



T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**BAZI KISMİ TÜREVLİ İNTEGRO-
DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN LAPLACE
DİFERENSİYEL DÖNÜŞÜM METODUYLA
ÇÖZÜMÜ**

Ömer Faruk KIRATLI

YÜKSEK LİSANS

Matematik Anabilim Dalı

Ağustos-2019
KONYA
Her Hakkı Saklıdır

TEZ KABUL VE ONAYI

Ömer Faruk KIRATLI tarafından hazırlanan “Bazı Kısmi Türevli İntegro-Diferensiyel Denklemlerin Laplace Diferensiyel Dönüşüm Metoduyla Çözümü” adlı tez çalışması 06/08/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan

Dr. Öğr. Üyesi Durhasan Turgut TOLLU

Danışman

Doç. Dr. Ozan ÖZKAN

Üye

Dr. Öğr. Üyesi Haldun Alpaslan PEKER

İmza



Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Mustafa YILMAZ
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.



Ömer Faruk KIRATLI

Tarih:06/08/2019

ÖZET

YÜKSEK LİSANS

BAZI KISMİ TÜREVLİ İNTEGRO-DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN LAPLACE DİFERENSİYEL DÖNÜŞÜM METODUYLA ÇÖZÜMÜ

Ömer Faruk KIRATLI

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Ozan ÖZKAN

2019, 40+x Sayfa

Jüri

Doç. Dr. Ozan ÖZKAN

Dr. Öğr. Üyesi Durhasan TOLLU

Dr. Öğr. Üyesi Haldun Alpaslan PEKER

Bu tez çalışmasında; Laplace Diferensiyel Dönüşüm Metodu (LDDM)' nun bazı kısmi türevli integro-diferensiyel denklemlere uygulanmasına yer verilmiştir. Metot; Laplace Dönüşümünün ve Diferensiyel Dönüşüm Metodunun ardaşık olarak bazı kısmi türevli integro-diferensiyel denklemlere uygulanmasından ibarettir. Önerilen metodun; bazı kısmi türevli integro-diferensiyel denklemler için de etkili bir yöntem olduğu örnekler ile gösterilmiştir. Sonuç olarak LDDM bazı kısmi türevli integro-diferensiyel denklemleri çözmek için gelecek vaat eden etkili bir metottur.

Anahtar Kelimeler: Kısmi Türevli İntegro-Diferensiyel denklemler, Laplace Dönüşümü, Laplace Diferensiyel Dönüşüm Yöntemi, Diferensiyel Dönüşüm Metodu, Seri çözüm.

ABSTRACT

MS THESIS

**SOLUTION OF SOME PARTIAL INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS
BY LAPLACE DIFFERENTIAL TRANSFORMATION METHOD**

Ömer Faruk KIRATLI

**THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF
SELÇUK UNIVERSITY**

**THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE
IN MATHEMATICS**

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Ozan ÖZKAN

2019, 40+x Pages

Jury

Assoc. Prof. Dr. Ozan ÖZKAN (Advisor)

Asst. Prof. Dr. Durhasan TOLLU

Asst. Prof. Dr. Haldun Alpaslan PEKER

In this thesis; The application of Laplace Differential Transformation Method (LDDM) to some partial differential integro-differential equations is given. Method; it consists of application of Laplace Transform and Differential Transform Method successively to some partial differential integro-differential equations. Suggested method; It is also shown that it is an effective method for some partial differential integro-differential equations. As a result, LDDM is a promising and effective method for solving some partial differential integro-differential equations.

Keywords: Partial Integro-Differential Equations, Laplace Transform, Laplace Differential Transform Method, Differential Transform Method, Series solution.

ÖNSÖZ

Bu yüksek lisans tez çalışması Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi Doç. Dr. Ozan ÖZKAN danışmanlığında hazırlanarak, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsüne yüksek lisans tezi olarak sunulmuştur.

Yüksek Lisans Tezi içerik olarak beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümünde girişe yer verilmiş; tezin okuyucu için daha iyi anlaşılabilmesi için materyal ve yöntemler başlığı altında tezde kullanılan bazı tanım, teorem ve metotlar kısaca ikinci bölümde sunulmuştur. Tez çalışmasının esas kısmını teşkil eden kısmi türevli integro-diferansiyel denklemlerin Laplace Diferansiyel Dönüşüm Metodu ile nasıl çözülebileceğini gösteren bölüm üçüncü bölümdür. Dördüncü bölümde; sunulan yöntemin çeşitli problemlere uygulanışına yer verilmiştir. Son olarak da; sonuç ve öneriler bölümü yer almaktadır.

Tez çalışması için konu seçimi ve tezin yürütülmesi sürecinde yardımlarından ve yönlendirmelerinden dolayı değerli hocam sayın Doç. Dr. Ozan Özkan'a ve her zaman yanımda olan sevgili eşim Gamze Kıratlı'ya teşekkürlerimi sunarım.

Ömer Faruk KIRATLI

KONYA-2019

İÇİNDEKİLER

ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
ÖNSÖZ	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR	viii
ŞEKİLLER DİZİNİ	ix
TABLolar LİSTESİ	x
1. GİRİŞ	1
2. MATERYAL VE YÖNTEM.....	5
2.1. İntegral Denklemleri	6
2.1.1. Fredholm İntegral Denklemi.....	6
2.1.2. Konvolüsyon Tipi İntegral Denklemi	6
2.1.3. Abel İntegral Denklemi	6
2.1.4. Lineer ve Lineer Olmayan İntegral Denklemleri.....	7
2.1.5. Tekil ve Tekil Olmayan İntegral Denklemleri.....	8
2.1.6. İntegral Denklemlerin Yapılarına Göre Sınıflandırılması	8
2.1.7. Homojen ve Homojen Olmayan İntegral Denklemler	10
2.1.8. Volterra ve Fredholm İntegral Denklemleri	10
2.2. Laplace Dönüşümü	12
2.2.1. Laplace Dönüşümünün Özellikleri	13
2.2.7. İki Değişkenli Fonksiyonlarda Laplace Dönüşümü.....	17
Laplace Dönüşüm Tablosu	18
2.2.4. Ters Laplace Dönüşümü	19
2.2.5. Ters Laplace Dönüşümünün Bazı Önemli Özellikleri.....	19
2.3. Diferensiyel Dönüşüm Metodu (DDM).....	21
3. KİSMİ TÜREVLİ İNTEGRO-DİFERENSİYEL DENKLEMLER İÇİN LAPLACE DİFERENSİYEL DÖNÜŞÜM METODU	25
4. LAPLACE DİFERENSİYEL DÖNÜŞÜM METODUNUN UYGULAMALARI	29
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	36
KAYNAKLAR	37
ÖZGEÇMİŞ	40

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

$B(x, y)$: Beta Fonksiyonu
$\Gamma(n)$: Gamma Fonksiyonu
$L\{f(t)\} \equiv L\{f(t)\} = \bar{f}(s)$: $f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü
$\bar{u}(x, s) = L[u(x, t)]$: İki değişkenli fonksiyonlar için Laplace dönüşümü (t değişkenine göre)
$L^{-1}\{\bar{f}(s)\}$: $\bar{f}(s)$ nin ters Laplace dönüşümü
$L^{-1}\{\bar{u}(x, s)\} \equiv L^{-1}\{u(x, t)\}$: $u(x, s)$ fonksiyonunun ters Laplace dönüşümü

Kısaltmalar

DDM	: Diferensiyel Dönüşüm Metodu
LDDM	: Laplace Diferensiyel Dönüşüm Metodu
KTDD	: Kısmi Türevli Diferensiyel Denklem
KTİDD	: Kısmi Türevli İntegro-Diferensiyel Denklem

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 4.1 Örnek 4.1' in $u(x,t)$ çözüm yüzeyi.....	27
Şekil 4.2 Örnek 4.2' in $u(x,t)$ çözüm yüzeyi.....	29
Şekil 4.3 Örnek 4.3' in $u(x,t)$ çözüm yüzeyi.....	31



TABLÖLAR LİSTESİ

<u>Tablo</u>	<u>Sayfa</u>
Tablo 2.1 Laplace Dönüşüm Tablosu	14
Tablo 2.2 Diferensiyel Dönüşüm Tablosu	20
Tablo 3.1 KTİDD'ler için LDDM ile çözüm döngüsü	24



1. GİRİŞ

Farklı bilim dallarında özellikle mühendislikte fiziksel olayların anlaşılabilmesi için bilim tarihi boyunca matematiksel modeller oluşturulmuştur. Bu modellerin çoğu ise; bilinmeyen bir fonksiyon ve onun türevlerini içeren bir denklem olarak karşımıza çıkar. Bu tip denklemler diferensiyel denklem olarak isimlendirilirler. Bazı matematiksel modellerde ise bilinmeyen fonksiyonun integral işareti altında bulunduğu denklemler olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu tür denklemler ise *integral denklem* olarak adlandırılır. Bir fonksiyonun türevi fonksiyonun bir nokta veya hemen yakınındaki bir nokta kullanılarak bulunduğundan dolayı diferensiyel denklemlere yerel denklemler de denmektedir. İntegral Denklemler ise bütün uzay üzerinden integral alınmasını gerektirdiğinden dolayı bu denklemler daha global denklemler denilebilir. Doğadaki olaylar incelendiğinde birçok olayın integral denklemler ile ifade edilebileceği görünür. Diferensiyel denklemlerde olduğu gibi her integralin denklemi çözmek mümkün değildir. Hatta integral denklemler genel olarak çözümleri zor bulunan denklemlerdir. Bu nedenle fizik ve mühendislik alanlarında önemli bir yeri olan bu tür denklemlerin yaklaşık çözümlerinin veya yarı analitik çözümlerinin bulunmasının faydalı olacağı düşünülmüştür. Geçmişe bakıldığında ilk 1823 de Abel tarafından bir integral denkleme rastlanması ve ilk integral denklem deyiminin 1888 de De Bois Reymond tarafından kullanılması konunun tarihçesi hakkında bilgi vermektedir (Aksoy 1998).

İntegro-diferansiyel denklem ise aranan fonksiyonun türevlerini içeren integral denklemler olarak ifade edilmektedir (Aksoy 1998). İntegro-diferansiyel denklemler kavramı 1930 yılında ilk olarak Vito Volterra (1930) tarafından ortaya atılmıştır. Eğer integro-diferansiyel denklemde; aranan fonksiyon yalnızca bir bağımsız değişkene bağlı ise denkleme adi integro-diferansiyel denklem, aranan fonksiyon birden fazla bağımsız değişken ve türevlerini içeriyorsa, denkleme kısmi integro-diferansiyel denklem adı verilir. İntegro-diferansiyel denklemlerin analitik çözümleri için genelde denklemleri diferensiyel veya integral denklemlere indirgeyerek çözüme yöntemi tercih edilir. Bazı durumlarda, değişkenlerin ayırma yöntemini kullanmak, kısmi türevli bir integro-diferansiyel denklemi adi denklemlere indirgemek için faydalı olabilir. Günümüzde, integro-diferansiyel denklemlerin çözümü için sayısal yöntemler de, diferensiyel denklemler için kullanılanlara benzer şekilde yaygın olarak kullanılmaktadır (Volterra, 1930; Lakshmikantham,1995; Jangveladze ve ark., 2015).

