



TOPOLOJİK SIRALI UZAYLAR ÜZERİNE

Zafer POLAT

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Dr. Öğretim Üyesi Abdulgani ŞAHİN

AĞRI-2019

(Her hakkı saklıdır.)

T.C.
AĞRI İBRAHİM ÇEÇEN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Zafer POLAT

TOPOLOJİK SIRALI UZAYLAR ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TEZ YÖNETİCİSİ
Dr. Öğr. Üyesi Abdulgani ŞAHİN

AĞRI-2019

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE

Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğine göre hazırlamış olduğum “**Topolojik Sıralı Uzaylar Üzerine**” adlı tezimin tamamen kendi çalışmam olduğunu ve her alıntıya kaynak gösterdiğimi taahhüt eder, tezimin kâğıt ve elektronik kopyalarının Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü arşivlerinde aşağıda belirttiğim koşullarda saklanmasına izin verdiğimi onaylarım.

Lisansüstü Eğitim-Öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim.

- Tezimin tamamı her yerden erişime açılabilir.
- Tezim sadece Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi yerleşkelerinden erişime açılabilir.
- Tezimin yıl süreyle erişime açılmasını istemiyorum. Bu sürenin sonunda uzatma için başvuruda bulunmadığım takdirde, tezimin tamamı her yerden erişime açılabilir.

16/05/2019

Zafer POLAT

TEZ KABUL VE ONAY TUTANAĞI
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE

.....danışmanlığında,
tarafından hazırlanan bu çalışma/...../..... tarihinde aşağıdaki jüri tarafından.
..... Anabilim Dalı'nda
.....tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan :	İmza:
Jüri Üyesi :	İmza:
Jüri Üyesi :	İmza:
Jüri Üyesi :	İmza:
Jüri Üyesi :	İmza:

Yukarıdaki imzalar adı geçen öğretim üyelerine ait olup;

Enstitü Yönetim Kurulunun .../.../201.. tarih ve / nolu kararı ile
onaylanmıştır.

...../...../.....
Prof. Dr. İbrahim HAN
Enstitü Müdürü

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ
TOPOLOJİK SIRALI UZAYLAR ÜZERİNE
Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Abdulgani ŞAHİN
2019, 50 sayfa
Jüri: Doç. Dr. Havva Kavurmacı ÖNALAN
Dr. Öğr. Üyesi Kadirhan POLAT
Dr. Öğr. Üyesi Abdulgani ŞAHİN

Bu tez çalışmasında N. Levine' in tanımladığı genelleştirilmiş kapalı kümeler kavramı temel olarak ele alınmıştır. Topolojik sıralı uzaylarda genel kapalı küme ve bunun üzerine inşa edilen bazı özel kapalı küme sınıflarının ne zaman çakıştığı sorusuna cevap aranmıştır. Ayrıca, T_1 uzayından daha zayıf ve T_0 uzayından daha güçlü olan bazı ayırma aksiyomları incelenmiştir.

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümünde kısa bir tarihsel taslak sunulduktan sonra ikinci bölümde yapılan çalışmalar için temel teşkil eden gerekli bilgi ve kavramlar verilmiştir. Üçüncü bölümde genelleştirilmiş kapalı (g -kapalı) kümeler tanıtıldı ve g -kapalı kümelerin topolojik özellikleri karakterize edildi. Ayrıca topoloji ve sıralama kavramı arasındaki ilişkiye değinildi. Dördüncü bölümde ilgili kapalı kümeler ve ayırma aksiyomları üzerindeki araştırma bulguları verildi ve örnekleri sunuldu. Son bölümde ise elde edilen sonuçlar üzerinde tartışıldı.

2019, 50 sayfa

Anahtar sözcükler: g -açık küme, g -kapalı küme, g^* -kapalı küme, topolojik sıralı uzay, $T_{1/2}$ uzayı.

ABSTRACT

MASTER
ON TOPOLOGICAL ORDERED SPACES
Advisor: Dr. Teaching Member Abdulgani ŞAHİN
2019, Page:50
Jury: Assoc. Prof. Dr. Havva Kavurmacı ÖNALAN
Dr. Teaching Member Kadirhan POLAT
Dr. Teaching Member Abdulgani ŞAHİN

In this thesis, the concept of generalized closed sets defined by N. Levine have been considered as the basis. The answer to the question of when in topological ordered spaces the general closed set and classes of some special closed set built on it coincided has been investigated. Furthermore, some separation axioms which are weaker than T_1 space and stronger than T_0 space have been investigated.

This study consists of five chapters. After a brief historical outline has been presented in the introduction, the necessary information and concepts have been given as the basis for the studies in the second chapter. In the third chapter, generalized closed (g -closed) sets have been introduced and the topological properties of the g -closed sets have been characterized. In addition, the relationship between topology and the concept of order has been mentioned. In the fourth chapter, research findings on related closed sets and separation axioms have been indicated and examples have been presented. In the last section, the results obtained have been discussed.

2019, 50 pages

Keywords: g -open set, g -closed set, g^* -closed set, topological ordered space, $T_{1/2}$ space.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans eğitiminin boyunca, insani ve ahlaki değerleri ile örnek edindiğim, yanında çalışmaktan onur duyduğum, benden bilgi ve deneyimlerini esirgemeyen, kıymetli bilgileriyle çalışmamda etkin katkısı bulunan, çalışmalarımın tamamlanabilmesi için bana her türlü desteği sunan çok değerli ve hümanist danışman hocam, Dr. Öğr. Üyesi Abdulgani ŞAHİN' e teşekkürlerimi ve şükranlarımı sunarım.

Eğitim hayatımın tüm süreçlerinde her türlü destekleriyle beni hiç yalnız bırakmayan aileme sonsuz teşekkür ederim.

08/05/2019

Zafer POLAT

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	İİ
ABSTRACT.....	İİİ
TEŞEKKÜR.....	İV
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	Vİ
ŞEKİL DİZİNİ	İX
1. GİRİŞ.....	1
2. KURAMSAL TEMELLER	5
3. MATERYAL VE YÖNTEM	11
3.1. Genelleştirilmiş Kapalı Kümeler.....	11
3.2. Sıralı Kümeler	18
3.3. Topolojik Sıralı Uzaylar	19
3.3.1. Kapalı sıralama ve konveks topoloji	20
3.3.2. Normal sıralı uzaylar	23
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	26
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	47
KAYNAKLAR	49
ÖZGEÇMİŞ	50

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$<$	Küçüktür
$>$	Büyüktür
\leq	Küçük veya Eşittir
\geq	Büyük veya Eşittir
$=$	Eşittir
\subseteq	Alt Kümesi veya Eşit
\supseteq	Kapsar veya Eşit
\cup	Birleşim
\cap	Kesişim
\in	Elemanıdır
\notin	Elemanı değildir
\ni	Öyle ki
\exists	En az bir
\emptyset	Boş küme
\Rightarrow	Gerek şart
\Leftarrow	Yeter şart
\Leftrightarrow	Ancak ve ancak
$[x, \rightarrow]$	x noktasına eşit ya da büyük olan noktaların kümesi
$[\leftarrow, x]$	x noktasına eşit ya da küçük olan noktaların kümesi
$\times \{A_i: i \in I\}$	A_i lerin kartezyen çarpımı
ρ	Bir topoloji
σ	Bir topoloji
τ	Bir topoloji

\mathcal{T}	Bir topoloji
\mathcal{T}_A	Alt topoloji
Φ	Bir açık örtü
A	Bir küme
A^0	A kümesinin içi
\bar{A}	A kümesinin kapanışı
A^t	A kümesinin tümleyeni
\mathcal{A}	Açık küme
\mathcal{B}	Bir topolojiye ait taban
$c(X)$	X kümesini kapsayan en küçük konveks küme
$d(a)$	a noktasına eşit ya da küçük olan noktaların kümesi
$d(X)$	X kümesini kapsayan en küçük azalan küme
$D(Z)$	Z kümesini kapsayan en küçük kapalı azalan küme
$D(x_0, \delta)$	x_0 merkezli δ yarıçaplı açık küme
$D(f(x_0), \epsilon)$	$f(x_0)$ merkezli ϵ yarıçaplı açık küme
\mathcal{D}	Bir topolojiye ait alt taban
E	Boş olmayan bir küme
E^2	$E \times E$
F	Bir küme
$f _A$	f fonksiyonun A kümesine kısıtlanması
G	Bir küme
H	Bir küme
$I(Z)$	Z kümesini kapsayan en küçük kapalı artan küme
$i(a)$	a noktasına eşit ya da büyük olan noktaların kümesi
$i(X)$	X kümesini kapsayan en küçük artan küme

K	Kapalı küme
\mathcal{K}	Kapalı kümeler ailesi
N	Komşuluk
$\mathcal{N}(x)$	x noktasının komşuluklarının ailesi
\mathcal{N}_x	x noktasını eleman kabul eden açık kümelerin ailesi
$P(X)$	X kümesinin kuvvet kümesi
\mathcal{R}	Bağıntı
\mathbb{R}	Reel sayılar kümesi
U	Bir küme
\mathcal{U}	Reel sayılar kümesinin alışılmış topolojisi
$U(x)$	x noktasının bir komşuluğu
$U(y)$	y noktasının bir komşuluğu
X	Boş olmayan bir küme
X^2	$X \times X$
(X, \mathcal{T})	Bir topolojik uzay
(X, \mathcal{T}, \leq)	Bir topolojik sıralı uzay
(X, \mathcal{T}_A)	Alt topolojik uzay
$X \times Y$	X ile Y kümelerinin kartezyen çarpımı
$(X - A)^0$	A kümesinin dışı
$X - F$	X fark F
Y	Bir küme

ŞEKİL DİZİNİ

Şekil 3.1. $E \times F$ üzerindeki çarpım topolojisine göre bir X açık kümesi.....20



1. GİRİŞ

Limit ve süreklilik kavramlarına bağlı olan bir topolojik yapı düşüncesi, alan hesabı ve şekillerin hareketi gibi geometri ve mekaniğin en eski problemleriyle birlikte ortaya çıkmıştır. Gauss, sonsuz süreçlerin kullanımının mantıklılığı hakkında düşünen ilk kişiydi. Topolojik uzay fikrini bağımsız olarak çalışmaya teşebbüs eden ve onun oldukça geniş bir öneme sahip olduğunu sezinen ilk matematikçi Riemann' dı (Nachbin 1965). Bununla birlikte, topolojinin bu yönde genişlemesinin mümkün olması için bu yeni disipline özgü özel durumlarla ilgili deneyim ve bilgi gerekiyordu. Daha sonra Cantor' un 1874 yılındaki araştırmaları geldi. Cantor bu çalışmalarında yaptığı ve ileri sürdüğü yeniliklerin tamamından dolayı çağdaşlarının muhalefetiyle karşı karşıya kaldı. Bu araştırmalar, kısmen Fourier serilerinin yakınsaması ile ilgili zor soruları analiz etme arzusunun esinlenmiştir.

Reel sayılar teorisi, Dedekind ve Cantor tarafından eş zamanlı olarak sağlam bir temel üzerine kurulmuştu. Küme, yığılma noktası vb. gibi kavramların sistematik olarak incelenmesi, Cantor'un çalışmasıyla bağlantılıdır. Reel sayı doğrusunun topolojisi ve p -boyutlu Öklid uzayının topolojisi üzerinde yapılan araştırmalara paralel olarak, sadece temel geometri anlamındaki nokta kümeleri için değil, aynı zamanda elemanları eğriler, yüzeyler ve bunlar üzerindeki tüm fonksiyonlar olan kümeler için de aynı yöntemler kullanılmaya çalışılmıştır.

Yüzyılımızın başlarında-daha sonra Von Neumann (1927) tarafından aksiyomatik olarak tanımlanacak olan- Hilbert uzaylarının tanıtılmasıyla çığır açan bir ilerleme süreci sağlandı. Şüphesiz bugün bu uzaylar, bilinen bu tür uzayların tüm örnekleri arasındaki sonsuz boyutlu topolojik uzayların en önemli ve verimli örneğidir. Vektörlerin toplamı, bir skaler ile bir vektörün çarpımı ve iki vektörün skaler çarpımı kavramlarını içeren zengin yapıları vasıtasıyla bu Hilbert uzayları, geometrik zarafetleriyle olası analitik uygulamaların bir etkileyici çeşitliliğini birleştirmektedir.

Öklid uzayları gibi birçok uzay ile onların alt uzayları ve topolojik yaklaşımlar içindeki değişik fonksiyon uzayları tarafından eşzamanlı olarak sağlanan özelliklerin incelenmesine izin verecek ve sonuç olarak her birinin kendine özgü yönlerinin daha iyi kavranmasını sağlayacak olan sentezleyici bir yaklaşımın

gerekliliğine ihtiyaç vardı. Böylece genel topoloji, Frechet tarafından 1906 yılında metrik uzayların tanıtılması ve Hausdorff tarafından 1914 yılında özerk bir soyut topolojik uzay kuramının geliştirilmesi ile ortaya çıkmıştır (Nachbin 1965). Bu andan itibaren, bu yeni disiplinin ilerleme aşamaları birbiri ardına hızlı bir şekilde gelişti.

Genel sıralama (veya kısmi sıralama) kavramının hem mantık hem de matematikte kökeni vardır. Sıralama kavramına ait daha eski kökler, daha önceki yıllarda yapılan çalışmalarda izlenilebilmesine rağmen bağımsız olarak ilk kez on dokuzuncu yüzyıl boyunca ortaya çıkmıştır. Modern matematiğin bakış açısına göre tam sıralama durumu, sayı ve zaman fikirleri kadar eskidir ve kökeni geçmişin sisinde kaybolmuştur. Kronolojik olarak, bu yöndeki en önemli araştırmalar, 1847 yılına kadar uzanan, G. Boole'ın mantık ve düşünce yasalarının matematiksel analizi ile ilgili olanlarıdır (Nachbin 1965). Böylece onun adı, uzun bir süre boyunca elemanları herhangi bir sayısal öneme sahip olmayan bir cebirsel sistemin bilinen tek örneğini temsil eden Boolean cebirleriyle ayrılmaz bir şekilde ilişkili olmuştur. Günümüzde bu cebirler, dikkate değer bir matematiksel öneme sahiptirler.

Sıralı küme kavramını tanımlayan aksiyomlar, C.S. Pierce'ın 1880 yılına kadar uzanan mantık cebiri üzerine yaptığı çalışmasında bulunmaktadır (Nachbin 1965). Ayrıca 1890 yılında bu tür aksiyomlar, Schroeder tarafından sistematik olarak incelenmiştir ancak çalışmalar yine de mantık biliminin ihtiyaçları açısından yürütülmüştür. Aslında Dedekind'e göre sıralı küme kavramı, matematikte sıklıkla karşılaşılan ve özerk olarak çalışılmayı hak eden bir konudur. 1897 yılında ifade edilen bu bakış açısı, daha sonra Hausdorff'un "küme teorisinin temelleri üzerine" isimli kitabında ve Emmy Noether'ın cebir üzerine yaptığı çalışmasında savunulmuştur (Nachbin 1965).

Genel sıralama kavramı üzerine yapılan çalışmalar, şüphesiz modern matematiğin çeşitli dallarının temellerinin ve ortak yönlerinin anlaşılmasında değerli bir araçtır. Sıralama kavramının matematiksel değeri, içinde bulunduğu uygulamalarda net bir şekilde ortaya çıkmaktadır. Günümüzde cebirsel yapılar; teorik fizik, bilgisayar bilimleri, kontrol mühendisliği, bilişim bilimleri, kodlama teorisi, topolojik uzaylar vb. gibi birçok disiplinde geniş kapsamlı uygulamalarla matematikte önemli bir rol oynamaktadır.

Leopoldo Nachbin, 1965 yılında “Topoloji ve Sıralama” isimli kitabında topolojik sıralı uzaylar kavramını tanımladı ve bu uzayların topolojik özelliklerini inceledi. Ayrıca Nachbin, bu çalışmasında artan ve azalan kümelerin temel özelliklerini de araştırdı. Böylece bu çalışma, birçok yeni araştırmalara ön ayak oldu. 1968 yılında McCartan, artan ve azalan komşuluklar kavramlarını kullanarak sıralı ayırma aksiyomları hakkında ayrıntılı bir çalışma yürütmüştür. 1971 yılında McCartan, sürekli olan ve sürekli olmayan topolojik sıralı uzaylar kavramlarını sundu.

Topolojik uzaylarda kapalı küme kavramı oldukça önemlidir. Kapalı kümeler ve bunların topolojik özellikleri üzerine birçok çalışma yürütülmüştür. Levine, 1970 yılında g -kapalı kümelerin sınıfını ve kümelerin bir süper sınıfını tanıttı. 2000 yılında Veera Kumar, Nachbin ve Levine’ in çalışmalarını geliştirerek, kapalı kümelerin sınıfı ve g -kapalı kümelerin sınıfı arasında uygun bir şekilde yer alan ve g^* -kapalı kümeler olarak adlandırılan kümelerin yeni bir sınıfını tanıttı. 2001 yılında Veera Kumar, i -kapalı, d -kapalı ve b -kapalı kümeler kavramlarını tanıttı. 2002 yılında Veera Kumar, topolojik sıralı uzaylar arasındaki süreklilik, açıklık, kapalılık ve homeomorfizm kavramlarını tanımladı. 2004 yılında Das, bazı sıralı uzaylar yardımıyla sıralı ayırma aksiyomlarını tanımladı. 2014 yılında Srinivasarao, ig -kapalı, dg -kapalı, bg -kapalı, ig^* -kapalı, dg^* -kapalı ve bg^* -kapalı kümeleri tanımladı. 2015 yılında G. Srinivasarao, D. Madhusudanrao ve N. Srinivasarao, bu yeni tip kapalı kümelerin yeni sınıflarını tanımladılar.

2013 yılında Minguzzi, uzay zamanının kuantum teorisine farklı bir yaklaşım sunan topolojik sıralı uzayların rolü üzerine bir çalışma yapmıştır. 2016 yılında Abo-elhamayel and Al-shami, supra topolojik sıralı uzaylardaki supra topolojik özellikleri inceleyen çalışmalarını sundular. 2018 yılında Al-shami, El-Shafei ve Abo-Elhamayel soft topolojik sıralı uzaylar üzerine kapsamlı bir çalışma sundular.

Bu çalışmanın araştırma bulguları bölümünün büyük bir kısmı, G. Srinivasarao, D. Madhusudanrao ve N. Srinivasarao’ nun 2015 yılında yayınladıkları makalede ispatlarıyla birlikte verilen teoremlerin yeniden incelenmesi ve örneklerin güncellenmesi ile oluşturulmuştur. Ayrıca literatürde $iT_{1/2}$ şeklinde yer edinen uzay, bu çalışmada $i - T_{1/2}$ şeklinde ifade edilmiştir. Benzer durum $d - T_{1/2}$, $b - T_{1/2}$,

$i - T_{i,1/2}, d - T_{d,1/2}, b - T_{b,1/2}, c - T_i, c - T_d, c - T_b, i - T_b, d - T_b$ uzayları için de geçerlidir.



2. KURAMSAL TEMELLER

Tanım 2.1: X ve Y boş olmayan iki küme olsun. $X \times Y$ nin herhangi bir alt kümesine X den Y ye bir bağıntı denir. Bu bağıntı \mathcal{R} ile gösterilmek üzere eğer $(x, y) \in \mathcal{R}$ ise bu durum $x\mathcal{R}y$ şeklinde yazılabilir (Koçak 2006).

Tanım 2.2: (Yüksel 2011) Herhangi bir X kümesi üzerindeki \mathcal{R} bağıntısı, aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, \mathcal{R} bağıntısına X üzerinde bir denklik bağıntısı ve \mathcal{R} bağıntısına ait iki elemana da denk elemanlar denir.

- a) Her $a \in X$ için, $a\mathcal{R}a$ (yansıma özelliği)
- b) Her $a, b \in X$ için, $a\mathcal{R}b \Rightarrow b\mathcal{R}a$ (simetri özelliği)
- c) Her $a, b, c \in X$ için, $a\mathcal{R}b$ ve $b\mathcal{R}c \Rightarrow a\mathcal{R}c$ (geçişme özelliği).

Tanım 2.3: (Yüksel 2011) X kümesi üzerinde bir " \leq " bağıntısı verilsin. Aşağıdaki özellikler sağlanırsa " \leq " bağıntısına X kümesi üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısı ve (X, \leq) kümesine de kısmi (kısmen, yarı) sıralı küme denir.

- i. Her $a \in X$ için, $a \leq a$ (yansıma özelliği)
- ii. Her $a, b \in X$ için, $a \leq b$ ve $b \leq a \Rightarrow a = b$ (ters simetri özelliği)
- iii. Her $a, b, c \in X$ için, $a \leq b$ ve $b \leq c \Rightarrow a \leq c$ (geçişme özelliği).

