T.C.
SÜLEYMAN DEMİREL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DUAL LORENTZ UZAYINDA FRENET EĞRİLERİNİN BAĞLANTILI EĞRİLERİ

Bahar ABALI

Danışman
Prof. Dr. Ahmet YÜCESAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
ISPARTA – 2019

TEZ ONAYI

Bahar ABALI tarafından hazırlanan **"Dual Lorentz Uzayında Frenet Eğrilerinin Bağlantılı Eğrileri"** adlı tez çalışması aşağıdaki jüri üyeleri önünde Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak başarı ile savunulmuştur.

Danışman	**Prof. Dr. Ahmet YÜCESAN** Süleyman Demirel Üniversitesi	
Jüri Üyesi	**Prof. Dr. Nihat AYYILDIZ** Süleyman Demirel Üniversitesi	
Jüri Üyesi	**Dr. Öğr. Üyesi Gözde ÖZKAN TÜKEL** Isparta Uygulamalı Bilimler Üniversitesi	

Enstitü Müdürü **Doç. Dr. Şule Sultan UĞUR**

TAAHHÜTNAME

Bu tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

Bahar ABALI

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

DUAL LORENTZ UZAYINDA FRENET EĞRİLERİNİN BAĞLANTILI EĞRİLERİ

Bahar ABALI

Süleyman Demirel Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ahmet YÜCESAN

Bu tez çalışmasında $\mathbb{D}_1^3$ dual Lorentz uzayında Frenet eğrilerinin bağlantılı eğrileri olan asli (binormal) doğrultu eğrisi ve asli (binormal) donör eğrisi kavramları tanıtıldı. Asli doğrultu eğrisinin eğrilik ve burulması ve asli donör eğrisinin eğrilik ve burulması arasında bağıntılar verildi. Genel helisin asli doğrultu eğrisinin düzlemsel eğri olduğu gösterildi ve eğrinin konum vektörü kullanılarak genel helisin denklemi elde edildi. $\mathbb{D}^2$ de bir çember veya $\mathbb{D}_1^2$ de bir hiperbolün asli donör eğrisinin ve dual Lorentz uzayında bir slant helisin asli doğrultu eğrisinin sırasıyla bir helis ve bir genel helis olduğu gösterildi. İkinci durum bir örnekle açıklandı. Son olarak $\mathbb{D}_1^3$ de asli doğrultu rektifiyen eğrilerin, asli donör eğrisinin causal karakterine göre $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski $3-$uzayda spacelike veya timelike regle yüzeye karşılık geldiği gösterildi.

Anahtar Kelimeler: Dual Lorentz uzay, bağlantılı eğriler, genel helis, slant helis, asli doğultu rektifiyen eğri, regle yüzey.

2019, 47 sayfa

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

ASSOCIATED CURVES OF FRENET CURVES IN THE DUAL LORENTZIAN SPACE

Bahar ABALI

Süleyman Demirel University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Ahmet YÜCESAN

In this thesis, the notions of principal (binormal) directed curves and principal (binormal) donor curves which is associated with curve of Frenet curves in the dual Lorentzian space $\mathbb{D}_1^3$ are introduced. Some relations between curvature and torsion of dual principal directed curve and curvature and torsion of principal donor curve are given. The principal directed curve of general helix is shown to be plane curve and the equation of general helix is obtained by using position vector of plane curve. It is shown that the principal donor curve of a circle in $\mathbb{D}^2$ or a hyperbola in $\mathbb{D}_1^2$ and the principal directed curve of a slant helix in dual Lorentzian space are a helix and general helix, respectively. The second case is explained with an example. Finally, according to causal character of principal donor curve of principal directed rectifying curves in $\mathbb{D}_1^3$, these curves are shown to correspond to any timelike or spacelike ruled surface in Minkowski 3−space $\mathbb{R}_1^3$.

Key Words: Dual Lorentzian space, associated curves, general helix, slant helix, principal rectifying curve, ruled surface.

2019, 47 pages

TEŞEKKÜR

Bu çalışma için beni yönlendiren ve çalışmamın her aşamasında ilgi ve desteğini benden esirgemeyen danışman hocam Prof. Dr. Ahmet YÜCESAN'a sonsuz teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Yüksek lisans eğitimim boyunca her konuda bana destek olan aileme sevgi ve saygılarımı sunarım.

Bahar ABALI

ISPARTA, 2019

SİMGELER DİZİNİ

$\widehat{n}$	Dual asli normal vektörü
$\widehat{b}$	Dual binormal vektör
$\widehat{t}$	Dual teğet vektörü
$\mathbb{H}_0^2$	Dual pseudo-hiperbolik uzay
$\mathbb{S}_1^2$	Dual pseudo-küre
$\mathbb{D}$	Dual sayılar kümesi
$\mathbb{D}_1^3$	Dual Lorentz uzay
$\mathbb{D}^3$	Dual uzay
$\mathbb{R}_1^3$	Minkowski $3-$ uzay
$\mathbb{R}^3$	Öklid $3-$ uzay
$\mathbb{R}$	Reel sayılar cismi
$C(u)$	u yu bulunduran timekoni
$<,>$	Dual Lorentz uzayındaki Lorentz iç çarpım
$<,>_L$	Minkowski $3-$ uzaydaki Lorentz iç çarpım
$\times$	Lorentz vektör çarpım
ξ	Dual birim
$\widehat{\gamma}$	Dual eğri
$\widehat{s}$	Dual yay uzunluğu
$\widehat{\tau}$	Dual burulma fonksiyonu
$\widehat{\kappa}$	Dual eğrilik fonksiyonu
ε	İşaret fonksiyonu
$\Vert\ \Vert$	Norm
$\mathcal{T}$	Timelike vektörlerin kümesi

1.GİRİŞ

Minkowski uzayı fizikteki görecelilik teorisinden ortaya çıkmıştır. Bir timelike eğri ışık hızından daha yavaş olan bir gözlemci hareketinin yörüngesine, bir null eğri ışık hızındaki bir harekete, spacelike eğriler ise ışık hızından daha hızlı hareketlere karşılık gelmektedir.

Lorentz geometri, modern diferansiyel geometri ve Lorentz geometrinin sabit işleyişi ile verilen genel göreceliliğin matematiksel fiziği arasında geciş yapmaya yardım eder. Aslında görecelilik teorisi, şaşırtıcı ve hızlı bir şekilde evren bilimi ne (evrenin genişlemesi, büyük patlama) ve geometrik olarak daha az ilgi çekici bir konu olan tek bir yıldızın çekimine (ışığın bükülmesi, kara delikler) geçiş yapabilen geometriciler için merak uyandıran Lorentz geometriye göre ifade edilir (O'Neill, 1983).

Eğriler teorisi uzun geçmişine rağmen hala diferansiyel geometrinin en önemli konularından biridir ve günümüze kadar pek çok matematikçi tarafından çalışılmıştır. Eğriler arasında helis, sahip olduğu değerli uygulamalardan dolayı matematikçilerin olduğu kadar diğer bilim adamlarının da dikkatini çekmektedir. Bu uygulamalara örnek olarak; DNA nın tanımı, karbon nano-tüp tanımı, nano-yay ve $\alpha-$helis tanımı vb. verilebilir (Chouaib vd., 2006; Cook, 1914; Jain vd., 2008; Watson ve Crick, 1953; Yang, 2003; Yin vd., 2008).

Diferansiyel geometri açısından, bir helis sıfırdan farklı sabit bir eğrilik ve sıfırdan farklı sabit bir torsiyona sahip bir geometrik eğridir. Aslında, helis, genel helisin özel bir durumu olan bir $W-$eğri ve sık sık adlandırılan bir dairesel helisdir (İlarslan ve Boyacıoğlu; 2007, 2008). Bir genel helis veya sabit eğimli bir eğri, sabit bir doğrultu ile sabit açı yapan teğet doğrularının özelliği ile adlandırılır. $\mathbb{R}^3$ Öklid uzayda veya $\mathbb{R}^3_1$ Minkowski uzayda bir eğrinin genel helis olabilmesi için gerek ve yeter koşul burulmasının eğriliğine oranının sabit olmasıdır (Barros, 1997; Barros vd., 2001). $\mathbb{R}^3_1$ deki tüm helisler ($W-$eğriler) Walrave tarafından tamamiyle sınıflandırıldı (Walrave, 1995). Örneğin yalnızca düzlemsel spacelike dejenere helisler çemberler ve hiperbollerdir.

Aslında bir dairesel helis en basit üç boyutlu spiraldir. En ilginç spiral örneklerinden birisi $k-$Fibonacci spiralleridir. Bu eğriler $\{F_{k,n}\}_{n=0}^{\infty}$ biçimindeki $k-$Fibonacci sayıları çalışılırken doğal olarak ortaya çıkmıştır ve hiperbolik $k-$Fibonacci fonksiyonları ile ilişkilendirilmiştir. Fibonacci sayıları ve ilişkili olan Altın Oran veya Altın Bölme, teorik fizik ve yüksek enerjili parçaların fiziğinde sık sık ortaya çıkmaktadır (Naschie 2001; Naschie 2005). Üç boyutlu $k-$Fibonacci spiralleri (Falcon ve Plaza, 2008) deki görüşün geometrik fikrinden yola çıkılarak çalışıldı.

Ali ve Lopez $\mathbb{R}^3$ deki gibi benzer yolla, sabit bir doğru ile sabit açı yapan asli normal doğrultular ile ifade edilen $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayda bir slant helis konusunu çalıştılar. Onlar bir eğrinin slant helis olması için gerek ve yeter şartı ya

$\frac{\kappa^2}{(\tau^2-\kappa^2)^{3/2}}\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'$

ya da

$\frac{\kappa^2}{(\kappa^2\pm\tau^2)^{3/2}}\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'$

sabit olacak biçiminde karakterize ettiler. Ayrıca bir timelike slant helisin teğet ve binormal küresel göstergesini çalıştılar ve küresel göstergelerin küresel helisler olduğunu gösterdiler (Ali ve Lopez, 2011).

Choi ve Kim $\mathbb{R}^3$ Öklid $3-$uzayda ve Choi, Kim ve Ali $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski $3-$uzayda asli (binormal)-doğrultulu ve asli (binormal) donör eğri kavramlarını tanıttılar. Bu kavramları kullanarak genel ve slant helislerin kesin bağıntılarını ve sınıflandırmalarını verdiler (Choi ve Kim, 2012; Choi vd., 2012).

Dual sayılar, Clifford (1849 – 1879) tarafından geometrik araştırmaları için bir araç olarak tanıtıldı. Daha sonra, Study, kinematik ve çizgiler geometrisindeki araştırmalarında dual sayıları ve dual vektörleri kullandı. Dual birim vektörler ile yönlendirilmiş doğruları temsil etti ve onun adıyla bilinen Study dönüşümünü tanımladı. Bu dönüşüm, $\mathbb{D}^3$ dual uzayında $\mathbb{S}^2$ dual birim kürenin noktaları ile $\mathbb{R}^3$ Öklid $3-$uzayında yönlendirilmiş doğrular arasında bire-bir bir karşılığın varlığını ifade eder. Böylece, $\mathbb{D}^3$ dual uzayında $\mathbb{S}^2$ dual birim küre üzerindeki diferansiyellenebilir eğri, $\mathbb{R}^3$ Öklid $3-$uzayında bir regle yüzey ile temsil edilir (Guggenheimer, 1963).

$\mathbb{R}^3$ Öklid 3−uzayı yerine $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski 3−uzayı düşünülürse Study dönüşümü; $\mathbb{D}_1^3$ dual Lorentz uzayında $\mathbb{S}_1^2$ dual pseudo-küredeki spacelike birim vektörler ve $\mathbb{H}_0^2$ dual pseudo-hiperbolik uzayında timelike birim vektörler, sırasıyla, $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski 3−uzayında yönlendirilmiş spacelike ve timelike doğrulara karşılık gelir. O halde, $\mathbb{S}_1^2$ dual pseudo-küredeki timelike (spacelike) dual eğri, $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski 3−uzayında spacelike (timelike) regle yüzeye karşılık gelir. Benzer şekilde, $\mathbb{H}_0^2$ dual pseudo-hiperbolik uzayında dual eğri $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski 3−uzayında timelike regle yüzeye karşılık gelir (Uğurlu ve Çalışkan, 1996).

Lee, Choi ve Jin $\mathbb{D}^3$ dual uzayında dual eğrilerin temel teorisi olarak dual eğrilik ve dual burulmaya göre dual düzlem eğrileri, dual genel helisler ve dual slant helislerin tanımlamalarını verdiler (Lee vd., 2014).

Bu tez çalışmasında, $\mathbb{D}_1^3$ dual Lorentz uzayında Frenet eğrilerinin asli (binormal) doğrultu eğrisi ve asli (binormal) donör eğrisi kavramları tanıtıldı. Genel helis ve slant helisleri sınıflamak için verilen Frenet eğrilerinin bazı bağlantılı eğrileri çalışıldı. Düzlemsel eğriler ve genel helislerin doğal gösterimlerinden, sırasıyla genel helislerin ve slant helislerin doğal gösterimleri elde edildi ve bununla ilgili bir örnek verildi. Son olarak, $\mathbb{D}_1^3$ dual Lorentz uzayında asli doğrultu rektifiyen eğrilerin asli donör eğrisinin causal karekterine göre $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski 3−uzayda spacelike veya timelike regle yüzeye karşılık geldiği gösterildi.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde Dual Lorentz Uzayında Frenet Eğrilerinin Bağlantılı Eğrilerinin çalışılabilmesi için gerekli olan tanım ve teoremler verildi.

2.1.Minkowski 3−Uzayın Temel Elemanları

Tanım 2.1.1. $\mathbb{R}^3$, Öklid 3−uzay ve $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ olsun. $\mathbb{R}^3$ üzerinde,

$$\langle u, v\rangle_L = -u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

ile verilen skaler çarpım göz önüne alınarak elde edilen uzaya Minkowski 3−uzay (3−boyutlu Minkowski uzay) veya Lorentz-Minkowski uzayı denir ve $\mathbb{R}^3_1$ ile gösterilir. Burada tanımlanan $\langle , \rangle_L$ metriği Lorentz metriği (veya Minkowski metriği) olarak adlandırılır (Lopez, 2014).

Tanım 2.1.2. $\mathbb{R}^3_1$ Minkowski 3−uzayında bir u vektörü için

$i)$ $< u, u >_L > 0$ veya $u = 0$ ise u vektörüne spacelike,

$ii)$ $< u, u >_L < 0$ ise u vektörüne timelike,

$iii)$ $< u, u >_L = 0$ ve $u \neq 0$ ise u vektörüne lightlike (null) denir (Lopez, 2014).

Tanım 2.1.3. $\mathcal{T}$, $\mathbb{R}^3_1$ Minkowski 3−uzayında tüm timelike vektörlerin kümesi olsun. $u \in \mathcal{T}$ için

$$C(u) = \{v \in \mathcal{T} : < u, v >_L < 0\}$$

şeklinde tanımlanan kümeye u yu bulunduran $\mathbb{R}^3_1$ ün timekonisi denir (O'Neill, 1983).

Önerme 2.1.4. $\mathbb{R}^3_1$ Minkowski 3−uzayında u ve v timelike vektörleri aynı timekonidedir ancak ve ancak $< u, v >_L < 0$ dir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.5. u, $\mathbb{R}^3_1$ Minkowski 3−uzayında herhangi bir vektör olsun.

$$\|u\| = \sqrt{|< u, u >_L|}$$

reel sayısına u nun normu denir ve normu 1 olan vektör birim vektör olarak adlandırılır (Lopez, 2014).

Önerme 2.1.6. u ve v, $\mathbb{R}^3_1$ Minkowski $3-$uzayında iki timelike vektör olsun.

$i)$ $|< u, v >_L| \geq \|u\| \|v\|$ dir ancak ve ancak u ve v doğrudaştır,

$ii)$ Eğer u ve v aynı timekonide ise

$< u, v >_L = - \|u\| \|v\| \cosh\theta$

olacak şekilde u ve v vektörleri arasında hiperbolik açı olarak adlandırılan bir tek $\theta \geq 0$ reel sayısı vardır (O'Neill, 1983).

Önerme 2.1.7. U, $\mathbb{R}^3$ Öklid $3-$uzayda bir altvektör uzayı olsun. $\forall u, v \in U$ için

$< u, v >_U = < u, v >_L$

şeklinde tanımlanan U üzerine indirgenmiş metrik aşağıdaki üç durumdan biri ile sınıflandırılır:

$i)$ Metrik pozitif tanımlıdır ve U spacelike olarak adlandırılır,

$ii)$ Metrik 1 indekse sahiptir ve U timelike olarak adlandırılır,

$iii)$ Metrik dejeneredir ve U lightlike (null) olarak adlandırılır (Lopez, 2014).

Tanım 2.1.8. $\mathbb{R}^3_1$ Minkowski $3-$uzay ve $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3_1$ olsun.

$$\begin{array}{rccl} \times : & \mathbb{R}^3_1 \times \mathbb{R}^3_1 & \rightarrow & \mathbb{R}^3_1 \\ & (u, v) & \rightarrow & u \times v = (u_2v_3 - u_3v_2, u_1v_3 - u_3v_1, u_2v_1 - u_1v_2) \end{array}$$

şeklinde tanımlı $\times$ operatörüne $\mathbb{R}^3_1$ de Lorentz vektör çarpımı denir (Akutagawa ve Nishikawa, 1990; Choi vd., 2012).

Önerme 2.1.9. $\mathbb{R}^3_1$ Minkowski $3-$uzayda Lorentz vektör çarpımı aşağıdaki özelikleri sağlar:

$i)$ $u \times v = -v \times u$,

$ii)$ $u \times v$ hem u ya hem de v ye ortogonaldir,

$iii)$ $u \times v \neq 0$ vektörünün $U = S_p\{u, v\}$ düzleminde bulunması için gerek ve yeter şart U düzleminin lightlike (null) olmasıdır,

$iv)$ $(u \times v) \times w = - < u, w >_L v + < v, w >_L u$ (O'Neill, 1983; Lopez, 2014).

Teorem 2.1.10. $\mathbb{R}^3_1$ Minkowski $3-$uzayda iki lineer bağımsız vektör u ve v olmak üzere;

$i)$ u ve v spacelike ise $u \times v$ bir timelike vektördür,

$ii)$ u ve v timelike ise $u \times v$ spacelike vektördür,

$iii)$ u ve v lightlike (null) ise $u \times v$ spacelike vektördür,

$iv)$ u timelike ve v lightlike (null) ise $u \times v$ spacelike vektördür,

$v)$ u spacelike ve v lightlike (null) ise $u \times v$ spacelike veya lightlike (null) vektör olabilir,

$v)$ u spacelike ve v timelike ise $u \times v$ spacelike vektördür (Lopez, 2014).

Tanım 2.1.11. I, $\mathbb{R}$ reel ekseninin bir açık aralığı olmak üzere

$$\begin{array}{rccc} \gamma: & I \subset \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}_1^3 \\ & \sigma & \rightarrow & \gamma(\sigma) \end{array}$$

diferansiyellenebilir dönüşüme $\mathbb{R}_1^3$ de bir diferansiyellenebilir eğri denir (Lopez, 2014).

Bundan sonra diferansiyellenebilir eğri yerine sadece eğri kavramı kullanılacaktır.

Tanım 2.1.12. $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$, $\mathbb{R}_1^3$ de bir eğri olsun. $\forall \sigma \in I$ için

$$\gamma'(\sigma) = d\gamma(\tfrac{d}{du}\big|_{\sigma}) \in T_{\gamma(\sigma)}\mathbb{R}_1^3$$

teğet vektörüne γ nın hız vektörü denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.13. γ, $\mathbb{R}_1^3$ de bir eğri olsun. $\forall \sigma \in I$ için

$i)$ $\gamma'(\sigma)$ hız vektörü spacelike ise γ eğrisine spacelike,

$ii)$ $\gamma'(\sigma)$ hız vektörü timelike ise γ eğrisine timelike,

$iii)$ $\gamma'(\sigma)$ hız vektörü lightlike (null) ise γ eğrisine lightlike (null) dır denir (Lopez, 2014).

Tanım 2.1.14. Bir γ eğrisinin hız vektörü $\forall \sigma \in I$ için sıfırdan farklı, yani $\gamma'(\sigma) \neq 0$ ise γ ya regülerdir denir (Lopez, 2014).

Minkowski $3-$uzayda eğrilerin causal karakteri regülerlik şartını etkiler.

Önerme 2.1.15. $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski $3-$uzayında herhangi bir timelike ya da null eğri regülerdir (Lopez, 2014).

Timelike ya da null eğriler her noktada regülerken spacelike eğriler bazı noktalarda regüler olmayabilir. Bu nedenle çalışmanın bundan sonraki kısımlarında tüm spacelike eğriler regüler kabul edilecektir.

Lemma 2.1.16. $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_1^3$, spacelike veya timelike bir eğri olsun. $t_0 \in I$ verildiğinde $\forall s \in (-\epsilon, \epsilon)$ için $\|\beta'(s)\| = 1$ özeliğini sağlayan $\beta = \gamma \circ \phi$ ile verilen $\beta : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \mathbb{R}_1^3$ eğrisi olacak şekilde $\phi : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow (\sigma_0 - \delta, \sigma_0 + \delta)$ difeomorfizmi ve δ, $\epsilon > 0$ vardır (Lopez, 2014).

Tanım 2.1.17. $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski 3−uzayda spacelike veya timelike asli normal vektöre sahip timelike eğriler veya spacelike eğriler Frenet eğrileri olarak adlandırılır (Lopez, 2014).

Teorem 2.1.18. γ, $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski 3−uzayda birim hızlı bir Frenet eğri olsun. O zaman, $t = \gamma'$ birim teğet, n asli normal ve $b = \varepsilon_0\varepsilon_1 t \times n$ binormal vektör olmak üzere,

$$t' = \kappa n,$$

$$n' = -\varepsilon_0\varepsilon_1\kappa t + \tau b$$

ve

$$b' = -\varepsilon_1\varepsilon_2\tau n$$

dır. Burada $\varepsilon_0 =< t, t >_L = \pm 1$, $\varepsilon_1 =< n, n >_L = \pm 1$, $\varepsilon_2 =< b, b >_L = \pm 1$ dir. Ayrıca κ eğriliği ve τ burulması, sırasıyla $\kappa = \varepsilon_1 < t', n >_L$ ve $\tau = \varepsilon_2 < n', b >_L$ şeklinde tanımlıdır (Lopez, 2014).

Teorem 2.1.19. γ, $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski 3−uzayda yay uzunluğu ile parametrize edilmiş bir Frenet eğrisi olsun. O zaman, γ bir afin düzleme indirgenir ancak ve ancak burulma sıfırdır (Lopez, 2014).

Tanım 2.1.20. γ, $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski 3−uzayda yay uzunluğu ile parametrize edilmiş bir Frenet eğrisi olsun. γ nın birim teğet vektörü t olmak üzere $< t(s), v >_L$ sabit olacak şekilde sıfırdan farklı $v \in \mathbb{R}_1^3$ vektörü varsa γ ya bir genel helis ve v ye paralel herhangi bir doğruya da genel helisin ekseni denir. Özellikle, genel helisin ekseninin lightlike (null) veya null olmamasına göre genel helis, sırasıyla, dejenere veya dejenere olmayan şeklinde adlandırılır (Barros vd., 2001; Lopez, 2014).

Teorem 2.1.21 (Lancret Teoremi). γ, $\mathbb{R}^3_1$ Minkowski 3−uzayda κ eğrilik ve τ burulmasına sahip bir null olmayan eğri olsun. O zaman, γ bir genel helisdir ancak ve ancak τ/κ sabittir (Barros vd., 2001).