Son yıllarda yapılan bilimsel çalışmalara bakıldığında; kısmi türevli integro-diferensiyel denklemler ile birçok fizik, mühendislik alanında yapılan bilimsel çalışmalarda karşılaşılmaktadır. (Dehghan 2006) tarafından; Viskoelastisite teorisinde kullanılan kısmi türevli integro-diferensiyel denklemler, (Sachs and Strauss 2008) tarafından ise bazı finans teorilerini açıklayan kısmi türevli integro-diferensiyel denklemleri ele alınmıştır. (Thorwe and Bhalekar 2012) bir katlı Laplace dönüşümünü konvolüsyon tipindeki kısmi integro-diferensiyel denklemlerinin çözümünü elde etmek için kullanmışlardır. (Eltayeb and Kiliçman 2013) ise; konvolüsyon tipindeki kısmi türevli integro-diferensiyel denkleminin çözümünü iki katlı Laplace dönüşümü yardımıyla elde etmişlerdir. (Jyotsana ve arkadaşları 2015); kısmi türevli integro-diferensiyel denkleminin çözümü için Laplace dönüşümünü, Elzaki ve iki katlı Elzaki metodunu kullanmışlardır. (Mohand ve arkadaşları 2015), Elzaki metodunu kullanarak sabit katsayılı ve değişken katsayılı lineer kısmi türevli integro-diferensiyel denklemlerin çözümlerini elde etmişlerdir. (Dhunde 2015) ise iki katlı Laplace dönüşümünü lineer kısmi integro-diferensiyel denklemlerin çözümünde kullanmıştır. (Mohand ve Mahgoub 2015), lineer kısmi türevli integro-diferensiyel denklemlerin çözümleri için bu kez iki katlı Elzaki metodunu kullanmışlardır.

Diferansiyel Dönüşüm Metodu (DDM) ilk olarak Zhou (1986) tarafından dillendirilmiştir. Zhou (1986) lineer ve lineer olmayan başlangıç değer probleminin çözümünde Diferensiyel Dönüşüm Metodunu kullanılmıştır. Metot diğer yarı analitik yöntemlerle karşılaştırıldığında; diferensiyel denklemlerin basit bir dönüşüm yardımıyla, cebirsel denklemlere dönüşüyor olması ve bu sayede diferensiyel denklemlerin çözümlerine basit cebirsel işlemler ile ulaşılabilmesini mümkün kılması nedeniyle birçok bilimsel çalışmada kullanılmıştır. Özellikle analitik çözümü bilinmeyen lineer olmayan problemlerin çözümü için de kullanılabilir. Daha sonraki dönemde metot birçok araştırmacının ilgisini çekip, onların yapmış oldukları çalışmalara da ilham olmuştur (Chen ve Ho, 1996; Jang ve ark., 2001; Hassan, 2002; Cansu Kurt ve Ozkan, 2016; Paripour ve ark., 2017; Kadkhoda ve ark., 2018).

Literatüre bakıldığında, özellikle lineer olmayan diferensiyel denklemlerin analitik çözümlerine ulaşmak daima zor bir problem olmuştur. Böyle durumlarda ise nümerik çözüm elde etme seçeneği kullanılmıştır. Bazı durumlarda ise yarı analitik çözüm yöntemleri tercih edilmiştir (Adomian, 1994; Liao, 1992). Bazı durumlarda ise

birden çok metodu birleştirilerek yeni hibrit metotlar türetilmiştir. Bu tür hibrit yöntemlere son yıllarda oldukça sık rastlanılmaktadır. Örneğin; Wazwaz (2010) Laplace dönüşümü ve Adomian Ayırıştırma yöntemini kombine ederek lineer olmayan Volterra integro-diferansiyel denklemlerin çözümü bulmada kullanmışlardır. Maitama ve Zhao (2019); literatürde Laplace homotopi analiz metodu adı verilen ve Laplace dönüşümü ile Homotopi analiz yönteminin kombine edilmesinden oluşan yöntemi yerel kesirli türeve sahip dalga denklemin çözümünde kullanmışlardır. Elzaki (2018) ise Laplace varyasyonel iterasyon metodu adı verilen ve Laplace dönüşümü ile varyasyonel iterasyon yöntemini beraber kullanması sonucu ortaya çıkan metodu lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanmışlardır. Özkan ve Kurt (2019) ise, kesirli Laplace diferansiyel dönüşüm adını verdikleri metotla kesirli mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklem ve kesirli mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklem sistemlerin çözümlerini elde etmişlerdir. Bu tez çalışmasının metodolojisi ise yukarıda sadece birkaçını saydığımız ama daha birçoğunun var olduğunu bildiğimiz hibrit metotlarla problem çözme prensibidir.

Alquran ve ark. (2012) Laplace ile DDM nu beraber kullanılmasından oluşan LDDM nu tanıtmışlar, ardından da metodu bazı kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanmışlardır. K. Kumari ve ark. (2015) de yapmış oldukları çalışmada LDDM nu sadece Dirichlet ve Neumann sınır değer problemleri için kullanmışlardır. K. Kumari ve ark. (2016) da yapmış oldukları diğer bir çalışmada ise bu kez karışık sınır değer problemlerini ile almışlardır. Bu tez çalışmasında ie Alquran ve ark. (2012), K. Kumari ve ark. (2015) ve K. Kumari ve ark. (2016) nın yapmış oldukları çalışmalarda ele aldıkları denklemlerin mertebeleri üzerine koydukları kısıtlamalar ile çözüm esnasında kullanılan bazı kabullere gerek kalmadan kısmi türevli integro-diferansiyel denklemlerin çözümü ele alınmıştır. Ayrıca ulaşabildiğimiz kaynaklardan edindiğimiz bilgiye göre önerilen metot şimdiye kadar kısmi türevli integro-diferansiyel denklemler hiç uygulanmamıştır. Bu yüzden, bu tez çalışmasında kısmi türevli integro-diferansiyel denklemleri için de ayrı bir LDDM uygulama prosedürü sunulmuş, ardından önerilen prosedür çeşitli örnekler üzerinde de uygulanmıştır.

Bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır. Giriş birinci bölümde, ikinci bölümde ise; literatürde mevcut olan ve tezin diğer bölümlerinde kullanılacak olan bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde; kısmi türevli integro-

diferensiyel denklemler için LDDM nun nasıl uygulanabileceğini gösteren bir algoritma sunulduktan sonra, sunulan çözüm prosedürü yardımıyla bilinen çeşitli kısmi türevli integro-diferensiyel denklemlerin çözümlerine dördüncü bölümde yer verilmiştir. Sonuç ve öneriler diye adlandırılan son bölümde ise çalışmanın önemi ve çalışmaya dair bazı öneriler verilmiştir.



2. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde; tez çalışmasının diğer bölümlerinin daha iyi anlaşılabilmesine katkı sağlayacağına düşündüğümüz için literatürde mevcut olan ve tezin diğer bölümlerinde kullanılacak olan bazı temel tanım teorem ve temel kavramlara kısaca değinilmiştir.

Tanım 2.1.1.

Bağımsız bir değişken ile bağımlı değişken ve bağımlı değişkenin bağımsız değişkene göre türevlerini içeren ve

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (2.1)$$

şeklinde gösterilen denklemlere adi diferensiyel denklemler adı verilir. $y^{(n)}$; y nin x e göre n . mertebeden türevidir. Daha açık formda

$$y^{(n)} = g(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \quad (2.2)$$

biçiminde ifade edilir. Eğer diferensiyel denklemde birden çok bağımsız değişken varsa bu kez denkleme kısmi türevli diferensiyel denklem denir.

Tanım 2.1.2.

n . mertebeden

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (2.3)$$

diferensiyel denklemi için *başlangıç değer problemi*, $x_0 \in A$ ve y_0, y_1, \dots, y_{n-1} verilmiş sabitler olmak üzere A aralığındaki bir x_0 noktasında bu diferensiyel denklem

$$y(x_0) = y_0$$

$$y'(x_0) = y_1$$

⋮

$$y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \quad (2.4)$$

şeklindeki n tane başlangıç koşulunu sağlayan bir çözümünün bulunması problemdir.

2.1. İntegral Denklemleri

2.1.1. Fredholm İntegral Denklemi

$f(t)$ ve $k(u,t)$ bilinen fonksiyonlar, a ve b verilen sabitler veya t nin fonksiyonu ve integral işareti altında görülen $y(t)$ fonksiyonu aranan fonksiyon olmak üzere bir integral denklemi

$$y(t) = f(t) + \int_a^b k(u,t)y(u)du \quad (2.5)$$

biçimindedir (Spiegel 1965).

$k(u,t)$ fonksiyonuna çoğu zaman integral denklemin çekirdeği denir. a ve b sabit ise denkleme *Fredholm integral denklemi* denir. a sabit iken $b=t$ ise denkleme *Volterra integral denklemi* adı verilir.

Bir lineer diferensiyel denklemi bir integral denkleme dönüştürmek mümkündür.

2.1.2. Konvolüsyon Tipi İntegral Denklemi

Uygulamada önemli bir yeri olan

$$y(t) = f(t) + \int_0^t k(u-t)y(u)du \quad (2.6)$$

integral denklemi *konvolüsyon tipi bir integral denklemdir* (Spiegel 1965). Ve ayrıca bu denklem

$$y(t) = f(t) + k(t) * y(t)$$

biçiminde yazılabilir. Her iki tarafın Laplace dönüşümü alınır ve $L\{f(t)\} = F(s)$

$L\{k(t)\} = K(s)$ olduğunu düşünürsek

$$Y(s) = F(s) + K(s)Y(s) \quad Y(s) = \frac{F(s)}{1 - K(s)} \quad (2.7)$$

elde edilir. Ters Laplace dönüşümü ile istenen çözüm bulunabilir.

2.1.3. Abel İntegral Denklemi

Konvolüsyon tipindeki önemli integral denklemlerden biri *Abel integral denklemidir* (Spiegel 1965). Bu denklem

$$\int_0^t \frac{y(u)}{(t-u)^a} du = g(t) \quad (2.8)$$

biçimdedir. Burada $g(t)$ verilen bir fonksiyon ve a ise $0 < a < 1$ eşitsizliğini gerçekleyen bir sabittir.

Abel integral denkleminin bir uygulaması, düşey bir düzlem içerisinde bulunan sürtünmesiz bir tel üzerine yerleştirilen bir boncuğun telin alt uç noktasına, boncuğun başlangıçta konduğu noktaya bağlı olmaksızın, aynı T zamanda inmesini sağlayan telin şeklinin araştırılmasıdır. Bu probleme *Tautochrone problemi* denir ve telin şeklini bir sikloid olduğunu gösterir.

2.1.4. Lineer ve Lineer Olmayan İntegral Denklemleri

İntegral denklemler çeşitli şekillerde sınıflandırılmışlardır. Temel kavramlar açısından öncelikle, lineer integral denklemler ve lineer olmayan integral denklemler olarak iki büyük sınıfa ayrılırlar (Aksoy 1998).

