



T.C

NİĞDE ÖMER HALİSDEMİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

MODÜLÜS FONKSİYONU YARDIMIYLA TANIMLANAN
CESÀRO TİPİ DİZİ UZAYLARI

FATMA GÖZDE TUNA

EYLÜL 2019

T.C
NİĞDE ÖMER HALİSDEMİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

MODÜLÜS FONKSİYONU YARDIMIYLA TANIMLANAN
CESÀRO TİPİ DİZİ UZAYLARI

FATMA GÖZDE TUNA

Yüksek Lisans Tezi

Danışman

Dr. Öğr. Üyesi Nurhan KAPLAN

EYLÜL 2019

Fatma Gözde TUNA tarafından Dr. Öğr. Üyesi Nurhan KAPLAN danışmanlığında hazırlanan “Modülüs Fonksiyonu Yardımıyla Tanımlanan Cesáro tipi Dizi Uzayları” adlı bu çalışma jürimiz tarafından Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik** Ana Bilim Dalı’nda Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Doç. Dr. Ahmet EROĞLU



(Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi,
Matematik Bölümü)

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Nurhan KAPLAN



(Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi,
Matematik Bölümü)

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Ümit TOKEŞER



(Kastamonu Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü)

ONAY:

Bu tez, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca belirlenmiş olan yukarıdaki jüri üyeleri tarafından/...../20.... tarihinde uygun görülmüş ve Enstitü Yönetim Kurulu’nun/...../20.... tarih ve sayılı kararıyla kabul edilmiştir.

...../...../2019

Prof. Dr. Murat BARUT
MÜDÜR

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Fatma Güzde TUNA



ÖZET

MODÜLÜS FONKSİYONU YARDIMIYLA TANIMLANAN CESÀRO TİPİ DİZİ UZAYLARI

TUNA, Fatma Gözde
Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik AnaBilim Dalı

Danışman : Dr. Öğr. Üyesi Nurhan KAPLAN

Eylül 2019, 35 sayfa

Bu tezde, W_p toplanabilirlik ve modülüs fonksiyonu kavramları tanıtılarak, kuvvetli Cesàro toplanabilme kavramına genelleştirilmesi, N_θ kuvvetli Lacunary yakınsak dizileri uzayı incelenerek $W(C_\theta, f, p)$ toplanabilme kavramı ve istatistiksel yakınsaklıkla ilgili bağıntılar verildi. Yukarıdaki çalışmaların paralelinde (α, β) yıncı dereceden modülüs fonksiyonu ile tanımlanan Cesàro tipi toplanabilme uzaylarına genişletilmesi verildi.

Son bölümde modülüs fonksiyonu kullanılarak $AC(f)$ aritmetik yakınsaklık ve $AS(f)$ aritmetik toplanabilme kavramları verilerek, bu kavramların cebirsel ve topolojik özellikleri incelenerek bazı kapsama bağıntıları verilmiştir.

Anahtar Sözcükler: Modülüs Fonksiyonu, Cesàro Tipi Toplanabilme, İstatistiksel Yakınsaklık, Lacunary Yakınsaklık, Aritmetik Yakınsaklık, Aritmetik Toplanabilme.

SUMMARY

CESÀRO TYPE SEQUENCE SPACES DEFINED BY MODULUS FUNCTION

TUNA, Fatma Gözde

Niğde Ömer Halisdemir University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Civil Engineering

Supervisor : Assistant Professor Dr. Nurhan KAPLAN

September 2019, 35 pages

In this thesis, W_p summability and modulus function are introduced and generalized to strong Cesàro summability, N_θ strong Lacunary convergent sequence are investigated, $W(C_\theta, f, p)$ summability and properties of statistical convergence are given. In parallel with the above studies, extension of Cesàro type summability spaces defined by (α, β) order modulus function are given.

In the last section, $AC(f)$ arithmetic convergence and $AS(f)$ arithmetic summability are given by using modulus function, algebraic and topological properties of these are investigated and some inclusion relations are given.

Keywords: Modulus Function, Cesàro type summability, Statistical Convergence, Lacunary Convergent, Arithmetic Convergence, Arithmetic Summability.

ÖN SÖZ

Bu tezde, W_p toplanabilirlik ve modülüs fonksiyonu kavramları tanıtılarak, kuvvetli Cesàro toplanabilme kavramına genelleştirilmesi, N_θ kuvvetli Lacunary yakınsak dizileri uzayı incelenerek $W(C_\theta, f, p)$ toplanabilme kavramı ve istatistiksel yakınsaklıkla ilgili bağıntılar verildi. Yukarıdaki çalışmaların paralelinde (α, β) nıncı mertebeden modülüs fonksiyonu yardımıyla ile tanımlanan Cesàro tipi toplanabilme uzaylarına genişletilmesi verildi.

Son bölümde modülüs fonksiyonu kullanılarak $AC(f)$ aritmetik yakınsaklık ve $AS(f)$ aritmetik toplanabilme kavramları verilerek, bu kavramların cebirsel ve topolojik özellikleri incelenerek bazı kapsama bağıntıları verilmiştir.

Tez hazırlama sürecinde bana bilgi, yardımlarını ve desteğini esirgemeyen danışman hocam, Sayın Dr. Öğr. Üyesi Nurhan KAPLANA'na en içten teşekkürlerimi sunarım. Çalışmalarım esnasında tecrübelerinden faydalandığım Dr. Öğr. Üyesi Hüseyin KAPLAN'na ve hayatım boyunca her türlü desteği ve sabrı gösteren canım aileme minnet ve şükranlarımı sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	iv
SUMMARY.....	v
ÖN SÖZ.....	vi
İÇİNDEKİLER DİZİNİ.....	vii
SİMGE VE KISALTMALAR.....	viii
BÖLÜM I GİRİŞ.....	1
BÖLÜM II TEMEL KAVRAMLAR.....	2
2.1 Temel Kavramlar.....	2
2.2 Toplanabilme Kavramı.....	5
2.3 Kuvvetli Toplanabilme.....	8
2.4 Modülüs Fonksiyonu.....	8
2.5 $W(C, f, p)$ Toplanabilme.....	10
2.6 $W(C_0, f, p)$ Toplanabilirlik.....	12
2.7 (α, β) nıncı dereceden modülüs fonksiyonu yardımıyla tanımlanan Cesàro-tipi toplanabilme.....	18
BÖLÜM III MODÜLÜS FONKSİYONU İLE TANIMLI ARİTMETİK YAKINSAK DİZİ UZAYI.....	26
3.1 $AC(f)$ Aritmetik Yakınsak dizi uzayı.....	27
3.2 $AS(f)$ Aritmetik Toplanabilir Dizi Uzayı.....	29
BÖLÜM IV SONUÇ.....	31
KAYNAKLAR.....	32
ÖZ GEÇMİŞ.....	35

SİMGE VE KISALTMALAR

Simgeler

Açıklama

\mathbb{R}	Reel Sayılar
\mathbb{N}	Doğal Sayılar
\mathbb{C}	Kompleks Sayılar

Kısaltmalar

Açıklama

$W(C, f, p)$	Modülüs fonksiyonu yardımıyla Cesàro toplanabilme
$W_0(C, f, p)$	Modülüs fonksiyonu yardımıyla sıfıra Cesàro toplanabilme
$W_\infty(C, f, p)$	Modülüs fonksiyonu yardımıyla sınırlı Cesàro toplanabilme
$W(C_\theta, f, p)$	Modülüs fonksiyonu yardımıyla Cesàro tipi Lacunary toplanabilme
$w_\alpha^\beta(p)$	(α, β) nıncı mertebeden Cesàro yakınsaklık
$w_\alpha^\beta[\theta, f, p]$	(α, β) nıncı mertebeden Lacunary yakınsaklık
$X(f)$	FK uzayı
$AC(f)$	Aritmetik Yakınsak Dizi Uzayı
$AS(f)$	Aritmetik Toplanabilir Dizi Uzayı

BÖLÜM I

GİRİŞ

Bu tezde W_p toplanabilirlik ve modülüs fonksiyonu tanıtılarak kuvvetli Cesàro toplanabilmeye genelleştirilmesi, N_θ kuvvetli yakınsaklık diziler uzayı incelenerek, $W(C_\theta, f, p)$ toplanabilme kavramı ve istatistiksel yakınsaklıkla ilgili bağıntılar verildi. Daha sonra $W(C_\theta, f, p)$ toplanabilme kavramı ve istatistiksel yakınsaklık ile ilgili bağıntılar verildi (Büyükkşekerci, 1996).

Daha sonra yukarıda incelenen çalışmalar paralelinde (α, β) nıncı mertebeden modülüs fonksiyonu yardımıyla tanımlanan Cesàro tipi toplanabilme uzaylarına genişletildi (Şengül, 2017).

Son bölümde f modülüs fonksiyonu kullanılarak $AC(f)$ aritmetik yakınsaklık ve $AS(f)$ aritmetik toplanabilme kavramları verilerek, cebirsel ve topolojik özellikleri incelenip bazı kapsama bağıntıları verilmiştir. (Petersen, 1966; Yaying ve Hazarika, 2019).

BÖLÜM II

TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Temel Kavramlar

Tanım 2.1 X ve Y boş olmayan kümeler olsun. X den Y ye bir f bağıntısı

1) $\forall x \in X$ için $(x, y) \in f$ olacak şekilde $\exists y \in Y$ vardır.

2) $(x, y) \in f$ ve $(x, z) \in f \Rightarrow y = z$.

şartlarını sağlanıyorsa f e X den Y ye bir fonksiyon denir (Balcı, 1997a).

Tanım 2.2 $f : \mathbb{N} \rightarrow F$ olan fonksiyona dizi denir. Diziler değer kümesine göre adlandırılır. $F = \mathbb{R}$ ise diziye reel terimli dizi, $F = \mathbb{C}$ ise diziye kompleks terimli dizi denir (Balcı, 1997a).

Tanım 2.3 $|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

Tanım 2.4 $\forall n \in \mathbb{N}$ için $-K \leq s_n \leq K$ eşitsizliğini sağlayan K reel sayısı varsa (s_n) dizisine sınırlı dizi denir (Balcı, 1997a).

Tanım 2.5 A herhangi bir lineer nokta kümesi olmak üzere $\inf A = a$, $\sup A = b$ olsun. a, b sayıları aşağıdaki özelliklere sahiptir.

$\inf A = a$

(i) $\forall x \in A$ için $x \geq a$ dır. Çünkü a bir alt sınırdır.

(ii) $\forall \alpha > 0$ için $x < a + \alpha$ olacak şekilde $\exists x \in A$ vardır çünkü a alt sınırların en büyüğüdür.

$\sup A = b$

(i) $\forall x \in A$ için $x \leq b$ dır. Çünkü b bir üst sınırdır.

(ii) $\forall \alpha > 0$ için $x > b - \alpha$ olacak şekilde $\exists x \in A$ vardır çünkü b üst sınırların en küçüğüdür (Balcı, 1997a).

Tanım 2.6 $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in A$ olsun. f fonksiyonu a noktasında süreklidir gerek ve yeter şart $\forall \varepsilon > 0$ için en az bir $\delta > 0$ vardır öyle ki $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$ olur (Balcı, 1997a).

Tanım 2.7 $A \subset \mathbb{R}$, $a \in A$ ve a, a' nin yığılma noktası ise, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

limiti mevcutsa bu limite f nin a noktasındaki türevi denir (Balcı, 1997a).