Tanım 2.4: (X, \leq) kısmi sıralı bir küme olsun. Her $x, y \in X$ için $x \leq y$ veya $y \leq x$ veya $x = y$ ise, yani X in herhangi iki elemanı karşılaştırılabilirse, (X, \leq) kümesine tam sıralanmış bir küme ve " \leq " bağıntısına da X üstünde bir tam sıralama bağıntısı denir (Aslım 2012).

Tanım 2.5: X ve Y boş olmayan iki küme olsun. X in her elemanını Y nin bir ve yalnız bir elemanına eşleyen bağıntıya bir fonksiyon denir ve $f: X \rightarrow Y$ ile gösterilir. Bu tanım şu şekilde de verilebilir: X in her x elemanına karşılık (x, y) şeklinde yalnız bir elemanı olan $X \times Y$ nin bir alt kümesine X den Y ye bir fonksiyon denir. Burada X kümesine f fonksiyonunun tanım kümesi, Y kümesine ise f fonksiyonunun değer kümesi adı verilir (Koçak 2006).

Tanım 2.6: $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu ve bir $A \subset X$ alt kümesi verilsin. Bu takdirde her $x \in A$ noktası için, $f|_A(x) = f(x)$ şeklinde tanımlanan $f|_A: A \rightarrow Y$ fonksiyonuna, f fonksiyonunun A kümesine kısıtlanmış fonksiyonu denir (Yüksel 2011).

Tanım 2.7: $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu ve bir $X \subset X^*$ üst kümesi verilsin. Eğer $g: X^* \rightarrow Y$ fonksiyonunun X kümesine kısıtlanması f ise, g fonksiyonuna f fonksiyonunun X^* kümesine genişlemesi denir (Yüksel 2011).

Tanım 2.8: (X, d) ve (Y, e) herhangi iki metrik uzay, $f: (X, d) \rightarrow (Y, e)$ bir fonksiyon ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer $f(x_0) \in Y$ noktasının her $D(f(x_0), \epsilon)$ açık komşuluğu için $f(D(x_0, \delta)) \subseteq D(f(x_0), \epsilon)$ olacak şekilde $x_0 \in X$ noktasının bir $D(x_0, \delta)$ açık komşuluğu varsa diğer bir deyişle her $\epsilon > 0$ için $d(x_0, x) < \delta$ olduğunda $e(f(x_0), f(x)) < \epsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f fonksiyonu x_0 noktasında süreklidir denir. Eğer $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu X in her noktasında sürekli ise f ye bir sürekli fonksiyon denir (Mucuk 2010).

Tanım 2.9: (Yüksel 2011) X boştan farklı bir küme ve \mathcal{T} da X in alt kümelerinin bir ailesi (sınıfı) olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa \mathcal{T} ailesine X üzerinde bir topoloji ve (X, \mathcal{T}) ikilisine de bir topolojik uzay denir.

- i. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$ dur.
- ii. \mathcal{T} ailesine ait sonlu ya da sonsuz çokluktaki elemanların bileşimi \mathcal{T} ailesine aittir. Yani; $\forall J \subset I$ (J sonlu ya da sonsuz) $\forall i \in J$ için, $A_i \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{i \in J} A_i \in \mathcal{T}$.
- iii. \mathcal{T} ailesine ait sonlu çokluktaki elemanların kesişimi \mathcal{T} ailesine aittir. Yani; $\forall J \subset I$ (J sonlu) $\forall i \in J$ için, $A_i \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcap_{i \in J} A_i \in \mathcal{T}$.

Burada \mathcal{T} ailesinin elemanları X kümesinin \mathcal{T} -açık alt kümeleri olarak adlandırılırlar ya da \mathcal{T} ailesinin her elemanına, X kümesinde bir açık küme denir. Bu açık alt kümelerin tümleyenlerine ise X kümesinin \mathcal{T} -kapalı alt kümeleri denir.

$\mathcal{T} = \{X, \emptyset\}$ ailesi X kümesi üzerinde bir topolojidir ve bu (X, \mathcal{T}) uzayına indiskret (ayrık olmayan ya da aşık) topolojik uzay denir. X kümesi üzerindeki en kaba topoloji indiskret topolojidir. X kümesinin kuvvet kümesi $P(X)$ olmak üzere $(X, P(X))$ ikilisi bir topolojik uzaydır ve bu uzaya diskret (ayrık) topolojik uzay denir. X kümesi üzerindeki en ince topoloji diskret topolojidir.

Tanım 2.10: (X, \mathcal{T}) topolojik uzayı ve bir $F \subset X$ alt kümesi verilsin. Eğer $(X - F) \in \mathcal{T}$ ise, yani F kümesinin tümleyeni açık bir küme ise F kümesine, \mathcal{T} topolojisine göre kapalı küme denir (Yüksel 2011).

Tanım 2.11: (X, \mathcal{T}) topolojik uzayı ve bir $x_0 \in X$ noktası verilsin. x_0 noktasını içeren her $A \subset X$ açık alt kümesine, x_0 noktasının açık komşuluğu denir. Yani; A, x_0 in bir açık komşuluğudur $\Leftrightarrow x_0 \in X$ ve $A \in \mathcal{T} \ni x_0 \in A$ (Yüksel 2011).

Tanım 2.12: (X, \mathcal{T}) topolojik uzayı ve bir $x_0 \in X$ noktası verilsin. x_0 noktasının bir açık komşuluğunu kapsayan her $V \subset X$ alt kümesine, x_0 noktasının komşuluğu denir. Yani; V, x_0 in komşuluğudur $\Leftrightarrow \exists A \in \mathcal{T} \ni x_0 \in A \subset V$ (Yüksel 2011). Bir x noktasının bütün komşuluklarının ailesi $\mathcal{N}(x)$ ile gösterilsin.

Tanım 2.13: (X, \mathcal{T}) bir topolojik uzay, \mathcal{N}_x de her $x \in X$ için aşağıdaki koşulları sağlayan açık kümelerin bir ailesi olsun.

- i. $\mathcal{N}_x \neq \emptyset$
- ii. Her $N \in \mathcal{N}_x$ için $x \in N$ olsun.
- iii. Her $N_1, N_2 \in \mathcal{N}_x$ için $N_3 \subset N_1 \cap N_2$ olacak şekilde $N_3 \in \mathcal{N}_x$ vardır.
- iv. Verilen her $N \in \mathcal{N}_x$ ve her $y \in N$ için $N' \subset N$ olacak şekilde bir $N' \in \mathcal{N}_y$ vardır.
- v. X kümesinin bir U alt kümesinin açık olması için gerekli ve yeterli şart her $x \in U$ için $N \subset U$ olacak şekilde $N \in \mathcal{N}_x$ elemanının bulunmasıdır.

Bu şekilde $x \in X$ olmak üzere \mathcal{N}_x lerden oluşan \mathcal{N} ailesine \mathcal{T} topolojisi için açık komşuluklar sistemi denir (Gürkanlı 1993).

Tanım 2.14: (X, \mathcal{T}) topolojik uzayı, $A \subset X$ alt kümesi ve bir $x \in A$ noktası verilsin. Eğer A kümesi x noktasının bir komşuluğu ise bu x noktasına, A kümesinin bir iç noktası denir. A kümesinin bütün iç noktalarının oluşturduğu kümeye, A kümesinin içi denir ve A^0 simgesiyle gösterilir. Bu tanım şu şekilde de ifade edilebilir: A^0 kümesi, A kümesinin kapsadığı en geniş açık alt kümedir (Yüksel 2011).

Tanım 2.15: (X, \mathcal{T}) topolojik uzayı ve bir $A \subset X$ alt kümesi verilsin. A kümesinin tümleyeninin bir iç noktasına, A kümesinin bir dış noktası denir. A kümesinin bütün dış noktalarının oluşturduğu kümeye A kümesinin dışı denir ve $(X - A)^0$ şeklinde gösterilir (Yüksel 2011).

Tanım 2.16: (X, \mathcal{T}) topolojik uzayı, $A \subset X$ alt kümesi ve bir $x \in X$ noktası verilsin. x noktasının her komşuluğunda, A kümesinin en az bir elemanı varsa, x noktasına A kümesinin bir kapanış noktası denir. Yani; x, A nın bir kapanış noktasıdır $\Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{N}(x)$ için, $A \cap V \neq \emptyset$ dir. (X, \mathcal{T}) topolojik uzayında bir

$A \subset X$ alt kümesinin tüm kapanış noktalarının kümesine, A kümesinin kapanışı denir ve

$$\bar{A} = \{x \in X: \forall V \in \mathcal{N}(x) \text{ için, } A \cap V \neq \emptyset\}$$

ile gösterilir. Bu tanım şu şekilde de ifade edilebilir: \bar{A} kümesi, A kümesini kapsayan en küçük kapalı alt kümedir (Yüksel 2011).

Tanım 2.17: (X, \mathcal{T}) bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Bu takdirde

$$\mathcal{T}_A = \{A \cap G: G \in \mathcal{T}\}$$

ailesi A üzerinde bir topoloji olup bu topoloji A üzerindeki alt topoloji ve (A, \mathcal{T}_A) ikilisi alt topolojik uzay olarak adlandırılır (Mucuk 2010).

Tanım 2.18: (X, \mathcal{T}) bir topolojik uzay ve \mathcal{B} de X in açık alt kümelerinin bir ailesi olsun. Eğer \mathcal{T} daki her bir G açık kümesi \mathcal{B} nin bir alt ailesi üzerinden birleşim olarak yazılabiliyorsa, yani \mathcal{B} sınıfının bir \mathcal{B}' alt ailesi için

$$G = \bigcup_{B_i \in \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}} B_i$$

ise \mathcal{B} ailesine \mathcal{T} topolojisi için bir taban denir (Mucuk 2010).

Tanım 2.19: (X, \mathcal{T}) bir topolojik uzay ve X in bazı açık alt kümelerinin bir ailesi \mathcal{D} olsun. Eğer \mathcal{D} ailesindeki kümelerin sonlu arakesitlerinden elde edilen \mathcal{B} ailesi, \mathcal{T} topolojisi için bir taban oluyorsa \mathcal{D} ailesine, \mathcal{T} topolojisi için bir alt taban denir (Mucuk 2010).

Topoloji ile ilgili bazı problemlerin çözümünde karşılaşılan sorunların giderilmesi için topolojik uzaylar üzerine bazı sınırlamalar getirmek gerekir. Bu sınırlamalardan bazıları ayırma aksiyomlarıdır. Temel düşünce ayırık olan kümelerin veya farklı noktaların birbirinden açık komşuluklarla ayrılması ilkesine dayalıdır. Ayırma aksiyomlarının her biri birer topolojik özelliktir.

Tanım 2.20: (X, \mathcal{T}) bir topolojik uzay olsun. Eğer aşağıdaki şart sağlanıyorsa bu uzaya bir T_0 uzayı denir (Mucuk 2010).

T_0 : Farklı her $x, y \in X$ nokta çifti için en az birinin diğerini içermeyen açık bir komşuluğu, yani $y \notin G$ olacak şekilde x in bir G açık komşuluğu veya $x \notin H$ olacak şekilde y nin bir H açık komşuluğu vardır.

Tanım 2.21: Aşağıdaki şartı sağlayan bir (X, \mathcal{T}) uzayına bir T_1 uzayı denir.

T_1 : Farklı her $x, y \in X$ noktaları için her birinin diğerini içermeyen açık bir komşuluğu, yani $x \in G, y \notin G$ ve $y \in H, x \notin H$ olacak şekilde G ve H açık kümeleri vardır (Mucuk 2010).

Tanım 2.22: Aşağıdaki şartı sağlayan bir (X, \mathcal{T}) uzayına bir T_2 uzayı veya Hausdorff uzayı denir.

T_2 : Farklı noktaların ayrık açık komşulukları, yani farklı $x, y \in X$ noktaları için $x \in G, y \in H$ ve $G \cap H = \emptyset$ olacak şekilde G ve H açık kümeleri vardır (Mucuk 2010).

Tanım 2.23: Aşağıdaki şartı sağlayan bir (X, \mathcal{T}) topolojik uzayına bir regüler (düzenli) uzay denir.

R : K kapalı bir küme ve $x \notin K$ ise $K \subseteq G$ ve $x \in H$ olacak şekilde G ve H ayrık açık kümeleri vardır (Mucuk 2010).

Tanım 2.24: Regüler olan bir T_1 uzayına bir T_3 uzayı denir (Mucuk 2010).

Tanım 2.25: (X, \mathcal{T}) bir topolojik uzay olsun. Eğer aşağıdaki şart sağlanıyor ise bu uzaya bir normal uzay denir.

N : $K_1, K_2 \subseteq X$ ayrık kapalı kümeler olmak üzere $K_1 \subseteq G$ ve $K_2 \subseteq H$ olacak şekilde X in G ve H ayrık açık kümeleri vardır (Mucuk 2010).

Tanım 2.26: Normal olan bir T_1 uzayına bir T_4 uzayı denir (Mucuk 2010).

Tanım 2.27: (X, \mathcal{T}) topolojik uzayı ve $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ alışılmış uzayının $[0,1]$ alt uzayı alınsın. Uzayın kapalı bir $F \subset X$ alt kümesi ve bir $x \in X$ ($x \notin F$) noktası verildiğinde eğer $f(x) = 0, f(F) = \{1\}$ şeklinde tanımlanan sürekli bir $f: X \rightarrow [0,1]$ fonksiyonu varsa (X, \mathcal{T}) uzayına tam regüler (tamamen düzenli) uzay, f fonksiyonuna da F kümesi ile x noktasını ayırıyor denir (Yüksel 2011).

Tanım 2.28: (X, \mathcal{T}) topolojik uzayı, tam regüler ve T_1 uzayı ise (X, \mathcal{T}) uzayına Tychonoff uzayı ya da $T_{3/2}$ uzayı denir (Yüksel 2011).

Tanım 2.29: (X, \mathcal{T}) topolojik uzayı verilsin. X kümesinin alt kümelerinden oluşan bir $(A_i)_{i \in I}$ ailesi verilsin. Eğer

$$X = \bigcup_{i \in I} A_i$$

ise $(A_i)_{i \in I}$ ailesine X kümesinin bir örtüsü denir. Eğer her $i \in I$ için A_i kümeleri X kümesinin açık alt kümeleri ise $(A_i)_{i \in I}$ ailesine X kümesinin bir açık örtüsü denir.

Eğer $J \subset I$ sonlu olmak üzere X kümesinin $(A_i)_{i \in J}$ örtüsüne, X kümesinin sonlu örtüsü denir (Yüksel 2011).

Tanım 2.30: Eğer X kümesinin her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa, (X, \mathcal{T}) uzayına kompakt uzay denir (Yüksel 2011).

Tanım 2.31: Bir (X, \mathcal{T}) topolojik uzayı verilsin. Eğer her bir $x \in X$ noktasının kompakt olan bir N komşuluğu varsa bu uzaya bir yerel kompakt uzay denir. Eğer (X, \mathcal{T}) uzayı kompakt ise aynı zamanda yerel kompakttır (Mucuk 2010).

Tanım 2.32: Eğer X kümesinin sayılabilir her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa, (X, \mathcal{T}) uzayına sayılabilir kompakt uzay denir (Mucuk 2010).

Tanım 2.33: Eğer X kümesinin her açık örtüsünün sayılabilir bir alt örtüsü varsa, (X, \mathcal{T}) uzayına Lindelöf uzay denir (Gürkanlı 1993).

Tanım 2.34: (Eilenberg 1941) (X, \mathcal{T}) bir topolojik uzay olmak üzere eğer aşağıdaki koşulları sağlayan bir “ $<$ ” bağıntısı varsa X topolojik uzayı sıralı olarak adlandırılır.

- i. Herhangi $x, y \in X$ için $x < y$, $x = y$, $y < x$ bağıntılarından bir ve yalnız biri sağlanır.
- ii. $x, y, z \in X$ için $x < y$ ve $y < z$ ise $x < z$ olur.
- iii. $x, y \in X$ ve $x < y$ olmak üzere x in $U(x)$ ve y nin $U(y)$ komşulukları vardır öyle ki; her $x' \in U(x)$ ve $y' \in U(y)$ için $x < y'$ ve $x' < y$ olur.

Teorem 2.1 (Urysohn Ayırma Teoremi): T_2 uzayının normal uzay olması için gerek ve yeter şart kapalı $A, B \subset X$ ($A \cap B = \emptyset$) alt kümeleri için, $f(A) = \{0\}$ ve $f(B) = \{1\}$ koşulunu sağlayan bir $f: X \rightarrow [0,1]$ sürekli fonksiyonun varlığıdır (Yüksel 2011).

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Genelleştirilmiş Kapalı Kümeler

Tanım 3.1.1: Bir topolojik uzayın A alt kümesi bir g -kapalı kümedir ancak ve ancak $A \subseteq \mathcal{A}$ ve \mathcal{A} açık olduğunda $\bar{A} \subseteq \mathcal{A}$ olmasıdır (Levine 1970).

Teorem 3.1.1: Bir topolojik uzayın A alt kümesi g -kapalıdır ancak ve ancak $\bar{A} - A$ kümesi hiçbir boş olmayan kapalı küme içermiyordur (Levine 1970).

İspat: (\Rightarrow): $F, \bar{A} - A$ nın bir kapalı alt kümesi olsun. Buradan $A \subseteq F^t$ ve A, g -kapalı olduğundan $\bar{A} \subseteq F^t$ veya $F \subseteq (\bar{A})^t$ olur. Böylece $F \subseteq \bar{A} \cap (\bar{A})^t = \emptyset$ dir ve F boş kümedir.

(\Leftarrow): $A \subseteq \mathcal{A}$ ve \mathcal{A} açık olsun. Eğer $\bar{A} \not\subseteq \mathcal{A}$ ise $\bar{A} \cap \mathcal{A}^t$ kümesi $\bar{A} - A$ nın bir boş olmayan kapalı alt kümesidir.

Sonuç 3.1.1: Bir g -kapalı A kümesi kapalıdır ancak ve ancak $\bar{A} - A$ kapalıdır (Levine 1970).

İspat: Eğer A kapalıysa $\bar{A} - A = \emptyset$ dir. Tersine $\bar{A} - A$ kapalı olsun. Fakat A, g -kapalı ve $\bar{A} - A$ da onun bir kapalı alt kümesidir. Teorem 3.1.1 gereğince $\bar{A} - A = \emptyset$ olup ve böylece $\bar{A} = A$ dir.

Teorem 3.1.2: Eğer A ve B g -kapalıysa o zaman $A \cup B$ kümesi de g -kapalıdır (Levine 1970).

İspat: Eğer $A \cup B \subseteq \mathcal{A}$ ve \mathcal{A} açık ise o zaman $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cup \bar{B} \subseteq \mathcal{A}$ dir.

Örnek 3.1.1: Genelde iki g -kapalı kümenin arakesiti bir g -kapalı küme değildir. Bunu görmek için $X = \{x, y, z\}$ kümesi ve $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{x\}\}$ topolojisi göz önüne alınsın. Eğer $A = \{x, y\}$ ve $B = \{x, z\}$ olarak alınırsa A ve B birer g -kapalı kümedir ancak $A \cap B$ g -kapalı değildir.

Teorem 3.1.3: $B \subseteq A \subseteq X$ olmak üzere B kümesinin A ya göre bir g -kapalı küme ve A kümesinin de X in bir g -kapalı alt kümesi olduğu kabul edilsin. O halde B kümesi X e göre g -kapalıdır (Levine 1970).

İspat: $B \subseteq \mathcal{A}$ ve \mathcal{A}, X de bir açık küme olsun. O zaman $B \subseteq A \cap \mathcal{A}$ dir ve böylece $\bar{B} \subseteq A \cap \mathcal{A}$ dir. Bu nedenle $A \cap \bar{B} \subseteq A \cap \mathcal{A}$ ve $A \subseteq \mathcal{A} \cup (\bar{B})^t$ olur. A, X de g -kapalı olduğundan $\bar{A} \subseteq \mathcal{A} \cup (\bar{B})^t$ elde edilir. Bu takdirde $\bar{B} \subseteq \bar{A} \subseteq \mathcal{A} \cup (\bar{B})^t$ ve $\bar{B} \subseteq \mathcal{A}$ olur.

Sonuç 3.1.2: A bir g -kapalı küme ve F bir kapalı küme olsun. O zaman $A \cap F$ bir g -kapalı kümedir (Levine 1970).

İspat: $A \cap F$ kümesi, A da kapalıdır ve böylece A da g -kapalıdır.

Teorem 3.1.4: Eğer A kümesi g -kapalı ve $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$ ise o zaman B kümesi g -kapalıdır (Levine 1970).

