)=\{AB, AC, CE, AD, DF\}$ ve $V(G)=\{A, B, C, D, E, F\}$ olarak verilsin. Bu kümelerden oluşan G grafi Şekil 1.3 deki gibi çizilebilir.



Şekil 1.3 Bir G grafi

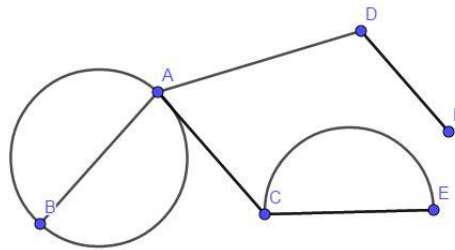
Tanım 1.3 $G=(V, E)$ grafi için $n=|V(G)|$ gösterimine grafın mertebesi, $m=|E(G)|$ gösterimine ise **grafın boyutu** denir. Özetleyecek olursak, n grafın nokta sayısını, m ise grafın kenar sayısını ifade eder (Cangül, 2017).

Tanım 1.4 Herhangi bir v_i noktasının derecesi v_i ye komşu olan noktaların sayısı olup d_i ile gösterilir. Derecesi 0 (sıfır) olan noktaya *izole nokta*, derecesi 1 (bir) olan noktaya ise *pendant* nokta denilmektedir (Bondy ve Murty, 1976).

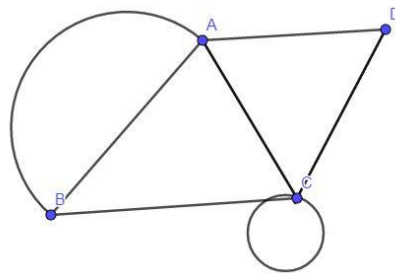
Bir G grafının en az komşuya sahip olan noktasına *minimum dereceli nokta* denir ve bu noktanın derecesi $\delta(G)$ ile gösterilir. En çok komşuya sahip olan noktaya ise *maksimum dereceli nokta* denir ve $\Delta(G)$ ile gösterilir (Cangül, 2017).

Tanım 1.5 Bir grafta aynı nokta çiftlerini birleştiren iki ya da daha fazla kenara *paralel kenar(katlı kenar)*, bir noktayı kendisiyle birleştiren kenara *döngü (ilmek)*, paralel kenara sahip ancak döngüsü olmayan grafa *çoklu graf*, paralel kenar ve ilmek içeren graflara ise *Pseudo graf* denilmektedir (Harary, 1969).

Şekil 1.4 de bir çoklu graf ve Şekil 1.5 de bir Pseudo graf örnekleri verilmiştir.



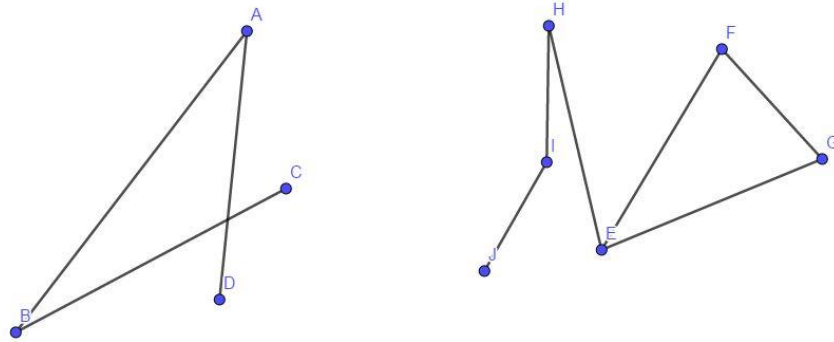
Şekil 1.4 Çoklu graf



Şekil 1.5 Pseudo graf

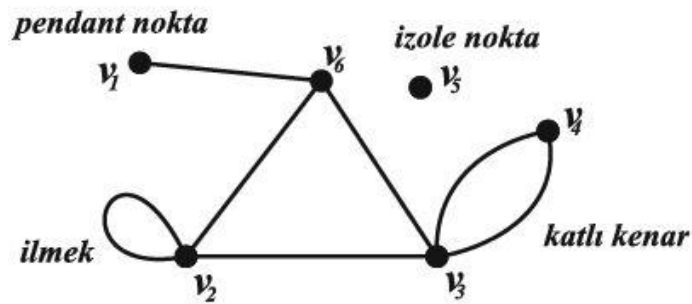
Tanım 1.6 G bir graf ve $v \in V(G)$ olsun. v noktasını uç kabul eden tüm kenarların sayısına v noktasının derecesi denir ve $\deg(v)$, $d(v)$ ya da d_v gibi sembollerle gösterilebilir (Cangül, 2017).

Tanım 1.7 Sonlu, yönlü olmayan, çoklu kenar ve döngü içermeyen graflara **basit graf** denir (Harary, 1969).



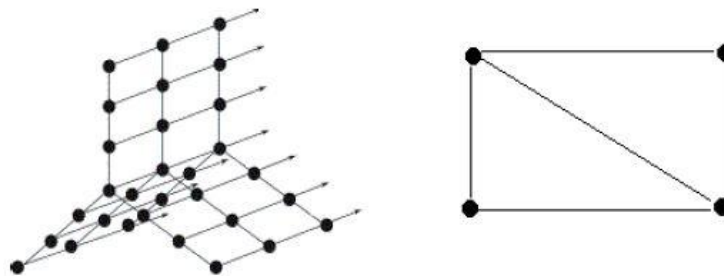
Şekil 1.6 Basit graflar

Örneğin; aşağıdaki grafa, v_6 noktası v_1, v_2 ve v_3 noktaları ile komşudur fakat diğer noktalar ile komşu değildir. Grafın v_1 noktası pendant nokta, v_5 noktası ise izole noktadır. Bu grafın noktalarının derecesi $d(v_1)=1$, $d(v_2)=4$, $d(v_3)=4$, $d(v_4)=2$, $d(v_5)=0$, $d(v_6)=3$ olup $\delta(G)=0$ ve $\Delta(G)=4$.



Şekil 1.7 Bir G grafi

Tanım 1.8 Bir graf sonlu sayıda nokta ve kenara sahip ise, bu grafa sonlu graf, aksi durumunda sonsuz graf denir (Bondy ve Murty, 1976).



Şekil 1.8 Sonsuz ve Sonlu Graf

Bir G grafının m tane kenarı ve v_1, v_2, \dots, v_n ile gösterilen n tane noktası olsun. Bu grafın noktalarının dereceleri toplamı kenar sayısının iki katına eşittir. Matematiksel olarak

$$\sum_{i=1}^n \deg(v_i) = \sum_{i=1}^n d(v_i) = \sum_{i=1}^n d_i = 2m$$

şeklinde ifade edilebilir (Euler, 1736).

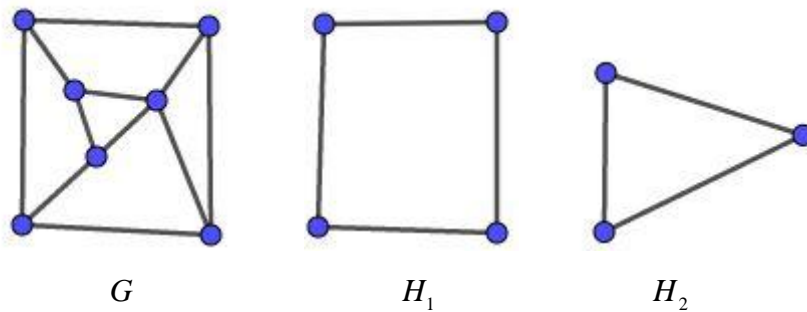
Bu çalışmamız boyunca basit ve sonlu grafları kullanacağız.

Tanım 1.9 Bir G grafının nokta kümesi $V(G) = \{a, b, c, d, e, f, g, \dots, l, m, n, o\}$ olsun. Ard arda t kenarın dizilmesiyle elde edilen

$$\underbrace{ab, bc, cd, de, ef, \dots, mn, no}_t$$

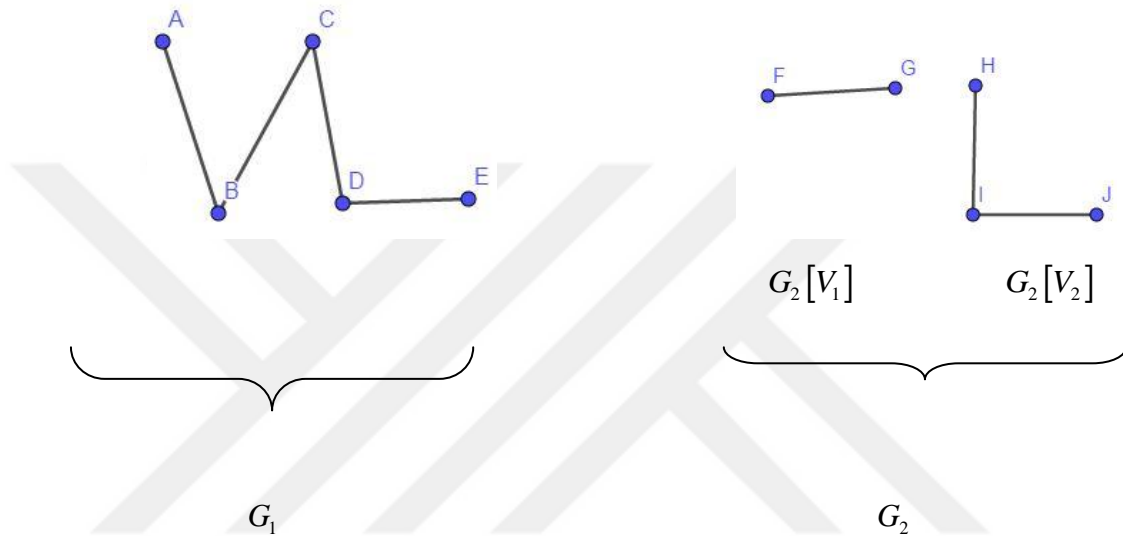
formuna G grafı için t uzunluğunda bir **yürüme** denir. Bu yürüme $abcdef\dots mno$ şeklinde gösterilir. Herhangi bir G grafında; aynı noktada başlayan ve yine aynı noktada biten bir yürümeye **kapalı yürüme**, bütün noktaları ve kenarları birbirinden farklı olan yürümeye **yol** ve bütün kenarları, başlangıç ve bitiş noktaları hariç bütün noktaları farklı olan kapalı yürümeye de **devir** denir (Harary, 1969).

Tanım 1.10 G herhangi bir graf olmak üzere, nokta kümesi G nin nokta kümesinin alt kümesi ve kenar kümesi de G nin kenar kümesinin alt kümesi olan grafa G nin **alt grafi** denir. G nin tüm noktalarını içeren alt grafına **geren alt graf** denir (Harary, 1969).



Şekil 1.9 G grafının iki alt grafi

Tanım 1.11 Bir G grafi için $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ noktalar kümesi olsun. G grafının v_i ve v_j noktaları arasında bir yol var ise bu noktalara **bağlantılıdır** denir. Eğer G grafindaki bütün nokta çiftleri arasına bir yol çizilmiş ise G grafına **bağlantılı graf** denir. Bağlantılılık bağıntısı V üzerinde bir denklik bağıntısıdır. $V_1, V_2, V_3, \dots, V_r$, V nin denklik sınıfları olmak üzere $G[V_1], G[V_2], \dots, G[V_r]$ alt graflarına G grafının **bileşenleri** denir. $r=1$ durumunda G grafi **bağlantılıdır**, aksi durumda ise G grafi için r tane bileşene sahip **bağlantısız** bir graftır denir (Harary, 1969).