$u(x)$ bilinmeyen fonksiyon olmak üzere,

$$u(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)u(t)dt \quad (2.9)$$

biçimindeki bir integral denklemde, $u(x)$ fonksiyonunun lineer olması halinde, integral denklem de lineer integral denklem olarak adlandırılmaktadır.

$$u(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)u^n(t)dt \quad (2.10)$$

integral denkleminde ise $u(x)$ bilinmeyen fonksiyonun n . kuvveti mevcut olduğundan, lineer olmayan bir integral denklemdir. Genel olarak,

$$u(x) = f(x) + \int_a^x \phi[x,t,u(t)]dt \quad (2.11)$$

integral denklemi de lineer olmayan bir integral denklemdir. Bunların dışında, birden çok sayıda değişkeni bulunan,

$$u(x, y) = f(x, y) + \int_a^b \int_c^d K(x, y, t_1, t_2)u(t_1, t_2)dt_1dt_2 \quad (2.12)$$

formundaki integral denklemlerin de lineer olanı ve lineer olmayanları mevcuttur.

2.1.5. Tekil ve Tekil Olmayan İntegral Denklemleri

İntegral denklemlerin diğerk bir sınıflandırılması da $K(x,t)$ fonksiyonunun sürekliliğine bağlıdır (Aksoy 1998). (2.9) denklemi ile verilen $K(x, t)$ fonksiyonu çekirdek fonksiyonu olup, $K(x,t)$ fonksiyonu $a \leq x \leq b; a \leq t \leq b$ bölgesinde sürekli ise integral denklem *Tekil (Singüler) olmayan* bir integral denklemdir. $K(x,t)$ bu aralıkta sürekli değilse, integral denklem *Tekil (Singüler)* integral denklem sınıfına girecektir.

$0 < a < 1$ olmak üzere,

$$f(x) = \int_0^x \frac{u(t)dt}{(x-t)^a} \quad (2.13)$$

şeklinde bir integral denklem, tekil integral denkleme bir örnektir. Ayrıca, integral sınırlarının en az birinin sonsuz olması halinde de denklem, tekil integral denklem sınıfında olacaktır.

$$f(x) = \int_0^{\infty} \sin(xt)u(t)dt \quad (2.14)$$

ve

$$f(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt}u(t)dt \quad (2.15)$$

denklemleri bu türün birer örneğini oluşturmaktadırlar. Bunlardan ilkinde, denklemin ikinci yanı ile tanımlanan $f(x)$ fonksiyonu, t 'nin Fourier Sinüs dönüşümü, ikincisinde ise t 'in Laplace dönüşümü olarak kullanılır.

2.1.6. İntegral Denklemlerin Yapılarına Göre Sınıflandırılması

İntegral denklemler yapılarına göre ise üç gruba ayrılır (Aksoy 1998). Bilinmeyen fonksiyonun $u(t)$, çekirdek fonksiyonun $K(x, t)$ olduğu,

$$\phi(x) = \int_a^b K(x,t)u(t)dt \quad (2.16)$$

şeklinde bir integral denkleme I. cins integral denklem denir. Burada bilinmeyen fonksiyon sadece integral içinde mevcuttur. Burada $\phi(x)$ fonksiyonu, verilmiş bir fonksiyondur. Benzer şekilde,

$$\phi(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)u(t)dt \quad (2.17)$$

şeklinde bir integral denklem de yine I. cins integral denklemdir. Burada da $\phi(x)$ ve $f(x)$ verilmiş olan fonksiyonlardır. Ancak bu denklemler,

$$\phi(x) - f(x) = \psi(x)$$

olmak üzere;

$$\psi(x) = \int_a^b K(x,t)u(t)dt$$

şeklinde ifade edilerek, (2.16) denklemini yapısında yazılabilir.

$$u(x) = \int_a^b K(x,t)u(t)dt \quad (2.18)$$

veya

$$u(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)u(t)dt \quad (2.19)$$

şeklindeki integral denklemler ise II.cins integral denklemler sınıfını oluşturmaktadır. Burada, bilinmeyen $u(x)$ fonksiyonu, denklemin hem içinde hem dışında bulunmaktadır.

Bu iki cins integral denklemden başka $\phi(x)$, $f(x)$ ve $K(x,t)$ fonksiyonlarının bilinmesi halinde

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)u(t)dt \quad (2.20)$$

şeklindeki integral denklemlere III.cins integral denklem denilmektedir.

2.1.7. Homojen ve Homojen Olmayan İntegral Denklemler

İntegral denklemler bilinmeyen $u(x)$ fonksiyonuna göre homojen olup olmadıkları açısından sınıflandırılmaktadırlar (Aksoy 1998). II.cins denklemler için söz konusu böyle bir sınıflandırmada, (2.18) ile verilen,

$$u(x) = \int_a^b K(x,t)u(t)dt$$

integral denklemi, *Homojen İntegral Denklem* olarak adlandırılacaktır. Homojenliği bozucu bir $f(x)$ fonksiyonunun bulunduğu (2.19) ile verilen

$$u(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)u(t)dt$$

şeklindeki denklemlere *Homojen Olmayan İntegral* denklemler denilmektedir.

$$u(x) = \int_a^b K(x,t)u(t)dt$$

homojen integral denkleminin, kolayca görülebileceği gibi $u(x) = 0$ olan bir çözümü vardır. Buna aşıkâr çözüm veya trivial çözüm denir. Homojen integral denklemler, daha genel olarak

$$u(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)u(t)dt$$

şeklindeki bir integral denklemin, $f(x) = 0$ olması haline uyan özel bir durumu olarak da göz önüne alınabilirler.

2.1.8. Volterra ve Fredholm İntegral Denklemleri

İntegral denklemlerin bir sınıflandırılması da, integral sınırlarının değişken veya sabitlerden oluşmasına göre yapılmaktadır (Aksoy 1998). Lineer veya homojen olduklarına bakılmaksızın,

$$\phi(x) = \int_a^x K(x,t)u(t)dt \quad (2.21)$$

$$u(x) = \int_a^x K(x,t)u(t)dt \quad (2.22)$$

$$u(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)u(t)dt \quad (2.23)$$

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)u(t)dt \quad (2.24)$$

şeklindeki denklemlere *Volterra İntegral Denklemleri* denilmektedir. Bu tür denklemlerde, integral işaretinin üst sınırında (veya sınırlarından birinde) x değişkeni bulunmaktadır.

x değişkenin, $x = b$ gibi sabit bir değere eşit olması halinde yazılabilecek

$$\phi(x) = \int_a^b K(x,t)u(t)dt \quad (2.25)$$

$$u(x) = \int_a^b K(x,t)u(t)dt \quad (2.26)$$

$$u(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)u(t)dt \quad (2.27)$$

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)u(t)dt \quad (2.28)$$

şeklindeki denklemlere ise *Fredholm İntegral Denklemleri* denilmektedir. Görüldüğü gibi Volterra ve Fredholm integral denklemleri arasındaki tek fark bu sınır yapısındadır.

Tanım 2.1.9. (İntegro-Diferensiyel Denklem)

Bilinmeyen $u(x)$ fonksiyonu ile birlikte, bu bilinmeyen fonksiyonun türevlerini de barındıran integral denklemlere integro-diferensiyel denklemler denir (Aksoy 1998). $u(x)$ 'in sadece birinci mertebeden türevinin bulunduğu,

$$u'(x) = F \left\{ x, u(x), \int_0^x K(x, t, u(t), u'(t)) dt \right\} \quad (2.29)$$

şeklindeki bir denklem, birinci mertebeden integro-diferansiyel denkleme bir örnektir. n . mertebeden türevin bulunduğu genel bir integro-diferansiyel denklem,

$$u^{(n)}(x) = F \left\{ x, u(x), u'(x), \dots, u^{(n-1)}(x) \right\} + \int_0^x K \left\{ x, t, u(t), u'(t), \dots, u^{(n)}(t) \right\} dt \quad (2.30)$$

şeklinde verilir (Aksoy 1998). Eğer aranan fonksiyon birden fazla bağımsız değişken ve türevlerini içeriyorsa, denkleme kısmi integro-diferansiyel denklem adı verilir.

2.2. Laplace Dönüşümü

Tanım 2.2.1.

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-t} dt \quad (2.31)$$

has olmayan integrali ile tanımlanan $\Gamma(n)$ fonksiyonuna *Gamma fonksiyonu* adı verilir. Bu fonksiyona *genelleştirilmiş Gamma fonksiyonu* da denir. Bu genelleştirilmiş integralin her $n > 0$ için yakınsak olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Gamma fonksiyonu ve bu fonksiyonun özellikleri ayrıntılı biçimde literatürde mevcuttur (Ross 1984).

Tanım 2.2.2.

Beta fonksiyonu,

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt, \quad \text{Re}(x) > 0, \quad \text{Re}(y) > 0,$$

integrali ile tanımlanan fonksiyona *Beta fonksiyonu* denir. Beta fonksiyonunun en belirgin özelliklerinden birisi Beta fonksiyonu ile Gamma fonksiyonu arasındaki ilişkiyi veren,

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad (2.32)$$

eşitliğidir (Spiegel 1965).

$f(t)$, $[0, \infty)$ aralığında tanımlı herhangi bir fonksiyon, s ise genelde reel değerler alabilen parametre olsun.

Tanım 2.2.3.

$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$ has olmayan integraline $f(t)$ fonksiyonunun *Laplace* dönüşümü denir.

$$L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \tag{2.33}$$

ve $L\{f(t)\}$ ile gösterilir. Görüldüğü gibi, $f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü, özel olmayan integral olup s parametresine bağlı bir fonksiyondur. $f(t)$ ve s 'e bağlı olarak, $\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$ has olmayan integralinin değeri s nin herhangi bir s_0 değeri için yakınsak ise $\text{Re } s > \text{Re } s_0$ değeri her s için yakınsaktır denir. Bu durum bizim için $f(t)$ fonksiyonunun varlığını ispat eder (Spiegel 1965).

2.2.1. Laplace Dönüşümünün Özellikleri

Neredeyse 300 yıllık geçmişi olan bir kavramın, Laplace dönüşümünün tüm özelliklerini burada sıralamak mümkün değildir. Laplace dönüşümünün bazı temel özellikleri aşağıda ispatsız olarak verilmiştir. Seçilen teoremler ve özellikler tezin diğer kısımlarında kullanılacak olmasından tercih edilmiştir. Bu doğrultuda (Spiegel 1965) deki teoremler ispatsız verilecektir.

Teorem 2.2.1. (Laplace Dönüşümünün Varlığı)

Eğer f fonksiyonu $t \geq 0$ için parçalı sürekli ve $t \rightarrow +\infty$ iken üstel mertebeden ise, Laplace dönüşümü $F(s)=L\{f(t)\}$ mevcuttur. Daha açık olarak, eğer f parçalı sürekli ve

$$|f(t)| \leq Me^{ct}, \quad t \geq T \tag{2.34}$$

şartlarını sağlıyorsa her $s > c$ için $F(s)$ mevcuttur.

Teorem 2.2.2. (Laplace Dönüşümün Tekliği)

$f(t)$ ve $g(t)$ fonksiyonlarının Teorem 2.2.1. in hipotezlerini sağladığını kabul edelim. Dolayısıyla onların $F(s)$ ve $G(s)$ Laplace dönüşümleri vardır. Eğer her bir $s > c$ (bir c için) $F(s) = G(s)$ ise $[0, \infty)$ üzerinde f ve g birlikte sürekli ise $f(t) = g(t)$ dir.

Teorem 2.2.3.

Eğer a ve b sabitler ise f ve g nin her ikisinin de Laplace dönüşümlerinin mevcut olduğu her s için

$$L\{af(t) + bg(t)\} = aL\{f(t)\} + bL\{g(t)\} \quad (2.35)$$

dir.