İspat: $\bar{B} - B \subseteq \bar{A} - A$ olduğu için ve $\bar{A} - A$ nın boş olmayan kapalı alt kümeleri olmadığı için $\bar{B} - B$ nin de yoktur. Teorem 3.1.1 kullanılarak istenilen sonuca ulaşılır.

Teorem 3.1.5: $A \subseteq Y \subseteq X$ ve A, X de g -kapalı olsun. O zaman A, Y ye göre g -kapalıdır (Levine 1970).

İspat: $A \subseteq Y \cap \mathcal{A}$ ve \mathcal{A} nın da X de açık olduğu varsayalım. Bu takdirde $A \subseteq \mathcal{A}$ dır ve böylece $\bar{A} \subseteq \mathcal{A}$ olur. Buradan $Y \cap \bar{A} \subseteq Y \cap \mathcal{A}$ elde edilir.

Teorem 3.1.6: Bir (X, \mathcal{T}) topolojik uzayında $\mathcal{T} = \mathcal{K}$ (\mathcal{K} kapalı kümeler ailesi) dır ancak ve ancak X in her alt kümesi bir g -kapalı kümedir (Levine 1970).

İspat: $\mathcal{T} = \mathcal{K}$ ve $A \subseteq \mathcal{A} \in \mathcal{T}$ olduğu kabul edilsin. O zaman $\bar{A} \subseteq \bar{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$ ve A g -kapalıdır. Bunun tersine, X in her alt kümesinin g -kapalı olduğu kabul edilsin. $\mathcal{A} \in \mathcal{T}$ olsun. O halde $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}$ ve \mathcal{A} g -kapalı olduğundan $\bar{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{A}$ ve $\mathcal{A} \in \mathcal{K}$ olur. Böylece $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{K}$ dır. Eğer $F \in \mathcal{K}$ ise o zaman $F^t \in \mathcal{T} \subseteq \mathcal{K}$ dır ve böylece $F \in \mathcal{T}$ dur. Sonuç olarak $\mathcal{T} = \mathcal{K}$ dır.

Teorem 3.1.7: (X, \mathcal{T}) bir kompakt topolojik uzay ve A, X in bir g -kapalı alt kümesi olsun. O halde A kompakttır (Levine 1970).

İspat: Φ, A nın bir açık örtüsü olsun. O halde A g -kapalı olduğundan $\bar{A} \subseteq \bigcup \Phi$ dır. Fakat \bar{A} kompakttır ve buradan bazı $\mathcal{A}_i \in \Phi$ için $A \subseteq \bar{A} \subseteq \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \dots \cup \mathcal{A}_i$ olur.

Teorem 3.1.8: (X, \mathcal{T}) bir Lindelöf (ya parakompakt ya da sayılabilir kompakt) uzay ve A, X in bir g -kapalı alt kümesi olsun. O halde A Lindelöfdür (ya parakompakttır ya da sayılabilir kompakttır) (Levine 1970).

İspat: Teoremin ispatı Teorem 3.1.7 nin ispatına benzerdir.

Teorem 3.1.9: (X, \mathcal{T}) bir normal uzay ve Y, X in bir kapalı alt kümesi olsun. O halde $(Y, Y \cap \mathcal{T})$ normaldir (Levine 1970).

İspat: E ve F kümeleri X de kapalı ve $(Y \cap E) \cap (Y \cap F) = \emptyset$ olsun. O halde $Y \subseteq (E \cap F)^t \in \mathcal{T}$ olur ve böylece $\bar{Y} \subseteq (E \cap F)^t$ elde edilir. Buradan $(\bar{Y} \cap E) \cap$

$(\bar{Y} \cap F) = \emptyset$ olur. (X, \mathcal{T}) normal olduğundan, \mathcal{A}_1 ve \mathcal{A}_2 açık ayrık kümeleri vardır öyle ki; $\bar{Y} \cap E \subseteq \mathcal{A}_1$ ve $\bar{Y} \cap F \subseteq \mathcal{A}_2$ dir. Buradan $Y \cap E \subseteq \mathcal{A}_1 \cap Y$ ve $Y \cap F \subseteq \mathcal{A}_2 \cap Y$ olduğu sonucu çıkar.

Teorem 3.1.10: Eğer (X, \mathcal{T}) bir düzenli uzay ve A kompakt ise A g -kapalıdır (Levine 1970).

İspat: $A \subseteq \mathcal{A} \in \mathcal{T}$ olduğu kabul edilsin. O halde $A \subseteq \mathcal{A}^* \subseteq \overline{\mathcal{A}^*} \subseteq \mathcal{A}$ olacak şekilde bir $\mathcal{A}^* \in \mathcal{T}$ vardır ve buradan $\bar{A} \subseteq \mathcal{A}$ olur.

Teorem 3.1.11: Eğer (X, \mathcal{T}) düzenli ve yerel kompakt bir uzay ve A da X in bir g -kapalı alt kümesi ise A kümesi alt topoloji içinde yerel kompakttır (Levine 1970).

İspat: $x \in A$ olsun. O halde N , x in bir kompakt komşuluğu olmak üzere $x \in N \subseteq X$ dir. (X, \mathcal{T}) düzenli olduğundan $x \in \mathcal{A} \subseteq \bar{\mathcal{A}} \subseteq N$ olacak şekilde bir $\mathcal{A} \in \mathcal{T}$ vardır. Şimdi $A \cap \bar{\mathcal{A}}$, A da x in bir komşuluğudur ve Sonuç 3.1.2 gereğince $A \cap \bar{\mathcal{A}}$ kümesi X de g -kapalıdır. Teorem 3.1.5 gereğince $A \cap \bar{\mathcal{A}}$ kümesi N de g -kapalıdır ve bundan dolayı Teorem 3.1.7 gereğince kompakttır.

Teorem 3.1.12: (X, \mathcal{T}) bir normal uzay ve F kapalı ve A g -kapalı olmak üzere eğer $F \cap A = \emptyset$ ise o zaman $F \subseteq \mathcal{A}_1$ ve $A \subseteq \mathcal{A}_2$ olacak şekilde \mathcal{A}_1 ve \mathcal{A}_2 ayrık açık kümeleri vardır (Levine 1970).

İspat: $A \subseteq F^t \in \mathcal{T}$ ve dolayısıyla $\bar{A} \subseteq F^t$ olur. Buradan $\bar{A} \cap F = \emptyset$ olur. Normal uzay ve g -kapalı küme tanımları gereğince Teoremin ispatı açıktır.

Örnek 3.1.2: Genellikle bir normal uzaydaki ayrık g -kapalı kümeler açık kümelerle ayrılamazlar. Bunu göstermek için $X = \{x, y, z\}$ kümesi üzerindeki $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{x\}\}$ topolojisi göz önüne alınsın. O halde $\{y\}$ ve $\{z\}$ kümeleri ayrılamayan ayrık g -kapalı kümelerdir.

Tanım 3.1.2: Bir A kümesinin genelleştirilmiş açık (g -açık) küme olarak adlandırılması için gerek ve yeter şart A^t kümesinin g -kapalı olmasıdır (Levine 1970).

Teorem 3.1.13: Bir A kümesi g -açıktır ancak ve ancak F kapalı ve $F \subseteq A$ olduğunda $F \subseteq A^0$ dir (Levine 1970).

Teorem 3.1.14: Eğer A ve B ayrık g -açık kümeler ise $A \cup B$ g -açıktır (Levine 1970).

İspat: $F, A \cup B$ nin bir kapalı alt kümesi olsun. O halde $F \cap \bar{A} \subseteq A$ dır ve dolayısıyla Teorem 3.1.13 gereğince $F \cap \bar{A} \subseteq A^0$ olur. Benzer şekilde $F \cap \bar{B} \subseteq B^0$ olur. Buradan $F = F \cap (A \cup B) \subseteq (F \cap \bar{A}) \cup (F \cap \bar{B}) \subseteq A^0 \cup B^0 \subseteq (A \cup B)^0$ olur. Bu nedenle $F \subseteq (A \cup B)^0$ olur ve Teorem 3.1.13 gereğince $A \cup B$ g -açıktır.

İki g -açık kümenin birleşimi genellikle g -açık değildir.

Sonuç 3.1.3: A ve B g -kapalı kümeler ve A^t ile B^t kümeleri ayrık olsun. Bu durumda Teorem 3.1.3 ve Sonuç 3.1.2 gereğince $A \cap B$ g -kapalıdır (Levine 1970).

İspat: Teoremin ispatı, $(A \cap B)^t$ kümesinin g -açık olduğu gösterilerek Teorem 3.1.14 gereğince hemen çıkar.

Teorem 3.1.15: Bir A kümesi (X, \mathcal{T}) uzayında g -açıktır ancak ve ancak \mathcal{A} açık ve $A^0 \cup A^t \subseteq \mathcal{A}$ olduğunda $\mathcal{A} = X$ dir (Levine 1970).

İspat: (\Rightarrow): \mathcal{A} açık ve $A^0 \cup A^t \subseteq \mathcal{A}$ olsun. Buradan $\mathcal{A}^t \subseteq \bar{A}^t \cap A = \bar{A}^t - A^t$ olur. \mathcal{A}^t kapalı ve A^t g -kapalı olduğundan, Teorem 3.1.1 gereğince $\mathcal{A}^t = \emptyset$ ya da $X = \mathcal{A}$ olduğu çıkar.

(\Leftarrow): F bir kapalı küme ve $F \subseteq A$ olsun. Teorem 3.1.13 gereğince $F \subseteq A^0$ olduğunun gösterilmesi yeterlidir. $A^0 \cup A^t \subseteq A^0 \cup F^t$ dir ve dolayısıyla $A^0 \cup F^t = X$ elde edilir. O halde $F \subseteq A^0$ olur.

Teorem 3.1.16: A, B ye göre g -açık ve B de X e göre g -açık olmak üzere $A \subseteq B \subseteq X$ ise o zaman A, X e göre g -açıktır (Levine 1970).

İspat: F bir kapalı küme ve $F \subseteq A$ olsun. F, B ye göre kapalı olduğundan $F \subseteq A^0$ olur. Bu nedenle $F \subseteq \mathcal{A} \cap B \subseteq A$ olacak şekilde bir \mathcal{A} açık kümesi vardır. Fakat B, X de g -açık olduğundan bazı \mathcal{A}^* açık kümeleri için $F \subseteq \mathcal{A}^* \subseteq B$ dir. Böylece $F \subseteq \mathcal{A}^* \cap \mathcal{A} \subseteq B \cap \mathcal{A} \subseteq A$ olur. O halde buradan $F \subseteq A^0$ olduğu çıkar. Teorem 3.1.13 uygulanırsa A, X de g -açık olur.

Örnek 3.1.3: $X = \{x, y, z\}$ kümesi üzerindeki bir topoloji $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{x\}\}$ olsun. $A = \{y\}$ ve $Y = \{x, y\}$ olarak alınırsa o zaman A kümesi X de g -açıktır fakat Y de g -açık değildir.

Teorem 3.1.17: Eğer $A^0 \subseteq B \subseteq A$ ve A g -açık ise B de g -açıktır (Levine 1970).

İspat: $A^t \subseteq B^t \subseteq \bar{A}^t$ dir ve A^t g -kapalı olduğundan Teorem 3.1.4 gereğince B^t kümesi de g -kapalı olur. Böylece B kümesi g -açıktır.

Teorem 3.1.18: Bir A kümesi g -kapalıdır ancak ve ancak $\bar{A} - A$ g -açıktır (Levine 1970).

İspat: (\Rightarrow): A g -kapalı ve F kapalı olmak şartıyla $F \subseteq \bar{A} - A$ olsun. Teorem 3.1.1 gereğince $F = \emptyset$ dir ve dolayısıyla $F \subseteq (\bar{A} - A)^0$ olur. Teorem 3.1.13 gereğince $\bar{A} - A$ kümesi g -açıktır.

(\Leftarrow): \mathcal{A} bir açık küme olmak üzere $A \subseteq \mathcal{A}$ olsun. Buradan $\bar{A} \cap \mathcal{A}^t \subseteq \bar{A} \cap A^t = \bar{A} - A$ dir. $\bar{A} \cap \mathcal{A}^t$ kapalı ve $\bar{A} - A$ g -açık olduğundan $\bar{A} \cap \mathcal{A}^t \subseteq (\bar{A} - A)^0 = \emptyset$ olur. Bu nedenle $\bar{A} \cap \mathcal{A}^t = \emptyset$ ya da $\bar{A} \subseteq \mathcal{A}$ olur. Böylece A g -kapalıdır.

Tanım 3.1.3: Eğer bir topolojik uzayın her g -kapalı kümesi kapalı ise bu topolojik uzaya bir $T_{1/2}$ uzayı denir (Levine 1970).

Teorem 3.1.19: $T_{1/2}$ uzayı bir T_0 uzayıdır (Levine 1970).

İspat: (X, \mathcal{T}) topolojik uzayı T_0 uzayı olmasın. O halde $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$ olacak şekilde farklı x ve y noktaları vardır. $A = \overline{\{x\}} \cap \{x\}^t$ olsun. A nın g -kapalı olduğu ancak kapalı olmadığını gösterilecektir. Eğer $x \in \mathcal{A} \in \mathcal{T}$ ise o zaman $\mathcal{A} \cap A \supseteq \{y\} \neq \emptyset$ ve dolayısıyla $x \in \bar{A}$ dir. Açıktır ki; $x \notin A$ dir ve dolayısıyla A kapalı değildir. Şimdi $A \subseteq \mathcal{A}^* \in \mathcal{T}$ olduğu göz önüne alınsın. $\bar{A} \subseteq \mathcal{A}^*$ olduğunu gösterebilmek için $\overline{\{x\}} \subseteq \mathcal{A}^*$ olduğunu göstermek yeterlidir. Ayrıca $\overline{\{x\}} \cap \{x\}^t = A \subseteq \mathcal{A}^*$ dir ve böylece sadece $x \in \mathcal{A}^*$ olduğu gösterilmelidir. Ancak eğer $x \in (\mathcal{A}^*)^t$ ise $y \in \overline{\{x\}} \subseteq (\mathcal{A}^*)^t$ olur. Şüphesiz $y \in A \subseteq \mathcal{A}^*$ olduğu açıktır. Dolayısıyla $y \in \mathcal{A}^* \cap (\mathcal{A}^*)^t$ olup bu da bir çelişkidir.

Teorem 3.1.20: T_1 uzayı bir $T_{1/2}$ uzayıdır (Levine 1970).

İspat: A kapalı olmayan bir küme olsun. $x \in \bar{A} - A$ olarak alınsın. O halde $\{x\} \subseteq \bar{A} - A$ dir ve bir T_1 uzayında çalışıldığı kabul edilirse $\{x\}$ kapalıdır. Teorem 3.1.1 gereğince A kümesi g -kapalı değildir.

Örnek 3.1.4: $X = \{x, y\}$ kümesi üzerindeki bir topoloji $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{x\}\}$ olsun. O zaman (X, \mathcal{T}) topolojik uzayı T_1 uzayı olmayan bir $T_{1/2}$ uzayıdır.

Örnek 3.1.5: $X = \{x, y, z\}$ kümesi üzerindeki bir topoloji $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{x\}, \{x, y\}\}$ olsun. O halde bu uzay bir T_0 uzayıdır fakat $T_{1/2}$ uzayı değildir. Çünkü $A = \{x, z\}$ olarak alınırsa A kümesi g -kapalıdır fakat kapalı değildir.

Sonuç 3.1.4: $T_{1/2}$ uzayı kesinlikle T_0 uzayı ile T_1 uzayı arasındadır (Levine 1970).

Teorem 3.1.21: Eğer A, X de bir g -kapalı küme ve $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu sürekli ve kapalı ise o zaman $f[A]$ görüntü kümesi Y de g -kapalıdır (Levine 1970).

İspat: \mathcal{A}', Y de açık olmak üzere eğer $f[A] \subseteq \mathcal{A}'$ ise $A \subseteq f^{-1}[\mathcal{A}']$ olur ve dolayısıyla $\bar{A} \subseteq f^{-1}[\mathcal{A}']$ dır. Böylece $f[\bar{A}] \subseteq \mathcal{A}'$ dır ve $f[\bar{A}]$ bir kapalı kümedir. Buradan, $\overline{f(A)} \subseteq \overline{f[\bar{A}]} = f[\bar{A}] \subseteq \mathcal{A}'$ olur. O halde $\overline{f(A)} \subseteq \mathcal{A}'$ dır ve $f[A]$ kümesi g -kapalıdır.

Örnek 3.1.6: Kapalı sürekli fonksiyonlar altında g -açık kümeler genellikle g -açık kümelere eşlenemezler. Bunu gösterebilmek için $X = \{x\}$ kümesi üzerindeki topoloji $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ ve $Y = \{y, z\}$ kümesi üzerindeki topoloji $\mathcal{T}' = \{\emptyset, Y, \{y\}\}$ olarak alınsın ve $f(x) = z$ olsun. $\{z\}$ kümesi bir g -kapalı küme değildir.

Teorem 3.1.22: Eğer $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu sürekli ve kapalı ve B, Y nin bir g -kapalı (veya g -açık) alt kümesi ise o zaman $f^{-1}[B]$ ters görüntü kümesi de X de g -kapalıdır (veya g -açıktır) (Levine 1970).

İspat: B, Y nin bir g -kapalı alt kümesi ve \mathcal{A}, X de açık olmak üzere $f^{-1}[B] \subseteq \mathcal{A}$ olsun. $\overline{f^{-1}[B]} \subseteq \mathcal{A}$ olduğu ya da $\overline{f^{-1}[B]} \cap \mathcal{A}^t = \emptyset$ olduğu gösterilecektir. Burada $f[(\overline{f^{-1}[B]} \cap \mathcal{A}^t)] \subseteq \bar{B} - B$ dir ve Teorem 3.1.1 gereğince $f[(\overline{f^{-1}[B]} \cap \mathcal{A}^t)] = \emptyset$ olur. Böylece $\overline{f^{-1}[B]} \cap \mathcal{A}^t = \emptyset$ olur. Tümleyenleri alınarak eğer B, Y de g -açık ise o zaman $f^{-1}[B]$ kümesinin de X de g -açık olduğu gösterilebilir.

g -kapalı (ya da g -açık) kümelerin, sürekli açık dönüşümler altında ne görüntüleri ne de ters görüntüleri g -kapalı (ya da g -açık) değildir.

Teorem 3.1.23: Eğer $(X, \mathcal{T}) = \times \{(X_i, \mathcal{T}_i): i \in I\}$ ve $\forall i \in I$ için A_i, X_i de g -kapalı ise o zaman $\times \{A_i: i \in I\}$ kümesi de X de g -kapalıdır (Levine 1970).

Örnek 3.1.7: Teorem 3.1.23 deki g -kapalı kümeler için geçerli olan durum g -açık kümeler için geçerli değildir. Bunu göstermek için $\forall i \in I \subset \mathbb{N}^+$ olmak üzere $X_n = \{x, y\}$ uzayları üzerindeki $\mathcal{T}_n = \{\emptyset, X_n, \{x\}, \{y\}\}$ topolojileri ele alınsın. Eğer $(X, \mathcal{T}) = \times \{(X_i, \mathcal{T}_i): i \in I\}$ ve her $i \in I$ için $A_n = \{x\}$ olarak alınırsa o zaman her i için A_i g -açıktır. Fakat $\times \{A_i: i \in I\}$ g -açık değildir çünkü o, içi boş kümeye eşit olan bir kapalı kümedir.

Teorem 3.1.24: A, X de g -açık ve B, Y de g -açık olsun. O zaman $A \times B$ kümesi $X \times Y$ de g -açıktır (Levine 1970).

İspat: $F, X \times Y$ de kapalı ve $F \subseteq A \times B$ olsun. Teorem 3.1.13 gereğince $F \subseteq (A \times B)^0$ olduğunu göstermek yeterlidir. $(x, y) \in F$ olsun. O halde $\overline{(x, y)} = \overline{(x)} \times \overline{(y)} \subseteq F \subseteq A \times B$ dir ve buradan $\overline{(x)} \subseteq A^0$ ve $\overline{(y)} \subseteq B^0$ olduğu çıkar. Böylece $(x, y) \in \overline{(x)} \times \overline{(y)} \subseteq A^0 \times B^0 \subseteq (A \times B)^0$ olur.

Örnek 3.1.8: İki $T_{1/2}$ uzayının kartezyen çarpımı genellikle bir $T_{1/2}$ uzayı değildir. Bunu göstermek için $X = \{x, y\}$ kümesi ve bu küme üzerinde tanımlanan $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{x\}\}$ topolojisi ele alınsın. Eğer $Q = \{(x, y)\}$ olarak alınırsa $Q, X \times X$ de g -açıktır fakat $Q, X \times X$ de açık değildir. Böylece X bir $T_{1/2}$ uzayı olmasına rağmen $X \times X$ bir $T_{1/2}$ uzayı değildir.