Şekil 1.10 Bağlantılı ve Bağlantısız graflar

Tanım 1.12 Bir G grafi ve $S, V(G)$ noktalar kümesinin bir alt kümesi verilsin. S kümesindeki noktalar G grafının tüm noktalarına komşu oluyorsa bu durumda S ye baskınlık kümesi (dominating set) denir (Alikhani ve Peng, 2014).

Tanım 1.13 Bir G grafının minimum boyutlu baskınlık kümesinin boyutuna baskınlık sayısı (domination number) denir ve $\alpha(G)$ ile gösterilir (Alikhani ve Peng, 2014).

Tanım 1.14 $G = (V, E)$ bir graf ve $u, v \in V(G)$ olmak üzere bu iki nokta arasındaki en kısa yolun uzunluğuna bu iki nokta arasındaki **uzaklık (distance)** denir ve $d(u, v)$ ile gösterilir (Buckley ve Harary, 1990).

Tanım 1.15 Bir G grafının her nokta çifti arasındaki maksimum uzaklığa G grafının *çapı (diameter)* denir ve $\text{çap}(G)$ veya $\text{diam}(G)$ ile gösterilir (Harary, 1969).

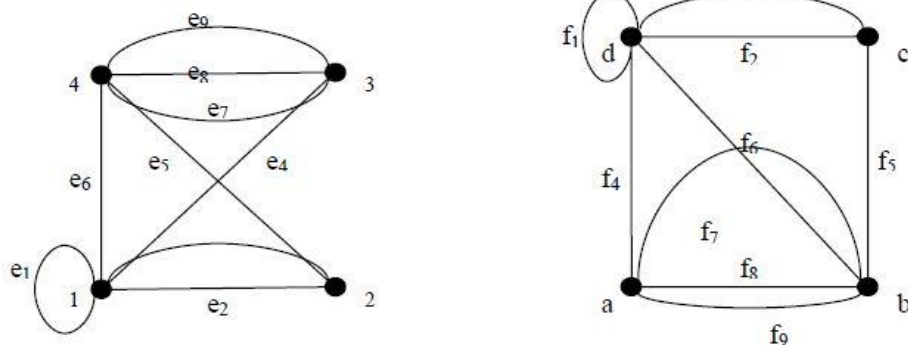
Tanım 1.16 Bir G grafının her nokta çifti arasındaki minimum uzaklığa G grafının *yarıçapı (radius)* denir ve $\text{rad}(G)$ ile gösterilir (Harary, 1969).

Tanım 1.17 G_1 ve G_2 , nokta kümeleri $V(G_1)$ ve $V(G_2)$, kenar kümeleri $E(G_1)$ ve $E(G_2)$ olan iki graf olsun. Her $u, v \in V(G_1)$ için,

$$\{u, v\} \in E(G_1) \Leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E(G_2)$$

olacak şekilde 1-1 ve örten bir $f: V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ dönüşümü varsa, G_1 ve G_2 graflarına *izomorf graflar* denir ve $G_1 \cong G_2$ şeklinde gösterilir (Bondy ve Murty, 1976).

Aşağıdaki iki graf birbirine izomorftur.

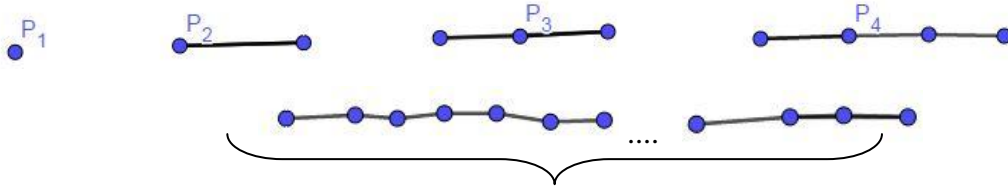


G_1 grafi

G_2 grafi

Şekil 1. 11 Birbirine izomorf G_1 ve G_2 grafları

Tanım 1.18 v_1, v_2, \dots, v_n birbirinden farklı noktaları olsun. Ardışık $v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n$ kenarlarına sahip olan bir grafa *yol grafi* denilir. n köşeli bir yol grafi P_n ile gösterilir. P_n grafında n nokta ve $n-1$ kenar bulunmaktadır. v_1 ve v_2 noktalarına P_n yol grafının uç noktaları veya uçları, kenar sayısına da P_n yol grafının uzunluğu denilir (Cangül, 2017).



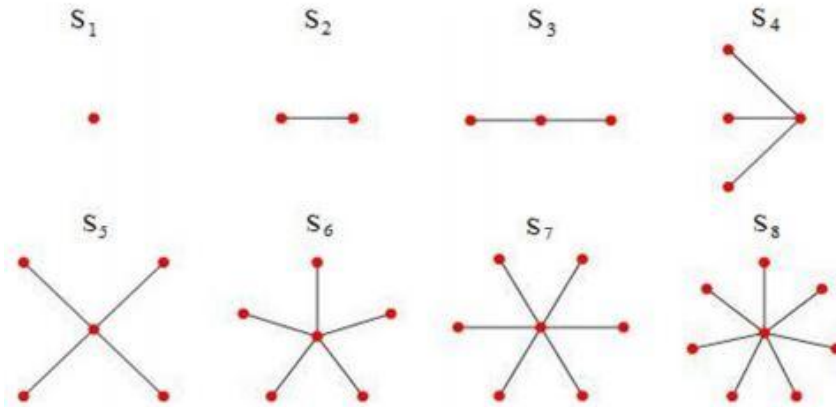
Şekil 1.12 n noktalı P_n yol grafi

Tanım 1.19 Bir yolun iki uç noktasını bir kenar ile birleştirerek elde edilen bir grafa **devir grafi** denilir. n noktalı (ve dolayısıyla n kenarlı) bir devir grafi C_n ile gösterilir (Cangül, 2017).



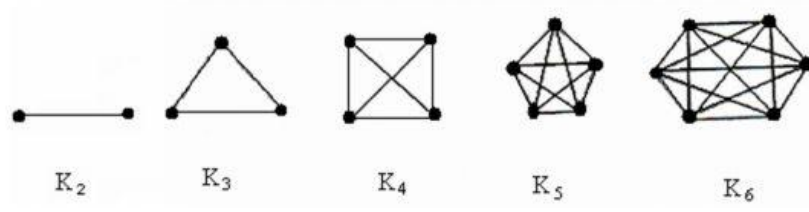
Şekil 1.13 C_7 grafi

Tanım 1.20 Bir yıldız grafi bir merkezi noktası ile her biri sadece bu noktayı birleştirilen uç noktalardan oluşur. Nokta sayısı n olan bir yıldız grafi S_n ile gösterilir ve kenar sayısı da $n-1$ dir (Cangül, 2017).



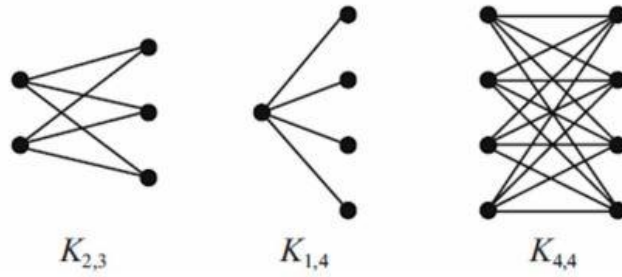
Şekil 1.14 Yıldız graf örnekleri

Tanım 1.21 Bir grafta her bir nokta çifti birbirine komşu ise bu grafa **tam graf** denir. n noktalı bir tam graf K_n ile gösterilir. n noktalı bir tam grafın kenar sayısı $\frac{n(n-1)}{2}$ ve nokta derecesi de $n-1$ dir (Cangül, 2017).



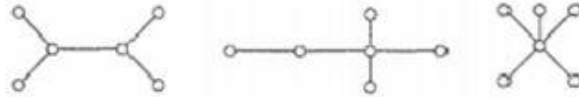
Şekil 1.15 Tam graf örnekleri

Tanım 1.22 Bir grafın nokta kümesi V_1 ve V_2 şeklinde iki kümeye ayrılmış olsun. Eğer kenarları V_1 deki noktalarla V_2 deki noktaların birleştirilmesiyle oluşuyorsa, bu grafa *iki parçalı graf* denir. V_1 ve V_2 deki tüm noktalar karşılıklı olarak birbirleriyle birleştirilmiş ise bu tür graflara *iki parçalı tam graf* denir. $|V_1|=m$ ve $|V_2|=n$ olan iki parçalı tam graf $K_{m,n}$ şeklinde gösterilir. Özel olarak $K_{1,m}$ grafına da star graf denir (Cangül, 2017).



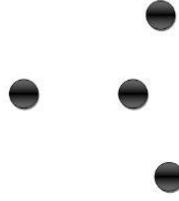
Şekil 1.16 İki parçalı graf

Tanım 1.23 Bir bağlantılı graf içerisinde hiç devir yoksa buna *ağaç graf* denir. Ağaç graflar T ile gösterilir. Bir T ağaç grafının köşe sayısı n iken kenar sayısı $n-1$ e eşittir (Harary, 1969).



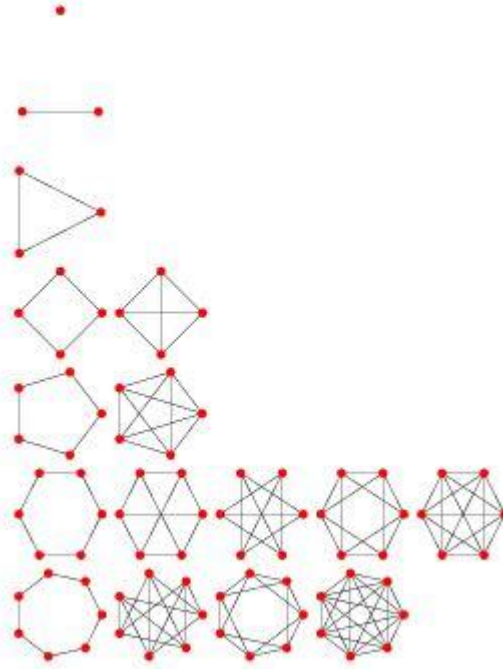
Şekil 1.17 Ağaç graf örnekleri

Tanım 1.24 Tek bir noktaya sahip olan ve hiç kenar içermeyen grafa *trivial graf* denir. Hiç kenarı olmayan sadece noktalardan oluşan grafa *boş(null) graf* denir (Skiena, 1990).



Şekil 1.18 Boş graf

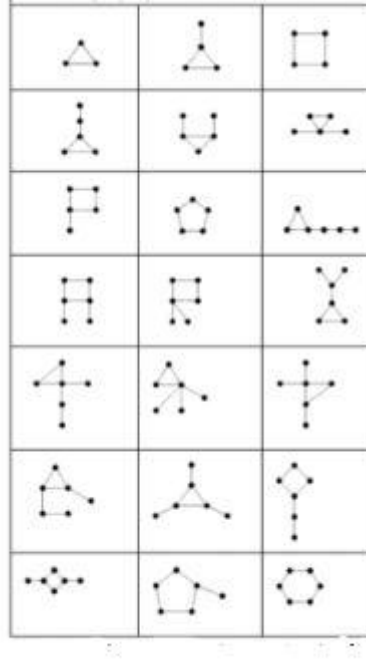
Tanım 1.25 Bir G grafında tüm noktaların dereceleri birbirine eşit ise yani $\forall v_i \in V_G$ için $d(v_i) = r$ ise G grafına *r-regüler graf* denir. Bazı regüler graf örnekleri Şekil 1.19 de verilmiştir (Harary, 1969).