Tanım 2.1.22. γ, $\mathbb{R}^3_1$ Minkowski 3−uzayda yay uzunluğu ile parametrize edilmiş bir regüler eğri olsun. γ nın birim asli normal vektörü n olmak üzere $< n(s), v >_L$ sabit olacak şekilde $v \neq 0$ vektörü varsa γ ya bir slant helis denir (Ali ve Lopez, 2011).

Tanım 2.1.23. γ, $\mathbb{R}^3_1$ Minkowski 3−uzayda yay uzunluğu ile parametrize edilmiş bir Frenet eğrisi olsun. γ nın herhangi bir noktasında $\{t, n\}$, $\{n, b\}$ ve $\{t, b\}$ tarafından gerilen düzlemler sırasıyla, oskülatör, normal ve rektifiyen düzlemler olarak adlandırılır (İlarslan vd., 2003).

Tanım 2.1.24. γ, $\mathbb{R}^3_1$ Minkowski 3−uzayda yay uzunluğu ile parametrize edilmiş bir Frenet eğrisi olsun. γ nın konum vektörü eğrinin rektifiyen düzleminde bulunuyorsa eğriye rektifiyen eğri denir (İlarslan vd., 2003).

Tanım 2.1.25. γ, $\mathbb{R}^3_1$ Minkowski 3−uzayda $\{t, n, b\}$ Frenet çatılı birim hızlı bir Frenet eğrisi ve W, γ boyunca birim vektör alanı olsun. t_0 birim teğet vektörü W ya eşit yani $t_0 = W$ olan γ_0 eğrisine γ nın W−doğrultu eğrisi ve γ ya da γ_0 nın W−donör eğrisi denir (Choi vd., 2012).

W nın özel durumları için W−doğrultu dual eğrisi aşağıdaki şekilde adlandırılır:

Eğer $W = t$ ise γ nın t−doğrultu eğrisi olan γ_0, γ nın kendisini verir.

Eğer $W = n$ ise γ nın n−doğrultu eğrisi olan γ_0, γ nın asli doğrultu eğrisi olarak adlandırılır ve γ ya da γ_0 nın asli donör eğrisi denir. Ayrıca bir γ_1 eğrisi, γ_0 nın asli doğrultu eğrisi ise γ_1 eğrisine γ nın ikinci asli doğrultu eğrisi ve γ ya da γ_1 nın ikinci asli donör eğrisi denir.

Eğer $W = b$ ise γ nın b−doğrultu eğrisi olan γ_0, γ nın binormal doğrultu eğrisi olarak adlandırılır ve γ ya da γ_0 nın binormal donör eğrisi denir (Choi vd., 2012).

Tanım 2.1.26. $\mathbb{R}^3_1$ Minkowski 3−uzay olsun. O zaman

$$S_1^2 = q^{-1}(r^2) = \{p \in \mathbb{R}_1^3 : -p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = r^2\}$$

hiperkuadriğine orijin merkezli $r > 0$ yarıçaplı pseudo-küre (veya dS_2 ile gösterilen 2−boyutlu de-Sitter uzay),

$$H_0^2 = q^{-1}(-r^2) = \{p \in \mathbb{R}_1^3 : -p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = -r^2\}$$

hiperkuadriğine ise orijin merkezli $r > 0$ yarıçaplı 2−boyutlu pseudo-hiperbolik uzay denir (O'Neill, 1983).

2.2. Dual Sayılar Cebiri

Tanım 2.2.1. $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi olmak üzere $\forall a, a^* \in \mathbb{R}$ için

$$\widehat{a} = a + \xi a^*$$

şeklinde ifade edilen sayıya bir dual sayı denir ve dual sayılar kümesi $\mathbb{D}$ ile gösterilir. Burada,

$$\xi \neq 0,\ 0\xi = \xi 0 = 0,\ 1\xi = \xi 1 = \xi,\ \xi^2 = 0$$

olacak şekilde tanımlı ξ, dual birim olarak adlandırılır (Veldkamp, 1976; Hacısalihoğlu, 1983).

Dual sayılar için eşitlik, toplama ve çarpma işlemleri aşağıdaki şekilde tanımlıdır:

(i) Eşitlik: $\widehat{a} = a + \xi a^*$, $\widehat{b} = b + \xi b^*$ dual sayıları için $\widehat{a} = \widehat{b}$ dir ancak ve ancak $a = b$ ve $a^* = b^*$ dir.

(ii) Toplama: $\widehat{a} = a+\xi a^*, \widehat{b} = b+\xi b^*$ dual sayıları için $\widehat{a}+\widehat{b} = (a+\xi a^*)+(b+\xi b^*) = a + b + \xi(a^* + b^*)$ dir.

(iii) Çarpma: $\widehat{a} = a + \xi a^*$, $\widehat{b} = b + \xi b^*$ dual sayıları için $\widehat{a}\widehat{b} = (a + \xi a^*)(b + \xi b^*) = ab + \xi(ab^* + a^*b)$ dir (Veldkamp, 1976).

Teorem 2.2.2. Dual sayılar kümesi bir değişimli halkadır (Veldkamp, 1976).

Tanım 2.2.3. $b \neq 0$ olmak üzere

$$\frac{\widehat{a}}{\widehat{b}} = \frac{a+\xi a^*}{b+\xi b^*} = \frac{a}{b} + \xi\left(\frac{a^*}{b} - \frac{ab^*}{b^2}\right)$$

şeklinde tanımlı işleme $\widehat{a}$ dual sayısının $\widehat{b}$ dual sayısına bölme işlemi denir (Veldkamp, 1976).

Teorem 2.2.4. İki dual sayının çarpımı sıfır ise çarpanlardan biri sıfır olmak zorunda değildir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.2.5. $a > 0$ olmak üzere

$$\sqrt{\widehat{a}} = \sqrt{a + \xi a^*} = \sqrt{a} + \xi \frac{a^*}{2\sqrt{a}}$$

şeklinde tanımlıdır (Veldkamp, 1976).

Tanım 2.2.6. $a \neq 0$ olmak üzere, $\widehat{a}$ dual sayısı için

$$|\widehat{a}| = \sqrt{\widehat{a}^2} = \sqrt{a^2 + 2\xi a a^*} = |a| + \xi \frac{a}{|a|} a^*$$

dir. O halde $|\widehat{a}| = \widehat{a}$ $(a > 0)$ ve $|\widehat{a}| = -\widehat{a}$ $(a < 0)$ dir. Ayrıca, eğer $\widehat{a} = 0$ ise $|\widehat{a}| = 0$ dır (Veldkamp, 1976).

Tanım 2.2.7. f diferansiyellenebilir fonksiyonu

$$f(\widehat{x}) = f(x + \xi x^*) = f(x) + \xi x^* f'(x)$$

şeklinde tanımlıdır. Burada f', f nin x e göre türevidir (Veldkamp, 1976).

Böylece,

$$\sin \widehat{x} = \sin(x + \xi x^*) = \sin x + \xi x^* \cos x,$$

$$\cos \widehat{x} = \cos(x + \xi x^*) = \cos x - \xi x^* \sin x,$$

$$\sinh \widehat{x} = \sinh(x + \xi x^*) = \sin x + \xi x^* \cosh x,$$

$$\cosh \widehat{x} = \cosh(x + \xi x^*) = \cosh x + \xi x^* \sinh x,$$

dir (Veldkamp, 1976).

Tanım 2.2.8. $Ox_1x_2x_3$, $\mathbb{R}^3$ 3−boyutlu Öklid uzayında sağ-el ortonormal çatı olsun. x_k−ekseni üzerinde pozitif yöndeki birim vektör e_k $(k = 0, 1, 2, 3)$ olmak üzere $(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \widehat{x}_3)$ dual sayıların sıralı üçlüsüne dual vektör denir ve $(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \widehat{x}_3) = \widehat{x}$ ile gösterilir. Burada $\widehat{x}_1$, $\widehat{x}_2$ ve $\widehat{x}_3$ sayıları $\widehat{x}$ in koordinatları olarak adlandırılır. Eğer bu sayılar reel ise vektör, reel vektör olarak ifade edilir ve dual vektörler kümesi $\mathbb{D}^3$ ile gösteilir (Veldkamp, 1976; Guggenheimer,1963).

Dual vektörler için eşitlik, dual skalar çarpım, toplama ve lineer bağımlılık aşağıdaki şekilde tanımlıdır:

(i) Eşitlik: Eğer $\widehat{x} = (\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \widehat{x}_3)$ ve $\widehat{y} = (\widehat{y}_1, \widehat{y}_2, \widehat{y}_3)$ dual vektörleri için $\widehat{x}_k = \widehat{y}_k$ $(k = 1, 2, 3)$ ise $\widehat{x}$ ve $\widehat{y}$ dual vektörleri eşittir ve $\widehat{x} = \widehat{y}$ şeklinde gösterilir.

(ii) Dual skaler çarpım: $\widehat{\lambda} = \lambda + \xi\lambda^*$ dual sayısı ve $\widehat{x} = (\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \widehat{x}_3)$ dual vektörü için $\widehat{\lambda}\widehat{x} = (\widehat{\lambda}\widehat{x}_1, \widehat{\lambda}\widehat{x}_2, \widehat{\lambda}\widehat{x}_3)$ dir.

(iii) Toplama: $\widehat{x} = (\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \widehat{x}_3)$ ve $\widehat{y} = (\widehat{y}_1, \widehat{y}_2, \widehat{y}_3)$ dual vektörleri için $\widehat{x} + \widehat{y} = (\widehat{x}_1 + \widehat{y}_1, \widehat{x}_2 + \widehat{y}_2, \widehat{x}_3 + \widehat{y}_3)$ dir.

(iv) Lineer bağımlılık: Eğer $\widehat{x}_1, ..., \widehat{x}_n$ dual vektörleri ve $\widehat{\lambda}_1, ..., \widehat{\lambda}_n$ dual sayıları için

$$\sum_{k=1}^{n} \widehat{\lambda}_k x_k = 0$$

eşitliğini sağlayan $\widehat{\lambda}_1, ..., \widehat{\lambda}_n$ dual sayılarının tümü sıfır olacak şekilde mevcut ise $\widehat{x}_1, ..., \widehat{x}_n$ dual vektörleri lineer bağımlıdır. Burada $0 = (0, 0, 0)$, sıfır vektörüdür. Lineer bağımlı olmayan vektörler lineer bağımsız olarak adlandırılır (Veldkamp, 1976).

Yukarıdaki tanımların bir sonucu olarak herhangi bir $\widehat{x} = (\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \widehat{x}_3)$ dual vektörü

$$\widehat{x} = (\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \widehat{x}_3) = \widehat{x}_1 e_1 + \widehat{x}_2 e_2 + \widehat{x}_3 e_3$$

ve

$$\widehat{x} = (x_1 + \xi x_1^*, x_2 + \xi x_2^*, x_3 + \xi x_3^*) = (x_1, x_2, x_3) + \xi(x_1^*, x_2^*, x_3^*)$$

şeklinde yazılabilir. O halde $x = (x_1, x_2, x_3)$ ve $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ reel vektörleri için

$$\widehat{x} = x + \xi x^*$$

dir (Veldkamp, 1976).

Tanım 2.2.9. $\mathbb{D}^3$, $\mathbb{D}$ halkası üzerinde bir modüldür (Hacısalihoğlu, 1983).

2.3. Dual Lorentz Uzayı

Tanım 2.3.1. $\mathbb{D}^3$, dual vektörler kümesi olsun. $\forall \widehat{x} = x + \xi x^*$, $\widehat{y} = y + \xi y^* \in \mathbb{D}^3$ olmak üzere,

$$< \widehat{x}, \widehat{y} > = < x, y >_L + \xi(< x, y^* >_L + < x^*, y >_L)$$

ile verilen skalar çarpıma $\widehat{x}$ ve $\widehat{y}$ dual vektörlerinin Lorentz iç çarpımı denir.

Böylece, bu Lorentz iç çarpımıyla birlikte $\mathbb{D}^3$ dual uzayı dual Lorentz uzay olarak adlandırılır ve $\mathbb{D}^3_1$ ile gösterilir (Uğurlu ve Çalışkan, 1996).

Tanım 2.3.2. $\widehat{x} = x + \xi x^* \in \mathbb{D}^3_1$ olsun. Bu durumda;

(i) x vektörü spacelike ise $\widehat{x}$ dual vektörüne spacelike,

(ii) x vektörü timelike ise $\widehat{x}$ dual vektörüne timelike,

(iii) x vektörü lightlike (null) ise $\widehat{x}$ dual vektörüne lightlike (null) dır

denir (Uğurlu ve Çalışkan,1996).

Tanım 2.3.3. $\mathbb{D}^3_1$ dual Lorentz uzayında bir $\widehat{x} = x+\xi x^*$ dual vektörü için $\|x\| \neq 0$ olmak üzere,

$$\|\widehat{x}\| = \sqrt{|<\widehat{x},\widehat{x}>|} = \|x\| + \xi \frac{<x,x^*>_L}{\|x\|^2}$$

dual sayısına, $\widehat{x}$ dual vektörünün normu denir (Uğurlu ve Çalışkan,1996).

Normu $1 + \xi 0 = (1, 0)$ olan $\widehat{x}$ dual vektörü dual birim vektör olarak adlandırılır. Norm tanımından açıktır ki;

eğer $<x, x>_L = -1$ ve $<x, x^*>_L = 0$ ise $\widehat{x}$ bir timelike dual birim vektör,

eğer $<x, x>_L = 1$ ve $<x, x^*>_L = 0$ ise $\widehat{x}$ bir spacelike dual birim vektördür (Uğurlu ve Çalışkan,1996).

Tanım 2.3.4. $\mathbb{D}^3_1$ dual Lorentz uzayı olsun. $\forall\widehat{x} = (\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \widehat{x}_3)$, $\widehat{y} = (\widehat{y}_1, \widehat{y}_2, \widehat{y}_3) \in \mathbb{D}^3_1$ olmak üzere

$$\widehat{x} \times \widehat{y} = (\widehat{x}_2\widehat{y}_3 - \widehat{x}_3\widehat{y}_2, \widehat{x}_1\widehat{y}_3 - \widehat{x}_3\widehat{y}_1, \widehat{x}_2\widehat{y}_1 - \widehat{x}_1\widehat{y}_2)$$

dual sayısına $\widehat{x}$ ve $\widehat{y}$ vektörlerinin Lorentz vektör çarpımı denir (Uğurlu ve Çalışkan, 1996).

Tanım 2.3.5. $\widehat{x} = x + \xi x^*$ ve $\widehat{y} = y + \xi y^*$ iki spacelike dual birim vektör olmak üzere,

$$<\widehat{x}, \widehat{y}> = \cos\widehat{\theta} = \cos(\theta + \xi\theta^*) = \cos\theta - \xi\theta^* \sin\theta$$

olacak şekilde $\widehat{\theta}$ dual sayısına $\widehat{x}$ ve $\widehat{y}$ spacelike dual birim vektörleri arasındaki dual merkez açı denir. Burada θ $(0 \leq \theta \leq \pi)$, x ve y spacelike reel vektörleri arasındaki reel açı ve θ^*, x ve y spacelike reel vektörleri arasındaki uzaklıktır

(Uğurlu ve Çalışkan,1996).

Tanım 2.3.6. $\widehat{x} = x + \xi x^*$ ve $\widehat{y} = y + \xi y^*$ iki timelike dual birim vektör olsun.

$$< \widehat{x}, \widehat{y} >= -\cosh\widehat{\theta} = -\cosh(\theta + \xi\theta^*) = -\cosh\theta - \xi\theta^* \sinh\theta$$

eşitliğini sağlayan $\widehat{\theta} = \theta + \xi\theta^*$ dual sayısına $\widehat{x}$ ve $\widehat{y}$ timelike dual birim vektörleri arasındaki dual hiperbolik açı denir (Uğurlu ve Çalışkan, 1996).

Tanım 2.3.7. $\widehat{x} = x + \xi x^* \in \mathbb{D}_1^3$ olmak üzere,

(i) $\mathbb{S}_1^2 = \{\widehat{x} = x + \xi x^* | \ \ \|\widehat{x}\| = (1, 0) \ ; \ x, \ x^* \in \mathbb{R}_1^3$ ve $\widehat{x}$ vektörü spacelike$\}$

kümesine $\mathbb{D}_1^3$ de dual pseudo-küre denir.

(ii) $\mathbb{H}_0^2 = \{\widehat{x} = x + \xi x^* | \ \ \|\widehat{x}\| = (1, 0) \ ; \ x, \ x^* \in \mathbb{R}_1^3$ ve $\widehat{x}$ vektörü timelike$\}$

kümesine $\mathbb{D}_1^3$ de dual pseudo-hiperbolik uzay denir (Uğurlu ve Çalışkan,1996; Özbey ve Oral, 2009).

Teorem 2.3.8. $\mathbb{D}_1^3$ dual Lorentz uzayında dual pseudo-küre (dual pseudo-hiperbolik uzay) üzerindeki noktalar ile $\mathbb{R}_1^3$ in yönlü spacelike (timelike) doğruları arasında bire-bir bir karşılık vardır (Uğurlu ve Çalışkan, 1996).

Tanım 2.3.9. I, $\mathbb{R}$ reel ekseninin bir açık aralığı olmak üzere $1 \leq i \leq 3$ için $\gamma_i(\sigma)$ ve $\gamma_i^*(\sigma)$ reel değerli diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsun. O zaman,

$$\begin{aligned} \widehat{\gamma} : \ I \subset \mathbb{R} \ &\rightarrow \ \mathbb{D}_1^3 \\ \sigma \ &\rightarrow \ \widehat{\gamma}(\sigma) = (\gamma_1(\sigma) + \xi\gamma_1^*(\sigma), \gamma_2(\sigma) + \xi\gamma_2^*(\sigma), \gamma_3(\sigma) + \xi\gamma_3^*(\sigma)) \\ &\qquad\quad = \gamma(\sigma) + \xi\gamma^*(\sigma) \end{aligned}$$

diferansiyellenebilir dönüşüme $\mathbb{D}_1^3$ de bir diferansiyellenebilir dual uzay eğrisi denir ve $\gamma(\sigma)$, $\widehat{\gamma}(\sigma)$ nin (reel) gösterge eğrisi olarak adlandırılır (Ayyıldız vd., 2007).

Bundan sonra diferansiyellenebilir dual uzay eğri yerine sadece eğri kavramı kullanılacaktır.

Tanım 2.3.10. $\widehat{\gamma}$, $\mathbb{D}_1^3$ de null olmayan bir eğri olsun.

$$\widehat{s} = \int_0^s \|\widehat{\gamma}(\sigma)'\| \, d\sigma = \int_0^s \|\gamma(\sigma)'\| \, d\sigma + \xi \int_0^s < t, \gamma^{*'} >_L d\sigma = s + \xi s^*$$

şeklinde tanımlı dual fonksiyona $\widehat{\gamma}$ nın $\widehat{s}$ dual yay uzunluğu denir. Burada t, γ nin birim teğet vektörüdür (Ayyıldız vd., 2007).

Tanım 2.3.11. $\widehat{\gamma}(s)=\gamma(s)+\xi\gamma^*(s)$, $\mathbb{D}_1^3$ dual Lorentz uzayında yay uzunluğu ile parametrize edilmiş null olmayan bir eğri olsun.

$\frac{d\widehat{\gamma}}{d\widehat{s}}=\frac{d\widehat{\gamma}}{ds}\frac{ds}{d\widehat{s}}=\widehat{t}$

şeklinde tanımlanan dual birim vektörüne $\widehat{\gamma}(s)$ nın dual birim teğet vektörü denir. $\widehat{t}$ nin $\widehat{s}$ ye göre türevi olan $\frac{d\widehat{t}}{d\widehat{s}}$ dual vektörünün normu $\widehat{\gamma}(s)$ nin dual eğrilik fonksiyonu olarak adlandırılır ve $\widehat{\kappa}$ ile gösterilir. $\widehat{\kappa}=\kappa+\xi\kappa^*$ dual eğrilik fonksiyo nu için $\kappa\neq 0$ ise $\widehat{\kappa}$ dual eğrilik fonksiyonu sırf dual olmayan olarak adlandırılır. O halde, sırf dual olmayan eğriliğe sahip $\widehat{\gamma}(s)$ eğrisi için

$\widehat{n}=\frac{1}{\widehat{\kappa}}\frac{d\widehat{t}}{d\widehat{s}}$

şeklinde tanımlanan $\widehat{n}$ dual birim vektörüne $\widehat{\gamma}(s)$ nin asli normali ve

$\widehat{b}=\varepsilon_0\varepsilon_1\widehat{t}\times\widehat{n}$

dual birim vektörüne ise $\widehat{\gamma}(s)$ nin dual binormal vektörü denir. Böylece oluşan $\{\widehat{t},\widehat{n},\widehat{b}\}$ ortonormal dual çatıya $\widehat{\gamma}(s)$ nin $\widehat{\gamma}(s)$ noktasında dual Frenet üçlüsü denir. Burada, $<t,t>_L=\varepsilon_0=\pm1$, $<n,n>_L=\varepsilon_1=\pm1$, $<b,b>_L=\varepsilon_2=\pm1$ dir ve $\widehat{t},\widehat{n},\widehat{b}$ dual Frenet vektörleri

$\widehat{t}\times\widehat{n}=\varepsilon_0\varepsilon_1\widehat{b}$, $\widehat{n}\times\widehat{b}=\varepsilon_1\varepsilon_2\widehat{t}$, $\widehat{b}\times\widehat{t}=\varepsilon_0\varepsilon_2\widehat{n}$

eşitliklerini sağlar (Ayyıldız vd., 2007).

Tanım 2.3.12. $\mathbb{D}_1^3$ dual Lorentz uzayında timelike eğrilere ve spacelike veya timelike dual asli normal vektöre sahip spacelike eğrilere Frenet eğrileri denir.

$\mathbb{D}_1^3$ dual Lorentz uzayında Frenet eğrileri $\widehat{\kappa}=\kappa+\xi\kappa^*$ sırf dual olmayan eğrilik fonksiyonuna sahiptir.

Tanım 2.3.13. $\widehat{\gamma}$, $\mathbb{D}_1^3$ dual Lorentz uzayında yay uzunluğu ile parametrize edilmiş bir Frenet eğrisi olsun. Frenet eğrisi boyunca $\widehat{t},\widehat{n},\widehat{b}$ dual Frenet vektörlerinin türevleri

$$\frac{d}{d\widehat{s}}\begin{bmatrix}\widehat{t}\\ \widehat{n}\\ \widehat{b}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \widehat{\kappa} & 0\\ -\varepsilon_0\varepsilon_1\widehat{\kappa} & 0 & \widehat{\tau}\\ 0 & -\varepsilon_1\varepsilon_2\widehat{\tau} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\widehat{t}\\ \widehat{n}\\ \widehat{b}\end{bmatrix} \tag{2.1}$$

dir. Burada $\widehat{\tau}=\tau+\xi\tau^*:I\rightarrow\mathbb{D}$ dual fonksiyonu $\widehat{\gamma}(s)$ nin dual burulması olarak adlandırılır ve (2.1) formülü de dual Frenet formülü olarak isimlendirilir (Ayyıldız vd., 2007).

Tanım 2.3.14. $\widehat{\gamma}$, $\mathbb{D}_1^3$ dual Lorentz uzayında dual yay uzunluğu ile parametrize edilmiş bir Frenet eğrisi olsun. Dual burulma fonksiyonu sıfır olan $\widehat{\gamma}$ Frenet eğrisine düzlemsel eğri denir.