Tanım 2.8 $(s_n) \rightarrow s$ ($n \rightarrow \infty$) $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_0 \in \mathbb{N} \ni \forall n > n_0$ için $|s_n - s| < \varepsilon$ ise (s_n) dizisi s ye yakınsaktır denir (Balcı, 1997a).

Tanım 2.9 (s_n) reel terimli bir dizi olsun. (s_n) bir Cauchy dizisidir $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_0 \in \mathbb{N} \ni \forall m, n > n_0$ için $|s_m - s_n| < \varepsilon$ (Balcı, 1997a).

Tanım 2.10 $V \neq \emptyset$ küme ve F (\mathbb{C} ya da \mathbb{R}) cisim olsun.

$$+ : V \times V \rightarrow V$$

$$\cdot : F \times V \rightarrow V$$

işlemleri $\forall a, b, c \in V$ ve $\forall \alpha, \beta \in F$ için,

1. $a + b = b + a$
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$
3. $a + 0 = a$ olacak şekilde $0 \in V$ mevcut
4. $a + (-a) = 0$ olacak şekilde $-a \in V$ mevcut
5. $1 \cdot a = a$
6. $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$
7. $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$
8. $(\alpha\beta)a = \alpha(\beta a)$

özellikleri sağlanıyorsa V kümesine F cismi üzerinde vektör uzayı denir (Maddox, 1970).

Tanım 2.11 $X \neq \emptyset$ küme ve $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu $\forall a, b, c \in X$ için

$$m_1) d(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$$

$$m_2) d(a, b) = d(b, a)$$

$$m_3) d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b)$$

sağlanıyorsa d , X de uzaklık fonksiyonu, (X, d) ye de **metrik uzay** denir (Maddox, 1970).

Tanım 2.12 X bir lineer uzay

$$q : X \rightarrow \mathbb{R}$$

dönüşümü $\forall a, b \in X$ ve $\forall \alpha \in F$ için

$$1) q(\alpha a) = |\alpha| q(a)$$

$$2) q(a+b) \leq q(a) + q(b)$$

özellikleri sağlanıyorsa q bir yarı norm, (X, q) de **yarı normlu uzaydır** (Maddox, 1970).

Tanım 2.13 V lineer uzay ve $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall a, b \in V$ ve $\alpha, \beta \in F$ için

$$1) \|a\| \geq 0, \|a\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$2) \|\alpha a\| = |\alpha| \|a\|$$

$$3) \|a+b\| \leq \|a\| + \|b\|$$

özellikleri sağlanıyorsa $\|\cdot\|$ norm ve $(V, \|\cdot\|)$ **normlu uzaydır** (Maddox, 1970).

Tanım 2.14 V bir lineer uzay ve

$$q : V \rightarrow \mathbb{R}$$

dönüşümü $\forall a, b, a_0 \in V$ ve $\forall \alpha, \alpha_0 \in F$ için

$$1) q(\theta) = 0$$

$$2) q(-a) = q(a)$$

$$3) q(a+b) \leq q(a) + q(b)$$

$$4) \alpha \rightarrow \alpha_0, q(a - a_0) \rightarrow 0 \text{ iken } q(\alpha a - \alpha_0 a_0) \rightarrow 0$$

şartlarını sağlıyorsa q **paranorm**, (V, q) ye **paranormlu uzay** denir (Maddox, 1970).

Tanım 2.15 $(V, \|\cdot\|)$ normlu lineer uzay olsun. V de alınan her Cauchy dizisi bu norma göre yakınsak ise $(X, \|\cdot\|)$ uzayına bir **Banach uzayı** denir (Maddox, 1970).

Tanım 2.16 $d(a, b) = \|a - b\| = \langle a - b, a - b \rangle^{\frac{1}{2}}$ ile tanımlanan d ye metrik ve (V, d) ye de metrik uzaydır. V iç çarpımı ile tanımlanan d metriğine göre her Cauchy dizisi yakınsak ise (V, \langle, \rangle) **Hilbert uzay** denir (Maddox, 1970).

Tanım 2.17 (a_n) dizisi verilmiş olsun. $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ ($\mathbb{N} \ni k = 1, 2, \dots, n$) olmak üzere

$((a_n), (s_n))$ ye seri denir. Burada a_n serinin genel terimi, (s_n) de serinin kısmi

toplamlar dizisidir. Pratikte; seri $\sum_n a_n$ ile gösterilir. Eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ ise seriye yakınsak, aksi taktirde seriye ıraksaktır denir (Balcı, 1997b).

Tanım 2.18 $\sum a_n$ serisi verilsin. $\sum |a_n|$ yakınsaksa, $\sum a_n$ **mutlak yakınsaktır** (Balcı, 1997b).

Tanım 2.19 $\sum a_n$ serisi yakınsak ve $\sum |a_n|$ ıraksaksa, $\sum a_n$ **şartlı yakınsaktır** (Balcı, 1997b).

Eşitsizlik 2.1

a) $\forall k$ için $p_k > 0$, $H = \sup p_k$ ve $a_k, b_k \in \mathbb{C}$ olsun. Böylece

$$|a_k + b_k|^{p_k} \leq c \left\{ |a_k|^{p_k} + |b_k|^{p_k} \right\}, \quad c = \max(1, 2^{H-1})$$

b) $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $(a_k) \in \ell_p, (b_k) \in \ell_q$ olsun. Bu durumda

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^q \right)^{1/q}.$$

c) $p > 1$ ve $(a_k), (b_k) \in \ell_p$ olsun.

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k + b_k|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^p \right)^{1/p}$$

dir (Maddox, 1970).

2.2 Toplanabilme Kavramı

Tanım 2.20 $x = (x_k)$, \mathbb{R} ya da \mathbb{C} terimli bir dizi ve $A = (a_{nk})$ elemanları reel veya kompleks olan sonsuz satır ve sütunlu bir matris olsun. $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k$$

yakınsak olmak kaydıyla

$$t_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k$$

eşitliği ile (t_n) dizisi tanımlansın. (t_n) dizisine (x_k) nin dönüşüm dizisi, A ya limitleme veya toplanabilme metodu denir (Maddox, 1970; Petersen, 1966).

Tanım 2.21 $A = (a_{nk})$ matrisi verilsin. Eğer $A \in (C, C, p)$ ise A matrisine regüler matris denir (Maddox, 1986; Petersen, 1966).

Teorem 2.1 $A \in (C, C, p)$ matrisinin regüler olması için \Leftrightarrow

$$1) \forall k \text{ için } \lim_{n \rightarrow \infty} a_{nk} = 0$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 1$$

$$3) \forall n \text{ için } \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \leq K \text{ (o. \u015f. } n \text{ den ba\u011fmsız } K \text{ pozitif sayısının var olmasıdır)}$$

dır (Petersen, 1966).

Tanım 2.22 $[(C, k)$ limitleme metodu]: (S_n) dizisi verilsin. Bu durumda

$$S_n^{(k)} = \frac{\binom{k-1}{k-1} S_n + \binom{k}{k-1} S_{n-1} + \dots + \binom{n+k-1}{k-1} S_0}{\binom{n+k}{k}}$$

dizisine (S_n) dizisinin k yncı mertebeden dönüşüm dizisi denir. Burada k yerine bir alınırsa,

$$C_n^{(1)} = \frac{S_0 + S_1 + \dots + S_n}{n+1}$$

birinci mertebeden Cesàro ortalaması, k yerine iki alınırsa

$$C_n^{(2)} = \frac{S_n + 2S_{n-1} + \dots + (n+1)S_0}{\frac{1}{2}(n+1)(n+2)}$$

ikinci mertebeden Cesàro ortalaması denir (Petersen, 1966).

Tanım 2.23 (p_n) tümü birden sıfır olmayan non-negatif reel sayıların bir dizisi

$$P_n = p_1 + p_2 + \dots + p_n$$

olmak üzere

$$t_n = \frac{P_n S_1 + p_{n-1} S_2 + \dots + p_1 S_n}{P_n}$$

ile tanımlanan (N, p_n) ikilisine Norlund ortalaması,

$$t_n = \frac{p_1 S_1 + p_2 S_2 + \dots + p_n S_n}{P_n}$$

biçiminde tanımlanan (R, p_n) ikilisine de **Riesz ortalaması** denir (Petersen, 1966).

(N, p_n) Norlund ortalamasının regüler $\Leftrightarrow p_n / P_n \rightarrow 0$ olmasıdır. (R, p_n) Riesz ortalamasının regüler $\Leftrightarrow P_n \rightarrow \infty$ olmasıdır (Petersen, 1966).

Teorem 2.2 $\forall k \in \mathbb{N}$ için (C, k) metodu regüler bir Norlund ortalamasıdır.

İspat: $p_n = \binom{n+k-1}{k-1}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) olsun. Binom katsayıları $k = 1, 2, \dots$ için

$$\binom{n+k}{k} = \sum_{v=0}^u \binom{v+k-1}{k-1} \quad (2.1)$$

eşitliğini sağlar. Bu eşitlik induksiyon metodu ile görülür.

(2.1) eşitliğinden açıktır ki (C, k) matrisi Norlund ortalamasıdır. Regülerlik şartı ise,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n / P_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n+k+1}{k-1} / \binom{n+k}{k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k}{k+n} = 0$$

elde edilir.

Negatif olmayan $r \in \mathbb{R}$ olmak üzere r mertebeden Cesàro ortalamalarının matrisi,

$$a_{nk} = \begin{cases} A_{n-k}^{r-1} / A_n^r, & 0 \leq k < n \\ 0, & k > n \end{cases} \quad (2.2)$$

olarak tanımlanır. (a_{nk}) matrisi regüler midir?

$$A_n^r = (r+1)(r+2)\dots(r+n) / n! \quad (n \geq 1), \quad A_0^r = 1$$

olsun.

$$(1-z)^{-(r+1)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (r+1)(r+2)\dots(r+n) z^n / n! = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^r z^n$$

ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_{n-k}^p A_k^r = A_n^{p+r+1}$$

$r = 0$ alınarak $A_k^0 = 1$ ve p yi $r-1$ ile yer değiştirilirse ve $r \geq 0$ olmak üzere

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} = \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| = \sum A_{n-k}^{r-1} / A_n^r = 1$$

$$A_n^r / n^r = \frac{\Gamma(r+n+1)}{\Gamma(r+1)\Gamma(n+1)n^r} \cong \frac{1}{\Gamma(r+1)}$$

elde edilir. Böylece $\forall k$ için Teorem 2.1 in şartları sağlanır. Bu durumda (a_{nk}) matrisinin regüler olduğu elde edilir. (2.2) göz önüne alınırsa matris,

$$a_{nk} = \begin{cases} r.n!\Gamma(r+n-k)/(n-k)!\Gamma(r+n+1), & 0 \leq k < n \\ 0, & k > n \end{cases}$$

olur (Petersen, 1966).

2.3 Kuvvetli Toplanabilme

Tanım 2.24 (Kuvvetli Cesàro Toplanabilme) $x = (x_k) \in \mathbb{C}$ terimli dizi verilsin.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - \ell| = 0,$$

eşitliğini sağlayan $\ell \in \mathbb{C}$ sayısı varsa, (x_k) dizisine ℓ ye kuvvetli Cesàro toplanabilir denir. Bu dizilerin uzayı da

$$W(C) = \left\{ x = (x_k) : \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - \ell| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \right\}$$

ile gösterilir (Maddox, 1967; Maddox, 1978).