Şekil 1.19 Bazı regüler graflar

Tanım 1.26 Tek devir içeren bağlantılı graflara *tek devirli (unicyclic) graf* denir (Manvel, 1969).

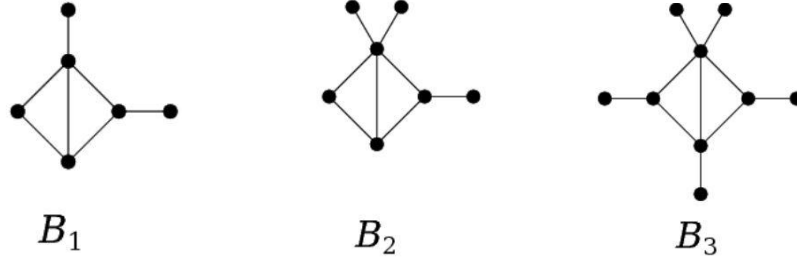
Şekil 1.20 da tek devirli graf örnekleri verilmiştir.



Şekil 1. 20 Tek devirli graflar

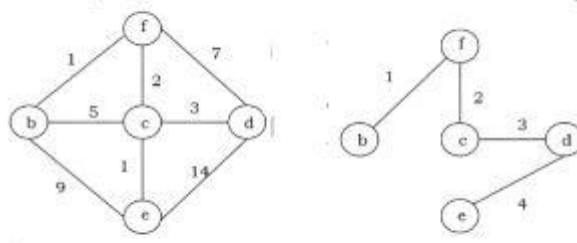
Tanım 1.27 İki devir içeren bağlantılı graflara *iki devirli (bicyclic) graf* denir.

Şekil 1.21 de iki devirli graf örnekleri yer almaktadır (Gross ve Yellen, 1999).



Şekil 1. 21 İki devirli graflar

Tanım 1.28 Yönlendirilmemiş bir G grafının tüm noktalarını içeren ağaç alt graflarına G grafının geren ağacı (spanning tree) denir. G grafının geren ağaçlarının sayısı $t(G)$ ile gösterilir (Skiena, 1990).



Şekil 1.22 Bir G grafının geren ağacı

Bazı durumlarda $t(G)$ yi doğrudan hesaplamak mümkündür:

- G nin kendisi bir ağaç ise $t(G)=1$ olur.
- $G = C_n$ ise $t(G) = n$ olur.
- G , n köşeli bir tam graf ise $t(G) = n^{n-2}$ olarak hesaplanır (Aigner ve Ziegler, 1998).
- $G = K_{p,q}$ tam iki parçalı graf ise $t(G) = p^{q-1}q^{p-1}$ olur (Hartsfield ve Ringel, 2003).

Şimdi temel sonuçlarımızda kullanacağımız birinci Zagreb indeksi ile Narumi-Katayama İndeksini tanımlayalım:

Tanım 1.29 G , n noktalı bir graf olsun. $v_i \in V(G)$ olmak üzere v_i noktasının derecesi $\deg(v_i)$ dir. Buna göre birinci Zagreb indeks,

$$M_1 = M_1(G) = \sum_{v_i \in V(G)} \deg(v_i)^2$$

biçiminde tanımlanır (Gutman ve Trinajstić, 1972).

Tanım 1.30 G , n noktalı bir graf olsun. $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ olmak üzere $v_i \in V(G)$ noktasının derecesi $\deg(v_i)$ dir. Buna göre Narumi-Katayama indeksi,

$$NK = NK(G) = \prod_{i=1}^n \deg(v_i)$$

şeklinde tanımlanır (Narumi ve Katayama, 1984).

Şimdi de temel sonuçlarımızda kullanacağımız Cauchy-Schwarz eşitsizliğini verelim:

Lemma 1.31 (a_1, a_2, \dots, a_n) ve (b_1, b_2, \dots, b_n) iki reel sayı dizisi olsun. Bu durumda

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)$$

Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart (a_1, a_2, \dots, a_n) ve (b_1, b_2, \dots, b_n) dizilerinin orantılı olmasıdır (Hardy ve ark., 1934).



1.2. Kaynak Araştırması

Çalışmamızın bu kısmında bir çok araştırmacının çalışma konusu olmuş graf parametreleri ve graflarda enerji tipleri üzerinde literatürde var olan bazı çalışmalardan bahsedilecektir.

Öncelikle graf parametreleri üzerine yapılan çalışmalardan bahsedelim.

Uzaklık, graf teoride yoğun olarak çalışılan bir konudur. İki nokta arasındaki uzaklık, Buckley ve Harary (1990) tarafından tanımlanmıştır (Buckley ve Harary, 1990); temel ve çok kullanılan bir kavramdır. Topolojik indeks, bir molekülün grafının bazı özelliklerini karakterize etmemize yardımcı olan bir sayıdır.

Örneğin; Wiener indeks, teorik kimyada organik moleküller için yapısal tanımlayıcı olarak kullanılan bir topolojik indekstir. Bu indeks Wiener (1947) tarafından alkan moleküllerinin dallanmasını matematiksel olarak belirleyecek bir sayı olarak tanımlanmıştır. Bu sayı bir molekülde hidrojen atomları dışındaki tüm atomları temsil eden köşeler arasındaki patikaların uzunluklarının toplamı olarak tanımlanır. Bu da moleküllerin kaynama noktaları ile yakından ilişkilidir. Böylece graf parametreleri ya da topolojik indekslerin, kimyasal moleküllerin özelliklerini tahmin etmede rahatlıkla kullanılabilmesi anlaşılmıştır (Wiener, 1947).

Gutman ve Trinajstić (1972), "*Graph theory and molecular orbitals: Total π -electron energy of alternant hydrocarbons*" isimli çalışmalarında graf teoride ve kimyasal matematik uygulamalarında önemli bir yere sahip olacak olan Birinci Zagreb indeksi ortaya koydular (Gutman ve Trinajstić, 1972).

Gutman (1978), "The energy of a graph. 10. Steirmarkisches Mathematisches Symposium" isimli çalışmasında bir G grafının komşuluk matrisinin özdeğerlerinin mutlak değerce toplamının G grafının enerjisini verdiğini elde etmiştir (Gutman, 1978).

Narumi ve Katayama (1984), "*Simple topological index, a newly devised index characterizing the topological nature of structural isomers of saturated hydrocarbons*" isimli çalışmalarında bağlantılı basit grafların köşe derecelerinin çarpımı olarak tanımlanan, matematik uygulamalarında geniş çalışma alanı olan Narumi-Katayama indeksini hesaplamışlardır (Narumi ve Katayama, 1984).

Erdős ve ark. (1989), "Radius, diameter and minimum degree" isimli çalışmalarında sıklıkla kullanılan radius ve diameterle ilgili grafın yalnızca köşe sayısını ve minimum derecesini içeren sınırlar literatürde yer almıştır (Erdos ve ark., 1989).

Estrada ve ark. (1998), "An atom-bond connectivity index: modelling the enthalpy of formation of alkanes" isimli makalelerinde yeni bir graf indeksi olan atom-bağ bağlantılılık (atom-bond connectivity) indeksi tanımlamışlar ve kimyada alkanların entalpisi alanında uygulaması ile ilgili çalışmalar yapmışlardır (Estrada ve ark., 1998).

Graf Teorinin sıkça kullanılan parametrelerinden biri olan birinci Zagreb için Gutman ve ark. (Gutman ve Das, 2004) yaptıkları çalışmada bu indeks için önemli özellikler, bazı sınırlar elde etmişlerdir.

Gutman ve Zhou, "Laplacian energy of a graph" adlı çalışmalarında Laplacian enerji tanımını yaparak graflardaki enerji kavramı ile Laplacian enerji arasındaki ilişkiyi incelemiş, bu iki enerji arasında güçlü bir ilişki olduğu gibi aynı zamanda bazı önemli farklılıklar bulmuştur (Gutman ve Zhou, 2006).

Das ve Mojallal enerji ve Laplacian enerji konusunda yaptığı çalışmada enerjinin alt ve üst sınırlarını köşe ve kenar sayısı, maksimum derecesi ve birinci Zagreb indeksi yardımıyla ifade etmiştir. Dahası G grafının enerjisi ile Laplacian enerjisi arasındaki ilişkiyi vermişlerdir (Das ve Mojallal, 2016).

Gutman ve Zhou, "On Laplacian energy of a graphs" isimli çalışmalarında Laplacian enerji ile ilgili bazı özellikler elde etmişlerdir (Zhou ve Gutman, 2007).

Laplacian-tipi enerji Liu ve Liu tarafından tanımlanmıştır (Liu ve Liu, 2008). Bu konuda daha fazla bilgi edinmek için [(Zhu, 2011); (Gutman ve ark., 2010); (Liu ve ark., 2011); (Das ve ark., 2014)] çalışmalarını da bakılabilir.

Khalifeh ve ark (2009), "Some new results on distance-based graph invariants" isimli çalışmalarında bazı indekslerin aralarındaki ilişkiler incelenmiş ve bu indeksler için sınırlar elde edilmiştir (Khalifeh ve ark., 2009).

Gutman ve ark., grafları Narumi-Katayama indeksine göre karakterize etmişlerdir (Gutman ve Ghorbani, 2012).

Wang ve arkadaşları Laplacian tipi enerjinin regüler graflardaki alt ve üst sınırlarını elde etmişlerdir (Wang ve Luo, 2012).

Tomescu ve arkadaşları bir grafın Narumi-Katayama indeksi için nokta sayısına, pendant noktasına ve çevrimsel sayısına (cyclomatic number) bağlı olarak alt ve üst sınırlar elde etmişlerdir (Tomescu ve ark., 2015).

Gutman ve arkadaşları bir grafın birinci Zagreb indeksi için grafın nokta sayısına ve pendant nokta sayısına bağlı olarak alt sınırlar elde etmiştir (Gutman ve ark., 2015).

Das ve Mojallal bir G grafının Laplacian enerjisinin incelemesini yapmışlardır (Das ve Mojallal, 2014).

Jahanbani bir G grafinın enerjisi için alt sınırları grafin köşe ve kenar sayısına, maksimum derecesine, birinci ve ikinci Zagreb indekslerine bağlı olarak karakterize etmiştir (Jahanbani, 2018).

Patra ve Sahoo grafların Laplacian spektral yarıçapı için bazı graf parametreleri yardımıyla alt ve üst sınırlarını ifade etmişlerdir (Patra ve Sahoo, 2017).

Ayrıca bazı topolojik indeksler için de enerji kavramı tanımlanmıştır. Bunlardan bazıları, Kirchhoff enerji (Maden ve ark., 2013), PI enerji (Nadjafi-Arani, 2011), Randic enerji (Burcu Bozkurt ve ark., 2010), Szeged enerji (Fath-Tabar, 2011) ve Zagreb enerji (Rad ve ark., 2018)dir.



2. GRAFLARIN TEMEL MATRİS GÖSTERİMLERİ VE LİNEER CEBİR BİLGİLERİ

Bu bölümümüzde çalışmamızda kullandığımız temel matris tanımlarını ve kullandığımız temel cebir bilgilerine yer verilecektir.

Bir G grafinin yapısı hakkındaki bir takım bilgileri kullanarak bu grafin matris şeklinde gösterimini yapabiliriz. Grafların matris gösterimleri hakkındaki çalışmaların çoğu *komşuluk matrisi* (*adjacency matrix*), *kombinatoriyal Laplacian matris* (*combinatorial Laplacian matrix*), *işaretsiz Laplacian matris* ve *normalize edilmiş Laplacian matris* üzerinedir. Biz kendi konumuzda Komşuluk matrisini, Derece matrisi ve Laplacian matrisini kullanacağımız için sadece bunlarla ilgili tanımlamalara yer verilecektir.