Tanım 2.3.15. $\widehat{\gamma}$, $\mathbb{D}_1^3$ dual Lorentz uzayında dual yay uzunluğu ile parametrize edilmiş bir Frenet eğrisi olsun. $\widehat{\gamma}$ nın dual birim teğet vektörü $\widehat{t}$ olmak üzere $<\widehat{t}(s), \widehat{v}>$ dual sabit olacak şekilde sıfırdan farklı $\widehat{v} \in \mathbb{D}_1^3$ dual vektörü varsa $\widehat{\gamma}$ ya bir genel helis ve $\widehat{v}$ ye paralel herhangi bir doğruya da genel helisin ekseni denir. Özellikle, genel helisin ekseninin null (lightlike) veya null olmamasına göre genel helis, sırasıyla dejenere veya dejenere olmayan şeklinde adlandırılır.

$\mathbb{R}_1^3$ Minkowski 3−uzayda Lancret teoremi (Barros vd., 2001) ve $\mathbb{D}^3$ dual uzayında Lancret teoremi (Lee vd., 2014) den $\mathbb{D}_1^3$ dual Lorentz uzayında Lancret teoremi aşağıdaki şekilde verilir:

Teorem 2.3.16. $\widehat{\gamma}$, $\mathbb{D}_1^3$ dual Lorentz uzayında $\widehat{\kappa}$ sırf dual olmayan eğrilik ve $\widehat{\tau}$ burulmaya sahip bir null olmayan eğri olsun. O zaman $\widehat{\gamma}$, $\mathbb{D}_1^3$ de bir genel helisdir ancak ve ancak $\widehat{\tau}/\widehat{\kappa}$ dual sabittir.

Tanım 2.3.17. $\widehat{\gamma}$, $\mathbb{D}_1^3$ dual Lorentz uzayında dual yay uzunluğu ile parametrize edilmiş bir Frenet eğrisi olsun. $\widehat{\gamma}$ nın dual asli birim normal vektörü $\widehat{n}$ olmak üzere $<\widehat{n}(s), \widehat{v}>$ dual sabit olacak şekilde sıfırdan farklı $\widehat{v} \in \mathbb{D}_1^3$ dual vektörü varsa $\widehat{\gamma}$ ya $\mathbb{D}_1^3$ de bir slant helis denir.

Tanım 2.3.18. $\widehat{\gamma}(s)$, $\mathbb{D}_1^3$ dual Lorentz uzayında dual yay uzunluğu ile parametrize edilmiş bir Frenet eğrisi olsun. $\widehat{\gamma}(s)$ nin herhangi bir noktasında $\{\widehat{t}, \widehat{n}\}$, $\{\widehat{n}, \widehat{b}\}$ ve $\{\widehat{t}, \widehat{b}\}$ tarafından gerilen düzlemler sırasıyla, oskülatör, normal ve rektifiyen düzlemler olarak adlandırılır (Özbey ve Oral, 2009).

Tanım 2.3.19. $\widehat{\gamma}(s)$, $\mathbb{D}_1^3$ dual Lorentz uzayında yay uzunluğu ile parametrize edilmiş bir Frenet eğrisi olsun. $\widehat{\gamma}(s)$ nin konum vektörü eğrinin rektifiyen düzleminde bulunuyorsa eğriye rektifiyen eğri denir (Özbey ve Oral, 2009).

Tanım 2.3.20. $\widehat{\gamma}$, $\mathbb{D}_1^3$ dual Lorentz uzayında $\{\widehat{t}, \widehat{n}, \widehat{b}\}$ dual Frenet çatılı dual birim hızlı Frenet eğrisi ve $\widehat{W}$, $\widehat{\gamma}$ boyunca dual birim vektör olsun. $\widehat{t}_0$ dual birim teğet vektörü $\widehat{W}$ ya eşit yani $\widehat{t}_0 = \widehat{W}$ olan $\widehat{\gamma}_0$ ya $\widehat{\gamma}$ nın $\widehat{W}-$doğrultu eğrisi ve $\widehat{\gamma}$ ya da $\widehat{\gamma}_0$ nın $W-$donör eğrisi denir

$\widehat{W}$ nın özel durumları için $\widehat{W}-$doğrultu eğrisi aşağıdaki şekilde adlandırılır:

Eğer $\widehat{W} = \widehat{t}$ ise $\widehat{\gamma}$ nın $\widehat{t}-$doğrultu eğrisi olan $\widehat{\gamma}_0$, $\widehat{\gamma}$ nın kendisini verir.

Eğer $\widehat{W} = \widehat{n}$ ise $\widehat{\gamma}$ nın $\widehat{n}-$doğrultu eğrisi olan $\widehat{\gamma}_0$, $\widehat{\gamma}$ nın asli doğrultu eğrisi olarak adlandırılır ve $\widehat{\gamma}$ ya da $\widehat{\gamma}_0$ nın asli donör eğrisi denir. Ayrıca bir $\widehat{\gamma}_1$ eğrisi, $\widehat{\gamma}_0$ nın asli doğrultu eğrisi ise $\widehat{\gamma}_1$ eğrisine $\widehat{\gamma}$ nın ikinci asli doğrultu eğrisi ve $\widehat{\gamma}$ ya da $\widehat{\gamma}_1$ nın ikinci asli donör eğrisi denir.

Eğer $\widehat{W} = \widehat{b}$ ise $\widehat{\gamma}$ nın $\widehat{b}-$doğrultu eğrisi olan $\widehat{\gamma}_0$, $\widehat{\gamma}$ nın binormal doğrultu eğrisi olarak adlandırılır ve $\widehat{\gamma}$ ya da $\widehat{\gamma}_0$ nın binormal donör eğrisi denir.

Teorem 2.3.21. $\mathbb{H}_0^2$ dual pseudo-hiperbolik uzay üzerindeki spacelike eğri, Minkowski 3$-$uzayda bir timelike regle yüzeye karşılık gelir. Benzer şekilde, $\mathbb{S}_1^2$ dual pseudo-küre üzerindeki timelike (spacelike) eğri, Minkowski 3$-$uzayda bir spacelike (timelike) regle yüzeye karşılık gelir (Uğurlu ve Çalışkan, 1996; Özbey ve Oral, 2009).

3. DUAL LORENTZ UZAYINDA FRENET EĞRİLERİNİN ASLİ DOĞRULTU VE ASLİ DONÖR EĞRİLERİ

Bu bölümde, $\mathbb{D}_1^3$ dual Lorentz uzayında spacelike asli normale ve timelike asli normale sahip spacelike Frenet eğrilerin ve timelike Frenet eğrisinin asli doğrultu ve asli donör eğrileri incelendi. Öncelikle, $\widehat{\gamma}(s) = \gamma(s) + \xi\gamma^*(s)$, $\mathbb{D}_1^3$ dual Lorentz uzayında Frenet eğrisinin causal karakterinin $\widehat{\gamma}(s)$ nın reel kısmı olan $\gamma(s)$ Frenet eğrisinin causal karakterine bağlı olduğu göz önüne alınarak Choi vd. (2012) deki Lemma 3.1 den aşağıdaki Lemma verildi.

Lemma 3.1. $\mathbb{D}_1^3$ dual Lorentz uzayında $\left|\frac{\widehat{\tau}}{\widehat{\kappa}}\right| = (1,0)$ eşitliğini sağlayan, timelike genel helis veya spacelike asli normale sahip spacelike genel helis yoktur.

Teorem 3.2. $\widehat{\gamma}(s)$, $\widehat{\kappa}$ dual eğrilik ve $\widehat{\tau}$ dual burulma fonksiyonlarına sahip $\mathbb{D}_1^3$ de Frenet eğrisi ve $\widehat{\gamma}_0(s)$ onun asli doğrultu eğrisi olsun. O zaman $\widehat{\gamma}_0$,

$$\widehat{\kappa}_0 = \sqrt{\widetilde{\varepsilon}_1\left(\varepsilon_0\widehat{\kappa}^2 + \varepsilon_2\widehat{\tau}^2\right)}, \quad \widehat{\tau}_0 = \frac{\widetilde{\varepsilon}_2\varepsilon_1\varepsilon_2\widehat{\kappa}^2}{\varepsilon_0\widehat{\kappa}^2+\varepsilon_2\widehat{\tau}^2}\frac{d}{d\widehat{s}}\left(\frac{\widehat{\tau}}{\widehat{\kappa}}\right) \tag{3.1}$$

ile verilen $\widehat{\kappa}_0$ dual eğrilik ve $\widehat{\tau}_0$ dual burulma fonksiyonlarına sahip null olmayan bir eğridir. Burada $\{t,n,b\}$ ve $\{t_0,n_0,b_0\}$ sırasıyla, γ ve γ_0 reel Frenet eğrilerinin Frenet çatıları olmak üzere $\varepsilon_0 =< t,t >$, $\varepsilon_1 =< n,n >$, $\varepsilon_2 =< b,b >$, $\widetilde{\varepsilon}_1 =< n_0,n_0 >$ ve $\widetilde{\varepsilon}_2 =< b_0,b_0 >$ dir.

İspat. $\widehat{\gamma}(s)$, $\widehat{\kappa}$ dual eğrilik ve $\widehat{\tau}$ dual burulma fonksiyonlarına sahip $\mathbb{D}_1^3$ de Frenet eğrisi ve $\widehat{\gamma}_0(s)$ onun asli doğrultu eğrisi olsun. O halde, $\widehat{t}_0 = \widehat{n}$ olduğundan $\frac{d\widehat{t}_0}{d\widehat{s}} = \frac{d\widehat{n}}{d\widehat{s}}$ olduğu açıktır ve (2.1) Frenet formülü göz önüne alınırsa

$$\frac{d\widehat{t}_0}{d\widehat{s}} = -\varepsilon_0\varepsilon_1\widehat{\kappa}\widehat{t} + \widehat{\tau}\widehat{b}$$

elde edilir. Böylece, $< \frac{d\widehat{t}_0}{d\widehat{s}}, \frac{d\widehat{t}_0}{d\widehat{s}} >= \varepsilon_0\widehat{\kappa}^2 + \varepsilon_2\widehat{\tau}^2$ eşitliğinden

$$\widehat{\kappa}_0^2 < \widehat{n}_0, \widehat{n}_0 >= \varepsilon_0\widehat{\kappa}^2 + \varepsilon_2\widehat{\tau}^2$$

olduğu görülür. Buradan,

$$< n_0, n_0 >= \frac{\varepsilon_0\kappa^2+\varepsilon_2\tau^2}{\kappa_0^2} \tag{3.2}$$

bulunur. Ayrıca $\widehat{\gamma}_0$ nın eğriliği

$$\widehat{\kappa}_0 = \sqrt{\widetilde{\varepsilon}_1\left(\varepsilon_0\widehat{\kappa}^2 + \varepsilon_2\widehat{\tau}^2\right)}$$

dir. O halde $\widehat{\gamma}_0$ boyunca dual Frenet vektörleri

$$\widehat{t}_0 = \widehat{n}, \ \widehat{n}_0 = \frac{-\varepsilon_0\varepsilon_1\widehat{\kappa}\widehat{t}+\widehat{\tau}\widehat{b}}{\sqrt{\widetilde{\varepsilon}_1\left(\varepsilon_0\widehat{\kappa}^2+\varepsilon_2\widehat{\tau}^2\right)}}, \ \widehat{b}_0 = \widetilde{\varepsilon}_0\widetilde{\varepsilon}_1\frac{\widehat{\kappa}\widehat{b}+\varepsilon_1\varepsilon_2\widehat{\tau}\widehat{t}}{\sqrt{\widetilde{\varepsilon}_1\left(\varepsilon_0\widehat{\kappa}^2+\varepsilon_2\widehat{\tau}^2\right)}} \tag{3.3}$$

ile verilir. (3.3) eşitliğinde $\widehat{b}_0$ ın $\widehat{s}$ ye göre türevi alınır ve $\widehat{\tau}_0 = -\widetilde{\varepsilon}_2 < \frac{d\widehat{b}_0}{d\widehat{s}}, \widehat{n}_0 >$ eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\widehat{\tau}_0 = -\widetilde{\varepsilon}_2 < \left(\varepsilon_0\varepsilon_2\frac{\widehat{\kappa}\left(\widehat{\kappa}\frac{d\widehat{\tau}}{d\widehat{s}}-\widehat{\tau}\frac{d\widehat{\kappa}}{d\widehat{s}}\right)}{\left(\widetilde{\varepsilon}_1\left(\varepsilon_0\widehat{\kappa}^2+\varepsilon_2\widehat{\tau}^2\right)\right)^{\frac{3}{2}}}\right)\widehat{t} - \left(\varepsilon_1\varepsilon_2\frac{\widehat{\tau}\left(\widehat{\kappa}\frac{d\widehat{\tau}}{d\widehat{s}}-\widehat{\tau}\frac{d\widehat{\kappa}}{d\widehat{s}}\right)}{\left(\widetilde{\varepsilon}_1\left(\varepsilon_0\widehat{\kappa}^2+\varepsilon_2\widehat{\tau}^2\right)\right)^{\frac{3}{2}}}\right)\widehat{b}, \frac{-\varepsilon_0\varepsilon_1\widehat{\kappa}\widehat{t}+\widehat{\tau}\widehat{b}}{\sqrt{\widetilde{\varepsilon}_1\left(\varepsilon_0\widehat{\kappa}^2+\varepsilon_2\widehat{\tau}^2\right)}} >$$

elde edilir. Böylece,

$$\widehat{\tau}_0 = \frac{\widetilde{\varepsilon}_2\varepsilon_1\varepsilon_2\widehat{\kappa}^2}{\varepsilon_0\widehat{\kappa}^2+\varepsilon_2\widehat{\tau}^2}\frac{d}{d\widehat{s}}\left(\frac{\widehat{\tau}}{\widehat{\kappa}}\right)$$

olduğu görülür.

Teorem 3.3. $\widehat{\gamma}(s)$, $\widehat{\kappa}$ dual eğrilik ve $\widehat{\tau}$ dual burulma fonksiyonlarına sahip $\mathbb{D}^3_1$ de spacelike asli normale sahip spacelike Frenet eğrisi ve aynı zamanda $\widehat{\kappa}_0$ dual eğrilik ve $\widehat{\tau}_0$ dual burulma fonksiyonlarına sahip $\widehat{\gamma}_0(s)$ eğrisinin asli donör eğrisi olsun. O zaman,

(a) Eğer $\kappa > |\tau|$ ise $\widehat{\gamma}_0$ spacelike asli normale sahip spacelike eğri ve $\widehat{\gamma}(s)$ nın dual eğrilik ve burulma fonksiyonları,

$$\widehat{\kappa}(s) = \widehat{\kappa}_0(s)\cosh(\int\widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s}), \quad \widehat{\tau}(s) = \widehat{\kappa}_0(s)\sinh(\int\widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s}) \tag{3.4}$$

dir.

(b) Eğer $\kappa < |\tau|$ ise $\widehat{\gamma}_0$ timelike asli normale sahip spacelike eğri ve $\widehat{\gamma}(s)$ nın dual eğrilik ve burulma fonksiyonları,

$$\widehat{\kappa}(s) = \widehat{\kappa}_0(s)\sinh(\int\widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s}), \quad \widehat{\tau}(s) = -\widehat{\kappa}_0(s)\cosh(\int\widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s}) \tag{3.5}$$

dir.

İspat. $\widehat{\gamma}(s)$, $\mathbb{D}^3_1$ de spacelike asli normale sahip spacelike Frenet eğrisi olsun. O halde $\widehat{\gamma}_0(s)$ nin spacelike eğri olduğu açıktır.

(a) Eğer $\kappa > |\tau|$ ise (3.2) eşitliğinden $\widehat{\gamma}_0$ spacelike asli normale sahip spacelike eğridir. O halde (3.1) eşitliğinden $\widehat{\gamma}_0$ ın dual eğrilik ve burulma fonksiyonlarının, sırasıyla,

$$\widehat{\kappa}_0^2=\widehat{\kappa}^2-\widehat{\tau}^2,\quad \widehat{\tau}_0=\frac{\widehat{\kappa}^2}{\widehat{\kappa}^2-\widehat{\tau}^2}\frac{d}{d\widehat{s}}\left(\frac{\widehat{\tau}}{\widehat{\kappa}}\right)' \tag{3.6}$$

olduğu görülür.

(3.6) nın ikinci denkleminde $\frac{\widehat{\tau}}{\widehat{\kappa}}$ yerine $\widehat{f}$ yazılırsa $\forall s\in\mathbb{R}$ için,

$$\widehat{\tau}_0(s)=\frac{1}{1-\left(\frac{\widehat{\tau}(s)}{\widehat{\kappa}(s)}\right)^2}\frac{d\widehat{f}(s)}{d\widehat{s}}=\frac{1}{1-\widehat{f}^2(s)}\frac{d\widehat{f}(s)}{d\widehat{s}}$$

olur. Burada $\widehat{f}(s)=f(s)+\xi f^*(s)=\frac{\tau}{\kappa}+\xi(\frac{\tau^*}{\kappa}-\frac{\tau\kappa^*}{\kappa^2})$ dir. Diğer taraftan, $\kappa>|\tau|$ olduğundan $|f(s)|<1$ dir. Böylece

$$\int\widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s}=\int\frac{\frac{d\widehat{f}(s)}{d\widehat{s}}}{1-\widehat{f}^2(s)}d\widehat{s}=\tanh^{-1}\widehat{f}(s)+\widehat{c}$$

dır. Burada $\widehat{c}$ bir dual sabittir. $\widehat{c}=0$ alınırsa $\widehat{f}(s)=\tanh\left(\int\widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s}\right)$ elde edilir. Elde edilen bu eşitlikte $\widehat{f}$ yerine $\frac{\widehat{\tau}}{\widehat{\kappa}}$ yazılırsa

$$\widehat{\tau}(s)=\tanh\left(\int\widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s}\right)\widehat{\kappa}(s)$$

bulunur. Bu eşitlik (3.6) eşitliğinin birinci denkleminde yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa (3.4) ün her iki eşitliği de elde edilir.

(b) Eğer $\kappa<|\tau|$ ise (3.2) eşitliğinden $\widehat{\gamma}_0$ timelike asli normale sahip spacelike eğridir. O halde (3.1) eşitliğinden $\widehat{\gamma}_0$ ın dual eğrilik ve burulma fonksiyonlarının sırasıyla,

$$\widehat{\kappa}_0^2=\widehat{\tau}^2-\widehat{\kappa}^2,\quad \widehat{\tau}_0=\frac{\widehat{\kappa}^2}{\widehat{\tau}^2-\widehat{\kappa}^2}\frac{d}{d\widehat{s}}\left(\frac{\widehat{\tau}}{\widehat{\kappa}}\right)' \tag{3.7}$$

olduğu görülür.

(3.7) nin ikinci denkleminde $\frac{\widehat{\tau}}{\widehat{\kappa}}$ yerine $\widehat{f}$ yazılırsa $\forall s\in\mathbb{R}$ için,

$$\widehat{\tau}_0(s)=\frac{1}{\left(\frac{\widehat{\tau}(s)}{\widehat{\kappa}(s)}\right)^2-1}\frac{d\widehat{f}(s)}{d\widehat{s}}=\frac{1}{\widehat{f}^2(s)-1}\frac{d\widehat{f}(s)}{d\widehat{s}}$$

olur. Diğer taraftan, $\kappa<|\tau|$ olduğundan $|f(s)|>1$ dir. Böylece

$$\int\widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s}=-\int\frac{\frac{d\widehat{f}(s)}{d\widehat{s}}}{1-\widehat{f}^2(s)}d\widehat{s}=-\coth^{-1}\widehat{f}(s)+\widehat{c}$$

dır. Burada $\widehat{c}$ bir dual sabittir. $\widehat{c}=0$ alınırsa $\widehat{f}(s)=-\coth\left(\int\widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s}\right)$ elde edilir. Elde edilen bu eşitlikte $\widehat{f}$ yerine $\frac{\widehat{\tau}}{\widehat{\kappa}}$ yazılırsa

$$\widehat{\tau}(s)=-\coth\left(\int\widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s}\right)\widehat{\kappa}(s)$$

bulunur. Bu eşitlik (3.7) eşitliğinin birinci denkleminde yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa (3.5) in her iki eşitliği de elde edilir.

Teorem 3.4. $\widehat{\gamma}(s)$, $\mathbb{D}_1^3$ de timelike asli normale sahip spacelike Frenet eğrisi ve aynı zamanda $\widehat{\kappa}_0$ dual eğrilik ve $\widehat{\tau}_0$ dual burulma fonksiyonlarına sahip $\widehat{\gamma}_0(s)$ Frenet eğrisinin asli donör eğrisi olsun. O zaman, $\widehat{\gamma}_0$ timelike eğri ve $\widehat{\gamma}(s)$ nın dual eğrilik ve burulma fonksiyonları,

$$\widehat{\kappa}(s) = \widehat{\kappa}_0(s)\cos(\int \widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s}), \qquad \widehat{\tau}(s) = -\widehat{\kappa}_0(s)\sin(\int \widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s}) \tag{3.8}$$

dir.

İspat. $\widehat{\gamma}(s)$, $\mathbb{D}_1^3$ de timelike asli normale sahip spacelike Frenet eğri ve aynı zamanda $\widehat{\kappa}_0$ dual eğrilik ve $\widehat{\tau}_0$ dual burulma fonksiyonlarına sahip $\widehat{\gamma}_0(s)$ Frenet eğrisinin asli donör eğrisi olsun. O zaman $\widehat{t}_0 = \widehat{n}$ olduğundan $\widehat{\gamma}_0(s)$ timelikedır. Ayrıca (3.1) eşitliğinden $\widehat{\gamma}_0$ ın dual eğrilik ve burulma fonksiyonlarının, sırasıyla,

$$\widehat{\kappa}_0^2 = \widehat{\kappa}^2 + \widehat{\tau}^2, \quad \widehat{\tau}_0 = \tfrac{-\widehat{\kappa}^2}{\widehat{\kappa}^2+\widehat{\tau}^2}\tfrac{d}{d\widehat{s}}\left(\tfrac{\widehat{\tau}}{\widehat{\kappa}}\right)' \tag{3.9}$$

olduğu görülür.

(3.9) un ikinci denkleminde $\frac{\widehat{\tau}}{\widehat{\kappa}}$ yerine $\widehat{f}$ yazılırsa $\forall s \in \mathbb{R}$ için,

$$\widehat{\tau}_0(s) = \frac{-1}{1+\left(\frac{\widehat{\tau}(s)}{\widehat{\kappa}(s)}\right)^2}\frac{d\widehat{f}(s)}{d\widehat{s}} = \frac{-1}{1+\widehat{f}^2(s)}\frac{d\widehat{f}(s)}{d\widehat{s}}$$

olur. Böylece,

$$\int \widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s} = -\int \frac{\frac{d\widehat{f}(s)}{d\widehat{s}}}{1+\widehat{f}^2(s)}d\widehat{s} = -\tan^{-1}\widehat{f}(s) + \widehat{c}$$

dır. Burada $\widehat{c}$ bir dual sabittir. $\widehat{c} = 0$ alınırsa $\widehat{f}(s) = -\tan\left(\int \widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s}\right)$ elde edilir. Elde edilen bu eşitlikte $\widehat{f}$ yerine $\frac{\widehat{\tau}}{\widehat{\kappa}}$ yazılırsa

$$\widehat{\tau}(s) = -\tanh\left(\int \widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s}\right)\widehat{\kappa}(s)$$

bulunur. Bu eşitlik (3.9) eşitliğinin birinci denkleminde yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa (3.8) in her iki eşitliği de elde edilir.