Teorem 2.2.4. $s > a$ için $L\{f\}(s) = F(s)$ şeklindeki Laplace dönüşümü mevcut ise

$$L\{e^{at} f(t)\}(s) = F(s - a) \quad (2.36)$$

eşitliği sağlanır. Yani bu bize bir $f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü $F(s)$ ise fonksiyonun a birim ötelenmiş halinin Laplace dönüşümü $F(s - a)$ olduğunu söylemektedir.

Teorem 2.2.5.

$$L\{f(t)\} = F(s) \text{ ve } g(t) = \begin{cases} f(t-a) & t > a \\ 0 & t < a \end{cases} \text{ olmak üzere}$$

$$L\{g(t)\} = e^{-as} F(s) \quad (2.37)$$

dir.

Teorem 2.2.6.

$L\{f(t)\} = F(s)$ olmak üzere;

$$L\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) \quad (2.38)$$

dir.

Teorem 2.2.7.

$f(t)$ fonksiyonunun $t \geq 0$ için sürekli ve parçalı düzgün ve $t \rightarrow +\infty$ iken üstel mertebeden olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

$$|f(t)| \leq Me^{ct}, \quad t \geq T \quad (2.39)$$

olacak şekilde negatif olmayan M , c ve T sabitleri vardır. Bu durumda $s > c$ için

$L\{f'(t)\}$ vardır ve

$$L\{f'(t)\} = sL\{f(t)\} - f(0) = sF(s) - f(0)$$

şeklindedir.

Eğer, f fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde parçalı sürekli ve $f'[a, b]$ üzerinde parçalı sürekli olmak üzere f sonlu sayıda nokta haricinde türevlenebilir ise, f ye $[a, b]$ sınırlı aralığın üzerinde **parçalı düzgündür** denir. f nin türevlenemediği izole noktalarda $f(t)$ ye keyfi değerler atayabiliriz. Eğer f fonksiyonu $[0, +\infty]$ un her sınırlı alt aralığı üzerinde parçalı düzgün ise f fonksiyonuna $t \geq 0$ için parçalı düzgündür denir.

Teorem 2.2.8.

$f, f', f'', \dots, f^{(n-1)}$ fonksiyonlarının $t \geq 0$ için sürekli ve parçalı düzgün ve ayrıca bu fonksiyonların her birinin M ve c nin aynı değerleri ile (2.39) şartları sağladığı kabul edilsin. Bu durumda $s > c$ olduğunda $L\{f^{(n)}(t)\}$ mevcuttur ve

$$\begin{aligned} L\{f^{(n)}(t)\} &= s^n L\{f(t)\} - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0) \\ &= s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \dots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0) \end{aligned} \quad (2.40)$$

şeklindedir.

Teorem 2.2.9.

$L\{f\}(s) = F(s)$ biçiminde tanımlansın. $f(t)$ ise $[0, \infty)$ aralığında parçalı sürekli ve α mertebeden üstel fonksiyon olsun. Bu durumda $s > \alpha$ için

$$L\{t^n f(t)\}(s) = (-1)^n \frac{d^n F}{ds^n}(s) \quad (2.41)$$

eşitliği geçerlidir.

Teorem 2.2.10.

$L\{f(t)\} = F(s)$ biçiminde tanımlansın

$f(t)$ fonksiyonu üstel mertebeden ve parçalı sürekli ise integrali de üstel mertebededir ve Laplace dönüşümü

$$L\left\{\int_0^t f(u)du\right\} = \frac{F(s)}{s} \quad (2.42)$$

biçimindedir.

Teorem 2.2.11.

$L\{f(t)\} = F(s)$ biçiminde tanımlansın ve ayrıca $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t}$ limiti mevcut ise

$$L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty f(u)du \quad (2.43)$$

dir.

Teorem 2.2.12.

$f(t)$, $t \geq 0$ için bir parçalı sürekli fonksiyon ve $t \geq T$ için $|f(t)| \leq Me^{ct}$ üstel mertebeden olma şartını sağlıyorsa bu durumda $s > c$ için,

$$L\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{s}L\{f(t)\} = \frac{F(s)}{s} \quad (2.44)$$

olup buna denk olarak

$$L^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \int_0^t f(\tau)d\tau \quad (2.45)$$

olur.

Teorem 2.2.13.

$t \geq 0$ için $f(t)$ ve $g(t)$ parçalı sürekli ve $t \rightarrow +\infty$ iken $|f(t)|$ ve $|g(t)|$, Me^{ct} ile sınırlı olsun. Bu durumda $s > c$ için $f(t)*g(t)$ konvolüsyonunun Laplace dönüşümü mevcuttur. Üstelik

$$L\{f(t)*g(t)\} = L\{f(t)\} \cdot L\{g(t)\} \quad (2.46)$$

ve

$$L^{-1}\{F(s).G(s)\} = f(t) * g(t) \quad (2.47)$$

dir.

Böylece

$$L^{-1}\{F(s).G(s)\} = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

integralini hesaplayabilirsek, $F(s).G(s)$ çarpımının ters dönüşümünü bulabiliriz.

2.2.7. İki Değişkenli Fonksiyonlarda Laplace Dönüşümü

Laplace dönüşümünün kısmi türevli diferensiyel denklemlere uygulamalarında ise (Spiegel 1965) hem uzay hem de zaman değişkenlerine bağlı çok değişkenli fonksiyonların kısmi türevlerinin dönüşümlerinin de bilinmesi gerekmektedir. Örneğin iki değişkenli $u(x,t)$ uzay ve zaman değişkenine bağlı KTDD çözümlerinde Laplace dönüşümü tanımına göre (t dönüşüm değişkeni olmak üzere)

$$L\left\{\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right\} = s\bar{u}(x,s) - u_0(x) \quad (2.48)$$

eşitliği yazılabilir. Burada,

$$\bar{u}(x,s) = L\{u(x,t)\}, \quad u_0(x) = u(x,0) \quad (2.49)$$

olarak tanımlanan fonksiyonlardır. Daha genel olarak,

$$L\left\{\frac{\partial^n u(x,t)}{\partial t^n}\right\} = s^n \bar{u}(x,s) - \sum_{r=0}^{n-1} s^{n-r-1} u_r(x), \quad u_r(x) = \left.\frac{\partial^r u(x,t)}{\partial t^r}\right|_{t=0} \quad (2.50)$$

eşitliği geçerlidir. Zaman değişkenine göre türevleri içermeyen kısmi türevler için ise

$$L\left\{\frac{\partial^n u(x,t)}{\partial x^n}\right\} = \frac{\partial^n}{\partial x^n} L\{u(x,t)\} = \frac{\partial^n}{\partial x^n} \bar{u}(x,s) \quad (2.51)$$

formülü geçerli olacaktır. Çünkü bu durumda x 'e göre kısmi türevlerle t 'ye göre integral yer değiştirirler. Karışık türevler için ise

$$L\left\{\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t}\right\} = \frac{\partial}{\partial x} L\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\} = s \frac{\partial \bar{u}(x,s)}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial x} \quad (2.52)$$

biçimindedir.

Laplace Dönüşüm Tablosu

$f(t)$ fonksiyonu	$f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü	D(F)
$f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$	$L\{f(t)\} = F(s)$	D(F)
1	$\frac{1}{s}$	$s > 0$
t^n ($n \in \mathbb{N}$)	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s > 0$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s - \alpha}$	$s > \alpha$
$\cos(\beta t)$	$\frac{s}{s^2 + \beta^2}$	$s > 0$
$\sin(\beta t)$	$\frac{\beta}{s^2 + \beta^2}$	$s > 0$
$\cosh(\beta t)$	$\frac{s}{s^2 - \beta^2}$	$s > \beta $
$\sinh(\beta t)$	$\frac{\beta}{s^2 - \beta^2}$	$s > \beta $
$t^n e^{\alpha t}$ ($n \in \mathbb{N}$)	$\frac{n!}{(s - \alpha)^{n+1}}$	$s > \alpha$
$e^{\alpha t} \cos(\beta t)$	$\frac{s - \alpha}{(s - \alpha)^2 + \beta^2}$	$s > \alpha$
$e^{\alpha t} \sin(\beta t)$	$\frac{\beta}{(s - \alpha)^2 + \beta^2}$	$s > \alpha$
$t \cos(\beta t)$	$\frac{s^2 - \beta^2}{(s^2 + \beta^2)^2}$	$s > 0$
$t \sin(\beta t)$	$\frac{2\beta s}{(s^2 + \beta^2)^2}$	$s > 0$
$t e^{\alpha t} \cos(\beta t)$	$\frac{(s - \alpha)^2 - \beta^2}{[(s - \alpha)^2 + \beta^2]^2}$	$s > \alpha$
$t e^{\alpha t} \sin(\beta t)$	$\frac{2\beta(s - \alpha)}{[(s - \alpha)^2 + \beta^2]^2}$	$s > \alpha$

Tablo 2.1. Laplace Dönüşüm Tablosu

2.2.4. Ters Laplace Dönüşümü

$F(s)$ verilen bir fonksiyon olmak üzere eğer $f(t)$, $[0, \infty)$ üzerinde sürekli ve $L\{f\} = F(s)$ eşitliği sağlanıyor ise $f(t)$ fonksiyonuna $F(s)$ 'nin *ters Laplace dönüşümü* denir ve $f = L^{-1}\{F\}$ biçiminde gösterilir (Spiegel 1965).

2.2.5. Ters Laplace Dönüşümünün Bazı Önemli Özellikleri

Aşağıda ters Laplace dönüşümlerinin bazı önemli özellikleri belirtilmiştir (Spiegel 1965).

Teorem 2.2.14.

Keyfi seçilen c sabiti, $L^{-1}\{F\}$, $L^{-1}\{F_1\}$ ve $L^{-1}\{F_2\}$ ters Laplace dönüşümleri mevcut ve $[0, \infty)$ üzerinde sürekli olsun. Bu durumda

$$L^{-1}\{F_1 + F_2\} = L^{-1}\{F_1\} + L^{-1}\{F_2\} \quad (2.53)$$

$$L^{-1}\{cF\} = cL^{-1}\{F\} \quad (2.54)$$

eşitlikleri sağlanır. Bu özellik ikiden fazla fonksiyonlara da kolaylıkla genelleştirilebilir. Bu teorem L^{-1} operatörünün lineer olduğunu ifade eder.

Teorem 2.2.15.

$L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ olmak üzere;
 $L^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at} f(t)$ (2.55)
şeklindedir.

Teorem 2.2.16.

$L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ olmak üzere;
 $L^{-1}\{e^{-as} F(s)\} = \begin{cases} f(t-a) & t > a \\ 0 & t < a \end{cases}$ (2.56)
biçimindedir.

Teorem 2.2.17.

$L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ olmak üzere;

$$L^{-1}\{F(ks)\} = \frac{1}{k} f\left(\frac{t}{k}\right) \quad (2.57)$$

şeklindedir.

Teorem 2.2.18.

$L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ olmak üzere;

$$L^{-1}\{F^{(n)}(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{d^n}{ds^n} F(s)\right\} = (-1)^n t^n f(t) \quad (2.58)$$

şeklindedir.

Teorem 2.2.19.

$L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ olmak üzere;

$$L^{-1}\left\{\int_s^\infty F(u)du\right\} = \frac{f(t)}{t} \quad (2.59)$$

şeklindedir.