Tanım 3.1.4: (X, \mathcal{T}) bir topolojik uzay olsun. Eğer $x, y \in X$ için $x \in \overline{\{y\}}$ olduğunda $y \in \overline{\{x\}}$ oluyorsa bu (X, \mathcal{T}) uzayı simetrik olarak adlandırılır (Levine 1970).

Teorem 3.1.25: Bir (X, \mathcal{T}) topolojik uzayı simetriktir ancak ve ancak her $x \in X$ için $\{x\}$ kümesi g -kapalıdır (Levine 1970).

İspat: (\Rightarrow) : $x \in \overline{\{y\}}$ fakat $y \notin \overline{\{x\}}$ olsun. Buradan $\{y\} \subseteq (\overline{\{x\}})^t$ olur ve dolayısıyla $\overline{\{y\}} \subseteq (\overline{\{x\}})^t$ dir. Böylece $x \in (\overline{\{x\}})^t$ olup bu bir çelişkidir.

(\Leftarrow) : $\{x\} \subseteq \mathcal{A} \in \mathcal{T}$ fakat $\overline{\{x\}} \not\subseteq \mathcal{A}$ olsun. O zaman $\overline{\{x\}} \cap \mathcal{A}^t \neq \emptyset$ olup $y \in \overline{\{x\}} \cap \mathcal{A}^t$ alınır. Bu nedenle $x \in \overline{\{y\}} \subseteq \mathcal{A}^t$ ve $x \notin \mathcal{A}$ dir. Bu ise bir çelişkidir.

Sonuç 3.1.5: T_1 uzayı simetriktir (Levine 1970).

İspat: Bir T_1 uzayında tek nokta kümeleri kapalıdır ve dolayısıyla g -kapalıdır. Teorem 3.1.25 gereğince uzay simetriktir.

Sonuç 3.1.6: Bir (X, \mathcal{T}) topolojik uzayı simetriktir ve T_0 uzayıdır ancak ve ancak bu (X, \mathcal{T}) uzayı T_1 uzayıdır (Levine 1970).

İspat: Sonuç 3.1.5 e göre sadece gerekliliğin kanıtlanması yeterlidir. O zaman $x \neq y$ olsun. T_0 uzayının tanımı gereğince, bazı $\mathcal{A} \in \mathcal{T}$ için $x \in \mathcal{A} \subseteq \{y\}^t$ olarak alınabilir. O zaman $x \notin \overline{\{y\}}$ olur ve dolayısıyla $y \notin \overline{\{x\}}$ dir. Bu takdirde $y \in \mathcal{A}^* \subseteq \{x\}^t$ olacak şekilde bir $\mathcal{A}^* \in \mathcal{T}$ vardır ve (X, \mathcal{T}) bir T_1 uzayıdır.

Teorem 3.1.26: Eğer (X, \mathcal{T}) topolojik uzayı simetrik bir uzay ise o zaman (X, \mathcal{T}) uzayı T_0 uzayıdır ancak ve ancak (X, \mathcal{T}) uzayı $T_{1/2}$ uzayı ve T_1 uzayıdır (Levine 1970).

İspat: Teoremin ispatı Sonuç 3.1.6 ve Sonuç 3.1.4 den çıkar.

3.2. Sıralı Kümeler

E boştan farklı bir küme olsun. Eğer E nin sıralı eleman çiftleri için bir küçük eşit kavramı tanımlanırsa bu kavramın, E için bir kısmi sıralama oluşturduğu söylenir yani, $x \in E$ noktası, $y \in E$ noktasından küçük veya eşit ise $x \leq y$ yazılır ve bu kısmi sıralama sırasıyla aşağıdaki özelliklere sahip ise her zaman onun, yansıyan ve geçişken olduğu varsayılır (Nachbin 1965):

- 1) Eğer $x \in E$ ise o zaman $x \leq x$ dir.
- 2) Eğer her $x, y, z \in E$ için $x \leq y$ ve $y \leq z$ ise o zaman $x \leq z$ dir.

E üzerindeki sıralama, antisimetrik olan bir kısmi sıralama olur şöyle ki:

- 3) Eğer her $x, y \in E$ için hem $x \leq y$ hem de $y \leq x$ ise o zaman $x = y$ dir.

E üzerindeki sıralama, bir tam sıralama olur şöyle ki:

- 4) Her $x, y \in E$ için ya $x \leq y$ ya da $y \leq x$ dir (Nachbin 1965).

Örneğin, reel sayılar kümesi daima bilinen doğal tam sıralaması ile donatılmış olarak kabul edilecektir. Kısmi sıralı bir küme, bir kısmi sıralama ile donatılmış olan kümedir yani, üzerinde bir kısmi sıralama verilmiş olan kümedir. Kısmi sıralı kümeler, tam sıralı kümelerden daha genel bir kategori oluştururlar (Nachbin 1965).

Bir E kümesi göz önüne alınsın. $x \leq y$ ifadesi $x = y$ ile tanımlansın. Açıkçası bu şekilde, ayrık sıralama olarak adlandırılan E üzerinde bir sıralama bağıntısı elde edilir. Mantıksal olarak ayrık sıralama ve denklik bağıntısı arasında bir farklılık yoktur. Denklik bağıntısına bir sıralama bağıntısı olarak bakmanın avantajları, sıralı olmayan kümelere göre sonuçların çoğunun, daha sonra sıralı kümelerdeki sonuçların özel durumları olarak değerlendirilebileceğinden kaynaklanmaktadır (Nachbin 1965).

Bir E kümesi göz önüne alındığında E üzerindeki bir kısmi sıralamanın grafiği, $x, y \in E$ olmak üzere $x \leq y$ şartını sağlayan (x, y) noktalarının oluşturduğu E^2 düzleminin bir alt kümesidir. Bir kısmi sıralı kümede $y \leq x$ olduğunu belirtmek için $x \geq y$ de yazılabilir. Diğer bağıntıyla ilgili benzer bir formülleştirmeden sonra, sık sık bu bağıntılardan biriyle ilgili bir tanım ya da teoremi formüle ederken birini belirgin hale getiren “ \leq ”, “ \geq ” bağıntıları arasında doğal bir eşleklik (dualite) vardır (Nachbin 1965).

Bir E kısmi sıralı kümesi göz önüne alınsın. Eğer $a \leq b$ ve $b \in X$ olmak üzere $a \in X$ oluyorsa bu $X \subset E$ alt kümesinin azalan olduğu söylenir. $d(X)$, X i kapsayan azalan kümeler arasındaki en küçük azalan küme olmak üzere her $X \subset E$ alt kümesi şu şekilde belirlenir; bir a noktasının $d(X)$ e ait olması için gerek ve yeter şart $a \leq b$ olmak şartıyla $b \in X$ noktasının bulunabilmesidir. Benzer şekilde, bir artan küme kavramı ve verilen bir $X \subset E$ alt kümesini içeren $i(X)$ en küçük artan küme kavramı tanımlanabilir (Nachbin 1965).

Eğer $a \leq b \leq c$ ve $a, c \in X$ olması durumunda $b \in X$ oluyorsa $X \subset E$ alt kümesi konveks olarak adlandırılır. $c(X)$, X i kapsayan konveks kümeler arasındaki en küçük konveks küme olmak üzere her $X \subset E$ alt kümesi şu şekilde belirlenir; bir b noktasının $c(X)$ e ait olması için gerek ve yeter şart yalnızca $a \leq b \leq c$ olmak şartıyla $a, c \in X$ iki noktasının bulunabilmesidir. Doğal olarak bir kısmi sıralı kümenin her alt kümesi de indirgenmiş kısmi sıralamaya göre bir kısmi sıralı küme olarak kabul edilebilir (Nachbin 1965).

Eğer her $x \in X$ için $x \leq a$ olacak şekilde bir $a \in E$ noktası belirlenebiliyorsa sıralı E kümesinin bu X alt kümesine üstten sınırlıdır denir; bu durumda böyle bir nokta X in bir üst sınırı olarak adlandırılır. Eğer X üstten sınırlı ve X in üst sınırları arasında hepsinden eşit ya da daha küçük olanı varsa X in E de bir supremumu vardır denir. O halde bu sınır tektir ve E de X in supremumu olarak tanımlanır. Benzer şekilde alttan sınırlı bir küme, bir alt sınır ve infimum kavramları da tanımlanabilir (Nachbin 1965).

İki kısmi sıralı E_1 ve E_2 kümeleri göz önüne alınsın. f fonksiyonu E_1 den E_2 ye tanımlansın. Eğer her $x, y \in E_1$ için $x \leq y$ olduğunda $f(x) \leq f(y)$ oluyorsa f fonksiyonunun artan olduğu söylenir. Eğer her $x, y \in E_1$ için $x \leq y$ olduğunda $f(x) \geq f(y)$ oluyorsa f fonksiyonunun azalan olduğu söylenir. Bu tanımlar, özellikle E_2 nin reel sayıların sıralı bir kümesi olması durumunda geçerlidir (Nachbin 1965).

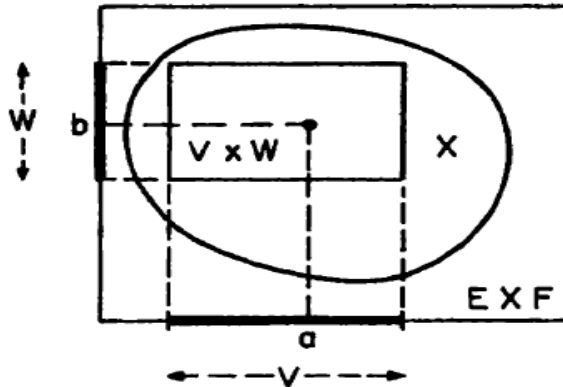
3.3. Topolojik Sıralı Uzaylar

Bu bölümde, bir topoloji ile bir sıralama arasındaki karşılıklı ilişkinin temel bağlantıları incelenecektir. İçerik, normal uzay teorisinin ve kompakt uzay teorisinin temel olgularını genelleştirmekten oluşacaktır. Bu amaçla, bir topolojiye göre kapalı

kısmi sıralama ve bir kısmi sıralamaya göre yerel konveks topoloji kavramları açıkladıktan sonra, bir normal kısmi sıralı uzay kavramı tanımlanacaktır. Bu kavram, göz önüne alınan kısmi sıralama ayrık sıralama olduğunda bir normal uzay üzerine indirgenir. Bir sürekli artan fonksiyon vasıtasıyla iki kapalı kümenin ayrışmasıyla ilgili olan ve sadece uzayın bir kapalı alt kümesi üzerinde tanımlanan bir sürekli artan fonksiyonun tam uzayının genişlemesi ile ilgili olan temel teoremler inşa edilecektir. Bunu takiben, kompakt sıralı uzaylar tanımlanacak ve daha sonra bu uzayların ne kadar ilgi çekici olduğunu göstermek için iki kullanışlı sonuç üzerinde tartışılacaktır. Sonuçlardan biri, her kompakt sıralı uzayın sıralı normalliği ile ilgilidir, diğeri ise sürekli artan fonksiyonların genişlemesi problemi ile ilgilidir (Nachbin 1965).

3.3.1. Kapalı sıralama ve konveks topoloji

Tanım 3.3.1.1: (E, \mathcal{T}_1) ve (F, \mathcal{T}_2) iki topolojik uzay olsun. $E \times F$ çarpım kümesi üzerindeki bir topoloji şu şekilde tanımlanabilir: $E \times F$ çarpım kümesinin bir X alt kümesi göz önüne alınsın. Eğer X boş küme ise ya da her $(a, b) \in X$ için $V \times W \subset X$ olacak şekilde E üzerinde a nın bir V komşuluğu ve F üzerinde b nin bir W komşuluğu bulunabiliyorsa X alt kümesine açıktır denir. $E \times F$ üzerinde bu şekilde elde edilen topoloji, \mathcal{T}_1 ve \mathcal{T}_2 topolojilerinin çarpımı (çarpım topolojisi) olarak adlandırılır. Şekil 3.1 de $E \times F$ kümesi üzerinde tanımlanan çarpım topolojisi açık bir biçimde görülmektedir (Nachbin 1965).



Şekil 3.1: $E \times F$ üzerindeki çarpım topolojisine göre bir X açık kümesi

Tanım 3.3.1.2: Bir kısmi sıralama ile donatılmış bir (X, \mathcal{T}) topolojik uzayı göz önüne alınsın. Eğer X üzerindeki kısmi sıralamanın (özellikle sıralamanın) $X^2 = X \times X$ karesindeki grafiği, X^2 üzerinde elde edilen çarpım topolojik uzayının bir kapalı alt kümesi ise X deki bu kısmi sıralama kapalıdır. Ayrıca, X in her noktasının konveks komşuluklarının kümesi, bu noktanın komşuluklar sistemi için bir taban oluyorsa X in topolojisinin yerel olarak konveks olduğu söylenir (Nachbin 1965).

Önerme 3.3.1.1: X in kısmi sıralamasının kapalı olması için gerekli ve yeterli şart $a \leq b$ yanlış olacak şekilde $a, b \in X$ iki noktası için ayrık olacak şekilde a nın bir V artan komşuluğunun ve b nin bir W azalan komşuluğunun belirlenebilmesidir. X in kısmi sıralaması kapalı ise o zaman her $a \in X$ noktası için $d(a)$ ve $i(a)$ kümeleri kapalıdır (Nachbin 1965).

İspat: Kısmi sıralamanın kapalı ve $a \leq b$ ifadesinin yanlış olduğu kabul edilsin. O halde (a, b) noktası, kısmi sıralamanın grafiği G ye ait olmadığından ve G kapalı olduğundan a nın bir V' komşuluğu ve b nin bir W' komşuluğu belirlenebilir öyle ki;

$$(V' \times W') \cap G = \emptyset$$

dir. Diğer bir ifadeyle, eğer $x \in V'$ ve $y \in W'$ ise o zaman $x \leq y$ ifadesi yanlıştır.

$$V = i(V') \text{ ve } W = d(W')$$

olarak alınsın. $V \supset V'$ olduğundan V nin, a nın bir artan komşuluğu olduğu görülür. Benzer şekilde, $W \supset W'$ olması W nin, b nin bir azalan komşuluğu olmasını gerektirir. Ayrıca V ve W ayrıktır. $z \in V \cap W$ noktasının bulunduğu varsayılınsın. $z \in V$ olduğundan $x \leq z$ olacak şekilde bir $x \in V'$ noktası vardır. Benzer şekilde $z \in W$ noktası, $z \leq y$ olacak şekilde bir $y \in W'$ noktasının varlığını sağlar. $x \leq z$ ve $z \leq y$ eşitsizliklerinden $x \leq y$ elde edilir. Öte yandan $x \in V'$ ve $y \in W'$ olması yukarıda görüldüğü gibi $x \leq y$ olmasını gerektirir. Bu çelişki, V ve W nin gerçekten ayrık olduğunu kanıtlıyor.

Tersine eğer G kapalı değilse X^2 nin bir noktası vardır öyle ki;

$$(a, b) \in X^2 - G \quad (1)$$

dir; yani, $a \leq b$ yanlıştır. O halde a nın keyfi bir artan komşuluğu V ve b nin keyfi bir azalan komşuluğu W alınsın. $V \times W$, (a, b) nin bir komşuluğu olduğundan, (1) deki bağıntı

$$(V \times W) \cap G \neq \emptyset$$

olduğunu gösterir yani, $v \leq w$ olması için $(v, w) \in G$ olacak şekilde $v \in V$ ve $w \in W$ vardır. $v \in V$ ve $v \leq w$ olduğundan ve V artan olduğu için $w \in V$ sonucu çıkar. Böylece w hem V ye hem de W ye aittir; yani V ve W ayrık değildir. Önermenin ilk kısmı böylece kanıtlanmıştır.

Şimdi kısmi sıralamanın kapalı olduğu kabul edilsin. Bir $a \in X$ noktası verildiğinde, eğer $b \in X - i(a)$ ise $a \leq b$ ifadesi yanlıştır. Önermenin ilk bölümü uygulanır ve ayrık olacak şekilde a nın bir artan komşuluğu V ve b nin bir azalan komşuluğu W belirlenir. Buradan $i(a) \subset V$ olması $i(a)$ nın kapalı olduğunu ispatlayan

$$W \cap i(a) = \emptyset$$

eşitliğini verir. Benzer şekilde $d(a)$ için de sonuçlar çıkarılabilir ve böylece önermenin ispatı tamamlanır.

Önerme 3.3.1.2: Bir kapalı sıralama ile donatılmış her (X, \mathcal{T}) topolojik uzayı bir Hausdorff uzayıdır (Nachbin 1965).

İspat: İki farklı $a, b \in X$ noktası göz önüne alınsın. Bir sıralama ile ilgili olması nedeniyle

$$a \leq b, b \leq a$$

iki bağıntısından biri yanlıştır. Birincisinin yanlış olduğunu düşünölsün (ikincinin durumu benzerdir). Önerme 3.3.1.1 in uygulanması, a ve b nin istenildiği gibi ayrık komşuluklara sahip olduğunu gösterir.

Önerme 3.3.1.3: Bir topolojik uzay göz önüne alınsın. Eğer açık azalan ve açık artan alt kümelerden oluşan bir aile bu topolojik uzay için bir açık alt taban olacak şekilde bir sıralama ile donatılmış ise bu uzayın topolojisi yerel olarak konvektir (Nachbin 1965).

İspat: Sonlu sayıdaki açık azalan alt kümelerin arakesitinin bir açık azalan alt küme olduğu ve benzer durumun açık artan alt kümeler için de geçerli olduğu dikkate alınsın. Bu durumda önermenin hipotezi, V bir açık azalan alt küme ve W bir açık artan alt küme olmak üzere $V \cap W$ formunun alt kümelerinin ailesinin bir açık taban olduğunu belirtir. Böylece önerme, $V \cap W$ alt kümelerinin her birinin açık ve konveks olduğu gözleminden sonuçlanır.

3.3.2. Normal sıralı uzaylar

Bu bölümde Urysohn Teoremi nedeniyle normal uzaylar teorisinin temel sonuçları genelleştirilecektir.

Bir kısmi sıralama ile donatılmış (X, \mathcal{T}) topolojik uzayı normal kısmi sıralı olarak adlandırılacaktır. Öyle ki; F_0 azalan ve F_1 artan olmak üzere X in her iki ayrık kapalı alt kümeleri F_0 ve F_1 için A_0, F_0 ı kapsayacak ve azalan olacak şekilde ve A_1, F_1 i kapsayacak ve artan olacak şekilde iki ayrık açık alt kümeler A_0 ve A_1 kümeleri vardır. Ayrıca eğer uzayın kısmi sıralaması bir tam sıralama ise uzaya normal sıralı denir. Şu belirtilmelidir ki: eğer X in sıralaması ayrık sıralama ise X in her alt kümesi aynı anda artan ve azalandır. Bu nedenle, X in normal sıralı olması için gerek ve yeter şart X in normal uzay olmasıdır. Başka bir deyişle, normal sıralı uzay kavramı bir normal uzayın özel bir durumunu içerir (Nachbin 1965).

Bir kısmi sıralama ile donatılmış bir (X, \mathcal{T}) topolojik uzayı göz önüne alınsın. Tüm kapalı azalan alt kümelerin ailesinin, bir topolojik uzayın kapalı alt kümelerinin ailesinin üç karakteristik özelliğine sahip olduğunu doğrulamak kolaydır. Aynı durum tüm kapalı artan alt kümeler için de geçerlidir. Buradan şu sonuç çıkar: Her $Z \subset X$ alt kümesi, tek bir şekilde Z yi kapsayan en küçük kapalı azalan alt küme olarak tanımlanan bir $D(Z) \subset X$ alt kümesini belirler. Benzer şekilde, Z yi kapsayan en küçük kapalı artan alt küme $I(X)$ tanımlanabilir (Nachbin 1965).

Eğer Z ve Y , X in alt kümeleri ise

$$D(Z) \cap I(Y) = \emptyset$$

olduğunu belirtmek için $Z < Y$ yazılır. Ayrıca A alt kümesi Z yi kapsayacak ve azalan olacak şekilde ve B alt kümesi Y yi kapsayacak ve artan olacak şekilde iki ayrık açık alt küme A ve B nin varlığını belirtmek için $Z \ll Y$ notasyonu kullanılır.

Bu düzende, bir kısmi sıralama ile donatılmış (X, \mathcal{T}) topolojik uzayının normal kısmi sıralı olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki eşdeğer koşullardan birini sağlamasıdır:

- a) Eğer $Z, Y \in X$ ve $Z < Y$ ise o zaman $Z \ll Y$ dir.
- b) Eğer $F \subset X$ bir kapalı azalan alt küme, $V \subset X$ bir açık azalan alt küme ve $F \subset V$ ise o zaman

$$F \subset W, D(W) \subset V$$

olacak şekilde bir $W \subset X$ azalan açık alt kümesi vardır (Nachbin 1965).