Bir $G = (V, E)$ grafinin Komşuluk matrisi (*adjacency matrix*, $A(G)$), satır ve sütunları G grafinin nokta kümesinin elemanları yardımıyla aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır.

$$A(G) = (a_{ij}) = \begin{cases} 1, & v_i \square v_j \\ 0, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

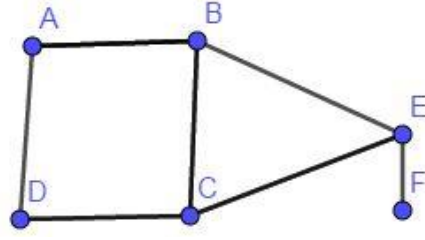
Bir $G = (V, E)$ grafinin *Derece matrisi* (*degree matrix*, $D(G)$), satır sütunları G grafinin nokta kümesinin elemanlarının dereceleri yardımıyla aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$D(G) = (d_{ij}) = \begin{cases} d_i, & v_i = v_j \\ 0, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

Bir $G = (V, E)$ grafinin *Kombinatoriyal Laplacian matrisi* (*combinatorial Laplacian matrix*), $L(G) = D(G) - A(G)$, satır ve sütunları G grafinin npktalar kümesinin elemanları yardımıyla aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır.

$$L(G) = (l_{ij}) = \begin{cases} d_i, & v_i = v_j \\ -1, & v_i \square v_j \\ 0, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

Şimdi, Şekil 2.1 deki G grafinin temel matris gösterimlerini inceleyelim.

Şekil 2.1 G grafi

Komşuluk matrisi;

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Derece matrisi;

$$D(G) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Kombinatoryal Laplacian matrisi;

$$L(G) = D(G) - A(G) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

şeklindedir.

Şimdi de çalışmamızda kullanacağımız bazı Lineer Cebir bilgilerini hatırlatıp kullanacağımız notasyonlar hakkında bilgi vereceğiz.

$0_{m \times n}$; $m \times n$ boyutlu sıfır matrisi, I_n ise n boyutlu birim matrisi göstermektedir.

M , n mertebeli reel matrisi gösterebiliriz. $\det(\lambda I - M) = 0$ fonksiyonuna matrisin **karakteristik polinomu**, bu polinomun köklerine ise matrisin **özdeğerleri** denir. Bir matrisin özdeğerlerinin kümesi ise o matrisin **spektrumu** olarak isimlendirilir. Bir matrisin özdeğerleri λ , μ , q gibi terimlerle ifade edilirken, $Mx = \lambda x$ denkleminin sıfırdan farklı x köklerine matrisin **özvektörleri** denir. Matrisin özvektörleri de u , v , z gibi adlandırılabilir.

M^T , M nin transpozisini göstermek üzere, $M = M^T$ ise M matrisine **simetrik matris** denir.

u ve v sıfırdan farklı boyutları uygun herhangi iki vektör olsun. $Mu = \sigma u$ ve $M^T v = \sigma v$ denklemlerini sağlayan σ değerine M nin **tekil (singular) değeri** denir.

Satırlarının sayısı sütunlarının sayısına eşit olan matrise **kare matris** denir.

Bir reel matrisin transpozesi kendisine eşit $M = M^T$ ise o matrise **simetrik matris** denir.

Reel simetrik ve n boyutlu bir M matrisi, her n boyutlu x vektörü için $x^T M x \geq 0$ şartını sağlıyorsa bu matrise **pozitif yarı tanımlı matris** denir.

Teorem 2.1 M n boyutlu reel simetrik matris olmak üzere

i) M matrisinin özdeğerleri reel sayılardır. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

ii) M matrisinin özdeğerlerinin cebirsel ve geometrik katlılıkları eşittir.

iii) M matrisinin singüler değerleri, özdeğerlerinin mutlak değerine eşittir.

[(Cvetkovic, 1980), (Horn ve Johnson, 1985)].

Teorem 2.2 M ve N n boyutlu iki kare matris olmak üzere;

$$\sum_{i=1}^n \sigma_i(A+B) \leq \sum_{i=1}^n \sigma_i(A) + \sum_{i=1}^n \sigma_i(B)$$

şartını sağlar (Fan, 1951).

M , n boyutlu kare matrisinin esas köşegen elemanları toplamına o matrisin izi (matrix trace) denir ve $\text{iz}(M)$ ($\text{tr}(M)$) ile gösterilir,

$$\text{tr}(M) = \text{iz}(M) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(M)$$

eşitliği vardır.

Bir matrisin özdeğerlerinin çarpımı, matrisin determinantına eşittir.

$$\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n = \det(M)$$

eşitliği vardır.

M , n boyutlu matris ve $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $aM + bI_n$ matrisinin özdeğerleri;

$$a\lambda_1(M) + b, a\lambda_2(M) + b, \dots, a\lambda_n(M) + b$$

şeklindedir.



3. LAPLACIAN TİPİ ENERJİ ve BU ENERJİ ÜZERİNE BAZI ALT-ÜST SINIRLAR

Bu bölümde bir G grafının enerjisini, Laplacian enerjisini ve Laplacian tipi enerjisinin tanımları verilerek özellikleri incelenecektir. Laplacian tipi enerji için daha önce bulunan alt ve üst sınırlara ek olarak yeni sınırlar verilecektir. Bu bulunan sınırlar bazı graf çeşitlerine göre incelenecektir.

Bu bölüm boyunca basit ve sonlu graflarla çalışılacaktır.

Bir G grafının $A(G)$ komşuluk matrisinin özdeğerleri $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \lambda_{n-1} \geq \lambda_n$ olsun. En büyük özdeğer λ_1 , G grafının spektral yarıçapı (spectral radius) olarak adlandırılır. Şimdi bir G grafının spektrali için iyi bilinen bazı sonuçları aşağıdaki gibi sıralanabilir:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = 2m,$$

$$\text{ve } \det A = \prod_{i=1}^n \lambda_i.$$

Bir G grafının spektral yarıçapı λ_1 ile grafın ortalama nokta derecesi arasında aşağıdaki ilişki vardır,

$$\lambda_1 \geq \frac{2m}{n}$$

Eşit olması için gerek ve yeter koşul G grafının regüler olmasıdır.

Gutman (Gutman, 1978) bir G grafının enerjisini aşağıdaki gibi tanımlamıştır.

$$\varepsilon(G) = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|.$$

G grafının enerjisinin temel özellikleri ile ilgili detaylı bilgi için [(Das ve Mojallal, 2016); (Das ve Mojallal, 2013); (Das ve ark., 2013); (Gutman ve Das, 2013); (Guo, 2008); (Koolen ve Moulton, 2001); (Li ve ark., 2012); (McClelland, 1971); (Zhou, 2004)] çalışmalarına bakılabilir.

Bir G grafının Laplacian matrisi $L(G) = D(G) - A(G)$ olarak tanımlanmıştır. $L(G)$ matrisinin özdeğerleri negatif olmayan değerler alır ve aralarında $n \geq \mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n = 0$ ilişkisi mevcuttur. Ayrıca $L(G)$ nin spektrumu $Spec(G) = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\}$ şeklinde gösterilebilir (Das ve Mojallal, 2016).

Gutman ve ark. (Gutman ve Zhou, 2006) Laplacian Enerjiyi aşağıdaki gibi tanımlamışlardır.

$$LE = LE(G) = \sum_{i=1}^n \left| \mu_i - \frac{2m}{n} \right|.$$

Liu ve ark. (Liu ve Liu, 2008) Laplacian-Tipi-Enerji yi aşağıdaki gibi tanımlamışlardır.

$$LEL = LEL(G) = \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{\mu_i}.$$

Laplacian özdeğerleri , iyi bilinen aşağıdaki özelliklere sahiptir:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \mu_i = 2m.$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} \mu_i^2 = M_1(G) + 2m.$$

Merris (Merris, 1994) bir G grafının geren ağaç sayısı için aşağıdaki eşitliği elde etmiştir.

$$t(G) = \frac{1}{n} \prod_{i=1}^{n-1} \mu_i.$$

Ayrıca bu bölümdeki çalışmalar Kıbrıs' ta düzenlenen 3rd International Conference on Computational Mathematics and Engineering Sciences, CMES, 2018 yılında sunulmuştur (Kaya ve Maden, 2018).

Teorem 3.1 G , n noktalı ve m kenarlı basit bağlantılı bir graf olsun. λ_1 , G nin

spektral yarı çapı ve $\alpha = \sqrt{\frac{n}{2m}} + \frac{1}{\mu_{n-1}}$ olmak üzere aşağıdaki eşitsizlik sağlanır (Faghani

ve Pourhadi, 2018).

$$LEL \geq \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{d_k}{\alpha \lambda_1}}$$

Lemma 3.2 G , en az bir kenara sahip, maksimum nokta derecesi Δ olan bir graf olsun. Bu durumda,

$$\mu_1 \geq 1 + \Delta.$$

eşitsizliğini sağlar. G nin bağlantılı olması için gerek yeter koşul $\Delta = n - 1$ olmasıdır (Merris, 1994).

Yapılan bu bilgilendirmelerden sonra ilk ana teoremimiz aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Teorem 3.3 G n noktalı, m kenarlı, maksimum derecesi Δ ve geren ağaç sayısı t olan bağlantılı bir graf olsun. O halde

$$LEL(G) \geq \sqrt{\Delta+1} + (n-2) + \frac{1}{2} \ln t - \ln \sqrt{\Delta+1}$$

dir.

İspat: G bağlantılı bir graf, G nin Laplacian özdeğerleri $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n = 0$ olsun. $s_1(x) = x - 1 - \ln(x)$, $x > 0$ fonksiyonunu düşünelim. $s_1(x)$ fonksiyonu $x \geq 1$ için artan, $0 < x \leq 1$ için azalandır.

Sonuç olarak, $s_1(x) \geq s_1(1) = 0$ dir ve $x \geq 1 + \ln x$, $x > 0$ düşünebiliriz. Eşitlik koşulunun sağlanması için gerek ve yeter koşul $x = 1$ olmasıdır.

Yukarıdaki sonucu kullanarak aşağıdaki eşitsizlik elde edilir;

$$\begin{aligned} LEL(G) &= \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{\mu_i} = \sqrt{\mu_1} + \sum_{i=2}^{n-1} \sqrt{\mu_i} \\ &\geq \sqrt{\mu_1} + n - 2 + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{n-1} \ln \mu_i \\ &= \sqrt{\mu_1} + n - 2 + \frac{1}{2} \ln \prod_{i=2}^{n-1} \mu_i \\ &= \sqrt{\mu_1} + n - 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{t}{\mu_1} \\ &= \sqrt{\mu_1} + n - 2 + \frac{1}{2} [\ln t - \ln \mu_1] \\ &= \sqrt{\mu_1} + n - 2 + \frac{1}{2} \ln t - \frac{1}{2} \ln(\mu_1) \end{aligned}$$

Bu noktada Lemma 3.2 dikkate alınırsa buradan

$$h_1(x) = x + n - 2 + \frac{1}{2} \ln t - \ln x, \quad 1 \leq x \leq n$$

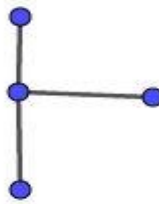
artan fonksiyonu için aşağıdaki eşitsizlik Lemma 3.2 ide kullanılarak ifade edilebilir.

$$h_1(x) \geq h_1(\sqrt{\Delta+1}) = \sqrt{\Delta+1} + n - 2 + \frac{1}{2} \ln t - \ln(\sqrt{\Delta+1}).$$

Böylece ispatımız tamamlanmış olur.