Teorem 3.5. $\widehat{\gamma}(s)$, $\widehat{\kappa}$ dual eğrilik ve $\widehat{\tau}$ dual burulma fonksiyonlarına sahip $\mathbb{D}_1^3$ de timelike Frenet eğrisi ve aynı zamanda $\widehat{\kappa}_0$ dual eğrilik ve $\widehat{\tau}_0$ dual burulma fonksiyonlarına sahip $\widehat{\gamma}_0(s)$ Frenet eğrisinin asli donör eğrisi olsun. O zaman,

(a) Eğer $\kappa < |\tau|$ ise $\widehat{\gamma}_0$ spacelike asli normale sahip spacelike Frenet eğrisi ve $\widehat{\gamma}(s)$ nın dual eğrilik ve burulma fonksiyonları,

$$\widehat{\kappa}(s) = \widehat{\kappa}_0(s)\sinh(\int \widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s}), \qquad \widehat{\tau}(s) = \widehat{\kappa}_0(s)\cosh(\int \widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s}) \tag{3.10}$$

dir.

(b) Eğer $\kappa > |\tau|$ ise $\widehat{\gamma}_0$ timelike asli normale sahip spacelike eğri ve $\widehat{\gamma}(s)$ nın dual eğrilik ve burulma fonksiyonları,

$$\widehat{\kappa}(s) = \widehat{\kappa}_0(s)\cosh(\int \widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s}), \quad \widehat{\tau}(s) = -\widehat{\kappa}_0(s)\sinh(\int \widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s}) \tag{3.11}$$

dir.

İspat. $\widehat{\gamma}(s)$, $\widehat{\kappa}$ dual eğrilik ve $\widehat{\tau}$ dual burulma fonksiyonlarına sahip $\mathbb{D}_1^3$ de timelike Frenet eğrisi ve aynı zamanda $\widehat{\kappa}_0$ dual eğrilik ve $\widehat{\tau}_0$ dual burulma fonksiyonlarına sahip $\widehat{\gamma}_0(s)$ Frenet eğrisinin asli donör eğrisi olsun. O zaman $\widehat{\gamma}_0(s)$, spacelike Frenet eğrisidir.

(a) Eğer $\kappa < |\tau|$ ise (3.2) eşitliğinden $\widehat{\gamma}_0$ spacelike asli normale sahip spacelike Frenet eğrisidir. O halde (3.1) eşitliğinden $\widehat{\gamma}_0$ ın dual eğrilik ve dual burulma fonksiyonlarının, sırasıyla,

$$\widehat{\kappa}_0^2 = \widehat{\tau}^2 - \widehat{\kappa}^2, \quad \widehat{\tau}_0 = -\frac{\widehat{\kappa}^2}{\widehat{\tau}^2-\widehat{\kappa}^2}\frac{d}{d\widehat{s}}\left(\frac{\widehat{\tau}}{\widehat{\kappa}}\right) \tag{3.12}$$

olduğu görülür.

(3.12) nin ikinci denkleminde $\frac{\widehat{\tau}}{\widehat{\kappa}}$ yerine $\widehat{f}$ yazılırsa $\forall s \in \mathbb{R}$ için,

$$\widehat{\tau}_0(s) = \frac{1}{1-\left(\frac{\widehat{\tau}(s)}{\widehat{\kappa}(s)}\right)^2}\frac{d\widehat{f}(s)}{d\widehat{s}} = \frac{1}{1-\widehat{f}^2(s)}\frac{d\widehat{f}(s)}{d\widehat{s}}$$

olur. Diğer taraftan, $\kappa < |\tau|$ olduğundan $|f(s)| > 1$ dir. Böylece

$$\int \widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s} = \int \frac{\frac{d\widehat{f}(s)}{d\widehat{s}}}{1-\widehat{f}^2(s)}d\widehat{s} = \coth^{-1}\widehat{f}(s) + \widehat{c}$$

dır. Burada $\widehat{c}$ bir dual sabittir. $\widehat{c} = 0$ alınırsa $\widehat{f}(s) = \coth\left(\int \widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s}\right)$ elde edilir. Elde edilen bu eşitlikte $\widehat{f}$ yerine $\frac{\widehat{\tau}}{\widehat{\kappa}}$ yazılırsa

$$\widehat{\tau}(s) = \coth\left(\int \widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s}\right)\widehat{\kappa}(s)$$

bulunur. Bu eşitlik (3.12) eşitliğinin birinci denkleminde yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa (3.10) un her iki eşitliği de elde edilir.

(b) Eğer $\kappa > |\tau|$ ise (3.2) eşitliğinden $\widehat{\gamma}_0$ timelike asli normale sahip spacelike Frenet eğrisidir. O halde (3.1) eşitliğinden $\widehat{\gamma}_0$ ın dual eğrilik ve burulma fonksiyonlarının sırasıyla,

$$\widehat{\kappa}_0^2 = \widehat{\kappa}^2 - \widehat{\tau}^2, \quad \widehat{\tau}_0 = \frac{-\widehat{\kappa}^2}{\widehat{\kappa}^2-\widehat{\tau}^2}\frac{d}{d\widehat{s}}\left(\frac{\widehat{\tau}}{\widehat{\kappa}}\right) \tag{3.13}$$

olduğu görülür.

(3.13) ün ikinci denkleminde $\frac{\widehat{\tau}}{\widehat{\kappa}}$ yerine $\widehat{f}$ yazılırsa $\forall s \in \mathbb{R}$ için,

$\widehat{\tau}_0(s) = \frac{-1}{1-\left(\frac{\widehat{\tau}(s)}{\widehat{\kappa}(s)}\right)^2}\frac{d\widehat{f}(s)}{d\widehat{s}} = \frac{-1}{1-\widehat{f}^2(s)}\frac{d\widehat{f}(s)}{d\widehat{s}}$

olur. Diğer taraftan, $\kappa > |\tau|$ olduğundan $|f(s)| < 1$ dir. Böylece

$\int \widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s} = -\int \frac{\frac{d\widehat{f}(s)}{d\widehat{s}}}{1-\widehat{f}^2(s)}d\widehat{s} = -\tanh^{-1}\widehat{f}(s) + \widehat{c}$

dır. Burada $\widehat{c}$ bir dual sabittir. $\widehat{c} = 0$ alınırsa $\widehat{f}(s) = -\tanh\left(\int \widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s}\right)$ elde edilir. Elde edilen bu eşitlikte $\widehat{f}$ yerine $\frac{\widehat{\tau}}{\widehat{\kappa}}$ yazılırsa

$\widehat{\tau}(s) = -\tanh\left(\int \widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s}\right)\widehat{\kappa}(s)$

bulunur. Bu eşitlik (3.13) eşitliğinin birinci denkleminde yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa (3.11) in her iki eşitliği de elde edilir.

4. DUAL LORENTZ UZAYINDA GENEL HELİSLERİN ASLİ DOĞRULTU EĞRİLERİ

Bu bölümde, $\mathbb{D}_1^3$ dual Lorentz uzayında genel helislerin asli doğrultu eğrileri çalışıldı.

Lemma 4.1. $\widehat{\gamma}$, $\mathbb{D}_1^3$ dual Lorentz uzayında Frenet eğrisi genel helistir ancak ve ancak $\widehat{\gamma}$ nın asli doğrultu eğrisi olan $\widehat{\gamma}_0$ bir düzlemsel eğridir.

İspat. Lemmanın ispatı yalnızca timelike asli normale sahip spacelike Frenet eğrisi için verilecektir.

$(\Rightarrow)$ $\widehat{\gamma}(s)$, $\widehat{\kappa}$ dual eğrilik ve $\widehat{\tau}$ dual burulma fonksiyonlarına sahip $\mathbb{D}_1^3$ de timelike asli normale sahip spacelike bir genel helis ve $\widehat{\gamma}_0(s)$, $\widehat{\gamma}(s)$ nın asli doğrultu eğrisi olsun. O zaman Teorem 3.4 den $\frac{\widehat{\tau}}{\widehat{\kappa}} = -\tan\left(\int \widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s}\right)$ dır. Bu eşitliğin her iki tarafının $\widehat{s}$ dual yay uzunluğu parametresine göre türevi alınırsa

$$\frac{d}{d\widehat{s}}\left(\frac{\widehat{\tau}}{\widehat{\kappa}}\right) = -\widehat{\tau}_0(s)\sec^2\left(\int \widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s}\right) = 0$$

olur. $\sec^2\left(\int \widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s}\right) \neq 0$ olduğundan $\widehat{\tau}_0(s) = 0$ dır. Yani $\widehat{\gamma}_0$ bir düzlemsel eğridir.

$(\Leftarrow)$ $\widehat{\gamma}$ nın asli doğrultu eğrisi olan $\widehat{\gamma}_0$ bir düzlemsel eğri olsun. O halde $\widehat{\tau}_0 = 0$ dır. Teorem 3.2 den $\widehat{\tau}_0 = \frac{-\widehat{\kappa}^2}{\widehat{\kappa}^2+\widehat{\tau}^2}\frac{d}{d\widehat{s}}\left(\frac{\widehat{\tau}}{\widehat{\kappa}}\right) = 0$ olur. $\widehat{\kappa} \neq 0$ olduğundan $\frac{d}{d\widehat{s}}\left(\frac{\widehat{\tau}}{\widehat{\kappa}}\right) = 0$ yani $\frac{\widehat{\tau}}{\widehat{\kappa}}$ bir dual sabittir. Dolayısıyla $\widehat{\gamma}$, bir genel helistir.

Benzer şekilde $\widehat{\gamma}$ Frenet eğrisinin spacelike asli normale sahip spacelike genel helis veya timelike genel helis olduğu durumlarda da ispat yapılır.

Şimdi $\mathbb{D}_1^3$ de genel helislerin inşasında kullanılacak olan düzlemsel eğriler için aşağıdaki lemmalar verilsin:

Lemma 4.2. $\mathbb{D}_1^3$ de $\widehat{\kappa}(s)$ dual eğrilik fonksiyonu ve $\widehat{n}$ asli normal vektörüne sahip spacelike düzlemsel Frenet eğrisinin $\widehat{\gamma}$ konum vektörü,

i) $\widehat{n}$ asli normal vektörü spacelike ise,

$$\widehat{\gamma}(s) = \int \left(0, \cos\left(\int \widehat{\kappa}(s)d\widehat{s}\right), \sin\left(\int \widehat{\kappa}(s)d\widehat{s}\right)\right) d\widehat{s} \tag{4.1}$$

dir.

ii) $\widehat{n}$ asli normal vektörü timelike ise,

$$\widehat{\gamma}(s)=\int\left(\sinh\left(\int\widehat{\kappa}(s)d\widehat{s}\right),\cosh\left(\int\widehat{\kappa}(s)d\widehat{s}\right),0\right)d\widehat{s} \tag{4.2}$$

dir.

İspat. $\widehat{\gamma}$, $\mathbb{D}_1^3$ de $\widehat{\kappa}(s)$ dual eğrilik fonksiyonu ve $\widehat{t}$ dual birim teğet vektörüne sahip spacelike düzlemsel Frenet eğrisi olsun. e_1, e_2, e_3 birim vektörler olmak üzere $\widehat{t}$ dual birim teğet vektörü

$$\widehat{t}(s)=(\widehat{t}_1(s),\widehat{t}_2(s),\widehat{t}_3(s))=\widehat{t}_1(s)e_1+\widehat{t}_2(s)e_2+\widehat{t}_3(s)e_3$$

veya

$$\begin{aligned}\widehat{t}(s) &= (t_1(s)+\xi t_1^*(s),t_2(s)+\xi t_2^*(s),t_3(s)+\xi t_3^*(s))\\ &= (t_1(s),t_2(s),t_3(s))+\xi(t_1^*(s),t_2^*(s),t_3^*(s))\\ &= t_1(s)e_1+t_2(s)e_2+t_3(s)e_3+\xi(t_1^*(s)e_1+t_2^*(s)e_2+t_3^*(s)e_3)\end{aligned}$$

biçiminde yazılabilir. $\widehat{\gamma}$ Frenet eğrisi spacelike olduğundan $\langle\widehat{t},\widehat{t}\rangle=(1,0)$ yani $\langle t,t\rangle=1$ ve $\langle t,t^*\rangle=0$ dır. $(-\widehat{t}_1^2+\widehat{t}_2^2+\widehat{t}_3^2=(1,0)$ yani $-t_1^2+t_2^2+t_3^2=1$ ve $-t_1t_1^*+t_2t_2^*+t_3t_3^*=0)$. Diğer taraftan (2.1) den $\widehat{n}=\frac{\frac{d\widehat{t}}{d\widehat{s}}}{\widehat{\kappa}}$ ve $\widehat{\theta}=\int\widehat{\kappa}(s)d\widehat{s}$ şeklinde tanımlı $\widehat{\theta}$ dual açısı göz önüne alınırsa,

i) $\widehat{n}$ dual birim asli normal vektörü spacelike ise,

$$\widehat{t}(s)=\left(0,\cos\widehat{\theta},\sin\widehat{\theta}\right)$$

dir ve $\widehat{t}(s)=\frac{d\widehat{\gamma}(s)}{d\widehat{s}}$ olduğundan $\widehat{\gamma}$ nın konum vektörünün (4.1) olduğu görülür.

ii) $\widehat{n}$ dual birim asli normal vektörü timelike ise,

$$\widehat{t}(s)=\left(\sinh\widehat{\theta},\cosh\widehat{\theta},0\right)$$

dir ve $\widehat{t}(s)=\frac{d\widehat{\gamma}(s)}{d\widehat{s}}$ olduğundan $\widehat{\gamma}$ nın konum vektörü (4.2) şeklinde elde edilir.

Lemma 4.3. $\mathbb{D}_1^3$ de $\widehat{\kappa}(s)$ dual eğrilik fonksiyonuna sahip timelike düzlemsel Frenet eğrisinin konum vektörü,

$$\widehat{\gamma}(s)=\int\left(\cosh\left(\int\widehat{\kappa}(s)d\widehat{s}\right),\sinh\left(\int\widehat{\kappa}(s)d\widehat{s}\right),0\right)d\widehat{s} \tag{4.3}$$

biçimindedir.

İspat. $\widehat{\gamma}$, $\mathbb{D}_1^3$ de $\widehat{\kappa}(s)$ dual eğrilik fonksiyonuna ve $\widehat{t}$ dual birim dual teğet vektörüne sahip timelike düzlemsel Frenet eğrisi olsun. e_1, e_2, e_3 birim vektörler olmak üzere $\widehat{t}$ dual birim teğet vektörü

$$\widehat{t}(s) = (\widehat{t}_1(s), \widehat{t}_2(s), \widehat{t}_3(s)) = \widehat{t}_1(s)e_1 + \widehat{t}_2(s)e_2 + \widehat{t}_3(s)e_3$$

veya

$$\widehat{t}(s) = t_1(s)e_1 + t_2(s)e_2 + t_3(s)e_3 + \xi(t_1^*(s)e_1 + t_2^*(s)e_2 + t_3^*(s)e_3)$$

biçiminde yazılabilir. $\widehat{\gamma}$ timelike olduğundan $\langle \widehat{t}, \widehat{t} \rangle = (-1, 0)$ yani $\langle t, t \rangle = -1$ ve $\langle t, t^* \rangle = 0$ dır. $(-\widehat{t}_1^2 + \widehat{t}_2^2 + \widehat{t}_3^2 = (-1, 0)$ yani $-t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 = -1$ ve $-t_1 t_1^* + t_2 t_2^* + t_3 t_3^* = 0)$. Diğer taraftan (2.1) den $\widehat{n} = \frac{\frac{d\widehat{t}}{d\widehat{s}}}{\widehat{\kappa}}$ ve $\widehat{\theta} = \displaystyle\int \widehat{\kappa}(s) d\widehat{s}$ şeklinde tanımlı $\widehat{\theta}$ dual açısı göz önüne alınırsa,

$$\widehat{t}(s) = \left(\cosh \widehat{\theta}, \sinh \widehat{\theta}, 0\right)$$

dir ve $\widehat{t}(s) = \frac{d\widehat{\gamma}(s)}{d\widehat{s}}$ olduğundan $\widehat{\gamma}$ nın konum vektörü (4.3) şeklinde bulunur.

$\mathbb{D}_1^3$ de düzlemsel eğriler için verilen yukarıdaki lemmalar ve Teorem 3.2 yardımıyla sırasıyla aşağıdaki üç önemli lemma verilecek:

Lemma 4.4. $\widehat{\gamma}$, $\widehat{\kappa} = \widehat{\kappa}(s)$ sırf dual olmayan eğrilik olmak üzere $\widehat{\tau} = \widehat{m}\widehat{\kappa}(s)$ dual burulması ile spacelike dual asli normale sahip spacelike bir genel helis olsun.

(a) Eğer $\frac{|\tau|}{\kappa} = |m| < 1$ ise $\widehat{\gamma}$,

$$\begin{aligned} \widehat{\gamma}(s) = \frac{1}{\sqrt{1-\widehat{m}^2}} \int \Bigg(\widehat{m},\ & \sin\left(\sqrt{1-\widehat{m}^2} \int \widehat{\kappa}(s) d\widehat{s}\right), \\ & -\cos\left(\sqrt{1-\widehat{m}^2} \int \widehat{\kappa}(s) d\widehat{s}\right)\Bigg) d\widehat{s} \end{aligned} \tag{4.4}$$

ile yerel olarak ifade edilir ve $\widehat{\gamma}$ nın asli doğrultu eğrisi $\widehat{\gamma}_0$, $\mathbb{D}^2$ de spacelike dual asli normale sahip bir spacelike düzlemsel eğridir.

(b) Eğer $\frac{|\tau|}{\kappa} = |m| > 1$ ise $\widehat{\gamma}$,

$$\begin{aligned} \widehat{\gamma}(s) = \frac{1}{\sqrt{\widehat{m}^2-1}} \int \Bigg(& \cosh\left(\sqrt{\widehat{m}^2 - 1} \int \widehat{\kappa}(s) d\widehat{s}\right), \\ & \sinh\left(\sqrt{\widehat{m}^2 - 1} \int \widehat{\kappa}(s) d\widehat{s}\right), \widehat{m}\Bigg) d\widehat{s} \end{aligned} \tag{4.5}$$

ile yerel olarak ifade edilir ve $\widehat{\gamma}$ nın asli doğrultu eğrisi $\widehat{\gamma}_0$, $\mathbb{D}_1^2$ de timelike dual asli normale sahip bir spacelike düzlemsel eğridir.

İspat. (a) *durumunda*; $\mathbb{D}^2 \subset \mathbb{D}^3_1$ de $\widehat{\kappa}_0 = \widehat{\kappa}_0(s)$ sırf dual olmayan eğrilik fonksiyonu ile spacelike dual asli normale sahip bir spacelike düzlemsel $\widehat{\gamma}_0(s)$ eğrisinin konum vektörü (4.1) ile verildi. O halde $\widehat{\gamma}_0$,

$$\begin{cases} \widehat{t}_0(s) = \left(0, \cos\left[\int \widehat{\kappa}_0(s)d\widehat{s}\right], \sin\left[\int \widehat{\kappa}_0(s)d\widehat{s}\right]\right) \\ \widehat{n}_0(s) = \left(0, -\sin\left[\int \widehat{\kappa}_0(s)d\widehat{s}\right], \cos\left[\int \widehat{\kappa}_0(s)d\widehat{s}\right]\right) \\ \widehat{b}_0(s) = (1,0,0) \end{cases} \tag{4.6}$$

dual Frenet vektörlerine sahiptir. (3.1) eşitliği ve $\kappa > |\tau|$ olduğundan $0 < |m| < 1$ dir. Böylece $\widehat{\gamma}$ için,

$$\widehat{\kappa}(s) = \frac{\widehat{\kappa}_0(s)}{\sqrt{1-\widehat{m}^2}}, \qquad \widehat{\tau}(s) = \widehat{m}\widehat{\kappa}(s)$$

dir. Eğer $\widehat{\kappa}_0 = \widehat{\kappa}\sqrt{1-\widehat{m}^2}$ eşitliği göz önüne alınır ve (3.3) denklemi düzenlenerek çözülürse $\widehat{t}$ dual teğet vektörünün

$$\begin{aligned} \widehat{t} &= \frac{-1}{\sqrt{1-\widehat{m}^2}}\widehat{n}_0 + \frac{\widehat{m}}{\sqrt{1-\widehat{m}^2}}\widehat{b}_0 \\ \widehat{t} &= \frac{1}{\sqrt{1-\widehat{m}^2}}\left(\widehat{m}, \sin\left[\sqrt{1-\widehat{m}^2}\int \widehat{\kappa}(s)d\widehat{s}\right], -\cos\left[\sqrt{1-\widehat{m}^2}\int \widehat{\kappa}(s)d\widehat{s}\right]\right) \end{aligned} \tag{4.7}$$

olduğu görülür. Dolayısıyla $\frac{|\tau|}{\kappa} = |m| < 1$ ise $\mathbb{D}^3_1$ de spacelike dual asli normale sahip spacelike genel helis $\widehat{\gamma}$, (4.4) ile verilir.

(b) *durumunda*; $\mathbb{D}^2_1 \subset \mathbb{D}^3_1$ de $\widehat{\kappa}_0 = \widehat{\kappa}_0(s)$ sırf dual olmayan eğrilik fonksiyonu ile dual timelike asli normale sahip bir spacelike düzlemsel $\widehat{\gamma}_0(s)$ eğrisinin konum vektörü (4.2) ile verildi. O halde $\widehat{\gamma}_0$,

$$\begin{cases} \widehat{t}_0(s) = \left(\sinh\left[\int \widehat{\kappa}_0(s)d\widehat{s}\right], \cosh\left[\int \widehat{\kappa}_0(s)d\widehat{s}\right], 0\right) \\ \widehat{n}_0(s) = \left(\cosh\left[\int \widehat{\kappa}_0(s)d\widehat{s}\right], \sinh\left[\int \widehat{\kappa}_0(s)d\widehat{s}\right], 0\right) \\ \widehat{b}_0(s) = (0,0,1) \end{cases} \tag{4.8}$$

dual Frenet vektörlerine sahiptir. (3.1) eşitliği ve $|\tau| > \kappa$ olduğundan, $|m| > 1$ dir. Böylece $\widehat{\gamma}$ için,

$$\widehat{\kappa}(s) = \frac{\widehat{\kappa}_0(s)}{\sqrt{\widehat{m}^2-1}}, \qquad \widehat{\tau}(s) = \widehat{m}\widehat{\kappa}(s)$$

dir. Eğer $\widehat{\kappa}_0 = \widehat{\kappa}\sqrt{\widehat{m}^2-1}$ eşitliği göz önüne alınır ve (3.3) denklemi düzenlenerek çözülürse $\widehat{t}$ dual teğet vektörünün

$$\begin{aligned} \widehat{t} &= \frac{1}{\sqrt{\widehat{m}^2-1}}\widehat{n}_0 + \frac{\widehat{m}}{\sqrt{\widehat{m}^2-1}}\widehat{b}_0 \\ \widehat{t} &= \frac{1}{\sqrt{\widehat{m}^2-1}}\left(\cosh\left[\sqrt{\widehat{m}^2-1}\int \widehat{\kappa}(s)d\widehat{s}\right], \sinh\left[\sqrt{\widehat{m}^2-1}\int \widehat{\kappa}(s)d\widehat{s}\right], \widehat{m}\right) \end{aligned} \tag{4.9}$$

olduğu görülür. Dolayısıyla $\frac{|\tau|}{\kappa} = |m| > 1$ ise $\mathbb{D}_1^3$ de spacelike dual asli normale sahip spacelike genel helis $\widehat{\gamma}$, (4.5) ile verilir.