Aslında ilk olarak X in normal olduğu varsayalım. Eğer $Z, Y \subset X$ ve $Z < Y$ ise o zaman

$$D(Z) \cap I(Y) = \emptyset$$

dir. $D(Z)$, $I(Y)$ kapalı artan alt kümesinden ayrık olan bir kapalı azalan alt küme olduğundan bazı açık artan $B \supset I(Y)$ alt kümesinden ayrık olan bir açık artan $A \supset D(Z)$ alt kümesi vardır. O zaman $A \supset Z$ ve $B \supset Y$ olduğundan $Z \ll Y$ olduğu elde edilir yani, (a) sağlanır.

Şimdi (a) nın sağlandığı ve F ile V nin (b) nin şartlarını sağladığı varsayalım. $Z = F$ nin, kapalı artan $Y = X - V$ alt kümesinden ayrık olan bir kapalı azalan alt küme olduğuna dikkat edilmelidir. Böylelikle $Z < Y$ olduğundan ve (a) uygulanarak $Z \ll Y$ olduğu elde edilir yani, bazı açık artan $B \supset Y$ alt kümelerinden ayrık olan bir açık azalan $A \supset Z$ alt kümesi vardır. $W = A$ olsun. O zaman W bir açık azalan alt kümedir. $W \subset X - B$ olduğundan ve $X - B$ bir kapalı azalan alt küme olduğundan

$$D(W) \subset D(X - B) = X - B \subset X - Y = V$$

sonucu çıkar. Böylece (b) sağlanır.

Son olarak (b) nin sağlandığı kabul edilsin. F_0 , bazı kapalı artan F_1 kümesinden ayrık olan bir kapalı azalan alt küme olsun. $F = F_0$ ve $V = X - F_1$ olarak alındıktan sonra (b) uygulanırsa böylece bir açık azalan W alt kümesi elde edilir öyle ki;

$$F \subset W, D(W) \subset V$$

dir.

$$A_0 = W, A_1 = E - D(W)$$

olarak alınsın. O halde A_0 ve A_1 ayrık açık alt kümelerdir öyle ki; A_0 , F_0 ı kapsar ve azalandır ve A_1 , F_1 i kapsar ve artandır. Böylece X normal kısmi sıralıdır (Nachbin 1965).

Göz önüne alınan kısmi sıralamanın ayrık sıralama olması durumunda aşağıdaki Teorem, bir normal uzayın ayrık kapalı alt kümelerinin ayrışımı üzerindeki Urysohn' ın Teoremine bir sürekli fonksiyon vasıtasıyla indirgenir.

Teorem 3.3.2.1: Bir kısmi sıralama ile donatılmış (X, \mathcal{T}) topolojik uzayını normal kısmi sıralı yapmak için gerekli ve yeterli şart F_0 azalan ve F_1 artan olmak üzere herhangi iki ayrık kapalı $F_0, F_1 \subset X$ alt kümeleri için X üzerinde bir sürekli artan reel değerli f fonksiyonu olmasıdır. Ayrıca bu fonksiyon $x \in F_0$ için $f(x) = 0$,

$x \in F_1$ için $f(x) = 1$ ve $x \in X$ için $0 \leq f(x) \leq 1$ şartlarını sağlamalıdır (Nachbin 1965).



4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Tanım 4.1: (X, \mathcal{T}, \leq) üçlüsü bir topolojik sıralı uzay olsun öyle ki; X boş olmayan bir küme, \mathcal{T} , X üzerinde bir topoloji ve “ \leq ”, X üzerinde bir kısmi sıralamadır. Herhangi bir $x \in X$ için $\{y \in X | x \leq y\}$ kümesi $[x, \rightarrow]$ ile gösterilsin. (X, \mathcal{T}, \leq) topolojik uzayının bir A alt kümesine, $i(A) = \bigcup_{a \in A} [a, \rightarrow]$ olmak şartıyla $A = i(A)$ oluyorsa artandır denir (Veera Kumar 2002).

Tanım 4.2: (X, \mathcal{T}, \leq) üçlüsü bir topolojik sıralı uzay olsun öyle ki; X boş olmayan bir küme, \mathcal{T} , X üzerinde bir topoloji ve “ \leq ”, X üzerinde bir kısmi sıralamadır. Herhangi bir $x \in X$ için $\{y \in X | y \leq x\}$ kümesi $[\leftarrow, x]$ ile gösterilsin. (X, \mathcal{T}, \leq) topolojik uzayının bir A alt kümesine, $d(A) = \bigcup_{a \in A} [\leftarrow, a]$ olmak şartıyla $A = d(A)$ oluyorsa azalandır denir (Veera Kumar 2002).

Tanım 4.3: A , (X, \mathcal{T}, \leq) topolojik sıralı uzayının bir alt kümesi olsun. Bu durumda

$$i(\bar{A}) = \bigcap \{F \mid F, A \text{ yı } \text{içeren } X \text{ in bir artan kapalı alt kümesidir}\}$$

$$d(\bar{A}) = \bigcap \{F \mid F, A \text{ yı } \text{içeren } X \text{ in bir azalan kapalı alt kümesidir}\}$$

$$b(\bar{A}) = \bigcap \{F \mid F, i(F) = d(F) \text{ şartına sahip } A \text{ yı } \text{içeren } X \text{ in bir kapalı alt kümesidir}\}$$

kümeleri tanımlanabilir. Açıktır ki; $i(\bar{A})$ (sırasıyla $d(\bar{A})$, $b(\bar{A})$) kümesi, A yı kapsayan en küçük artan (sırasıyla azalan, hem artan hem de azalan) kapalı kümedir. Burada $\bar{A} \subseteq i(\bar{A}) \subseteq b(\bar{A})$ ve $d(\bar{A}) \subseteq b(\bar{A})$ olur. Ayrıca A nın bir artan kapalı küme olması için gerek ve yeter şart $A = i(\bar{A})$ olmasıdır. Benzer şekilde, A nın bir azalan kapalı küme olması için gerek ve yeter şart $A = d(\bar{A})$ olmasıdır (Veera Kumar 2002).

Tanım 4.4: A , (X, \mathcal{T}) topolojik uzayının bir alt kümesi olmak üzere $A \subseteq U$ ve U , (X, \mathcal{T}) da açık olduğunda eğer $\bar{A} \subseteq U$ oluyorsa A kümesine genelleştirilmiş kapalıdır denir (Levine 1970).

Tanım 4.5: A , (X, \mathcal{T}) topolojik uzayının bir alt kümesi olmak üzere $A \subseteq U$ ve U , (X, \mathcal{T}) da g -açık olduğunda eğer $\bar{A} \subseteq U$ oluyorsa A kümesine g^* -kapalı küme denir (Veera Kumar 2000).

Tanım 4.6: (Veera Kumar 2002) A , (X, \mathcal{T}, \leq) topolojik sıralı uzayının bir alt kümesi olsun. Bu durumda,

- a) Eğer A artan ve kapalı bir küme ise A ya i -kapalı küme denir.

- b) Eğer A azalan ve kapalı bir küme ise A ya d -kapalı küme denir.
- c) Eğer A hem artan hem de azalan ve kapalı bir küme ise A ya b -kapalı küme denir.

Tanım 4.7: (Srinivasarao 2014) A , (X, \mathcal{T}, \leq) topolojik sıralı uzayının bir alt kümesi olsun. Bu durumda,

- a) $A \subseteq U$ ve U , (X, \mathcal{T}) da açık olduğunda eğer $i(\bar{A}) \subseteq U$ oluyorsa A kümesine ig -kapalı küme denir.
- b) $A \subseteq U$ ve U , (X, \mathcal{T}) da açık olduğunda eğer $d(\bar{A}) \subseteq U$ oluyorsa A kümesine dg -kapalı küme denir.
- c) $A \subseteq U$ ve U , (X, \mathcal{T}) da açık olduğunda eğer $b(\bar{A}) \subseteq U$ oluyorsa A kümesine bg -kapalı küme denir.

Teorem 4.1: Her kapalı küme bir g -kapalı kümedir (Srinivasarao *et al* 2015). Aşağıda verilen örnek Teoremin tersinin doğru olmadığını göstermektedir.

Örnek 4.1: $X = \{x, y, z\}$ kümesi üzerindeki bir topoloji $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{x\}\}$ ve bir kısmi sıralama da $\leq_1 = \{(x, x), (y, y), (z, z), (x, y), (y, z), (x, z)\}$ olsun. (X, \mathcal{T}, \leq_1) üçlüsünün bir topolojik sıralı uzay olduğu açıktır. $\emptyset, X, \{y, z\}$ kapalı kümelerdir. $\emptyset, X, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{y, z\}, \{x, z\}$ g -kapalı kümelerdir. $A = \{z\}$ olsun. A kümesi g -kapalıdır fakat kapalı değildir.

Teorem 4.2: Her g^* -kapalı küme bir g -kapalı kümedir (Srinivasarao *et al* 2015).

Aşağıda verilen örnek Teoremin tersinin doğru olmadığını göstermektedir.

Örnek 4.2: $X = \{x, y, z\}$ kümesi üzerindeki bir topoloji $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{x\}\}$ ve bir kısmi sıralama da $\leq_1 = \{(x, x), (y, y), (z, z), (x, y), (y, z), (x, z)\}$ olsun. (X, \mathcal{T}, \leq_1) üçlüsünün bir topolojik sıralı uzay olduğu açıktır. $\emptyset, X, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{y, z\}, \{x, z\}$ g -kapalı kümelerdir. $\emptyset, X, \{y, z\}$ g^* -kapalı kümelerdir. $A = \{z\}$ olsun. O halde A , g -kapalı kümedir fakat g^* -kapalı küme değildir.

Teorem 4.3: Her i -kapalı küme bir ig -kapalı kümedir (Srinivasarao *et al* 2015).

Aşağıda verilen örnek Teoremin tersinin doğru olmadığını göstermektedir.

Örnek 4.3: $X = \{x, y, z\}$ kümesi üzerindeki bir topoloji $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{x\}\}$ ve bir kısmi sıralama da $\leq_2 = \{(x, x), (y, y), (z, z), (x, y), (z, y)\}$ olsun. (X, \mathcal{T}, \leq_2)

üçlüsünün bir topolojik sıralı uzay olduğu açıktır. $\emptyset, X, \{z\}, \{x, y\}$ ig -kapalı kümelerdir. \emptyset, X i -kapalı kümelerdir. $A = \{y\}$ ya da $A = \{x, y\}$ olsun. O halde A , ig -kapalı kümedir fakat i -kapalı küme değildir.

Teorem 4.4: Her d -kapalı küme bir dg -kapalı kümedir (Srinivasarao *et al* 2015).

Aşağıda verilen örnek Teoremin tersinin doğru olmadığını göstermektedir.

Örnek 4.4: $X = \{x, y, z\}$ kümesi üzerindeki bir topoloji $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{x\}\}$ ve bir kısmi sıralama da $\leq_2 = \{(x, x), (y, y), (z, z), (x, y), (z, y)\}$ olsun. (X, \mathcal{T}, \leq_2) üçlüsünün bir topolojik sıralı uzay olduğu açıktır. $\emptyset, X, \{z\}, \{y, z\}$ dg -kapalı kümelerdir. $\emptyset, X, \{y, z\}$ d -kapalı kümelerdir. $A = \{z\}$ olsun. O halde A , dg -kapalı kümedir fakat d -kapalı küme değildir.

Teorem 4.5: Her b -kapalı küme bir bg -kapalı kümedir (Srinivasarao *et al* 2015).

Aşağıda verilen örnek Teoremin tersinin doğru olmadığını göstermektedir.

Örnek 4.5: $X = \{x, y, z\}$ kümesi üzerindeki bir topoloji $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{x\}\}$ ve bir kısmi sıralama da $\leq_3 = \{(x, x), (y, y), (z, z), (x, y), (x, z)\}$ olsun. (X, \mathcal{T}, \leq_3) üçlüsünün bir topolojik sıralı uzay olduğu açıktır. $\emptyset, X, \{z\}$ bg -kapalı kümelerdir. \emptyset, X b -kapalı kümelerdir. $A = \{z\}$ olsun. O halde A , bg -kapalı kümedir fakat b -kapalı küme değildir.

Teorem 4.6: Her bg -kapalı küme bir ig -kapalı kümedir (Srinivasarao *et al* 2015).

Aşağıda verilen örnek Teoremin tersinin doğru olmadığını göstermektedir.

Örnek 4.6: $X = \{x, y, z\}$ kümesi üzerindeki bir topoloji $\sigma = \{X, \emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}\}$ ve bir kısmi sıralama da $\leq_1 = \{(x, x), (y, y), (z, z), (x, y), (y, z), (x, z)\}$ olsun. (X, σ, \leq_1) üçlüsünün bir topolojik sıralı uzay olduğu açıktır. $A = \{z\}$ olsun. O halde A , ig -kapalı kümedir fakat bg -kapalı küme değildir.

Teorem 4.7: Her bg -kapalı küme bir dg -kapalı kümedir (Srinivasarao *et al* 2015).

Aşağıda verilen örnek Teoremin tersinin doğru olmadığını göstermektedir.

Örnek 4.7: $X = \{x, y, z\}$ kümesi üzerindeki bir topoloji $\sigma = \{X, \emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}\}$ ve bir kısmi sıralama da $\leq_3 = \{(x, x), (y, y), (z, z), (x, y), (x, z)\}$ olsun. (X, σ, \leq_3) üçlüsünün bir topolojik sıralı uzay olduğu açıktır. $A = \{x, z\}$ olsun. O halde A , dg -kapalı kümedir fakat bg -kapalı küme değildir.

Teorem 4.8: Her b -kapalı küme bir i -kapalı kümedir (Srinivasarao *et al* 2015).

Aşağıda verilen örnek Teoremin tersinin doğru olmadığını göstermektedir.

Örnek 4.8: $X = \{x, y, z\}$ kümesi üzerindeki bir topoloji $\sigma = \{X, \emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}\}$ ve bir kısmi sıralama da $\leq_1 = \{(x, x), (y, y), (z, z), (x, y), (y, z), (x, z)\}$ olsun. (X, σ, \leq_1) üçlüsünün bir topolojik sıralı uzay olduğu açıktır. $\emptyset, X, \{z\}, \{y, z\}$ i -kapalı kümelerdir. \emptyset, X b -kapalı kümelerdir. $A = \{z\}$ ya da $A = \{y, z\}$ olsun. O halde A , i -kapalı kümedir fakat b -kapalı küme değildir.

Teorem 4.9: Her b -kapalı küme bir d -kapalı kümedir (Srinivasarao *et al* 2015).

Aşağıda verilen örnek Teoremin tersinin doğru olmadığını göstermektedir.

Örnek 4.9: $X = \{x, y, z\}$ kümesi üzerindeki bir topoloji $\sigma = \{X, \emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}\}$ ve bir kısmi sıralama da $\leq_2 = \{(x, x), (y, y), (z, z), (x, y), (z, y)\}$ olsun. (X, σ, \leq_2) üçlüsünün bir topolojik sıralı uzay olduğu açıktır. $\emptyset, X, \{z\}, \{y, z\}$ d -kapalı kümelerdir. \emptyset, X b -kapalı kümelerdir. $A = \{z\}$ ya da $A = \{y, z\}$ olsun. O halde A , d -kapalı kümedir fakat b -kapalı küme değildir.

Teorem 4.10: Her ig^* -kapalı küme bir ig -kapalı kümedir (Srinivasarao *et al* 2015).

Aşağıda verilen örnek Teoremin tersinin doğru olmadığını göstermektedir.

Örnek 4.10: $X = \{x, y, z\}$ kümesi üzerindeki bir topoloji $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{x\}\}$ ve bir kısmi sıralama da $\leq_1 = \{(x, x), (y, y), (z, z), (x, y), (y, z), (x, z)\}$ olsun. (X, \mathcal{T}, \leq_1) üçlüsünün bir topolojik sıralı uzay olduğu açıktır. $\emptyset, X, \{z\}, \{y, z\}$ ig -kapalı kümelerdir. $\emptyset, X, \{y, z\}$ ig^* -kapalı kümelerdir. $A = \{z\}$ olsun. O halde A , ig -kapalı kümedir fakat ig^* -kapalı küme değildir.

Teorem 4.11: Her dg^* -kapalı küme bir dg -kapalı kümedir (Srinivasarao *et al* 2015).

Aşağıda verilen örnek Teoremin tersinin doğru olmadığını göstermektedir.

Örnek 4.11: $X = \{x, y, z\}$ kümesi üzerindeki bir topoloji $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{x\}\}$ ve bir kısmi sıralama da $\leq_2 = \{(x, x), (y, y), (z, z), (x, y), (z, y)\}$ olsun. (X, \mathcal{T}, \leq_2) üçlüsünün bir topolojik sıralı uzay olduğu açıktır. $\emptyset, X, \{z\}, \{y, z\}$ dg -kapalı kümelerdir. $\emptyset, X, \{y, z\}$ dg^* -kapalı kümelerdir. $A = \{z\}$ olsun. A nın dg -kapalı küme olduğu fakat dg^* -kapalı küme olmadığı açıktır. Böylece dg -kapalı kümelerin sınıfı, tüm dg^* -kapalı kümelerin sınıfını tamamen kapsar.

Teorem 4.12: Her bg^* -kapalı küme bir bg -kapalı kümedir (Srinivasarao *et al* 2015).

Aşağıda verilen örnek Teoremin tersinin doğru olmadığını göstermektedir.

Örnek 4.12: $X = \{x, y, z\}$ kümesi üzerindeki bir topoloji $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{x\}\}$ ve bir kısmi sıralama da $\leq_3 = \{(x, x), (y, y), (z, z), (x, y), (x, z)\}$ olsun. (X, \mathcal{T}, \leq_3) üçlüsünün bir topolojik sıralı uzay olduğu açıktır. $\emptyset, X, \{z\}$ bg -kapalı kümelerdir. \emptyset, X bg^* -kapalı kümelerdir. $A = \{z\}$ olsun. A nın bg -kapalı küme olduğu fakat bg^* -kapalı küme olmadığı açıktır. Böylece bg -kapalı kümelerin sınıfı, tüm bg^* -kapalı kümelerin sınıfını tamamen kapsar.

Teorem 4.13: Her bg^* -kapalı küme bir ig^* -kapalı kümedir (Srinivasarao *et al* 2015).

Aşağıda verilen örnek Teoremin tersinin doğru olmadığını göstermektedir.

Örnek 4.13: $X = \{x, y, z\}$ kümesi üzerindeki bir topoloji $\rho = \{X, \emptyset, \{x\}, \{y, z\}\}$ ve bir kısmi sıralama da $\leq_3 = \{(x, x), (y, y), (z, z), (x, y), (x, z)\}$ olsun. (X, ρ, \leq_3) üçlüsünün bir topolojik sıralı uzay olduğu açıktır. $A = \{b\}$ olsun. O halde A , ig^* -kapalı kümedir fakat bg^* -kapalı küme değildir.

Teorem 4.14: Her bg^* -kapalı küme bir dg^* -kapalı kümedir (Srinivasarao *et al* 2015).

Aşağıda verilen örnek Teoremin tersinin doğru olmadığını göstermektedir.

Örnek 4.14: $X = \{x, y, z\}$ kümesi üzerindeki bir topoloji $\sigma = \{X, \emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}\}$ ve bir kısmi sıralama da

$\leq_3 = \{(x, x), (y, y), (z, z), (x, y), (x, z)\}$ olsun. (X, σ, \leq_3) üçlüsünün bir topolojik sıralı uzay olduğu açıktır. $A = \{x, z\}$ olsun. A nın dg^* -kapalı küme olduğu fakat ig^* -kapalı küme olmadığı açıktır. Böylece tüm dg^* -kapalı kümelerin sınıfı, tüm bg^* -kapalı kümelerin sınıfını tamamen kapsar.

Teorem 4.15: Her i -kapalı küme bir ig^* -kapalı kümedir (Srinivasarao *et al* 2015).

Aşağıda verilen örnek Teoremin tersinin doğru olmadığını göstermektedir.

Örnek 4.15: $X = \{x, y, z\}$ kümesi üzerindeki bir topoloji $\rho = \{X, \emptyset, \{x\}, \{y, z\}\}$ ve bir kısmi sıralama da $\leq_2 = \{(x, x), (y, y), (z, z), (x, y), (z, y)\}$ olsun. (X, ρ, \leq_2) üçlüsünün bir topolojik sıralı uzay olduğu açıktır. $\emptyset, X, \{y, z\}$ ig^* -kapalı kümelerdir. \emptyset, X i -kapalı kümelerdir. $A = \{y, z\}$ olsun. A nın ig^* -kapalı küme olduğu fakat i -kapalı küme olmadığı açıktır. Böylece tüm ig^* -kapalı kümelerin sınıfı, tüm i -kapalı kümelerin sınıfını tamamen kapsar.