Sonuçlarımıza geçmeden önce bulduğumuz bu alt sınır bir örnekle incelenecektir.

Örnek 3.1



Şekil 3.1 Bir G grafi

Verilen G grafinin Laplacian spektral değerleri gerekli hesaplamalar sonucunda $(0,1,1,4)$ dir. Yine G grafinin A komşuluk matrisinin $\lambda_1 = 1,73'$ tür. Ayrıca, G grafi bir ağaç grafi olduğundan $t(G) = 1$ dir. $LEL(G) = 4$ kolaylıkla hesaplanır.

Teorem 3.1 e göre $LEL(G) \geq 3,14$ için alt sınırı elde edilir. Bizim alt sınırımız Teorem 3.3 e göre işlemler yapıldığında $LEL(G) \geq 3,30$ (yaklaşık olarak) bulunur. Görüldüğü gibi bizim değerimiz Teorem 3.1 e göre bazı graf örnekleri için daha iyi sonuç vermektedir.

Sonuç 3.4 T , n noktalı ve maksimum derecesi Δ olan bir ağaç olsun. Bu durumda

$$LEL(T) \geq \sqrt{\Delta+1} + n - 2 - \ln \sqrt{\Delta+1}$$

dir.

İspat: T bir ağaç ise $t = 1$ ve $m = n - 1$ dir. Buna göre sonuç açıktır.

Sonuç 3.5 U , n noktalı ve maksimum derecesi Δ olan bağlantılı bir tek devirli (unicyclic) graf olsun. Bu durumda,

$$LEL(U) \geq \sqrt{\Delta+1} + n - 2 + \ln \sqrt{3} - \ln \sqrt{\Delta+1}$$

dir.

İspat: U tek devirli grafi için $3 \leq t \leq n$ dir. Bu durumda sonuç açıkça görülmektedir.

Teorem 3.6 G , n noktalı ve baskınlık sayısı $\alpha = \alpha(G)$ olan bir graf olsun. Bu durumda

$$\mu_1(G) \geq \frac{n}{\alpha}$$

G bağlantılı ise eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul $\Delta(G) = n-1$ olmasıdır (Lu ve ark., 2005).

Teorem 3.7 G , $n \geq 2$ noktalı ve baskınlık sayısı $\alpha = \alpha(G)$ olan bir graf olsun. Bu durumda

$$LEL(G) \geq \sqrt{\frac{n}{\alpha}} + (n-2) + \frac{1}{2} \ln t - \ln \sqrt{\frac{n}{\alpha}}$$

dir.

İspat: G bağlantılı ve Laplacian özdeğerleri $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n = 0$ olan bir graf olsun. $s_2(x) = x-1-\ln(x)$, $x > 0$ fonksiyonunu düşünelim. Basit temel işlemler yardımıyla $s_2(x)$ fonksiyonu $x \geq 1$ için artan, $0 < x \leq 1$ aralığı için azalan olduğu görülür. Sonuç olarak $s_2(x) \geq s_2(1) = 0$ dır ve $x \geq 1 + \ln x$, $x > 0$ elde edilir. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul $x = 1$ olmasıdır. Yukarıdaki sonuçlar kullanılarak aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned} LEL(G) &= \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{\mu_i} = \sqrt{\mu_1} + \sum_{i=2}^{n-1} \sqrt{\mu_i} \\ &\geq \sqrt{\mu_1} + n - 2 + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{n-1} \ln \mu_i \\ &= \sqrt{\mu_1} + n - 2 + \frac{1}{2} \ln \prod_{i=2}^{n-1} \mu_i \\ &= \sqrt{\mu_1} + n - 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{t}{\mu_1} \\ &= \sqrt{\mu_1} + n - 2 + \frac{1}{2} [\ln t - \ln \mu_1] \\ &= \sqrt{\mu_1} + n - 2 + \frac{1}{2} \ln t - \frac{1}{2} \ln(\mu_1) \end{aligned}$$

Teorem 3.6 ele alınırsa,

$$h_2(x) = x + n - 2 + \frac{1}{2} \ln t - \ln x$$

$1 \leq x \leq n$ aralığı için artan bir fonksiyon olur. Yapılan hesaplamalar sonucunda

$$LEL(G) \geq \sqrt{\frac{n}{\alpha}} + (n-2) + \frac{1}{2} \ln t - \ln \sqrt{\frac{n}{\alpha}}$$

elde edilir.

Böylece ispat tamamlanmıştır.

Sonuç 3.8 T , $n \geq 2$ noktalı ve baskınlık sayısı $\alpha = \alpha(G)$ olan bir ağaç olsun. Bu durumda

$$LEL(T) \geq \sqrt{\frac{n}{\alpha}} + (n-2) - \ln \sqrt{\frac{n}{\alpha}}$$

dir.

İspat: T bir ağaç ise $t=1$ ve $m=n-1$ dir. Buna göre sonuç açıktır.

Sonuç 3.9 U , $n \geq 2$ noktalı ve baskınlık sayısı $\alpha = \alpha(G)$ olan bir tek devirli graf olsun. Bu durumda

$$LEL(U) \geq \sqrt{\frac{n}{\alpha}} + (n-2) + \frac{1}{2} \ln \sqrt{3} - \ln \sqrt{\frac{n}{\alpha}}$$

dir.

İspat : U tek devirli grafı için $3 \leq t \leq n$ dir. Bu durumda sonuç açıkça görülmektedir.

Teorem 3.10 G , çapı (diameter) D ve minimum köşe derecesi δ olan bağlantılı bir graf olsun. Bu durumda

$$\mu_1 \geq \frac{4D}{D+1}$$

ve

$$\mu_1 \geq \frac{(D+1)\delta + 2D}{D+1}$$

dir (Lu ve ark., 2007).

Teorem 3.11 G , çapı (diameter) D olan bağlantılı bir graf olsun. Bu durumda

$$LEL(G) \geq 2\sqrt{\frac{D}{D+1}} + n - 2 + \ln t - \ln 2\sqrt{\frac{D}{D+1}}$$

ve

$$LEL(G) \geq \sqrt{\frac{(D+1)\delta + 2D}{D+1}} + n - 2 + \ln t - \ln \sqrt{\frac{(D+1)\delta + 2D}{D+1}}$$

dir.

İspat: G bağlantılı ve Laplacian özdeğerleri $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n = 0$ olan bir graf olsun. $s_3(x) = x - 1 - \ln(x)$, $x > 0$ fonksiyonunu düşünelim. $s_3(x)$, $x \geq 1$ için artan ve $0 < x \leq 1$ için azalan bir fonksiyondur. Sonuç olarak $s_3(x) \geq s_3(1) = 0$ dır ve $x \geq 1 + \ln x$, $x > 0$ elde edilir. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul $x = 1$ olmasıdır. Yukarıdaki sonuçlar kullanılarak,

$$\begin{aligned} LEL(G) &= \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{\mu_i} = \sqrt{\mu_1} + \sum_{i=2}^{n-1} \sqrt{\mu_i} \\ &\geq \sqrt{\mu_1} + n - 2 + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{n-1} \ln \mu_i \\ &= \sqrt{\mu_1} + n - 2 + \frac{1}{2} \ln \prod_{i=2}^{n-1} \mu_i \\ &= \sqrt{\mu_1} + n - 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{t}{\mu_1} \\ &= \sqrt{\mu_1} + n - 2 + \frac{1}{2} [\ln t - \ln \mu_1] \\ &= \sqrt{\mu_1} + n - 2 + \frac{1}{2} \ln t - \frac{1}{2} \ln(\mu_1) \end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 3.10 dan $\mu_1 \geq \frac{4D}{D+1}$ ve $\mu_1 \geq \frac{(D+1)\delta + 2D}{D+1}$ eşitsizlikler kullanılarak

$$h_3(x) = x + n - 2 + \frac{1}{2} \ln t - \ln x$$

$1 \leq x \leq n$ aralığında artan bir fonksiyon olduğundan Laplacian-Tipi-Enerji için aşağıdaki alt sınır elde edilir:

$$LEL(G) \geq 2\sqrt{\frac{D}{D+1}} + n - 2 + \ln t - \ln 2\sqrt{\frac{D}{D+1}}$$

ve

$$LEL(G) \geq \sqrt{\frac{(D+1)\delta + 2D}{D+1}} + n - 2 + \ln t - \ln \sqrt{\frac{(D+1)\delta + 2D}{D+1}}$$

dir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 3.12 T , çapı (diameter) D olan bağlantılı bir ağaç olsun. Bu durumda

$$LEL(T) \geq 2\sqrt{\frac{D}{D+1}} + n - 2 - \ln 2\sqrt{\frac{D}{D+1}}$$

ve

$$LEL(T) \geq \sqrt{\frac{(D+1)\delta + 2D}{D+1}} + n - 2 - \ln \sqrt{\frac{(D+1)\delta + 2D}{D+1}}$$

dir.

İspat: T bir ağaç ise $t=1$ ve $m=n-1$ dir. Buna göre sonuç açıktır.

Sonuç 3.13 U , çapı (diameter) D olan bağlantılı bir tek devirli graf olsun. Bu durumda

$$LEL(U) \geq 2\sqrt{\frac{D}{D+1}} + n - 2 + \ln \sqrt{3} - \ln 2\sqrt{\frac{D}{D+1}}$$

ve

$$LEL(U) \geq \sqrt{\frac{(D+1)\delta + 2D}{D+1}} + n - 2 + \ln \sqrt{3} - \ln \sqrt{\frac{(D+1)\delta + 2D}{D+1}}$$

dir.

İspat : U tek devirli grafi için $3 \leq t \leq n$ dir. Bu durumda sonuç açıkça görülmektedir.

Şimdi Laplacian-Tipi Enerji için bazı parametrelere bağlı üst sınırlar verilecektir.

Teorem 3.14 G , $n > 1$ noktalı ve m kenarlı basit bağlantılı bir graf olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitsizliği sağlar:

$$LEL \leq \sqrt{\Delta + 1} + (n-2)^{\frac{3}{4}} \sqrt[4]{2m - (\Delta + 1)^2 + \sum_{i=1}^n [\deg(v_i)]^2}$$

(Faghani ve Pourhadi, 2018).

Lemma 3.15 G , $n \geq 2$ olan bağlantılı bir graf olsun. Bu durumda $\mu_2 = \dots = \mu_{n-1}$ ve $\mu_1 = 1 + \Delta$ olması için gerek yeter koşul $G \cong K_n$ ya da $G \cong K_{1,n-1}$ olmasıdır (Zhou, 2008).

Teorem 3.16 G , $n \geq 2$ köşeli, m kenarlı, maksimum derecesi Δ ve birinci Zagreb indeksi $M_1(G)$ olan bağlantılı bir graf olsun. Bu durumda

$$P = \sqrt{(n-2)(n-3) \left[(2m - (\Delta + 1))^2 - [M_1(G) + 2m - n^2] \right]}$$

olmak üzere

$$LEL(G) \leq \sqrt{n} + \sqrt{2m - (\Delta + 1) + P}$$

dir. Eşitlik olması için gerek ve yeter şart $G \cong K_n$ ya da $G \cong K_{1,n-1}$ olmasıdır.