Tanım 2.25 (Kuvvetli p -Cesàro Toplanabilme) $x = (x_k) \in \mathbb{C}$ terimli bir dizi, $p = (p_k) \in \mathbb{R}^+$ sayı dizisi olsun. Bu durumda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - \ell| = 0$$

ise (x_k) dizisi ℓ ye kuvvetli p - Cesàro yakınsaktır denir. Bu dizilerin uzayı

$$W(C, p) = \left\{ x = (x_k) : \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - \ell|^p \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \right\}$$

şeklinde gösterilir (Öztürk ve Bilgin, 1994).

2.4 Modülüs Fonksiyonu

Tanım 2.26 $[0, \infty)$ dan kendi üzerine tanımlı bir f dönüşümü $\forall x, y \in [0, \infty)$ için

- 1) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- 2) $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$
- 3) $f_n < f_{n+1}$ (f artan)
- 4) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$

özelliklerini sağlıyorsa f dönüşümüne modülüs fonksiyonu denir (Nakano, 1953).

Örnek 2.1 $f(x) = \frac{x}{x+1}$ modülüs fonksiyonunun sınırlı olduğunu gösteriniz?

1) $f(x) = 0$?

$$\begin{aligned}\frac{x}{x+1} = 0 &\Leftrightarrow x = 0 \\ &= f(0)\end{aligned}$$

2) $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$?

$$\begin{aligned}\frac{x+y}{x+y+1} &= \frac{x}{x+y+1} + \frac{y}{x+y+1} \\ &\leq \frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+1} \\ &\leq f(x) + f(y)\end{aligned}$$

3) $f(x) = \frac{x}{x+1}$ den birinci türev alınırsa $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$ olur. f artandır.

4) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$ tanımı gereğince $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x+1} = 0 = f(0)$ olduğundan f sıfırda sağdan süreklidir. f sınırlı bir modülüs fonksiyonudur (Büyükşekerci, 1996).

Örnek 2.2 $f(x) = \log(x+1)$ fonksiyonu sınırsız bir modülüs fonksiyonu mudur?

Çözüm: $1+x+y \leq (1+x)(1+y)$ eşitsizliği göz önüne alındığında kolaylıkla gösterilebilir (Büyükşekerci, 1996).

f ve g iki modülüs fonksiyonları olmak üzere $f \cdot g, f / g, f - g$ ve $f^{-1}, f + g$ in modülüs fonksiyonu olması gerekmez. Burada $f(x) = \sqrt{x}$ ve $g(x) = x$ alırsa, f ve g birer modülüs fonksiyonudur.

Gerçekten,

1) $f(x) = 0$?

$$\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

2) $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$?

$$\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y} = f(x) + f(y)$$

3) $f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonunun birinci türev alınırsa $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$ olduğundan f artandır.

4) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$ tanımı gereğince $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1/2} = 0$, $f(0) = 0$ olduğundan f sıfırda sağdan süreklidir. f istenilen şartları sağlayan aranan fonksiyondur.

g nin de istenilen şartları sağlayan fonksiyon olduğu görülebilir. Böylece $f(x)g(x) = x^{3/2}$, $f(x)/g(x) = x^{-1/2}$, $f^{-1}(x) = x^2$ için Tanım 2.26 deki 2. özellik ve $f(x) - g(x) = x^{1/2} - x$ için de 1. özellik sağlanmaz.

2.5 $W(C, f, p)$ Toplanabilme

Burada $W(C, f, p)$ nin tanımı verilecektir.

Tanım 2.27 $x = (x_k) \in \mathbb{C}$ de bir dizi ve f modülüs fonksiyonu olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(|x_k - \ell|) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

şartını sağlayan $\ell \in \mathbb{C}$ sayısı varsa (x_k) dizisi ℓ ye f modülüs yardımıyla kuvvetli Cesàro toplanabilirdir denir. Bu tip dizi uzaylar

$$W(C, f) = \left\{ x = (x_k) : \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(|x_k - \ell|) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \right\}$$

ve

$$W_\infty(C, f) = \left\{ x = (x_k) : \sup_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(|x_k|) < \infty \right\}$$

ile tanımlanır (Büyükşekerci, 1996; Büyükşekerci ve Kaplan, 2012; Öztürk ve Bilgin, 1994).

Yukarıdaki tanımda $(C,1)$ matrisi yerine Connor (Connor, 1988), $A = (a_{nk})$ regüler matris olarak yeni bir genelleştirme yapmıştır.

Tanım 2.28 $(x_k) \in \mathbb{C}$ de bir dizi, f modülüs fonksiyonu ve $A = (a_{nk})$ negatif olmayan regüler matris olmak üzere

$$W(A, f) = \left\{ x = (x_k) : \sum_k a_{nk} f(|x_k - \ell|) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \right\}$$

$$W_0(A, f) = \left\{ x = (x_k) : \sum_k a_{nk} f(|x_k|) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \right\}$$

$$W_{\infty}(A, f) = \left\{ x = (x_k) : \sup_n \sum_k a_{nk} f(|x_k|) < \infty \right\}$$

olarak tanımlanır (Connor, 1988).

Tanım 2.29 $(x_k) \in \mathbb{C}$ terimli bir dizi, f modülüs fonksiyonu ve $p = (p_k) \in \mathbb{R}^+$ terimli bir dizi verilsin. Böylece

$$W(C, f, p) = \left\{ x = (x_k) : \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(|x_k - \ell|)^{p_k} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \right\}$$

$$W_0(C, f, p) = \left\{ x = (x_k) : \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(|x_k|)^{p_k} \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty \right\}$$

$$W_{\infty}(C, f, p) = \left\{ x = (x_k) : \sup_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(|x_k|)^{p_k} < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır (Büyükşekerci, 1996; Büyükşekerci ve Kaplan, 2012; Öztürk ve Bilgin, 1994).

Burada (C, I) Cesàro matrisi yerine $A = (a_{nk})$ negatif olmayan regüler matris alınırsa $W(A, f, p)$ genelleştirilmesi yapılır (Büyükşekerci, 1996).

Tanım 2.30 $(x_k) \in \mathbb{C}$ terimli bir dizi, f modülüs, $p = (p_k) \in \mathbb{R}^+$ terimli dizi ve $A = (a_{nk})$ negatif olmayan regüler bir matris olsun. Böylece

$$W(A, f, p) = \left\{ x = (x_k) : \sum_k a_{nk} f(|x_k - \ell|)^{p_k} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \right\}$$

$$W_0(A, f, p) = \left\{ x = (x_k) : \sum_k a_{nk} f(|x_k|)^{p_k} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \right\}$$

$$W_{\infty}(A, f, p) = \left\{ x = (x_k) : \sup_n \sum_k a_{nk} f(|x_k|)^{p_k} < \infty \right\}$$

olarak tanımlanır. Eğer $x_k \in W(A, f, p)$ ise

$$\sum_k a_{nk} f(|x_k - \ell|)^{p_k} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

için $x_k \rightarrow \ell [W(A, f, p)]$ yazılır (Büyükşekerci, 1996; Büyükşekerci ve Kaplan, 2012).

Yukarıda ki tanımda $(a_{nk}) = (C, I)$ alınırsa Tanım 2.29'deki $W(C, f, p)$ ve $W_{\infty}(C, f, p)$ dizi uzayları bulunur. Her k için $p_k = 1$ alınırsa $W(A, f)$ olur. J. Connor (Connor,

1988) bu durumu incelendi. Yine $(a_{nk}) = (C, 1)$ ve her k için $p_k = 1$ alınırsa $W(C, f)$ dizi uzayı bulunur. I.J. Moddox (Maddox, 1986) bu durumu inceledi.

2.6 $W(C_\theta, f, p)$ Toplanabilirlik

Bu kısımda Lacunary dizisi tanıtılıp, $W(C_\theta, f, p)$ nin bir lineer uzay olduğu gösterilip ve kapsama bağıntıları verilecektir.

Tanım 2.31 $\theta = (k_r)$ pozitif tamsayıların bir dizisi olmak üzere

1) $k_0 = 0$, $\theta = (k_r)$ pozitif artan bir dizi

2) $r \rightarrow \infty$ için $(k_r - k_{r-1} = h_r)$ ıraksak

ise θ ya Lacunary dizisi denir (Fredman ve Sember, 1978). Burada $(k_{r-1}, k_r] = I_r$ ve $k_r/k_{r-1} = q_r$ olsun.

Örnek 2.3 $\theta = (k_r) = (2^r - 1)$ Lacunary dizisidir. Gösteriniz?

Gerçekten, $\forall r \in \mathbb{N}$ için $\theta = (k_r) = (2^r - 1)$ dizisi pozitif tamsayı dizisidir. $k_0 = 0$.

Ayrıca $\forall r \in \mathbb{N}$ için

$$h_r = k_r - k_{r-1} = 2^{r-1} > 0$$

olduğundan artan bir dizi ve $r \rightarrow \infty$ için

$$h_r = k_r - k_{r-1} = 2^{r-1} \rightarrow \infty$$

dır. O halde $\theta = (k_r) = (2^r - 1)$ dizisi bir Lacunary dizisidir (Büyükşekerci, 1996).

Örnek 2.4 $\theta = (k_r) = (r^2)$ Lacunary dizisidir. Gösteriniz?

Gerçekten, $\forall r \in \mathbb{N}$ için $\theta = (k_r) = (r^2)$ dizisi pozitif tamsayı dizisidir. $k_0 = 0$. Ayrıca

$\forall r \in \mathbb{N}$ için

$$k_r - k_{r-1} = 2r - 1 > 0$$

olduğundan artan bir dizi ve $r \rightarrow \infty$ için

$$k_r - k_{r-1} = 2r - 1 \rightarrow \infty$$

dır. Bu durumda $\theta = (k_r) = (r^2)$ dizisi bir Lacunary dizisidir (Büyükşekerci, 1996).

Örnek 2.5 $\theta = (k_r) = ((2r)! - 1)$ Lacunary dizisidir. Gösteriniz?

Gerçekten, $\forall r \in \mathbb{N}$ için $\theta = (k_r) = ((2r)! - 1)$ dizisi pozitif tamsayı dizisidir. $k_0 = 0$.

Ayrıca $\forall r \in \mathbb{N}$ için

$$k_r - k_{r-1} = (2r)! - (2r-2)! > 0$$

olduğundan artan bir dizi ve $r \rightarrow \infty$ için

$$k_r - k_{r-1} = (2r)! - (2r-2)! \rightarrow \infty$$

dır. Bu durumda $\theta = (k_r) = ((2r)! - 1)$ dizisi bir Lacunary dizisidir (Büyükşekerci, 1996).