Teorem 4.16: Her d -kapalı küme bir dg^* -kapalı kümedir (Srinivasarao *et al* 2015).

Aşağıda verilen örnek Teoremin tersinin doğru olmadığını göstermektedir.

Örnek 4.16: $X = \{x, y, z\}$ kümesi üzerindeki bir topoloji $\rho = \{X, \emptyset, \{x\}, \{y, z\}\}$ ve bir kısmi sıralama da $\leq_2 = \{(x, x), (y, y), (z, z), (x, y), (z, y)\}$ olsun. (X, ρ, \leq_2) üçlüsünün bir topolojik sıralı uzay olduğu açıktır. $\emptyset, X, \{y, z\}$ dg^* -kapalı kümelerdir. \emptyset, X d -kapalı kümelerdir. $A = \{y, z\}$ olsun. O halde A , dg^* -kapalı kümedir fakat d -kapalı küme değildir. Böylece tüm dg^* -kapalı kümelerin sınıfı, tüm d -kapalı kümelerin sınıfını tamamen kapsar.

Teorem 4.17: Her b -kapalı küme bir bg^* -kapalı kümedir (Srinivasarao *et al* 2015).

Aşağıda verilen örnek Teoremin tersinin doğru olmadığını göstermektedir.

Örnek 4.17: $X = \{x, y, z\}$ kümesi üzerindeki bir topoloji $\tau = \{X, \emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}, \{x, z\}\}$ ve bir kısmi sıralama da $\leq_4 = \{(x, x), (y, y), (z, z), (y, z), (z, x), (y, x)\}$ olsun. (X, τ, \leq_4) üçlüsünün bir topolojik sıralı uzay olduğu açıktır. $\emptyset, X, \{y\}$ bg^* -kapalı kümelerdir. \emptyset, X b -kapalı kümelerdir. $A = \{y\}$ olsun. O halde A , bg^* -kapalı kümedir fakat b -kapalı küme

değildir. Böylece tüm bg^* -kapalı kümelerin sınıfı, tüm b -kapalı kümelerin sınıfını tamamen kapsar.

Teorem 4.18: Her bg^* -kapalı küme bir ig -kapalı kümedir (Srinivasarao *et al* 2015).

Aşağıda verilen örnek Teoremin tersinin doğru olmadığını göstermektedir.

Örnek 4.18: $X = \{x, y, z\}$ kümesi üzerindeki bir topoloji $\sigma = \{X, \emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}\}$ ve bir kısmi sıralama da $\leq_3 = \{(x, x), (y, y), (z, z), (x, y), (x, z)\}$ olsun. (X, σ, \leq_3) üçlüsünün bir topolojik sıralı uzay olduğu açıktır. \emptyset, X bg^* -kapalı kümelerdir. $\emptyset, X, \{z\}, \{y, z\}$ ig -kapalı kümelerdir. $A = \{z\}$ ya da $A = \{y, z\}$ olsun. O halde A , ig -kapalı kümedir fakat bg^* -kapalı küme değildir. Böylece tüm ig -kapalı kümelerin sınıfı, tüm bg^* -kapalı kümelerin sınıfını tamamen kapsar.

Teorem 4.19: Her bg^* -kapalı küme bir dg -kapalı kümedir (Srinivasarao *et al* 2015).

Aşağıda verilen örnek Teoremin tersinin doğru olmadığını göstermektedir.

Örnek 4.19: $X = \{x, y, z\}$ kümesi üzerindeki bir topoloji $\sigma = \{X, \emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}\}$ ve bir kısmi sıralama da $\leq_2 = \{(x, x), (y, y), (z, z), (x, y), (z, y)\}$ olsun. (X, σ, \leq_2) üçlüsünün bir topolojik sıralı uzay olduğu açıktır. \emptyset, X bg^* -kapalı kümelerdir. $\emptyset, X, \{z\}, \{y, z\}$ dg -kapalı kümelerdir. $A = \{z\}$ ya da $A = \{y, z\}$ olsun. O halde A , dg -kapalı kümedir fakat bg^* -kapalı küme değildir.

Tanım 4.8: (Srinivasarao *et al* 2015) (X, \mathcal{T}, \leq) bir topolojik sıralı uzay olsun. O halde

- i. Eğer her ig -kapalı küme, kapalı ise (X, \mathcal{T}) topolojik uzayı bir $i - T_{1/2}$ uzayıdır.
- ii. Eğer her dg -kapalı küme, kapalı ise (X, \mathcal{T}) topolojik uzayı bir $d - T_{1/2}$ uzayıdır.
- iii. Eğer her bg -kapalı küme, kapalı ise (X, \mathcal{T}) topolojik uzayı bir $b - T_{1/2}$ uzayıdır.

Teorem 4.20: Her $i - T_{1/2}$ uzayı $b - T_{1/2}$ uzayıdır (Srinivasarao *et al* 2015).

İspat: (X, \mathcal{T}, \leq) üçlüsü $i-T_{1/2}$ uzayı olsun. A kümesi X in bir bg -kapalı alt kümesi olsun. O halde A kümesi bir ig -kapalı kümedir. (X, \mathcal{T}, \leq) uzayı bir $i-T_{1/2}$ uzayı olduğu için A bir kapalı kümedir. Bu nedenle her bg -kapalı küme bir kapalı kümedir. Böylece (X, \mathcal{T}) topolojik uzayı bir $b-T_{1/2}$ uzayıdır. Aşağıda verilen örnek Teoremin tersinin doğru olmadığını göstermektedir.

Örnek 4.20: $X = \{x, y, z\}$ kümesi üzerindeki bir topoloji $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{x\}\}$ ve bir kısmi sıralama da $\leq_2 = \{(x, x), (y, y), (z, z), (x, y), (z, y)\}$ olsun. (X, \mathcal{T}, \leq_2) üçlüsünün bir topolojik sıralı uzay olduğu açıktır. \emptyset, X bg -kapalı kümelerdir. $\emptyset, X, \{y, z\}$ kapalı kümelerdir. Burada her bg -kapalı küme bir kapalı kümedir. Böylece (X, \mathcal{T}, \leq_2) üçlüsü $b-T_{1/2}$ uzayıdır.

Teorem 4.21: Her $d-T_{1/2}$ uzayı $b-T_{1/2}$ uzayıdır (Srinivasarao *et al* 2015).

İspat: (X, \mathcal{T}, \leq) üçlüsü $d-T_{1/2}$ uzayı olsun. A kümesi X in bir bg -kapalı alt kümesi olsun. O halde A kümesi X in bir dg -kapalı alt kümesidir. (X, \mathcal{T}, \leq) uzayı bir $d-T_{1/2}$ uzayı olduğu için A bir kapalı kümedir. Bu nedenle her $d-T_{1/2}$ uzayı $b-T_{1/2}$ uzayıdır. Aşağıda verilen örnek Teoremin tersinin doğru olmadığını göstermektedir.

Örnek 4.21: $X = \{x, y, z\}$ kümesi üzerindeki bir topoloji $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{x\}\}$ ve bir kısmi sıralama da $\leq_2 = \{(x, x), (y, y), (z, z), (x, y), (z, y)\}$ olsun. (X, \mathcal{T}, \leq_2) üçlüsünün bir topolojik sıralı uzay olduğu açıktır. \emptyset, X bg -kapalı kümelerdir. \emptyset, X kapalı kümelerdir. Burada her bg -kapalı küme bir kapalı kümedir. Böylece (X, \mathcal{T}, \leq_2) üçlüsü $b-T_{1/2}$ uzayıdır. $\emptyset, X, \{z\}, \{y, z\}$ dg -kapalı kümelerdir. Burada $\{z\}$ ya da $\{y, z\}$ kapalı küme değildir. Bu takdirde (X, \mathcal{T}, \leq_2) üçlüsü bir $d-T_{1/2}$ uzayı değildir.

Sonuç 4.1: $i-T_{1/2}$ uzayı ile $d-T_{1/2}$ uzayı aşağıda verilen örneklerde de görüldüğü üzere bağımsız kavramlardır.

Örnek 4.22: $X = \{x, y, z\}$ kümesi üzerindeki bir topoloji $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{x\}\}$ ve bir kısmi sıralama da $\leq_1 = \{(x, x), (y, y), (z, z), (x, y), (y, z), (x, z)\}$ olsun. (X, \mathcal{T}, \leq_1) üçlüsünün bir topolojik sıralı uzay olduğu açıktır. $\emptyset, X, \{y, z\}$ kapalı kümelerdir. $\emptyset, X, \{z\}, \{y, z\}$ ig -kapalı kümelerdir ve \emptyset, X dg -kapalı kümelerdir. Burada her dg -kapalı küme bir kapalı kümedir. Böylece (X, \mathcal{T}, \leq_1) üçlüsü $d-T_{1/2}$

uzayıdır. $A = \{z\}$ olsun. A kümesi bir ig -kapalı kümedir fakat bir kapalı küme değildir. Bu takdirde (X, \mathcal{T}, \leq_1) üçlüsü bir $i-T_{1/2}$ uzayı değildir.

Örnek 4.23: $X = \{x, y, z\}$ kümesi üzerindeki bir topoloji $\rho = \{X, \emptyset, \{x\}, \{y, z\}\}$ ve bir kısmi sıralama da $\leq_3 = \{(x, x), (y, y), (z, z), (x, y), (x, z)\}$ olsun. (X, ρ, \leq_3) üçlüsünün bir topolojik sıralı uzay olduğu açıktır. $\emptyset, X, \{x\}, \{y, z\}$ kapalı kümelerdir. \emptyset, X ig -kapalı kümelerdir. $\emptyset, X, \{z\}$ dg -kapalı kümelerdir. Burada her ig -kapalı küme bir kapalı kümedir. Böylece (X, ρ, \leq_3) üçlüsü $i-T_{1/2}$ uzayıdır. $A = \{z\}$ olsun. A kümesi bir dg -kapalı kümedir fakat bir kapalı küme değildir. Bu takdirde (X, ρ, \leq_3) üçlüsü bir $d-T_{1/2}$ uzayı değildir.

Tanım 4.9: (Srinivasarao *et al* 2015) (X, \mathcal{T}, \leq) bir topolojik sıralı uzay olsun. O halde

- i. Eğer her ig -kapalı küme bir i -kapalı küme ise (X, \mathcal{T}) topolojik uzayı bir $i - T_{i,1/2}$ uzayıdır.
- ii. Eğer her dg -kapalı küme bir d -kapalı küme ise (X, \mathcal{T}) topolojik uzayı bir $d - T_{d,1/2}$ uzayıdır.
- iii. Eğer her bg -kapalı küme bir b -kapalı küme ise (X, \mathcal{T}) topolojik uzayı bir $b - T_{b,1/2}$ uzayıdır.
- iv. Eğer her kapalı küme bir i -kapalı küme ise (X, \mathcal{T}) topolojik uzayı bir $c - T_i$ uzayıdır.
- v. Eğer her kapalı küme bir d -kapalı küme ise (X, \mathcal{T}) topolojik uzayı bir $c - T_d$ uzayıdır.
- vi. Eğer her kapalı küme bir b -kapalı küme ise (X, \mathcal{T}) topolojik uzayı bir $c - T_b$ uzayıdır.
- vii. Eğer her i -kapalı küme bir b -kapalı küme ise (X, \mathcal{T}) topolojik uzayı bir $i - T_b$ uzayıdır.
- viii. Eğer her d -kapalı küme bir b -kapalı küme ise (X, \mathcal{T}) topolojik uzayı bir $d - T_b$ uzayıdır.

Teorem 4.22: Her $c-T_b$ uzayı bir $c-T_i$ uzayıdır (Srinivasarao *et al* 2015).

İspat: (X, \mathcal{T}, \leq) üçlüsü $c - T_b$ uzayı olsun. A kümesi X in bir kapalı alt kümesi olsun. (X, \mathcal{T}, \leq) uzayı bir $c-T_b$ uzayı olduğu için A bir b -kapalı kümedir.

Böylece A bir i -kapalı kümedir. Bu nedenle her kapalı küme bir i -kapalı kümedir. O zaman (X, \mathcal{T}, \leq) uzayı bir $c-T_i$ uzayıdır. Böylece her $c-T_b$ uzayı bir $c-T_i$ uzayıdır. Aşağıda verilen örnek Teoremin tersinin doğru olmadığını göstermektedir.

Örnek 4.24: $X = \{x, y, z\}$ kümesi üzerindeki bir topoloji $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{x\}\}$ ve bir kısmi sıralama da $\leq_1 = \{(x, x), (y, y), (z, z), (x, y), (y, z), (x, z)\}$ olsun. (X, \mathcal{T}, \leq_1) üçlüsünün bir topolojik sıralı uzay olduğu açıktır. $\emptyset, X, \{y, z\}$ kapalı kümelerdir. $\emptyset, X, \{y, z\}$ i -kapalı kümelerdir ve \emptyset, X b -kapalı kümelerdir. Burada her kapalı küme bir i -kapalı kümedir. $A = \{y, z\}$ olsun. A kümesi bir kapalı kümedir fakat bir b -kapalı küme değildir. Bu takdirde (X, \mathcal{T}, \leq_1) üçlüsü bir $c-T_i$ uzayıdır fakat $c-T_b$ uzayı değildir.

Teorem 4.23: Her $c-T_b$ uzayı bir $c-T_d$ uzayıdır (Srinivasarao *et al* 2015).

İspat: (X, \mathcal{T}, \leq) üçlüsü $c-T_b$ uzayı olsun. A kümesi X in bir kapalı alt kümesi olsun. (X, \mathcal{T}, \leq) uzayı bir $c-T_b$ uzayı olduğu için A bir b -kapalı kümedir. Böylece A bir d -kapalı kümedir. Bu nedenle her kapalı küme bir d -kapalı kümedir. O zaman (X, \mathcal{T}, \leq) uzayı bir $c-T_d$ uzayıdır. Böylece her $c-T_b$ uzayı bir $c-T_d$ uzayıdır. Aşağıda verilen örnek Teoremin tersinin doğru olmadığını göstermektedir.

Örnek 4.25: $X = \{x, y, z\}$ kümesi üzerindeki bir topoloji $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{x\}\}$ ve bir kısmi sıralama da $\leq_2 = \{(x, x), (y, y), (z, z), (x, y), (z, y)\}$ olsun. (X, \mathcal{T}, \leq_2) üçlüsünün bir topolojik sıralı uzay olduğu açıktır. $\emptyset, X, \{y, z\}$ kapalı kümelerdir. $\emptyset, X, \{y, z\}$ i -kapalı kümelerdir ve \emptyset, X b -kapalı kümelerdir. Burada her kapalı küme bir d -kapalı kümedir. $A = \{y, z\}$ olsun. A kümesi bir kapalı kümedir fakat bir b -kapalı küme değildir. Bu takdirde (X, \mathcal{T}, \leq_2) üçlüsü bir $c-T_d$ uzayıdır fakat $c-T_b$ uzayı değildir.

Teorem 4.24: Her $c-T_b$ uzayı bir $i-T_b$ uzayıdır (Srinivasarao *et al* 2015).

İspat: (X, \mathcal{T}, \leq) üçlüsü $c-T_b$ uzayı olsun. A kümesi bir i -kapalı küme olsun. O halde A bir kapalı kümedir. (X, \mathcal{T}, \leq) uzayı bir $c-T_b$ uzayı olduğu için A bir b -kapalı kümedir. Bu nedenle her i -kapalı küme bir b -kapalı kümedir. O zaman (X, \mathcal{T}, \leq) uzayı bir $i-T_b$ uzayıdır. Böylece her $c-T_b$ uzayı bir $i-T_b$ uzayıdır. Aşağıda verilen örnek Teoremin tersinin doğru olmadığını göstermektedir.

Örnek 4.26: $X = \{x, y, z\}$ kümesi üzerindeki bir topoloji $\sigma = \{X, \emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}\}$ ve bir kısmi sıralama da

$\leq_2 = \{(x, x), (y, y), (z, z), (x, y), (z, y)\}$ olsun. (X, σ, \leq_2) üçlüsünün bir topolojik sıralı uzay olduğu açıktır. $\emptyset, X, \{z\}, \{x, z\}, \{y, z\}$ kapalı kümelerdir. \emptyset, X i -kapalı kümelerdir ve \emptyset, X b -kapalı kümelerdir. Her kapalı kümenin bir b -kapalı küme olmadığı durumda her i -kapalı küme bir b -kapalı kümedir. $A = \{z\}, A = \{x, z\}$ ya da $A = \{y, z\}$ olsun. A kümesi bir kapalı kümedir fakat bir b -kapalı küme değildir. Bu takdirde (X, σ, \leq_2) üçlüsü bir $i-T_b$ uzayıdır fakat $c-T_b$ uzayı değildir.

Teorem 4.25: Her $c-T_b$ uzayı bir $d-T_b$ uzayıdır (Srinivasarao *et al* 2015).

İspat: (X, \mathcal{T}, \leq) üçlüsü $c-T_b$ uzayı olsun. A kümesi bir d -kapalı küme olsun. O halde A bir kapalı kümedir. (X, \mathcal{T}, \leq) uzayı bir $c-T_b$ uzayı olduğu için A bir b -kapalı kümedir. Bu nedenle her d -kapalı küme bir b -kapalı kümedir. Böylece her $c-T_b$ uzayı bir $d-T_b$ uzayıdır. Aşağıda verilen örnek Teoremin tersinin doğru olmadığını göstermektedir.

Örnek 4.27: $X = \{x, y, z\}$ kümesi üzerindeki bir topoloji $\sigma = \{X, \emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}\}$ ve bir kısmi sıralama da $\leq_1 = \{(x, x), (y, y), (z, z), (x, y), (y, z), (x, z)\}$ olsun. $\emptyset, X, \{z\}, \{x, z\}, \{y, z\}$ kapalı kümelerdir. \emptyset, X d -kapalı kümelerdir ve \emptyset, X b -kapalı kümelerdir. $A = \{z\}$ kümesi bir b -kapalı küme değildir. Her d -kapalı küme bir b -kapalı kümedir. Bu takdirde (X, σ, \leq_1) üçlüsü bir $d-T_b$ uzayıdır fakat $c-T_b$ uzayı değildir.

Sonuç 4.2: $i-T_b$ uzayı ile $c-T_b$ uzayı aşağıda verilen örnekte de görüldüğü gibi bağımsız kavramlardır.

Örnek 4.28: $X = \{x, y, z\}$ kümesi üzerindeki bir topoloji $\sigma = \{X, \emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}\}$ ve bir kısmi sıralama da $\leq_2 = \{(x, x), (y, y), (z, z), (x, y), (z, y)\}$ olsun. $\emptyset, X, \{z\}, \{x, z\}, \{y, z\}$ kapalı kümelerdir. \emptyset, X i -kapalı kümelerdir ve \emptyset, X b -kapalı kümelerdir. Her kapalı kümenin bir b -kapalı küme olmadığı durumda her i -kapalı küme bir b -kapalı kümedir. Bu takdirde (X, σ, \leq_2) üçlüsü bir $i-T_b$ uzayıdır fakat $c-T_b$ uzayı değildir.

Sonuç 4.3: $d-T_b$ uzayı ile $c-T_b$ uzayı aşağıda verilen örnekte de görüldüğü gibi bağımsız kavramlardır.

Örnek 4.29: $X = \{x, y, z\}$ kümesi üzerindeki bir topoloji $\sigma = \{X, \emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}\}$ ve bir kısmi sıralama da $\leq_1 = \{(x, x), (y, y), (z, z), (x, y), (y, z), (x, z)\}$ olsun. $\emptyset, X, \{z\}, \{x, z\}, \{y, z\}$ kapalı

kümelerdir. \emptyset, X d -kapalı kümelerdir ve \emptyset, X b -kapalı kümelerdir. $A = \{z\}$ kümesi bir b -kapalı küme değildir. Her d -kapalı küme bir b -kapalı kümedir. Bu takdirde (X, σ, \leq_1) üçlüsü bir $d-T_b$ uzayıdır fakat $c-T_b$ uzayı değildir.

Sonuç 4.4: $i-T_b$ uzayı ile $d-T_b$ uzayı aşağıda verilen örneklerde de görüldüğü gibi bağımsız kavramlardır.