Lemma 4.5. $\mathbb{D}_1^3$ de $\widehat{\kappa} = \widehat{\kappa}(s)$ ve $\widehat{\tau} = \widehat{m}\widehat{\kappa}(s)$ eşitlikleri ile timelike dual asli normale sahip spacelike genel helis $\widehat{\gamma}$, yerel olarak,

$$\begin{aligned} \widehat{\gamma}(s) = \frac{1}{\sqrt{1+\widehat{m}^2}} \int \Bigg(& \sinh\left[\sqrt{1+\widehat{m}^2}\int \widehat{\kappa}(s)d\widehat{s}\right], \\ & \cosh\left[\sqrt{1+\widehat{m}^2}\int \widehat{\kappa}(s)d\widehat{s}\right], \ -\widehat{m}\Bigg) d\widehat{s} \end{aligned} \tag{4.10}$$

ile ifade edilir ve $\widehat{\gamma}$ nın asli doğrultu eğrisi $\widehat{\gamma}_0$, $\mathbb{D}_1^2$ de bir timelike düzlemsel eğridir.

İspat. $\mathbb{D}_1^2 \subset \mathbb{D}_1^3$ de $\widehat{\kappa}_0 = \widehat{\kappa}_0(s)$ sırf dual olmayan eğrilik fonksiyonu ile bir timelike düzlemsel $\widehat{\gamma}_0(s)$ eğrisinin konum vektörü (4.3) ile verildi. O halde $\widehat{\gamma}_0$,

$$\begin{cases} \widehat{t}_0(s) = \left(\cosh\left[\int \widehat{\kappa}_0(s)d\widehat{s}\right], \sinh\left[\int \widehat{\kappa}_0(s)d\widehat{s}\right], 0\right), \\ \widehat{n}_0(s) = \left(\sinh\left[\int \widehat{\kappa}_0(s)d\widehat{s}\right], \cosh\left[\int \widehat{\kappa}_0(s)d\widehat{s}\right], 0\right) \\ \widehat{b}_0(s) = (0, 0, -1). \end{cases}$$

dual Frenet vektörlerine sahiptir. (3.1) ve $\frac{\widehat{\tau}}{\widehat{\kappa}} = \widehat{m}$ eşitlikleri göz önüne alınırsa $\widehat{\gamma}$ için,

$$\widehat{\kappa}(s) = \frac{\widehat{\kappa}_0(s)}{\sqrt{1+\widehat{m}^2}}, \qquad \widehat{\tau}(s) = \widehat{m}\widehat{\kappa}(s)$$

olduğu görülür. Eğer $\widehat{\kappa}_0(s) = \widehat{\kappa}(s)\sqrt{\widehat{m}^2+1}$ alınır ve (3.3) eşitliği çözülürse $\widehat{t}$ dual birim teğet vektörü,

$$\widehat{t} = \frac{\widehat{n}_0 + \widehat{m}\widehat{b}_0}{\sqrt{1+\widehat{m}^2}}$$

$$\widehat{t} = \frac{1}{\sqrt{1+\widehat{m}^2}}\left(\sinh\left[\sqrt{1+\widehat{m}^2}\int \widehat{\kappa}(s)d\widehat{s}\right], \cosh\left[\sqrt{1+\widehat{m}^2}\int \widehat{\kappa}(s)d\widehat{s}, -\widehat{m}\right]\right)$$

şeklinde elde edilir. Dolayısıyla, $\mathbb{D}_1^3$ de timelike dual asli normale sahip $\widehat{\gamma}$ spacelike genel helis (4.10) ile verilir.

Lemma 4.6. $\widehat{\gamma}$, $\mathbb{D}_1^3$ de $\widehat{\kappa} = \widehat{\kappa}(s)$ ve $\widehat{\tau} = \widehat{m}\widehat{\kappa}(s)$ eşitlikleri ile timelike genel helis olsun.

(*a*) Eğer $\frac{|\tau|}{\kappa} = |m| > 1$ ise $\widehat{\gamma}$,

$$\widehat{\gamma}(s) = \frac{1}{\sqrt{\widehat{m}^2-1}}\left(\widehat{m}, \sin\left[\sqrt{\widehat{m}^2-1}\int \widehat{\kappa}(s)d\widehat{s}\right], -\cos\left[\sqrt{\widehat{m}^2-1}\int \widehat{\kappa}(s)d\widehat{s}\right]\right) \tag{4.11}$$

ile yerel olarak ifade edilen ve onun asli doğrultu eğrisi $\widehat{\gamma}_0$, $\mathbb{D}^2$ de spacelike dual asli normale sahip spacelike düzlemsel eğrisidir.

(b) Eğer $\frac{|\tau|}{\kappa} = |m| < 1$ ise $\widehat{\gamma}$,

$$\widehat{\gamma}(s) = \frac{1}{\sqrt{1-\widehat{m}^2}} \int \left(\cosh\left[\sqrt{1-\widehat{m}^2}\int \widehat{\kappa}(s)d\widehat{s}\right], \sinh\left[\sqrt{1-\widehat{m}^2}\int \widehat{\kappa}(s)d\widehat{s}\right], \widehat{m}\right) d\widehat{s} \quad (4.12)$$

ile yerel olarak ifade edilen ve onun asli doğrultu eğrisi $\widehat{\gamma}_0$, $\mathbb{D}^2_1$ de timelike dual asli normale sahip spacelike düzlemsel eğridir.

İspat. (a) *durumunda*; $\mathbb{D}^2 \subset \mathbb{D}^3_1$ de $\widehat{\kappa}_0 = \widehat{\kappa}_0(s)$ sırf dual olmayan eğrilik fonksiyonu ile spacelike dual asli normale sahip spacelike bir düzlemsel eğrinin $\widehat{\gamma}_0(s)$ konum vektörü (4.1) ile verildi. O halde $\widehat{\gamma}_0$,

$$\begin{cases} \widehat{t}_0(s) = \left(0, \cos\left[\int \widehat{\kappa}_0(s)d\widehat{s}\right], \sin\left[\int \widehat{\kappa}_0(s)d\widehat{s}\right]\right) \\ \widehat{n}_0(s) = \left(0, -\sin\left[\int \widehat{\kappa}_0(s)d\widehat{s}\right], \cos\left[\int \widehat{\kappa}_0(s)d\widehat{s}\right]\right) \\ \widehat{b}_0(s) = (1,0,0) \end{cases}$$

dual Frenet vektörlerine sahiptir. (3.1) eşitliği ve $|\tau| > \kappa$ olduğundan $|m| > 1$ dir. Böylece $\widehat{\gamma}$ için,

$$\widehat{\kappa}(s) = \frac{\widehat{\kappa}_0(s)}{\sqrt{\widehat{m}^2-1}}, \qquad \widehat{\tau}(s) = \widehat{m}\widehat{\kappa}(s)$$

dir. Eğer $\widehat{\kappa}_0(s) = \widehat{\kappa}(s)\sqrt{\widehat{m}^2-1}$ eşitliği göz önüne alınır ve (3.3) denklemi çözülürse $\widehat{t}$ dual birim teğet vektörünün

$$\widehat{t} = \frac{-1}{\sqrt{\widehat{m}^2-1}}\widehat{n}_0 + \frac{\widehat{m}}{\sqrt{\widehat{m}^2-1}}\widehat{b}_0$$

$$\widehat{t} = \frac{1}{\sqrt{\widehat{m}^2-1}}\left(\widehat{m}, \sin\left[\sqrt{\widehat{m}^2-1}\int \widehat{\kappa}(s)d\widehat{s}\right], -\cos\left[\sqrt{\widehat{m}^2-1}\int \widehat{\kappa}(s)d\widehat{s}\right]\right)$$

olduğu görülür. Dolayısıyla $\frac{|\tau|}{\kappa} = |m| > 1$ ise $\mathbb{D}^3_1$ de spacelike dual asli normale sahip spacelike genel helis $\widehat{\gamma}$, (4.11) ile verilir.

(b) *durumunda*; $\mathbb{D}^2 \subset \mathbb{D}^3_1$ de $\widehat{\kappa}_0 = \widehat{\kappa}_0(s)$ sırf dual olmayan eğrilik fonksiyonu ile timelike dual asli normale sahip bir spacelike düzlemsel eğrinin $\widehat{\gamma}_0(s)$ konum vektörü (4.2) ile verildi. O halde, $\widehat{\gamma}_0$,

$$\begin{cases} \widehat{t}_0(s) = \left(\sinh\left[\int \widehat{\kappa}_0(s)d\widehat{s}\right], \cosh\left[\int \widehat{\kappa}_0(s)d\widehat{s}\right], 0\right) \\ \widehat{n}_0(s) = \left(\cosh\left[\int \widehat{\kappa}_0(s)d\widehat{s}\right], \sinh\left[\int \widehat{\kappa}_0(s)d\widehat{s}\right], 0\right) \\ \widehat{b}_0(s) = (0,0,1) \end{cases}$$

dual Frenet vektörlerine sahiptir. (3.1) eşitliği ve $|\tau| < \kappa$ olduğundan $|m| < 1$ dir. Böylece, $\widehat{\gamma}$ için,

$\widehat{\kappa}(s) = \frac{\widehat{\kappa}_0(s)}{\sqrt{1-\widehat{m}^2}}, \qquad \widehat{\tau}(s) = \widehat{m}\widehat{\kappa}(s)$

dir. Eğer $\widehat{\kappa}_0(s) = \widehat{\kappa}(s)\sqrt{1-\widehat{m}^2}$ eşitliği göz önüne alınır ve (3.3) denklemi çözülürse $\widehat{t}$ dual birim teğet vektörünün

$$\widehat{t} = \frac{1}{\sqrt{1-\widehat{m}^2}}\widehat{n}_0 + \frac{\widehat{m}}{\sqrt{1-\widehat{m}^2}}\widehat{b}_0$$
$$\widehat{t} = \frac{1}{\sqrt{1-\widehat{m}^2}}\left(\cosh\left[\sqrt{1-\widehat{m}^2}\int\widehat{\kappa}(s)d\widehat{s}\right], \sinh\left[\sqrt{1-\widehat{m}^2}\int\widehat{\kappa}(s)d\widehat{s}\right], \widehat{m}\right)$$

olduğu görülür. Dolayısıyla, $\frac{|\tau|}{\kappa} = |m| < 1$ ise $\mathbb{D}_1^3$ de spacelike dual asli normale sahip spacelike genel helis $\widehat{\gamma}$, (4.12) ile verilir.

Yukarıdaki üç lemmadan yola çıkarak aşağıdaki üç sonuç elde edilir:

Sonuç 4.7. $\widehat{\gamma}$, $\mathbb{D}_1^3$ de spacelike dual asli normale sahip spacelike Frenet eğrisi ve $\widehat{\gamma}_0$, $\widehat{\gamma}$ nın spacelike asli doğrultu eğrisi olsun. O halde, asli doğrultu eğrisi $\widehat{\gamma}_0$, $\mathbb{D}^2$ veya $\mathbb{D}_1^2$ de düzlemsel Frenet eğrisidir ancak ve ancak $\widehat{\gamma}$, sırasıyla $\kappa > |\tau|$ veya $\kappa < |\tau|$ eşitsizlikleri ile bir genel helistir. Ayrıca $\widehat{\gamma}_0$, $\mathbb{D}^2$ de bir çember veya $\mathbb{D}_1^2$ de bir spacelike hiperboldür ancak ve ancak $\widehat{\gamma}$, sırasıyla $\kappa > |\tau|$ veya $\kappa < |\tau|$ ile bir helistir.

Sonuç 4.8. $\widehat{\gamma}$, $\mathbb{D}_1^3$ de timelike dual asli normale sahip spacelike Frenet eğrisi ve $\widehat{\gamma}_0$, $\widehat{\gamma}$ nın timelike asli doğrultu eğrisi olsun. O halde, $\widehat{\gamma}_0$ asli doğrultu eğrisi düzlemsel Frenet eğridir ancak ve ancak $\widehat{\gamma}$, bir genel helistir. Ayrıca $\widehat{\gamma}_0$, bir timelike hiperboldür ancak ve ancak $\widehat{\gamma}$ bir helistir.

Sonuç 4.9. $\widehat{\gamma}$, $\mathbb{D}_1^3$ de timelike Frenet eğrisi ve $\widehat{\gamma}_0$, $\widehat{\gamma}$ nın spacelike asli doğrultu eğrisi olsun. O halde, $\widehat{\gamma}_0$ asli doğrultu eğrisi $\mathbb{D}^2$ veya $\mathbb{D}_1^2$ de düzlemsel Frenet eğridir ancak ve ancak $\widehat{\gamma}$, sırasıyla $\kappa < |\tau|$ veya $\kappa > |\tau|$ eşitsizlikleri ile bir genel helistir. Ayrıca $\widehat{\gamma}_0$, $\mathbb{D}^2$ de bir çember veya $\mathbb{D}_1^2$ de bir spacelike hiperboldür ancak ve ancak $\widehat{\gamma}$, sırasıyla $\kappa < |\tau|$ veya $\kappa > |\tau|$ ile bir helistir.

Sonuç olarak $\mathbb{D}_1^3$ dual Lorentz uzayında bağlantılı eğriye göre genel helisler aşağıdaki şekilde karakterize edilir.

Teorem 4.11. $\mathbb{D}_1^3$ de genel helis bazı düzlemsel eğrilerin asli donör eğrisidir.

5. DUAL LORENTZ UZAYINDA SLANT HELİSLERİN ASLİ DOĞRULTU EĞRİLERİ

Bu bölümde, $\mathbb{D}_1^3$ dual Lorentz uzayında slant helislerin causal karakterlerine göre asli doğrultu eğrileri olan genel helisler incelendi. Bunun için öncelikle genel helisler ve slant helisler arasındaki bağlantı asli doğrultu ve asli donör eğri kavramları kullanılarak aşağıdaki şekilde ifade edildi:

$\widehat{\gamma} = \widehat{\gamma}(s)$, $\mathbb{D}_1^3$ dual Lorentz uzayında dual birim hızlı Frenet eğrisi ve $\widehat{W} = \widehat{W}(s)$, $\widehat{\gamma}$ boyunca dual birim vektör olsun. Eğer $\widehat{W}$, $\widehat{\gamma}$ boyunca $\mathbb{D}_1^3$ ün bir $\widehat{v}$ sabit dual vektörü ile sabit bir dual açıya sahipse o zaman $\widehat{\gamma}$ nın $\widehat{W}-$doğrultu eğrisi olan $\widehat{\gamma}_0$ nın dual teğet vektörü de $\widehat{\gamma}_0$ boyunca $\widehat{v}$ ile sabit dual açıya sahiptir. Tersine, $\mathbb{D}_1^3$ deki $\widehat{\gamma}_0$ Frenet eğrisinin dual birim teğet vektörü $\mathbb{D}_1^3$ deki $\widehat{v}$ sabit dual vektörü ile sabit dual açı yapıyorsa o zaman $\widehat{\gamma}$, $\widehat{\gamma}_0$ boyunca $\widehat{v}$ dual vektörü ile sabit dual açı yapan $\widehat{\gamma}_0$ ın $\widehat{W}-$donör Frenet eğrisidir.

Yukarıda verilen ifadede $\widehat{\gamma}$ boyunca $\widehat{W}$ dual vektör yerine dual asli normal vektör alınsın. O halde $\widehat{\gamma}$, $\mathbb{D}_1^3$ de bir slant helis yani $\widehat{n}$ dual asli normal vektör, $\mathbb{D}_1^3$ de bir $\widehat{v}$ sabit dual vektörü ile bir sabit dual açıya sahiptir ancak ve ancak $\widehat{\gamma}$ nın dual asli doğrultu eğrisi $\mathbb{D}_1^3$ de bir genel helis yani $\widehat{\gamma}_0$ ın dual birim teğet vektörü $\mathbb{D}_1^3$ de bir $\widehat{v}$ sabit dual vektörü ile sabit dual açıya sahiptir. Diğer taraftan, $\mathbb{D}_1^3$ de bir slant helis $\mathbb{D}_1^3$ deki bir genel helisin asli donör eğrisidir ve $\mathbb{D}_1^3$ deki bir genel helis $\mathbb{D}_1^3$ deki bir slant helisin asli doğrultu eğrisidir.

Şimdi $\widehat{\gamma}_0$, $\mathbb{D}_1^3$ de $\frac{\widehat{\tau}_0}{\widehat{\kappa}_0} = \widehat{c}$ olan spacelike dual asli normale sahip bir spacelike genel helis olsun. O zaman, $\widehat{\gamma}_0$ ın spacelike dual asli normale sahip spacelike donör eğrisi olan $\widehat{\gamma}_1$, $\widehat{\kappa}_1 = \widehat{\kappa}_0 \cosh\left[\widehat{c}\int \widehat{\kappa}_0(s)ds\right]$ dual eğrilik ve $\widehat{\tau}_1 = \widehat{\kappa}_0 \sinh\left[\widehat{c}\int \widehat{\kappa}_0(s)ds\right]$ dual burulma fonksiyonlarına sahiptir. $\widehat{\gamma}_0$ ın timelike donör eğrisi olan $\widehat{\gamma}_2$, $\widehat{\kappa}_2 = \widehat{\kappa}_0 \sinh\left[\widehat{c}\int \widehat{\kappa}_0(s)ds\right]$ dual eğrilik ve $\widehat{\tau}_2 = \widehat{\kappa}_0 \cosh\left[\widehat{c}\int \widehat{\kappa}_0(s)ds\right]$ dual burulma fonksiyonlarına sahiptir. $\widehat{\gamma}_1$ ve $\widehat{\gamma}_2$ Frenet eğrileri $\mathbb{D}_1^3$ de, sırasıyla,

$$\frac{\widehat{\kappa}_1^2}{\left(\widehat{\kappa}_1^2-\widehat{\tau}_1^2\right)^{3/2}}\frac{d}{d\widehat{s}}\left(\frac{\widehat{\tau}_1}{\widehat{\kappa}_1}\right) = \frac{\cosh^2\left[\widehat{c}\int \widehat{\kappa}_0 ds\right]}{\widehat{\kappa}_0}\frac{d}{d\widehat{s}}\left(\tanh\left[\widehat{c}\int \widehat{\kappa}_0 ds\right]\right) = \widehat{c} \tag{5.1}$$

ve

$$\frac{-\widehat{\kappa}_2^2}{\left(\widehat{\tau}_2^2-\widehat{\kappa}_2^2\right)^{3/2}}\frac{d}{d\widehat{s}}\left(\frac{\widehat{\tau}_2}{\widehat{\kappa}_2}\right) = -\frac{\sinh^2\left[\widehat{c}\int\widehat{\kappa}_0 ds\right]}{\widehat{\kappa}_0}\frac{d}{d\widehat{s}}\left(\coth\left[\widehat{c}\int\widehat{\kappa}_0 ds\right]\right) = \widehat{c} \tag{5.2}$$

slant helis eşitliklerini sağlar.

$\widehat{\gamma}_0$, $\mathbb{D}_1^3$ de $\frac{\widehat{\tau}_0}{\widehat{\kappa}_0} = \widehat{c}$ olan timelike dual asli normale sahip bir spacelike genel helis olsun. O zaman $\widehat{\gamma}_0$ ın spacelike dual asli normale sahip spacelike donör eğrisi olan $\widehat{\gamma}_3$,

$\widehat{\kappa}_3 = \widehat{\kappa}_0 \sinh\left[\widehat{c}\int\widehat{\kappa}_0(s)ds\right]$ dual eğrilik ve $\widehat{\tau}_3 = -\widehat{\kappa}_0\cosh\left[\widehat{c}\int\widehat{\kappa}_0(s)ds\right]$ dual burulma fonksiyonlarına sahiptir. $\widehat{\gamma}_0$ ın timelike donör eğrisi olan $\widehat{\gamma}_4$, $\widehat{\kappa}_4 = \widehat{\kappa}_0\cosh\left[\widehat{c}\int\widehat{\kappa}_0(s)ds\right]$ dual eğrilik ve $\widehat{\tau}_4 = -\widehat{\kappa}_0\sinh\left[\widehat{c}\int\widehat{\kappa}_0(s)ds\right]$ dual burulma fonksiyonlarına sahiptir. $\widehat{\gamma}_3$ ve $\widehat{\gamma}_4$ Frenet eğrileri $\mathbb{D}_1^3$ de sırasıyla,

$$\frac{\widehat{\kappa}_3^2}{\left(\widehat{\tau}_3^2-\widehat{\kappa}_3^2\right)^{3/2}}\frac{d}{d\widehat{s}}\left(\frac{\widehat{\tau}_3}{\widehat{\kappa}_3}\right) = \frac{\sinh^2\left[\widehat{c}\int\widehat{\kappa}_0 ds\right]}{\widehat{\kappa}_0}\frac{d}{d\widehat{s}}\left(-\coth\left[\widehat{c}\int\widehat{\kappa}_0 ds\right]\right) = \widehat{c} \tag{5.3}$$

ve

$$\frac{-\widehat{\kappa}_4^2}{\left(\widehat{\kappa}_4^2-\widehat{\tau}_4^2\right)^{3/2}}\frac{d}{d\widehat{s}}\left(\frac{\widehat{\tau}_4}{\widehat{\kappa}_4}\right) = -\frac{\cosh^2\left[\widehat{c}\int\widehat{\kappa}_0 ds\right]}{\widehat{\kappa}_0}\frac{d}{d\widehat{s}}\left(-\tanh\left[\widehat{c}\int\widehat{\kappa}_0 ds\right]\right) = \widehat{c} \tag{5.4}$$

slant helis eşitliklerini sağlar.

Son olarak $\widehat{\gamma}_0$, $\mathbb{D}_1^3$ de $\frac{\widehat{\tau}_0}{\widehat{\kappa}_0} = \widehat{c}$ olan timelike genel helis olsun. O zaman $\widehat{\gamma}_0$ ın donör eğrisi olan $\widehat{\gamma}_5$, $\widehat{\kappa}_5 = \widehat{\kappa}_0\cos\left[\widehat{c}\int\widehat{\kappa}_0(s)ds\right]$ dual eğrilik ve $\widehat{\tau}_5 = -\widehat{\kappa}_0\sin\left[\widehat{c}\int\widehat{\kappa}_0(s)ds\right]$ dual burulma fonksiyonlarına sahiptir. $\widehat{\gamma}_5$ Frenet eğrisi,

$$\frac{-\widehat{\kappa}_5^2}{\left(\widehat{\tau}_5^2+\widehat{\kappa}_5^2\right)^{3/2}}\frac{d}{d\widehat{s}}\left(\frac{\widehat{\tau}_5}{\widehat{\kappa}_5}\right) = \frac{-\cos^2\left[\widehat{c}\int\widehat{\kappa}_0 ds\right]}{\widehat{\kappa}_0}\frac{d}{d\widehat{s}}\left(-\tan\left[\widehat{c}\int\widehat{\kappa}_0 ds\right]\right) = \widehat{c} \tag{5.5}$$

slant eşitliğini sağlar.

Bir slant helis eşitliğinin değeri, slant helis sabiti olarak adlandırılır.

Önerme 5.1. $\widehat{\gamma}_0$, $\mathbb{D}_1^3$ de $\widehat{\kappa}_0$ sırf dual olmayan dual eğrilik fonksiyonu, $\widehat{\tau}_0$ dual burulma fonksiyonu ile verilen bir null olmayan genel helis ve $\widehat{\gamma}$, $\widehat{\gamma}_0$ ın asli donör eğrisi olsun. O halde $\widehat{\gamma}$, $\frac{\widehat{\tau}_0}{\widehat{\kappa}_0}$ slant helis sabiti ile verilen bir null olmayan slant helistir.