Tanım 2.32 $\sum_{i \in I_r} a_{nk} f(|x_i - \ell|)^{p_i}$ ifadesinde (a_{ri}) regüler matrisi (k_r) Lacunary dizisi

yardımıyla

$$C_\theta = a_{ri} = \begin{cases} k_r - k_{r-1}, & k_{r-1} < i < k_r \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda

$$\frac{1}{h_r} \sum_{i=k_{r-1}+1}^{k_r} f(|x_i - \ell|)^{p_i} = \frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} f(|x_i - \ell|)^{p_i} \quad (2.3)$$

şeklinde yazılır. Eğer $r \rightarrow \infty$ için (2.3) ifadesi sıfıra yakınsıyorsa (x_i) dizisi l değerine f modülüs altında kuvvetli Lacunary yakınsaktır denir ve bu diziler uzayı

$$W(C_\theta, f, p) = \left\{ x = (x_i) : \frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} f(|x_i - \ell|)^{p_i} \rightarrow 0, (n \rightarrow \infty) \right\}$$

$$W_0(C_\theta, f, p) = \left\{ x = (x_i) : \frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} f(|x_i|)^{p_i} \rightarrow 0, (n \rightarrow \infty) \right\}$$

ile gösterilir (Büyükşekerci, 1996; Büyükşekerci ve Kaplan, 2012). Eğer $W(C_\theta, f, p)$ uzayında (p_i) dizisini her i için $p_i = 1$ ve $f(x) = x$ olarak seçilirse (Fredman ve Sember, 1978) de tanımlanan

$$W(C_\theta) = \left\{ x = (x_i) : \frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} |x_i - \ell| \rightarrow 0, (r \rightarrow \infty) \right\}$$

uzayı elde edilir.

Teorem 2.3 $p = (p_i)$ sınırlı bir dizi olmak üzere $W(C_\theta, f, p)$ ve $W_0(C_\theta, f, p)$ birer lineer uzaydır.

İspat: Sadece $W(C_\theta, f, p)$ nin lineer uzay olduğunu gösterelim. $W_0(C_\theta, f, p)$ nin lineer uzay olduğu benzer olarak gösterilebilir. $\sup p_i = H$ ve $C = \max(1, 2^{H-1})$ olsun. $W(C_\theta, f, p)$ uzayında $x_i \rightarrow \ell$ ($i \rightarrow \infty$) ve $y_i \rightarrow s$ ($i \rightarrow \infty$) olacak şekilde $x = (x_i)$ ve $y = (y_i)$ dizileri göz önüne alınırsa,

$$\frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} f(|x_i + y_i - (\ell + s)|)^{p_i} \leq C \frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} f(|x_i - \ell|)^{p_i} + C \frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} f(|y_i - s|)^{p_i} \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty)$$

olduğundan $x + y \in W(C_\theta, f, p)$ dir.

Şimdi α skaler olmak üzere $\alpha x \in W(C_\theta, f, p)$ olduğunu gösterelim. Bunun için $\llbracket \alpha \rrbracket$, α nın tam kısmı olmak üzere,

$$\frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} f(|\alpha x_i - \alpha \ell|)^{p_i} \leq (\llbracket \alpha \rrbracket + 1)^H \frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} f(|x_i - \ell|)^{p_i} \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty)$$

yazılabilir. Böylece $\alpha x \in W(C_\theta, f, p)$ dir. O halde $W(C_\theta, f, p)$ bir lineer uzaydır (Büyüksəkerci, 1996; Büyüksəkerci ve Kaplan, 2012; Çakallı, 2009; Et, 2013; Kolk, 1991).

Teorem 2.4

1) $x_i \rightarrow l$ [$W(C_\theta, f)$] ise l tektir.

2) $x \in W(C_\theta, f) \cap W(C, f)$ olsun. Bu durumda

$x \rightarrow l_1$ [$W(C, f)$] ve $x \rightarrow l_2$ [$W(C_\theta, f)$] ise $l_1 = l_2$.

İspat: 1) $x_i \rightarrow l$ [$W(C_\theta, f)$] ve $x_i \rightarrow s$ [$W(C_\theta, f)$] ve $l \neq s$ olsun. O halde $|l - s| = a > 0$ olsun.

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} f(|l - s|) &= \frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} f(|l - x_i + x_i - s|) \\ &\leq \frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} f(|x_i - l| + |x_i - s|) \\ &\leq \frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} f(|x_i - l|) + \frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} f(|x_i - s|) \end{aligned}$$

biçimindedir. Böylece

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} f(|l - s|) = 0 \quad (2.4)$$

dir. Diğer taraftan $f(|l-s|) = f(a)$ ve

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} f(|\ell-s|) = f(a) \quad (2.5)$$

bulunur. (2.4) ve (2.5) den $f(a)=0$ ve f nin tanımından $a=0$ dir. Böylece $l=s$ olur.

2) $l_1 \neq l_2$ olsun.

$$\begin{aligned} \zeta_r(f) + \tau_r(f) &= \frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} f(|x_i - l_1|) + \frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} f(|x_i - l_2|) \\ &\geq \frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} f(|l_1 - l_2|) = f(|l_1 - l_2|) \end{aligned}$$

bulunur. $x \in W(C_\theta, f)$ olduğundan $\tau_r(f) \rightarrow 0$ dir. O halde yeteri kadar büyük r için

$$\zeta_r(f) > \frac{1}{2} f(|l_1 - l_2|)$$

elde edilir. Buna göre

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_r} \sum_{i=1}^{k_r} f(|x_i - l_1|) &\geq \frac{1}{k_r} \sum_{i \in I_r} f(|x_i - l_1|) \\ &= \frac{k_r - k_{r-1}}{k_r} \zeta_r(f) \\ &> \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{q_r}\right) f(|l_1 - l_2|) \end{aligned}$$

dir. $x \in W(C, f)$ olduğundan eşitsizliğin sol tarafı sifira gider. Dolayısıyla $q_r \rightarrow 1$ olmalıdır. O halde $W(C_\theta, f) \subset W(C, f)$ dir. $x_i \rightarrow l_1 [W(C_\theta, f)]$ ve

$$x_i \rightarrow l_2 [W(C_\theta, f)] \text{ olduğundan } \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{k_r} f(|x_i - l_2|) \rightarrow 0 \text{ (} t \rightarrow \infty \text{)}$$

olmalıdır. Bu durumda

$$\frac{1}{t} \sum_{i=1}^t f(|x_i - l_2|) + \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t f(|x_i - l_1|) \geq f(|l_1 - l_2|) > 0$$

elde edilir. Eşitsizliğin sol tarafındaki her iki terim de sifira yakınsadığından $f(|l_1 - l_2|) = 0$ ve f nin tanımından $|l_1 - l_2| = 0$ olmalıdır. Böylece $l_1 = l_2$ dir (Büyükşekerci, 1996; Büyükşekerci ve Kaplan, 2012; Et, 2013; Kolk, 1991; Pehlivan ve Fisher, 1994; Pehlivan ve Fisher, 1995; Şengül, 2017).

Burada $W(C_\theta, f, p)$ kuvvetli Lacunary yakınsaklık ile Lacunary istatistiksel yakınsaklık arasında nasıl bir bağıntı var onu araştıralım.

Teorem 2.5 f bir modülüs fonksiyonu ve $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t} = \beta > 0$ olsun.

$0 < h = \inf p_i \leq \sup p_i = H < \infty$ ve $W(C_\theta, p) = \left\{ (x_i) : \frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} |x_i - l|^{p_i} \rightarrow 0 \ (r \rightarrow \infty) \right\}$ için

$W(C_\theta, f, p) = W(C_\theta, p)$ dir.

İspat: $x \in W(C_\theta, p)$ olsun. Bu durumda

$$A_r = \frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} |x_i - l|^{p_i} \rightarrow 0 \ (r \rightarrow \infty)$$

şeklindedir. $\varepsilon > 0$ verilsin. f sürekli olduğundan $0 \leq u \leq \delta$ için $f(u) < \varepsilon$ olacak şekilde $0 < \delta < 1$ seçilebilir.

$$h_r^{-1} \sum_{i \in I_r} |x_i - l|^{p_i} = h_r^{-1} \sum_{\substack{i \in I_r \\ |x_i - l| \leq \delta}} |x_i - l|^{p_i} + h_r^{-1} \sum_{\substack{i \in I_r \\ |x_i - l| > \delta}} |x_i - l|^{p_i}$$

toplamı gözönüne alınsın. Bu toplamın sağ tarafın birinci toplamı

$$h_r^{-1} \sum_{\substack{i \in I_r \\ |x_i - l| \leq \delta}} f(|x_i - l|)^{p_i} \leq h_r^{-1} (h_r \cdot \varepsilon),$$

bulunur. İkinci toplam ise

$$h_r^{-1} \sum_{\substack{i \in I_r \\ |x_i - l| > \delta}} f(|x_i - l|)^{p_i} \leq \max\left((2f(1)\delta^{-1})^h, (2f(1)\delta^{-1})^H\right) \cdot A_r$$

bulunur. Böylece

$$h_r^{-1} \sum_{i \in I_r} f(|x_i - l|)^{p_i} \rightarrow 0 \ (r \rightarrow \infty)$$

dir. Buradan $W(C_\theta, p) \subset W(C_\theta, f, p)$ bulunur.

Şimdi $\beta > 0$ için, $x \in W(C_\theta, f, p)$ olsun. Bu durumda her bir $t \geq 0$ için $f(t) \geq \beta t$ dir.

Böylece

$$\begin{aligned} \beta t \leq f(t) &\Rightarrow (\beta t)^{p_i} \leq (f(t))^{p_i} \\ \Rightarrow h_r^{-1} \sum_{i \in I_r} (\beta t)^{p_i} &\leq h_r^{-1} \sum_{i \in I_r} (f(t))^{p_i} \\ \Rightarrow \beta^H h_r^{-1} \sum_{i \in I_r} t^{p_i} &\leq h_r^{-1} \sum_{i \in I_r} f(t)^{p_i} \end{aligned}$$

biçimindedir. Son açılımdaki eşitsizlik her bir $t \geq 0$ için sağlandığından, $|x_i - l| > 0$ içinde sağlanır. Bu durumda

$$\beta^H h_r^{-1} \sum_{i \in I_r} |x_i - l|^{p_i} \leq h_r^{-1} \sum_{i \in I_r} f(|x_i - l|)^{p_i}$$

yazılır. Teoremin kabulünden dolayı eşitsizliğin sağ kısmı sifıra gider. Dolayısıyla

$$h_r^{-1} \sum_{i \in I_r} |x_i - l|^{p_i} \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty)$$

elde edilir. Buradan $W(C_\theta, f, p) \subset W(C_\theta, p)$ bulunur. İspat tamamlanır (Büyükşekerci, 1996; Büyükşekerci ve Kaplan, 2012; Et, 2013; Pehlivan ve Fisher, 1995; Şengül, 2017).

Tanım 2.33 θ bir lacunary dizisi olsun. Her bir $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} |\{i \in I_r : |x_i - l| \geq \varepsilon\}| = 0,$$

şartı sağlanıyor ise, bu durumda $x = (x_i)$ dizisine Lacunary istatistiksel yakınsak denir. Lacunary istatistiksel yakınsak diziler kümesi S_θ ile gösterilir (Çakallı, 2009; Çolak, 2010; Fast, 1951; Fridy, 1985; Fridy ve Orhan, 1993a; Fridy ve Orhan, 1993b; Salat, 1980).

Örnek 2.6 $x_k = \begin{cases} 1, & k = n^2 \\ 0, & k \neq n^2 \end{cases}$ dizisi bilinen anlamda iraksak ama istatistiksel yakınsaktır

(Fast, 1951; Fridy, 1985).

Teorem 2.6 f bir modülüs fonksiyonu ve $\sup_i p_i = H$ olsun. Böylece

$x_i \rightarrow l [W(C_\theta, f, p)]$ ise $x_i \rightarrow l(S_\theta)$ dır.