Örnek 4.30: $X = \{x, y, z\}$ kümesi üzerindeki bir topoloji $\sigma = \{X, \emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}\}$ ve bir kısmi sıralama da $\leq_1 = \{(x, x), (y, y), (z, z), (x, y), (y, z), (x, z)\}$ olsun. $\emptyset, X, \{z\}, \{y, z\}$ i -kapalı kümelerdir. \emptyset, X d -kapalı kümelerdir. \emptyset, X b -kapalı kümelerdir. Her i -kapalı kümenin bir b -kapalı küme olmadığı durumda her d -kapalı küme bir b -kapalı kümedir. Bu takdirde (X, σ, \leq_1) üçlüsü bir $d-T_b$ uzayıdır fakat $i-T_b$ uzayı değildir.

Örnek 4.31: $X = \{x, y, z\}$ kümesi üzerindeki bir topoloji $\sigma = \{X, \emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}\}$ ve bir kısmi sıralama da $\leq_2 = \{(x, x), (y, y), (z, z), (x, y), (z, y)\}$ olsun. $\emptyset, X, \{z\}, \{y, z\}$ d -kapalı kümelerdir. \emptyset, X i -kapalı kümelerdir. \emptyset, X b -kapalı kümelerdir. $A = \{z\}$ ya da $A = \{y, z\}$ olsun. Bu durumda A bir d -kapalı kümedir fakat bir b -kapalı küme değildir. Her d -kapalı kümenin bir b -kapalı küme olmadığı durumda her i -kapalı küme bir b -kapalı kümedir. Bu takdirde (X, σ, \leq_2) üçlüsü bir $i-T_b$ uzayıdır fakat $d-T_b$ uzayı değildir.

Sonuç 4.5: $i-T_b$ uzayı ile $c-T_i$ uzayı aşağıda verilen örneklerde de görüldüğü gibi bağımsız kavramlardır.

Örnek 4.32: $X = \{x, y, z\}$ kümesi üzerindeki bir topoloji $\sigma = \{X, \emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}\}$ ve bir kısmi sıralama da $\leq_2 = \{(x, x), (y, y), (z, z), (x, y), (z, y)\}$ olsun. \emptyset, X i -kapalı kümelerdir. $\emptyset, X, \{z\}, \{y, z\}, \{x, z\}$ kapalı kümelerdir. \emptyset, X b -kapalı kümelerdir. $A = \{z\}$ ya da $A = \{y, z\}$ olsun. Bu durumda A bir kapalı kümedir fakat bir b -kapalı küme değildir. Her kapalı kümenin bir b -kapalı küme olmadığı durumda her i -kapalı küme bir b -kapalı kümedir. Bu takdirde (X, σ, \leq_2) üçlüsü bir $i-T_b$ uzayıdır fakat $c-T_i$ uzayı değildir.

Örnek 4.33: $X = \{x, y, z\}$ kümesi üzerindeki bir topoloji $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{x\}\}$ ve bir kısmi sıralama da $\leq_1 = \{(x, x), (y, y), (z, z), (x, y), (y, z), (x, z)\}$ olsun. $\emptyset, X, \{y, z\}$ kapalı kümelerdir. $\emptyset, X, \{y, z\}$ i -kapalı kümelerdir. \emptyset, X b -kapalı kümelerdir. Burada her kapalı küme bir i -kapalı kümedir. $A = \{y, z\}$ olsun. Bu durumda A bir i -

kapalı kümedir fakat bir b -kapalı küme değildir. Bu takdirde (X, \mathcal{T}, \leq_1) üçlüsü bir $c-T_i$ uzayıdır fakat $i-T_b$ uzayı değildir.

Sonuç 4.6: $d-T_b$ uzayı ile $c-T_d$ uzayı aşağıda verilen örneklerde de görüldüğü gibi bağımsız kavramlardır.

Örnek 4.34: $X = \{x, y, z\}$ kümesi üzerindeki bir topoloji $\sigma = \{X, \emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}\}$ ve bir kısmi sıralama da $\leq_5 = \{(x, x), (y, y), (z, z), (y, x), (y, z), (x, z)\}$ olsun. (X, σ, \leq_5) üçlüsünün bir topolojik sıralı uzay olduğu açıktır. Burada $\emptyset, X, \{y, z\}$ kapalı kümelerdir. \emptyset, X d -kapalı kümelerdir. \emptyset, X b -kapalı kümelerdir. $A = \{y, z\}$ olsun. Bu durumda A bir kapalı kümedir fakat bir d -kapalı küme değildir. Her d -kapalı küme bir b -kapalı kümedir. Bu takdirde (X, \mathcal{T}, \leq_5) üçlüsü bir $d-T_b$ uzayıdır fakat $c-T_d$ uzayı değildir.

Örnek 4.35: $X = \{x, y, z\}$ kümesi üzerindeki bir topoloji $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{x\}\}$ ve bir kısmi sıralama da $\leq_2 = \{(x, x), (y, y), (z, z), (x, y), (z, y)\}$ olsun. $\emptyset, X, \{y, z\}$ kapalı kümelerdir. $\emptyset, X, \{y, z\}$ d -kapalı kümelerdir. \emptyset, X b -kapalı kümelerdir. Her d -kapalı kümenin bir b -kapalı küme olmadığı durumda her kapalı küme bir d -kapalı kümedir. $A = \{y, z\}$ olsun. Bu durumda A bir kapalı kümedir fakat bir b -kapalı küme değildir. Bu takdirde (X, \mathcal{T}, \leq_2) üçlüsü bir $c-T_d$ uzayıdır fakat $d-T_b$ uzayı değildir.

Sonuç 4.7: $i - T_{i,1/2}$ uzayı ile $b - T_{b,1/2}$ uzayı aşağıda verilen örneklerde de görüldüğü gibi bağımsız kavramlardır.

Örnek 4.36: $X = \{x, y, z\}$ kümesi üzerindeki bir topoloji $\tau = \{X, \emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}, \{x, z\}\}$ ve bir kısmi sıralama da $\leq_4 = \{(x, x), (y, y), (z, z), (y, z), (z, x), (y, x)\}$ olsun. (X, τ, \leq_4) üçlüsünün bir topolojik sıralı uzay olduğu açıktır. $\emptyset, X, \{x, z\}$ i -kapalı kümelerdir. $\emptyset, X, \{x, z\}$ ig -kapalı kümelerdir. \emptyset, X b -kapalı kümelerdir. $\emptyset, X, \{y\}$ bg -kapalı kümelerdir. Her ig -kapalı küme bir i -kapalı kümedir. Böylece (X, τ, \leq_4) üçlüsü bir $i - T_{i,1/2}$ uzayıdır. $A = \{y\}$ olsun. Bu durumda A bir bg -kapalı kümedir fakat bir b -kapalı küme değildir. Bu takdirde (X, τ, \leq_4) üçlüsü bir $b - T_{b,1/2}$ uzayı değildir.

Örnek 4.37: $X = \{x, y, z\}$ kümesi üzerindeki bir topoloji $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{x\}\}$ ve bir kısmi sıralama da $\leq_1 = \{(x, x), (y, y), (z, z), (x, y), (y, z), (x, z)\}$ olsun. $\emptyset, X, \{y, z\}$ i -kapalı kümelerdir. $\emptyset, X, \{z\}, \{y, z\}$ ig -kapalı kümelerdir. \emptyset, X b -kapalı kümelerdir. Her bg -kapalı küme bir b -kapalı kümedir. $A = \{z\}$ olsun. Bu durumda A

bir ig -kapalı kümedir fakat bir i -kapalı küme değildir. Bu takdirde (X, \mathcal{T}, \leq_1) üçlüsü bir $b - T_{b,1/2}$ uzayıdır fakat $i - T_{i,1/2}$ uzayı değildir.

Sonuç 4.8: $d - T_{d,1/2}$ uzayı ile $b - T_{b,1/2}$ uzayı aşağıda verilen örneklerde de görüldüğü gibi bağımsız kavramlardır.

Örnek 4.38: $X = \{x, y, z\}$ kümesi üzerindeki bir topoloji $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{x\}\}$ ve bir kısmi sıralama da $\leq_2 = \{(x, x), (y, y), (z, z), (x, y), (z, y)\}$ olsun. $\emptyset, X, \{y, z\}$ d -kapalı kümelerdir. $\emptyset, X, \{z\}, \{y, z\}$ dg -kapalı kümelerdir. \emptyset, X bg -kapalı kümelerdir. \emptyset, X b -kapalı kümelerdir. Her bg -kapalı küme bir b -kapalı kümedir. $A = \{z\}$ olsun. Bu durumda A bir dg -kapalı kümedir fakat bir d -kapalı küme değildir. Bu takdirde (X, \mathcal{T}, \leq_2) üçlüsü bir $b - T_{b,1/2}$ uzayıdır fakat $d - T_{d,1/2}$ uzayı değildir.

Örnek 4.39: $X = \{x, y, z\}$ kümesi üzerindeki bir topoloji $\tau = \{X, \emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}, \{x, z\}\}$ ve bir kısmi sıralama da $\leq_4 = \{(x, x), (y, y), (z, z), (y, z), (z, x), (y, x)\}$ olsun. $\emptyset, X, \{y\}, \{y, z\}$ d -kapalı kümelerdir. $\emptyset, X, \{y\}, \{y, z\}$ dg -kapalı kümelerdir. \emptyset, X b -kapalı kümelerdir. $\emptyset, X, \{y\}$ bg -kapalı kümelerdir. Her dg -kapalı küme bir d -kapalı kümedir. Böylece (X, τ, \leq_4) üçlüsü bir $d - T_{d,1/2}$ uzayıdır. $A = \{y\}$ olsun. Bu durumda A bir bg -kapalı kümedir fakat bir b -kapalı küme değildir. Bu takdirde (X, τ, \leq_4) üçlüsü bir $b - T_{b,1/2}$ uzayı değildir.

Sonuç 4.9: $i - T_{i,1/2}$ uzayı ile $b - T_{b,1/2}$ uzayı aşağıda verilen örneklerde de görüldüğü gibi bağımsız kavramlardır.

Örnek 4.40: $X = \{x, y, z\}$ kümesi üzerindeki bir topoloji $\tau = \{X, \emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}, \{x, z\}\}$ ve bir kısmi sıralama da $\leq_4 = \{(x, x), (y, y), (z, z), (y, z), (z, x), (y, x)\}$ olsun. $\emptyset, X, \{x, z\}$ i -kapalı kümelerdir. $\emptyset, X, \{x, z\}$ ig -kapalı kümelerdir. \emptyset, X b -kapalı kümelerdir. $\emptyset, X, \{y\}$ bg -kapalı kümelerdir. Her ig -kapalı küme bir i -kapalı kümedir. Böylece (X, τ, \leq_4) üçlüsü bir $i - T_{i,1/2}$ uzayıdır. $A = \{y\}$ olsun. Bu durumda A bir bg -kapalı kümedir fakat bir b -kapalı küme değildir. Bu takdirde (X, τ, \leq_4) üçlüsü bir $b - T_{b,1/2}$ uzayı değildir.

Örnek 4.41: $X = \{x, y, z\}$ kümesi üzerindeki bir topoloji $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{x\}\}$ ve bir kısmi sıralama da $\leq_1 = \{(x, x), (y, y), (z, z), (x, y), (y, z), (x, z)\}$ olsun. $\emptyset, X, \{y, z\}$ i -kapalı kümelerdir. $\emptyset, X, \{z\}, \{y, z\}$ ig -kapalı kümelerdir. \emptyset, X b -kapalı

kümelerdir. Her bg -kapalı küme bir b -kapalı kümedir. $A = \{z\}$ olsun. Bu durumda A bir ig -kapalı kümedir fakat bir i -kapalı küme değildir. Bu takdirde (X, \mathcal{T}, \leq_1) üçlüsü bir $b - T_{b,1/2}$ uzayıdır fakat $i - T_{i,1/2}$ uzayı değildir.

Teorem 4.26: Her $i - T_b$ uzayı bir $b - T_{b,1/2}$ uzayıdır (Srinivasarao *et al* 2015).

İspat: (X, \mathcal{T}, \leq) üçlüsü $i - T_b$ uzayı olsun. A kümesi bir bg -kapalı küme olsun. O halde A bir ig -kapalı kümedir. (X, \mathcal{T}, \leq) uzayı bir $i - T_b$ uzayı olduğu için A bir b -kapalı kümedir. Bu nedenle her bg -kapalı küme bir b -kapalı kümedir. Böylece her $i - T_b$ uzayı bir $b - T_{b,1/2}$ uzayıdır. Aşağıda verilen örnek Teoremin tersinin doğru olmadığını göstermektedir.

Örnek 4.42: $X = \{x, y, z\}$ kümesi üzerindeki bir topoloji $\sigma = \{X, \emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}\}$ ve bir kısmi sıralama da $\leq_1 = \{(x, x), (y, y), (z, z), (x, y), (y, z), (x, z)\}$ olsun. Burada $\emptyset, X, \{z\}, \{y, z\}$ i -kapalı kümelerdir. \emptyset, X b -kapalı kümelerdir. \emptyset, X bg -kapalı kümelerdir. $A = \{z\}$ ya da $A = \{y, z\}$ olsun. Bu durumda A bir i -kapalı kümedir fakat bir b -kapalı küme değildir. Her bg -kapalı küme bir b -kapalı kümedir. Bu takdirde (X, σ, \leq_1) üçlüsü bir $b - T_{b,1/2}$ uzayıdır fakat $i - T_b$ uzayı değildir.

Teorem 4.27: Her $d - T_b$ uzayı bir $b - T_{b,1/2}$ uzayıdır (Srinivasarao *et al* 2015).

İspat: (X, \mathcal{T}, \leq) üçlüsü $d - T_b$ uzayı olsun. A kümesi bir bg -kapalı küme olsun. O halde A bir dg -kapalı kümedir. (X, \mathcal{T}, \leq) uzayı bir $d - T_b$ uzayı olduğu için A bir b -kapalı kümedir. Bu nedenle her bg -kapalı küme bir b -kapalı kümedir. Böylece her $d - T_b$ uzayı bir $b - T_{b,1/2}$ uzayıdır. Aşağıda verilen örnek Teoremin tersinin doğru olmadığını göstermektedir.

Örnek 4.43: $X = \{x, y, z\}$ kümesi üzerindeki bir topoloji $\sigma = \{X, \emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}\}$ ve bir kısmi sıralama da $\leq_2 = \{(x, x), (y, y), (z, z), (x, y), (z, y)\}$ olsun. $\emptyset, X, \{z\}, \{y, z\}$ d -kapalı kümelerdir. \emptyset, X b -kapalı kümelerdir. \emptyset, X bg -kapalı kümelerdir. $A = \{z\}$ ya da $A = \{y, z\}$ olsun. Bu durumda A bir d -kapalı kümedir fakat bir b -kapalı küme değildir. Her d -kapalı kümenin bir b -kapalı küme olmadığı durumda her bg -kapalı küme bir b -

kapalı kümedir. Bu takdirde (X, σ, \leq_2) üçlüsü bir $b - T_{b,1/2}$ uzayıdır fakat $d - T_b$ uzayı değildir.

Teorem 4.28: Her $i - T_b$ uzayı bir $i - T_{1/2}$ uzayıdır (Srinivasarao *et al* 2015).

İspat: (X, \mathcal{T}, \leq) üçlüsü $i - T_b$ uzayı olsun. A kümesi bir ig -kapalı küme olsun. (X, \mathcal{T}, \leq) uzayı bir $i - T_b$ uzayı olduğu için A bir b -kapalı kümedir. O halde A bir kapalı kümedir. Bu nedenle her i -kapalı küme bir kapalı kümedir. Böylece her $i - T_b$ uzayı bir $i - T_{1/2}$ uzayıdır. Aşağıda verilen örnek Teoremin tersinin doğru olmadığını göstermektedir.

Örnek 4.44: $X = \{x, y, z\}$ kümesi üzerindeki bir topoloji $\sigma = \{X, \emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}\}$ ve bir kısmi sıralama da $\leq_1 = \{(x, x), (y, y), (z, z), (x, y), (y, z), (x, z)\}$ olsun. $\emptyset, X, \{z\}, \{y, z\}$ ig -kapalı kümelerdir. \emptyset, X b -kapalı kümelerdir. $\emptyset, X, \{z\}, \{y, z\}, \{z, x\}$ kapalı kümelerdir. $A = \{z\}$ ya da $A = \{y, z\}$ olsun. Bu durumda A bir ig -kapalı kümedir fakat bir b -kapalı küme değildir. Her ig -kapalı küme bir kapalı kümedir. Bu takdirde (X, σ, \leq_1) üçlüsü bir $i - T_{1/2}$ uzayıdır fakat $i - T_b$ uzayı değildir.

Teorem 4.29: Her $d - T_b$ uzayı bir $d - T_{1/2}$ uzayıdır (Srinivasarao *et al* 2015).

İspat: (X, \mathcal{T}, \leq) üçlüsü $d - T_b$ uzayı olsun. A kümesi bir dg -kapalı küme olsun. (X, \mathcal{T}, \leq) uzayı bir $d - T_b$ uzayı olduğu için A bir b -kapalı kümedir. O halde A bir kapalı kümedir. Bu nedenle her dg -kapalı küme bir kapalı kümedir. Böylece her $d - T_b$ uzayı bir $d - T_{1/2}$ uzayıdır. Aşağıda verilen örnek Teoremin tersinin doğru olmadığını göstermektedir.

Örnek 4.45: $X = \{x, y, z\}$ kümesi üzerindeki bir topoloji $\sigma = \{X, \emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}\}$ ve bir kısmi sıralama da $\leq_2 = \{(x, x), (y, y), (z, z), (x, y), (z, y)\}$ olsun. $\emptyset, X, \{z\}, \{y, z\}$ dg -kapalı kümelerdir. \emptyset, X b -kapalı kümelerdir. $\emptyset, X, \{z\}, \{y, z\}, \{z, x\}$ kapalı kümelerdir. $A = \{z\}$ ya da $A = \{y, z\}$ olsun. Bu durumda A bir dg -kapalı kümedir fakat bir b -kapalı küme değildir. Her d -kapalı kümenin bir b -kapalı küme olmadığı durumda her dg -kapalı küme bir kapalı kümedir. Bu takdirde (X, σ, \leq_2) üçlüsü bir $d - T_{1/2}$ uzayıdır fakat $d - T_b$ uzayı değildir.

Sonuç 4.10: $c - T_i$ uzayı ile $d - T_b$ uzayı aşağıda verilen örneklerde de görüldüğü gibi bağımsız kavramlardır.

Örnek 4.46: $X = \{x, y, z\}$ kümesi üzerindeki bir topoloji $\sigma = \{X, \emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}\}$ ve bir kısmi sıralama da $\leq_1 = \{(x, x), (y, y), (z, z), (x, y), (y, z), (x, z)\}$ olsun. $\emptyset, X, \{z\}$ b -kapalı kümelerdir. \emptyset, X d -kapalı kümelerdir. $\emptyset, X, \{z\}, \{x, z\}, \{y, z\}$ kapalı kümelerdir. $\emptyset, X, \{z\}, \{y, z\}$ i -kapalı kümelerdir. $A = \{x, z\}$ olsun. Bu durumda A bir kapalı kümedir fakat bir i -kapalı küme değildir. Her kapalı kümenin bir i -kapalı küme olmadığı durumda her d -kapalı küme bir b -kapalı kümedir. Bu takdirde (X, σ, \leq_1) üçlüsü bir $d - T_b$ uzayıdır fakat bir $c - T_i$ uzayı değildir.

Örnek 4.47: $X = \{x, y, z\}$ kümesi üzerindeki bir topoloji $\mathcal{T}_1 = \{X, \emptyset, \{x, y\}\}$ ve bir kısmi sıralama da $\leq_3 = \{(x, x), (y, y), (z, z), (x, y), (x, z)\}$ olsun. $(X, \mathcal{T}_1, \leq_3)$ üçlüsü bir topolojik sıralı uzaydır. $\emptyset, X, \{z\}$ b -kapalı kümelerdir. $\emptyset, X, \{z\}, \{y, z\}$ d -kapalı kümelerdir. $\emptyset, X, \{z\}$ kapalı kümelerdir. $\emptyset, X, \{z\}$ i -kapalı kümelerdir. $A = \{y, z\}$ olsun. Bu durumda A bir d -kapalı kümedir fakat bir b -kapalı küme değildir. Her d -kapalı kümenin bir b -kapalı küme olmadığı durumda her kapalı küme bir i -kapalı kümedir. Bu takdirde $(X, \mathcal{T}_1, \leq_3)$ üçlüsü bir $c - T_i$ uzayıdır fakat $d - T_b$ uzayı değildir.

Sonuç 4.11: $d - T_{d,1/2}$ uzayı ile $i - T_{i,1/2}$ uzayı aşağıda verilen örneklerde de görüldüğü gibi bağımsız kavramlardır.