Önceki bölümde düzlemsel eğriler yardımıyla $\mathbb{D}_1^3$ de genel helisler inşa edildi. Yukarıda $\mathbb{D}_1^3$ de genel helisler yardımıyla slant helisin inşası fikri verildi. Şimdi dördüncü bölümdeki metot kullanılarak $\mathbb{D}_1^3$ deki genel helislerden slant helisler elde edilecek.

Teorem 5.2. $\widehat{\gamma}$, $\mathbb{D}_1^3$ de $\widehat{\kappa}$ sırf dual olmayan eğrilik fonksiyonu ve $\widehat{\tau}$ dual burulma fonksiyonu ile spacelike dual asli normale sahip spacelike slant helis ve $\widehat{c} = c + \xi c^*$, $\widehat{\gamma}$ nın slant helis sabiti olsun.

$a)$ Eğer $\kappa > |\tau|$ ve $|c| < 1$ ise $\widehat{\gamma}$,

$$\begin{aligned}\widehat{\gamma}(s) &= -\int\Bigg(-\tfrac{\sinh\left[\widehat{c}\widehat{K}_1(s)\right]}{\sqrt{1-\widehat{c}^2}},\\ &\cosh\left[\widehat{c}\widehat{K}_1(s)\right]\cos\left[\sqrt{1-\widehat{c}^2}\widehat{K}_1(s)\right] - \tfrac{\widehat{c}\sinh\left[\widehat{c}\widehat{K}_1(s)\right]\sin\left[\sqrt{1-\widehat{c}^2}\widehat{K}_1(s)\right]}{\sqrt{1-\widehat{c}^2}},\\ &\cosh\left[\widehat{c}\widehat{K}_1(s)(s)\right]\sin\left[\sqrt{1-\widehat{c}^2}\widehat{K}_1(s)(s)\right]\\ &+\tfrac{\widehat{c}\sinh\left[\widehat{c}\widehat{K}_1(s)\right]\cos\left[\sqrt{1-\widehat{c}^2}\widehat{K}_1(s)\right]}{\sqrt{1-\widehat{c}^2}}\Bigg)d\widehat{s}\end{aligned} \tag{5.6}$$

eşitliği ile ifade edilir. Burada $\widehat{K}_1(s) = \int\sqrt{\widehat{\kappa}^2 - \widehat{\tau}^2}d\widehat{s}$ dir.

$b)$ Eğer $\kappa > |\tau|$ ve $|c| > 1$ ise $\widehat{\gamma}$,

$$\begin{aligned}\widehat{\gamma}(s) &= -\int\Bigg(\sinh\left[\widehat{c}\widehat{K}_1(s)\right]\sinh\left[\sqrt{\widehat{c}^2-1}\widehat{K}_1(s)\right]\\ &-\tfrac{\widehat{c}\cosh\left[\widehat{c}\widehat{K}_1(s)\right]\cosh\left[\sqrt{\widehat{c}^2-1}\widehat{K}_1(s)\right]}{\sqrt{\widehat{c}^2-1}}, \sinh\left[\widehat{c}\widehat{K}_1(s)\right]\cosh\left[\sqrt{\widehat{c}^2-1}\widehat{K}_1(s)\right]\\ &-\tfrac{\widehat{c}\cosh\left[\widehat{c}\widehat{K}_1(s)\right]\sinh\left[\sqrt{\widehat{c}^2-1}\widehat{K}_1(s)\right]}{\sqrt{\widehat{c}^2-1}}, -\tfrac{\cosh\left[\widehat{c}\widehat{K}_1(s)\right]}{\sqrt{\widehat{c}^2-1}}\Bigg)d\widehat{s}\end{aligned} \tag{5.7}$$

eşitliği ile ifade edilir. Burada $\widehat{K}_1(s) = \int\sqrt{\widehat{\kappa}^2 - \widehat{\tau}^2}d\widehat{s}$ dir.

$c)$ Eğer $\kappa < |\tau|$ ise $\widehat{\gamma}$,

$$\begin{aligned}\widehat{\gamma}(s) &= -\int\Bigg(\sinh\left[\widehat{c}\widehat{K}_2(s)\right]\cosh\left[\sqrt{1+\widehat{c}^2}\widehat{K}_2(s)\right]\\ &-\tfrac{\widehat{c}\cosh\left[\widehat{c}\widehat{K}_2(s)\right]\sinh\left[\sqrt{1+\widehat{c}^2}\widehat{K}_2(s)\right]}{\sqrt{1+\widehat{c}^2}}, \sinh\left[\widehat{c}\widehat{K}_2(s)\right]\cosh\left[\sqrt{1+\widehat{c}^2}\widehat{K}_2(s)\right]\\ &-\tfrac{\widehat{c}\cosh\left[\widehat{c}\widehat{K}_2(s)\right]\sinh\left[\sqrt{1+\widehat{c}^2}\widehat{K}_2(s)\right]}{\sqrt{1+\widehat{c}^2}}, \tfrac{\cosh\left[\widehat{c}\widehat{K}_2(s)\right]}{\sqrt{1+\widehat{c}^2}})d\widehat{s}\Bigg)\end{aligned} \tag{5.8}$$

eşitliği elde edilir. Burada $\widehat{K}_2(s) = \int\sqrt{\widehat{\tau}^2 - \widehat{\kappa}^2}d\widehat{s}$ dir.

İspat. $\mathbb{D}_1^3$ de $\widehat{\gamma}_0$, $\widehat{\gamma}$ nın spacelike asli doğrultu eğrisi olsun. $\widehat{\gamma}_0$, genel helis olduğundan $\frac{\widehat{\tau}_0}{\widehat{\kappa}_0} = \widehat{c}$ dir. Burada $\widehat{c}$ dual sabitdir. O zaman,

$a)$ Eğer $\kappa > |\tau|$ ve $|c| < 1$ ise (4.4) eşitliğinden,

$$\left\{\begin{aligned}\widehat{t}_0(s) &= \tfrac{1}{\sqrt{1-\widehat{c}^2}}\left(\widehat{c},\ \sin\left[\sqrt{1-\widehat{c}^2}\int\widehat{\kappa}_0(s)d\widehat{s}\right],\right.\\ &\qquad\left.-\cos\left[\sqrt{1-\widehat{c}^2}\int\widehat{\kappa}_0(s)d\widehat{s}\right]\right)\\ \widehat{n}_0(s) &= \left(0,\ \cos\left[\sqrt{1-\widehat{c}^2}\int\widehat{\kappa}_0(s)d\widehat{s}\right],\ \sin\left[\sqrt{1-\widehat{c}^2}\int\widehat{\kappa}_0(s)d\widehat{s}\right]\right)\\ \widehat{b}_0(s) &= \tfrac{1}{\sqrt{1-\widehat{c}^2}}\left(1,\ -\widehat{c}\sin\left[\sqrt{1-\widehat{c}^2}\int\widehat{\kappa}_0(s)d\widehat{s}\right],\right.\\ &\qquad\left.\widehat{c}\cos\left[\sqrt{1-\widehat{c}^2}\int\widehat{\kappa}_0(s)d\widehat{s}\right]\right)\end{aligned}\right. \tag{5.9}$$

elde edilir. Diğer taraftan, (3.3) eşitliğinden

$$\widehat{t} = -\cosh\left[\int \widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s}\right]\widehat{n}_0 + \sinh\left[\int \widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s}\right]\widehat{b}_0$$

ve (5.9) göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned}\widehat{t} &= \Bigg(\tfrac{\sinh\left[\int \widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s}\right]}{\sqrt{1-\widehat{c}^2}}, \\ &\quad -\cosh\left[\int \widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s}\right]\cos\left[\sqrt{1-\widehat{c}^2}\int \widehat{\kappa}_0(s)d\widehat{s}\right] - \tfrac{\widehat{c}\sinh\left[\int \widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s}\right]\sin\left[\sqrt{1-\widehat{c}^2}\int \widehat{\kappa}_0(s)d\widehat{s}\right]}{\sqrt{1-\widehat{c}^2}}, \\ &\quad -\cosh\left[\int \widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s}\right]\sin\left[\sqrt{1-\widehat{c}^2}\int \widehat{\kappa}_0(s)d\widehat{s}\right] + \tfrac{\widehat{c}\sinh\left[\int \widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s}\right]\cos\left[\sqrt{1-\widehat{c}^2}\int \widehat{\kappa}_0(s)d\widehat{s}\right]}{\sqrt{1-\widehat{c}^2}}\Bigg)\end{aligned}$$

bulunur. $\widehat{K}_1(s) = \displaystyle\int \widehat{\kappa}_0 d\widehat{s} = \int \sqrt{\widehat{\kappa}^2 - \widehat{\tau}^2}d\widehat{s}$ ve $\widehat{c}\widehat{K}_1(s) = \int \widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s}$ eşitlikleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\widehat{t} &= \Bigg(\tfrac{\sinh\left[\widehat{c}\widehat{K}_1(s)\right]}{\sqrt{1-\widehat{c}^2}}, \\ &\quad -\cosh\left[\widehat{c}\widehat{K}_1(s)\right]\cos\left(\sqrt{1-\widehat{c}^2}\widehat{K}_1(s)\right) - \tfrac{\widehat{c}\sinh\left[\widehat{c}\widehat{K}_1(s)\right]\sin\left(\sqrt{1-\widehat{c}^2}\widehat{K}_1(s)\right)}{\sqrt{1-\widehat{c}^2}}, \\ &\quad -\cosh\left[\widehat{c}\widehat{K}_1(s)\right]\sin\left[\sqrt{1-\widehat{c}^2}\widehat{K}_1(s)\right] + \tfrac{\widehat{c}\sinh\left[\widehat{c}\widehat{K}_1(s)\right]\cos\left[\sqrt{1-\widehat{c}^2}\widehat{K}_1(s)\right]}{\sqrt{1-\widehat{c}^2}}\Bigg)\end{aligned} \tag{5.10}$$

olur. $\widehat{t} = \frac{d\widehat{\gamma}(s)}{d\widehat{s}}$ eşitliği göz önüne alınır ve (5.10) eşitliğinin her iki tarafının $\widehat{s}$ ya göre integrali alınırsa (5.6) eşitliği elde edilir.

(b) Eğer $\kappa > |\tau|$ ve $|c| > 1$ ise (4.5) eşitliğinden,

$$\begin{cases} \widehat{t}_0(s) = \frac{1}{\sqrt{\widehat{c}^2-1}}\left(\cosh\left[\sqrt{\widehat{c}^2-1}\int \widehat{\kappa}_0(s)d\widehat{s}\right],\right. \\ \qquad\qquad \left.\sinh\left[\sqrt{\widehat{c}^2-1}\int \widehat{\kappa}_0(s)d\widehat{s}\right], \widehat{c}\right) \\ \widehat{n}_0(s) = \left(\sinh\left[\sqrt{\widehat{c}^2-1}\int \widehat{\kappa}_0(s)d\widehat{s}\right], \cosh\left[\sqrt{\widehat{c}^2-1}\int \widehat{\kappa}_0(s)d\widehat{s}\right], 0\right) \\ \widehat{b}_0(s) = \frac{1}{\sqrt{\widehat{c}^2-1}}\left(-\widehat{c}\cosh\left[\sqrt{\widehat{c}^2-1}\int \widehat{\kappa}_0(s)d\widehat{s}\right],\right. \\ \qquad\qquad \left.\widehat{c}\sinh\left[\sqrt{\widehat{c}^2-1}\int \widehat{\kappa}_0(s)d\widehat{s}\right], 1\right) \end{cases} \tag{5.11}$$

elde edilir. Diğer taraftan, (3.3) eşitliğinden

$$\widehat{t} = -\cosh\left[\int \widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s}\right]\widehat{n}_0 + \sinh\left[\int \widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s}\right]\widehat{b}_0$$

ve (5.11) göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned}\widehat{t} &= \Bigg(-\sinh\left[\sqrt{\widehat{c}^2-1}\int \widehat{\kappa}_0(s)d\widehat{s}\right]\cosh\left[\int \widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s}\right] \\ &\quad -\tfrac{\widehat{c}\sinh\left[\int \widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s}\right]\cosh\left[\sqrt{\widehat{c}^2-1}\int \widehat{\kappa}_0(s)d\widehat{s}\right]}{\sqrt{1-\widehat{c}^2}}, -\cosh\left[\int \widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s}\right]\cosh\left[\sqrt{\widehat{c}^2-1}\int \widehat{\kappa}_0(s)d\widehat{s}\right] \\ &\quad +\tfrac{\widehat{c}\sinh\left[\int \widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s}\right]\sinh\left[\sqrt{\widehat{c}^2-1}\int \widehat{\kappa}_0(s)d\widehat{s}\right]}{\sqrt{\widehat{c}^2-1}}, \tfrac{\sinh\left[\int \widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s}\right]}{\sqrt{\widehat{c}^2-1}}\Bigg)\end{aligned}$$

bulunur. $\widehat{K}_1(s) = \displaystyle\int \widehat{\kappa}_0 d\widehat{s} = \int \sqrt{\widehat{\kappa}^2 - \widehat{\tau}^2}d\widehat{s}$ ve $\widehat{c}\widehat{K}_1(s) = \int \widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s}$ eşitlikleri kullanılırsa,

$$
\begin{aligned}
\widehat{t} = & \Big(-\sinh\left[\sqrt{\widehat{c}^2-1}\widehat{K}_1(s)\right]\cosh\left[\widehat{c}\widehat{K}_1(s)\right] - \tfrac{\widehat{c}\sinh\left[\widehat{c}\widehat{K}_1(s)\right]\cosh\left[\sqrt{\widehat{c}^2-1}\widehat{K}_1(s)\right]}{\sqrt{1-\widehat{c}^2}}, \\
& -\cosh\left[\widehat{c}\widehat{K}_1(s)\right]\cosh\left[\sqrt{\widehat{c}^2-1}\widehat{K}_1(s)\right] + \tfrac{\widehat{c}\sinh\left[\widehat{c}\widehat{K}_1(s)\right]\sinh\left[\sqrt{\widehat{c}^2-1}\widehat{K}_1(s)\right]}{\sqrt{\widehat{c}^2-1}}, \\
& \tfrac{\sinh\left[\widehat{c}\widehat{K}_1(s)\right]}{\sqrt{\widehat{c}^2-1}}\Big)
\end{aligned}
\tag{5.12}
$$

olur. $\widehat{t}=\frac{d\widehat{\gamma}(s)}{d\widehat{s}}$ eşitliği göz önüne alınır ve (5.12) eşitliğinin her iki tarafının $\widehat{s}$ ya göre integrali alınırsa (5.7) eşitliği elde edilir.

$c)$ Eğer $\kappa<|\tau|$ ise (4.10) eşitliğinden,

$$
\begin{cases}
\widehat{t}_0(s) = \Big(\sinh\left[\sqrt{1+\widehat{c}^2}\int\widehat{\kappa}(s)d\widehat{s}\right], \\
\qquad \cosh\left[\sqrt{1+\widehat{c}^2}\int\widehat{\kappa}(s)d\widehat{s}\right], -\widehat{c}\Big) \\
\widehat{n}_0(s) = \left(\cosh\left[\sqrt{1+\widehat{c}^2}\int\widehat{\kappa}_0(s)d\widehat{s}\right], \sinh\left[\sqrt{1+\widehat{c}^2}\int\widehat{\kappa}_0(s)d\widehat{s}\right], 0\right) \\
\widehat{b}_0(s) = \frac{1}{\sqrt{1+\widehat{c}^2}}\Big(-\widehat{c}\sinh\left[\sqrt{1+\widehat{c}^2}\int\widehat{\kappa}_0(s)d\widehat{s}\right], \\
\qquad \widehat{c}\cosh\left[\sqrt{1+\widehat{c}^2}\int\widehat{\kappa}_0(s)d\widehat{s}\right], 1\Big)
\end{cases}
\tag{5.13}
$$

elde edilir. Diğer taraftan, (3.3) eşitliğinden

$$\widehat{t}=\sinh\left[\int\widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s}\right]\widehat{n}_0+\cosh\left[\int\widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s}\right]\widehat{b}_0$$

ve (5.13) göz önüne alınırsa,

$$
\begin{aligned}
\widehat{t} = & \Big(\sinh\left[\int\widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s}\right]\cosh\left[\sqrt{1+\widehat{c}^2}\int\widehat{\kappa}_0(s)d\widehat{s}\right] - \tfrac{\widehat{c}\cosh\left[\int\widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s}\right]\sinh\left[\sqrt{1+\widehat{c}^2}\int\widehat{\kappa}_0(s)d\widehat{s}\right]}{\sqrt{1+\widehat{c}^2}}, \\
& \sinh\left[\int\widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s}\right]\sinh\left[\sqrt{1+\widehat{c}^2}\int\widehat{\kappa}_0(s)d\widehat{s}\right] + \tfrac{\widehat{c}\cosh\left[\int\widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s}\right]\cosh\left[\sqrt{1+\widehat{c}^2}\int\widehat{\kappa}_0(s)d\widehat{s}\right]}{\sqrt{1+\widehat{c}^2}}, \\
& \tfrac{\cosh\left[\int\widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s}\right]}{\sqrt{1+\widehat{c}^2}}\Big)
\end{aligned}
$$

bulunur. $\widehat{K}_2(s)=\int\widehat{\kappa}_0d\widehat{s}=\int\sqrt{\widehat{\tau}^2-\widehat{\kappa}^2}d\widehat{s}$ ve $\widehat{c}\widehat{K}_2(s)=\int\widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s}$ eşitlikleri kullanılırsa,

$$
\begin{aligned}
\widehat{t} = & \Big(\sinh\left[\widehat{c}\widehat{K}_2(s)\right]\cosh\left[\sqrt{1+\widehat{c}^2}\widehat{K}_2(s)\right] - \tfrac{\widehat{c}\cosh\left[\widehat{c}\widehat{K}_2(s)\right]\sinh\left[\sqrt{1+\widehat{c}^2}\widehat{K}_2(s)\right]}{\sqrt{1+\widehat{c}^2}}, \\
& \sinh\left[\widehat{c}\widehat{K}_2(s)\right]\sinh\left[\sqrt{1+\widehat{c}^2}\widehat{K}_2(s)\right] + \tfrac{\widehat{c}\cosh\left[\widehat{c}\widehat{K}_2(s)\right]\cosh\left[\sqrt{1+\widehat{c}^2}\widehat{K}_2(s)\right]}{\sqrt{1+\widehat{c}^2}}, \\
& \tfrac{\cosh\left[\widehat{c}\widehat{K}_2(s)\right]}{\sqrt{1+\widehat{c}^2}}\Big)
\end{aligned}
\tag{5.14}
$$

olur. $\widehat{t}=\frac{d\widehat{\gamma}(s)}{d\widehat{s}}$ eşitliği göz önüne alınır ve (5.14) eşitliğinin her iki tarafının $\widehat{s}$ ya göre integrali alınırsa (5.8) eşitliği elde edilir.

Teorem 5.3. $\widehat{\gamma}$, $\mathbb{D}^3_1$ de $\widehat{\kappa}$ pure dual olmayan eğrilik fonksiyonu ve $\widehat{\tau}$ dual burulma fonksiyonu ile timelike dual asli normale sahip spacelike slant helis ve $\widehat{c}=c+\xi c^*$,

$\widehat{\gamma}$ nın slant helis sabiti olsun.

(a) Eğer $|c| > 1$ ise $\widehat{\gamma}$,

$$\begin{aligned}
\widehat{\gamma}(s) \;=\; \int \Bigg(& \frac{\sin\left[\widehat{c}\widehat{K}_3(s)\right]}{\sqrt{\widehat{c}^2-1}}, \\
& \frac{\widehat{c}\sin\left[\widehat{c}\widehat{K}_3(s)\right]\cos\left[\sqrt{\widehat{c}^2-1}\widehat{K}_3(s)\right]}{\sqrt{\widehat{c}^2-1}} - \cos\left[\widehat{c}\widehat{K}_3(s)\right]\sin\left[\sqrt{\widehat{c}^2-1}\widehat{K}_3(s)\right], \\
& \frac{\widehat{c}\sin\left[\widehat{c}\widehat{K}_3(s)\right]\sin\left[\sqrt{\widehat{c}^2-1}\widehat{K}_3(s)\right]}{\sqrt{\widehat{c}^2-1}} + \cos\left[\widehat{c}\widehat{K}_3(s)\right]\cos\left[\sqrt{\widehat{c}^2-1}\widehat{K}_3(s)\right]\Bigg) d\widehat{s}
\end{aligned} \tag{5.15}$$

eşitliği ile ifade edilir. Burada $\widehat{K}_3(s) = \int \sqrt{\widehat{\kappa}^2 + \widehat{\tau}^2}d\widehat{s}$ dir.

(b) Eğer $|c| < 1$ ise $\widehat{\gamma}$,

$$\begin{aligned}
\widehat{\gamma}(s) \;=\; \int \Bigg(& \cos\left[\widehat{c}\widehat{K}_3(s)\right]\sinh\left[\sqrt{1-\widehat{c}^2}\widehat{K}_3(s)\right] \\
& + \frac{\widehat{c}\sin\left[\widehat{c}\widehat{K}_3(s)\right]\cosh\left[\sqrt{1-\widehat{c}^2}\widehat{K}_3(s)\right]}{\sqrt{1-\widehat{c}^2}}, \cos\left[\widehat{c}\widehat{K}_3(s)\right]\cosh\left[\sqrt{1-\widehat{c}^2}\widehat{K}_3(s)\right] \\
& + \frac{\widehat{c}\sin\left[\widehat{c}\widehat{K}_3(s)\right]\sinh\left[\sqrt{1-\widehat{c}^2}\widehat{K}_3(s)\right]}{\sqrt{1-\widehat{c}^2}}, \frac{\sin\left[\widehat{c}\widehat{K}_3(s)\right]}{\sqrt{1-\widehat{c}^2}}\Bigg) d\widehat{s}
\end{aligned} \tag{5.16}$$

eşitliği ile ifade edilir. Burada $\widehat{K}_3(s) = \int \sqrt{\widehat{\kappa}^2 + \widehat{\tau}^2}d\widehat{s}$ dir.