İspat: f bir modülüs fonksiyonu ve $\sup_i p_i = H < \infty$ olsun. $x_i \rightarrow l [W(C_\theta, f, p)]$ ise,

bu durumda

$$\frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} f(|x_i - l|)^{p_i} \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty)$$

yazılabilir. $\varepsilon > 0$ ve $\sum_1 |x_i - l| \geq \varepsilon$ olmak üzere $i \in I_r$ üzerinden toplam olsun.

Böylece

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} f(|x_i - l|)^{p_i} &\geq \frac{1}{h_r} \sum_1 f(|x_i - l|)^{p_i} \\
&\geq \frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} f(\varepsilon)^{p_i} \\
&\geq \frac{1}{h_r} \sum_1 \min(f(\varepsilon)^{\inf p_i}, f(\varepsilon)^H) \\
&= \frac{1}{h_r} |i \in I_r : |x_i - l| \geq \varepsilon| \min(f(\varepsilon)^{\inf p_i}, f(\varepsilon)^H)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $x_i \rightarrow l(S_\theta)$ elde edilir. Bu da ispatı tamamlar (Büyükşekerci, 1996; Connor, 1988; Çolak, 2010).

2.7 (α, β) nıncı dereceden modülüs fonksiyonu yardımıyla tanımlanan Cesàro-tipi toplanabilme uzayları

(α, β) nıncı dereceden kuvvetli $w[\theta, f, p]$ toplanabilme ve (α, β) nıncı dereceden Lacunary istatistiksel yakınsaklık arasındaki kapsama bağıntıları incelenecektir.

Tanım 2.34 l kompleks bir sayı olmak üzere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} |\{k \leq n : |x_k - l| \geq \varepsilon\}| = 0$$

eşitliği sağlanırsa $x = (x_k)$ dizisine α dereceden l ye istatistiksel yakınsaktır denir (Et, 2013; Et, 2014; Şengül, In review; Şengül, 2017).

Tanım 2.35 $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ olsun. $|\{k \leq n : k \in E\}|^\beta$ kümesi, n yi aşmayan E nin elemanlarının sayısının β yıncı kuvveti olmak üzere

$$\delta_\alpha^\beta(E) = \lim_n \frac{1}{n^\alpha} |\{k \leq n : k \in E\}|^\beta$$

limiti mevcut (sonlu veya sonsuz) ise \mathbb{N} nin alt kümesi E ye \mathbb{N} de (α, β) dereceden yoğundur denir (Şengül, 2017).

Tanım 2.36 $x = (x_k)$ dizisi (α, β) sıfır yoğunluğu kümesinin dışındaki bütün k lar için $P(k)$ özelliği sağlanırsa, bu durumda x_k , β ya göre hemen hemen bütün k lar için $P(k)$ yı sağlar. Bu *a.a.k* (α, β) olarak kısaltılabilir.

Bu kısımda f modülüs fonksiyonu yardımıyla $w_\alpha^\beta(p)$ toplanabilme ve $w_\alpha^\beta[\theta, f, p]$ toplanabilme tanımlanacak. Bu uzaylar incelenecek. Ayrıca S_α^β istatistiksel yakınsak ile $w_\alpha^\beta[\theta, f, p]$ toplanabilme ve $w_\alpha^\beta(p)$ toplanabilme arasında bazı kapsama bağıntıları verilecektir (Şengül, 2017).

Tanım 2.37 $\theta = (k_r)$ bir Lacunary dizisi olsun. $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ verilsin. L bir reel sayı, $I_r = (k_{r-1}, k_r]$ ve h_r^α , h_r nin α yıncı dereceden $(h_r)^\alpha$ olmak üzere

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r^\alpha} |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}|^\beta = 0$$

eşitliği sağlanıyorsa $x = (x_k)$ dizisi S_α^β istatistiksel yakınsaktır (veya (α, β) yıncı dereceden Lacunary istatistiksel yakınsak diziler) denir (Şengül, 2017). Burada $(h_r^\alpha) = (h_1^\alpha, h_2^\alpha, \dots, h_r^\alpha, \dots)$ ve $|\{k \leq n : k \in E\}|^\beta$, n yi aşmayan E nin elemanlarının sayısının β yıncı kuvvetidir. Bu durumda bu yakınsaklık $S_\alpha^\beta(\theta) - \lim x_k = L$ ile gösterilir. $S_\alpha^\beta(\theta)$, bütün $S_\alpha^\beta(\theta)$ - istatistiksel yakınsak dizilerin kümesidir. Eğer $\theta = (2^r)$ ise, bu durumda $S_\alpha^\beta(\theta)$ yerine S_α^β , eğer $\alpha = \beta = 1$ ve $\theta = (2^r)$ ise, böylece $S_\alpha^\beta(\theta)$ yerine S yazılacaktır.

Tanım 2.38 $\theta = (k_r)$ bir Lacunary dizisi, $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ ve p pozitif reel sayı olsun. L bir reel sayı, $I_r = (k_{r-1}, k_r]$ ve h_r^α , h_r nin α yıncı dereceden $(h_r)^\alpha$ olmak üzere

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r^\alpha} \left(\sum_{k \in I_r} |x_k - L|^p \right)^\beta = 0$$

sağlanıyor ise $x = (x_k)$ dizisi kuvvetli $N_\alpha^\beta(\theta, p)$ toplanabilme (veya kuvvetli (α, β) yıncı dereceden $N(\theta, p)$ toplanabilme) denir (Şengül, 2017). Bu durumda $N_\alpha^\beta(\theta, p) - \lim x_k = L$ dir. $N_\alpha^\beta(\theta, p)$, (α, β) yıncı dereceden bütün kuvvetli $N(\theta, p)$ toplanabilme kümesidir. Eğer $\alpha = \beta = 1$ ise, bu durumda $N_\alpha^\beta(\theta, p)$ nin yerine $N(\theta, p)$ ve $\theta = (2^r)$ ise, bu takdirde $N_\alpha^\beta(\theta, p)$ nin yerine $w_\alpha^\beta(p)$, eğer $L = 0$ ise, bu durumda $w_\alpha^\beta(p)$ nin yerine $w_{\alpha,0}^\beta(p)$ yazılacaktır. $N_{\alpha,0}^\beta(\theta, p)$, (α, β) yıncı dereceden 0 ra bütün kuvvetli $N_\theta(p)$ toplanabilme olarak tanımlanır.

Tanım 2.39 f bir modülüs fonksiyonu, $p=(p_k)$ pozitif reel sayılar dizisi, $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ reel sayılar olsun.

$$w_\alpha^\beta[\theta, f, p] = \left\{ x = (x_k) : \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r^\alpha} \left(\sum_{k \in I_r} [f(|x_k - L|)]^{p_k} \right)^\beta = 0, \text{ bazı } L \text{ için} \right\}$$

sağlanıyorsa, $x=(x_k)$ dizisi L ye kuvvetli $w_\alpha^\beta[\theta, f, p]$ toplanabilme denir (Et, 2014; Şengül, In rewiev; Şengül, 2017). Bu durumda $w_\alpha^\beta[\theta, f, p]-\lim x_k = L$ dir. $f(x) = x$ ve bütün $k \in \mathbb{N}$ için $p_k = 1$ ise, $w_\alpha^\beta[\theta, f, p]$ nın yerine $N_\alpha^\beta(\theta, p)$, $w_{\alpha,0}^\beta[\theta, f, p]$, (α, β) yıncı dereceden 0 ra kuvvetli $w[\theta, f, p]$ toplanabilme olarak tanımlanır.

Theorem 2.7 $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ ve $M = \max(1, H)$ olsun. $w_{\alpha,0}^\beta[\theta, f, p]$ uzayı

$$g(x) = \sup_r \left\{ \frac{1}{h_r^\alpha} \left(\sum_{k \in I_r} [f(|x_k|)]^{p_k} \right)^\beta \right\}^{\frac{1}{M}}$$

ile paranormdur.

İspat: $g(0) = 0$ ve $g(x) = g(-x)$ sağlandığı açıktır. $x, y \in w_{\alpha,0}^\beta[\theta, f, p]$ olsun. $\frac{p_k}{M} \leq 1$

ve $\frac{M}{\beta} \geq 1$ olduğundan, f nin tanımı ve Minkowski eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{1}{h_r^\alpha} \left(\sum_{k \in I_r} [f(|x_k|)]^{p_k} \right)^\beta \right\}^{\frac{1}{M}} &\leq \left\{ \frac{1}{h_r^\alpha} \left(\sum_{k \in I_r} [f(|x_k|) + f(|y_k|)]^{p_k} \right)^\beta \right\}^{\frac{1}{M}} \\ &= \frac{1}{h_r^{\frac{\alpha}{M}}} \left(\sum_{k \in I_r} [f(|x_k|) + f(|y_k|)]^{p_k} \right)^{\frac{1}{\beta}} \\ &\leq \frac{1}{h_r^{\frac{\alpha}{M}}} \left(\left(\sum_{k \in I_r} [f(|x_k|)]^{p_k} \right)^\beta \right)^{\frac{1}{M}} + \frac{1}{h_r^{\frac{\alpha}{M}}} \left(\left(\sum_{k \in I_r} [f(|y_k|)]^{p_k} \right)^\beta \right)^{\frac{1}{M}} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $x, y \in w_{\alpha,0}^\beta[\theta, f, p]$ için $g(x+y) \leq g(x) + g(y)$ dir. λ kompleks sayı olsun. f nin tanımının yardımıyla

$$g(\lambda x) = \sup_r \left\{ \frac{1}{h_r^\alpha} \left(\sum_{k \in I_r} [f(|\lambda x_k|)]^{p_k} \right)^\beta \right\}^{\frac{1}{M}} \leq K^{\frac{H}{M}} g(x)$$

bulunur. $[\lambda]$, λ nın tam kısmı ve $K = 1 + [\lambda]$ dir. Herhangi x sabit için $g(x) \neq 0$ olmak üzere $\lambda \rightarrow 0$ olsun. f nin tanımı, $|\lambda| < 1$ için ve $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ yardımıyla

$$\frac{1}{h_r^\alpha} \left(\sum_{k \in I_r} [f(|\lambda x_k|)]^{p_k} \right)^\beta < \varepsilon, \quad n > N(\varepsilon) \quad (2.6)$$

Bundan başka $1 \leq n \leq N$ için, λ yeteri kadar küçük alınarak ve f sürekli olduğundan

$$\frac{1}{h_r^\alpha} \left(\sum_{k \in I_r} [f(|\lambda x_k|)]^{p_k} \right)^\beta < \varepsilon \quad (2.7)$$

dir. (2.6) ve (2.7) den $\lambda \rightarrow 0$ için $g(\lambda x) \rightarrow 0$ olur (Şengül, 2017).

Sonuç 2.1 f bir modülüs fonksiyonu ve olsun. Bu durumda $\|u\| \geq \delta$ için $f(\|u\|) \leq 2f(1)\delta^{-1}\|u\|$ dir (Pehlivan ve Fisher, 1994; Pehlivan ve Fisher, 1995).

Theorem 2.8 Eğer $0 < \alpha = \beta \leq 1$, $p > 1$ ve $\liminf_{u \rightarrow \infty} \frac{f(u)}{u} > 0$ ise, bu durumda $w_\alpha^\beta[\theta, f, p] = w_\alpha^\beta(p)$ dir.