Teorem 2.2.20.

$L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ ve $f(0) = 0$ olmak üzere;

$$L^{-1}\{sF(s)\} = f'(t) \quad (2.60)$$

biçimindedir. Görüldüğü gibi s ile çarpmanın $f(t)$ yi türetme biçiminde etkisi olmaktadır.

$f(0) \neq 0$ ise $\delta(t)$, delta Dirac fonksiyonu veya birim basamak fonksiyonu olmak üzere,

$$L^{-1}\{sF(s) - f(0)\} = f'(t) \quad (2.61)$$

$$L^{-1}\{sF(s)\} = f'(t) + f(0)\delta(t) \quad (2.62)$$

şeklindedir.

Teorem 2.2.21.

$L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ olmak üzere;

$$L^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \int_0^t f(u)du \quad (2.63)$$

şeklindedir. Bu eşitlikten de görüldüğü gibi $f(t)$ nin Laplace'ını s ile bölmenin veya

$\frac{1}{s}$ ile çarpmanın $f(t)$ yi 0 dan t ye kadar integralini alma biçiminde etkisi

görülmektedir.

2.3. Diferensiyel Dönüşüm Metodu (DDM)

Bu bölümde, hem adi hem de kısmi türevli diferensiyel denklemlerin çözümünde kullanılan ve diğer metotlar ile karşılaştırıldığında son yıllarda daha çok araştırmacı tarafından kabul gören Diferensiyel Dönüşüm Metodu (DDM) tanıtılacaktır. Bu metodun tanımı ve tüm özellikleri literatürde ayrıntılı bir biçimde mevcut olduğu için bu tez çalışmasında kullanmayı düşündüğümüz metoda ait bazı önemli teoremler ispatsız olarak verilecektir.

Tanım 2.3.1. Bir değişkenli $u(x)$ fonksiyonunun diferensiyel dönüşüm fonksiyon $U(k)$ olmak üzere $u(x)$ ' in diferensiyel dönüşümü,

$$U(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k u(x)}{dx^k} \right]_{x=x_0} \quad (2.64)$$

olarak tanımlanır (Chen and Ho 1996) .

Tanım 2.3.2. $U(k)$ dönüşüm fonksiyonunun ters diferensiyel dönüşümü,

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} U(k)(x-x_0)^k \quad (2.65)$$

biçiminde tanımlanır (Chen and Ho 1996).

(2.64) eşitliği (2.65) de kullanılırsa

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k u(x)}{dx^k} \right]_{x=x_0} (x-x_0)^k \quad (2.66)$$

olur. (2.66) eşitliğinden DDM nun Taylor seri açılımı tanımından türetildiği görülebilir.

Şimdiye kadar DDM üzerine yapılan bilimsel çalışmalarda; aşağıdaki teoremler ispatlanmış ardından da birçok bilimsel çalışmada kullanılmışlardır. İspatları literatürde mevcut olduğundan bu teoremler ispatsız olarak aşağıda sunulmuştur (Chen and Ho 1996; Jang and Chen 1997; Chen and Ho 1999 ; Jang, Chen, and Liu 2001; Hassan 2002).

Teorem 2.3.1. $u(x) = w(x) \mp v(x)$ biçiminde tanımlanan fonksiyonun diferensiyel dönüşümü,

$$U(k) = W(k) \mp V(k) \quad (2.67)$$

ile ifade edilir (Chen and Ho 1996).

Teorem 2.3.2. Bir fonksiyonun bir $h \in \mathbb{R}$ sabit değeri ile çarpımının diferensiyel dönüşümü,

$$u(x) = h.v(x) \text{ için}$$

$$U(k) = h.V(k) \quad (2.68)$$

biçimindedir (Chen and Ho 1996).

Teorem 2.3.3. $u(x) = \frac{dv(x)}{dx}$ fonksiyonunun diferensiyel dönüşümü,

$$U(k) = (k+1)V(k+1) \quad (2.69)$$

biçimindedir (Chen and Ho 1996).

Teorem 2.3.4. Bir fonksiyonun $n \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$u(x) = \frac{d^n v(x)}{dx^n}$ biçiminde tanımlanan fonksiyonun diferensiyel dönüşümü,

$$U(k) = \frac{(k+n)!}{k!} V(k+n) \quad (2.70)$$

ile verilir (Jang and Chen 1997).

Teorem 2.3.5. $u(x) = v(x).w(x)$ fonksiyonunun diferensiyel dönüşümü, $r \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$U(k) = \sum_{r=0}^k V(r)W(k-r) \quad (2.71)$$

biçiminde verilir (Chen and Ho 1996).

Teorem 2.3.6. $u(x) = v(x).w(x).z(x)$ fonksiyonunun diferensiyel dönüşümü, $r, t \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$U(k) = \sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} V(r)W(t)Z(k-r-t) \quad (2.72)$$

şeklindedir (Chen and Ho 1996).

Teorem 2.3.7. $u(x) = u_1(x).u_2(x)...u_n(x)$ şeklindeki n tane fonksiyonun çarpımının diferensiyel dönüşümü,

$$U(k) = \sum_{k_{n-1}=0}^k \sum_{k_{n-2}=0}^{k_{n-1}} \dots \sum_{k_2=0}^{k_3} \sum_{k_1=0}^{k_2} U_1(k_1)U_2(k_2 - k_1)U_3(k_3 - k_2) \dots U_{n-1}(k_{n-1} - k_{n-2})U_n(k - k_{n-1}) \quad (2.73)$$

biçiminde verilir (Arikoglu and Ozkol 2005).

Teorem 2.3.8. $u(x) = v(x) \frac{dw(x)}{dx}$ şeklindeki birinci mertebeden türevi ile çarpımının diferensiyel dönüşümü,

$$U(k) = \sum_{r=0}^k (k - r + 1)V(r)W(k - r + 1) \quad (2.74)$$

eşitliği biçimindedir.

Teorem 2.3.9. $u(x) = \frac{dv(x)}{dx} \cdot \frac{dw(x)}{dx}$ şeklindeki fonksiyonun diferensiyel dönüşümü,

$$U(k) = \sum_{r=0}^k (r + 1)(k - r + 1)V(r + 1)W(k - r + 1) \quad (2.75)$$

şeklindedir.

Teorem 2.3.10. $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $u(x) = e^{\lambda x}$ fonksiyonun diferensiyel dönüşümü

$$U(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \quad (2.76)$$

eşitliği sağlanır (Jang and Chen 1997).

Teorem 2.3.11. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $u(x) = x^n$ şeklindeki kuvvet fonksiyonunun diferensiyel dönüşümü,

$$Y(k) = \begin{cases} 1 & k = n \\ 0 & k \neq n \end{cases} \quad (2.77)$$

biçimindedir (Chen and Ho 1996).

Aşağıdaki Tablo 2.2' de bazı özel fonksiyonların diferensiyel dönüşümleri verilmiştir. Tablo literatürdeki çalışmalardan kolaylıkla elde edilebilir (Chen and Ho 1996; Jang and Chen 1997; Chen and Ho 1999 ; Jang, Chen, and Liu 2001; Hassan 2002; Jang and Chen 1997; Özkan 2010).

Fonksiyon	Diferensiyel Dönüşümü
$u(x) = v(x) + w(x)$	$U(k) = V(k) + W(k)$
$u(x) = cv(x)$	$U(k) = cV(k)$
$u(x) = \frac{dv(x)}{dx}$	$U(k) = (k+1)V(k+1)$
$u(x) = \frac{d^n v(x)}{dx^n}$	$U(k) = (k+1)(k+2)\dots(k+n)V(k+n) = \frac{(k+n)!}{k!}V(k+n)$
$u(x) = v(x) \cdot w(x)$	$U(k) = \sum_{r=0}^k V(r)W(k-r)$
$u(x) = v(x)w(x)z(x)$	$U(k) = \sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} V(r)W(t)Z(k-r-t)$
$u(x) = v(x) \frac{dw(x)}{dx}$	$U(k) = \sum_{r=0}^k (k-r+1)V(r)W(k-r+1)$
$u(x) = v(x) \frac{d^2 w(x)}{dx^2}$	$U(k) = \sum_{r=0}^k (k-r+2)(k-r+1)V(r)W(k-r+2)$
$u(x) = \frac{dv(x)}{dx} \frac{dw(x)}{dx}$	$U(k) = \sum_{r=0}^k (r+1)(k-r+1)V(r+1)W(k-r+1)$
$u(x) = v(x)w(x) \frac{d^2 z(x)}{dx^2}$	$U(k) = \sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} (k-r-t+2)^2 (k-r+1)V(r)W(t)Z(k-r-t+2)$
$u(x) = e^{\lambda x}$	$U(k) = \frac{\lambda^k}{k!}$
$u(x) = e^{\lambda x + b}$	$U(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^b$
$u(x) = x^m$	$U(k) = \begin{cases} 1 & k = m \\ 0 & k \neq m \end{cases}$
$u(x) = \sin(ax + b)$	$U(k) = \frac{a^k}{k!} \sin\left(\frac{\pi k}{2} + a\right)$
$u(x) = \cos(ax + b)$	$U(k) = \frac{a^k}{k!} \cos\left(\frac{\pi k}{2} + a\right)$
$u(x) = \frac{v(x)}{w(x)}$	$U(k) = \frac{1}{W(0)} \left[V(k) - \sum_{m=0}^{k-1} Z(m)W(k-m) \right]$
$u(x) = [v(x)]^b$	$U(k) = \begin{cases} V(0), & k = 0 \\ \sum_{m=0}^k \frac{(b+1)m-k}{kV(0)} V(m)W(k-m), & k \geq 1 \end{cases}$
$u(x) = \int_{x_0}^x v(x) dx$	$U(k) = \frac{V(k-1)}{k}, \quad k \geq 1$

Tablo 2.2. Diferensiyel Dönüşüm Tablosu

3. KISMİ TÜREVLİ İNTEGRO-DİFERENİYEL DENKLEMLER İÇİN LAPLACE DİFERENİYEL DÖNÜŞÜM METODU

Öncelikle metodun mantığını anlayabilmek için

$$\sum_{i=0}^m a_i \frac{\partial^i u}{\partial t^i} + \sum_{i=0}^n b_i \frac{\partial^i u}{\partial x^i} + cu + \sum_{i=0}^r d_i \int_0^t k_i(t-\tau) \frac{\partial^i u(x,\tau)}{\partial x^i} d\tau = f(x,t) \quad (3.1)$$

şeklinde verilen genel kısmi türevli integro diferansiyel denklemini ele alalım (Jyotsana ve Shukracharya, 2015; Thorwe and Bhalekar 2012). (3.1) eşitliği ile verilen KTİDD de $k_i(t,\tau)$ ve $f(x,t)$ bilinen fonksiyonlar, a_i, b_i, d_i ler ve c ise ya bilinen sabitler yada x değişkenine bağlı fonksiyonlar olarak düşünülecek olup, $u(x,t)$ aranan fonksiyonu göstermektedir. Uygulanacak olan çözüm prosedüründe yazım kolaylığı olması bakımından yukarıda verilmemiş olsa da gösterim olarak sadece (3.1) eşitlikleri ile verilen KTİDD ni almış olsak ta bir sonraki uygulamalar bölümünde ve aşağıda anlatılacak olan çözüm metodunda da görüleceği gibi sunulacak olan bu yeni metot için (3.1) denkleminin uygun başlangıç koşulları ile verilmiş olması esastır. Yani yukarıda yazmamış olsak ta (3.1) in uygun koşullar ile verilmiş koşulları sağlayan çözümünü bulma problemi ile ilgilenmekteyiz.