İspat. $\mathbb{D}^3_1$ de $\widehat{\gamma}_0$, $\widehat{\gamma}$ nın timelike asli doğrultu eğrisi olsun. $\widehat{\gamma}_0$, genel helis olduğundan $\frac{\widehat{\tau}_0}{\widehat{\kappa}_0} = \widehat{c}$ dir. Burada $\widehat{c}$ dual sabitdir. O zaman,

(a) Eğer $|c| > 1$ ise (4.11) eşitliğinden,

$$\left\{\begin{aligned}
\widehat{t}_0(s) &= \tfrac{1}{\sqrt{\widehat{c}^2-1}}\left(\widehat{c},\ \sin\left[\sqrt{\widehat{c}^2-1}\int\widehat{\kappa}_0(s)d\widehat{s}\right],\right. \\
&\qquad \left.-\cos\left[\sqrt{\widehat{c}^2-1}\int\widehat{\kappa}_0(s)d\widehat{s}\right]\right) \\
\widehat{n}_0(s) &= \left(0,\ \cos\left[\sqrt{\widehat{c}^2-1}\int\widehat{\kappa}_0(s)d\widehat{s}\right],\ \sin\left[\sqrt{\widehat{c}^2-1}\int\widehat{\kappa}_0(s)d\widehat{s}\right]\right) \\
\widehat{b}_0(s) &= \left(\tfrac{1}{\sqrt{\widehat{c}^2-1}} - 1,\ \widehat{c}\sin\left[\sqrt{\widehat{c}^2-1}\int\widehat{\kappa}_0(s)d\widehat{s}\right],\right. \\
&\qquad \left.-\widehat{c}\cos\left[\sqrt{\widehat{c}^2-1}\int\widehat{\kappa}_0(s)d\widehat{s}\right]\right)
\end{aligned}\right. \tag{5.17}$$

elde edilir. Diğer taraftan, (3.3) eşitliğinden

$$\widehat{t} = \cos\left[\int\widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s}\right]\widehat{n}_0 - \sin\left[\int\widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s}\right]\widehat{b}_0$$

ve (5.17) göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned}
\widehat{t} \;=\; \Bigg(& \frac{\sin\left[\int\widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s}\right]}{\sqrt{\widehat{c}^2-1}}, \\
& \cos\left[\int\widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s}\right]\cos\left[\sqrt{\widehat{c}^2-1}\int\widehat{\kappa}_0(s)d\widehat{s}\right] - \frac{\widehat{c}\sin\left[\int\widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s}\right]\sin\left[\sqrt{\widehat{c}^2-1}\int\widehat{\kappa}_0(s)d\widehat{s}\right]}{\sqrt{\widehat{c}^2-1}}, \\
& \cos\left[\int\widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s}\right]\sin\left[\sqrt{\widehat{c}^2-1}\int\widehat{\kappa}_0(s)d\widehat{s}\right] + \frac{\widehat{c}\sin\left[\int\widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s}\right]\cos\left[\sqrt{\widehat{c}^2-1}\int\widehat{\kappa}_0(s)d\widehat{s}\right]}{\sqrt{\widehat{c}^2-1}}\Bigg)
\end{aligned}$$

bulunur. $\widehat{K}_3(s) = \displaystyle\int\widehat{\kappa}_0 d\widehat{s} = \int\sqrt{\widehat{\kappa}^2+\widehat{\tau}^2}d\widehat{s}$ ve $\widehat{c}\widehat{K}_3(s) = \int\widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s}$ eşitlikleri kullanılırsa,

$$
\begin{aligned}
\widehat{t} \;=\; & \Bigg(\frac{\sin\left[\widehat{c}\widehat{K}_3(s)\right]}{\sqrt{\widehat{c}^2-1}}, \\
& \cos\widehat{c}\widehat{K}_3(s)\cos\left[\sqrt{\widehat{c}^2-1}\widehat{K}_3(s)\right] - \frac{\widehat{c}\sin\left[\widehat{c}\widehat{K}_3(s)\right]\sin\left[\sqrt{\widehat{c}^2-1}\widehat{K}_3(s)\right]}{\sqrt{\widehat{c}^2-1}}, \\
& \cos\left[\widehat{c}\widehat{K}_3(s)\right](s)\sin\left[\sqrt{\widehat{c}^2-1}\widehat{K}_3(s)\right] + \frac{\widehat{c}\sin\left[\widehat{c}\widehat{K}_3(s)\right](s)\cos\left[\sqrt{\widehat{c}^2-1}\widehat{K}_3(s)\right]}{\sqrt{\widehat{c}^2-1}} \Bigg)
\end{aligned}
\tag{5.18}
$$

olur. $\widehat{t} = \frac{d\widehat{\gamma}(s)}{d\widehat{s}}$ eşitliği göz önüne alınır ve (5.18) eşitliğinin her iki tarafının $\widehat{s}$ ya göre integrali alınırsa (5.15) eşitliği elde edilir.

(b) Eğer $|c| < 1$ ise (4.12) eşitliğinden,

$$
\begin{cases}
\widehat{t}_0(s) = \frac{1}{\sqrt{1-\widehat{c}^2}}\Big(\cosh\left[\sqrt{1-\widehat{c}^2}\int\widehat{\kappa}_0(s)d\widehat{s}\right], \\
\qquad\qquad \sinh\left[\sqrt{1-\widehat{c}^2}\int\widehat{\kappa}_0(s)d\widehat{s}\right], \widehat{c}\Big) \\
\widehat{n}_0(s) = \Big(\sinh\left[\sqrt{1-\widehat{c}^2}\int\widehat{\kappa}_0(s)d\widehat{s}\right], \cosh\left[\sqrt{1-\widehat{c}^2}\int\widehat{\kappa}_0(s)d\widehat{s}\right], 0\Big) \\
\widehat{b}_0(s) = \frac{1}{\sqrt{1-\widehat{c}^2}}\Big(\widehat{c}\cosh\left[\sqrt{1-\widehat{c}^2}\int\widehat{\kappa}_0(s)d\widehat{s}\right], \\
\qquad\qquad -\widehat{c}\sinh\left[\sqrt{1-\widehat{c}^2}\int\widehat{\kappa}_0(s)d\widehat{s}\right], -1\Big)
\end{cases}
\tag{5.19}
$$

elde edilir. Diğer taraftan, (3.3) eşitliğinden

$$\widehat{t} = \cos\left[\int\widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s}\right]\widehat{n}_0 - \sin\left[\int\widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s}\right]\widehat{b}_0$$

ve (5.19) göz önüne alınırsa,

$$
\begin{aligned}
\widehat{t} \;=\; & \Bigg(\cos\left[\int\widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s}\right]\sinh\left[\sqrt{1-\widehat{c}^2}\int\widehat{\kappa}_0(s)d\widehat{s}\right] - \frac{\widehat{c}\sin\left[\int\widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s}\right]\cosh\left[\sqrt{1-\widehat{c}^2}\int\widehat{\kappa}_0(s)d\widehat{s}\right]}{\sqrt{1-\widehat{c}^2}}, \\
& \cos\left[\int\widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s}\right]\cosh\left[\sqrt{1-\widehat{c}^2}\int\widehat{\kappa}_0(s)d\widehat{s}\right] + \frac{\widehat{c}\sin\left[\int\widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s}\right]\sinh\left[\sqrt{1-\widehat{c}^2}\int\widehat{\kappa}_0(s)d\widehat{s}\right]}{\sqrt{1-\widehat{c}^2}}, \\
& \frac{\sin\left[\int\widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s}\right]}{\sqrt{1-\widehat{c}^2}}\Bigg)
\end{aligned}
$$

bulunur. $\widehat{K}_3(s) = \displaystyle\int\widehat{\kappa}_0 d\widehat{s} = \int\sqrt{\widehat{\kappa}^2+\widehat{\tau}^2}d\widehat{s}$ ve $\widehat{c}\widehat{K}_3(s) = \int\widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s}$ eşitlikleri kullanılırsa,

$$
\begin{aligned}
\widehat{t} \;=\; & \frac{1}{\sqrt{\widehat{c}^2+1}}\Bigg(\cos\left[\widehat{c}\widehat{K}_3(s)\right]\sinh\left[\sqrt{1-\widehat{c}^2}\widehat{K}_3(s)\right] \\
& -\frac{\widehat{c}\sin\left[\widehat{c}\widehat{K}_3(s)\right]\cosh\left[\sqrt{1-\widehat{c}^2}\widehat{K}_3(s)\right]}{\sqrt{1-\widehat{c}^2}}, \cos\left[\widehat{c}\widehat{K}_3(s)\right]\cosh\left[\sqrt{1-\widehat{c}^2}\widehat{K}_3(s)\right] \\
& +\frac{\widehat{c}\sin\left[\widehat{c}\widehat{K}_3(s)\right]\sinh\left[\sqrt{1-\widehat{c}^2}\widehat{K}_3(s)\right]}{\sqrt{1-\widehat{c}^2}}, \frac{\sin\left[\widehat{c}\widehat{K}_3(s)\right]}{\sqrt{1-\widehat{c}^2}}\Bigg)
\end{aligned}
\tag{5.20}
$$

olur. $\widehat{t} = \frac{d\widehat{\gamma}(s)}{d\widehat{s}}$ eşitliği göz önüne alınır ve (5.18) eşitliğinin her iki tarafının $\widehat{s}$ ya göre integrali alınırsa (5.15) eşitliği elde edilir.

Teorem 5.4. $\widehat{\gamma}$, $\mathbb{D}_1^3$ de $\widehat{\kappa}$ sırf dual olmayan eğrilik fonksiyonu ve $\widehat{\tau}$ dual burulma fonksiyonu ile timelike slant helis ve $\widehat{c} = c + \xi c^*$, $\widehat{\gamma}$ nın slant helis sabiti olsun.

$a)$ Eğer $\kappa < |\tau|$ ve $|c| < 1$ ise $\widehat{\gamma}$,

$$\begin{aligned}
\widehat{\gamma}(s) &= \int \Big(\tfrac{\sinh\left[\widehat{c}\widehat{K}_2(s)\right]}{\sqrt{1-\widehat{c}^2}}, \cos\left(\sqrt{1-\widehat{c}^2}\widehat{K}_2(s)\right)\cosh\left[\widehat{c}\widehat{K}_2(s)\right] \\
&\quad -\tfrac{\widehat{c}}{\sqrt{1-\widehat{c}^2}}\sin\left(\sqrt{1-\widehat{c}^2}\widehat{K}_2(s)\right)\sinh\left[\widehat{c}\widehat{K}_2(s)\right], \\
&\quad \sin\left[\sqrt{1-\widehat{c}^2}\widehat{K}_2(s)\right]\cosh\left[\widehat{c}\widehat{K}_2(s)\right] \\
&\quad +\tfrac{\widehat{c}}{\sqrt{1-\widehat{c}^2}}\cos\left[\sqrt{1-\widehat{c}^2}\widehat{K}_2(s)\right]\sinh\left[\widehat{c}\widehat{K}_2(s)\right]\Big)\,d\widehat{s}
\end{aligned} \tag{5.21}$$

eşitliği ile ifade edilir. Burada $\widehat{K}_2(s) = \int \sqrt{\widehat{\tau}^2 - \widehat{\kappa}^2}d\widehat{s}$ dir.

$b)$ Eğer $\kappa < |\tau|$ ve $|c| > 1$ ise $\widehat{\gamma}$,

$$\begin{aligned}
\widehat{\gamma}(s) &= \int \Big(\cosh\left[\widehat{c\kappa}_2(s)\right]\sinh\left[\sqrt{\widehat{c}^2-1}\widehat{\kappa}_2(s)\right] - \tfrac{\widehat{c}\cosh\left[\widehat{c\kappa}_2(s)\right]\cosh\left[\sqrt{\widehat{c}^2-1}\widehat{\kappa}_2(s)\right]}{\sqrt{m^2-1}}, \\
&\quad \sinh\left[\widehat{c\kappa}_2(s)\right]\cosh\left[\sqrt{\widehat{c}^2-1}\widehat{\kappa}_2(s)\right] - \tfrac{\widehat{c}\cosh\left[\widehat{c\kappa}_2(s)\right]\sinh\left[\sqrt{\widehat{c}^2-1}\widehat{\kappa}_2(s)\right]}{\sqrt{\widehat{c}^2-1}}, \\
&\quad -\tfrac{\cosh\left[\widehat{c\kappa}_2(s)\right]}{\sqrt{\widehat{c}^2-1}})\Big)\,d\widehat{s}
\end{aligned} \tag{5.22}$$

eşitliği ile ifade edilir. Burada $\widehat{K}_2(s) = \int \sqrt{\widehat{\tau}^2 - \widehat{\kappa}^2}d\widehat{s}$ dir.

(c) Eğer $\kappa < |\tau|$ ise $\widehat{\gamma}$,

$$\begin{aligned}
\widehat{\gamma}(s) &= \int (\cosh\left[\widehat{c}\widehat{K}_1(s)\right]\cosh\left[\sqrt{1+\widehat{c}^2}\widehat{K}_1(s)\right] \\
&\quad -\tfrac{\widehat{c}\sinh\left[\widehat{c}\widehat{K}_1(s)\right]\sinh\left[\sqrt{1+\widehat{c}^2}\widehat{K}_1(s)\right]}{\sqrt{1+m^2}}, \cosh\left[\widehat{c}\widehat{K}_1(s)\right]\sinh\left[\sqrt{1+\widehat{c}^2}\widehat{K}_1(s)\right] \\
&\quad -\tfrac{\widehat{c}\sinh\left[\widehat{c}\widehat{K}_1(s)\right]\cosh\left[\sqrt{1+\widehat{c}^2}\widehat{K}_1(s)\right]}{\sqrt{1+\widehat{c}^2}}, \tfrac{\sinh\left[\widehat{c}\widehat{K}_1(s)\right]}{\sqrt{1+\widehat{c}^2}})d\widehat{s}
\end{aligned} \tag{5.23}$$

eşitliği ile ifade edilir. Burada $\widehat{K}_1(s) = \int \sqrt{\widehat{\kappa}^2 - \widehat{\tau}^2}d\widehat{s}$ dir.

İspat. $\mathbb{D}^3_1$ de $\widehat{\gamma}_0$, $\widehat{\gamma}$ nın spacelike asli doğrultu eğrisi olsun. $\widehat{\gamma}_0$, genel helis olduğundan $\frac{\widehat{\tau}_0}{\widehat{\kappa}_0} = \widehat{c}$ dir. Burada $\widehat{c}$ dual sabitdir. O zaman,

(a) Eğer $\kappa < |\tau|$ ve $|c| < 1$ ise (5.9) eşitliği elde edilir. Diğer taraftan, (3.3) eşitliğinden

$$\widehat{t} = -\sinh\left[\int \widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s}\right]\widehat{n}_0 + \cosh\left[\int \widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s}\right]\widehat{b}_0$$

ve (5.9) göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned}
\widehat{t} &= (\tfrac{\cosh\left[\int \widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s}\right]}{\sqrt{1-\widehat{c}^2}}, \\
&\quad -\sinh\left[\int \widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s}\right]\cos\left[\sqrt{1-\widehat{c}^2}\int \widehat{\kappa}_0(s)d\widehat{s}\right] - \tfrac{\widehat{c}\cosh\left[\int \widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s}\right]\sin\left(\sqrt{1-\widehat{c}^2}\int \widehat{\kappa}_0(s)d\widehat{s}\right)}{\sqrt{1-\widehat{c}^2}}, \\
&\quad -\sinh\left[\widehat{c}\widehat{K}_2(s)\right]\sin\left(\sqrt{1-\widehat{c}^2}\int \widehat{\kappa}_0(s)d\widehat{s}\right) + \tfrac{\widehat{c}\cosh\left[\int \widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s}\right]\cos\left[\sqrt{1-\widehat{c}^2}\int \widehat{\kappa}_0(s)d\widehat{s}\right]}{\sqrt{1-\widehat{c}^2}})
\end{aligned}$$

bulunur. $\widehat{K}_2(s) = \int \widehat{\kappa}_0 d\widehat{s} = \int \sqrt{\widehat{\tau}^2 - \widehat{\kappa}^2}d\widehat{s}$ ve $\widehat{c}\widehat{K}_2(s) = \int \widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s}$ eşitlikleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\widehat{t} \;=\; & \Big(\tfrac{\cosh\left[\widehat{c}\widehat{K}_2(s)\right]}{\sqrt{1-\widehat{c}^2}}, \\ & -\sinh\left[\widehat{c}\widehat{K}_2(s)\right]\cos\left[\sqrt{1-\widehat{c}^2}\widehat{K}_2(s)\right] - \tfrac{\widehat{c}\cosh\left[\widehat{c}\widehat{K}_2(s)\right]\sin\left(\sqrt{1-\widehat{c}^2}\widehat{K}_2(s)\right)}{\sqrt{1-\widehat{c}^2}}, \\ & -\sinh\left[\widehat{c}\widehat{K}_2(s)\right]\sin\left(\sqrt{1-\widehat{c}^2}\widehat{K}_2(s)\right) + \tfrac{\widehat{c}\cosh\left[\widehat{c}\widehat{K}_2(s)\right]\cos\left[\sqrt{1-\widehat{c}^2}\widehat{K}_2(s)\right]}{\sqrt{1-\widehat{c}^2}}\Big)\end{aligned} \tag{5.24}$$

olur. $\widehat{t} = \frac{d\widehat{\gamma}(s)}{d\widehat{s}}$ eşitliği göz önüne alınır ve (5.24) eşitliğinin her iki tarafının $\widehat{s}$ ya göre integrali alınırsa (5.21) eşitliği elde edilir.

(b) Eğer $\kappa < |\tau|$ ve $|c| > 1$ ise (5.11) eşitliği elde edilir. Diğer taraftan, (3.3) eşitliğinden

$$\widehat{t} = -\sinh\left[\int \widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s}\right]\widehat{n}_0 + \cosh\left[\int \widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s}\right]\widehat{b}_0$$

ve (5.9) göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned}\widehat{t} \;=\; & \Big(-\sinh\left[\int \widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s}\right]\sinh\left(\sqrt{\widehat{c}^2-1}\int \widehat{\kappa}_0(s)d\widehat{s}\right) \\ & -\tfrac{\widehat{c}\cosh\left[\int \widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s}\right]\cosh\left(\sqrt{\widehat{c}^2-1}\int \widehat{\kappa}_0(s)d\widehat{s}\right)}{\sqrt{1-\widehat{c}^2}}, -\sinh\left[\int \widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s}\right]\cosh\left(\sqrt{\widehat{c}^2-1}\int \widehat{\kappa}_0(s)d\widehat{s}\right) \\ & +\tfrac{\widehat{c}\cosh\left[\int \widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s}\right]\sinh\left(\sqrt{\widehat{c}^2-1}\int \widehat{\kappa}_0(s)d\widehat{s}\right)}{\sqrt{\widehat{c}^2-1}}, \tfrac{\cosh\left[\int \widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s}\right]}{\sqrt{\widehat{c}^2-1}}\Big)\end{aligned}$$

bulunur. $\widehat{K}_2(s) = \displaystyle\int \widehat{\kappa}_0 d\widehat{s} = \int \sqrt{\widehat{\tau}^2 - \widehat{\kappa}^2}d\widehat{s}$ ve $\widehat{c}\widehat{K}_2(s) = \int \widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s}$ eşitlikleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\widehat{t} \;=\; & \Big(-\sinh\left[\widehat{c}\widehat{K}_2(s)\right]\sinh\left[\sqrt{\widehat{c}^2-1}\widehat{K}_2(s)d\widehat{s}\right] \\ & -\tfrac{\widehat{c}\cosh\left[\widehat{c}\widehat{K}_2(s)\right]\cosh\left[\sqrt{\widehat{c}^2-1}\widehat{K}_2(s)\right]}{\sqrt{1-\widehat{c}^2}}, -\sinh\left[\widehat{c}\widehat{K}_2(s)\right]\cosh\left(\sqrt{\widehat{c}^2-1}\widehat{K}_2(s)\right) \\ & +\tfrac{\widehat{c}\cosh\left[\widehat{c}\widehat{K}_2(s)\right]\sinh\left[\sqrt{\widehat{c}^2-1}\widehat{K}_2(s)\right]}{\sqrt{\widehat{c}^2-1}}, \tfrac{\cosh\left[\widehat{c}\widehat{K}_2(s)\right]}{\sqrt{\widehat{c}^2-1}}\Big)\end{aligned} \tag{5.25}$$

olur. $\widehat{t} = \frac{d\widehat{\gamma}(s)}{d\widehat{s}}$ eşitliği göz önüne alınır ve (5.25) eşitliğinin her iki tarafının $\widehat{s}$ ya göre integrali alınırsa (5.22) eşitliği elde edilir.

(c) Eğer $\kappa < |\tau|$ ise (5.13) eşitliği elde edilir. Diğer taraftan, (3.3) eşitliğinden

$$\widehat{t} = \cosh\left[\int \widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s}\right]\widehat{n}_0 - \sinh\left[\int \widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s}\right]\widehat{b}_0$$

ve (5.13) göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned}\widehat{t} \;=\; & \Big(\cosh\left[\int \widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s}\right]\cosh\left(\sqrt{1+\widehat{c}^2}\int \widehat{\kappa}_0(s)d\widehat{s}\right) + \tfrac{\widehat{c}\sin\left[\int \widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s}\right]\sinh\left(\sqrt{1+\widehat{c}^2}\int \widehat{\kappa}_0(s)d\widehat{s}\right)}{\sqrt{1+\widehat{c}^2}}, \\ & \cosh\left[\int \widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s}\right]\sinh\left(\sqrt{1+\widehat{c}^2}\int \widehat{\kappa}_0(s)d\widehat{s}\right) - \tfrac{\widehat{c}\sinh\left[\int \widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s}\right]\cosh\left(\sqrt{1+\widehat{c}^2}\int \widehat{\kappa}_0(s)d\widehat{s}\right)}{\sqrt{1+\widehat{c}^2}}, \\ & \tfrac{-\sinh\left[\int \widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s}\right]}{\sqrt{1+\widehat{c}^2}}\Big)\end{aligned}$$

bulunur. $\widehat{K}_1(s) = \displaystyle\int \widehat{\kappa}_0 d\widehat{s} = \int \sqrt{\widehat{\kappa}^2 - \widehat{\tau}^2}d\widehat{s}$ ve $\widehat{c}\widehat{K}_1(s) = \int \widehat{\tau}_0(s)d\widehat{s}$ eşitlikleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\widehat{t} \ = \ & \Bigg(\cosh\left[\widehat{c}\widehat{K}_1(s)\right]\cosh\left(\sqrt{1+\widehat{c}^2}\widehat{K}_1(s)\right) + \frac{\widehat{c}\sin\left[\widehat{c}\widehat{K}_1(s)\right]\sinh\left(\sqrt{1+\widehat{c}^2}\widehat{K}_1(s)\right)}{\sqrt{1+\widehat{c}^2}}, \\ & \cosh\left[\widehat{c}\widehat{K}_1(s)\right]\sinh\left(\sqrt{1+\widehat{c}^2}\widehat{K}_1(s)\right) - \frac{\widehat{c}\sinh\left[\widehat{c}\widehat{K}_1(s)\right]\cosh\left(\sqrt{1+\widehat{c}^2}\widehat{K}_1(s)\right)}{\sqrt{1+\widehat{c}^2}}, \\ & \frac{-\sinh\left[\widehat{c}\widehat{K}_1(s)\right]}{\sqrt{1+\widehat{c}^2}}\Bigg)\end{aligned} \tag{5.26}$$

olur. $\widehat{t} = \frac{d\widehat{\gamma}(s)}{d\widehat{s}}$ eşitliği göz önüne alınır ve (5.26) eşitliğinin her iki tarafının $\widehat{s}$ ya göre integrali alınırsa (5.23) eşitliği elde edilir.

Teorem 4.11 de $\mathbb{D}_1^3$ de bağlantılı eğriye göre genel helisler karakterize edilmişti. Benzer şekilde $\mathbb{D}_1^3$ de slant helislerin karakterizasyonu aşağıdaki şekilde verilir:

Teorem 5.5. $\mathbb{D}_1^3$ de bir null olmayan slant helis bazı düzlemsel eğrilerin ikinci asli donör eğrisidir.

$\mathbb{D}_1^3$ de bir $\widehat{\gamma}$ Frenet eğrisinin ikinci asli doğrultu eğrisi $\mathbb{D}^2$ de bir çember veya $\mathbb{D}_1^2$ de bir hiperbol ise $\widehat{\gamma}$ Frenet eğrisi, sırasıyla dairesel slant helis veya hiperbolik slant helis olarak adlandırılır. Bu eğriler basit eğriler olarak adlandırılır.