İspat: $p_k = p$ bir pozitif reel sayı olsun. Eğer $\liminf_{u \rightarrow \infty} \frac{f(u)}{u} > 0$ ise böylece $u > 0$ için $f(u) > cu$ olacak şekilde $c > 0$ sayısı vardır. $x \in w_\alpha^\beta[\theta, f, p]$ dir. Açık şekilde

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_r^\alpha} \left(\sum_{k \in I_r} [f(|x_k - L|)]^p \right)^\beta &\geq \frac{1}{h_r^\alpha} \left(\sum_{k \in I_r} [c|x_k - L|]^p \right)^\beta \\ &= \frac{c^{p\beta}}{h_r^\alpha} \left(\sum_{k \in I_r} |x_k - L|^p \right)^\beta \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $w_\alpha^\beta[\theta, f, p] \subseteq w_\alpha^\beta(p)$ dir.

$x \in w_\alpha^\beta(p)$ olsun. Sonuç 2.1 in yardımıyla

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_r^\alpha} \left(\sum_{k \in I_r} [f(|x_k - L|)]^p \right)^\beta &= \frac{1}{h_r^\alpha} \left(\sum_{\substack{k \in I_r \\ |x_k - L| \leq \delta}} [f(|x_k - L|)]^p \right)^\beta + \frac{1}{h_r^\alpha} \left(\sum_{\substack{k \in I_r \\ |x_k - L| > \delta}} [f(|x_k - L|)]^p \right)^\beta \\ &\leq \frac{1}{h_r^\alpha} \varepsilon^{p\beta} h_r^\beta + \frac{1}{h_r^\alpha} \left(\sum_{\substack{k \in I_r \\ |x_k - L| > \delta}} [2f(1)\delta^{-1}|x_k - L|]^p \right)^\beta \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{h_r^\alpha} \varepsilon^{p\beta} h_r^\beta + \frac{2^{p\beta} f(1)^{p\beta}}{h_r^\alpha \delta^{p\beta}} \left(\sum_{k \in I_r} |x_k - L|^p \right)^\beta$$

elde edilir. Böylece $x \in w_\alpha^\beta[\theta, f, p]$ dır (Şengül, 2017).

Örnek 2.7 $\liminf_{u \rightarrow \infty} \frac{f(u)}{u} > 0$ olduğunda $w_\alpha^\beta[\theta, f, p] \neq w_\alpha^\beta(p)$ olduğuna dair bir

örnek verilebilir. $f(x) = \sqrt{x}$ modülüs fonksiyonu ve $x = (x_k)$ dizisi

$$x_k = \begin{cases} h_r, & k = k_r \\ 0, & k \neq k_r \end{cases}$$

olsun. $L = 0$, $p = \frac{3}{2}$, $\alpha = \beta$ ve $r \rightarrow \infty$ için

$$\frac{1}{h_r^\alpha} \left(\sum_{k \in I_r} [f(|x_k|)]^p \right)^\beta = \frac{1}{h_r^\alpha} (\sqrt{h_r})^{\frac{3}{2}\beta} \rightarrow 0$$

elde edilir. Buradan $x \in w_\alpha^\beta[\theta, f, p]$ dır.

Fakat $r \rightarrow \infty$ için

$$\frac{1}{h_r^\alpha} \left(\sum_{k \in I_r} |x_k|^p \right)^\beta = \frac{(h_r)^{\frac{3}{2}\beta}}{h_r^\alpha} \rightarrow \infty$$

bulunur. Böylece $x \notin w_\alpha^\beta(p)$ dir (Çakallı, 2009; Et, 2013; Et ve Şengül, 2014; Şengül, In review; Şengül, 2017).

Teorem 2.9 $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ ve $\liminf p_k > 0$ olsun. $x_k \rightarrow L$ ise $w_\alpha^\beta[\theta, f, p] - \lim x_k = L$ dir.

İspat: $x_k \rightarrow L$ olsun. f nin tanımından, $f(|x_k - L|) \rightarrow 0$ olur. $\liminf p_k > 0$ olduğundan, $[f(|x_k - L|)]^{p_k} \rightarrow 0$ dır. Böylece $w_\alpha^\beta[\theta, f, p] - \lim x_k = L$ elde edilir (Şengül, 2017).

Teorem 2.10 $0 < \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \beta_1 \leq \beta_2 \leq 1$ olmak üzere $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in (0, 1]$ reel sayılar, f bir modülüs fonksiyonu ve $\theta = (k_r)$ bir Lacunary dizisi olsun. Bu durumda $w_{\alpha_1}^{\beta_2}[\theta, f, p] \subset S_{\alpha_2}^{\beta_1}(\theta)$ dır.

İspat: $x \in w_{\alpha_1}^{\beta_2}[\theta, f, p]$, $\varepsilon > 0$, \sum_1 , $k \in I_r$ üzerinde $|x_k - L| \geq \varepsilon$ ve \sum_2 , $k \in I_r$ üzerinde $|x_k - L| < \varepsilon$ toplamlar olsunlar. Herbir r için $h_r^{\alpha_1} < h_r^{\alpha_2}$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h_r^{\alpha_1}} \left(\sum_{k \in I_r} [f(|x_k - L|)]^{p_k} \right)^{\beta_2} &= \frac{1}{h_r^{\alpha_1}} \left[\sum_1 [f(|x_k - L|)]^{p_k} + \sum_2 [f(|x_k - L|)]^{p_k} \right]^{\beta_2} \\
&\geq \frac{1}{h_r^{\alpha_2}} \left[\sum_1 [f(|x_k - L|)]^{p_k} + \sum_2 [f(|x_k - L|)]^{p_k} \right]^{\beta_2} \\
&\geq \frac{1}{h_r^{\alpha_2}} \left[\sum_1 [f(\varepsilon)]^{p_k} \right]^{\beta_2} \\
&\geq \frac{1}{h_r^{\alpha_2}} \left[\sum_1 \min([f(\varepsilon)]^h, [f(\varepsilon)]^H) \right]^{\beta_2} \\
&\geq \frac{1}{h_r^{\alpha_2}} |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}|^{\beta_1} \left[([f(\varepsilon)]^h, [f(\varepsilon)]^H) \right]^{\beta_2}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $x \in S_{\alpha_2}^{\beta_1}(\theta)$ olur (Şengül, 2017).

Teorem 2.11 Eğer f modülüs fonksiyonu sınırlı ve $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{h_r^{\beta_2}}{h_r^{\alpha_2}} = 1$ ise, bu taktirde $S_{\alpha_2}^{\beta_1}(\theta) \subset w_{\alpha_2}^{\beta_1}[\theta, f, p]$ dır.

İspat: $x \in S_{\alpha_1}^{\beta_2}(\theta)$ ve f sınırlı olsun. Böylece bütün $x \geq 0$ ve K pozitif tamsayısı için $f(x) \leq K$ dır. Bu durumda her bir $r \in \mathbb{N}$ ve $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h_r^{\alpha_2}} \left(\sum_{k \in I_r} [f(|x_k - L|)]^{p_k} \right)^{\beta_1} &\geq \frac{1}{h_r^{\alpha_1}} \left[\sum_{k \in I_r} [f(|x_k - L|)]^{p_k} \right]^{\beta_1} \\
&\geq \frac{1}{h_r^{\alpha_1}} \left[\sum_1 [f(|x_k - L|)]^{p_k} + \sum_2 [f(|x_k - L|)]^{p_k} \right]^{\beta_1} \\
&\geq \frac{1}{h_r^{\alpha_1}} \left[\sum_1 \max(K^h, K^H) + \sum_2 |f(\varepsilon)|^{p_k} \right]^{\beta_1} \\
&\geq \left(\max(K^h, K^H) \right)^{\beta_2} \frac{1}{h_r^{\alpha_1}} |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}|^{\beta_2} \\
&\quad + \frac{h_r^{\beta_2}}{h_r^{\alpha_1}} \left(\max(f(\varepsilon)^h, f(\varepsilon)^H) \right)^{\beta_2}
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan $x \in w_{\alpha_2}^{\beta_1}[\theta, f, p]$ olur (Şengül, 2017).

Teorem 2.12 f modülüs fonksiyonu olsun. Eğer $\lim p_k > 0$ ise, bu durumda $w_{\alpha}^{\beta}[\theta, f, p] - \lim x_k = L$ tektir.

İspat: $\lim p_k > 0$ olsun. $w_{\alpha}^{\beta}[\theta, f, p] - \lim x_k = L_1$ ve $w_{\alpha}^{\beta}[\theta, f, p] - \lim x_k = L_2$ alınsın. Bu durumda

$$\lim_r \frac{1}{h_r^\alpha} \left(\sum_{k \in I_r} [f(|x_k - L_1|)]^{p_k} \right)^\beta = 0$$

ve

$$\lim_r \frac{1}{h_r^\alpha} \left(\sum_{k \in I_r} [f(|x_k - L_2|)]^{p_k} \right)^\beta = 0$$

yazılır. f nin yardımıyla ve Eşitsizlik 1.1 a kullanılarak

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_r^\alpha} \left(\sum_{k \in I_r} [f(|L_1 - L_2|)]^{p_k} \right)^\beta &\leq \frac{D}{h_r^\alpha} \left(\sum_{k \in I_r} [f(|x_k - L_2|)]^{p_k} + \sum_{k \in I_r} [f(|x_k - L_2|)]^{p_k} \right)^\beta \\ &\leq \frac{D}{h_r^\alpha} \left(\sum_{k \in I_r} [f(|x_k - L_2|)]^{p_k} \right)^\beta + \frac{D}{h_r^\alpha} \left(\sum_{k \in I_r} [f(|x_k - L_2|)]^{p_k} \right)^\beta \end{aligned}$$

elde edilir. $\text{supp}_k = H$, $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ ve $D = \max(1, 2^{H-1})$ dir. Dolayısıyla

$$\lim_r \frac{1}{h_r^\alpha} \left(\sum_{k \in I_r} [f(|L_1 - L_2|)]^{p_k} \right)^\beta \quad (2.8)$$

bulunur. $\lim_{k \rightarrow \infty} p_k = s$ olduğundan $L_1 - L_2 = 0$ ise $L_1 = L_2$ dir. Böylece limit tektir (Şengül, 2017).

Teorem 2.13 Bütün $r \in \mathbb{N}$ için $I_r \subset J_r$ olan $\theta = (k_r)$ ve $\theta' = (s_r)$ iki Lacunary dizileri olsunlar. $0 < \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \beta_1 \leq \beta_2 \leq 1$ olmak üzere

(i) Eğer $\liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{h_r^{\alpha_1}}{l_r^{\alpha_2}} > 0$ ise, bu taktirde $w_{\alpha_2}^{\beta_2}[\theta', f, p] \subset w_{\alpha_1}^{\beta_1}[\theta, f, p]$ dir.

(ii) Eğer f modülüs fonksiyonu sınırlı ve $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{l_r}{h_r^{\alpha_2}} = 1$ ise, böylece

$w_{\alpha_1}^{\beta_2}[\theta, f, p] \subset w_{\alpha_2}^{\beta_1}[\theta', f, p]$ dir.