Yukarıda (3.1) eşitliği verilen kısmi türevli integro-diferensiyel denkleminin her iki tarafının t değişkenine göre Laplace dönüşümü alınır ise,

$$\sum_{i=0}^m a_i L \left\{ \frac{\partial^i u}{\partial t^i} \right\} + \sum_{i=0}^n b_i L \left\{ \frac{\partial^i u}{\partial x^i} \right\} + cL \{u\} + \sum_{i=0}^r d_i L \left\{ k_i(t) * \frac{\partial^i u(x,t)}{\partial x^i} \right\} dt = L \{ f(x,t) \} \quad (3.2)$$

eşitliği elde edilir.

Elde edilen (3.2) eşitliğinde, 2.Bölümde verilen türev fonksiyonlarının Laplace dönüşümü özelliği, konvolüsyonun Laplace dönüşümü, iki değişkenli fonksiyonların Laplace dönüşümü kuralları gibi gerekli kurallar gerektiği şekilde kullanıldıktan sonra

$$\sum_{i=0}^m a_i \left(s^i \bar{u}(x,s) - \sum_{j=1}^i (s^{j-1} u^{i-j}(x,0)) \right) + \sum_{i=0}^n b_i \frac{d^i \bar{u}(x,s)}{dx^i} + c \bar{u}(x,s) + \sum_{i=0}^r d_i k_i(s) \frac{d^i \bar{u}(x,s)}{dx^i} = \tilde{f}(x,s) \quad (3.3)$$

eşitliğini elde ederiz. Elde edilen (3.3) eşitliğinde $\bar{u}(x,s) = L[u(x,t)]$, $\tilde{k}_i(s) = L[k_i(t)]$, $\tilde{f}(x,s) = L[f(x,t)]$ biçiminde tanımlanan fonksiyonlardır. Problem ile beraber verilmiş olduğunu varsaymış olduğumuz başlangıç değerlerinden gerekli olanları yukarıdaki (3.3) eşitliğinde yerlerine yazıldıktan sonra gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$\frac{d^n \bar{u}(x,s)}{dx^n} + \mathbf{N}[\bar{u}(x,s)] = \tilde{f}(x,s) \quad (3.4)$$

eşitliği ile verilen ve bağımsız değişkeni x olan bir adi diferansiyel denklem elde edilir. Böylelikle Laplace dönüşüm yardımıyla kısmi türevli-diferansiyel denklemi adi türevli diferansiyel denkleme dönüştürmüş olduk. Elde edilen bu yeni diferansiyel denklemde $\bar{u}(x,s) = L[u(x,t)]$ biçiminde tanımlanmakta olup, sırasıyla $\frac{d^n}{dx^n}$, x değişkenine göre n . mertebeden diferansiyel operatör, $\mathbf{N}[\cdot]$ lineer olmayan diferansiyel operatör, $\tilde{f}(x,s)$ ve $\bar{u}(x,s)$ fonksiyonları da sırasıyla bilinen ve aranan fonksiyonları temsil etmektedir. Bu adımda da (3.4) genel denklemi elde edilirken, aynı zamanda yazım kolaylığı olması bakımından ihmal edilen başlangıç değerlerinin de t değişkenine göre Laplace dönüşümünün alındığının ve elimizde mevcut olduğu varsayımımızın unutulmaması gerekmektedir.

(3.4) denklemi ile verilen adi türevli diferansiyel denklemde 2. Bölümde verilen DDM nun verilen kuralları doğrultusunda diferansiyel dönüşümleri alınırsa aşağıdaki yenileme bağıntısı kolaylıkla elde edilir.

$$\frac{(k+n)!}{k!} U(k+n) + N(k)U(k) = F(k) \quad (3.5)$$

$$U(k), k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (3.6)$$

buradaki $H(k)$ ve $F(k)$ ise sırasıyla, diferansiyel denkleme DDM uygulandıktan sonra elde edilen $\mathbf{N}[\bar{u}(x,s)]$ ve $\tilde{f}(x,s)$ 'nin diferansiyel dönüşümleridir. (3.6) ise, önceki adımlarda bahsettiğimiz ama şimdiye kadar ihmal ettiğimiz için açık olarak yazmadığımız başlangıç koşullarına sırasıyla Laplace dönüşümü ve DDM uygulandığında elde edilen $\bar{u}(x,s)$ nin $U(k), k = 0, 1, \dots, n-1$ bilinen spektrum değerleridir. LDDM biçiminde isimlendirilen yönteminin bu adımında kullanılan DDM

nun (3.5)-(3.6) eşitlikleri ile verilen formdaki adi diferansiyel denklemlerin yarı analitik çözümleri için etkili bir yöntem olduğu literatürdeki bir çok çalışma ve onları referans veren çalışmalarda kolaylıkla görülebilir (Chen and Ho 1996; Chen and Liu 1998).

$\bar{u}(x, s)$ nin bilinmeyen diğer spektrum değerlerinin bulunabilmesi için yukarıdaki (3.6) eşitliği ile verilen $U(k), k = 0, 1, \dots, n-1$ spektrum değerlerinin (3.5) yenileme bağıntısında yazılmasıyla $U(k), k = n, n+1, n+2, \dots$ spektrum değerleri kolaylıkla elde edilir. Çözümün bu aşamasında aranan fonksiyonun analitik fonksiyon olması kabulü nedeniyle bulunacak olan spektrum sayısının belirlenmesi tamamen problemin doğasına uygun olarak uygulayıcı tarafından belirlenir. Başka bir deyişle yenileme bağıntısındaki iterasyon sayısı istenildiği kadar tekrarlanarak $\bar{u}(x, s)$ 'nin istenen sayıdaki $U(k)$ spektrumları elde edilir.

Elde edilen $\bar{u}(x, s)$ lerin spektrumları 2. Bölümde verilen (2.66) eşitliğinde olduğu gibi yerlerine yazıldıklarında (3.4) probleminin DDM ile elde edilen çözümü,

$$\bar{u}(x, s) = \sum_{k=0}^{\infty} U(k)x^k \quad (3.7)$$

formunda elde edilmiş olunur.

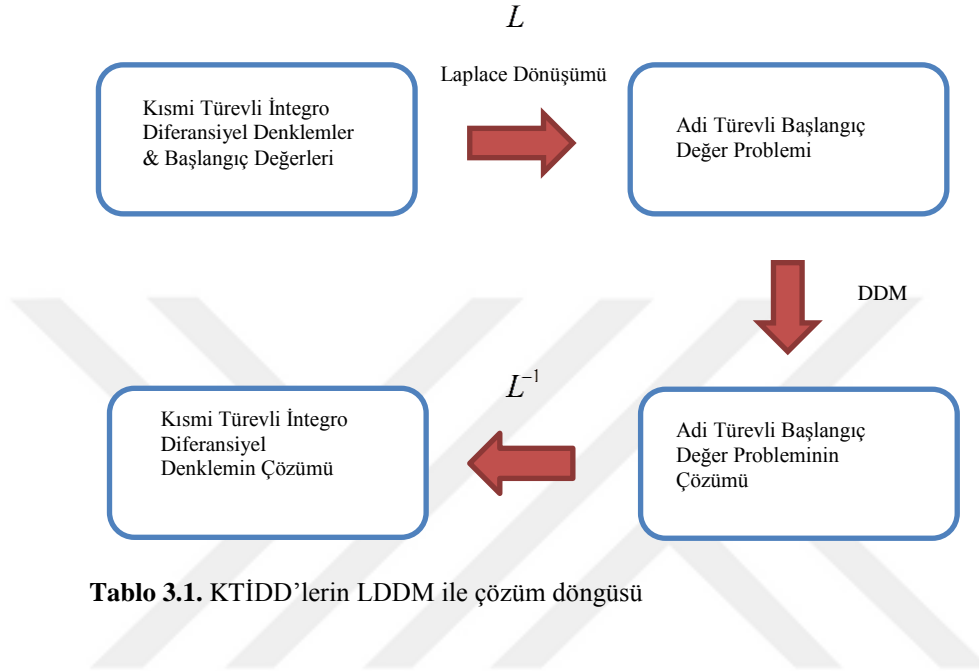
Yöntemin son adımı olarak ilk başta verilen (3.1) probleminin çözümüne ulaşabilmek için (3.7) eşitliğinin her iki yanının s dönüşüm değişkenine göre ters Laplace dönüşümü alınması yeterlidir. Bu işlem yapıldığında aranan çözüm fonksiyonu,

$$u(x, t) = L^{-1} \left\{ \bar{u}(x, s) \right\} = L^{-1} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} U(k)x^k \right\} \quad (3.8)$$

biçiminde elde edilir.

Anlatılan çözüm süreci sonrasında elde edilen (3.8) deki $u(x, t)$ fonksiyonuna ilk başta ele alınan (3.1) kısmi kürevli integro-diferansiyel denkleminin **Laplace Diferansiyel Dönüşüm Metodu (LDDM)** ile elde edilen çözümü olarak adlandırılır. Alquran et al. (2012) yapmış oldukları çalışmalarında benzer bir algoritmayı kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümü için vermiş olsalar da adı geçen algoritma sadece ikinci mertebeden KTDD ler için tanımlanmıştır. Bu çalışmada ise kısmi türevli integro-diferansiyel denklemler için de bu hibrit yöntemin uygulanabileceğini

göstermektedir. Metodun işleyişini anlayabilme adına yukarıda kısmi türevli integro-diferansiyel denklemler için özetlemeye çalıştığımız LDDM, aşağıdaki Şekil 3.1’ de verilen şema, görsel açıdan izlenecek adımları özetlemektedir.



Tablo 3.1. KTİDD’lerin LDDM ile çözüm döngüsü

4. LAPLACE DİFERENSİYEL DÖNÜŞÜM METODUNUN UYGULAMALARI

Bu bölümde kısmi türevli integro-diferensiyel denklemlerin çözümü için verilen yukarıdaki LDDM nun uygulanabilirliği bazı örnekler üzerinde gösterilecektir. Ele alınan örneklerdeki tüm hesaplamalar Maple 13 paket programı kullanılarak elde edilmiştir.

Örnek 4.1.

Aşağıdaki (4.1) eşitliği ile verilen kısmi türevli integro-diferansiyel denkleminin (4.2) koşullarını gerçekleyen çözümünü arayalım (Thorwe ve Bhalekar, 2012).