İspat: G , Laplacian özdeğerleri $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n = 0$ olan bağlantılı bir graf olsun.

Cauchy-Shwarz eşitsizliği yardımı ile

$$\begin{aligned} LEL(G) &= \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{\mu_i} = \sqrt{\mu_1} + \sqrt{\sum_{i=2}^{n-1} \mu_i + 2 \sum_{2 \leq i < j \leq n-1} \sqrt{\mu_i \mu_j}} \\ &= \sqrt{\mu_1} + \sqrt{2m - \mu_1 + 2 \sum_{2 \leq i < j \leq n-1} \sqrt{\mu_i \mu_j}} \\ &= \sqrt{\mu_1} + \sqrt{2m - \mu_1 + \sqrt{(n-2)(n-3) \left[\left(\sum_{i=2}^{n-1} \mu_i \right)^2 - \sum_{i=2}^{n-1} \mu_i^2 \right]}} \\ &\leq \sqrt{\mu_1} + \sqrt{2m - \mu_1 + \sqrt{2(n-2)(n-3) \sum_{2 \leq i < j \leq n-1} \mu_i \mu_j}} \\ &= \sqrt{\mu_1} + \sqrt{2m - \mu_1 + \sqrt{(n-2)(n-3) \left[(2m - \mu_1)^2 - \left[\sum_{i=1}^{n-1} (\mu_i)^2 - \mu_1^2 \right] \right]}} \\ &= \sqrt{\mu_1} + \sqrt{2m - \mu_1 + \sqrt{(n-2)(n-3) \left[(2m - \mu_1)^2 - [M_1(G) + 2m - \mu_1^2] \right]}} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\Delta + 1 \leq \mu_1 \leq n \quad (3.1)$$

kullanarak aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir:

$$LEL(G) \leq \sqrt{n} + \sqrt{2m - \Delta - 1 + \sqrt{(n-2)(n-3) \left[(2m - \Delta - 1)^2 - [M_1(G) + 2m - n^2] \right]}}.$$

$P = \sqrt{(n-2)(n-3) \left[(2m - \Delta - 1)^2 - [M_1(G) + 2m - n^2] \right]}$ olarak eşitsizliği düzenlersek,

$$LEL(G) \leq \sqrt{n} + \sqrt{2m - \Delta - 1 + P}$$

bulunur.

Böylece ispatın birinci bölümü tamamlanmış olur.

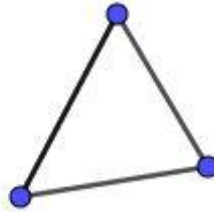
Şimdi yukarıdaki bütün eşitsizliklerin eşit olduğunu varsayalım. (3.1) deki eşitlikten,

$$\Delta + 1 = \mu_1 = n$$

ve $\mu_2 = \mu_3 = \dots = \mu_{n-1}$ elde ederiz. Lemma 3.15 den, $G \cong K_n$ ve $G \cong K_{1,n-1}$ dir.

Tersi kolaylıkla kontrol edilebilir.

Örnek 3.2



Şekil 3.2 K_3 tam graf

Şekilde verilen K_3 grafi için $LEL(K_3) = 2\sqrt{3}$ kolaylıkla hesaplanır. Aynı zamanda Teorem 3.16 da da istenilen değerler yerine yazılarak aynı sonuç elde edilir.

Teorem 3.14 e göre $LEL(K_3) = \sqrt{3} + 3$ bulunur. Görüldüğü üzere bizim bulduğumuz üst sınır daha iyi sonuç vermektedir.

Bu ve buna benzer örnekler çoğaltılabilir. Buna göre bizim sınırlarımızın birçok örnekte daha iyi sonuç verdiği görülmektedir.

Teorem 3.17 G , n noktalı, Δ maksimum nokta derecesi ve çapı D olan regüler olmayan bir bağlantılı graf olsun. Bu durumda

$$\mu_1 < 2\Delta - \frac{1}{nD}$$

dir (Li ve ark., 2010).

Teorem 3.18 G , n ($n \geq 3$) köşeli, m kenarlı, maksimum derecesi Δ , çapı D ve birinci Zagreb indeksi $M_1(G)$ olan bağlantılı regüler olmayan bir graf olsun. Bu durumda

$$P = \sqrt{(n-2)(n-3) \cdot \left[(2m - (\Delta+1))^2 - \left[M_1(G) + 2m - (2\Delta - \frac{1}{nD})^2 \right] \right]}$$

olmak üzere,

$$LEL(G) < \sqrt{2\Delta - \frac{1}{nD}} + \sqrt{2m - (\Delta+1) + P}$$

dir.

İspat: G regüler olmayan, Laplacian özdeğerleri $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n = 0$ olan bir graf olsun.

Cauchy-Shwarz eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} LEL(G) &= \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{\mu_i} = \sqrt{\mu_1} + \sqrt{\sum_{i=2}^{n-1} \mu_i + 2 \sum_{2 \leq i < j \leq n-1} \sqrt{\mu_i \mu_j}} \\ &= \sqrt{\mu_1} + \sqrt{2m - \mu_1 + 2 \sum_{2 \leq i < j \leq n-1} \sqrt{\mu_i \mu_j}} \\ &\leq \sqrt{\mu_1} + \sqrt{2m - \mu_1 + \sqrt{2(n-2)(n-3) \sum_{2 \leq i < j \leq n-1} \mu_i \mu_j}} \\ &= \sqrt{\mu_1} + \sqrt{2m - \mu_1 + \sqrt{(n-2)(n-3) \left[\left(\sum_{i=2}^{n-1} \mu_i \right)^2 - \sum_{i=2}^{n-1} \mu_i^2 \right]}} \\ &= \sqrt{\mu_1} + \sqrt{2m - \mu_1 + \sqrt{(n-2)(n-3) \left[(2m - \mu_1)^2 - \left[\sum_{i=1}^{n-1} (\mu_i)^2 - \mu_1^2 \right] \right]}} \\ &= \sqrt{\mu_1} + \sqrt{2m - \mu_1 + \sqrt{(n-2)(n-3) \left[(2m - \mu_1)^2 - \left[M_1(G) + 2m - \mu_1^2 \right] \right]}} \end{aligned}$$

elde edilir. Lemma 3.15 ve Teorem 3.17 yardımıyla,

$$\Delta + 1 \leq \mu_1 < 2\Delta - \frac{1}{nD}$$

ifade edilebilir.

Dolayısıyla,

$$P = \sqrt{(n-2)(n-3) \cdot \left[(2m - (\Delta + 1))^2 - \left[M_1(G) + 2m - \left(2\Delta - \frac{1}{nD} \right)^2 \right] \right]}$$

olmak üzere,

$$LEL(G) < \sqrt{2\Delta - \frac{1}{nD}} + \sqrt{2m - (\Delta + 1) + P}$$

elde edilir.

4. BİRİNCİ ZAGREB İNDEKSİ İÇİN BAZI ALT SINIRLAR

Birinci Zagreb indeksi, bu zamana kadar oldukça geniş olarak matematikçiler açısından çalışma konusu olmuştur. Çalışmamızın bu bölümünde birinci Zagreb indeksi için bazı alt sınırlar elde edilecektir. Bu sınırları elde ederken kullanılacak olan bazı temel tanımlamaları verelim.

Bu bölüm boyunca da basit ve bağlantılı graflarla çalışılacaktır.

$G = (V, E)$ n köşeli ve m kenarlı bir graf olsun. G bağlantılı grafında bulunan bağımsız döngülerin sayısına o grafın cyclomatic sayısı denir ve $\gamma = m - n + 1$ eşitliği ile elde edilir. Özel olarak, ağaçların, unicyclic grafların ve bicyclic grafların cyclomatic numarası sırası ile $\gamma = 0, 1, 2$ dir.

Birinci Zagreb indeksi için sınır elde ederken Narumi-Katayama indeksinden yararlanılacaktır. Narumi ve Katayama (Narumi ve Katayama, 1984) indeksi aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$NK = NK(G) = \prod_{i=1}^n \deg(v_i).$$

Bu bölümde, $v_i \in V(G)$ olmak üzere $\deg(v_i) = 1$ pendant noktalarının sayısı n_1 ile gösterilecektir.

i dereceli köşelerin sayısı n_i olmak üzere daha önceden Gutman ve ark. (Gutman ve ark., 2015) tarafından farklı bir yaklaşımla aşağıdaki eşitlikler tanımlanmıştır.

$$\sum_{i \geq 1} n_i = n \quad (4.1)$$

$$\sum_{i \geq 1} i n_i = 2m \quad (4.2)$$

$$\sum_{i \geq 1} i^2 n_i = M_1(G) \quad (4.3)$$

Şimdi cyclomatic numaraya bağlı olarak birinci Zagreb için alt sınırlar bulunacaktır.

Ayrıca bu bölümdeki çalışmalar 4. Uluslararası Hesaplamalı Matematik ve Mühendislik Bilimleri Konferansında 2019 yılında Antalya da sunulmuştur (Kaya ve Maden, 2019).

Teorem 4.1 G , n_1 pendant noktalı ve cyclomatic numarası γ olan bir bağlantılı graf olsun. Bu durumda

$$M_1(G) \geq 9n_1 + 16(\gamma - 1).$$

eşitsizliği vardır. Eşitlik olması için gerek ve yeter koşul pendant olmayan noktalarının derecesi 4 olan grafların bulunmasıdır (Gutman ve ark., 2015).

Teorem 4.2 G , n_1 pendant noktalı ve cyclomatic numarası γ olan bir graf olsun. Bu durumda

$$M_1(G) \geq 4(\gamma + n - 1) - n_1 \quad (4.4)$$

elde edilir.

İspat: (4.3) eşitliğinden (4.2) eşitliğini çıkaralım. Buradan,

$$\begin{aligned} M_1(G) - 2m &= \sum_{i \geq 1} i^2 n_i - \sum_{i \geq 1} i n_i \\ &= n_1 + 4n_2 + \sum_{i \geq 3} i^2 n_i - n_1 - 2n_2 - \sum_{i \geq 3} i n_i. \end{aligned}$$

elde edilir.

Temel matematiksel işlemler sonucunda

$$n_2 = \frac{1}{2} \left(M_1(G) - 2m - \sum_{i \geq 3} (i^2 - i) n_i \right). \quad (4.5)$$

elde edilir.

Basit temel hesaplamalar sonucunda aşağıdaki eşitliğe ulaşılır.

$$\begin{aligned} 2M_1(G) - 2m &= 2 \sum_{i \geq 1} i^2 n_i - \sum_{i \geq 1} i n_i \\ &= n_1 + 6n_2 + \sum_{i \geq 3} (2i^2 - i) n_i \end{aligned} \quad (4.6)$$

Şimdi yukarıda elde edilen n_2 yi (4.6) da yerine koyalım. Buradan

$$M_1(G) \geq 4m - n_1.$$

elde edilir. $\gamma = m - n + 1$ yerine yazılarak

$$M_1(G) \geq 4(\gamma + n - 1) - n_1$$

istenilen sonucuna ulaşılır.

Sonuç 4.3 T , n_1 pendant noktalı ve cyclomatic numarası γ olan bir ağaç olsun. Bu durumda

$$M_1(T) \geq 4(n-1) - n_1$$

elde edilir.

İspat: Ağaçlar için $\gamma = 0$ olduğundan istenilen eşitsizlik, Teorem 4.2 de γ yerine yazılarak elde edilir.

Sonuç 4.4 U , bağlantılı, n_1 pendant noktalı ve cyclomatic numarası γ olan bir tek devirli graf olsun. Bu durumda

$$M_1(U) \geq 4n - n_1.$$

elde edilir.