İspat: (i) $x \in w_{\alpha_2}^{\beta_2}[\theta', f, p]$ olsun.

$$\begin{aligned} \frac{1}{l_r^{\alpha_2}} \left(\sum_{k \in I_r} [f(|x_k - L|)]^{p_k} \right)^{\beta_2} &= \frac{1}{l_r^{\alpha_2}} \left[\sum_{k \in J_r - I_r} [f(|x_k - L|)]^{p_k} \right]^{\beta_2} + \frac{1}{l_r^{\alpha_2}} \left[\sum_{k \in I_r} [f(|x_k - L|)]^{p_k} \right]^{\beta_2} \\ &\geq \frac{1}{l_r^{\alpha_2}} \left(\sum_{k \in I_r} [f(|x_k - L|)]^{p_k} \right)^{\beta_2} \\ &\geq \frac{h_r^{\alpha_1}}{l_r^{\alpha_2}} \frac{1}{h_r^{\alpha_1}} \left(\sum_{k \in I_r} [f(|x_k - L|)]^{p_k} \right)^{\beta_2} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan eğer $x \in w_{\alpha_2}^{\beta_2} [\theta', f, p]$ ise, böylece $x \in w_{\alpha_1}^{\beta_1} [\theta, f, p]$ dır.

(ii) $x = (x_k) \in w_{\alpha_1}^{\beta_2} [\theta, f, p]$ ve (2.6) sağlansın. f sınırlı olsun. Böylece bütün $x \geq 0$ ve K pozitif tamsayısı için $f(x) \leq K$ dır. Bütün $r \in \mathbb{N}$ için $I_r \subset J_r$ ve $h_r \subset l_r$ olduğundan, her $r \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{l_r^{\alpha_2}} \left(\sum_{k \in J_r} [f(|x_k - L|)]^{p_k} \right)^{\beta_1} &= \frac{1}{l_r^{\alpha_2}} \left[\sum_{k \in J_r - I_r} [f(|x_k - L|)]^{p_k} \right]^{\beta_1} + \frac{1}{l_r^{\alpha_2}} \left[\sum_{k \in I_r} [f(|x_k - L|)]^{p_k} \right]^{\beta_1} \\ &\leq \left(\frac{l_r - h_r}{l_r^{\alpha_2}} \right) K^{p_k \beta_1} + \frac{1}{l_r^{\alpha_2}} \left(\sum_{k \in I_r} [f(|x_k - L|)]^{p_k} \right)^{\beta_2} \\ &\geq \left(\frac{l_r - h_r^{\alpha_2}}{h_r^{\alpha_2}} \right) K^{H \beta_1} + \frac{1}{h_r^{\alpha_2}} \left(\sum_{k \in I_r} [f(|x_k - L|)]^{p_k} \right)^{\beta_2} \\ &\geq \left(\frac{l_r}{h_r^{\alpha_2}} - 1 \right) K^{H \beta_1} + \frac{1}{h_r^{\alpha_2}} \left(\sum_{k \in I_r} [f(|x_k - L|)]^{p_k} \right)^{\beta_2} \end{aligned}$$

bulunur. Böylece $w_{\alpha_1}^{\beta_2} [\theta, f, p] \subset w_{\alpha_2}^{\beta_1} [\theta', f, p]$ olur (Şengül, 2017).

BÖLÜM III

MODÜLÜS FONKSİYONU İLE TANIMLI ARİTMETİK YAKINSAK DİZİ UZAYI

Bu bölümde modülüs fonksiyonu yardımıyla, $AC(f)$ aritmetik yakınsaklık dizi uzayı ve $AS(f)$ aritmetik toplanabilme kavramı tanıtılacak, bu uzayların cebirsel ve topolojik özellikleri, ayrıca bazı kapsama bağıntıları verilecektir.

\mathbb{N} üzerinde $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $x = (x_k)$ dizisi; $\sum_{k|n} x_k$ gösterimi k ve n tamsayıları için $k|n$, “ k böler n ” veya “ n , k ’nin bir katıdır” anlamında olup; m ve n iki tamsayının en büyük ortak böleni $\langle m, n \rangle$ ile gösterilir.

Ruckle (Ruckle, 2012) aritmetik yakınsaklık ve aritmetik toplanabilme kavramlarını aşağıdaki gibi tanımladı.

(i) Her $\varepsilon > 0$ için bir n tamsayısı vardır ve her bir m tamsayısı için

$$|y_m - y_{\langle m, n \rangle}| < \varepsilon$$

şartı sağlanıyorsa $y = (y_k)$ dizisi aritmetik yakınsaktır denir. Bu ise AC ile gösterilir.

(ii) Her $\varepsilon > 0$ için bir n tamsayısı vardır ve her bir m tamsayısı için

$$\left| \sum_{k|n} x_k - \sum_{k|\langle m, n \rangle} x_k \right| < \varepsilon$$

şartı sağlanıyorsa $x = (x_k)$ dizisine aritmetik toplanabilirdir denir. Bu ise AS ile gösterilir.

Ruckle (Ruckle, 1973), modülüs fonksiyonu yardımıyla

$X(f) = \left\{ x = (x_k) : \sum_{k=1}^{\infty} f(|x_k|) < \infty \right\}$ FK uzayını tanımladı. $X(f)$ uzayı

$\|x\| = \sum_{k=1}^{\infty} f(|x_k|) < \infty$ normu ile bir Banach uzayıdır.

Ruckle $X(f)$ uzayında her $x \geq 0$ için modülüs fonksiyonunu $f(x) = x$ olarak

$X(f) \subset l_1$ (l_1 mutlak toplanabilir diziler uzayı) bağıntısını ispatlamıştır.

Tanım 3.1 E bir dizi uzayı ve $(x_k); (y_k) \in E$ olduğunda, $(x_k) * (y_k) = (x_k y_k) \in E$ ise E dizi cebiridir (Yaying ve Hazarika, 2019).

Lemma 3.1 f bir modülüs fonksiyonu ve $0 < \delta < 1$ olsun. Bu durumda her bir $x \geq \delta$ için $f(x) \leq 2f(1)\delta^{-1}x$ dir (Pehlivan ve Fisher, 1994; Pehlivan ve Fisher, 1995).

3.1 $AC(f)$ Aritmetik Yakınsak Dizi Uzayı

Burada modülüs fonksiyonu ile tanımlı aritmetik yakınsak dizi uzayı $AC(f)$ nın bazı topolojik ve cebirsel özellikleri incelenecektir. $AC(f)$ dizi uzayı

$$AC(f) = \left\{ \varepsilon > 0 \text{ ve bir } n \text{ tamsayı için, } f\left(\left|x_m - x_{\langle m, n \rangle}\right|\right) < \varepsilon, \quad \forall m \right\}$$

ile gösterilir (Yaying ve Hazarika, 2019).

Teorem 3.1 $AC(f)$ dizi uzayı lineer uzaydır.

İspat: (x_m) ve (y_m) , $AC(f)$ dizi uzayında iki dizi olsun. $AC(f)$ dizi uzayının tanımından, her $\varepsilon > 0$ için $\exists n$ tamsayısı ve her m için

$$f\left(\left|x_m - x_{\langle m, n \rangle}\right|\right) < \frac{\varepsilon}{2}$$

yazabiliriz. Benzer şekilde

$$f\left(\left|y_m - y_{\langle m, n \rangle}\right|\right) < \frac{\varepsilon}{2}$$

yazılır. f modülüs fonksiyonu olduğundan, her $\varepsilon > 0$, bir n tamsayısı ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve her m için

$$\begin{aligned} f\left(\left|(\alpha x_m + \beta y_m) - (\alpha x_{\langle m, n \rangle} + \beta y_{\langle m, n \rangle})\right|\right) &\leq f\left(\left|\alpha\right|\left|x_m - x_{\langle m, n \rangle}\right|\right) + f\left(\left|\beta\right|\left|y_m - y_{\langle m, n \rangle}\right|\right) \\ &\leq f\left(\left|x_m - x_{\langle m, n \rangle}\right|\right) + f\left(\left|y_m - y_{\langle m, n \rangle}\right|\right) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $AC(f)$ dizi uzayı lineer uzaydır (Yaying ve Hazarika, 2019).

Teorem 3.2 $AC(f)$ dizi uzayı bir dizi cebiridir.

İspat: (x_m) ve (y_m) , $AC(f)$ dizi uzayında iki dizi olsun. Böylece her $\varepsilon > 0$ ve bir n tamsayısı ve her m için

$$f\left(\left|x_m - x_{\langle m, n \rangle}\right|\right) < \varepsilon$$

ve

$$f(|y_m - y_{\langle m, n \rangle}|) < \varepsilon$$

şeklindedir. Bu durumda her m için

$$f(|x_m y_m - x_{\langle m, n \rangle} y_{\langle m, n \rangle}|) < \varepsilon$$

olduğu kolayca gösterilir. Böylece $x_m y_m \in AC(f)$ dir. Bu da ispatı tamamlar (Yaying ve Hazarika, 2019).

Teorem 3.3 f_1 ve f_2 iki modülüs fonksiyonu ise $AC(f_1) \subset AC(f_1 f_2)$ dir.

İspat: $(x_m) \in AC(f_2)$ olsun. Böylece her $\varepsilon > 0$ ve bir n tamsayısı için

$$f(|x_m - x_{\langle m, n \rangle}|) < \varepsilon$$

dir. $0 \leq x \leq \delta$ için $f_1(x) < \varepsilon$ olacak şekilde $0 < \delta < 1$ şartını sağlayan bir δ seçilsin.

$y_m = f_2(|x_m - x_{\langle m, n \rangle}|)$ olarak tanımlansın. $m \in \mathbb{N}$ için

$$\lim_m f_1(y_m) = \lim_{y_m \leq \delta} f_1(y_m) + \lim_{y_m > \delta} f_1(y_m)$$

göz önüne alınsın. f_1 modülüs fonksiyonu olduğundan

$$\lim_{y_m \leq \delta} f_1(y_m) < \varepsilon$$

dir. $y_m > \delta$ için ve $[x]$, x in tamsayı kısmı olmak üzere,

$$y_m < \frac{y_m}{\delta} < 1 + \left[\frac{y_m}{\delta} \right],$$

yazılabilir. f_1 modülüs fonksiyonu Lemma 3.1 ve modülüs fonksiyonu tanımının yardımıyla $y_m > \delta$ için

$$f_1(y_m) < f_1(1) \left(1 + \left[\frac{y_m}{\delta} \right] \right) \leq 2 f_1(1) \frac{y_m}{\delta}.$$

bulunur. Böylece

$$\lim_{y_m > \delta} f_1(y_m) < 2 f_1(1) \delta^{-1} \lim_{y_m > \delta} y_m < \varepsilon.$$

dir. Böylece $(x_m) \in AC(f_1 f_2)$ dir (Yaying ve Hazarika, 2019).

Sonuç 3.1 Aritmetik yakınsak dizilerin dizi uzayı AC olsun. Bu durumda $AC \subset AC(f)$ dir (Yaying ve Hazarika, 2019).

Teorem 3.4 f_1 ve f_2 iki modülüs fonksiyonu olsun. Böylece

$$AC(f_1) \cap AC(f_2) \subset AC(f_1 + f_2) \text{ dir.}$$

İspat: $(x_m) \in AC(f_1) \cap AC(f_2)$ olsun. Böylece $(x_m) \in AC(f_1)$ ve $(x_m) \in AC(f_2)$ dir. $\varepsilon > 0$ için pozitif n tamsayısı vardır ve her m için

$$f_1\left(\left|x_m - x_{\langle m, n \rangle}\right|\right) < \varepsilon \text{ ve } f_2\left(\left|x_m - x_{\langle m, n \rangle}\right|\right) < \varepsilon$$

biçimindedir. Yukarıdaki denklemlerden $\varepsilon > 0$, n tamsayı ve her m için

$$(f_1 + f_2)\left(\left|x_m - x_{\langle m, n \rangle}\right|\right) < \varepsilon$$

bulunur. Böylece $(x_m) \in AC(f_1 + f_2)$ olur (Yaying ve Hazarika, 2019).