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + 2 \int_0^t (t-\tau)u(x,\tau)d\tau - 2e^x, \quad (4.1)$$

$$u(x,0) = e^x, \quad u_t(x,0) = 0, \quad u(0,t) = \cos t, \quad (4.2)$$

Yukarıda özetlenen çözüm algoritmasında olduğu gibi (4.1) eşitliğinin her iki tarafını t dönüşüm değişkenine göre Laplace dönüşümü alınırsa,

$$L[u_{tt}(x,t)] = L \left[u_x + 2 \int_0^t (t-\tau)u(x,\tau)d\tau - 2e^x \right] \quad (4.3)$$

eşitliği elde edilir. Türev fonksiyonları ve konvolüsyon tipinde verilen integrallerin Laplace dönüşümleri için verilen kurallar (4.3) eşitliğinde de kullanılır ve elde edilen eşitlikte $u(x,0) = e^x$, $u_t(x,0) = 0$ değerleri yerine yazıldıktan sonra gerekli düzenlemeler yapıp ve $u(0,t) = \cos t$ değerinin de t dönüşüm değişkenine göre Laplace dönüşümü alınırsa,

$$\frac{d\bar{u}}{dx} + \left(\frac{2}{s^2} - s^2 \right) \bar{u} = \left(\frac{2}{s} - s \right) e^x \quad (4.4)$$

$$\bar{u}(0,s) = \frac{s}{s^2 + 1} \quad (4.5)$$

eşitlikleri elde edilirler. DDM' nun (4.4)-(4.5) eşitlikleri ile verilen adi diferensiyel denklemlerin yarı analitik çözümleri için etkili bir yöntem olduğu literatürdeki bir çok çalışma ve onların referanslarından kolaylıkla görülebilir (Chen ve Ho, 1996; Chen ve

Liu, 1998). Bu nedenle adi türevli bu başlangıç değer probleminin çözümü için (4.4) ve (4.5) e diferansiyel dönüşüm metodu uygulanır ise sırasıyla aşağıdaki (4.6) ve (4.7) eşitlikleri elde edilir.

$$U(k+1) = \frac{-1}{(k+1)} \left[\left(\frac{2}{s^2} - s^2 \right) U(k) - \left(\frac{2}{s} - s \right) \frac{1}{k!} \right] \quad (4.6)$$

$$U(0) = \frac{s}{s^2 + 1} \quad (4.7)$$

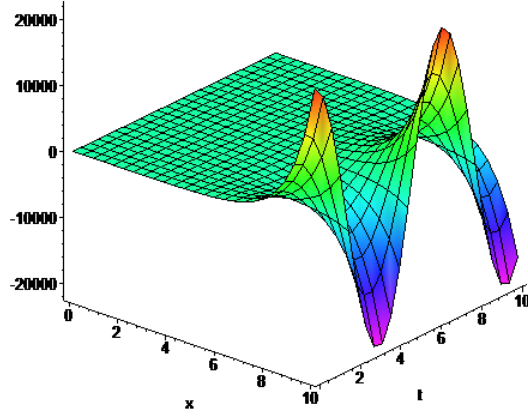
Bu adımda aranan \bar{u} fonksiyonunun bilinmeyen spektrumları olan $U(k)$, $k = 1, 2, 3, \dots$ lar, (4.7) deki değerinin (4.6) daki yenileme bağıntısında kullanılmasıyla kolaylıkla elde edilirler. Burada işlemler istenilen sayıda tekrarlanır. Elde edilen spektrumlar (2.66)'daki yerlerine yazılırsa,

$$\bar{u}(x, s) = \frac{s}{s^2 + 1} \left(1 + x + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \dots \right) \quad (4.8)$$

eşitliği elde edilir. (4.8) in her iki yanını s dönüşüm değişkenine göre ters Laplace dönüşümü alındığında ise,

$$u(x, t) = L^{-1} \left[\frac{s}{s^2 + 1} \left(1 + x + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \dots \right) \right] = \cos t \left(1 + x + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \dots \right) \quad (4.9)$$

elde edilir. (4.9) serisinin kapalı formu $u(x, t) = e^x \cos t$ olup, bu çözüm aynı zamanda (4.1)-(4.2) probleminin tam çözümüdür. Aşağıdaki Şekil 4.1' de ise elde edilen çözüm fonksiyonunun grafiği yer almaktadır.



Şekil 4.1. Örnek 4.1 in $u(x,t)$ çözüm yüzeyi

Örnek 4. 2.

$$u_t - u_{xx} + u + \int_0^t e^{t-\tau} u(x, \tau) d\tau = (x^2 + 1)e^t - 2 \quad (4.10)$$

Yukarıdaki (4.9) eşitliği ile verilen kısmi türevli integro-diferensiyel denkleminin

$$u(x, 0) = x^2, u(0, t) = t, u_x(0, t) = 0 \quad (4.11)$$

koşullarını gerçekleyen çözümünü bulalım. Bu problemin tam çözümü $u(x, t) = x^2 + t$ olduğu bilinmektedir (Thorwe ve Bhalekar, 2012).

Bölüm 3 de özetlenen algoritmada, ilk örnekte olduğu gibi birinci adım olarak (4.10) eşitliğinin her iki tarafının t dönüşüm değişkenine göre Laplace dönüşümü alınır,

$$sL[u(x, t)] - u(x, 0) - L\left[u_{xx} - u - \int_0^t e^{t-y} u(x, y) dy\right] = L[(x^2 + 1)e^t - 2] \quad (4.12)$$

eşitliği elde edilir. (4.12) eşitliğinde (4.10) da verilen $u(x, 0) = x^2$ başlangıç koşulu yazılır ve Laplace dönüşümünün özellikleri kullanıldıktan sonra gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\frac{d^2\bar{u}}{dx^2} - \left(\frac{s^2}{s-1}\right)\bar{u} = -x^2 \left(\frac{s}{s-1}\right) - \frac{1}{s-1} + \frac{2}{s} \quad (4.13)$$

biçiminde verilen bağımsız değişkeni x , aranan fonksiyonu \bar{u} olan adi diferensiyel denkleminde ulaşırlar.

Diğer taraftan (4.11) in kullanılmayan diğer iki başlangıç koşullarının Laplace dönüşümü alınırsa aşağıdaki (4.14) koşulları elde edilir.

$$\bar{u}(0, s) = \frac{1}{s^2}, \frac{d\bar{u}}{dx}(0, s) = 0 \quad (4.14)$$

Sonuç olarak; (4.10)-(4.11) problemi; (4.13)-(4.14) başlangıç değer problemine indirgenmiş olunur. Örnek 4.1 de olduğu gibi bu örnekte de $\bar{u}(x, s) = L[u(x, t)]$ eşitliği ile verilen u fonksiyonunun t dönüşüm değişkenine göre Laplace dönüşümü anlatıldığı unutulmamalıdır. Yöntemin bu adımında DDM nun (4.13)-(4.14) problemine uygulanması aşaması vardır. Bu işlem yapıldığında,

$$U(k+2) = \frac{1}{(k+1)(k+2)} \left[\left(\frac{s^2}{s-1}\right)U(k) - \delta(k-2) \left(\frac{s}{s-1}\right) + \left(\frac{2}{s} - \frac{1}{s-1}\right)\delta(k) \right] \quad (4.15)$$

$$U(0) = \frac{1}{s^2}, U(1) = 0 \quad (4.16)$$

eşitlikleri elde edilir. Bu adımda aranan \bar{u} fonksiyonunun bilinmeyen spektrumları olan $U(k)$, $k=2,3,\dots$ lar, (4.16) deki değerlerin (4.15) teki yenileme bağıntısında kullanılmasıyla kolaylıkla elde edilirler. Elde edilen spektrumlar (2.66) deki yerlerine yazılırsa,

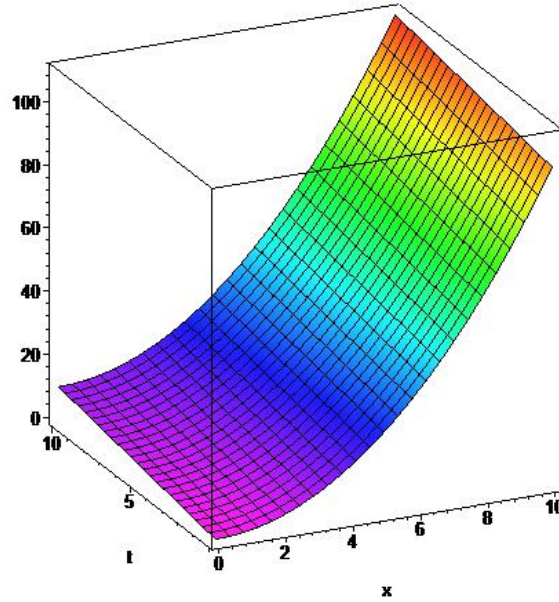
$$\bar{u}(x, s) = \frac{x^2}{s} + \frac{1}{s^2} \quad (4.17)$$

fonsiyonuna ulaşırlar. Elde edilen bu (4.17) çözümü aynı zamanda (4.15)-(4.16) probleminin DDM çözümü olarak adlandırılır. Bu çözüm tabii ki ilk başta verilen (4.10)-(4.11) probleminin çözümü değildir. (4.10)-(4.11) probleminin çözümüne ulaşabilmek için Bölüm 3 de özetlenen yöntemin son aşamasında olduğu gibi yukarıda

elde edilen (4.17) çözümünün s değişkenine göre ters Laplace dönüşümünün alınması yeterlidir. Bu işlem yapıldığında ise

$$u(x,t) = L^{-1}[\bar{u}(x,s)] = x^2 + t$$

eşitliği elde edilir. Elde edilen çözüm ilk başta verilen (4.10)-(4.11) kısmi türevli başlangıç değer probleminin tam çözümüdür. Ele alınan bu örnekte de görüldüğü gibi bu tez çalışmasında önerilen LDDM yöntemi bu tür problemlerin tam çözümlerini elde edilmesini mümkün kılmaktadır. Aşağıdaki Şekil 4.2 de ise elde edilen $u(x,t) = x^2 + t$ çözüm fonksiyonunun grafiği yer almaktadır.



Şekil 4.2. Örnek 4.2' nin $u(x,t)$ çözüm yüzeyi

Örnek 4.3.

$$u_t + u_{tt} + \int_0^t \sinh(t-\tau)u_{xxx}(x,\tau)d\tau = 0 \quad (4.18)$$

biçiminde verilen kısmi türevli integro-diferensiyel denkleminin

$$u(x,0) = 0, u_t(x,0) = x, u_{tt}(x,0) = 0, \quad (4.19)$$

$$u(0,t) = 0, u_x(0,t) = \sin t, u_{xx}(0,t) = 0 \quad (4.20)$$

koşullarını gerçekleyen çözümü bulalım. Bu problemin tam çözümü ise $u(x,t) = x \sin t$ ' dir (Mohand ve Mahgob, 2015).

Önceki örneklerde olduğu gibi (4.18) eşitliğinin her iki tarafının t dönüşüm değişkenine göre Laplace dönüşümü alınır ve elde edilen eşitlikte (4.19) daki $u(x,0) = 0, u_t(x,0) = x, u_{tt}(x,0) = 0$ koşulları kullanıldıktan sonra gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\frac{d^3 \bar{u}}{dx^3} + (1-s^2)(s+s^3)\bar{u} = (s-s^3)x \quad (4.21)$$

biçiminde bağımsız değişkeni x , aranan fonksiyonu \bar{u} olan bir adi diferensiyel denkleme ulaşılır.