İspat: Tek devirli graflar için $\gamma = 1$ olduğundan eşitsizlik, Teorem 4.2 de γ yerine yazılarak elde edilir.

Sonuç 4.5 B , bağlantılı, n_1 pendant noktalı ve cyclomatic numarası γ olan bir iki devirli graf olsun. Bu durumda

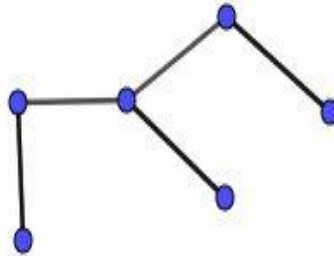
$$M_1(B) \geq 4(n+1) - n_1.$$

elde edilir.

İspat: İki devirli graflar için $\gamma = 2$ olduğundan eşitsizlik, Teorem 4.2 de γ yerine yazılarak elde edilir.

Bu sonuçlarımızı örnekler üzerinde inceleyelim. Bizim bulduğumuz sınırlar ile Teorem 4.1 de bulunan sınırı karşılaştıralım.

Örnek 4.1



Şekil 4.1 Bir ağaç graf

Graf nokta sayısı $n = 6$, pendant nokta sayısı $n_1 = 3$. Teorem 4.2 e göre

$$M_1(T) = 20 \geq 4(n-1) - n_1 = 17$$

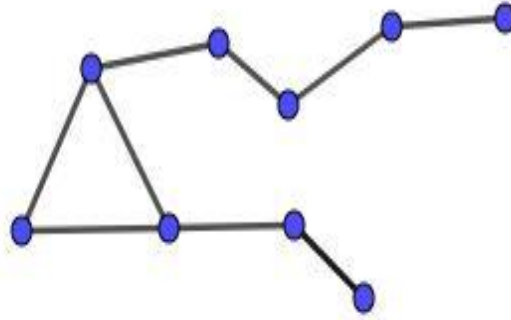
dir.

Teorem 4.1 e göre

$$M_1(T) = 20 \geq 9n_1 + 16(\gamma-1) = 11$$

dir. Bizim bulduğumuz sonuç bu örnek için daha iyidir.

Örnek 4.2



Şekil 4.2 Bir tek devirli (unicyclic) graf

Nokta sayısı $n = 9$ ve pendant nokta sayısı $n_1 = 2$ dir. Bizim sonucumuza göre

$$M_1(U) = 40 \geq 4n - n_1 = 34$$

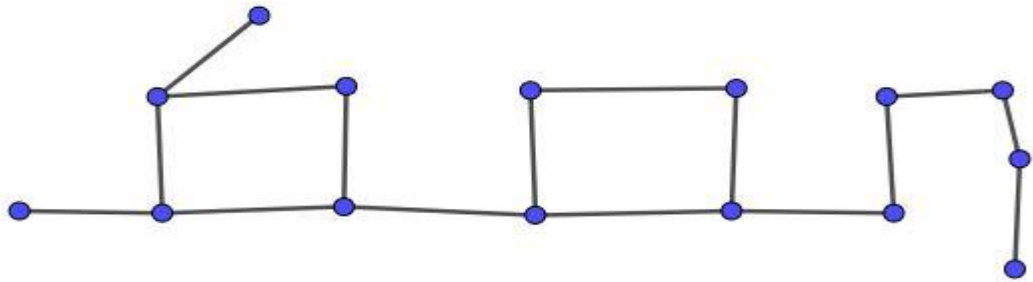
dir.

Teorem 4.1 e göre

$$M_1(U) = 40 \geq 9n_1 + 16(\gamma-1) = 18$$

dir. Bizim bulduğumuz sonuç daha iyidir.

Örnek 4.3



Şekil 4.3 Bir iki devirli (bicyclic) graf

Şekil 4.3 te verilen iki devirli graf için nokta sayısı $n = 15$ ve pendant nokta sayısı $n_1 = 3$ tür. Bizim sonucumuza göre

$$M_1(B) = 76 \geq 4(n+1) - n_1 = 61$$

dir.

Teorem 4. 1 e göre

$$M_1(B) = 76 \geq 9n_1 + 16(\gamma - 1) = 43$$

dir. Bizim bulduğumuz sonuç daha iyidir.

Örneklerdeki incelemelere göre birçok bu durumları sağlayan örnekler elde edilebilir.

Şimdi bu kısımda Narumi-Katayama indeksine bağlı sınırlar verilecektir. Bölümün başında Narumi-Katayama indeksinin tanımı verilmiş idi. İlk olarak çalışmamızda yardımcı olacak tanımlamalar verilecektir.

Narumi-Katayama indeksi eşitliğinin her iki tarafının logaritması alınarak $l(G) = \ln NK(G)$ eşitliği elde edilmiştir (Gutman ve Ghorbani, 2012). Eşitlik düzenlenerek

$$l = l(G) = \sum_{i=1}^{n-1} \ln d_i$$

ifadesine ulaşılır.

Daha önce de belirttiğimiz gibi n_i , i dereceli noktaların sayısıydı. $L(G)$ için aşağıdaki eşitlik Gutman ve ark. (Gutman ve Ghorbani, 2012) tarafından elde edilmiştir.

$$l = l(G) = \sum_{i=2}^{n-1} (\ln i)n_i. \quad (4.7)$$

Teorem 4.6 G bağlantılı ve cyclomatic numarası γ olan bir graf olsun. Bu durumda

$$M_1(G) \geq \frac{2}{\ln 2} l(G) + 2(\gamma + n - 1)$$

elde edilir.

İspat: (4.7) deki Narumi-Katayama indeksinin logaritması aşağıdaki gibi ele alınsın:

$$l = l(G) = \sum_{i=2}^{n-1} (\ln i)n_i = n_2 \ln 2 + \sum_{i=3}^{n-1} (\ln i)n_i. \quad (4.8)$$

(4.5) deki n_2 değerini (4.8) deki eşitlikte yazılırsa,

$$l(G) = \ln 2 \left[\frac{1}{2} \left(M_1(G) - 2m - \sum_{i=3}^{n-1} (i^2 - i) \right) \right] + \sum_{i=3}^{n-1} (\ln i) n_i$$

elde edilir.

Gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra,

$$M_1(G) = \frac{2}{\ln 2} \left[l(G) + m \ln 2 - \left(\sum_{i=3}^{n-1} \ln i - \frac{(i^2 - i)}{2} \ln 2 \right) n_i \right].$$

bulunur.

Yukarıdaki eşitlikten bazı terimler atılarak

$$M_1(G) \geq \frac{2}{\ln 2} l(G) + 2(\gamma + n - 1)$$

eşitsizliği elde edilir. İspat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.7 T bir ağaç olsun. Bu durumda

$$M_1(T) \geq \frac{2}{\ln 2} l(T) + 2(n - 1)$$

elde edilir.

İspat: T ağacı için $\gamma = 0$ olduğundan Teorem 4.6 den sonuç açık olarak görülmektedir.

Sonuç 4.8 U , cyclomatic numarası γ olan bağlantılı bir tek devirli graf olsun. Bu durumda

$$M_1(U) \geq \frac{2}{\ln 2} l(U) + 2n$$

elde edilir.

İspat: U bağlantılı tek devirli grafı için $\gamma = 1$ olduğundan yerine yazılarak sonuç görülmektedir.

Sonuç 4.9 B , cyclomatic numarası γ olan iki devirli graf olsun. Bu durumda

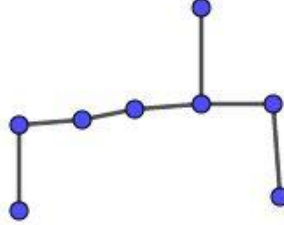
$$M_1(B) \geq \frac{2}{\ln 2} l(B) + 2(n + 1)$$

elde edilir.

İspat: B , bağlantılı iki devirli grafi için cyclomatic numarası $\gamma = 2$ olduğundan yerine yazılarak açıkça görülmektedir.

Bulduğumuz bu sonuçları örnekler üzerinde inceleyelim.

Örnek 4.4



Şekil 4.4 Bir ağaç grafi

Şekil 4.4 deki ağacın nokta sayısı $n = 8$ ve pendant nokta $n_1 = 2$ dir.

Teorem 4.6 e göre

$$M_1(T) = 28 \geq \frac{2}{\ln 2} \ln NK(T) + 2(n-1) \approx 19.17$$

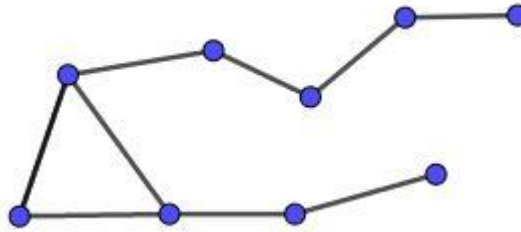
elde edilir.

Teorem 4.1 e göre

$$M_1(T) = 28 \geq 9n_1 + 16(\gamma - 1) = 2 \text{ dir.}$$

Bizim elde ettiğimiz sonuç daha iyidir.

Örnek 4.5



Şekil 4.5 Bir tek devirli grafi

Şekil 4.5 deki tek devirli grafi için $n = 9$ ve $n_1 = 2$ dir.

Teorem 4.6 ya göre

$$M_1(U) = 40 \geq \frac{2}{\ln 2} \ln NK(U) + 2n \approx 23.17$$

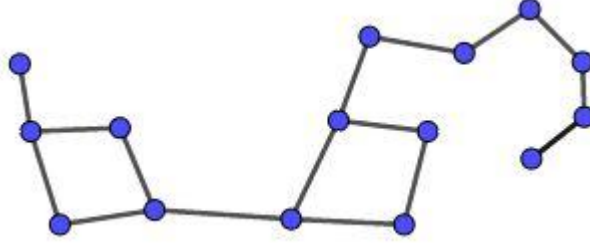
bulunur.

Teorem 4.1 e göre

$$M_1(U) = 40 \geq 9n_1 + 16(\gamma - 1) = 18$$

elde edilir.

Örnek 4.6



Şekil 4.6 Bir çift devirli graf

Şekil 4.6 deki İki devirli grafi için $n = 15$ ve $n_1 = 2$ dir.

Teorem 4.6 ya göre

$$M_1(B) = 74 \geq \frac{2}{\ln 2} \ln NK(B) + 2(n+1) \approx 37.16$$

elde edilir.

Teorem 4.1 e göre

$$M_1(B) = 74 \geq 9n_1 + 16(\gamma - 1) = 34$$

dir. Görüldüğü gibi bizim bulduğumuz sonuç daha iyidir.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

5.1 Sonuçlar

Bu tezde öncelikli olarak graf teoride bulunan temel bilgi ve kavramlar verilmiştir. Graflardaki Laplacian-Tipi Enerji için yeni alt ve üst sınırlar elde edilmiştir. Daha sonra birinci Zagreb indeksi için alt sınırlar elde edilmiştir. Elde edilen bu alt sınırlar bazı özel parametrelere bağlı olarak verilmiştir. Elde edilen bütün bu sınırlar örnekler üzerinde de incelenmiştir.

5.2 Öneriler

Enerji kavramı graf teoride çalışılan önemli konulardan biridir. Graflardaki Laplacian-Tipi Enerji kavramı için yeni alt ve üst sınırlar elde edilebilir. Hatta elde edilen bu alt ve üst sınırlar farklı topolojik indekslere bağlı olabilir. Yine birinci Zagreb indeksi için farklı parametrelere bağlı sınırlar bulunabilir.