Örnek 4.48: $X = \{x, y, z\}$ kümesi üzerindeki bir topoloji $\mathcal{T}_2 = \{X, \emptyset, \{x\}, \{x, z\}\}$ ve bir kısmi sıralama da $\leq_3 = \{(x, x), (y, y), (z, z), (x, y), (x, z)\}$ olsun. $(X, \mathcal{T}_2, \leq_3)$ üçlüsü bir topolojik sıralı uzaydır. $\emptyset, X, \{x, y\}$ dg -kapalı kümelerdir. \emptyset, X d -kapalı kümelerdir. $\emptyset, X, \{y\}$ ig -kapalı kümelerdir. $\emptyset, X, \{y\}$ i -kapalı kümelerdir. Her ig -kapalı küme bir i -kapalı kümedir. $A = \{x, y\}$ olsun. Bu durumda A bir dg -kapalı kümedir fakat bir d -kapalı küme değildir. Bu takdirde $(X, \mathcal{T}_2, \leq_3)$ üçlüsü bir $i - T_{i,1/2}$ uzayıdır fakat bir $d - T_{d,1/2}$ uzayı değildir.

Örnek 4.49: $X = \{x, y, z\}$ kümesi üzerindeki bir topoloji $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{x\}\}$ ve bir kısmi sıralama da $\leq_2 = \{(x, x), (y, y), (z, z), (x, y), (z, y)\}$ olsun. \emptyset, X dg -kapalı kümelerdir. \emptyset, X d -kapalı kümelerdir. $\emptyset, X, \{z\}, \{y, z\}$ ig -kapalı kümelerdir. $\emptyset, X,$

$\{y, z\}$ i -kapalı kümelerdir. Her d g-kapalı küme bir d -kapalı kümedir. $A = \{z\}$ olsun. Bu durumda A bir ig -kapalı kümedir fakat bir i -kapalı küme değildir. Bu takdirde (X, \mathcal{T}, \leq_2) üçlüsü bir $d - T_{d,1/2}$ uzayıdır fakat $i - T_{i,1/2}$ uzayı değildir.

Sonuç 4.12: $d - T_{d,1/2}$ uzayı ile $d - T_b$ uzayı aşağıda verilen örneklerde de görüldüğü gibi bağımsız kavramlardır.

Örnek 4.50: $X = \{x, y, z\}$ kümesi üzerindeki bir topoloji $\mathcal{T}_2 = \{X, \emptyset, \{x\}, \{x, z\}\}$ ve bir kısmi sıralama da $\leq_3 = \{(x, x), (y, y), (z, z), (x, y), (x, z)\}$ olsun. $\emptyset, X, \{x, y\}$ d g-kapalı kümelerdir. \emptyset, X d -kapalı kümelerdir. \emptyset, X b -kapalı kümelerdir. Her d -kapalı küme bir b -kapalı kümedir. $A = \{x, y\}$ olsun. Bu durumda A bir d g-kapalı kümedir fakat bir d -kapalı küme değildir. Bu takdirde $(X, \mathcal{T}_2, \leq_3)$ üçlüsü bir $d - T_b$ uzayıdır fakat bir $d - T_{d,1/2}$ uzayı değildir.

Örnek 4.51: $X = \{x, y, z\}$ kümesi üzerindeki bir topoloji $\sigma = \{X, \emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}\}$ ve bir kısmi sıralama da $\leq_2 = \{(x, x), (y, y), (z, z), (x, y), (z, y)\}$ olsun. \emptyset, X b -kapalı kümelerdir. $\emptyset, X, \{z, x\}$ d -kapalı kümelerdir. $\emptyset, X, \{z, x\}$ d g-kapalı kümelerdir. $A = \{x, z\}$ olsun. Bu durumda A bir d -kapalı kümedir fakat bir b -kapalı küme değildir. Her d -kapalı kümenin bir b -kapalı küme olmadığı durumda her d g-kapalı küme bir d -kapalı kümedir. Bu takdirde (X, σ, \leq_2) üçlüsü bir $d - T_{d,1/2}$ uzayıdır fakat $d - T_b$ uzayı değildir.

Sonuç 4.13: $i - T_{i,1/2}$ uzayı ile $c - T_d$ uzayı aşağıda verilen örneklerde de görüldüğü gibi bağımsız kavramlardır.

Örnek 4.52: $X = \{x, y, z\}$ kümesi üzerindeki bir topoloji $\sigma = \{X, \emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}\}$ ve bir kısmi sıralama da $\leq_1 = \{(x, x), (y, y), (z, z), (x, y), (y, z), (x, z)\}$ olsun. \emptyset, X d -kapalı kümelerdir. $\emptyset, X, \{z\}, \{y, z\}$ i -kapalı kümelerdir. $\emptyset, X, \{z\}, \{y, z\}$ ig -kapalı kümelerdir. $A = \{z\}, A = \{y, z\}$ ya da $A = \{x, z\}$ olsun. Bu durumda A bir kapalı kümedir fakat bir d -kapalı küme değildir. Her kapalı kümenin bir d -kapalı küme olmadığı durumda her ig -kapalı küme bir i -kapalı kümedir. Bu takdirde (X, σ, \leq_1) üçlüsü bir $i - T_{i,1/2}$ uzayıdır fakat bir $c - T_d$ uzayı değildir.

Örnek 4.53: $X = \{x, y, z\}$ kümesi üzerindeki bir topoloji $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{x\}\}$ ve bir kısmi sıralama da $\leq_2 = \{(x, x), (y, y), (z, z), (x, y), (z, y)\}$ olsun. $\emptyset, X, \{y\}, \{x, y\}$ ig -kapalı kümelerdir. $\emptyset, X, \{y, z\}$ d -kapalı kümelerdir. \emptyset, X i -kapalı kümelerdir. $\emptyset, X, \{y, z\}$ kapalı kümelerdir. Her kapalı küme bir d -kapalı kümedir. $A = \{y\}$ ya da $A = \{x, y\}$ olsun. Bu durumda A bir ig -kapalı kümedir fakat bir i -kapalı küme değildir. Bu takdirde (X, \mathcal{T}, \leq_2) üçlüsü bir $c - T_d$ uzayıdır fakat $i - T_{i,1/2}$ uzayı değildir.

Sonuç 4.14: $i - T_{i,1/2}$ uzayı ile $i - T_b$ uzayı aşağıda verilen örneklerde de görüldüğü gibi bağımsız kavramlardır.

Örnek 4.54: $X = \{x, y, z\}$ kümesi üzerindeki bir topoloji $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{x\}\}$ ve bir kısmi sıralama da $\leq_2 = \{(x, x), (y, y), (z, z), (x, y), (z, y)\}$ olsun. \emptyset, X b -kapalı kümelerdir. $\emptyset, X, \{y\}, \{x, y\}$ ig -kapalı kümelerdir. \emptyset, X i -kapalı kümelerdir. Her i -kapalı küme bir b -kapalı kümedir. $A = \{y\}$ ya da $A = \{x, y\}$ olsun. Bu durumda A bir ig -kapalı kümedir fakat bir i -kapalı küme değildir. Bu takdirde (X, \mathcal{T}, \leq_2) üçlüsü bir $i - T_b$ uzayıdır fakat bir $i - T_{i,1/2}$ uzayı değildir.

Örnek 4.55: $X = \{x, y, z\}$ kümesi üzerindeki bir topoloji $\sigma = \{X, \emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}\}$ ve bir kısmi sıralama da $\leq_1 = \{(x, x), (y, y), (z, z), (x, y), (y, z), (x, z)\}$ olsun. $\emptyset, X, \{y\}, \{x, y\}$ ig -kapalı kümelerdir. $\emptyset, X, \{y\}$ i -kapalı kümelerdir. \emptyset, X b -kapalı kümelerdir. $A = \{y\}$ ya da $A = \{x, y\}$ olsun. Bu durumda A bir ig -kapalı kümedir fakat bir i -kapalı küme değildir. Her ig -kapalı kümenin bir i -kapalı küme olmadığı durumda her i -kapalı küme bir b -kapalı kümedir. Bu takdirde (X, σ, \leq_1) üçlüsü bir $i - T_b$ uzayıdır fakat $i - T_{i,1/2}$ uzayı değildir.

Teorem 4.30: Her $d - T_{d,1/2}$ uzayı bir $d - T_{1/2}$ uzayıdır (Srinivasarao *et al* 2015).

İspat: (X, \mathcal{T}, \leq) üçlüsü $d - T_{d,1/2}$ uzayı olsun. A kümesi bir dg -kapalı küme olsun. (X, \mathcal{T}, \leq) uzayı bir $d - T_{d,1/2}$ uzayı olduğu için A bir d -kapalı kümedir. O halde A bir kapalı kümedir. Bu nedenle her dg -kapalı küme bir kapalı kümedir. Böylece her $d - T_{d,1/2}$ uzayı bir $d - T_{1/2}$ uzayıdır. Aşağıda verilen örnek Teoremin tersinin doğru olmadığını göstermektedir.

Örnek 4.56: $X = \{x, y, z\}$ kümesi üzerindeki bir topoloji $\mathcal{T}_2 = \{X, \emptyset, \{x\}, \{x, z\}\}$ ve bir kısmi sıralama da $\leq_2 = \{(x, x), (y, y), (z, z), (x, y), (z, y)\}$ olsun. $(X, \mathcal{T}_2, \leq_2)$ üçlüsü bir topolojik sıralı uzaydır. $\emptyset, X, \{y, z\}$ d_g -kapalı kümelerdir. $\emptyset, X, \{y\}, \{y, z\}$ kapalı kümelerdir. \emptyset, X d -kapalı kümelerdir. Her d_g -kapalı küme bir kapalı kümedir. $A = \{y, z\}$ olsun. Bu durumda A bir d_g -kapalı kümedir fakat bir d -kapalı küme değildir. Bu takdirde $(X, \mathcal{T}_2, \leq_2)$ üçlüsü bir $d - T_{1/2}$ uzayıdır fakat bir $d - T_{d,1/2}$ uzayı değildir.

Teorem 4.31: Her $i - T_{i,1/2}$ uzayı bir $i - T_{1/2}$ uzayıdır (Srinivasarao *et al* 2015).

İspat: (X, \mathcal{T}, \leq) üçlüsü $i - T_{i,1/2}$ uzayı olsun. A kümesi bir ig -kapalı küme olsun. (X, \mathcal{T}, \leq) uzayı bir $i - T_{i,1/2}$ uzayı olduğu için A bir i -kapalı kümedir. O halde A bir kapalı kümedir. Bu nedenle her ig -kapalı küme bir kapalı kümedir. Böylece her $i - T_{i,1/2}$ uzayı bir $i - T_{1/2}$ uzayıdır. Aşağıda verilen örnek Teoremin tersinin doğru olmadığını göstermektedir.

Örnek 4.57: $X = \{x, y, z\}$ kümesi üzerindeki bir topoloji $\mathcal{T}_2 = \{X, \emptyset, \{x\}, \{x, z\}\}$ ve bir kısmi sıralama da $\leq_5 = \{(x, x), (y, y), (z, z), (y, x), (x, z), (y, z)\}$ olsun. $(X, \mathcal{T}_2, \leq_5)$ üçlüsü bir topolojik sıralı uzaydır. $\emptyset, X, \{y, z\}$ ig -kapalı kümelerdir. $\emptyset, X, \{y\}, \{y, z\}$ kapalı kümelerdir. \emptyset, X i -kapalı kümelerdir. Her ig -kapalı küme bir kapalı kümedir. $A = \{y, z\}$ olsun. Bu durumda A bir ig -kapalı kümedir fakat bir i -kapalı küme değildir. Bu takdirde $(X, \mathcal{T}_2, \leq_5)$ üçlüsü bir $i - T_{1/2}$ uzayıdır fakat bir $i - T_{i,1/2}$ uzayı değildir.

Teorem 4.32: Her $b - T_{b,1/2}$ uzayı bir $b - T_{1/2}$ uzayıdır (Srinivasarao *et al* 2015).

İspat: (X, \mathcal{T}, \leq) üçlüsü $b - T_{b,1/2}$ uzayı olsun. A kümesi bir bg -kapalı küme olsun. (X, \mathcal{T}, \leq) uzayı bir $b - T_{b,1/2}$ uzayı olduğu için A bir b -kapalı kümedir. O halde A bir kapalı kümedir. Bu nedenle her bg -kapalı küme bir kapalı kümedir. Böylece her $b - T_{b,1/2}$ uzayı bir $b - T_{1/2}$ uzayıdır. Aşağıda verilen örnek Teoremin tersinin doğru olmadığını göstermektedir.

Örnek 4.58: $X = \{x, y, z\}$ kümesi üzerindeki bir topoloji $\mathcal{T}_2 = \{X, \emptyset, \{x\}, \{x, z\}\}$ ve bir kısmi sıralama da $\leq_3 = \{(x, x), (y, y), (z, z), (x, y), (x, z)\}$ olsun. $(X, \mathcal{T}_2, \leq_3)$ üçlüsü bir topolojik sıralı

uzaydır. $\emptyset, X, \{z\}$ bg -kapalı kümelerdir. $\emptyset, X, \{y, z\}$ kapalı kümelerdir. \emptyset, X b -kapalı kümelerdir. Her bg -kapalı küme bir kapalı kümedir. $A = \{y, z\}$ olsun. Bu durumda A bir bg -kapalı kümedir fakat bir b -kapalı küme değildir. Bu takdirde $(X, \mathcal{T}_2, \leq_3)$ üçlüsü bir $b - T_{1/2}$ uzayıdır fakat bir $b - T_{b,1/2}$ uzayı değildir.



5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Kapalı kümeler bir topolojik uzaydaki temel nesnelere dendir. Örneğin, bir küme üzerindeki topolojiyi, ya kapalı kümeler için verilen aksiyomları ya da Kuratowski kapanış aksiyomlarını kullanarak tanımlamak mümkündür. Kapalı kümelerin en önemli özellikleri arasında şunlar bulunmaktadır: Bir kompakt uzayın kapalı bir alt kümesi de kompaktır. Bir normal uzayın kapalı bir alt kümesi de normaldir. Bir tam düzenli uzayın kapalı bir alt kümesi de tamdır. Bir yerel kompakt uzayın kapalı bir alt kümesi de yerel kompaktır. Bir Hausdorff uzayında bulunan bir kompakt küme kapalı bir kümedir.

Levine, 1970 yılında genelleştirilmiş kapalı kümeler olarak adlandırdığı çalışmasını sundu. Tanıma göre; A , X topolojik uzayının bir alt kümesi olmak üzere $A \subseteq U$ ve U açık olduğunda eğer $\bar{A} \subseteq U$ oluyorsa A kümesine genelleştirilmiş kapalıdır denir. Bu kavram son yıllarda birçok topolojici tarafından yoğun olarak çalışılmıştır. Çünkü genelleştirilmiş kapalı kümeler sadece kapalı kümelerin doğal genellemeleri değildir. Daha da önemlisi, topolojik uzayların birkaç yeni özelliğini de ortaya koyuyorlar. Bu yeni özelliklerin çoğu, T_1 den daha zayıf olan ayırma aksiyomlarıdır ki; bunların bir kısmı bilgisayar bilimlerinde ve dijital topolojide oldukça kullanışlıdır. Örneğin, iyi bilinen dijital hat $T_{3/4}$ dır fakat T_1 değildir.

Klasik topolojide ayırma aksiyomları topolojik uzayların sınıflandırılması için oldukça önemli bir parametredir. Bugüne kadar birçok farklı ayırma aksiyomlarını araştıran çalışma yapılmıştır. Yapılan bu tez çalışmasında da genelleştirilmiş kapalı küme kavramı üzerine inşa edilen bazı özel kapalı kümeleri tanıtmak, bunların tanımları kullanılarak oluşturulan yeni ayırma aksiyomlarını ve özelliklerini incelemek amaçlanmıştır.

Bu tezde; bir topolojik sıralı uzayın artan ya da azalan alt kümeleri, bir topolojik sıralı uzaydaki genelleştirilmiş kapalı küme (g -kapalı), g^* -kapalı küme, i -kapalı küme, d -kapalı küme, b -kapalı küme, ig -kapalı küme, dg -kapalı küme, bg -kapalı küme, ig^* -kapalı küme, dg^* -kapalı küme ve bg^* -kapalı küme kavramları tanıtıldı ve bu kavramlar arasındaki ilişkiler incelendi. Ayrıca G. Srinivasarao, D. Madhusudanrao ve N. Srinivasarao' nun 2015 yılında yayınladıkları makalede ifade edilen bu g -kapalı tipindeki kümeler kullanılarak oluşturulmuş topolojik sıralı

uzayların yeni sınıfları olan $i - T_{1/2}$, $d - T_{1/2}$, $b - T_{1/2}$, $i - T_{i,1/2}$, $d - T_{d,1/2}$, $b - T_{b,1/2}$, $c - T_i$, $c - T_d$, $c - T_b$, $i - T_b$, $d - T_b$ uzayları tanıtıldı. Yine bahsi geçen makalede teoremlerle ifade edilen bu uzayların kendi aralarındaki ilişkileri tekrardan incelendi ve bu ilişkiler üzerine verilen örnekler güncellendi.



KAYNAKLAR

- Abo-elhamayel, M. and Al-shami, T. M., 2016. Supra homeomorphism in supra topological ordered spaces. *Facta Universitatis, Series: Mathematics and Informatics*, 31(5), 1091-1106.
- Al-shami, T. M., 2016. Some results related to supra topological spaces. *Journal of Advanced Studies in Topology*, 7(4), 283-294.
- Al-shami, T. M., El-Shafei, M. E. and Abo-Elhamayel, M., 2018. On soft topological ordered spaces. In press as: Al-shami, T.M., et al.. *Journal of King Saud University – Science* (2018), <https://doi.org/10.1016/j.jksus.2018.06.005>.
- Arya, S.D. and Gupta, K., 1991. New separation axioms in topological ordered spaces. *Ind. J. Pure Appl. Math.*, 22(6), 461–468.
- Aslım, G., 2012. Genel topoloji, 5. Basım. Ege Üniversitesi Yayınları, 274 s, İzmir.
- Das, P., 2004. Separation axioms in ordered spaces. *Soochow Journal of Mathematics*, 30(4), 447-454.
- Eilenberg, S., 1941. Ordered topological spaces. *American Journal of Mathematics*, 63(1), 39-45.
- Gürkanlı, A. T., 1993. Genel topoloji. Ondokuz Mayıs Üniversitesi Yayınları, Yayın No:73, 204 s, Samsun.
- Koçak, M., 2006. Genel topolojiye giriş 1, 2. basım. Gülen Ofset Yayıncılık, 198 s, Eskişehir.
- Levine, N., 1970. Generalized closed sets in topology. *Rend. Circ. Math. Palermo*, 19(2), 89-96.
- McCartan, S. D., 1968. Separation axioms for topological ordered spaces. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 64(4), 965-973.
- McCartan, S. D., 1971. Bicontinuous preordered topological spaces. *Pac. J. Math.*, 38, 523–529.
- Minguzzi, E., 2013. Topological ordered spaces as a foundation for a quantum spacetime theory. *Journal of Physics: Conference Series*, 442(2013), 012034.
- Mucuk, O., 2010. Topoloji ve kategori, 2. basım. Nobel Yayın Dağıtım, 462 s, Ankara.
- Nachbin, L., 1965. *Topology and order*. D. Van Nostrand Inc., 122 p, Princeton, New Jersey.
- Srinivasarao, G., 2014. g -closed and g^* -closed type sets in topological ordered spaces. *Int. J. Sci. Eng. Res.*, 5(6), 1276-1285.
- Srinivasarao, G., Madhusudanrao, D. and Srinivasarao, N., 2015. Applications of ig , dg , bg -closed type sets in topological ordered spaces. *African Journal of Mathematics and Computer Science Research*, 8(1), 12-22.
- Veera Kumar, M. K. R. S., 2000. Between closed sets and g -closed sets. *Mem. Fcc. Sci. Sec. A Math. Kochi University*, 21, 1-19.
- Veera Kumar, M. K. R. S., 2002. Homeomorphisms in topological ordered spaces. *Acta Cienca Indica*, XXVIII(M)(1), 67-76.
- Yıldız, C., 2005. Genel topoloji, 3. basım. Gazi Kitabevi Tic. Ltd. Şti., 336 s, Ankara.
- Yüksel, Ş., 2011. Genel topoloji, 7. basım. Eğitim Akademi Yayınları, 489 s, Konya.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Zafer POLAT
Doğum Yeri ve Tarihi	Diyadin / Ağrı - 24/10/1989
Eğitim Durumu	
Lisans Öğrenimi	Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü (2015); Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü (2019)
Yüksek Lisans Öğrenimi	Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı
Bildiği Yabancı Diller	İngilizce
İş Deneyimi	
Stajlar	Milli Eğitim Bakanlığı, İŞKUR
Çalıştığı Kurumlar	Final Okulları
İletişim	
E-posta Adresi	zafermat04@gmail.com
Mezuniyet Tarihi	
2019	