Not 5.6. $\mathbb{D}_1^3$ de basit slant helis ifadesi diğer slant helislerden daha yalındır. Ayrıca, bu eğriler genel ifadelere sahiptir. Gerçekten $\widehat{K}_1(s)$, $\widehat{K}_2(s)$, $\widehat{K}_3(s)$ fonksiyonları lineer fonksiyonlardır ve böylece (5.6)-(5.8), (5.15)-(5.16) ve (5.21)-(5.23) eşitlikleri genel olarak integrallenebilirdir.

Şimdi $\mathbb{D}_1^3$ de kapalı basit slant helisler çalışılacak. (5.6)-(5.8), (5.15)-(5.16) ve (5.21)-(5.23) eşitlikleri ve Not 5.6 dan (5.6)-(5.8), (5.16) ve (5.21)-(5.23) eşitliklerini sağlayan kapalı basit slant helis yoktur. Fakat (5.15) eşitliğini sağlayan kapalı basit slant helis vardır.

Not 5.7. $\widehat{\gamma}$, (5.15) denklemini sağlayan bir spacelike dairesel slant helis olmak üzere $\widehat{\gamma}$ nın birinci asli doğrultu eğrisi $\widehat{\gamma}_0$ ve ikinci asli doğrultu eğrisi $\widehat{\gamma}_1$, sırasıyla $\mathbb{D}^2$ de $\frac{|\tau_0|}{\kappa_0} = |c| > 1$ eşitliği ile bir helis ve $\widehat{r}$ yarıçaplı bir çemberdir. $\widehat{\gamma}_1$ in dual eğriliği olan $\widehat{\kappa}_1 = \frac{1}{\widehat{r}}$ olduğundan $\widehat{\kappa}_0 = \frac{1}{\widehat{r}\sqrt{\widehat{c}^2-1}}$ şeklinde verilir. Böylece (5.15) deki $\widehat{K}_3$ dual fonksiyonu $\widehat{K}_3(s) = \int\sqrt{\widehat{\kappa}^2+\widehat{\tau}^2}d\widehat{s} = \int\widehat{\kappa}_0 d\widehat{s} = \frac{\widehat{s}}{\widehat{r}\sqrt{\widehat{c}^2-1}}$ ile verilir. Böylece basit bir integrasyon ile $\widehat{\gamma}$ kapalıdır ancak ve ancak $\frac{c}{\sqrt{c^2-1}}$ ifadesi rasyoneldir. Benzer şekilde, diğer basit slant helislerin kapalı olmadığı görülür.

Örnek 5.8. (5.15) deki spacelike dairesel slant helis,

$$\widehat{\gamma}(s) = \gamma(s) + \xi\gamma^*(s) \tag{5.27}$$

dir. Burada

$$\begin{aligned}
\gamma(s) &= -r\Big(\tfrac{1}{c}\cos\left[\tfrac{cs}{r\sqrt{c^2-1}}\right], \\
&\quad (2c^2-1)\cos\left[\tfrac{cs}{r\sqrt{c^2-1}}\right]\cos\left[\tfrac{s}{r}\right] + 2c\sqrt{c^2-1}\sin\left[\tfrac{cs}{r\sqrt{c^2-1}}\right]\sin\left[\tfrac{s}{r}\right], \\
&\quad (2c^2-1)\cos\left[\tfrac{cs}{r\sqrt{c^2-1}}\right]\sin\left[\tfrac{s}{r}\right] - 2c\sqrt{c^2-1}\sin\left[\tfrac{cs}{r\sqrt{c^2-1}}\right]\cos\left[\tfrac{s}{r}\right]\Big)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\gamma^*(s) &= \Big(\tfrac{rc^*-r^*c}{c^2}\cos\left[\tfrac{cs}{r\sqrt{c^2-1}}\right] + \tfrac{cr^*-c^*r-c^3r^*}{rc(c^2-1)^{\frac{3}{2}}}s\sin\left[\tfrac{cs}{r\sqrt{c^2-1}}\right], \\
&\quad (csr^*(1-c^2) + c^*sr(1-2c^2))\sin\left[\tfrac{cs}{r\sqrt{c^2-1}}\right]\cos\left[\tfrac{s}{r}\right] \\
&\quad + \left(\tfrac{r^*s}{r} + \tfrac{2cc^*s}{c^2-1}\right)\cos\left[\tfrac{cs}{r\sqrt{c^2-1}}\right]\sin\left[\tfrac{s}{r}\right] \\
&\quad + (r^* - 2r^*c^2 - 4cc^*r)\cos\left[\tfrac{cs}{r\sqrt{c^2-1}}\right]\cos\left[\tfrac{s}{r}\right] \\
&\quad -2c\left(\tfrac{cc^*r+c^2r^*-r^*}{\sqrt{c^2-1}}\right)\sin\left[\tfrac{cs}{r\sqrt{c^2-1}}\right]\sin\left[\tfrac{s}{r}\right], \\
&\quad (csr^*(1-c^2) + c^*sr(1-2c^2))\sin\left[\tfrac{cs}{r\sqrt{c^2-1}}\right]\sin\left[\tfrac{s}{r}\right] \\
&\quad - \left(\tfrac{r^*s}{r} + \tfrac{2cc^*s}{c^2-1}\right)\cos\left[\tfrac{cs}{r\sqrt{c^2-1}}\right]\cos\left[\tfrac{s}{r}\right] \\
&\quad + (r^* - 2r^*c^2 - 4cc^*r)\cos\left[\tfrac{cs}{r\sqrt{c^2-1}}\right]\sin\left[\tfrac{s}{r}\right] \\
&\quad +2c\left(\tfrac{cc^*r+c^2r^*-r^*}{\sqrt{c^2-1}}\right)\sin\left[\tfrac{cs}{r\sqrt{c^2-1}}\right]\cos\left[\tfrac{s}{r}\right]\Big)
\end{aligned}$$

şeklindedir. $c = \frac{3}{2\sqrt{2}}$ olmak üzere $\widehat{c} = c + \xi c^*$ ve $\widehat{r} = (1,0)$ alınırsa $\frac{c}{\sqrt{c^2-1}} = 3$ kapalı olma şartı sağlanır ve timelike dual asli normale sahip spacelike dairesel slant helisin bir örneği

$$\begin{aligned}
\widehat{\gamma}_1(s) &= -\left(\tfrac{2\sqrt{2}\cos[3s]}{3}, \tfrac{5\cos[3s]\cos[s]+3\sin[3s]\sin[s]}{4}, \tfrac{5\cos[3s]\sin[s]-3\sin[3s]\cos[s]}{4}\right) \\
&\quad +\xi c^*\Big(\tfrac{8\cos[3s]}{9} - \tfrac{64s\sin[3s]}{3}, \tfrac{-5s\sin[3s]\cos[s]}{4} + 12\sqrt{2}s\cos[3s]\sin[s] \\
&\quad -3\sqrt{2}\cos[3s]\cos[s] - \tfrac{9\sqrt{2}\sin[3s]\sin[s]}{2}, \tfrac{-5s\sin[3s]\sin[s]}{4} - 12\sqrt{2}s\cos[3s]\cos[s] \\
&\quad -3\sqrt{2}\cos[3s]\sin[s] + \tfrac{9\sqrt{2}\sin[3s]\cos[s]}{2}\Big)
\end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir.

$c = 2$ olmak üzere $\widehat{c} = c + \xi c^*$ ve $\widehat{r} = (1,0)$ alınırsa $\frac{c}{\sqrt{c^2-1}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ kapalı olma şartı sağlanmaz ve timelike dual asli normale sahip kapalı olmayan spacelike dairesel slant helisin bir örneği,

$$
\begin{aligned}
\widehat{\gamma}_2(s) \;=\; & -\left(\frac{\cos\left[\frac{2s}{\sqrt{3}}\right]}{2},\, 7\cos[s]\cos\left[\frac{2s}{\sqrt{3}}\right] + 4\sqrt{3}\sin\left[\frac{2s}{\sqrt{3}}\right]\sin[s],\right. \\
& \left. 7\cos\left[\frac{2s}{\sqrt{3}}\right]\sin[s] - 4\sqrt{3}\sin\left[\frac{2s}{\sqrt{3}}\right]\cos[s]\right) + \xi c^{*}\left(\frac{\cos\left[\frac{2s}{\sqrt{3}}\right]}{4} - s\frac{\sin\left[\frac{2s}{\sqrt{3}}\right]}{6\sqrt{3}},\right. \\
& -7s\sin\left[\frac{2s}{\sqrt{3}}\right]\cos[s] + \frac{4s}{3}\cos\left[\frac{2s}{\sqrt{3}}\right]\sin[s] - 8\cos\left[\frac{2s}{\sqrt{3}}\right]\cos[s] \\
& -\frac{8}{\sqrt{3}}\sin\left[\frac{2s}{\sqrt{3}}\right]\sin[s],\; -7s\sin\left[\frac{2s}{\sqrt{3}}\right]\sin[s] - \frac{4s}{3}\cos\left[\frac{2s}{\sqrt{3}}\right]\cos[s] \\
& \left. -8\cos\left[\frac{2s}{\sqrt{3}}\right]\sin[s] + \frac{8}{\sqrt{3}}\sin\left[\frac{2s}{\sqrt{3}}\right]\cos[s]\right)
\end{aligned}
$$

şeklinde ifade edilir.

Teorem 5.9. $\mathbb{D}_1^3$ de $\widehat{\gamma}$, kapalı basit slant helis rasyonel $\frac{c}{\sqrt{c^2-1}}$ şartını sağlayan $\widehat{c} = c + \xi c^*$ slant helis sabiti ve (5.27) denklemi ile verilen timelike dual asli normale sahip spacelike dairesel slant helistir.

6.DUAL LORENTZ UZAYINDA ASLİ DOĞRULTU REKTİFİYEN EĞRİLER

Bu bölümde, $\mathbb{D}_1^3$ dual Lorentz uzayında konum vektörü asli donör eğrisinin rektifiyen düzleminde bulunan asli doğrultu rektifiyen eğriler incelendi. $\mathbb{D}_1^3$ de asli doğrultu rektifiyen eğrinin asli donör eğrisinin causal karekterine göre $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski 3−uzayda spacelike veya timelike regle yüzeye karşılık geldiği gösterildi.

Teorem 6.1. $\widehat{\gamma}_0$, $\mathbb{D}_1^3$ dual Lorentz uzayında pseudo-küresel Frenet eğri ve $\widehat{\gamma}$, $\widehat{\gamma}_0$ ın asli donör eğrisi olsun. O zaman, $\widehat{\gamma}_0$ asli doğrultu rektifiyen eğridir.

İspat. $\widehat{\gamma}_0$, $\mathbb{D}_1^3$ dual Lorentz uzayında pseudo-küresel Frenet eğri ve $\widehat{\gamma}$, $\widehat{\gamma}_0$ ın asli donör eğrisi olsun. $\widehat{\gamma}_0$ ın konum vektörü $\widehat{\gamma}$ nın Frenet çatısının bileşenleri yardımıyla

$$\widehat{\gamma}_0(s) = \widehat{\lambda}(s)\widehat{t} + \widehat{\mu}(s)\widehat{n} + \widehat{\beta}(s)\widehat{b} \tag{6.1}$$

şeklinde yazılır. Burada $\widehat{\lambda}$, $\widehat{\mu}$ ve $\widehat{\beta}$ dual fonksiyonlardır. $\frac{d\widehat{\gamma}_0}{d\widehat{s}} = \widehat{t}_0$ olduğundan

$$\widehat{t}_0 = \widehat{n} = \left(\frac{d\widehat{\lambda}}{d\widehat{s}} - \varepsilon_0\varepsilon_1\widehat{\kappa}\widehat{\mu}\right)\widehat{t} + \left(\widehat{\kappa}\widehat{\lambda} + \frac{d\widehat{\mu}}{d\widehat{s}} - \varepsilon_1\varepsilon_2\widehat{\tau}\widehat{\beta}\right)\widehat{n} + \left(\widehat{\mu}\widehat{\tau} + \frac{d\widehat{\beta}}{d\widehat{s}}\right)\widehat{b}$$

dir. Böylece,

$$\begin{cases} \frac{d\widehat{\lambda}}{d\widehat{s}} - \varepsilon_0\varepsilon_1\widehat{\kappa}\widehat{\mu} = 0 \\ \widehat{\kappa}\widehat{\lambda} + \frac{d\widehat{\mu}}{d\widehat{s}} - \varepsilon_1\varepsilon_2\widehat{\tau}\widehat{\beta} = 1 \\ \widehat{\mu}\widehat{\tau} + \frac{d\widehat{\beta}}{d\widehat{s}} = 0 \end{cases} \tag{6.2}$$

denklem sistemi oluşur. Diğer taraftan, $\widehat{\gamma}_0$ pseudo-küresel Frenet eğri olduğundan (6.1) eşitliğinden

$$\varepsilon_0\widehat{\lambda}(s)^2 + \varepsilon_1\widehat{\mu}(s)^2 + \varepsilon_2\widehat{\beta}(s)^2 = \mp\widehat{r}^2$$

elde edilir. Elde edilen bu eşitliğin $\widehat{s}$ ya göre türevi alınırsa

$$\varepsilon_0\widehat{\lambda}\frac{d\widehat{\lambda}}{d\widehat{s}} + \varepsilon_1\widehat{\mu}\frac{d\widehat{\mu}}{d\widehat{s}} + \varepsilon_2\widehat{\beta}\frac{d\widehat{\beta}}{d\widehat{s}} = 0 \tag{6.3}$$

olur. (6.2) ve (6.3) eşitliklerinden $\widehat{\mu}(s) = 0$ olduğu görülür. Böylece (6.1) eşitliği $\widehat{\gamma}_0(s) = \widehat{\lambda}(s)\widehat{t} + \widehat{\beta}(s)\widehat{b}$ şeklinde yazılır. O halde, $\widehat{\gamma}_0(s)$ konum vektörü $\widehat{\gamma}_0$ ın $\widehat{\gamma}$ asli donör eğrisinin rektifiyen düzleminde bulunur. Dolayısıyla $\widehat{\gamma}_0$, asli doğrultu rektifiyen eğridir.

Teorem 6.2. $\widehat{\gamma}$, $\widehat{\kappa}$ dual eğrilik ve $\widehat{\tau}$ dual burulma fonksiyonlarına sahip $\mathbb{D}_1^3$ de Frenet eğri ve $\widehat{\gamma}_0$ pseudo-küresel Frenet eğrisi $\widehat{\gamma}$ nın asli doğrultu eğrisi olsun. O zaman $\widehat{\gamma}_0(s)$ konum vektörü $S_p\left\{\widehat{n}_0, \widehat{b}_0\right\}$ normal düzleminde bulunur ve $\widehat{c}_1$, $\widehat{c}_2$ dual sabitler olmak üzere,

$$\widehat{\gamma}_0(s) = -\frac{\widetilde{\varepsilon}_1(\varepsilon_1\widehat{c}_1\widehat{\kappa}+\varepsilon_2\widehat{c}_2\widehat{\tau})}{(\widetilde{\varepsilon}_1\left(\varepsilon_0\widehat{\kappa}^2+\varepsilon_2\widehat{\tau}^2\right))^{3/2}}\widehat{n}_0 + \frac{\widehat{c}_1\widehat{\tau}+\varepsilon_0\varepsilon_1\widehat{c}_2\widehat{\kappa}}{(\widetilde{\varepsilon}_1\left(\varepsilon_0\widehat{\kappa}^2+\varepsilon_2\widehat{\tau}^2\right))^{3/2}}\widehat{b}_0 \tag{6.4}$$

dir.

İspat. $\widehat{\gamma}$, $\widehat{\kappa}$ dual eğrilik ve $\widehat{\tau}$ dual burulma fonksiyonlarına sahip $\mathbb{D}_1^3$ de Frenet eğri ve $\widehat{\gamma}_0$ pseudo-küresel Frenet eğri $\widehat{\gamma}$ nın asli doğrultu eğrisi olsun. Teorem 6.1 den $\widehat{\gamma}_0$, $\widehat{\gamma}$ nın rektifiyen düzleminde bulunduğundan $\widehat{\lambda}$ ve $\widehat{\beta}$ dual fonksiyonlar olmak üzere

$$\widehat{\gamma}_0(s) = \widehat{\lambda}\widehat{t} + \widehat{\beta}\widehat{b} \tag{6.5}$$

şeklinde yazılabilir. (6.5) eşitliğinin $\widehat{s}$ ya göre türevi alınır ve $\frac{d\widehat{\gamma}_0}{d\widehat{s}} = \widehat{t}_0 = \widehat{n}$ eşitliği göz önüne alınırsa

$$\widehat{n} = \frac{d\widehat{\lambda}}{d\widehat{s}}\widehat{t} + (\widehat{\lambda}\widehat{\kappa} - \varepsilon_1\varepsilon_2\widehat{\beta}\widehat{\tau})\widehat{n} + \frac{d\widehat{\beta}}{d\widehat{s}}\widehat{b}$$

elde edilir. Elde edilen bu eşitlikten $\widehat{\lambda} = \widehat{c}_1$ ve $\widehat{\beta} = \widehat{c}_2$ dual sabitler olduğu görülür. Diğer taraftan (6.5) eşitliğinde $\widehat{t}$ ve $\widehat{b}$ yerine (3.3) eşitliğindeki değerleri yerlerine yazılırsa (6.4) elde edilir.

Sonuç 6.3. $\widehat{\gamma}$, $\mathbb{D}_1^3$ dual Lorentz uzayında spacelike dual asli normale sahip spacelike bir Frenet eğri olsun. $\widehat{\gamma}$ nın asli doğrultu rektifiyen eğrisi $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski 3−uzayında timelike regle yüzeye karşılık gelir.

Sonuç 6.4. $\widehat{\gamma}$, $\mathbb{D}_1^3$ dual Lorentz uzayında timelike dual asli normale sahip spacelike Frenet eğri olsun. $\widehat{\gamma}$ nın asli doğrultu rektifiyen eğrisi $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski 3−uzayında spacelike regle yüzeye karşılık gelir.

Sonuç 6.5. $\widehat{\gamma}$, $\mathbb{D}_1^3$ dual Lorentz uzayında timelike Frenet eğrisi olsun. $\widehat{\gamma}$ nın asli doğrultu rektifiyen eğrisi $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski 3−uzayında timelike regle yüzeye karşılık gelir.

7. KAYNAKLAR

Akutagawa K, Nishikawa S. ,1990. The Gauss Map and Spacelike Surfaces with Prescribed Mean Curvature in Minkowski 3−Space. Tohoku Math., 42, 67 − 82.

Ali A. T., Lopez R., 2011. Slant Helices in Minkowski Space $\mathbb{E}_1^3$. Journal of the Korean Mathematical Society, 48, 159 − 167.

Ayyıldız N., Çöken A.C., Yücesan A., 2007. A Characterization of Dual Lorentzian Spherical Curves in the Dual Lorentzian Space. Taiwanese Journal of Matematics, 4, 999 − 1018.

Barros M., 1997. General Helices and a Theorem of Lancret, Proceedings of the American Mathematical Society, 125, 1503 − 1509.

Barros M., Ferrandez A., Lucas P., Merono M.A., 2001. General Helices in the Three Dimensional Lorentzian Space Forms. Rocky Mountain, Journal of Mathematics., 31, 373 − 388.

Choi J. H., Kim Y. H., 2012. Associated Curves of a Frenet Curve and Their Applications. Applied Mathematics and Computation, 218, 9116 − 9124.

Choi J. H., Kim Y. H., Ali, A. T., 2012. Some Associated Curves of Frenet Non-Lightlike Curves in $\mathbb{E}_1^3$. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 394, 712 − 723.

Chouaib, N., Goriely, A., Maddocks, J. H., 2006. Helices. Proceedings of the National Academy of Sciences, 103, 9398 − 9403.

Cook, T.A., 1914. The Curves of Life. Dover Publications.

Falcon S., Plaza A., 2008. On the 3-Dimensional k-Fibonacci Spirals. Chaos Solitons Fractals, 38, 993 − 1003.

Guggenheimer W., 1963. Differential Geometry. McGraw-Hill, New York.

Hacısalihoğlu H., 1983. Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi, Ankara.

İlarslan K., Emilija N., Petroviç M., 2003. Some Characterizations of Rectifying. Curves in the Minkowski 3−Space. Novi Sad Journal of Mathematics, 2, 23 − 32.

İlarslan K., Boyacıoğlu Ö., 2007. Position Vectors of a Spacelike W-Curve in Minkowski Space $\mathbb{E}_1^3$. Bulletin of the Korean Mathematical Society, 44, 429 − 438.

İlarslan K., Boyacıoğlu Ö., 2008. Position Vectors of a Timelike and a Null Helix in Minkowski 3-Space. Chaos Solitons Fractals, 38, 1383 − 1389.

Jain A., Wang G., Vasquez K.M., 2008. DNA Triple Helices: Biological Consequences and Therapeutic Potential. Biochemie, 90, 1117 − 1130.

Lopez, R., 2014. Differantial Geometry of Geometry Curves and Surfaces in Lorentz-Minkowski Space. International Electronic Journal of Geometry, 7(1), 44 − 107.

Lee, J.W., Choi J.H., Jin D.H., 2014. The Explicit Determination of Dual Plane Curves and Dual Helices in Terms of Its Dual Curvature and Dual Torsion. Demonstratio Mathematica, 1, 157 − 169

Naschie M.S. El, 2001. Notes on Superstings and the Infinite Sums of Fibonacci and Lucas Numbers. Chaos Solitons Fractals, 12, 1937 − 1940.

Naschie M.S., El, 2005. Einstein's Dream and Fractal Geometry. Chaos Solitons Fractals, 24, 1 − 5.

O'Neill, B., 1983. Semi-Riemann Geometry with Application to Relativity. .Academik Press, 468, New York.

Özbey E., Oral M. 2009. A Study On Rectifying Curves in the Dual Lorentzian Space. Bull of Korean Mathematical Society, 5, 967 − 978

Uğurlu H.H., Çalışkan A. 1996. The Study Maping for Directed Space-Like and Time-like Lines in Minkowski 3-Space $\mathbb{R}^3_1$. Mathematical & Computational Applications, 2, 142 − 148.

Veldkamp G.R., 1976. On the Use of Dual Numbers, Vectors and Matrices, in Instantaneous, Spatial Kinematics. Mechanism and Machine Theory, 11, 141 − 158.

Walrave J., 1995. Curves and Surfaces in Minkowski Space. Ph. D. Thesis, K.U. Leuven, Faculty of Science, Leuven.

Watson J.D., Crick F.H., 1953. Molecular Structures of Acids. Nature, 171, 737 − 738.

Yang X., 2003. High Accuracy Approximation of Helices by Quintic Curve.

Computer Aided Geometric Design, 20, 303 – 317.

Yin Y., Zhang T., Yang F., Qiu X., 2008. Geometric Conditions for Fractal Super Carbon Nanotubes with Strict Self-Similarities. Chaos Solitons Fractals, 37, 1257 – 1266.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Bahar ABALI
Doğum Yeri ve Yılı	: ISPARTA, 1987
Medeni Hali	: Evli
Yabancı Dili	: İngilizce
E-posta	: baharabali@hotmail.com

Eğitim Durumu

Lise	: Kütahya Ali Güral Lisesi, 2005
Lisans	: Cumhuriyet Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Bölümü, 2012
Lisans	: Anadolu Üniversitesi, İşletme Fakültesi, İşletme Bölümü, 2013

Mesleki Deneyim

Milli Eğitim Bakanlığı(Öğretmen)	2013 – ...(halen)