KAYNAKLAR

- Aigner, M. ve Ziegler, G. M., 1998, Proofs from THE BOOK, *Springer-Verlag*, p. 141-146.
- Alikhani, S. ve Peng, Y. H., 2014, Introduction to domination polynomial of a graph, *Ars Combinatoria*, 114, 257-266.
- Bondy, J. A. ve Murty, U. S. R., 1976, Graph Theory with Applications, *North-Holland, New York. Amsterdam. Oxford*, p., p.
- Buckley, F. ve Harary, F., 1990, Distance in Graphs, *Addison-Wesley*, Redwood, p., p.
- Burcu Bozkurt, Ş., Dilek Güngör, A., Gutman, I. ve Sinan Çevik, A., 2010, Randić matrix and randić energy, *Match*, 64 (1), 239-250.
- Cangül, I. N., 2017, Graf Teori-I Temel Konular, *Bursa-Turkey, Dora*, p., p.
- Chung, F. R. K., 1997, Spectral Graph Theory *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*, American Mathematical Society, p., p.
- Cvetkovic, D., Doob, M. ve Sachs, H., 1980, Spectra of graphs- theory and Application, *New York, p.*, Academic Press, p.
- Das, K. C. ve Mojallal, S. A., 2013, Upper Bounds for the Energy of Graphs, *Match-Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, 70 (2), 657-662.
- Das, K. C., Mojallal, S. A. ve Gutman, I., 2013, Improving McClellands lower bound for energy *MATCH Commun. Math. Compot. Chem.*, 70, 663-668.
- Das, K. C., Gutman, I. ve Cevik, A. S., 2014, On the Laplacian-energy-like invariant, *Linear Algebra and Its Applications*, 442, 58-68.
- Das, K. C. ve Mojallal, S. A., 2014, On Laplacian energy of graphs, *Discrete Mathematics*, 325 (1), 52-64.
- Das, K. C. ve Mojallal, S. A., 2016, On Energy and Laplacian Energy of Graphs, *Electronic Journal of Linear Algebra*, 31, 167-186.
- Erdos, P., Pach, J., Pollack, R. ve Tuza, Z., 1989, Radius, Diameter, and Minimum Degree, *Journal of Combinatorial Theory Series B*, 47 (1), 73-79.
- Estrada, E., Torres, L., Rodríguez, L. ve Gutman, I., 1998, An atom-bond connectivity index: Modelling the enthalpy of formation of alkanes, *Indian Journal of Chemistry - Section A Inorganic, Physical, Theoretical and Analytical Chemistry*, 37 (10), 849-855.
- Euler, L., 1736, Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis *Comment. Academiae Sci. I. Petropolitanae*, 8, 128-140.
- Faghani, M. ve Pourhadi, E., 2018, A Note on the Bounds of Laplacian-Energy-Like Invariant, *Iranian Journal of Mathematical Chemistry*, 9 (2), 137-147.
- Fan, K., 1951, Maximum properties and inequalities for the eigenvalues of completely continuous operators *Proc. N. A. S.*, p. 760-766.
- Fath-Tabar, G. H., 2011, The Szeged energy of fullerene graph. 7th Slovenian International Conference on Graph Theory Bled, Slovenia.
- Gross, J. L. ve Yellen, J., 1999, Graph Theory and Its Applications, *U. S.*, Chapman and Hall/ CRC Press, p.
- Guo, J. M., 2008, Sharp upper bounds for total pi-electron energy of alternant hydrocarbons, *Journal of Mathematical Chemistry*, 43 (2), 713-718.
- Gutman, I. ve Trinajstić, N., 1972, Graph theory and molecular orbitals. Total π -electron energy of alternant hydrocarbons, *Chemical Physics Letters*, 17 (4), 535-538.

- Gutman, I., Ruščić, B., Trinajstić, N. ve Wilcox Jr, C. F., 1975, Graph theory and molecular orbitals. XII. Acyclic polyenes, *The Journal of Chemical Physics*, 62 (9), 3399-3405.
- Gutman, I., 1978, The energy of a graph, *Ber. Math.-Statist. Sect. Forschungszentrum Graz*, 103, 1-22.
- Gutman, I. ve Polansky, O. E., 1986, *Mathematical Concepts in Organic Chemistry Berlin, p.*, Springer, p.
- Gutman, I. ve Das, K. C., 2004, The first Zagreb index 30 years after, *Match-Communications in Mathematical and in Computer Chemistry* (50), 83-92.
- Gutman, I. ve Zhou, B., 2006, Laplacian energy of a graph, *Linear Algebra and Its Applications*, 414 (1), 29-37.
- Gutman, I., Zhou, B. ve Furtula, B., 2010, The Laplacian-energy Like Invariant is an Energy Like Invariant, *Match-Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, 64 (1), 85-96.
- Gutman, I. ve Ghorbani, M., 2012, Some properties of the Narumi-Katayama index, *Applied Mathematics Letters*, 25 (10), 1435-1438.
- Gutman, I. ve Das, K. C., 2013, Estimating the total pi-electron energy, *Journal of the Serbian Chemical Society*, 78 (12), 1925-1933.
- Gutman, I., Jamil, M. K. ve Akhter, N., 2015, Graphs with Fixed Number of Pendent Vertices and Minimal First Zagreb Index, *Transactions on Combinatorics*, 4 (1), 43-48.
- Gutman, I. ve Li, X., 2016, *Graph Energies -Theory and Applications*, Univ. Kragujevac, Kragujevac, p.
- Harary, F., 1969, *Graph Theory Reading, Mass, Addison-Wesley* p. p.
- Hardy, G. H., Littlewood, J. E. ve Polya, G., 1934, *Inequalities London*, Cambridge University Press, p. p.
- Hartsfield, N. ve Ringel, G., 2003, *Pearls in Graph Theory: A Comprehensive Introduction Courier Dover Publications* p. p. 100.
- Horn, R. A. ve Johnson, C. R., 1985, *Matrix Analysis, New York, Cambridge Univ. Press*, p. p.
- Jahanbani, A., 2018, Lower bounds for the energy of graphs, *Akce International Journal of Graphs and Combinatorics*, 15 (1), 88-96.
- Kaya, B. ve Maden, A. D., 2018, Some Bounds for Laplacian-Like-Energy. *3rd International Conference on Computational Mathematics and Engineering Sciences, CMES*. Girne-Cyprus.
- Kaya, B. ve Maden, A. D., 2019, Some Lower Bounds for First Zagreb Index. *4th International Conference on Computational Mathematics and Engineering Sciences, CMES*. Antalya-Turkey.
- Khalifeh, M. H., Yousefi-Azari, H., Ashrafi, A. R. ve Wagner, S. G., 2009, Some new results on distance-based graph invariants, *European Journal of Combinatorics*, 30 (5), 1149-1163.
- Koolen, J. H. ve Moulton, V., 2001, Maximal energy graphs, *Advances in Applied Mathematics*, 26 (1), 47-52.
- Li, J. X., Shiu, W. C. ve Chang, A., 2010, The Laplacian Spectral Radius of Graphs, *Czechoslovak Mathematical Journal*, 60 (3), 835-847.
- Li, X., Shi, Y. ve Gutman, I., 2012, Graph energy, p.
- Liu, B. L., Huang, Y. F. ve You, Z. F., 2011, A Survey on the Laplacian-Energy-Like Invariant, *Match-Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, 66 (3), 713-730.

- Liu, J. ve Liu, B., 2008, A Laplacian-energy-like invariant of a graph, *Match-Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, 59 (2), 355-372.
- Lu, M., Liu, H. Q. ve Tian, F., 2005, Bounds of Laplacian spectrum of graphs based on the domination number, *Linear Algebra and Its Applications*, 402, 390-396.
- Lu, M., Zhang, L. Z. ve Tian, F., 2007, Lower bounds of the Laplacian spectrum of graphs based on diameter, *Linear Algebra and Its Applications*, 420 (2-3), 400-406.
- Maden, A. D., Cevik, A. S., Cangul, I. N. ve Das, K. C., 2013, On the Kirchhoff matrix, a new Kirchhoff index and the Kirchhoff energy, *Journal of Inequalities and Applications*.
- Manvel, B., 1969, Reconstruction of unicyclic graphs, In: Proof Techniques in Graph Theory, Eds: Harary, F., New York, Academic Press, p. p. 103- 107.
- McClelland, B. J., 1971, Properties of the latent roots of a matrix: the estimation of -4-electron energies, *The Journal of Chemical Physics*, 54 (2), 635-639.
- Merris, R., 1994, Laplacian Matrices of Graphs - a Survey, *Linear Algebra and Its Applications*, 198, 143-176.
- Nadjafi-Arani, M. J., 2011, Sharp Bounds on the PI and Vertex PI Energy of Graphs, *Match-Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, 65 (1), 123-130.
- Narumi, H. ve Katayama, M., 1984, Simple Topological index, A newly devised index characterizing the topological nature of structural isomers of saturated hydrocarbons, *Memoirs of the Faculty of Engineering, Hokkaido University*, 16, 209-214.
- Patra, K. L. ve Sahoo, B. K., 2017, Bounds for the Laplacian spectral radius of graphs, *Electronic Journal of Graph Theory and Applications*, 5 (2), 276-303.
- Rad, N. J., Jahanbani, A. ve Gutman, I., 2018, Zagreb Energy and Zagreb Estrada Index of Graphs, *Match-Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, 79 (2), 371-386.
- Skiena, S., 1990, Implementing Discrete Mathematics: Combinatorics and Graph Theory With Mathematica, Reading, MA, Addison-Wesley, p. p.
- Tomescu, I., Jamil, M. K. ve Jamil, N. A. M. K., 2015, Extremal Degree-Product Indices of Graphs with Fixed Number of Pendant Vertices and Cyclomatic Number, *International Letters of Chemistry, Physics and Astronomy*, Vol. 59, pp. 53-61.
- Wang, W. Z. ve Luo, Y. F., 2012, On Laplacian-energy-like invariant of a graph, *Linear Algebra and Its Applications*, 437 (2), 713-721.
- Wiener, H., 1947, Structural Determination of Paraffin Boiling Points, *Journal of the American Chemical Society*, 69 (1), 17-20.
- Zhou, B., 2004, Energy of a graph, *Match-Communications in Mathematical and in Computer Chemistry* (51), 111-118.
- Zhou, B. ve Gutman, I., 2007, On Laplacian energy of graphs, *Match-Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, 57 (1), 211-220.
- Zhou, B., 2008, On sum of powers of the Laplacian eigenvalues of graphs, *Linear Algebra and Its Applications*, 429 (8-9), 2239-2246.
- Zhu, B. X., 2011, The Laplacian-energy like of graphs, *Applied Mathematics Letters*, 24 (9), 1604-1607.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Burcu KAYA
Uyruğu : T.C
Doğum Yeri ve Tarihi : ANTALYA/ 1988
Telefon : 0553 872 14 90
Faks : -
e-mail : Kayabrc07@gmail.com

EĞİTİM

Derece	Adı, İlçe, İl	Bitirme Yılı
Lise	: Karatay Süper Lisesi, Kepez, Antalya	2006
Üniversite	: İstanbul Üniversitesi, Beyazıt, İstanbul	2010
Yüksek Lisans	: Selçuk Ünivesitesi, Selçuklu, Konya	
Doktora	:	

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görevi
2015	MEB	Matematik Öğretmeni

UZMANLIK ALANI

YABANCI DİLLER

İngilizce

BELİRTMEK İSTEĞİNİZ DİĞER ÖZELLİKLER

YAYINLAR