Diğer taraftan (4.20) başlangıç koşullarının Laplace dönüşümü alındığında ise,

$$\bar{u}(0,s) = 0, \frac{d\bar{u}}{dx}(0,s) = \frac{1}{s^2+1}, \frac{d^2\bar{u}}{dx^2}(0,s) = 0, \quad (4.22)$$

olur. Artık çözülmesi gereken problem; (4.21)-(4.22) başlangıç değer problemine indirgenmiştir. (4.21) ve (4.22) nin diferensiyel dönüşümleri alındığında,

$$U(k+3) = \frac{-1}{(k+1)(k+2)(k+3)} \left[(1-s^2)(s+s^3)U(k) - \delta(k-1)(s-s^3) \right], \quad (4.23)$$

$$U(0) = 0, U(1) = \frac{1}{s^2+1}, U(2) = 0, \quad (4.24)$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan ise aranan \bar{u} fonksiyonunun bilinmeyen spektrumları olan $U(k), k = 3, 4, \dots$ değerleri, (4.24) deki değerlerin (4.23) teki yenileme bağıntısında kullanılmasıyla kolaylıkla elde edilirler. Elde edilen spektrumlar (2.66) daki yerlerine yazıldığında ise,

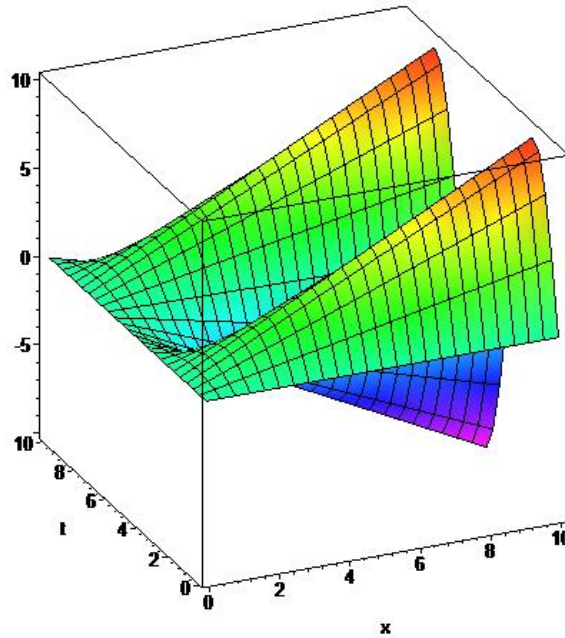
$$\bar{u}(x,s) = \frac{1}{s^2 + 1} x, \quad (4.25)$$

fonksiyonuna ulaşılır. Son olarak (4.25) çözümünün s değişkenine göre ters Laplace dönüşümünün alınması yeterlidir. Bu işlem yapıldığında ise

$$u(x,t) = L^{-1}[\bar{u}(x,s)] = x \sin t, \quad (4.26)$$

eşitliği elde edilir. Elde edilen (4.26) çözümü ilk başta verilen (4.18)-(4.20) kısmi türevli başlangıç değer probleminin tam çözümüdür. Ele alınan tüm örneklerde görüldüğü gibi bu tez çalışmasında önerilen LDDM yöntemi kısmi türevli integro-diferensiyel denklemlerin tam çözümlerini elde edilmesini mümkün kılmaktadır.

Şekil 4.2' de ise elde edilen $u(x,t) = x \sin t$ çözüm fonksiyonunun grafiği yer almaktadır.



Şekil 4.3. Örnek 4.3 ün $u(x,t)$ çözüm yüzeyi

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu yüksek lisans tez çalışmasında kısmi türevli integro-diferensiyel denklemlerin Laplace Diferansiyel Dönüşüm Metodu (LDDM) nun ile çözümlerine yer verilmiştir. Ele alınan LDDM, Laplace dönüşümü ile Diferensiyel Dönüşüm Metodu (DDM) nun peşi sıra kısmi türevli integro-diferensiyel denklemlere uygulanmasından ibarettir. LDDM da kısmi türevli integro-diferensiyel denklemler; ilk olarak Laplace dönüşümü yardımıyla adi türevli diferensiyel denklemlere indirgenmektedir. Elde edilen Adi diferensiyel denklemler ise DDM yardımı ile çözüldükten sonra bulunan çözüm fonksiyonuna ters Laplace dönüşümü uygulanarak ilk başta verilen kısmi türevli integro-diferensiyel denklemlerin çözümlerine ulaşılabilmektedir. Ele alınan örneklerden görüldüğü gibi kısmi türevli integro-diferensiyel denklemlerin çözümleri için önerilen yöntem, bu tür problemler için etkili, kolay ve basittir. İleride araştırmacıların yöntemi kesirli türevelere sahip kısmi türevli integro-diferensiyel denklemlere, bazı özel fizik ve mühendislik problemlerine de uygulayacakları kanaatindeyiz.

KAYNAKLAR

- Adomian, G. (1994). Solving Frontier Problems Decomposition Method.
- Aksoy, Yavuz. 1998. İntegral Denklemler., Cilt I, *Yıldız Teknik Üni.* İstanbul
- Alquran, Marwan, Kamel Al-Khaled, Mohammed Ali, and Ameina Ta'any. 2012. 'The combined Laplace transform-differential transform method for solving linear non-homogeneous PDEs', *Journal of Mathematical and Computational Science*, 2: 690-701.
- Arikoglu, A., and Ozkol, I., 2005. 'Solution of boundary value problems for integro-differential equations by using differential transform method', *Applied mathematics and computation*, 168: 1145-58.
- Cansu Kurt, U., Ozkan, O., 2016, Exact solutions of some partial differential equations using the Modified Differential Transform Method, *Iranian Journal of Science*
- Chen, Cha'o Kuang, and Shing Huei Ho. 1999. 'Solving partial differential equations by two-dimensional differential transform method', *Applied mathematics and computation*, 106: 171-79.
- Chen, Chaó-Kuang, and Shing-Huei Ho. 1996. 'Application of differential transformation to eigenvalue problems', *Applied Mathematics and Computation*, 79: 173-88.
- Chen, Chieh-Li, and Yung-Chin Liu. 1998. 'Differential transformation technique for steady nonlinear heat conduction problems', *Applied Mathematics and Computation*, 95: 155-64.
- Dehghan, M. 2006. 'Solution of a partial integro-differential equation arising from viscoelasticity', *International Journal of Computer Mathematics*, 83: 123-29.
- Dhunde, R., 2015. Solving Partial Integro-Differential Equations using Double Laplace Transform Method.
- Eltayeb, Hassan, and Kiliçman. A., 2013. "A note on double Laplace transform and telegraphic equations." *In Abstract and applied analysis*. Hindawi.
- Elzaki, T. M. (2018). Solution of nonlinear partial differential equations by new laplace variational iteration method. *In Differential Equations-Theory and Current Research*. IntechOpen
- Hassan, IH Abdel-Halim. 2002. 'On solving some eigenvalue problems by using a differential transformation', *Applied mathematics and computation*, 127: 1-22.

- Jang, Ming-Jyi, and Chieh-Li Chen. 1997. 'Analysis of the response of a strongly nonlinear damped system using a differential transformation technique', *Applied mathematics and computation*, 88: 137-51.
- Jang, Ming-Jyi, Chieh-Li Chen, and Yung-Chin Liu. 2001. 'Two-dimensional differential transform for partial differential equations', *Applied mathematics and computation*, 121: 261-70.
- Jangveladze, T., Kiguradze, Z., & Neta, B. (2015). Numerical solutions of three classes of nonlinear parabolic integro-differential equations. *Academic Press*.
- Kadkhoda, N., Roushan, S. S., Jafari, H., 2018, Differential Transform Method: A Tool for Solving Fuzzy Differential Equations, *International Journal of Applied and Computational Mathematics*, 4 (1), 33.
- Kumari, K., Shanker, G., Gupta, P. K., 2015, Approximate Analytical Solution of Linear Boundary Value Problems by Laplace-Differential Transform Method, *Journal of Informatics and Mathematical Sciences*, 7 (2), 99-108.
- Kumari, K., Gupta, P., Shanker, G., 2016, Coupling of Laplace Transform and Differential Transform for Wave Equations, *Physical Science International Journal*, 9 (4).
- Kumari, K., Gupta, P. K., 2016, Application of ldtm for solving heat-like and wave-like equations with variable coefficients, *IJMSA*, 1(1).
- Lakshmikantham, V. (1995). Theory of integro-differential equations (Vol. 1). *CRC Press*.
- Liao, S. J. (1992). The proposed homotopy analysis technique for the solution of nonlinear problems (Doctoral dissertation, Ph. D. Thesis, *Shanghai Jiao Tong University*).
- Mahgoub, M. M. A. (2015). Solution of partial integro-differential equations by double Elzaki transform method. *Mathematical Theory and Modeling*, 5(5).
- Maitama, S., & Zhao, W. (2019). Local fractional Laplace homotopy analysis method for solving non-differentiable wave equations on Cantor sets. *Computational and Applied Mathematics*, 38(2), 65.
- Mohand M. Abdelrahim Mahgoub and Tarig M. Elzaki (2015) Solution of partial integro-differential equations by Elzaki transform method, *Applied Mathematical Sciences*, 9(6), 295-303.
- Mrs. Gore (Jagtap) Jyotsana , Mr. Gore Shukracharya, "Solution of Partial Integro-Differential Equations by using Laplace, Elzaki and Double Elzaki Transform Methods " *International Research Journal of Engineering and Technology (IRJET)* Volume: 02 Issue: 03 , June-2015.

- Özkan, O., 2010, Numerical implementation of differential transformations method for integro-differential equations, *International Journal of Computer Mathematics*, 87 (12), 2786-2797.
- Özkan, O., and Kurt, A., 2019. 'A new method for solving fractional partial differential equations', *The Journal of Analysis*: 1-14.
- Paripour, M., Karimi, L., Abbasbandy, S., 2017, Differential transform method for Volterra's population growth model, *Nonlinear Studies*, 24 (1).
- R. Dhunde, and G. L. Waghmare, Solving partial integro-differential equations using double Laplace transform method, *American J. of Comput. and Appl. Math.*, Vol:5, No.1 (2015), 7-10.
- Ross, Shepley L. 1984. "Differential Equations. *New York: John Wiley&Sons.*" In.: Inc.
- Sachs, E. W., and A. K. Strauss. 2008. 'Efficient solution of a partial integro-differential equation in finance', *Applied Numerical Mathematics*, 58: 1687-703.
- Spiegel, Murray R. 1965. Laplace transforms (*McGraw-Hill New York*).
- Thorwe, J., and Bhalekar, S., 2012. Solving Partial Integro-Differential Equations Using Laplace Transform Method.
- Volterra, V. (1930). Theory of Functionals and of Integral-and Integro-differential equations, Blackie & Son Limited, *Madrid*.
- Wazwaz, A. M. 2010. The combined Laplace transform–Adomian decomposition method for handling nonlinear Volterra integro–differential equations. *Applied Mathematics and Computation*, 216(4), 1304-1309.
- Zhou, J.K., 1986. "Differential transformation and its applications for electrical circuits." In.: *Huazhong University Press*, Wuhan, China.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Ömer Faruk KIRATLI
Uyruğu : T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi : Altındağ- 4/12/1989
Telefon : 05055668710
Faks :
e-mail : omerkiratli@gmail.com

EĞİTİM

Derece	Adı, İlçe, İl	Bitirme Yılı
Lise	: Eryaman Lisesi, Etimesgut, Ankara	2006
Üniversite	: Selçuk Üniversitesi, Selçuklu, Konya	2010
Yüksek Lisans	: Selçuk Üniversitesi, Selçuklu, Konya	
Doktora	:	

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görevi
2014-	MEB	Öğretmen

UZMANLIK ALANI

YABANCI DİLLER: İngilizce

BELİRTMEK İSTEĞİNİZ DİĞER ÖZELLİKLER

YAYINLAR