3.2 $AS(f)$ Aritmetik Toplanabilir Dizi Uzayı

Bu bölümde $AS(f)$ aritmetik toplanabilir dizi uzayının cebirsel ve topolojik özellikleri çalışılacaktır. f modülüs fonksiyonu yardımıyla aritmetik toplanabilir dizi uzayı

$$AS(f) = \left\{ (x_m) : \varepsilon > 0 \text{ ve bir } n \text{ tamsayı için, } f\left(\left|\sum_{k|m} x_k - \sum_{k|\langle m, n \rangle} x_k\right|\right) < \varepsilon, \forall m \right\}$$

biçiminde gösterilir (Yaying ve Hazarika, 2019).

Teorem 3.5 $AS(f)$ dizi uzayı lineer uzaydır.

İspat: $(x_m), (y_m) \in AS(f)$ olsun. $AS(f)$ nin tanımının yardımıyla, $\varepsilon > 0$, bir n tamsayı ve her m için

$$f\left(\left|\sum_{k|m} x_k - \sum_{k|\langle m, n \rangle} x_k\right|\right) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ ve } f\left(\left|\sum_{k|m} y_k - \sum_{k|\langle m, n \rangle} y_k\right|\right) < \frac{\varepsilon}{2}$$

dir. f modülüs fonksiyonu her $\varepsilon > 0$, n tamsayısı ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve her m için

$$\begin{aligned} & f\left(\left|\sum_{k|m} (\alpha x_k + \beta y_k) - \sum_{k|\langle m, n \rangle} (\alpha x_k + \beta y_k)\right|\right) \\ & \leq f\left(\left|\alpha\left|\sum_{k|m} x_k - \sum_{k|\langle m, n \rangle} x_k\right|\right|\right) + f\left(\left|\beta\left|\sum_{k|m} y_k - \sum_{k|\langle m, n \rangle} y_k\right|\right|\right) \\ & \leq f\left(\left|\sum_{k|m} x_k - \sum_{k|\langle m, n \rangle} x_k\right|\right) + f\left(\left|\sum_{k|m} y_k - \sum_{k|\langle m, n \rangle} y_k\right|\right) \\ & < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

bulunur. Böylece $AS(f)$ bir lineer uzaydır (Yaying ve Hazarika, 2019).

Teorem 3.6 f_1 ve f_2 iki modülüs fonksiyonu ise $AS(f_1) \subset AS(f_1 f_2)$ dir.

İspat: Bu Teoremin ispatı Teorem 3.3 ün ispatına benzer şekilde yapılabilir (Yaying ve Hazarika, 2019).

Sonuç 3.2 Aritmetik toplanabilir dizilerin uzayı AS ise $AS \subset AS(f)$ dir (Yaying ve Hazarika, 2019).

Teorem 3.7 f_1 ve f_2 iki modülüs fonksiyonu ise

$$AS(f_1) \cap AS(f_2) \subset AS(f_1 + f_2)$$

dir.

İspat: $(x_m) \in AS(f_1) \cap AS(f_2)$ olsun. Böylece $(x_m) \in AS(f_1)$ ve $(x_m) \in AS(f_2)$ dir. $\varepsilon > 0$ için pozitif n tamsayısı vardır ve her m için

$$f_1 \left(\left| \sum_{k|m} x_k - \sum_{k|<m,n>} x_k \right| \right) < \varepsilon \text{ ve } f_2 \left(\left| \sum_{k|m} x_k - \sum_{k|<m,n>} x_k \right| \right) < \varepsilon$$

biçimindedir. Yukarıdaki denklemlerden $\varepsilon > 0$, n tamsayı ve her m için

$$(f_1 + f_2) \left(\left| \sum_{k|m} x_k - \sum_{k|<m,n>} x_k \right| \right) < \varepsilon$$

bulunur. Böylece $(x_m) \in AS(f_1 + f_2)$ olur.

Aşağıdaki sonuç l_1 ve $AS(f)$ arasında önemli bir kapsama bağıntısını verecektir (Yaying ve Hazarika, 2019).

Teorem 3.8 $l_1 \subset AS$ dir.

İspat: Bu Teoremin ispatı Sonuç 3.2 kullanarak ve (Pehlivan ve Fisher 1994; Pehlivan ve Fisher, 1995) de Proposition 16 da verilen $l_1 \subset AS$ kapsama bağıntısından kolaylıkla elde edilir (Yaying ve Hazarika, 2019).

Aşağıdaki Teorem ise $AS(f)$ ile $AC(f)$ arasında ki kapsama bağıntısını verecektir.

Teorem 3.9 $(x_m) \in AS(f)$ ise, $y_m = \sum_k x_k$ ile tanımlanan (y_m) dizisi $AC(f)$ dedir.

İspat: $(x_m) \in AS(f)$ olsun. Böylece $AS(f)$ in tanımını yardımıyla

$$f_1 \left(\left| \sum_{k|m} x_k - \sum_{k|<m,n>} x_k \right| \right) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow f(|y_m - y_{<m,n>}|) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow y_m \in AC(f)$$

olur (Yaying ve Hazarika, 2019).

BÖLÜM IV

SONUÇ

Bu yüksek lisans çalışmasında kuvvetli Cesàro toplanabilirlik, modülüs fonksiyonu, kuvvetli Lacunary yakınsak diziler uzayı, aritmetik yakınsaklık ve aritmetik toplanabilme kavramları tanıtılarak, aralarındaki ilgili kapsama bağıntıları verilerek temel teoremlerin ispatları yapılmıştır.



KAYNAKLAR

Balcı , M., Analiz I, *Ertem Basın Yayın Limited Şirketi*, Kızılay, Ankara, 1997.

Balcı , M., Analiz II, *Ertem Basın Yayın Limited Şirketi*, Kızılay, Ankara, 1997.

Büyükkşekerci, N., Modülüs Fonksiyonu ile Tanımlanan Dizi Uzayları ve $W(A, f, p)$, $W(\hat{A}, f, p)$, $W(C_\theta, f, p)$ Toplanabilme, Yüksek Lisans Tezi, *Erciyes Üniv. Fen Bil. Enst.*, Kayseri, 1996.

Büyükkşekerci, N., Kaplan H., “ Modülüs Fonksiyonu ile Tanımlanan Dizi Uzayları ve $W(C_\theta, f, p)$ Toplanabilme”, *12. Matematik Sempozyumu*, 23-25 Mayıs, 2012.

Connor, J. S., “The Statistical and Strong p -Cesàro Convergence of Sequences”, *Analysis*, 8, pp., 47-63, 1988.

Çakallı, H., “A study on statistical convergence”, *Funct. Anal. Approx. Comput.*, 1(2), 19-24, 2009.

Çolak, R., “Statistical convergence of order α ”, *Modern Methods in Analysis and Its Applications*, New Delhi, India: Anamaya Pub, 121-129, 2010.

Et, M., “Generalized Cesàro difference sequence spaces of non-absolute type involving Lacunary sequences”, *Appl. Math. Comput.*, 219(17), 9372-9376, 2013.

Et, M., and Sengül, H., “Some Cesàro-type summability spaces of order α and Lacunary statistical convergence of order (α, β) ”, *Filomat*, 28, no. 8, 1593.1602, 2014.

Fast, H., “Sur La Convergence Statistique”, *Colloq. Math.*, 2, pp., 241-244, 1951.

Fredman, A.R., and Sember, I.J., "Some Cesàro Type Summability Spaces", *Proc. London Math. Soc.*,37, 508-520, 1978.

Fridy, J., "On Statistical Convergence", *Analysis*, 5, pp., 301-313, 1985.

Fridy, J., and Orhan, C., "Lacunary Statistical Convergence", *Pacific J. Math.*, 160, pp., 43-51, 1993.

Fridy, J., and Orhan, C., "Lacunary Statistical Summability", *J. Math. Anal. Appl.*, 173, pp., no. 2, 497-504, 1993.

Kolk, E., "The statistical convergence in Banach spaces", *Acta Comment. Univ. Tartu*, 928, 41-52, 1991.

Kuttner, B., "Note on Strong Summability", *J. London Math. Soc.*, 21, 118-122, 1946.

Maddox, I.J., "Spaces of Strongly Summable Sequences Quart", *J. Math. Oxford*, 18, 345-355, 1967.

Maddox, I. J., "On Kuttner's Theorem", *J. London Math. Soc.* ,43 ,285-290, 1968.

Maddox, I. J., *Elements of Functional Analysis*, Cambridge University Press, 1970.

Maddox, I.J., "A new Type of Convergence", *Math. Proc. Camb.Phil.Soc.*, 83, 61-64, 1978.

Maddox, I.J., "Sequence Spaces Defined by a Modulus", *Math. Proc. Cambr. Phil. Soc.*, 100, 161-166, 1986.

Nakano, H., "Concave Modolars", *J.Math. Soc,Japon.*,5, 29-49, 1953.

Öztürk, E., and Bilgin,T., "Strongly Summable Sequence Spaces Defined by a Modulus", *J.Pure Appl. Math.*, 25, 621-625, 1994.

Pehlivan, S., and Fisher, B., “On Some Sequence Spaces”, *Indian J. Pure Appl. Math.*, 25, 1067-1071, 1994.

Pehlivan, S. and Fisher, B., “Lacunary strong convergence with respect to a sequence of modulus functions”, *Comment. Math. Univ. Carolin*, 36, no. 1, 69-76, 1995.

Petersen G. M., Regular Matrix Transformation, *McGraw-Hill Publishing Company Limited*, London, 1966.

Ruckle, W.H., “FK Spaces in Which the Sequence of Coordinate Vectors is Bounded”, *Canad. J. Math.*, 25, 973-978, 1973.

Ruckle, W. H., “Arithmetical Summability”, *J. Math. Anal. Appl.*, 396, 741-748, 2012.

Salat, T., “On Statistically Convergent Sequences of Real Numbers”, *Math. Slovaca*, 30, pp., 139-150, 1980.

Şengül, H., “On Statistical Convergence of Order (α, β) ”, (In review).

Şengül, H., “Some Cesàro-type summability spaces defined by a modulus function of order (α, β) ”, *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series A1*, Volume 66, Number 2, Pages 80-90, 2017.

Yaying T. and Hazarika B., “Arithmetic Convergent Sequence Space Defined By Modulus Function”, *Bol. Soc. Paran. Mat.*, (3s.) v. 37 4, pages 129–135, 2019.

ÖZ GEÇMİŞ

Fatma Gözde TUNA 01.01.1983 tarihinde Elbistan' da doğdu. İlk orta ve lise öğretimini Elbistan' da tamamladı. 2002 yılında girdiği Gazi Üniversitesi Matematik Bölümü'nden Haziran 2007'de mezun oldu. 2007 yılında girdiği Fırat Üniversitesi Tezsiz Yüksek Lisans Eğitimini 2008 yılında tamamladı. 2017 yılında Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde yüksek lisans öğrenimine başladı. Evli ve iki çocuk annesidir.



